组合数学考试范围

1. 多重组合数 从多重集中选取子集.

例 0.1. 生产 n 种面包, 其中取 m 个面包放入一盒, 每盒有 $\binom{n+m-1}{m}$ 种组合.

例 0.2. $\sum_{i=1}^{n} x_i = r$ 有 $\binom{n+r-1}{r}$ 个非负整数解. 这相当于多重集 $\{\infty \cdot x_1, \cdots, \infty \cdot x_n\}$ 中选取 r 子集的方案数.

2. 特征方程求解递推关系 $h_n = a_1 h_{n-1} + \cdots + a_k h_{n-k}$ 给出特征方程 $x^k = a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k$, 给出根 $\{q_i\}_{i=1}^t$, 其重数分别为 $\{s_i\}_{i=1}^t$. 我们得到通解 $h_n = \sum_{i=1}^{t} P_i(n) q_i^n$, 其中 P_i 是待定多项式,$\deg P_i \le s_i - 1$.

例 0.3. $h_n = 4h_{n-1} - 3h_{n-2}$, 得到特征方程 $x^2 = 4x - 3, q_1 = 1, q_2 = 3, h_n = C_1 + C_2 3^n$.

$h_n = 4h_{n-1} - 4h_{n-2}$, 得到特征方程 $x^2 = 4x - 4, q_1 = 2, s_1 = 2, h_n = (C_1 n + C_2) 2^n$.

3. 普通型生成函数求解递推关系

例 0.4. $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n, n \ge 0$. 我们得到 $\{a_n\}_{n\ge0}$ 的普通型生成函数 $f(x)$ 的递推式 $\frac{f(x) - a_0 - a_1 x}{x^2} = \frac{f(x) - a_0}{x} + 2f(x)$, 解得 $f(x) = \frac{a_0 + (a_1 - a_0)x}{1 - x - 2x^2} = \frac{a_0 + a_1}{3}\frac{1}{1-2x} + \frac{2a_0 - a_1}{3}\frac{1}{1+x}$, 因此 $a_n = \frac{a_0 + a_1}{3} 2^n + \frac{2a_0 - a_1}{3}(-1)^n$.

4. 容斥定理 对 S 上的性质 $\{P_i\}_{i=1}^m$ 定义 $X_i = \{x \in S : x\text{满足}P_i\}$. 设 $X_I = \bigcap_{i\in I} X_i$, 我们有

$$\left|\bigcap_{i=1}^{m} X_i^c\right| = \sum_{I\subset[m]} (-1)^{|I|} |X_I| = |S| - \sum_i |X_i| + \sum_{i<j} |X_i \cap X_j| - \cdots + (-1)^m |X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_m|.$$

例 0.5. $\{1\cdot a, 2\cdot b, 3\cdot c\}$ 中的 5-组合数, 即选取 5-子集的方案数. 我们在 $S = \{\infty\cdot a, \infty\cdot b, \infty\cdot c\}$ 中考虑性质 P_1:5-子集中 a 的个数 ≥ 2;P_2:5-子集中 b 的个数 ≥ 3;P_3:5-子集中 c 的个数 ≥ 4. 即求

$$\begin{aligned}|X_1^c \cap X_2^c \cap X_3^c| &= |S| - (|X_1| + |X_2| + |X_3|) + (|X_1 \cap X_2| + |X_1 \cap X_3| + |X_2 \cap X_3|) - |X_1 \cap X_2 \cap X_3| \\ &= \binom{3+5-1}{5} - \binom{3+3-1}{3} - \binom{3+2-1}{2} - \binom{3+1-1}{1} + (1+0+0) - 0 = 3.\end{aligned}$$

5.Pólya 计数 对 $|A| = n, |C| = m$, G 是在 A 上的置换群, 对 $f, g \in C^A$ 考虑等价关系 $f \sim g \iff f = g \circ \pi^{-1}, \pi \in G$, $\mathcal{F} = C^A/\sim$.Pólya 计数原理即 $|\mathcal{F}| = P_G(m, \cdots, m)$. 其中对于群 G, 其轮换对称式 $P_G(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\prod_{i=1}^{n} x_i^{l_i(\sigma)}$.

例 0.6. 给四个格子

1	2
4	3

上色, 视上色方案旋转后不变, 我们有 $A = [4], C = \{\text{R,B}\}, G = \langle(1234)\rangle$ $= \{(1234), (13)(24), (1432)\}$, 因此 $P_G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1^4 + x_2^2 + 2x_4}{4}$,$P_G(2,2,2,2) = 6$.

6. 相异代表系 (SDR) 和 Hall 定理 一族集合 $\{S_i\}_{i=1}^m$ 的相异代表系 (SDR) 为 $(x_1, \cdots, x_m) \in \prod_{i=1}^{m} S_i$, 其中 $x_i \in S_i, x_i \ne x_j$. 对指标集 $J \subset [m]$ 定义 $S(J) = \bigcup_{j\in J} S_j$.

Hall 定理: 有限集族存在相异代表系 $\iff$ 对任意 $J \subset [m]$ 有 $|S(J)| \ge |J|$.

7. 组合设计 t-(v, k, λ) 设计 $(X, \mathcal{B}), \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. 其中 $v = |X|, b = |\mathcal{B}|, |B| \equiv k$, 任意 t-子集均恰在 λ 个区块中.

组合设计的关联矩阵 $\boldsymbol{N}_{v\times b} = (N_{x,B}), N_{x,B} = \begin{cases} 1 & x \in B \\ 0 & x \notin B \end{cases} = [x \in B]$.

$t = 2$ 时称该设计为平衡不完全区组设计 (BIBD),$b = v$ 时为对称设计,$\lambda = 1$ 的对称 BIBD 被称为射影平面,2-$(n^2+n+1, n+1, 1)$ 设计被称为 n 阶射影平面,2-$(n^2, n, 1)$ 设计被称为 n 阶仿射平面. 当 n 是素数幂时,n 阶射影平面均存在. 2-(3,2,1) 设计为三角形,2-(7,3,1) 设计被称为 Fano 平面.