

常微分方程.

第一章:

1. $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. 其中导数最高阶数为方程阶.

线性性: 若 F 对 $y, y', \dots, y^{(n)}$ 全体而言是一次的. 则称它为线性的.

例如: $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^3$ 为线性. 但. $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$ 非线性.

2. 设 n 阶微分方程解为 $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$.

包含 n 个独立常数 $C_1, \dots, C_n$. 则称为通解. $C_1, \dots, C_n$ 独立 $\Leftrightarrow \frac{D[\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n)}]}{D[C_1, \dots, C_n]} =$

经典例题: $y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$.

$$y' = C_1 e^x (\cos x - \sin x) + C_2 e^x (\sin x + \cos x)$$

$$\neq 0 \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial C_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial C_2} & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial C_n} \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial C_1} & \frac{\partial \varphi'}{\partial C_2} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial C_1} & \dots & \dots & \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial C_n} \end{vmatrix}$$

$$y' = C_1 e^x (-2\sin x) + C_2 e^x (2\cos x)$$

$$\frac{D[y, y']}{D[C_1, C_2]} = \begin{vmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ e^x (\cos x - \sin x) & e^x (\sin x + \cos x) \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0.$$

第二章 初等积分法.

1 **恰当.** $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$ $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$ 恰当方程.

则 $\exists \Phi(x, y)$, st. $\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = P(x, y)$ $\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = Q(x, y).$

2. 变量分离

3. **一阶线性方程** $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ (2.28).

① 当 $Q(x) = 0 \Rightarrow$ 可变量分离: $\frac{dy}{y} = -P(x)dx \Rightarrow \ln y = -\int P(x)dx + C_1$ $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ $C = e^{C_1}$

② 当 $Q(x) \neq 0 \Rightarrow$

a. 积分因子法: $dy + p(x)ydx = q(x)dx.$ $e^{\int p(x)dx}$ 乘两侧.

$$e^{\int p(x)dx} dy + p(x)e^{\int p(x)dx} y dx = e^{\int p(x)dx} q(x) dx.$$

则有: $d(e^{\int p(x)dx} y) = d(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx).$

$$\Rightarrow e^{\int p(x)dx} y = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C$$

则有: $y = e^{-\int p(x)dx} (C + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx).$

b. 常数变易法: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x).$ 设解: $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$

代回 $y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x).$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)dx} p(x) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C$$

则 $y = e^{-\int p(x)dx} (C + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx)$

定积分形式解决初值问题. $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x).$ $y(x_0) = y_0.$

则有: $y = y_0 e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} + \int_{x_0}^x q(s)e^{-\int_s^x p(t)dt} ds$

其中 $p(x), q(x)$ 在区间 I 连续.

4. 初等变换法解方程.

① **齐次** $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$. $P(x,y), Q(x,y)$ 齐次. $P(tx,ty) = t^m P(x,y)$. $Q(tx,ty) = t^n Q(x,y)$.
标准代换 $y = ux$, 则 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$

类似地: $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{mx+ny+l}\right)$.

(i) 若 $\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix} \neq 0$ 有 $\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ m\alpha + n\beta + l = 0 \end{cases}$.

$\Rightarrow$ 平移变换: $\begin{cases} \xi = x - \alpha \\ \eta = y - \beta \end{cases} \Rightarrow \frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta}{m\xi + n\eta}\right)$.

(ii) 若 $\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix} = 0$
则有 $\lambda = \frac{m}{a} = \frac{n}{b}$. 把 $v = ax + by$. 则 $\frac{dv}{dx} = a + bf\left(\frac{v+c}{\lambda v+l}\right)$.

★ ② 伯努利方程,

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$

左右乘 $(1-n)y^{-n}$. 并令 $Z = y^{1-n}$. 则有 $\frac{dZ}{dx} + (1-n)p(x)Z = (1-n)q(x)$ [一阶线性微分方程]

③ 里卡蒂方程.

形如: $\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + r(x).$

已知里卡蒂方程特解 $y = \varphi_1(x)$. 利用积分法求其通解.

令 $y = u + \varphi_1(x)$. 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{d\varphi_1(x)}{dx}.$

则有: $\frac{du}{dx} + \frac{d\varphi_1(x)}{dx} = P(x)[u^2 + 2u\varphi_1(x) + \varphi_1^2(x)] + Q(x)[u + \varphi_1(x)] + r(x).$

而且我们有 $\frac{d\varphi_1(x)}{dx} = P(x)\varphi_1^2(x) + Q(x)\varphi_1(x) + r(x).$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = [2P(x)\varphi_1(x) + Q(x)]u + P(x)u^2.$ [伯努利方程, $n=2$ 情形.]

5. 普遍. $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$

积分因子法: 若有个只依赖 x 积分因子, 则 $\frac{1}{Q(x,y)} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = G(x)$ 仅与 x 有关.

同理, 只依赖 y 积分因子, 则 $\frac{1}{P(x,y)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = H(y)$ 仅与 y 有关.

则它们(方程)积分因子 $\mu(x) = e^{\int G(x)dx}$ $\mu(y) = e^{\int H(y)dy}$.

典例: $(3x^3 + y)dx + (2x^2y - x)dy = 0$.

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = -\frac{2}{x} \quad \text{则 } \mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}$$

则左右同乘 $\mu(x)$: $3xdx + 2ydy + \frac{ydx - xdy}{x^2} = 0$.

积分: $\Rightarrow \frac{3}{2}x^2 + y^2 - \frac{y}{x} = 0$. 同时补上由于积分因子 $\frac{1}{x^2}$ 遗漏的 $x=0$.



6. 等角轨线族与正交轨线族。

定义: 若 $\phi(x, y, C) = 0$ 为以 C 为参曲线族, 求曲线族 $\psi(x, y, K) = 0$

使 ψ 中任一曲线与 ϕ 中任一曲线夹角 α . 特别 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 为正交轨线族

求解方式:

$$\text{由 } \phi(x, y, C) = 0, \quad \phi'_x(x, y, C)dx + \phi'_y(x, y, C)dy = 0 \quad \text{消 } C$$

$$\text{则有: } \frac{dy}{dx} = H(x, y)$$

其中: $H(x,y) = -\frac{\phi'_x(x,y,C)}{\phi'_y(x,y,C)}$

$C = C(x,y)$ 为由 $\phi(x,y,C)$ 确定.

下把 $H(x,y)$ 在 (x,y) 斜率计 y'_1 相交它于 α 角轨线斜率 y' .

① $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$

$$\tan \alpha = \frac{y' - y'_1}{1 + y'_1 y'}$$

代 $y'_1 = H(x,y)$.

故. $\frac{y' - \tan \alpha}{y' \tan \alpha + 1} = H(x,y)$.

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{H(x,y) + \tan \alpha}{1 - H(x,y) \tan \alpha}$$

② $\alpha = \frac{\pi}{2}$. $y' = -\frac{1}{y'_1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{H(x,y)}$ 最后积分即可.

典例: 求 $y = kx^2$ 正交轨线族:

由. $y_1 = kx_1^2$. $dy_1 - 2kx_1 dx_1 = 0$ 消 $k \Rightarrow 2y_1 dx_1 - x_1 dy_1 = 0 \Rightarrow \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{2y_1}{x_1}$

则与之正交轨线 $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}} = -\frac{x_1}{2y_1}$ 即: $x dx + 2y dy = 0 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = C$ (所求).

第三章. 存在和唯一性定理

3.1 存在与唯一性定理 李氏条件: $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$. ^{等价.} $\Leftrightarrow$ 对 y 有连续偏导数

定理 3.1. 初值问题 (E): $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. $y(x_0) = y_0$.

且 $f(x, y)$ 在矩形区域 $R: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$ 内连续. 并且对 y 满足李氏条件.

则 E 在区间 $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ 上有且仅有一个解. $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$. $M > \max_{(x, y) \in R} |f(x, y)|$.

皮卡序列: $y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt, (x \in I)$. $y_0(x) = y_0$

不等式: $|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \frac{M(L|x - x_0|)^{n+1}}{(n+1)!}$

下介绍弱于李氏条件的 Osgood 条件.

$f(x, y)$ 在 G 内连续. 且 $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq F(|y_1 - y_2|)$.

其中 $F(r)$ 为 $r > 0$ 连续函数. 且 $\int_0^r \frac{dr}{F(r)} = +\infty$. 则 $f(x)$ 在 G 中对 y 满足 Osgood 条件.

若 $f(x,y)$ 在区域内对 y 满足 Osgood, 则 $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ 在 G 内每一点解唯一。

3.3. 推论: $f(x,y)$ 在区域 G 内连续, 且对 y 满足局部李氏条件. ($\forall q \in G, \exists$ 矩形 Q 以 q 为中心, $Q \subset G$,

使 $f(x,y)$ 在 Q 内满足李氏条件, L 与 Q 有关), 则 $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ 经过 G 内任一点 P_0 存在曲线 Γ , 且 Γ 在 G 内延伸至边界。

定理 3.5. $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$. 其中 $f(x,y)$ 在条形区域 $S: \alpha < x < \beta, -\infty < y < +\infty$ 内连续, 且 $|f(x,y)| \leq A(x)|y| + B(x)$ 其中 $A(x) \geq 0, B(x) \geq 0$ 在 $\alpha < x < \beta$ 上连续. 则方程 $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ 的每一个解都以 $\alpha < x < \beta$ 为最大存在区间

题目基于以上文字。来源于课本。

1. 求方程 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2. \\ y(0) = 0. \end{cases}$ 的第3次近似解

构造皮卡序列. $\varphi_0(x) = y_0 = y(0) = 0, \quad \varphi_n(x) = \int_0^x (t^2 + \varphi_{n-1}^2(t)) dt$

则有: $\varphi_1(x) = \int_0^x (t^2 + \varphi_0^2(t)) dt = \frac{1}{3}x^3.$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x (t^2 + \varphi_1^2(t)) dt = \int_0^x t^2 + \cancel{\frac{1}{9}t^6} dt = \frac{1}{3}x^3 + \cancel{\frac{1}{12}x^4}$$

本题有问题.

$$\varphi_3(x) = \int_0^x (t^2 + \varphi_2^2(t)) dt = \int_0^x (t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{12}x^4) dt = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{60}x^5$$

2. $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$, $R: |x| \leq 1, |y| \leq 1$ 上. 确定经过 $(0,0)$ 的解存在区间, 并求在此区间中与真正解误差不超过 0.05 的近似解表达式

① 解存在区间: $a=1, b=1, M \geq \max |f(x,y)| = 2$. 则 $h = \min\{a, \frac{b}{M}\} = \frac{1}{2}$ $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

由微分中值定理: $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = |f_y| |y_1 - y_2| = |2\xi| |y_1 - y_2| \leq 2|y_1 - y_2|$.

则 $L=2$, $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{M(L|x-x_0|)^{n+1}}{L(n+1)!} = \frac{2(2 \cdot \frac{1}{2})^{n+1}}{2(n+1)!} \leq 0.05 \Rightarrow n=3$

习题 3-1.

1. 讨论下列方程满足 $y(0)=0$ 的解的唯一性问题

$$(1) \frac{dy}{dx} = |y|^\alpha \quad (\alpha > 0).$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \begin{cases} 0, & y=0 \\ y \ln |y|, & y \neq 0. \end{cases}$$

$$(1), f(x,y) = |y|^\alpha, \quad |f(x,y) - f(x,0)| = |y|^\alpha - 0 \leq |y|^\alpha.$$

$$\text{设 } F(r) = |r|^\alpha > 0, \quad \int_0^r \frac{dr}{F(r)} = \frac{1}{1-\alpha} |r|^{1-\alpha}.$$

① 当 $\alpha \in (0,1)$, $0 < 1-\alpha < 1$, 不满足 Osgood, 解不唯一

$$\text{② 当 } \alpha = 1, \quad \int_0^r \frac{dr}{F(r)} = \ln r \Big|_0^r = +\infty \quad \text{解唯一}$$

$$\text{③ } \alpha > 1, \quad \int_0^r \frac{dr}{F(r)} = +\infty \quad \text{解唯一.}$$

$$(2), \quad \lim_{y \rightarrow 0} y \ln |y| = 0, \text{ 则有 } \frac{dy}{dx} \text{ 在 } (-\infty, +\infty) \text{ 连续}$$

$$F(r) = 1 + \ln |r|, \quad \int_0^r \frac{dr}{F(r)} = \infty, \quad \text{解唯一.}$$

2. 求初值问题. $\frac{dy}{dx} = x + y + 1$. $y(0) = 0$. 并用此极限求解.

$$\varphi_0(x) = y_0 = y(0) = 0.$$

$$\text{由 } \varphi_n(x) = \int_0^x (t + \varphi_{n-1}(t) + 1) dt.$$

$$\text{则 } \varphi_1(x) = \int_0^x (t + 0 + 1) dt = \frac{1}{2}x^2 + x.$$

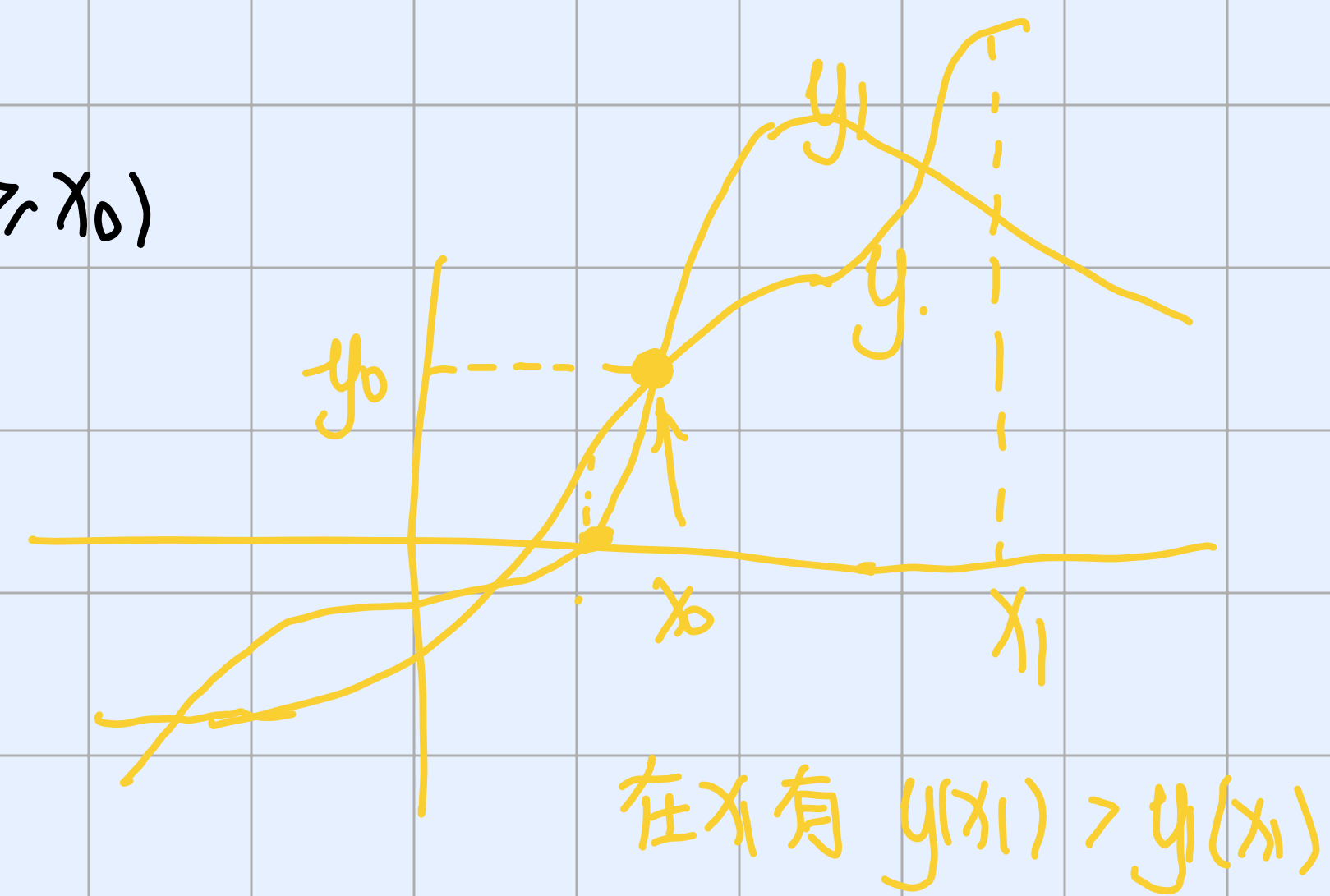
$$\varphi_2(x) = \int_0^x (t + \varphi_1(t) + 1) dt = \int_0^x (t + \frac{1}{2}t^2 + t + 1) dt = \frac{1}{6}x^3 + x^2 + x.$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^x (t + \varphi_2(t) + 1) dt = \int_0^x (\frac{1}{6}t^3 + t^2 + 2t + 1) dt = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x.$$

$$\vdots$$
$$\varphi_n(x) = \int_0^x (t + \varphi_{n-1}(t) + 1) dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{2x^n}{n!} + \dots + \frac{2 \cdot x^2}{2!} + x$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 2e^x - x - 2.$

3. $f(x, y) \in C(x, y)$. 且对 $y \downarrow$. 则 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. 在右侧 ($x \geq x_0$) 的解唯一



利用反证: 设方程有 2 解 $y(x)$ $y_1(x)$. 且 $y(x_0) = y_1(x_0) = y_0$.
 $\exists x_1 > x_0$. 使 $y(x_1) > y_1(x_1)$. 令 $\mu = \sup \{x \mid x_0 < x < x_1, y(x) = y_1(x)\}$
 $\forall x \in (\mu, x_1)$. $y(x) > y_1(x)$. 令 $r(x) = y(x) - y_1(x)$. 有 $r(\mu) = 0$.

$$\frac{dr}{dx} = \frac{dy(x)}{dx} - \frac{dy_1(x)}{dx} = f(x, y(x)) - f(x, y_1(x))$$

由 $f(x, y) \downarrow$. 则由 $y(x) > y_1(x) \rightarrow f(x, y(x)) < f(x, y_1(x)) \quad \frac{dr}{dx} < 0$

则 $\forall x \in (\mu, x_1)$. 有 $r(x) < r(\mu) = 0$. 则 $y(x) < y_1(x)$. 矛盾于 $y(x) > y_1(x)$. 则有唯一解

3.3 习题

1. 证明: $\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x) \quad x \in I.$

的每一个解最大存在区间为 I , 假设 $a(x)$ $b(x)$ 在区间 I 上连续

观看定理 3.5, 取 $a(x) = A(x)$ $b(x) = B(x)$ 得证.

2. 讨论方程解存在区间.

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = y(y-1).$$

由 $f(x, y)$ 在 xOy 平面连续可微, 任意 (x_0, y_0) , 方程满足初值条件 $y(x_0) = y_0$ 的解存在且唯一.

通解: $y = \frac{1}{1 - Ce^x}$ $y=0$ 与 $y=1$ 为方程在 $(-\infty, +\infty)$ 的解.

则以 $y=0$, $y=1$ 把 xOy 分三部分.

① $R_1 = \{(x, y) \mid |x| < +\infty, y \in (0, 1)\}$ 由延伸定理, 方程解可左右延至边界, 解区间 $(-\infty, +\infty)$.

在 R_1 内 $f(x,y) < 0$, 则解 $y = \phi(x)$. [满足 $y_0 = y(x_0)$]. $\downarrow$ $x \rightarrow -\infty$, 以 $y=1$ 为渐近. $x \rightarrow +\infty$, 以 $y=0$ 渐近.

② $R_2 = \{(x,y) \mid |x| < +\infty, y > 1\}$.

$\forall C$, 由通解: 解最大存在区间 $(-\infty, -\ln C)$. $f(x,y) > 0$. $\uparrow$ $x \rightarrow -\infty$, 以 $y=1$ 为渐近线.

③ $R_3 = \{(x,y) \mid |x| < +\infty, y < 0\}$.

$(\ln C, +\infty)$. $f(x,y) > 0$. $\uparrow$, $x \rightarrow +\infty$, 以 $y=0$ 渐近线.

(2). $\frac{dy}{dx} = y \sin(xy)$.

由 $f(x,y) = y \sin(xy)$ 在 xOy 连续, 且 $|f(x,y)| \leq |y|$. 有 $A(x)=1$, $B(x)=0$.

则每个解以 $(-\infty, +\infty)$ 为最大存在区间.

5 ★ (助教意思重要).

(E): $\frac{dy}{dx} = (x^2 - y^2) f(x,y)$ $y(x_0) = y_0$.

其中 $f(x,y)$ 在平面满足连续且 $y f(x,y) > 0$, $y \neq 0$.

则 $\forall (x_0, y_0)$. 当 $x_0 < 0$ 以 $|y_0|$ 适当小, (E) 的解可延拓到 $-\infty < x < +\infty$.

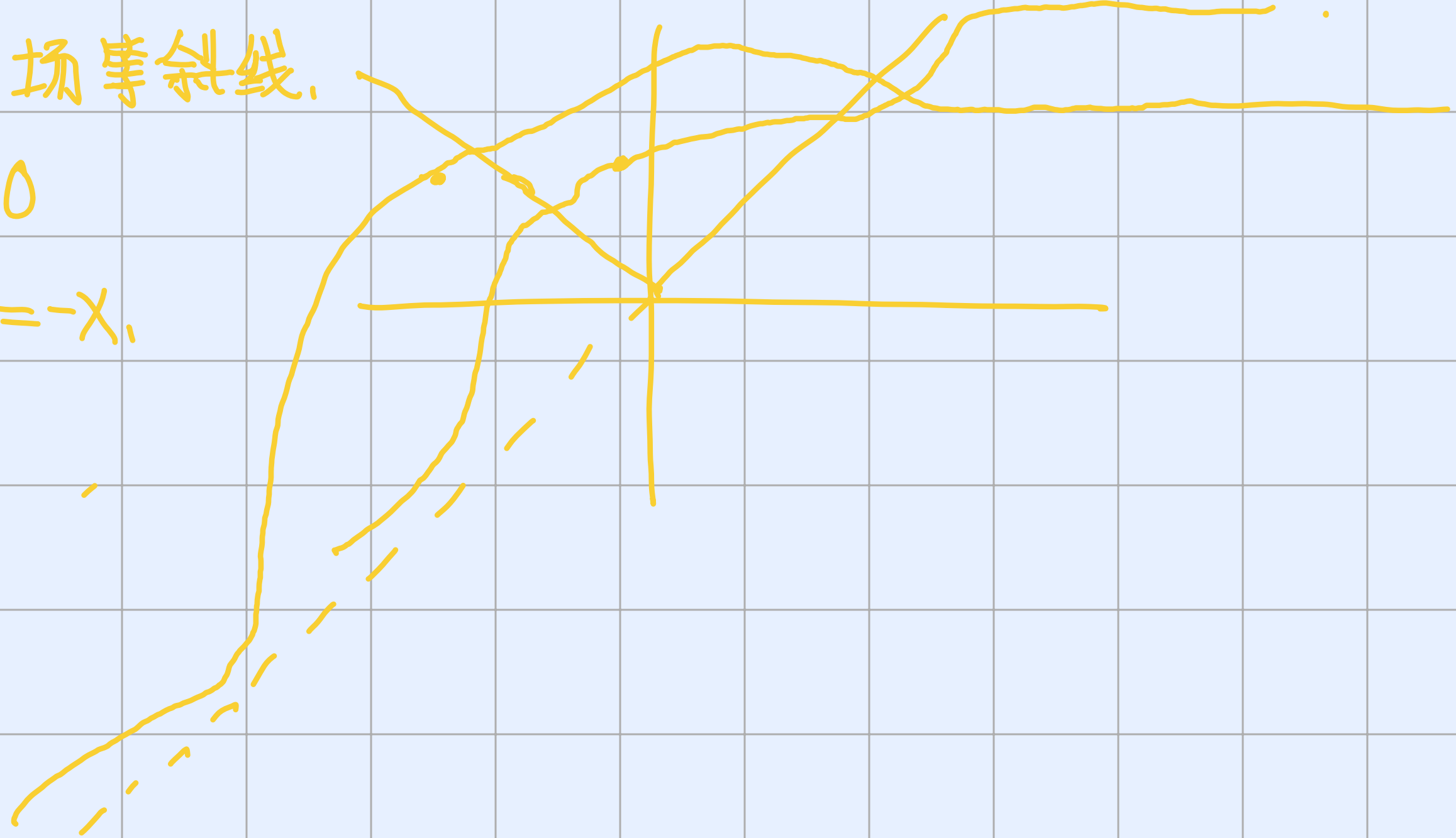
证明: 由解的延伸定理, 局部李普希兹条件, $\forall$ 一个包括 $P(x_0, y_0)$ 的区域 G , (E) 的解存在且唯一并且可延伸到 G 边界, 且 $y=x$ 与 $y=-x$ 为线素场等斜线.

假设 $P(x_0, y_0)$ 在 x 轴上方, 则 $y > 0 \Rightarrow f(x, y) > 0$

在向左延伸时, 应向左且下降, 又不可超出 $y=-x$,

所以会一直向左延伸直至 $-\infty$.

右侧同理.



第四章:

1. 一阶隐式方程 $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$.

① 微分法: 设 $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$ 可解出 $y = f(x, p)$. $p = \frac{dy}{dx}$ ★

则会有: $p = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x, p)}{dx} = f'_x(x, p) + f'_p(x, p) \frac{dp}{dx}$ 或 $[f'_x(x, p) - p]dx + f'_p(x, p)dp = 0$

下再解其通解 $p = u(x, C)$ 或 $x = v(p, C)$

$$\text{方程: } \begin{cases} p = u(x, C). \\ y = f(x, u(x, C)) \end{cases} \quad \begin{cases} x = v(p, C). \\ y = f(v(p, C), p). \end{cases}$$

典例: $x(y')^2 - 2yy' + 9x = 0$ 符合 $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$. $p = \frac{dy}{dx}$

则有: $y = \frac{9x}{2p} + \frac{xp}{2}$ ($p = \frac{dy}{dx}$) 符合 $y = f(x, p)$

则有: $[\frac{9}{2p} + \frac{p}{2} - p]dx + [\frac{9x}{-2p^2} + \frac{x}{2}]dp = 0$.

符合 $[f'_x(x, p) - p]dx + f'_p(x, p)dp = 0$.

$$\Rightarrow \left[\frac{9}{2p} - \frac{p}{2} \right] + \left[\frac{9}{-2p^2} + \frac{1}{2} \right] \frac{dp}{dx} x = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{2p^2} \right) \left[-p + \frac{dp}{dx} \cdot x \right] = 0 \Rightarrow p = \pm 3. \quad \frac{dp}{dx} = \frac{p}{x}$$

而: $\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x}$ 为齐次, 令 $p = ux$ 由 $\frac{dp}{dx} = u + x \frac{du}{dx} = u \Rightarrow \frac{du}{dx} = 0 \Rightarrow du = 0 \Rightarrow u = C.$

有: $p = Cx$. 以及 $p = 3$ 或 $p = -3$.

则本方程 1 通解, 2 特解:

$$y = \frac{9x}{2 \cdot Cx} + \frac{x \cdot Cx}{2} = \frac{9}{2C} + \frac{C}{2}x^2$$

$$y = 3x$$

$$y = -3x.$$

② 参数法 (较不重要). 方程 $F(x, p) = 0, \quad p = \frac{dy}{dx}.$

let $y = g(t), \quad p = h(t).$

$$dx = \frac{1}{p} dy = \frac{g'(t)}{h(t)} dt. \quad \text{积分: } x = \int \frac{g'(t)}{h(t)} dt + C \quad y = g(t). \quad \text{[找到参数表示较难].}$$

典型例题: $y^2 + 1(\frac{dy}{dx})^2 = 1$.

参数表示: $y = g(t) = \cos t$. $p = h(t) = \sin t$.

则 $dx = \frac{1}{p} dy = \frac{-\sin t}{\sin t} dt = -dt \Rightarrow x = -t + C$.

则通解: $x = -t + C$. $y = \cos t$.

2. 奇解与包络.

1. 奇解. 有方程 $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$. $\Gamma: y = \varphi(x), x \in J$

对 $\forall Q \in \Gamma$, 在 Q 任何邻域内方程有一个不同于 Γ 的解在 Q 与 Γ 相切, 则 Γ 为方程奇解.

① 奇解满足方程:

设 $F(x, y, p)$ 对 $(x, y, p) \in G$ 连续, 而且对 y 与 p 有连续 F_y, F_p 若 $y = \varphi(x), x \in J$ 为方程奇解:

则奇解满足一个方程 (p -判别式).

注. 联立消 p 后, $\psi(x)$ 不一定为方程解, 也不一定为奇解.

$F(x, y, p) = 0$. $F'_p(x, y, p) = 0$. $p = \frac{dy}{dx}$ 两式联立消 $p \Rightarrow y = \psi(x)$ 为方程解.

② 判定奇解: $\psi(x)$ 为方程解.

$F_y(x, \psi(x), \psi'(x)) \neq 0$, $F_{pp}(x, \psi(x), \psi'(x)) \neq 0$, $F_p(x, \psi(x), \psi'(x)) = 0$. 对 $x \in J$ 成立. 则 $y = \psi(x)$ 为奇解.

典型例题: $[(y-1)\frac{dy}{dx}]^2 = ye^{xy}$ 符合 $F(x, y, p)$

它的 p 判别: $F(x, y, p) = 0$, $F_p(x, y, p) = 0$

即: $(y-1)^2 p^2 - ye^{xy} = 0$, $2p(y-1)^2 = 0$

消 $p \Rightarrow y=0$ 则 $y=0$ 为方程解.

又由 $F_y(x, 0, 0) = -1 \neq 0$, $F_{pp}(x, 0, 0) = 2 \neq 0$, $F_p(x, 0, 0) = 0$. 则 $y=0$ 为方程奇解.

2. 包络

① 包络 C 判别式

设 Γ 为曲线族 $K(C): V(x, y, C) = 0$. 一支包络则它满足 C 判别式.

$$V(x, y, C) = 0. \quad V_C'(x, y, C) = 0.$$

② 求包络. 由 C -判别式确定一只曲线 $A: x = \varphi(C), y = \psi(C).$

满足: $(\varphi'(C), \psi'(C)) \neq (0, 0).$ $(V_x'(\varphi(C), \psi(C), C), V_y'(\varphi(C), \psi(C), C)) \neq (0, 0).$

则 A 为包络. (够呛考②).

第六章: 线性方程组.

$$6.1. \frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) y_j + f_i(x). \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \quad A(x) = (a_{ij}(x))_{n \times n} \quad \frac{d\vec{y}}{dx} = A(x) \vec{y} + \vec{f}(x)$$

1. 解齐次型. $(\frac{dy}{dx} = A(x)y).$ 即 $\vec{f}(x) = \vec{0}.$ 同高数, 只不过换成向量.

把几个线性无关解排好构成基本解组: (只考到 $n=2, n=3$ 根少)

$\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x)$ 为 $\frac{dy}{dx} = A(x)y$ 的解:

例: $\vec{y}_1(x) = \begin{bmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \end{bmatrix}$ $\vec{y}_2(x) = \begin{bmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \end{bmatrix}$ $W(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) \end{vmatrix}$ 为 Wronsky (朗斯基)

它满足 $W(x) = W(x_0) e^{\int_{x_0}^x \text{tr}[A(x)] dx}$. 其中 $A(x)$ 指 $\frac{dy}{dx} = A(x)y$.

则 $\vec{y}_1(x)$ $\vec{y}_2(x)$ 线性无关 $\Leftrightarrow W(x) \neq 0$.

典型例题: 验证: $\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 x & \frac{1}{2} \sin 2x - 1 \\ \frac{1}{2} \sin 2x + 1 & \sin^2 x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, 通解: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^x \cos x \\ e^x \sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ (*).

它满足 $\frac{dy}{dx} = A(x)y$ 即证 $\vec{y}_1(x) = \begin{bmatrix} e^x \cos x \\ e^x \sin x \end{bmatrix}$ $\vec{y}_2(x) = \begin{bmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{bmatrix}$ 其朗斯基行列式 $\neq 0$

而验证 $W(x) \neq 0$. 即证任意 x , $W(x) \neq 0$. 取 $x=0$ 即可, 证 $W(0) \neq 0$.

$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \vec{y}_1(x)$ $\vec{y}_2(x)$ 线性无关. 本题得证. 该其次方程通解即 (*).
[线性无关解的组合]

设 $\phi(x)_{n \times n}$ 为把齐次方程 $\frac{dy}{dx} = A(x)y$ 的线性无关解排列成的矩阵, 则它为齐次方程的基解矩阵.

记 $\vec{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$, 有 $\psi(x) = \phi(x)\vec{C}$ 也为齐次方程组的基解矩阵.

解齐次方程 $\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y}$ ① 找到解 $\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x)$

② 利用朗斯基验证线性无关.

③ 通解 $\vec{y} = C_1 \vec{y}_1(x) + C_2 \vec{y}_2(x)$.

2. 解非齐次型. $\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y} + \vec{f}(x)$

由, $A(x)$ 为其齐次方程的基解矩阵, $\varphi^*(x)$ 为非齐次方程特解

则非齐次方程通解: $\varphi(x) = A(x)\vec{C} + \varphi^*(x)$ 而 $\vec{\varphi}^*(x) = \phi(x) \int_{x_0}^x \phi^{-1}(s)f(s)ds$

最终: 非齐次型方程的解: $y = \phi(x)\phi^{-1}(x_0)y_0 + \phi(x) \int_{x_0}^x \phi^{-1}(s)f(s)ds$

典型例题. 求解初值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 x & \frac{1}{2} \sin 2x - 1 \\ \frac{1}{2} \sin 2x + 1 & \sin^2 x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

符合: $d\vec{y} = A(x)\vec{y} + \vec{f}(x)$

初值条件 $\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

①. 找出它齐次方程基解矩阵.

由上一例题已找到 $\phi(x) = \begin{bmatrix} \overset{\vec{y}_1(x)}{\downarrow} e^x \cos x & -\sin x \\ e^x \sin x & \overset{\vec{y}_2(x)}{\downarrow} \cos x \end{bmatrix}$

② $\phi^{-1}(x) = \begin{bmatrix} e^{-x} \cos x & e^{-x} \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$ $\phi^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

③ 由公式. $\vec{y} = \phi(x) \phi^{-1}(x_0) y_0 + \phi(x) \int_{x_0}^x \phi^{-1}(s) f(s) ds.$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \phi(x) \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^x \begin{bmatrix} e^{-s} \cos s & e^{-s} \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos s \\ -\sin s \end{bmatrix} ds \right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x \cos x & -\sin x \\ e^x \sin x & \cos x \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^x \begin{bmatrix} e^{-s} \cos^2 s - e^{-s} \sin^2 s \\ -2 \sin s \cos s \end{bmatrix} ds \right]$$

$$= \begin{bmatrix} (e^x - 1) \cos x - \sin x \\ (e^x - 1) \sin x + \cos x \end{bmatrix}$$

6.2. 常系数线性方程组. 形如: $\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y} + \vec{f}(x)$ A 为常数阵 而 $f(x)$ 为连续函数

主要讨论齐次方程: $\frac{dy}{dx} = Ay$. 即 $f(x) = 0$.

① 仅有单特征根. 基解矩阵 $\phi(\lambda) = (e^{\lambda_1 x} r_1, e^{\lambda_2 x} r_2 \dots e^{\lambda_n x} r_n)$

其中 r_i 为特征值 λ_i 对应特征向量.

典型例题:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \begin{bmatrix} 5 & -28 & -18 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -16 & -10 \end{bmatrix} \vec{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = Ay$$

① $\det(A - \lambda E) = 3\lambda(1 - \lambda^2)$. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$.

② 特征向量: $r_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $r_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $r_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

③ 解: $y = C_1 e^{\lambda_1} r_1 + C_2 e^{\lambda_2} r_2 + C_3 e^{\lambda_3} r_3$.

② 有复根.

$$\frac{dy}{dx} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{y}.$$

$$\det[A - \lambda E] = \lambda^2 - 2\lambda + 2. \quad \text{特征根 } \lambda_1 = 1+i \quad \lambda_2 = 1-i.$$

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad r_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{解矩阵: } \phi(x) = [e^{\lambda_1 r_1}, e^{\lambda_2 r_2}] = \begin{bmatrix} e^{(1+i)x} & ie^{(1-i)x} \\ ie^{(1+i)x} & e^{(1-i)x} \end{bmatrix} = e^x \begin{bmatrix} e^{ix} & ie^{-ix} \\ ie^{ix} & e^{-ix} \end{bmatrix} e^x \begin{bmatrix} \cos x + i \sin x \\ i \cos x + \sin x \end{bmatrix}$$

$$\text{则通过变换得实解阵 } e^{xA} = \phi(x)\phi^{-1}(0) = e^x \begin{bmatrix} e^{ix} & ie^{-ix} \\ ie^{ix} & e^{-ix} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

$$= e^x \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$$

$$\text{解: } y = C_1 e^x \begin{bmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{bmatrix} + C_2 e^x \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix}$$

③ 有重特征根.

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y}$$

$$\lambda_1 (n_1 \text{重}) \quad \lambda_2 (n_2 \text{重}) \quad \cdots \quad \lambda_i (n_i \text{重}), \quad n_1 + n_2 + \cdots + n_i = n.$$

基解阵为

$$[e^{\lambda_1 x} p_1^{(1)}(x), e^{\lambda_1 x} p_2^{(1)}(x), \cdots, e^{\lambda_1 x} p_{n_1}^{(1)}(x), \cdots, e^{\lambda_i x} p_{n_i}^{(i)}(x)].$$

$$\text{其中 } p_j^{(i)}(x) = r_{j0}^{(i)} + \frac{x}{1!} r_{j1}^{(i)} + \cdots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} r_{jn_i-1}^{(i)}.$$

唯一难算的为 $p_j^{(i)}(x)$ 举个例子:

$$p_1^{(1)} = r_{10}^{(1)} + x r_{11}^{(1)} + \frac{x^2}{2!} r_{12}^{(1)} + \cdots \quad r_{10}^{(1)} \text{ 表示 } \lambda=1 \text{ 时的 } [A-E]^2 r=0 \text{ 的解.}$$

$$\text{但 } r_{11}^{(1)} = [A-E] r_{10}^{(1)}, \quad r_{12}^{(1)} = [A-E] r_{11}^{(1)} = 0, \quad r_{13}^{(1)} = 0 \quad \cdots$$

$$\text{则 } p_1^{(1)} = r_{10}^{(1)} + x r_{11}^{(1)}$$

同理算 $P_2^{(1)} = r_{20}^{(1)} + \lambda r_{21}^{(1)} + \dots$

$$r_{21}^{(1)} = [A - E] r_{20}^{(1)} \quad r_{22}^{(1)} = [A - E] r_{21}^{(1)} = 0.$$

$$\Rightarrow P_2^{(1)} = r_{20}^{(1)} + \lambda r_{21}^{(1)} + 0 \dots$$

典型例题: $\frac{dy}{dx} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix} \vec{y}$

$$\det[\lambda E - A] = -(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2.$$

单重根 $\lambda_1 = -2$. 二重根 $\lambda_2 = 1$.

对单重根 λ_1 特征向量 $\eta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

对二重根 λ_2 .

特征向量: $r_{10}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}$ $r_{20}^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 20 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -8 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \textcircled{1} & \textcircled{\frac{3}{10}} & \end{bmatrix}$$

特征值1.

$$\text{则 } r_{11}^{(1)} = [A - E] r_{10}^{(0)} = \begin{bmatrix} 15 \\ -30 \\ 100 \end{bmatrix} \quad r_{21}^{(1)} = [A - E] r_{20}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad r_{12}^{(1)} = [A - E] r_{11}^{(0)} = 0$$

$$r_{22}^{(1)} = 0.$$

$$\text{则 } \phi(x) = [e^{\lambda_1 x} \eta_1, e^{\lambda_2 x} [r_{10}^{(0)} + x r_{11}^{(1)}], e^{\lambda_2 x} [r_{20}^{(0)} + x r_{21}^{(1)}]]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & (11+15x)e^x & 3e^x \\ 0 & (-7-30x)e^x & -6e^x \\ e^{-2x} & 100xe^x & 20e^x \end{bmatrix}$$

6.2, 的难度极大, 主要思路都特征值, 判断重数, 复根(转为实), 最后组合得基解矩阵.

6.3. (高数). 高阶线性微分方程.

非齐次方程通解 = 齐次方程通解 + 非齐次方程特解.

① 解齐次方程. (特征方程法). 计算特征根: ① 每个单根: e^{rx}

② 每个 k 重根: $e^{r_2 x}$ $x e^{r_2 x}$ ---- $x^{k-1} e^{r_2 x}$.

③ 每对单复根 $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$. $e^{\alpha x} \cos \beta x$. $e^{\alpha x} \sin \beta x$.

④ 每对 k 重复根: $e^{\alpha x} \cos \beta x$, $e^{\alpha x} \sin \beta x$ ---- $x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$, $x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$.

典例: 回忆高数:

齐次方程: $y'' + 4y' + 4y = 0$.

① 特征方程: $r^2 + 4r + 4 = 0$ $(r+2)^2 = 0$ $r = -2$ (2重).

则 $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x} x$.

齐次方程: $y''' - y'' - 2y' = 0$.

方程 $\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda+1)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow$ 单根 $0, -1, 2$

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$$

齐次方程. $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 4y''' - 4y'' + 3y' - y = 0.$

特征方程. $r^5 - 3r^4 + 4r^3 - 4r^2 + 3r - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)^3 (r^2+1) = 0.$

$r=1$ 三重. $r_2 = +i, r_3 = -i.$

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x + C_4 e^{0x} \cos x + C_5 e^{0x} \sin x.$$

②. 非齐次: (待定系数). 找特解:

a. $y'' + py' + q = f(x)$ $f(x) = P(x)e^{\lambda x}$

b. $y'' + py' + q = f(x).$ $f(x) = [P_L(x) \cos \omega x + P_m(x) \sin \omega x] e^{\lambda x}.$

如何待定:

典型例题: $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}(x-5).$

齐次特征方程 $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda+1)^3 = 0.$ $\lambda = -1$ (3重).

则齐次通解: $y_{\text{齐}} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}.$

找非齐特 y^* 由 $\lambda = -1$ 与 e^{-x} 中的 -1 相同, 且 3 次.

设 $y^* = x^3(a x + b) e^{-x}.$

↓
相同数. (x-5) 决定.

下一次, 算出 $y^{*'} y^{*''} y^{*'''} 带入原方程 \Rightarrow a = -\frac{5}{6}, b = \frac{1}{24}$

$y^* = x^3(-\frac{5}{6}x + \frac{1}{24})e^{-x}.$

则非齐通 = 齐通 + 非齐特. $y = y_{\text{齐}} + y^* = (C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}) + (x^3(-\frac{5}{6}x + \frac{1}{24})e^{-x})$

第八章 定性理论与分支理论初步

8.3.1 初等奇点

先考察以 $(0,0)$ 为奇点的线性系统

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

若 $|A| \neq 0$, 则称 $(0,0)$ 为系统的初等奇点, 否则称它为高阶奇点

定理 8.5. 奇点类型判断

$$p = -\text{tr}A = -(a+d), \quad q = \det A = ad - bc.$$

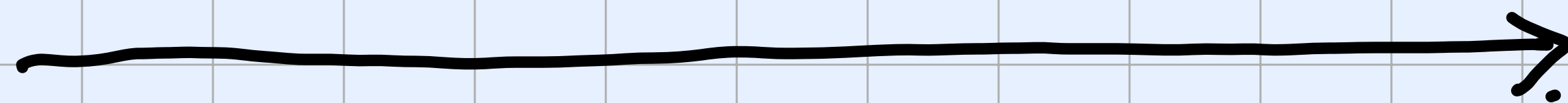
(1) 当 $q < 0$, $(0,0)$ 为鞍点

- (2). $q > 0, p^2 > 4q, (0,0)$ 称为两向结点
- (3). $q > 0, p^2 = 4q, (0,0)$ 为单向结点或星形结点
- (4). $q > 0, 0 < p^2 < 4q, (0,0)$ 为焦点
- (5). $q > 0, p = 0, (0,0)$ 为中心点

在 (2) ~ (4) 中 $p > 0$ 时奇点 $(0,0)$ 稳定, $p < 0$ 时则不稳定

下判断 稳定性.

1. 线性近似法.



$$\begin{bmatrix} -x_2 & -x_1^3 \\ x_1 & -x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{bmatrix}$$

$\pm i$

知乎
搜索
打开App
...

许多微积分的教材定义微分的时候是通过定义线性主要部分来做的。同样，这里我们在方程 $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ 中令 $f(t, x) = A(t)x + N(t, x)$ ，其中 $A(t)$ 为矩阵函数，对 $t \geq t_0$ 连续； $N(t, x)$ 在区域 $t \geq t_0, |x| \leq M$ 连续，对 x 满足Lipschitz条件，且满足 $N(t, 0) = 0 (t \geq t_0)$ ，以及 $\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{|N(t, x)|}{|x|} = 0$ 对 $t \geq t_0$ 一致成立。

我们推测，原来的方程的稳定性与其线性化方程 $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ 的稳定性之间是有联系的。只要「扰动」 $N(t, x)$ 足够小，就不会影响稳定性。这里我们暂时只考虑 $A(t) = A$ 为常数矩阵的情形。先来叙述关于线性化方程的定理，证明不太难。

定理 线性化方程 $\frac{dx}{dt} = Ax$ 的零解稳定性判定：

- (1) 零解是渐进稳定的，等价于矩阵 A 的所有特征值有负的实部；
- (2) 零解是稳定的，等价于矩阵 A 的所有特征值有非正的实部，且那些实部为零的特征值对应的Jordan块都是一阶的；
- (3) 除此之外零解都是不稳定的。

赞同 176
15 条评论
...

2. 李亚普诺夫方法.

构造 $V(x,y)$. 且 $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$

构造老师会给, 自己很难构造.

定理 8.4. 若 I 与 II 成立, 则零解渐近稳定.

I 与 II* 成立, 则零解稳定

I 与 III 成立, 则零解不稳定

条件 I: $V(0) = 0$, $V(\vec{x}) > 0$, 当 $\vec{x} \neq 0$

条件 II: $\frac{dV}{dt} < 0$, 当 $x \neq 0$

条件 II*: $\frac{dV}{dt} \leq 0$.

条件 III: $\frac{dV}{dt} > 0$, $x \neq 0$

