矩阵分析思考题及答案 (编纂中)

章亦流 A24201011

2025 年 4 月 7 日

目录

1 矩阵范数

思考题 1.1 $x \in \mathbb{C}^n$, 则 $\lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

思考题 1.2 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}, \|A\|_{M_2} = \sqrt{\sum\limits_{i,j} |a_{ij}|}$ 是矩阵范数.

思考题 1.3 $A \in M_n(\mathbb{C}), \|A\|_{M'_\infty} = n \cdot \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$ 是矩阵范数.

思考题 1.4 $\|\cdot\|_a$ 是向量范数,$\|\cdot\|_b$ 是矩阵范数, 若

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \forall A \in \mathbb{C}^{m\times n} : \|Ax\|_a \le \|A\|_b \|x\|_a\,,$$

则称范数 $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ 相容. 证明向量 2-范数 $\|x\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n |x_i|^2}$ 与矩阵范数 $\|A\|_{M_2} = \sqrt{\sum\limits_{i,j} |a_{ij}|}$ 相容.

思考题 1.5 在 $M_n(\mathbb{C})$ 上证明 $\|A\|_\infty = \max\limits_{x\ne 0} \dfrac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ 就是行和范数 $\|A\|_r = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|$.

思考题 1.6 对于 $A \in M_n(\mathbb{C}), \lim\limits_{k\to\infty} A^k = O \iff \rho(A) < 1$, 其中 $\rho(A) = \max\limits_{\lambda\in \mathrm{Spec}\, A} |\lambda|$ 是谱半径.

2 矩阵分解

思考题 2.1 从几何直观的角度, 用寻找空间中基底的方式, 给出奇异值分解的另一个证明.

> **Theorem (奇异值分解, SVD)** $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 存在酉矩阵 $U \in M_m(\mathbb{C}), V \in M_n(\mathbb{C})$ 使得 $UAV = \mathrm{diag}(s_1, \dots, s_p)$, 其中 $s_1 \ge \cdots \ge s_p$ 是 A 的全体奇异值,$p = \min(m, n)$.

思考题 2.2 证明 QR 分解.

Theorem (QR 分解) 对于任意 n 阶矩阵 A, 存在酉矩阵 Q 和上三角矩阵 R, 使得 $A = QR$.

3 Hermite 矩阵

思考题 3.1 证明极大-极小原理的第二个等式.

Theorem (极大-极小原理, Courant-Fischer 定理) A 是 Hermite 矩阵, 则

$$\lambda_k(A) = \max_{\substack{S\subset\mathbb{C}^n\\ \dim S=k}} \min_{x\in S} R(x) = \max_{\substack{T\subset\mathbb{C}^n\\ \dim T=n-k+1}} \max_{x\in S} R(x), \text{where } R(x) = \frac{x^*Ax}{x^*x}.$$

思考题 3.2 证明: n 阶单圈图中谱半径最大的图是星图连接两个 1 度点形成的图.

证明. □

思考题 3.3 给出所有满足 $\rho(G) \le \sqrt{2}$(或 2) 的图 G.

证明. 下仅考虑连通图, 因为图的谱半径即所有连通分支的最大谱半径, 因此若干个满足条件的连通图的不交并仍然满足条件. 由于连通图总有 $m \ge n-1$, 故 $\rho(G) \ge d(G) = 2m/n \ge 2-2/n$. 因此 $\rho(G) \le \sqrt{2}$ 时有 $2-2/n \le \sqrt{2}$, 解得 $n \le 3$, 可枚举出满足条件的图仅有 P_3, K_3, K_2, K_1.

$\rho(G) \le 2$ 的图被称作 Smith 图[1][2]. 下分类讨论:

1. 带圈图 G 是 Smith 图, 其含圈 C, 故 $\rho(G) \ge \rho(C) = 2$, 其仅在 $G = C$ 时取等, 即带圈 Smith 图仅能为圈图.
2. 树 T 是 Smith 图, 且 $\Delta(T) \le 2$. 此时 T 仅能为路图, 而 $\rho(P_n) = 2\cos\dfrac{\pi}{n+1} < 2$, 故路图均为 Smith 图.
3. 树 T 是 Smith 图, 且 $\Delta(T) \ge 4$. 此时必然有 $K_{1,4} \subset T$, 即 $\rho(T) \ge \rho(K_{1,4}) = 2$, 由取等条件知 $T = K_{1,4}$.
4. 树 T 是 Smith 图,$\Delta(T) = 3$, 且存在两点 x, y 度数为 3. 由连通性知有 (x, y)-路 P, 从而记图 $W_{n'} = T[V(P) \cup N(x) \cup N(y)]$, 其为路 $P_{n'}(n' \ge 2)$ 的首尾两点各与路外两点连边得到的 $n'+4$ 点图. 再记 $Z_{n'}$ 为 $W_{n'}$ 删去一个末端点, 从而由 Heilbronner 公式, 对任意 $n \ge 2$ 有

$$\begin{aligned}\phi_{W_n}(x) &= x\phi_{Z_n}(x) - x\phi_{Z_{n-2}}(x)\\ &= x(x\phi_{P_{n+2}}(x) - x\phi_{P_n}(x)) - x(x\phi_{P_n}(x) - x\phi_{P_{n-2}}(x))\\ &= x^2(\phi_{P_{n+2}}(x) + \phi_{P_{n-2}}(x) - 2\phi_{P_n}(x)) = x^2(x^2-4)\phi_{P_n}(x)\end{aligned}$$

   从而知 $\rho(W_{n'}) = 2 \le \rho(T)$, 由取等条件知 $T = W_{n-4}$.
5. 树 T 是 Smith 图,$\Delta(T) = 3$, 且仅有一点 x 度数为 3. 视 T 为以 x 为根节点的根树, 则 x 分别连接三条路 $P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3}$. 记 $T = T_{n_1,n_2,n_3}$, 计算可得 $\rho(T_{5,2,1}) = \rho(T_{3,3,1}) = \rho(T_{2,2,2}) = 2$, 因此满足条件的 T 仅能为 $T_{5,2,1}, T_{3,3,1}$ 或 $T_{2,2,2}$ 的子图.

综上所述, Smith 图有且仅有 $C_n, W_n, K_{1,4}, T_{5,2,1}, T_{3,3,1}, T_{2,2,2}$ 及其子图. □

[1] J.H. Smith, *Some properties of the spectrum of a graph*, in: Combinatorial Structures and Their Applications, Gordon and Breach, New York – London – Paris, 1970, pp. 403–406.

[2] Dragoš Cvetković, Irena M. Jovanović, *Constructing graphs with given spectrum and the spectral radius at most 2*, in: Linear Algebra and its Applications, Volume 515, 2017, pp. 255-274,

思考题 3.4 定义图 G 的无符号 Laplace 矩阵 $Q(G) = D(G) + A(G)$, 其中 $A(G)$ 是 G 的邻接矩阵,$D(G) = \mathrm{diag}(d(v_1), \ldots, d(v_n))$ 是 G 的度数矩阵. 下记 $Q(G)$ 有特征值 $\lambda_1(G) \geq \cdots \geq \lambda_n(G)$, 对于 $\forall e \in E(G)$, 证明:

1. $\lambda_1(G) \geq \lambda_1(G-e) \geq \lambda_2(G) \geq \cdots \geq \lambda_{n-1}(G) \geq \lambda_{n-1}(G-e) \geq \lambda_n(G) \geq \lambda_n(G-e)$.
2. $\forall k \in [n-2], \lambda_k(G) \geq \lambda_k(G-e) \geq \lambda_{k+2}(G)$.

证明. 记 $e = v_i v_j$, 则 $Q(G) = Q(G-e) + E_{ij}$, 其中 E_{ij} 的第 $(i,i),(j,j),(i,j),(j,i)$ 个元素为 1, 其余元素为 0. 容易计算得 $\lambda_1(E_{ij}) = 2, \lambda_2(E_{ij}) = \cdots = \lambda_n(E_{ij}) = 0$. 由 Weyl 不等式可知,$\forall k \in [n]$,

$$\max_{r+s=k+n} \{\lambda_r(G-e) + \lambda_s(E_{ij})\} \leq \lambda_k(G) \leq \min_{r+s=k+1} \{\lambda_r(G-e) + \lambda_s(E_{ij})\}$$

对第一个不等式取 $r = k, s = n$, 有 $\lambda_k(G) \geq \lambda_k(G-e) + \lambda_n(E_{ij}) = \lambda_k(G-e)$; 若 $k \geq 2$, 对第二个不等式取 $r = k-1, s = 2$, 则 $\lambda_k(G) \leq \lambda_{k-1}(G-e) + \lambda_2(E_{ij}) = \lambda_{k-1}(G-e)$. 综上得证 (1). 而 $\forall k \in [n-2], \lambda_k(G-e) \geq \lambda_{k+1}(G) \geq \lambda_{k+2}(G)$, 因此得证 (2).(怀疑 (2) 的题目有误.) □

4 非负矩阵