1 第三章

3.15 (1)X 为 $n=2k$ 元集合, 其因子 (factor) 是将 X 分为 k 个大小为 2 的集合的分划, 证明 X 的因子有 $(2k-1)!!$ 个.
(2) 证明: X 上的置换 σ 可以互换某些 k-子集及其补集 $\iff$ σ 的所有轮换长度为偶数. 证明满足条件的置换有 $((2k-1)!!)^2$ 个.
(3) 证明从 S_n 中随机取出的置换互换某个 $n/2$-子集及其补集的概率为 $O(1/\sqrt{n})$.

证明. (1) 在 X 中按顺序取出 k 个大小为 2 的集合, 有 $\binom{n}{2,\cdots,2}=\frac{n!}{2!\cdots 2!}=2^{-k}n!$ 种方式, 从而无序取, 即分划 X 为 k 个大小为 2 的集合的方式有 $\frac{1}{k!}\binom{n}{2,\cdots,2}=\frac{n!}{2^k k!}=\frac{(2k)!}{(2k)!!}=(2k-1)!!$ 种.

(2) $\Longrightarrow$: 由于 A,B 中元素在置换下互换, 从而在偶数次置换作用下才能返回自身, 从而置换中所有轮换长度为偶数. $\Longleftarrow$: 在置换的每个轮换中将元素交替的染为红色和蓝色, 则红蓝元素各有 k 个, 且在置换作用下互换.

证明: 记满足条件的置换集合为 $A\subset S_n$. 再以 X 为顶点集, 以 $\sigma\in A$ 构造无向图:$\forall x\in X$ 连接 $\{x,x\sigma\},\{x,x\sigma^{-1}\}$, 得到的无向图全集为 B. 再记所有 X 中因子的有序对构成的集合为 C. 显然 $|C|=(2k-1)!!^2$.

先考虑映射 $f:A\to B,\forall\sigma\in A,f(\sigma)$ 即为所构造的无向图. 注意到 σ 的 $c(\sigma)$ 个轮换对应到无向图 $G=f(\sigma)$ 的 $c(G)$ 个圈分支, 而轮换取逆对应于圈的定向取反, 因此 $\left|f^{-1}(G)\right|=2^{c(G)},|A|=\sum\limits_{G\in B}\left|f^{-1}(G)\right|=\sum\limits_{G\in B}2^{c(G)}$. 再考虑映射 $g:C\to B$, 对于因子对 $(f_1,f_2)\in C,G=g(f_1,f_2)$ 是以 X 为顶点集,$f_1\cup f_2$ 作为边集构造的无向图. 可以认为 (f_1,f_2) 相当于将 $E(G)\cap f_1$ 染红,$E(G)\cap f_2$ 染蓝, 即对应于 $E(G)$ 的一个边 2-染色. 而 G 为 $c(G)$ 个偶长度圈的并, 因此其有 $2^{c(G)}$ 种边 2-染色方式, 因此 $\left|g^{-1}(G)\right|=2^{c(G)}$. 综上所述,

$$|A|=\sum_{G\in B}\left|f^{-1}(G)\right|=\sum_{G\in B}2^{c(G)}=\sum_{G\in B}\left|g^{-1}(G)\right|=|C|=(2k-1)!!^2$$

(3) 由计算立得:

$$\frac{(2k-1)!!^2}{(2k)!}=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}=\prod_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{2i}=\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{2i}\right)\le\prod_{i=1}^{k}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2i}}=\mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2i}}=\mathrm{e}^{-\frac{\log k}{2}+O(1)}=O(k^{-1/2})$$

□

2 第四章

4.1 (1) 有 n 个座位排成一排, 证明在这些座位中选择一个子集, 使得任意两个所选座位不相邻的方式数为 F_{n+1}.
(2) 如果这 n 个座位围成一个圆, 证明选择方式的数量为 $F_n+F_{n-2}(n\ge 2)$.

证明. (1) 记方式数为 a_n. 对于 $n\ge 3$ 时的选取方式, 若第 n 个座位被选取, 则第 $n-1$ 个座位不能被选取, 从而前 $n-2$ 个座位有 a_{n-2} 种选取方式; 若第 n 个座位不被选取, 则前 $n-1$ 个座位有 a_{n-1} 种选取方式, 即 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\ge 3)$. 再注意到 $a_1=2=F_2,a_2=3=F_3$, 从而可知 $a_n=F_{n+1}$.

(2) 记方式数为 b_n. 对于 $n\ge 3$ 时的选取方式, 若第 n 个座位被选取, 则第 $n-1$ 个和第 1 个座位不能被选取, 从而第 2 到第 $n-2$ 个座位有 $a_{n-3}=F_{n-2}$ 种选取方式; 若第 n 个座位不被选取, 则前 $n-1$ 个座位有 $a_{n-1}=F_n$ 种选取方式, 从而 $b_n=F_n+F_{n-2}$. 另外 $b_2=3=F_2+F_0$, 从而得证. □

4.10 $f(n)$ 满足

$$f(1)=1,\qquad f(n+1)=\begin{cases}2f(n), & n\text{ odd},\\ 2f(n)+1, & n\text{ even}.\end{cases}$$

证明 $f(n+2)=f(n+1)+2f(n)+1$, 由此给出 $f(n)$ 的通项公式.

证明. 若 n 为奇数, 则 $f(n+2)=2f(n+1)+1=f(n+1)+2f(n)+1$; 若 n 为偶数, 则 $f(n+2)=2f(n+1)=f(n+1)+2f(n)+1$. 由于递推公式的齐次形式 $f(n+2)-f(n+1)-2f(n)=0$ 的特征方程为 $x^2-x-2=0$, 解为

2 与 -1, 且注意到递推公式有特解 $f(n)\equiv -\frac{1}{2}$, 从而通解为 $f(n)=c_1 2^n+c_2(-1)^n-\frac{1}{2}$. 带入 $f(1)=1,f(2)=2$ 可得 $f(n)=\frac{2^{n+1}}{3}-\frac{(-1)^n}{6}-\frac{1}{2}=\frac{2^{n+2}+(-1)^{n+1}-3}{6}$. □

4.13 称 $[n]$ 上的置换 $\pi\in S_n$ 为连通的, 若 $\forall 1<k<n,\pi([k])\neq[k]$. 令 c_n 为连通置换的数量, 证明 $\sum_{i=1}^{n} c_i(n-i)!=n!$. 并由此证明:$F(t)=\sum_{n\geq 1} n!t^n, G(t)=\sum_{n\geq 1} c_n t^n$ 是序列 $(n!)$ 和 (c_n) 的生成函数, 则有 $1-G(t)=(1+F(t))^{-1}$.

证明. 对于 $k\in[n]$,S_k 中的连通置换可通过添加 $\{k+1,\cdots,n\}$ 上的置换得到 S_n 中的置换, 而有 $(n-k)!$ 种添加方式, 从而 S_n 中有 $c_k(n-k)!$ 个置换满足 $\min\{k\in[n]|\pi([k])=[k]\}$. 而按照 k 对 S_n 作划分, 可得 $n!=\sum_{k=1}^{n} c_k(n-k)!$. 故有

$$G(t)(1+F(t))=\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} n!t^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} c_k(n-k)!=F(t)$$

从而 $G(1+F)=F, 1-G=1-\frac{F}{1+F}=(1+F)^{-1}$. □

3 第五章

5.1 一项民意调查显示, 选民对 A,B,C 三位总统候选人满意的比例分别为 65%,57%,58%. 此外, 28% 的人接受 A 或 B, 30% 的人接受 A 或 C, 27% 的人接受 B 或 C, 12% 的人对三者均满意. 你的结论是什么?

证明. 记 A,B,C 为支持候选人 A,B,C 的选民集合,X 是全集, 由容斥定理知

$$|(A\cup B\cup C)^c|=|X|-(|A|+|B|+|C|)+(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)$$

从而对所有候选人都不满意的选民比例为 $1-(0.65+0.57+0.58)+(0.28+0.30+0.27)=0.05=5\%$. □

5.3 证明 $S(n,1)=1,S(n,2)=2^{n-1}-1,S(n,n-1)=\binom{n}{2}$, 并给出 $S(n,n-2)$ 的表达式.

证明. $S(n,k)$ 的定义为分 $[n]$ 为 k 部分的分划数.$k=1$ 时显然仅有一种分划,$S(n,1)=1$;$k=2$ 时, 注意到从 $[n]$ 中取非空非全集的子集及其补集形成一种分划, 而取该子集与其补集形成的分划相同, 从而 $2S(n,2)=2^n-2, S(n,2)=2^{n-1}-1$. $k=n-1$ 时每种分划对应于在 $[n]$ 中取 2 个元素作为 1 个子集, 其他 $n-2$ 个元素分别作为 $n-2$ 个子集, 从而 $S(n,n-1)=\binom{n}{2}$.

若 $k=n-2$, 即有两种可能:(1) 将 $[n]$ 分为 1 个大小为 3 的子集与 $n-3$ 个大小为 1 的子集, 即有 $\binom{n}{3}$ 种分划;(2) 分 $[n]$ 为 2 个大小为 2 的子集与 $n-4$ 个大小为 1 的子集, 从而有 $\frac{1}{2!}\binom{n}{2,2}=\frac{n!}{2^3(n-4)!}=3\binom{n}{4}$ 种分划. 综上知 $S(n,n-2)=\binom{n}{3}+3\binom{n}{4}$. □

5.4 用递推关系证明 $|s(n,1)|=(n-1)!$, 并由此证明 n 元集上的循环置换个数为 $(n-1)!$.

证明. $|s(n,k)|$ 有递推关系 $|s(n,k)|=(n-1)\,|s(n-1,k)|+|s(n,k-1)|$, 从而有 $|s(n,1)|=(n-1)\,|s(n-1,1)|+|s(n,0)|$, 而 $s(n,0)=0$, 故

$$|s(n,1)|=(n-1)\,|s(n-1,1)|=(n-1)(n-2)\,|s(n-2,1)|=\cdots=(n-1)!\,|s(1,1)|=(n-1)!$$

而由定义知 $|s(n,1)|$ 即 S_n 中仅含 1 个轮换 (即循环置换) 的置换个数, 从而 S_n 中有 $(n-1)!$ 个循环置换. □

4 第六章

6.1 (1) 证明 $n=1,2,3,4$ 时 n 阶拉丁方的个数为 1,2,12,576.
(2) 通过对拉丁方中行, 列或符号的置换, 证明 1,2,3 阶拉丁方唯一, 而 4 阶拉丁方有两个.
(3) 对于两个类型的 4 阶拉丁方, 其中一个有正交伴侣, 而另一个没有.

证明. (1)$n=1$ 时显然;$n=2$ 时, 若取首行为 $(1,2)$, 则末行仅能为 $(2,1)$, 可再对方阵符号 $\{1,2\}=[2]$ 作变换, 有 2! 种变换, 从而有 2 种 2 阶拉丁方.$n=3$ 时, 若取首行为 $(1,2,3)$, 则次行可能为 $(2,3,1)$ 或 $(3,1,2)$, 从而末行被前两行唯一确定, 故此时有 2 种可能, 再考虑方阵符号 [3] 的变换有 3! 种, 故总共有 $2\cdot 3!=12$ 种可能.

$n=4$ 时, 首先取首行为 $(1,2,3,4)$, 则次行与 S_4 中的错排 σ 一一对应, 错排由 6 个 4-轮换与 3 个型为 $[2,2]$ 的置换构成. 而第三行中的任意数 $a_{3i}\neq i,i\sigma$, 故仅有 2 种可能. 构造第三行第 i 个数可选取数的集合为 $A_i=[4]-\{i,i\sigma\}$.

- 若 σ 为 4-轮换则 $|A_i\cap A_{i\sigma}|=|A_i\cap A_{i\sigma^{-1}}|=1$, 从而确定了 a_{3i} 即可唯一确定 $a_{3,i\sigma}$ 或 $a_{3,i\sigma^{-1}}$, 以此类推从而唯一确定第三行. 所以该情形有 2 种可能.
- 若 σ 是型为 $[2,2]$ 的置换, 则由 $i=i\sigma^2$ 知 $A_i=A_{i\sigma}$, 因此确定了 a_{3i} 仅能迫使 $a_{3,i\sigma}\in A_{i\sigma}-a_{3i}$ 被唯一确定, 其余两个数同样有 2 种可能. 从而此情形有 $2\cdot 2=4$ 种可能.

而末行被前三行唯一确定, 因此首行为 $(1,2,3,4)$ 时有 $6\cdot 2+3\cdot 4=24$ 种可能. 再考虑对方阵的符号 [4] 变换有 4! 种可能, 故共有 $24\cdot 4!=576$ 种可能.

(2) 对于全体 $L(n)$ 个 n 阶拉丁方, 可首先通过列变换将首行变为 $(1,2,\cdots,n)$, 再通过对剩下 $(n-1)$ 行的行变换使首列为 $(1,2,\cdots,n)^\mathsf{T}$. 而列变换有 $n!$ 个, 行变换有 $(n-1)!$ 个, 故能得到至多 $\dfrac{L(n)}{n!(n-1)!}$ 个拉丁方的等价类, 带入 $n=1,2,3,4$ 即分别为 $1,1,1,4$, 从而仅需证明 $n=4$ 的情形. 由上讨论知首行首列均为 $(1,2,3,4)$ 的 4 阶拉丁方仅有 4 个, 分别为:

$$(A)\begin{matrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{matrix}\qquad(B)\begin{matrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\\3&1&4&2\\4&3&2&1\end{matrix}\qquad(C)\begin{matrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\\3&4&1&2\\4&3&2&1\end{matrix}\qquad(D)\begin{matrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\\3&4&2&1\\4&3&1&2\end{matrix}$$

注意到对 (D) 中符号作置换 (1234), 将末行移至首行, 再将第二列移至末列, 即得到 (B); 对 (D) 中符号作置换 (13)(24), 将前两行移至后两行即得到 (C). 从而可得两种 4 阶拉丁方 (A) 和 (C).

(3) 首先注意到

$$\begin{matrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\\4&3&2&1\\2&1&4&3\end{matrix}$$

与 (C) 相互正交. 对于 (A), 若有拉丁方 $B=(b_{ij})$ 与其正交, 则取数对 $(k,1),\forall k\in[4]$, 则有唯一的 4 个位置 (i_k,j_k) 使得 $a_{i_k,j_k}=k,b_{i_k,j_k}=1$, 显然这些位置必须在不同的行列中. 考虑置换 $\sigma:k\mapsto i_k,\tau:k\mapsto j_k$, 则 $a_{k\sigma,k\tau}$ 取遍 [4], 从而

$$\sum_{k=1}^{4}a_{k\sigma,k\tau}=\frac{4(4+1)}{2}\equiv 2 \bmod 4$$

注意到 $a_{ij}=i+j-1 \bmod 4$, 从而

$$\sum_{k=1}^{4}a_{k\sigma,k\tau}=\sum_{k=1}^{4}(k\sigma+k\tau-1)\equiv 0 \bmod 4$$

从而矛盾. □

6.5 令 $(A_1,\cdots,A_n)$ 是 $[n]$ 的一个子集族, 若子集族的关联矩阵可逆, 证明该子集族有 SDR.

证明. 关联矩阵 $M=(m_{ij}),m_{ij}=[i\in A_j]$ 可逆即 $\det M\neq 0$. 而 $\det M=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}\prod_{i=1}^{n}m_{i,i\sigma}$, 故 $\exists\sigma\in S_n\forall i\in[n],m_{i,i\sigma}\neq 0$, 即 $i\in A_{i\sigma}$, 从而 $(1\sigma^{-1},2\sigma^{-1},\cdots,n\sigma^{-1})$ 是子集族的一个 SDR. □

6.7 证明 Hall 定理的推广: 集合 X 有子集族 $(A_1,\cdots,A_n)$, 其满足 $|A(J)|\geq|J|-r,\forall J\subset[n]$, 则子集族中有大小为 $n-r$ 的子族有 SDR.

证明. 考虑与 X 不交的 r 元集 $Y=\{y_1,\cdots,y_r\}\cap X=\varnothing$, 可构造子集族 $A_i'=A_i\cup Y$, 则 $|A'(J)|=|A(J)|+|Y|\geq|J|-r+r=|J|$, 从而 A' 有 SDR, 删去其中的 Y 中元素, 剩下 $\geq n-r$ 个元素为原先子集族 A 中大小 $\geq n-r$ 的子族的 SDR. □

5 第八章

Steiner 四元系 (Steiner quadruple system, SQS) 是集合对 $(X,\mathcal{B})$,X 是一个集合,$\mathcal{B}$ 是 X 中一些 4-子集构成的子集族, 称这些 4-子集为四元组, X 中任意 3 点均含于唯一四元组中. 称 $n=|X|$ 为该四元系的阶.

8.7 若存在 n 阶 SQS$(n>2)$, 则 $n\equiv\pm2 \bmod 6$.

8.8 n 阶 SQS$(X,\mathcal{B})$ 有 $|\mathcal{B}|=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{24}$.

证明. 固定 $x\in X$, 对集合 $\{(\{y,z\},B)|y,z\in X,y\neq z,x\notin\{y,z\},B\in\mathcal{B},\{x,y,z\}\subset B\}$ 计数. 首先 $\{y,z\}$ 有 $\binom{n-1}{2}$ 种取法, 而每种取法对应唯一的 $B\in\mathcal{B}$, 故集合有 $\binom{n}{2}$ 个元素. 再考虑 x 属于 r 个四元组中, 每个四元组中可取 $\binom{3}{2}=3$ 种二元子集, 从而集合元素个数为 $3r=\binom{n-1}{2},r=\dfrac{(n-1)(n-2)}{6}$.

再对集合 $\{(x,B)|x\in X,B\in\mathcal{B},x\in B\}$ 计数. 由于每个点在 $r=(n-1)(n-2)/6$ 个四元组中, 故集合有 $n(n-1)(n-2)/6$ 个元素; 又由于所有 b 个四元组中每个含 4 个点, 故 $4b=n(n-1)(n-2)/6,b=n(n-1)(n-2)/24$.

最后, 由于 $r,b\in\mathbb{N}$, 故 $6|(n-1)(n-2),24|n(n-1)(n-2)$, 也从而 $4|n$. 而 $(n-1)(n-2)\equiv0 \bmod 6$ 仅在 $n\equiv\pm1,\pm2 \bmod 6$ 时成立, 故得到 $n\equiv\pm2 \bmod 6$. □

8.9 X 是 $\mathbb{Z}/2$-向量空间,$\mathcal{B}=\{\{x,y,z,w\}\subset X|x+y+z+w=0\}$, 证明 $(X,\mathcal{B})$ 是 SQS.

证明. 注意到 $\forall x,y,z\in X\exists!w=x+y+z\in X$, 从而 x,y,z 互相不等时 w 与 x,y,z 均不等: 设 $w=x$ 则 $y+z=0,y=z$, 矛盾. 从而有唯一四元组 $\{x,y,z,w\}\in\mathcal{B}$ 包含 x,y,z, 从而得证. □

8.11 $(X,\mathcal{B})$ 是 n 阶 STS,Y 是其 m 阶子系 $(m<n)$, 证明 $n\geq2m+1$, 且取等当且仅当 $\mathcal{B}$ 中每个三元组均仅含 Y 中 1 或 3 个点.

证明. 固定 $x\in X-Y$, 对 $\{B\in\mathcal{B}|\exists y\in Y,x,y\in B\}$ 计数. 由于 $x\notin B$, 故 B 中 Y 的元素仅有 y, 否则 $B\subset Y$. 从而对 $\forall y\in Y\exists!B\in\mathcal{B},x,y\in B$, 故该集合的元素个数等于 Y 的元素个数 m. 又由于 x 在 $\dfrac{n-1}{2}$ 个三元组上, 故 $m\leq\dfrac{n-1}{2},n\geq2m+1$.

若取等, 即 $n=2m+1$, 则任意含 $x\in X-Y$ 的三元组 B 都含 Y 中元素, 故由上可知 $|B\cap Y|=1$, 由 x 任意性可知, 任意三元组 $B\not\subset$ 则 $|B\cap Y|=1$. 反之由上讨论,x 所在的三元组都含 Y 中元素, 故 $m=(n-1)/2$, 从而得证. □

6 第十章

10.2 证明任意有限 (简单) 图中有两个顶点 $u,v,d(u)=d(v)$.

证明. 由 $d(v)\leq n-1$ 知 $D=\{d(v)|v\in V\}\subset\{0,1,\cdots,n-1\}$. 若有顶点 v_0 度数为 $n-1$, 则其余点都被其连接,$D\subset[n-1]$. 若不存在, 则 $D\subset\{0,1,\cdots,n-2\}$. 从而总有 $|D|\leq n-1<n=|V|$, 由鸽巢原理得证. □

10.6 考虑 $X=\mathbb{Z}/17$ 上的完备图, 对 $\forall x,y\in\mathbb{Z}/17$, 若 $x-y\equiv\pm1,\pm2,\pm4,\pm8$ 则将边 $\{x,y\}$ 染红, 剩下的边染蓝. 证明没有单染色 4-集.

证明. 注意到 $\pm1,\pm2,\pm4,\pm8$ 为 $\mathbb{Z}/17$ 的所有二次剩余 ($1^2\equiv1,2^2\equiv4,3^2\equiv-8,4^2\equiv-1,5^2\equiv8,6^2\equiv2,7^2\equiv-2,8^2\equiv-4$, 后续一致), 而 a,b 是二次剩余则 a^{-1},ab 也是. 因此若存在单染色 4-集 $A,a\in A$, 将 A 中元素同减去 a, 由于加减不改变同余关系, 故得到单染色 4-集 $A',0\in A'$ 且有非零元 $b\in A'$, 由同余关系知 b 也是二次剩余. 将 A' 元素同乘以二次剩余 b^{-1}, 元素之差仍为二次剩余, 从而可得单染色 4-集 $A''=\{0,1,c,d\}$. 由与 0,1 的同余关系知 c,d 仅可以在 2,9,16 中, 但 2,9,16 之差不是二次剩余, 从而与单染色矛盾. □

10.7 (1) 证明 Schur 定理: 存在函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 使得, 若 $[f(n)]$ 被分为 n 部分, 则 $\exists x,y\in[f(n)]$ 使得 $x,y,x+y$ 在同一部分中.(2) 陈述并证明无限版本的 Schur 定理.

证明. (1) 取 $N=R(n,2,3)-1$, 若 $[N]$ 被分为 n 部分 $C_1,\cdots,C_n$, 则给 $[N+1]$ 中的 2-子集染 n 种色 $c_1,\cdots,c_n$: 对于 $\{a,b\}\subset[N+1],a<b$, 若 $b-a\in C_i$, 则染色 c_i. 由于 $N+1=R(n,2,3)$, 因此存在单染色三元组 $\{a,b,c\},a<b<c$, 取 $x=c-b,y=b-a\in C_i$, 则 $x+y=c-a\in C_i$. 因此取 $f(n)=R(n,2,3)-1$ 即可满足条件.

(2) 若 $\mathbb{N}$ 被分为 $n<\infty$ 个子集, 则 $\exists x,y\in\mathbb{N}$ 使得 $x,y,x+y$ 在同一子集中.

证明: 若分 $\mathbb{N}$ 为 n 个子集 $C_1,\cdots,C_n$, 则为 $\mathbb{N}$ 的 2-子集染色:$\{a,b\}\subset\mathbb{N},a<b$ 被染为 c_i 色, 若 $b-a\in C_i$. 由无限 Ramsey 定理知有单染色三元组 $\{a,b,c\}$, 从而取 $x=c-b,y=b-a\in C_i$, 则 $x+y=c-a\in C_i$. □