泛函分析作业

章亦流 V21914009

题号为黑色的题为丁超老师所布置的, 题号为蓝色的为本人自行添加的. 证明中蓝色部分通常为附注, 红色部分为尚未解决的部分. 课本如有错漏部分将直接在题干上更改, 不作另行标注.

目录

1 第一章

习题 1(例 1.1.25) 设 (E,d) 是一个度量空间,$F\subset E$,d_F 是距离 d 在 F 上的限制, 那么当 E 和 F 分别赋予距离 d 和 d_F 诱导的拓扑, 则 F 是 E 的拓扑子空间.

证明. 首先有

$$\forall x\in F,\qquad F\cap\{y:d(x,y)<\delta\}=\{y:d(x,y)<\delta\wedge y\in F\}=\{y\in F:d_F(x,y)<\delta\}$$

故

$$\forall \text{开集} U\subset F:U=\bigcup_{i\in I}\{y\in F:d_F(x_i,y)<\delta_i\}=\bigcup_{i\in I}F\cap\{y:d(x_i,y)<\delta_i\}=F\cap\bigcup_{i\in I}B(x_i,\delta_i)$$

后者是 E 中开集, 即 F 中开集为 E 中开集与 F 的交, 得证, □

习题 2(注 1.2.7) 用连续映射定义证明:f 在点 x 连续且 $x_n\to x$, 则 $f(x_n)\to f(x)$.

证明. 首先有

$$\forall O(f(x))\in N(f(x))\exists O(x)\in N(x):f(O(x))\subset O(f(x)),\qquad \forall O(x)\exists N\forall n\geq N:x_n\in O(x)$$

因此

$$\forall O(f(x))\exists O(x)\exists N\forall n\geq N:f(x_n)\in f(O(x))\subset O(f(x))$$

即 $f(x_n)\to f(x)$, 得证. □

习题 3(注 1.2.10) E 上有两拓扑 $\tau,\tau'.\tau$ 是 τ' 的强拓扑 $\iff$ $\mathrm{id}_E:(E,\tau)\to(E,\tau'),x\mapsto x$ 连续.

证明. 若 id_E 连续, 则 $\forall U\in\tau':f^{-1}(U)=U\in\tau$. 此即强拓扑的定义, 得证. □

1.3 设 E 是 $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$ 和另外两个不同的点构成的并集, 如 $E=\mathbb{R}^*\cup\{-\infty,+\infty\}$. 并设 τ 是 E 中满足如下条件的子集 U 构成的集族:(i) 在 $\mathbb{R}^*$ 中的拓扑下,$U\cap\mathbb{R}^*$ 开于 $\mathbb{R}^*$;(ii) 若 $-\infty\in U\vee+\infty\in U$, 则 U 包含一个形如 $\mathbb{R}^*\cap V$ 的集合, 其中 V 是 $\mathbb{R}$ 中零点的一个邻域.
证明:1.τ 是 E 上的拓扑;2.τ 不是 Hausdorff 空间;3.$\forall a\in E$ 的所有邻域的交集为 $\{a\}$.

证明. 1. 即证 (1) 对 τ 中任意个元素 $\{U_i\}_{i\in I}$ 有 $\mathbb{R}^*\cap\bigcup\limits_{i\in I}U_i=\bigcup\limits_{i\in I}\mathbb{R}^*\cap U$ 开于 $\mathbb{R}^*$. 若 $-\infty\in U\vee+\infty\in U$, 则

$$U_i\supset\mathbb{R}^*\cap V\implies\bigcup_{i\in I}U_i\supset\bigcup_{i\in I}\mathbb{R}^*\cap V_i=\mathbb{R}^*\cap\bigcup_{i\in I}V_i$$

后者依然是 0 的一个邻域, 故 $\bigcup\limits_{i\in I}U_i\in\tau$.
(2) 对 τ 中有限元素 $\{U_i\}_{i\in[n]}$ 同理, 故 $\bigcap\limits_{i\in[n]}U_i\in\tau$.
(3)$\emptyset$ 开于 $\mathbb{R}^*$ 且 $\pm\infty\notin\emptyset$, 故 $\emptyset\in\tau$;$E\cap\mathbb{R}^*=\mathbb{R}^*$ 开于 $\mathbb{R}^*$,$E\supset\mathbb{R}^*\supset\mathbb{R}^*\cap V$, 故 $E\in\tau$. 综上,τ 是一个拓扑.

2. 考虑 $E=\mathbb{R}^*\cup\{-\infty,+\infty\}$, 则

$$\forall O(+\infty),O(-\infty)\exists V_-,V_+\in N_{\mathbb{R}}(0):\mathbb{R}^*\cap V_-\subset O(a),\mathbb{R}^*\cap V_+\subset O(-\infty)\implies O(a)\cap O(-\infty)=\mathbb{R}^*\cap V_-\cap V_+\neq\emptyset$$

故 (E,τ) 不是 Hausdorff 空间.

3.$\forall x\in\mathbb{R}^*:\bigcap\limits_{O(x)\in N_{\mathbb{R}^*}(x)}O(x)=\{x\}$, 否则 $\forall O(x)\in N_{\mathbb{R}^*}\exists x'\in O(x)$, 但 $x'\notin B(x,|x'-x|)$.
而 $\forall a\in E-\mathbb{R}^*\cup\pm\infty:a\in\bigcap\limits_{O(a)\in N(a)}O(a)\subset\{a\}\cup\left(\bigcap\limits_{U\in\tau}U\cap\mathbb{R}^*\right)=\{a\}$.
最后 $\forall a=\pm\infty:\bigcap\limits_{O(a)\in N(a)}O(a)=\{a\}\cup\left(\bigcap\limits_{V\in N_{\mathbb{R}}(0)}\cap\mathbb{R}^*\right)=\{a\}\cup(\{0\}\cap\mathbb{R}^*)=\{a\}$. □

1.4 证明紧空间中的任意序列有粘着点.

证明. 序列 $\{x_n\}$ 的粘着点 x 定义为 $\forall O(x)\in N(x)\forall N\in\mathbb{N}\exists n\geq N:x_n\in O(x)$.
有引理 (课本定理 1.2.4): 对序列 $\{x_n\}$ 定义 $A_n=\{x_m:m\geq n\}$,$\{x_n\}$ 的粘着点全体为 $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$.

由空间是紧的, 故取闭集族 $\{\overline{A_n}\}$, 对任意一个有限指标集 $J\subset\mathbb{N}$ 有 $\bigcap\limits_{i\in J}\overline{A_i}\neq\emptyset$, 这是因为

$$\forall n\geq\max_{j\in J}j:x_n\in\bigcap_{i\in J}A_i\subset\bigcap_{i\in J}\overline{A_i}$$

因此 $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}}\overline{A_i}$ 非空, 即存在粘着点.

下证引理.

$$x\in\overline{A_n}\iff\forall O(x)\exists x_m\in A_n:x_m\in O(x)$$

因此

$$x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}\iff\forall O(x)\forall n\in\mathbb{N}\exists x_m\in A_n:x_m\in O(x)$$

而 $x_m\in A_n\iff m\geq n$, 故得证. □

2 第二章

2.1 1. 设函数 $\phi(x)=\dfrac{x}{1+|x|}, x\in\mathbb{R}$ 并定义 $d:(x,y)\mapsto|\phi(x)-\phi(y)|$. 证明由此定义的 d 是 $\mathbb{R}$ 上距离并与 $\mathbb{R}$ 上通常的拓扑一致, 但 d 不完备.
2. 更一般地, 设 $O\subsetneq E$ 为完备度量空间 (E,d) 上的开子集, 定义

$$\phi:O\to E\times\mathbb{R}, x\mapsto\left(x,\frac{1}{d(x,O^c)}\right):=(x,\rho(x)),\qquad\forall x\in O$$

证明 ϕ 是从 O 到 $E\times\mathbb{R}$ 上一个闭子集的同胚, 并由此导出 O 上存在一个完备的距离, 由其诱导的拓扑和 d 在 O 中诱导的拓扑一致.

证明. 1. 首先证明 $d(\cdot,\cdot)$ 是一个度量. 其非负性与对称性显然, 正定性由

$$d(x,y)=|\phi(x)-\phi(y)|=0\iff\phi(x)=\phi(y)\iff x=y$$

得到. 最后由

$$d(x,z)=|\phi(x)-\phi(z)|\le|\phi(x)-\phi(y)|+|\phi(y)-\phi(z)|=d(x,y)+d(y,z)$$

可知三角不等式成立.

其次取 $B_d(x,\delta)=\{y:|\phi(x)-\phi(y)|<\delta\}, B(x,\varepsilon)=\{y:|x-y|<\varepsilon\}$. 由 $\phi(x)$ 严格单调可知其有反函数 $\phi^{-1}(x)$,

$$y\in B_d(x,\delta)\iff|\phi(x)-\phi(y)|<\delta\iff y\in\left(\phi^{-1}(\phi(x)-\delta),\phi^{-1}(\phi(x)+\delta)\right)$$

取 m_x,M_x 为 $x-\phi^{-1}(\phi(x)-\delta)$ 和 $\phi^{-1}(\phi(x)+\delta)-x$ 的较小值和较大值, 则有

$$\forall x\in\mathbb{R}\forall\delta>0\exists m_x,M_x:B(x,m_x)\subset B_d(x,\delta)\subset B(x,M_x)$$

而 $\{B(x,\delta):x\in\mathbb{R},\delta>0\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个拓扑基, 因此 $\{B_d(x,\delta):x\in\mathbb{R},\delta>0\}$ 也是, 故其生成同一个拓扑.

最后, 取 $a_n=n$, 则

$$\forall\varepsilon>0\exists N=\lfloor1/\varepsilon\rfloor\forall n\ge N\forall p\in\mathbb{N}:|\phi(a_n)-\phi(a_{n+p})|=\frac{n+p}{1+n+p}-\frac{n}{1+n}<1-\frac{n}{1+n}=\frac{1}{n+1}<\varepsilon$$

而 $a_n\to+\infty$ 不收敛于 $\mathbb{R}$ 中. □

2.2 (E,d) 完备 $\iff\forall\{x_n\}\forall n\in\mathbb{N}:d(x_n,x_{n+1})\le2^{-n}$ 则 $\{x_n\}$ 收敛.

证明. $\implies:\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 因为

$$\forall\varepsilon\in(0,1)\exists N=\lceil-\log_2\varepsilon\rceil\forall n,m\ge N:d(x_n,x_m)\le\sum_{k=n}^{m}2^{-k}<2^{1-n}<2^{-N}<\varepsilon$$

$\impliedby:$ 取 (E,d) 中 Cauchy 列 $\{x_n\},\forall\varepsilon=2^{-k}\exists N_k\forall n,m\ge N_k:d(x_n,x_m)<2^{-k}$, 取子列使得

$$n_1\le N_1\le n_2\le\cdots\le n_k\le N_k\le n_{k+1}\le\cdots$$

有 $\forall k\in\mathbb{N}:d(x_{n_k},x_{n_{k+1}})<2^{-k}$. 其收敛, 即 Cauchy 列的收敛子列, 故 Cauchy 列收敛于同极限, 故空间完备. □

2.3 度量空间 (E,d) 中有 Cauchy 列 $\{x_n\}.A\subset E,\overline{A}$ 完备,$d(x_n,A)\to0$, 求证 x_n 在 E 中收敛.

证明. 取 $\{x_i\}$ 的子列 $\{y_i\},y_i=x_{n_i}$, 使得 $d(y_n,A)<1/n$. 取点列 $\{a_n\}$ 使得 $a_n\in B(y_n,1/n)\cap A$. 这是 Cauchy 列, 因为

$$\forall\varepsilon\exists N\forall n,m\ge N:d(y_n,y_m)<\varepsilon$$

$$\forall\varepsilon\exists N'=\max\left\{\left\lceil\frac{2}{\varepsilon}\right\rceil,N\right\}\forall n,m\ge N':d(a_n,a_m)<\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+d(y_n,y_m)<\frac{2}{N'}+\varepsilon<2\varepsilon$$

故 a_n 收敛, 设极限为 $a\in\overline{A}$. 而 $d(a_n,y_n)\to0$ 故 $y_n\to a$. 由 Cauchy 列的有收敛子列则其收敛, 故得证. □

2.4 (E,d) 是度量空间,$A\subset E,\alpha>0.\forall x,y\in A: x\neq y \implies d(x,y)\geq\alpha$. 求证 A 完备.

证明. A 中任意 Cauchy 列在某项后必为同一元素. 否则, 在每项后都有不同的元素, 即

$$\forall N\exists n,m\geq N: x_n\neq x_m \implies d(x_n,x_m)>\frac{\alpha}{2}$$

与 Cauchy 列定义矛盾.

而这样的序列必然收敛, 故 A 中任意 Cauchy 列收敛, 即得证. □

2.5 (E,d) 是度量空间,$A\subset E$. 若 A 中任意 Cauchy 列收敛于 E, 则 $\overline{A}$ 完备.

证明. A 中收敛列收敛于 $\overline{A}$(由闭包性质), 故 A 中任意 Cauchy 列收敛于 $\overline{A}$. 考虑 $\overline{A}$ 中的 Cauchy 列 $\{x_n\}$, 则可以构造 A 中 Cauchy 列 $\{y_n\}$:

$$y_n=\begin{cases}x_n & x_n\in A\\ x_n' & x_n\in\overline{A}, d(x_n,x_n')<1/n, x_n'\in A\end{cases}$$

有 $d(x_n,y_n)\to 0$ 且 y_n 收敛 (证明方法同 2.3), 故 x_n 收敛. 因此 $\overline{A}$ 完备. □

2.6 (E,d) 是度量空间,$\{x_n\}$ 是 E 中发散 Cauchy 列.
求证 (1)$\forall x\in E: d(x,x_n)$ 收敛于一个正数, 记为 $g(x)$;(2)$x\mapsto 1/g(x)$ 连续;(3)$1/g$ 无界.

证明. 1. 仅需证 $\{d(x,x_n)\}$ 是 Cauchy 列.

$$\forall\varepsilon\exists N\forall n,m\geq N: d(x_n,x_m)<\varepsilon \quad \forall\varepsilon\exists N\forall n,m\geq N: |d(x,x_n)-d(x,x_m)|\leq d(x_n,x_m)<\varepsilon$$

而 $d(x,x_n)>0 \implies g(x)\geq 0$, 而 $g(x)=0 \iff d(x,x_n)\to 0 \iff x_n\to x$, 这是不可能的.

2. 仅需证 g 连续. 由

$$|g(x)-g(y)|=\left|\lim_{n\to\infty} d(x,x_n)-d(y,x_n)\right|\leq\lim_{n\to\infty}|d(x,y)|=d(x,y)$$

故

$$\forall\varepsilon\exists\delta=\varepsilon\forall y: d(x,y)<\delta \implies |g(x)-g(y)|<d(x,y)<\varepsilon$$

因此 g 连续,$1/g$ 连续.

3. 取 $\{g(x_n)\}$, 有 $\lim_{n\to\infty} g(x_n)=\lim_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m)=0$, 故 $g(x_n)\to 0$, 相应的 $1/g(x_n)\to+\infty$. □

2.7 $(E,d_E),(F,d_F)$ 是度量空间,$f:E\to F$ 和 f^{-1} 均为一致连续双射, 求证 $\forall A\subset E: A$ 完备 $\iff f(A)$ 完备.

证明. 仅需证 $\implies$, 反方向仅需考虑 $B=f(A)$ 完备 $\implies f^{-1}(B)=A$ 完备即可. 即证任意 Cauchy 列 $\{y_n\}\subset f(A)$ 收敛于 $f(A)$ 中. 考虑 $\{x_n\}\subset A$, 其中 $x_n=f^{-1}(y_n)\in A$. 首先证明这是一个 Cauchy 列:

由 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 列, 有

$$\forall\varepsilon\exists N_\varepsilon\forall n,m\geq N_\varepsilon: |y_n-y_m|<\varepsilon$$

由 f^{-1} 是一致连续函数, 因此有

$$\forall\varepsilon\exists\delta\exists N_\delta\forall n,m\geq N_\delta: |y_n-y_m|<\delta \implies \left|f^{-1}(y_n)-f^{-1}(y_m)\right|=|x_n-x_m|<\varepsilon$$

即

$$\forall\varepsilon\exists N=N_\delta\forall n,m\geq N: |x_n-x_m|<\varepsilon$$

因此 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列. 而由 A 的完备性,$x_n\to x\in A$, 下证 $y_n\to y=f(x)\in f(A)$.

同上, 取 N_ε 为使 $\forall n\geq N_\varepsilon: |x_n-x|<\varepsilon$ 的数, 由 f 的连续性有:

$$\forall\varepsilon\exists\delta\exists N_\delta\forall n\geq N_\delta: |x_n-x|<\delta \implies |y_n-y|<\varepsilon$$

因此 $\{y_n\}$ 收敛于 $f(A)$ 中, 故得证. □

2.8 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 一致连续, 证明 $\exists a,b\geq 0:|f(x)|\leq a\|x\|+b$. 其中 $\|x\|$ 为 x 的 Euclidean 范数.

证明. 首先取 $\varepsilon=1,\forall x,y\in\mathbb{R}^n\exists\delta:d(x,y)<\delta\implies|f(x)-f(y)|<1$. 再考虑 0 与点 x 的连线上有点 a_x 满足

$$\|x\|=\frac{\delta}{2}n_x+\|x-a_x\|,t_x=\|x-a_x\|\in\left[0,\frac{\delta}{2}\right),\qquad n_x=\frac{2}{\delta}(\|x\|-t_x)\leq\frac{2\|x\|}{\delta}$$

而

$$t_x=\|x-a_x\|<\delta\implies|f(x)-f(a_x)|<1$$

对 a_x 与 0 间 n_x 段距离 $<\dfrac{\delta}{2}$ 的线段应用这一不等式, 因此有

$$|f(x)|\leq|f(a_x)-f(0)|+|f(x)-f(a_x)|+|f(0)|\leq n_x+1+|f(0)|\leq\frac{2}{\delta}\|x\|+1+|f(0)|$$

取 $a=\dfrac{2}{\delta},b=1+|f(0)|$ 即可. □

2.9 $f:E\to F$ 是两度量空间间的连续映射, 且 f 在 E 的每个有界子集上一致连续.
1. 证明 f 将 E 中 Cauchy 列映为 F 中 Cauchy 列;
2. 设 E 在度量空间 $\tilde{E}$ 中稠密且 F 完备, 证明 f 可唯一延拓为连续映射 $\tilde{f}:\tilde{E}\to F$.

证明. 1. 考虑 E 中 Cauchy 列 $\{x_n\}$, 则首先考虑 $\forall\varepsilon\exists N\forall n,\geq N:d_E(x_n,x_m)<\varepsilon$, 则 $\{x_n\}\subset B_E(x_N,\varepsilon)\cup\bigcup\limits_{k\in[N]}\{x_k\}$, 而后者有界, 故 f 在其上一致连续.

记 $\{y_n\}\subset F,y_n=f(x_n)$. 有

$$\forall\varepsilon\exists\delta\exists N_\delta\forall n,m\geq N_\delta:d_E(x_n,x_m)<\delta\implies d_F(y_n,y_m)<\varepsilon$$

故 $\{y_n\}$ 也是 Cauchy 列.

2. 考虑 $\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x) & x\in E\\ \lim f(x_n) & x\in\tilde{E}-E,x_n\to x\end{cases}$. 由于 $\forall x\in\tilde{E}-E$, 一定有收敛列 $\{x_n\}$ 使 $x_n\to x$, 而收敛列是 Cauchy 列. 由 1. 的结论,$\{f(x_n)\}$ 也是, 故有极限, 即 $\tilde{f}$ 在 $\tilde{E}-E$ 上有定义.

首先考虑这一定义是否良定, 即 $\lim x_n=\lim x'_n=x\implies\lim f(x_n)=\lim f(x'_n)=f(x)$. 由 $d_E(x_n,x'_n)\to 0$ 和 f 的一致连续性, 有

$$\forall\varepsilon\exists\delta\exists N_\delta\forall n\geq N_\delta:d_E(x_n,x'_n)<\delta\implies d_F(f(x_n),f(x'_n))<\varepsilon$$

故 $d_F(f(x_n),f(x'_n))\to 0$, 而 $d(\cdot,\cdot)$ 连续, 故 $\lim d_F(f(x_n),f(x'_n))=d_F(\lim f(x_n),\lim f(x'_n))=0$, 故极限相同, 即良定.

再证明其连续. 考虑

$$\forall x,x'\in\tilde{E}\exists\{x_n\},\{x'_n\}\subset E\exists N_\varepsilon\forall n\geq N_\varepsilon:d_E(x_n,x)<\varepsilon\wedge d_E(x',x'_n)<\varepsilon$$
$$\forall\varepsilon\exists\delta:d_E(x_n,x'_n)<\delta\implies d_F(f(x_n),f(x'_n))<\varepsilon$$

因此

$$\forall x\in\tilde{E}\forall\varepsilon\exists\delta\forall x'\in B_{\tilde{E}}\left(x,\frac{\delta}{3}\right)\exists\{x_n\},\{x'_n\}\subset E\exists N_{\delta/3}\forall n\geq N_{\delta/3}:$$
$$d_E(x_n,x'_n)\leq d_E(x_n,x)+d_E(x,x')+d_E(x',x'_n)\leq\delta\implies d_F(f(x_n),f(x'_n))<\varepsilon$$

由 $d(\cdot,\cdot)$ 连续, 则取 $n\to+\infty,\tilde{f}(x)=\lim f(x_n),\tilde{f}(x')=\lim f(x'_n)$, 有

$$d_F(\tilde{f}(x),\tilde{f}(x'))=\lim d_F(f(x_n),f(x'_n))\leq\varepsilon$$

即

$$\forall x\in\tilde{E}\forall\varepsilon\exists\delta\forall x'\in\tilde{E}:d_{\tilde{E}}(x,x')<\frac{\delta}{3}\implies d_F(\tilde{f}(x),\tilde{f}(x'))\leq\varepsilon<2\varepsilon$$

故连续性得证. 最后证明其唯一性. 假设连续映射 $\tilde{f}':\tilde{E}\to F$, 且同样有 $\tilde{f}'|_E=\tilde{f}|_E=f$, 则由连续性有

$$\forall x\in\tilde{E}\exists\{x_n\}\subset E:x_n\to x,\qquad\tilde{f}'(x)=\lim\tilde{f}'(x_n)=\lim f(x_n)=\tilde{f}(x)$$

故得证. □

2.10 构造反例说明, 在不动点定理中, 若减弱 f 条件为

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y), \qquad \forall x, y \in E \wedge x \neq y$$

则结论不成立.(HINT:$f(x) = \sqrt{x^2+1}, x \in [0, +\infty)$.)

证明. 由 HINT, 考虑在 $\mathbb{R}$ 上 $\forall y > x \geq 0$:

$$\sqrt{y^2+1} - \sqrt{x^2+1} < y - x \iff \sqrt{y^2+1} - y < \sqrt{x^2+1} - x$$

即证 $g(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ 严格单调递减. 而 $g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 1 - 1 = 0$, 故 f 满足 $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, 但 $f(x) = x$ 无解. □

2.11 完备度量空间 (E, d) 上映射 f 满足 $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{次}}$ 为压缩映射 (n 为常数). 证明 f 有唯一不动点, 并举一 f 不连续的例子.

证明. 设 a 为 f^n 的不动点,$f(a) = f(f^n(a)) = f^{n+1}(a) = f^n(f(a))$, 而 f^n 仅有唯一不动点 a, 故 $f(a) = a$,a 是 f 的一个不动点. 若有另一个不动点 a', 则 $f^n(a') = a'$, 而 f^n 仅有唯一不动点 a, 则 $a = a'$.

$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1] \\ 1 & x \in (1, 2] \end{cases}$, 则 $f^n = 0 (n \geq 2)$, 其有唯一不动点 $x = 0$, 但 f 不连续. □

2.12 记 $I = (0, +\infty)$ 上通常拓扑为 τ.
1. 证明 τ 可被完备距离 $d : (x, y) \mapsto |\ln x - \ln y|$ 诱导;
2. 设 $f \in C^1(I)$ 满足 $\exists \lambda < 1 \forall x \in I : x\,|f'(x)| \leq \lambda f(x)$, 证明 f 在 I 上有唯一不动点.

证明. 1. 容易验证 $d(\cdot, \cdot)$ 是一个距离. 设 $B(x, \varepsilon) = \{y > 0 : |x - y| < \varepsilon\}$, $B_d(x, \varepsilon) = \{y > 0 : |\ln x - \ln y| < \varepsilon\}$. 而

$$y \in B_d(x, \delta) \iff |\ln x - \ln y| < \delta \implies y \in \left(\mathrm{e}^{\ln x - \delta}, \mathrm{e}^{\ln x + \delta}\right) = \left(\mathrm{e}^{-\delta} x, \mathrm{e}^{\delta} x\right)$$

而 $\mathrm{e}^{\delta} - x \geq x - \mathrm{e}^{-\delta}$(由 $(\mathrm{e}^{\delta} - 1)^2 \geq 0$), 故 $B(x, \mathrm{e}^{-\delta} x) \subset B_d(x, \delta) \subset B(x, \mathrm{e}^{\delta} x)$, 因此它们诱导同一度量拓扑, 下证 $d(\cdot, \cdot)$ 是完备的距离. 考虑 $\{x_n\}$ 是 d 下的 Cauchy 列, 即

$$\forall \varepsilon \exists N \forall n, m \geq N : |\ln x_n - \ln x_m| < \varepsilon, x_m \in B_d(x_n, \varepsilon) \subset B(x_n, \mathrm{e}^{\varepsilon} x_n)$$

即

$$\forall \varepsilon \exists N \forall n, m \geq N : |x_n - x_m| < \mathrm{e}^{\varepsilon} x_n \leq M \mathrm{e}^{\varepsilon}, \qquad M = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n \in B_d(x_N, 2\varepsilon) < +\infty$$

因此 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 其收敛, 故 d 完备.

2.

$$\forall x, y \in I : \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} = \left|\frac{\ln f(x) - \ln f(y)}{\ln x - \ln y}\right| = \left|\frac{f'(\xi)/f(\xi)}{1/\xi}\right| = \frac{\xi\,|f'(\xi)|}{f(\xi)} \leq \lambda$$

故 f 是压缩映射, 故在 I 上有唯一不动点. □

2.13 对可数集 $E = \{a_1, a_2, \cdots\}$ 定义 $d(a_p, a_q) = \begin{cases} 0 & p = q, \\ 10 + \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} & p \neq q \end{cases}$.
1. 证明 d 是 E 上距离, 且 (E, d) 为完备度量空间;
2.$f : E \to E, a_p \mapsto a_{p+1}$, 证明 $p \neq q$ 时 $d(f(a_p), f(a_q)) < d(a_p, a_q)$, 但 f 无不动点.

证明. 1. 显然 d 非负, 正定, 对称, 下证三角不等式:

$$d(a_p, a_r) = 10 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \left(10 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) + \left(10 + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right) = d(a_p, a_q) + d(a_q, a_r)$$

再证其完备.$\forall a_p, a_q \in E : a_p \neq a_q \implies d(a_p, a_q) > 10$, 根据 2.4,$(E, d)$ 完备.

2. 有

$$d(f(a_p), f(a_q)) = d(a_{p+1}, a_{q+1}) = 10 + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} < 10 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = d(a_p, a_q)$$

而 $f(a_p) = a_{p+1} \neq a_p$, 即无不动点. □

2.14 本题是为了给出压缩映射原理的另一个证明, 故默认不使用定理的结论.
设 (E, d) 为非空完备度量空间,$f : E \to E$ 为压缩映射.$\forall R \geq 0 : A_R := \{x \in E : d(x, f(x)) \leq R\}$.
证明:1.$f(A_R) \subset A_{\lambda R}$;
2.$R > 0$ 时 A_R 是 E 中非空闭子集;
3.$\forall x, y \in A_R : d(x, y) \leq 2R + d(f(x), f(y))$, 并导出 $\operatorname{diam}(A_R) \leq \dfrac{2R}{1-\lambda}$;
4.A_0 非空.

证明. 1. 即 $x \in A_R \implies f(x) \in A_{\lambda R}$.$d(x, f(x)) \leq R \implies d(f(x), f^2(x)) \leq \lambda d(x, f(x)) < \lambda R$, 其中 λ 为 f 的 Lipschitz 常数,$\lambda < 1$.

2. 即证: 对 A_R 中任意收敛列 $\{x_n\}$ 有 $x_n \to x, d(x, f(x)) \leq R$. 由

$$\forall \varepsilon \exists N \forall n \geq N : d(x_n, x) < \varepsilon, d(f(x_n), f(x)) < \lambda\varepsilon$$

因此 $d(x, f(x)) \leq d(x, x_n) + d(x_n, f(x_n)) + d(f(x_n), f(x)) < (1+\lambda)\varepsilon + R$. 取 $\varepsilon \to 0$, 有 $d(x, f(x)) \leq R$.

3.$d(x, y) \leq d(x, f(x)) + d(f(x), f(y)) + d(f(y), y) = 2R + d(f(x), f(y)) \leq 2R + \lambda d(x, y) \implies d(x, y) \leq \dfrac{2R}{1-\lambda}$, 因此 $\operatorname{diam}(A_R) = \sup\limits_{x, y \in A_R} d(x, y) \leq \dfrac{2R}{1-\lambda}$.

4. 首先显然 $R \geq r \implies A_R \supset A_r$. 而 $R \to 0, \operatorname{diam}(A_R) \to 0$. 因此由闭集套定理,$\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_{\frac{1}{n}}$ 非空且仅有一个元素 a, 其 $\forall n \in \mathbb{N} : d(a, f(a)) \leq n^{-1}$, 故 $d(a, f(a)) = 0, a \in A_0$. □

2.15 设 (E, d) 为完备度量空间,f, g 为 E 上可交换的压缩映射. 证明 f, g 有唯一且共同的不动点. 并通过反例说明, 去掉可交换条件则结论不成立.

证明. 首先 f, g 均有唯一不动点, 记为 a, b. 而 $g(a) = g(f(a)) = f(g(a)) \implies g(a) = a \implies a = b$, 故其不动点相同. 不交换的反例如 $\mathbb{R}$ 上 $f : x \mapsto 2$ 与 $g : x \mapsto 3$,$f \circ g = f \neq g = g \circ f$, 其不动点分别为 2 和 3. □

2.16 设 (E, d) 为完备度量空间, 定义 $A \subset E$ 的距离函数 $d_A(x) := d(x, A)$, 并设 $\mathcal{C}$ 为 E 的所有紧子集构成的集族, 且定义 $\forall A, B \in \mathcal{C} : h(A, B) = \sup\limits_{x \in E} |d_A(x) - d_B(x)|$.
1. 证明 h 为 $\mathcal{C}$ 上的一个距离;
2.$\forall F \subset E : F_\varepsilon := \{x : d_F(x) \leq \varepsilon\}$. 证明 $h(A, B) = \inf\{\varepsilon \geq 0 : A \subset B_\varepsilon, B \subset A_\varepsilon\}$;
3. 证明 $(\mathcal{C}, h)$ 完备;
4. 取 E 上 n 个压缩映射 $\{f_i\}_{i=1}^n$, 定义 $(\mathcal{C}, h)$ 上映射

$$T : A \mapsto \bigcup_{k=1}^{n} f_k(A), \qquad A \in \mathcal{C}$$

证明 T 是压缩映射, 并由此导出存在唯一的紧子集 K 使 $T(K) = K$.

证明. 1. 非负与对称性显然, 正定性有 $\sup\limits_{x \in E} |d_A(x) - d_B(x)| = 0 \implies \forall x \in E : d_A(x) = d_B(x) \implies A = B$. 三角不等式有:

$$\begin{aligned} h(A, C) &= \sup_{x \in E} |d_A(x) - d_C(x)| \leq \sup_{x \in E} (|d_A(x) - d_B(x)| + |d_B(x) - d_C(x)|) \\ &\leq \sup_{x \in E} |d_A(x) - d_B(x)| + \sup_{x \in E} |d_B(x) - d_C(x)| = h(A, B) + h(B, C) \end{aligned}$$

故 h 为 $\mathcal{C}$ 上的距离.

2. #Unsolved

□

3 第三章

3.1 $\forall f \in C[0,1]: \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|, \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t.$
证明 1.$\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1$ 都是 $C[0,1]$ 的范数;2.$C[0,1]$ 关于 $\|\cdot\|_\infty$ 完备;3.$C[0,1]$ 关于 $\|\cdot\|_1$ 不完备.

证明. 1. 显然有正定, 正齐, 三角不等式.

2. 考虑 Cauchy 列 $\{f_n\}$,

$$\forall\varepsilon\exists N\forall n,m \geq N: \|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$$

此即一致收敛定义. 考虑 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, 则首先 $\forall x \in [0,1]: f(x)$ 存在. 其次证明其连续性.

$$\forall x \in [0,1]\forall\varepsilon\exists\delta\exists N\forall n \geq N\forall y \in B(x,\delta): |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon, |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$$

因此 $\forall x \in [0,1]\forall\varepsilon\exists\delta\forall y \in B(x,\delta): |f(x) - f(y)| < 3\varepsilon$, 即 $f \in C[0,1]$.

3. 考虑 Cauchy 列 $\{f_n\}$,

$$\forall\varepsilon\exists N\forall n,m \geq N: \|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon$$

取 $f_n(x) = x^n$, 则 $\int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|\,\mathrm{d}t \leq \dfrac{1}{1+\max\{n,m\}} \to 0$, 但 $f_n(x) \to 1_{\{1\}}(x)$ 不连续.

题解认为 $\{x^n\}$ 虽然逐点收敛到不连续函数, 但在 L^1 范数下收敛到 $f = 0$, 因此函数列极限在 $C[0,1]$ 中存在. 题解给出的函列为 $f_n(x) = \begin{cases} -1 & x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) \\ n\left(t - \frac{1}{2}\right) & x \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right] \\ 1 & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$. □

3.2 $\forall P \in \mathbb{R}[x]: \|P\|_\infty := \max_{x\in[0,1]} |P(x)|.$
1. 证明 $\|\cdot\|_\infty$ 是 $\mathbb{R}[x]$ 上范数;
2.$\forall a \in \mathbb{R}$ 定义 $L_a: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}, P \mapsto P(a)$. 证明 L_a 连续 $\iff a \in [0,1]$, 且给出 $\|L_a\|$;
3. 设 $a < b$, 定义 $L_{a,b}: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}, P \mapsto \int_a^b P(x)\mathrm{d}x$. 求 $A \subset \mathbb{R}$ 使 $a,b \in A \iff L_{a,b}$ 连续, 然后确定 $\|L_{a,b}\|$.

证明. 1. 首先正定性显然, 正齐性由 $\max_{x\in[0,1]} |P(x)| = 0 \implies |P(x)| \leq 0 \implies P(x) = 0$ 得到.$\|\lambda P\|_\infty = |\lambda|\,\|P\|_\infty$ 显然. 三角不等式由

$$\|P+Q\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |P(x)+Q(x)| \leq \max_{x\in[0,1]} (|P(x)| + |Q(x)|) \leq \max_{x\in[0,1]} |P(x)| + \max_{x\in[0,1]} |Q(x)| = \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$$

故 $\|\cdot\|_\infty$ 是 $\mathbb{R}[x]$ 上的一个范数.

2. 容易证明 L_a 是一个线性函数, 因此 L_a 连续 $\iff \exists C \geq 0\forall P \in \mathbb{R}[x]: |P(a)| \leq C\,\|P\|_\infty$.
考虑 $P_n(x) = (2x-1)^n$, 则 $\exists C \geq 0\forall n \in \mathbb{N}: |P_n(a)| = |2a-1|^n \leq C \cdot \|P_n\|_\infty = C \iff |2a-1| \leq 1 \iff a \in [0,1]$.
另一方面,$a \in [0,1]$ 时必然成立 $|P(a)| \leq \|P\|_\infty$, 因此 L_a 连续 $\iff a \in [0,1]$.

最后, 取 $P = 1$ 则 $\|L_a\| \geq 1$, 而 $\|L_a\| = \sup_{P\in\mathbb{R}[x]-\{0\}} \dfrac{|P(a)|}{\|P\|_\infty} \leq \sup_{P\in\mathbb{R}[x]-\{0\}} \dfrac{\|P\|_\infty}{\|P\|_\infty} = 1$, 故 $\|L_a\| = 1$.

3. 容易证明 $L_{a,b}$ 是一个线性函数, 则 $L_{a,b}$ 连续 $\iff \exists C \geq 0\forall P \in \mathbb{R}[x]: \left|\int_a^b P(x)\mathrm{d}x\right| \leq C\,\|P\|_\infty$.
仍考虑 $P_n(x) = (2x-1)^n$, 则 $\left|\int_a^b P_n(x)\mathrm{d}x\right| = \dfrac{|(2b-1)^{n+1} - (2a-1)^{n+1}|}{2(n+1)}$ 有界 $\iff 2a-1, 2b-1 \in [0,1]$, 即 $a,b \in [0,1]$. 而 $a,b \in [-1,1]$ 时 $\left|\int_a^b P(x)\mathrm{d}x\right| \leq (b-a)\,\|P\|_\infty$, 故 $a,b \in [0,1] \iff L_{a,b}$ 连续.

最后有

$$b-a=\frac{\left|\int_a^b 1\mathrm{d}x\right|}{1}\le\|L_{a,b}\|=\sup_{P\in\mathbb{R}[x]-\{0\}}\frac{\left|\int_a^b P(x)\mathrm{d}x\right|}{\|P\|_\infty}\le\sup_{P\in\mathbb{R}[x]-\{0\}}\frac{\int_a^b\|P\|_\infty\mathrm{d}x}{\|P\|\infty}=b-a$$

故 $\|L_{a,b}\|=b-a$. □

3.3 设 $(\mathbb{R}[x],\|\cdot\|_\infty)$ 为上题定义的赋范空间, 设 $E_0\subset\mathbb{R}[x]$ 为全体无常数项多项式构成的向量子空间.
1. 证明 $N(P):=\|P'\|_\infty$ 定义 E_0 上一个范数, 且 $\forall P\in E_0:\|P\|_\infty\le N(P)$.
2. 证明 $L(P)=\displaystyle\int_0^1\frac{P(x)}{x}\mathrm{d}x$ 定义了 E_0 关于 N 的连续线性泛函, 并求 $\|N\|$.
3. 上述 L 是否关于 $\|\cdot\|_\infty$ 连续?
4.$\|\cdot\|_\infty$ 和 N 在 E_0 上是否等价?

证明. 1. 首先证明 $N(P)$ 是一个范数:

$$N(P)\ge 0;N(P)=\|P'\|_\infty=0\iff P'=0\wedge P\in E_0\iff P=0;N(\lambda P)=\|\lambda P'\|_\infty=|\lambda|\,\|P\|_\infty$$
$$N(P+Q)=\|P'+Q'\|_\infty\le\|P'\|_\infty+\|Q'\|_\infty=N(P)+N(Q)$$

而由 Lagrange 中值定理有 $\forall P\in E_0\forall x\in[0,1]:\left|\dfrac{P(x)-P(0)}{x-0}\right|=|P'(\xi)|\le\max\limits_{x\in[0,1]}|P'(x)|=N(P)$, 故 $|P(x)|\le|P'(\xi)|\,|x|\le|P'(\xi)|\le N(P)$, 故 $\|P\|_\infty\le N(P)$.

2. 线性:$L(\lambda P+\mu Q)=\displaystyle\int_0^1\frac{\lambda P(x)+\mu Q(x)}{x}\mathrm{d}x=\lambda\int_0^1\frac{P(x)}{x}\mathrm{d}x+\mu\int_0^1\frac{Q(x)}{x}\mathrm{d}x=\lambda L(P)+\mu L(Q)$.

因此 L 连续 $\iff\exists C\ge 0\forall P\in E_0:\left|\displaystyle\int_0^1\frac{P(x)}{x}\mathrm{d}x\right|\le C\cdot N(P)$. 而同上使用 Lagrange 中值定理, 有

$$\left|\int_0^1\frac{P(x)}{x}\mathrm{d}x\right|\le\max_{x\in[0,1]}\left|\frac{P(x)}{x}\right|\le\max_{x\in[0,1]}|P'(x)|=N(P)$$

故 L 连续. 最后

$$1=\frac{\int_0^1 1\mathrm{d}x}{1}=\|N\|=\sup_{P\in E_0-\{0\}}\frac{\left|\int_0^1\frac{P(x)}{x}\mathrm{d}x\right|}{\|P'\|_\infty}\le\sup_{P\in E_0-\{0\}}\frac{\|P(x)/x\|_\infty}{\|P'\|_\infty}\le 1$$

因此 $\|N\|=1$.

3. 考虑 $P_n(x)=nx^n$, 则 $L(P_n)=\left|\displaystyle\int_0^1\frac{P_n(x)}{x}\mathrm{d}x\right|=1,\|P_n\|_\infty=n$, 因此 $\dfrac{L(P)}{\|P\|_\infty}$ 无界, 即 L 关于 $\|\cdot\|_\infty$ 不连续.

4. 考虑 $P_n(x)=x^n$, 则 $\|P_n\|_\infty=1,N(P_n)=n$, 因此不存在常数使得范数等价. □

3.4 在 $C[0,1]$ 上定义范数 $\|f\|_1=\displaystyle\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x,N(f)=\int_0^1 x\,|f(x)|\,\mathrm{d}x$.
1. 验证 N 是 $C[0,1]$ 上范数且 $N\le\|\cdot\|_1$.
2.$f_n(x)=\begin{cases}n-n^2x & x\in[0,n^{-1}]\\ 0 & \text{else}\end{cases}$. 证明在 $(C[0,1],N)$ 中 $f_n\to 0$, 并问:$\{f_n\}$ 在 $(C[0,1],\|\cdot\|_1)$ 中是否收敛? 这两个范数在 $C[0,1]$ 上诱导的拓扑是否相同?
3. 取 $a\in(0,1]$, 设 $B=\{f\in C[0,1]:\forall x\in[0,a]:f(x)=0\}$, 证明这两个范数在 B 上诱导相同拓扑.

证明. 1. 首先证明 N 是一个范数:

$$0\le N(f)=0\iff f=0,\qquad N(\lambda f)=\lambda\int_0^1 x\,|f(x)|\,\mathrm{d}x=\lambda N(f),$$
$$N(f+g)=\int_0^1 x\,|f(x)+g(x)|\,\mathrm{d}x\le\int_0^1 x\,|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_0^1 x\,|g(x)|\,\mathrm{d}x=N(f)+N(g)$$

其次有 $\forall f\in C[0,1]\exists\xi\in(0,1):N(f)=\displaystyle\int_0^1 x\,|f(x)|\,\mathrm{d}x=\xi\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x\le\|f\|_1$, 因此 $N\le\|\cdot\|_1$.

2.$N(f_n)=\displaystyle\int_0^{1/n}x(n-n^2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6n}\to 0$, 因此 $\{f_n\}$ 在 N 下收敛.
而 $\|f_n-f\|_1=\displaystyle\int_0^{1/n}\left|n-n^2x-f(x)\right|\mathrm{d}x+\int_{1/n}^1|f(x)|\,\mathrm{d}x\geq\int_{1/n}^1|f(x)|\,\mathrm{d}x\to\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x$. 因此 $\|f_n-f\|_1\to 0\implies f=0$, 但 $\|f_n\|_1=\displaystyle\int_0^{1/n}n-n^2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$, 因此在 $\|\cdot\|_1$ 下不收敛.
也因此 $\forall\varepsilon>0\exists n:f_n\in B_N(0,\varepsilon)$, 但 $f_n\notin B_1(0,1/2)$, 故 $\exists\varepsilon>0:B_N(0,\varepsilon)\not\subset B_1(0,1/2)$, 即拓扑不等价.

3. 仅需证明两范数等价. 有 $\forall f\in B\exists\xi\in(a,1):N(f)=\displaystyle\int_a^1x\,|f(x)|\,\mathrm{d}x=\xi\int_a^1|f(x)|\,\mathrm{d}x\in[a\,\|f\|_1,\|f\|_1]$, 得证. □

3.5 $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ 连续且不恒为 1. 取 $\alpha\in\mathbb{R}$, 定义 $T:C[0,1]\to C[0,1],f(x)\mapsto\alpha+\displaystyle\int_0^x f(\varphi(t))\mathrm{d}t$. 证明$T^2$是压缩映射. 由此证明

$$f(0)=\alpha,\qquad f'(x)=f(\varphi(x)),\qquad x\in[0,1]$$

有唯一解.

证明. 首先 $T^2(f)(x)=\alpha+\displaystyle\int_0^x\left(\alpha+\int_0^{\varphi(t)}f(\varphi(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$,$\left(T^2(f)-T^2(g)\right)(x)=\displaystyle\int_0^x\mathrm{d}t\int_0^{\varphi(t)}(f-g)(\varphi(s))\mathrm{d}s$. 而

$$\int_0^{\varphi(t)}(f-g)(\varphi(s))\mathrm{d}s=(f-g)(\varphi(\xi))\varphi(t)\leq\|f-g\|_\infty\varphi(t),\qquad\xi\in(0,\varphi(t))$$

$$\left\|T^2(f)-T^2(g)\right\|_\infty=\max_{x\in[0,1]}\left|\int_0^x\mathrm{d}t\int_0^{\varphi(t)}(f-g)(\varphi(s))\mathrm{d}s\right|\leq\max_{x\in[0,1]}\left|\|f-g\|_\infty\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t\right|\leq\lambda\|f-g\|_\infty$$

其中 $\lambda=\left|\displaystyle\int_0^1\varphi(t)\mathrm{d}t\right|<1$, 因此 T^2 为压缩映射. 又由 2.11,T 有唯一不动点, 即 $f(x)=\alpha+\displaystyle\int_0^x f(\varphi(t))\mathrm{d}t$ 有唯一解, 而此方程等价于题干中方程组.

需要注意的是,T 不是压缩映射, 如取 $f(x)=b,g(x)=a$. □

3.6 设 $\alpha\in\mathbb{R},a>0,b>1$. 考察微分方程

$$f(0)=\alpha,\qquad f'(x)=af(x^b),\qquad x\in[0,1]$$

1. 取 $M>0$, 验证 $(C[0,1],\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间, 其中 $\|f\|=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|\,\mathrm{e}^{-Mx}$.
2. 定义 $T:C[0,1]\to C[0,1],f\mapsto\alpha+\displaystyle\int_0^x af(t^b)\mathrm{d}t$, 证明选择合适的 M 可使 T 为压缩映射.
3. 证明此微分方程有唯一解.

证明. 1. 考虑 $(C[0,1],\|\cdot\|)$ 中 Cauchy 列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 则 $\mathrm{e}^{-M}\|f_n-f_m\|_\infty\leq\|f_n-f_m\|<\varepsilon$, 故 $\forall\varepsilon\exists N\forall n,m\geq N:\|f_n-f_m\|<\mathrm{e}^M\varepsilon$, 即 $\{f_n\}$ 也是 $\|\cdot\|_\infty$ 下的 Cauchy 列. 因此其收敛, 即 $(C[0,1],\|\cdot\|)$ 完备.

2.

$$\begin{aligned}\|T(f)-T(g)\|&=\max_{x\in[0,1]}\left|\int_0^x a(f-g)(t^b)\mathrm{d}t\right|\mathrm{e}^{-Mx}=a\max_{x\in[0,1]}\left|f(\xi^b)-g(\xi^b)\right|x\mathrm{e}^{-Mx}\\&\leq a\left(\max_{x\in[0,1]}\left|f(\xi^b)-g(\xi^b)\right|\mathrm{e}^{-M\xi^b}\right)\left(\max_{x\in[0,1]}x\mathrm{e}^{M(\xi^b-x)}\right)\leq a\|f-g\|\max_{x\in[0,1]}\mathrm{e}^{M(\xi^b-x)}\end{aligned}$$

若希望使得 $\|T(f)-T(g)\|\leq\lambda\|f-g\|$, 则需 $\lambda=a\max\limits_{x\in[0,1]}\mathrm{e}^{M(\xi^b-x)}<1$. 取 $x_0=\arg\max\mathrm{e}^{M(\xi^b-x)}$, 此时 $\xi=\xi_0$, 则 $M>\dfrac{\ln a}{x_0-\xi_0^b}$ 时成立.

3. 由 T 在适当情况下为压缩映射, 故 $T(f)=f$ 有唯一解, 而此式等价于上述微分方程, 故得证. □

3.7 设 E 是数域 $\mathbb{F}$ 上的无限维向量空间, 设 $\{e_i\}_{i\in I}$ 是其中一组向量. 若 E 中任一向量可被 $\{e_i\}_{i\in I}$ 中有限个向量唯一线性表示, 则称 $\{e_i\}_{i\in I}$ 是 E 中的一组 Hamel 基.
1. 由 Zorn 引理证明 E 中有一组 Hamel 基.
2. 若 E 是赋范空间, 则 E 上必存在不连续的线性泛函.
3. 证明在任一无限维赋范空间上, 一定存在一个比原来范数严格强的范数. 由此证明, 若向量空间 E 上任意两个范数诱导同一拓扑, 则 E 必为有限维空间.

证明. 1. 考虑 E 中线性无关组全体 E' 中的偏序关系 $\subset$. 对 E' 中任意链 $e^1\subset e^2\subset\cdots$ 考虑 $e=\bigcup\limits_{n\geq 1}e^n$ 为其一个上界. 这是因为 $\forall n\geq 1: e^n\subset e$, 且 e 中任意有限子集 $\{e_j\}_{j\in J}$ 含于某一 e^n, 故 $\{e_j\}_{j\in J}$ 线性无关, 故 e 线性无关,$e\subset E'$. 而由 Zorn 引理,E' 中存在一个极大元 ϵ.
下证 $E=\operatorname{span}(\epsilon)$. 若否, 则 $\exists v\in E$ 不能被 ϵ 表出, 即 $\epsilon\cup\{v\}$ 线性无关. 这与 ϵ 在 E' 中的极大性矛盾.
最后证明 ϵ 是 E 的 Hamel 基. 若有 $v\in E$ 不能被 ϵ 中有限向量线性表示, 则考虑 $\epsilon'=\epsilon\cup\{v\}$, 其中有限子集若不含 v 则含于 ϵ, 线性无关; 若含 v 则 v 不能被剩下向量线性表示, 线性无关. 因此 ϵ' 线性无关, 而这与 ϵ 的极大性矛盾.

2. 对 E 中 Hamel 基 ϵ 取一可数子集 $\{e_i\}_{i\geq 1}$ 及线性泛函 $f:(E,\|\cdot\|)\to\mathbb{F},\begin{cases}e_n\mapsto n, & e_n\in\{e_i\}_{i\geq 1}\\ e\mapsto 1, & e\in\epsilon-\{e_i\}_{i\geq 1}\end{cases}$, 因此 $\forall C\exists n>C: |f(e_n)|=n>C$. 因此 f 不连续.

3. 考虑 $\|\cdot\|_1: x\mapsto\|x\|+|f(x)|$, 容易证明这是一个范数, 且 $\|x\|\leq\|x\|_1$. 而由上可知 $\forall C>0\exists e_n:\|e_n\|_1=\|e_n\|+n>\|e_n\|$, 因此 $\|\cdot\|_1$ 严格强于 $\|\cdot\|$. □

3.8 设 E 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维向量空间 $(n<+\infty)$,$e=\{e_i\}_{i\in[n]}$ 为 E 上的一组基. 记 $[u]$ 为 $u\in\hom(E)$ 在基 e 下对应的矩阵.
1. 证明 $\varphi: u\mapsto[u]$ 给出 $\hom(E)\to M_n(\mathbb{F})$ 间的一个同构映射.
2. 若 $E=\mathbb{F}^n$,e 是经典基, 其上取范数 $\|\cdot\|_2$. 证明若 u(或等价地 $[u]$) 可正交相似对角化, 则 $\|u\|=\max\limits_{\lambda\text{是}u\text{的特征值}}|\lambda|$.
3. 基 e 如上, 试由 $[u]$ 中元素分别确定 $p=1,\infty$ 时 $u:(\mathbb{F}^n,\|\cdot\|_p)\to(\mathbb{F}^n,\|\cdot\|_p)$ 的范数 $\|u\|$.

证明. 1. 仅需证明 φ 为线性双射. 首先记 $u(e_j)=\sum\limits_{i\in[n]}u_{ij}e_i, x=\sum\limits_{i\in[n]}a_ie_i, [u]x=u(x)=\sum\limits_{i\in[n]}a_iu(e_i)=\sum\limits_{i\in[n]}a_i\sum\limits_{j\in[n]}u_{ji}e_j=\sum\limits_{i,j\in[n]}a_ju_{ij}e_i$. 因此 $[\lambda u+\mu v]x=\sum\limits_{i,j\in[n]}a_j(\lambda u_{ij}+\mu v_{ij})e_i=\lambda\sum\limits_{i,j\in[n]}a_ju_{ij}e_i+\mu\sum\limits_{i,j\in[n]}a_jv_{ij}e_i=(\lambda[u]+\mu[v])x$.
单射:$[u]=[v]\iff\forall\{a_j\}_{j\in[n]}\subset\mathbb{F}:\sum\limits_{i,j\in[n]}a_ju_{ij}e_i=\sum\limits_{i,j\in[n]}a_jv_{ij}e_i\iff\forall x\in E: u(x)=v(x)\iff u=v$,
满射:$\forall[u]\in M_n(\mathbb{F})\exists\{u_{ij}\}\subset\mathbb{F}\forall x\in E: u(x)=[u]x$. 因此 φ 为线性双射, 即同构.

2.u 可正交相似对角化, 即可在 E 中取正交基 $\{\epsilon_i\}_{i\in[n]}$ 有 $[u]\epsilon_i=\lambda_i\epsilon_i$, 其中 λ_i 为 $[u]$ 的特征值. 因此

$$\forall x\in E: x=\sum_{i\in[n]}a_i\epsilon_i, \|u(x)\|_2=\left\|\sum_{i\in[n]}a_iu(\epsilon_i)\right\|_2=\left\|\sum_{i\in[n]}a_i\lambda_i\epsilon_i\right\|_2$$

而由 $\{\epsilon_i\}_{i\in[n]}$ 是正交基, 即 $\langle\epsilon_i,\epsilon_j\rangle=\delta_{ij}$. 故

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i\in[n]}c_i\epsilon_i\right\|_2^2&=\left\|\sum_{i\in[n-1]}c_i\epsilon_i\right\|_2^2+\|c_n\epsilon_n\|_n^2+2\left\langle\sum_{i\in[n-1]}c_i\epsilon_i,c_n\epsilon_n\right\rangle=\left\|\sum_{i\in[n-1]}c_i\epsilon_i\right\|_2^2+c_n^2+2\sum_{i\in[n-1]}c_ic_n\langle\epsilon_i,\epsilon_n\rangle\\&=\left\|\sum_{i\in[n-1]}c_i\epsilon_i\right\|_2^2+c_n^2=\sum_{i\in[n]}c_n^2\end{aligned}$$

因此

$$\|u\|=\sup_{x\in E-\{0\}}\frac{\|u(x)\|}{\|x\|}=\sqrt{\frac{\sum_{i\in[n]}a_i^2\lambda_i^2}{\sum_{i\in[n]}a_i^2}}\leq\max_{i\in[n]}|\lambda_i|$$

设上式取到极大值时的指标为 i', 则 $\|u\|\geq\dfrac{\|u(\epsilon_{i'})\|}{\|\epsilon_{i'}\|}=\lambda_{i'}=\max\limits_{i\in[n]}\lambda_i$. 因此 $\|u\|=\max\limits_{i\in[n]}\lambda_i$.

答案给出一个 u 仅能对角化而不能正交相似对角化时的反例. 考虑 $[u]=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$, 此时 $P^{-1}[u]P=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, 即 $[u]$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=0$. 而 $x=2P^{(1)}+P^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 时,$\|u\|\geq\dfrac{\|[u](1,1)^T\|_2^2}{\|(1,1)^T\|_2^2}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}>1=\max\{\lambda_1,\lambda_2\}$.

3.$p=1$: 由 $x=\sum\limits_{i\in[n]}a_ie_i, u(x)=\sum\limits_{i\in[n]}a_iu(e_i)=\sum\limits_{i\in[n]}a_i\sum\limits_{j\in[n]}u_{ji}e_j=\sum\limits_{j\in[n]}e_j\sum\limits_{i\in[n]}a_iu_{ji}$, 故

$$\|u(x)\|_1=\sum_{j\in[n]}\left|\sum_{i\in[n]}a_iu_{ji}\right|\leq\sum_{i,j\in[n]}|a_i|\,|u_{ji}|=\sum_{i\in[n]}|a_i|\sum_{j\in[n]}|u_{ji}|\leq\max_{i\in[n]}\sum_{j\in[n]}|u_{ji}|\sum_{i\in[n]}|a_i|=\max_{i\in[n]}\sum_{j\in[n]}|u_{ji}|\,\|x\|_1$$

因此 $\|u\|\leq\max\limits_{i\in[n]}\sum\limits_{j\in[n]}|u_{ji}|$. 设上式取最大值时的指标为 i', 则 $x=e_{i'}$ 时,$\|u\|\geq\dfrac{\|u(e_{i'})\|_1}{\|e_{i'}\|_1}=\sum\limits_{j\in[n]}|u_{ji'}|=\max\limits_{i\in[n]}\sum\limits_{j\in[n]}|u_{ji}|$. 因此 $\|u\|=\max\limits_{i\in[n]}\sum\limits_{j\in[n]}|u_{ji}|$.

$p=\infty$:

$$\|u(x)\|_\infty=\max_{j\in[n]}\left|\sum_{i\in[n]}a_iu_{ji}\right|\leq\max_{j\in[n]}\sum_{i\in[n]}|a_i|\,|u_{ji}|\leq\max_{j\in[n]}\sum_{i\in[n]}|u_{ji}|\max_{i\in[n]}|a_i|=\max_{j\in[n]}\sum_{i\in[n]}|u_{ji}|\,\|x\|_\infty$$

因此 $\|u\|\leq\max\limits_{j\in[n]}\sum\limits_{i\in[n]}|u_{ji}|$. 设上式取最大值时的指标为 j', 则 $x=(\operatorname{sgn}u_{j'1},\operatorname{sgn}u_{j'2},\cdots,\operatorname{sgn}u_{j'n})^T,\|x\|_\infty=1$,

$$\|u(x)\|_\infty=\left|\sum_{i\in[n]}(\operatorname{sgn}u_{j'i})u_{j'i}\right|=\left|\sum_{i\in[n]}|u_{j'i}|\right|=\sum_{i\in[n]}|u_{j'i}|=\max_{j\in[n]}\sum_{i\in[n]}|u_{ji}|\implies\|u\|\geq\frac{\|u(x)\|_\infty}{\|x\|_\infty}=\max_{j\in[n]}\sum_{i\in[n]}|u_{ji}|$$

因此 $\|u\|=\max\limits_{i\in[n]}\sum\limits_{j\in[n]}|u_{ij}|$. □

3.9 E 是 Banach 空间.
1. 设 $u\in\mathcal{B}(E),\|u\|<1$, 证明 id_E-u 在 $\mathcal{B}(E)$ 中可逆.HINT: 考虑 $\mathcal{B}(E)$ 中级数 $\sum u^n$.
2. 记 $\mathrm{GL}(E)$ 为 $\mathcal{B}(E)$ 中全体可逆元构成的集合, 证明 $\mathrm{GL}(E)$ 关于复合运算成群, 且为 $\mathcal{B}(E)$ 上开集.
3. 证明 $u\mapsto u^{-1}$ 是 $\mathrm{GL}(E)$ 上的同胚映射.

证明. 1.$\sum\limits_{n\geq0}\|u^n\|\leq\sum\limits_{n\geq0}\|u\|^n=\dfrac{1}{1-\|u\|}$ 收敛, 即 $\sum\limits_{n\geq1}u^n$ 绝对收敛. 由 E 是 Banach 空间知其收敛, 即 $\sum\limits_{n\geq0}u^n\in\mathcal{B}(E)$. 而 $(\mathrm{id}_E-u)\circ\left(\sum\limits_{n\geq0}u^n\right)=\left(\sum\limits_{n\geq0}u^n\right)\circ(\mathrm{id}_E-u)=\mathrm{id}_E$, 因此 id_E-u 在 $\mathcal{B}(E)$ 中可逆.

2.$\forall u,v,w\in\mathrm{GL}(E):$

$$\left((u\circ v)\circ(v^{-1}\circ u^{-1})\right)(x)=(u\circ v)(v^{-1}(u^{-1}(x)))=u(v(v^{-1}(u^{-1}(x))))=u(u^{-1}(x))=x\implies u\circ v\in\mathrm{GL}(E)$$
$$u\circ\mathrm{id}_E=\mathrm{id}_E\circ u=u,\qquad\exists u^{-1}:u\circ u^{-1}=u^{-1}\circ u=\mathrm{id}_E$$
$$((u\circ v)\circ w)(x)=u(v(w(x)))=(u\circ(v\circ w))(x)$$

因此 $(\mathrm{GL}(E),\circ)$ 是群. 而 $\forall u\in\mathrm{GL}(E)\exists\varepsilon=\dfrac{1}{\|u^{-1}\|}\forall v\in\mathcal{B}(E):\|u-v\|<\dfrac{1}{\|u^{-1}\|}\implies\left\|\mathrm{id}_E-u^{-1}v\right\|\leq\left\|u^{-1}\right\|\|u-v\|<1\implies u^{-1}v$ 可逆 $\implies v$ 可逆. 因此 $\mathrm{GL}(E)$ 是 $\mathcal{B}(E)$ 中开集.

3. 由于 $\varphi:u\mapsto u^{-1}$ 为双射且 $\varphi=\varphi^{-1}$, 故 φ 连续则 φ^{-1} 连续, 故仅需证明 φ 连续:

$$\forall u\in\mathrm{GL}(E)\forall\varepsilon\exists\delta<\frac{\varepsilon}{\|u^{-1}\|^2+\|u^{-1}\|\,\varepsilon}\forall v\in\mathrm{GL}(E):\|u-v\|<\delta\implies\left\|u^{-1}-v^{-1}\right\|=\left\|u^{-1}v^{-1}(u-v)\right\|<\left\|u^{-1}\right\|\left\|v^{-1}\right\|\delta$$

而 $\left\|v^{-1}\right\|=\left\|u^{-1}\left(\mathrm{id}_E-(u-v)u^{-1}\right)^{-1}\right\|\leq\left\|u^{-1}\right\|\left\|\left(\mathrm{id}_E-(u-v)u^{-1}\right)^{-1}\right\|$, 其中 $\left\|(u-v)u^{-1}\right\|<\left\|u^{-1}\right\|\delta=\dfrac{\varepsilon}{\|u^{-1}\|+\varepsilon}<1$, 因此

$$\left\|\left(\mathrm{id}_E-(u-v)u^{-1}\right)^{-1}\right\|=\left\|\sum_{n\geq0}\left((u-v)u^{-1}\right)^n\right\|\leq\sum_{n\geq0}\left\|(u-v)u^{-1}\right\|^n=\frac{1}{1-\|(u-v)u^{-1}\|}<\frac{1}{1-\|u^{-1}\|\,\delta}$$

代入可得:$\left\|u^{-1}-v^{-1}\right\|<\dfrac{\left\|u^{-1}\right\|\delta}{1-\left\|u^{-1}\right\|\delta}=\dfrac{1}{1-\left\|u^{-1}\right\|\delta}-1<\dfrac{\varepsilon}{\left\|u^{-1}\right\|}$, 故 φ 连续. □

3.10 $f\in L^2(\mathbb{R}), g(x)=\dfrac{1_{[1,+\infty)}(x)}{x}$, 证明 $fg\in L^1(\mathbb{R})$. 举例说明 $f_1,f_2\in L^1(\mathbb{R}), f_1f_2\notin L^1(\mathbb{R})$.

证明. 由 Hölder 不等式,

$$\|fg\|_1\le\|f\|_2\|g\|_2=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\|f\|_2=\|f\|_2<\infty$$

因此 $fg\in L^1(\mathbb{R})$.

考虑 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}1_{(0,1]}(x), \|f\|_1=2, \left\|f^2\right\|_1=+\infty$. □

3.11 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为有限测度空间.

1. 证明 $0<p<q\le\infty$ 则 $L^q(\Omega)\subset L^p(\Omega)$. 举反例说明 $\mu(\Omega)=\infty$ 时结论不成立.
2. 证明若 $f\in L^\infty(\Omega)$ 则 $f\in\bigcap\limits_{p<\infty}L^p(\Omega)$ 且 $\|f\|_\infty=\lim\limits_{p\to\infty}\|f\|_p$.
3. 设 $f\in\bigcap\limits_{p<\infty}L^p(\Omega)$ 且 $\varlimsup\limits_{p\to\infty}\|f\|_p<\infty$, 证明 $f\in L^\infty(\Omega)$.

证明. 1. 由 Hölder 不等式, 考虑 $p^{-1}=q^{-1}+s^{-1}$, 其中 $s=\left(p^{-1}-q^{-1}\right)^{-1}\in(0,+\infty)$, 有

$$\forall f\in L^q(\Omega):\|f\|_p\le\|f\|_q\|1\|_s=\mu(\Omega)^{\frac{1}{s}}\|f\|_q<\infty\implies f\in L^p(\Omega)$$

$\mu(\Omega)=\infty$ 时,$\|1\|_\infty=1, \|1\|_p=\mu(\Omega)=\infty$.

2. 由上,$\forall p\in(0,\infty):L^\infty(\Omega)\subset L^p(\Omega)$, 因此 $L^\infty(\Omega)\subset\bigcap\limits_{p<\infty}L^p(\Omega)$.

而 $\|f\|_p\le\mu(\Omega)^{\frac{1}{s}}\|f\|_\infty$,$q=\infty$ 时 $s=p$. 两端取 $p\to\infty$ 有 $\varlimsup\limits_{p\to\infty}\|f\|_p\le\|f\|_\infty$.
另一方面, 设 $S_\delta=\{x\in\Omega:|f(x)|\ge\|f\|_\infty-\delta\}, \delta\in(0,\|f\|_\infty)$. 有

$$\|f\|_p\ge\left(\int_{S_\delta}(\|f\|_\infty-\delta)^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}=(\|f\|_\infty-\delta)\,\mu(S_\delta)^{1/p}\implies\varliminf_{p\to\infty}\|f\|_p\ge\|f\|_\infty-\delta$$

而 $\delta>0$, 因此有 $\varliminf\limits_{p\to\infty}\|f\|_p\ge\|f\|_\infty$. 综上, $\lim\limits_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty$.

3. 若否, 即对 $E_M=\{x\in\Omega:|f(x)|\ge M\},\forall M>0:\mu(E_M)>0$, 则 $\|f\|_p\ge\displaystyle\int_{E_M}|f|^p\,\mathrm{d}\mu\ge M\mu(E_M)^{1/p}$. 两端取 $p\to\infty$ 有 $\infty>\varlimsup\limits_{p\to\infty}\|f\|_p\ge M$. 由 M 的任意性, $\varlimsup\limits_{p\to\infty}\|f\|_p=\infty$, 矛盾. □

3.12 $0<p<q\le\infty,\theta\in[0,1]$, 且 $\dfrac{1}{s}=\dfrac{\theta}{p}+\dfrac{1-\theta}{q}$. 证明 $\forall f\in L^p(\Omega)\cap L^q(\Omega):f\in L^s(\Omega), \|f\|_s\le\|f\|_p^\theta\|f\|_q^{1-\theta}$.

证明. 若 $\theta=0$ 则 $s=q$, 此时 $f\in L^q(\Omega)=L^s(\Omega), \|f\|_s=\|f\|_q$.$\theta=1$ 时同理, 换 q 为 p 即可.

若 $\theta\in(0,1)$ 则 $\dfrac{s\theta}{p}+\dfrac{s(1-\theta)}{q}=1$. 此时 $|f|^{s\theta}\in L^{\frac{p}{s\theta}}(\Omega), |f|^{s(1-\theta)}\in L^{\frac{q}{s(1-\theta)}}(\Omega)$, 故由 Hölder 不等式有:

$$\int_\Omega|f|^s=\left\||f|^{s\theta}|f|^{s(1-\theta)}\right\|_1\le\left\||f|^{s\theta}\right\|_{\frac{p}{s\theta}}\left\||f|^{s(1-\theta)}\right\|_{\frac{q}{s(1-\theta)}}=\left(\int_\Omega|f|^p\right)^{s\theta/p}\left(\int_\Omega|f|^q\right)^{s(1-\theta)/q}=\|f\|_p^{s\theta}\|f\|_q^{s(1-\theta)}$$

因此 $\|f\|_s\le\|f\|_p^\theta\|f\|_q^{1-\theta}<\infty, f\in L^s(\Omega)$. □

3.13 (广义 Minkowski 不等式) 设σ-有限测度空间 $(\Omega_1,\mathcal{A}_1,\mu_1),(\Omega_2,\mathcal{A}_2,\mu_2), 0<p<q<\infty$.
证明对任意可测函数 $f:(\Omega_1\times\Omega_2,\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2)\to\mathbb{F}$ 有:

$$\left(\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1}|f(x_1,x_2)|^p\,\mathrm{d}\mu_1(x_1)\right)^{q/p}\mathrm{d}\mu_2(x_2)\right)^{1/q}\le\left(\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2}|f(x_1,x_2)|^q\,\mathrm{d}\mu_2(x_2)\right)^{p/q}\mathrm{d}\mu_1(x_1)\right)^{1/p}$$

Proof in Folland Theorem 6.19 & Here. 首先我们设 $F(x_1,x_2)=|f(x_1,x_2)|^p, s=q/p\in(1,\infty)$, 则可改写不等式为:

$$\left(\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1}F(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_1(x_1)\right)^s\mathrm{d}\mu_2(x_2)\right)^{1/s}\le\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2}F(x_1,x_2)^s\mathrm{d}\mu_2(x_2)\right)^{1/s}\mathrm{d}\mu_1(x_1)$$

考虑 s 的共轭数 r 及 $g\in L^r(\Omega_2)$, 有:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1}F(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_1(x_1)\right)|g(x_2)|\,\mathrm{d}\mu_2(x_2)&\overset{\text{Tonelli 定理}}{=}\int_{\Omega_1\times\Omega_2}F(x_1,x_2)\,|g(x_2)|\,\mathrm{d}\mu_1(x_1)\mathrm{d}\mu_2(x_2)\\&\overset{\text{Hölder 不等式}}{\le}\int_{\Omega_1}\|F(x_1,\cdot)\|_s\,\|g\|_r\,\mathrm{d}\mu_1(x_1)=\|g\|_r\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2}F(x_1,x_2)^s\mathrm{d}\mu_2(x_2)\right)^{1/s}\mathrm{d}\mu_1(x_1)\end{aligned}$$

由 $L^s(\Omega_2)\to L^r(\Omega_2)^*$ 有一个同构 $f\mapsto\varphi(f)$, 其中 $\varphi(f):g\mapsto\displaystyle\int_{\Omega_2}f(x_2)g(x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2)$, 因此

$$\begin{aligned}\left(\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1}F(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_1(x_1)\right)^s\mathrm{d}\mu_2(x_2)\right)^{1/s}&=\left\|\int_{\Omega_1}F(x_1,\cdot)\mathrm{d}\mu_1(x_1)\right\|_s=\left\|\varphi\left(\int_{\Omega_1}F(x_1,\cdot)\mathrm{d}\mu_1(x_1)\right)\right\|\\&=\sup_{g\in L^r(\Omega_2)}\frac{1}{\|g\|_r}\left|\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1}F(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_1(x_1)\right)|g(x_2)|\,\mathrm{d}\mu_2(x_2)\right|\le\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2}F(x_1,x_2)^s\mathrm{d}\mu_2(x_2)\right)^{1/s}\mathrm{d}\mu_1(x_1)\end{aligned}$$

□

3.14 设 $p\in(0,\infty)$.
1. 对 $\forall x=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\ell_p$ 定义 $(0,1)$ 上函数 $T(x)(t)=\displaystyle\sum_{n\ge1}(n(n+1))^{\frac{1}{p}}x_n1_{\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)}(t)$.
证明 $T:\ell_p\to\mathrm{im}(T)\subset L^p(0,1)$ 是线性等距同构映射.
2. 若 $p\ge1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 对 $\forall f\in L^p(0,1)\forall n\ge1$ 定义 $S(f)_n=(n(n+1))^{\frac{1}{q}}\displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}f(t)\mathrm{d}t$.
证明 $S:L^p(0,1)\to\ell_p,f\mapsto\{S(f)_n\}_{n\ge1}$ 是线性映射, 且 $S\circ T=\mathrm{id}_{\ell_p}$.

证明. 1. 首先

$$\|T(x)\|_p=\left(\int_0^1\left(\sum_{n\ge1}[n(n+1)]^{1/p}x_n1_{\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)}(t)\right)^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}=\left(\sum_{n\ge1}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\left([n(n+1)]^{1/p}x_n\right)^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}=\left(\sum_{n\ge1}x_n^p\right)^{1/p}=\|x\|_p$$

线性性和单射性显然, 由定义,T 线性等距双射, 即得证.

2. 线性性显然.

$$\begin{aligned}S(T(x))_n&=S\left(\sum_{n\ge1}[n(n+1)]^{1/p}x_n1_{\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)}(\cdot)\right)_n=[n(n+1)]^{1/q}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\sum_{n\ge1}[n(n+1)]^{1/p}x_n1_{\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)}(t)\mathrm{d}t\\&=[n(n+1)]^{1/q}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}[n(n+1)]^{1/p}x_n\mathrm{d}t=[n(n+1)]^{1/q}\left(n^{\frac{1}{p}-1}(n+1)^{\frac{1}{p}}-n^{\frac{1}{p}}(n+1)^{\frac{1}{p}-1}\right)x_n=x_n\end{aligned}$$

因此 $S\circ T=\mathrm{id}_{\ell_p}$. □

3.15 1. 证明: 若 (E,d) 为可分度量空间, 则 (F,d) 也是,$F\subset E$.
2. 证明 $\mathbb{R}^n,c_0,\ell_p(p\in[1,\infty)),C([a,b],\mathbb{R}),C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}),L^p(0,1)(p\in[1,\infty))$ 都是可分的.
3. 设 $C=\{\pm1\}^{\mathbb{N}}\subset\ell_\infty$, 验证 $\forall x,y\in C:x\ne y\implies\|x-y\|_\infty=2$, 再证明 C 不可数, 由此导出 ℓ_∞ 不可分. 并类似证明 $L^\infty(0,1)$ 不可分.

证明. 1. 设 E 的可数稠密集为 A, 则 $\forall x\in F\forall\varepsilon>0\exists a\in A:x\in B(a,\varepsilon)$, 从中取 $x_a\in F\cap B(a,\varepsilon)$, 则 $B(a,\varepsilon)\subset B(x_a,2\varepsilon)$, 因此 $A_F=\{x_a\}_{a\in A}$ 是一个可数集, 且 $\forall x\in F\forall\varepsilon>0\exists x_a\in A_F:x\in B(x_a,2\varepsilon)$, 故 $\overline{A_F}=F$.

2.(1)$\mathbb{R}^n=\overline{\mathbb{Q}^n}$;

(3)$\forall x\in\ell_p\forall\varepsilon>0\exists N\in\mathbb{N}:\sum\limits_{n>N}|x_n|^p<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 再取 $q=\{q_n\}_{n\in[N]}\subset\mathbb{Q}$ 有 $|x_n-q_n|<\left(\dfrac{\varepsilon}{2N}\right)^{1/p}(n\in[N])$. 记 $A_n=\{\{q_1,\cdots,q_n,0,\cdots\}:q_i\in\mathbb{Q}\}\subset\ell_p$, 则

$$\forall x\in\ell_p\forall\varepsilon>0\exists N\in\mathbb{N}\exists q\in A_N:\|x-q\|_p^p=\sum_{n>N}|x_n|^p+\sum_{n\le N}|x_n-q_n|^p<\frac{\varepsilon}{2}+N\cdot\frac{\varepsilon}{2N}=\varepsilon$$

因此 $\forall x\in\ell_p\forall\varepsilon>0\exists q\in\bigcup\limits_{n\ge1}A_n:\|x-q\|_p<\varepsilon$, 即 $\overline{\bigcup\limits_{n\ge1}A_n}=\ell_p$.

(4) 首先由紧集上的 (一致) 连续性,

$$\forall f\in C[a,b]\forall\varepsilon\exists\delta\forall x,y\in[a,b]:|x-y|<\delta\implies|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

可以考虑分划 $\{s_n\}_{n\in[N]}\subset[a,b]$, 其中 $s_0=a,s_N=b,s_{k+1}-s_k<\delta$. 依次用折线连接 $(s_k,f(s_k))$ 得到以折线连接的分段函数 g, 则 $\forall x\in[s_k,s_{k+1}]$:

$$|f(x)-g(x)|=\left|\frac{f(s_{k+1})-f(s_k)}{s_{k+1}-s_k}(x-s_k)+f(s_k)-f(x)\right|\le\left|\frac{x-s_k}{s_{k+1}-s_k}\right||f(s_{k+1})-f(s_k)|+|f(s_k)-f(x)|<2\varepsilon$$

因此 $[a,b]$ 上全体折线函数稠密于 $C[a,b]$ 中. 而全体分段点 $(s_k,f(s_k))\in\mathbb{Q}^2$ 的折线函数稠密于前者, 该集合可数. 因此得证.

(5) 由于 $\forall f\in C_0(\mathbb{R})\exists N>0:\left\|f|_{\mathbb{R}-[-N,N]}\right\|<\varepsilon$, 因此 $\bigcup\limits_{N\ge0}C[-N,N]$ 稠密于 $C_0(\mathbb{R})$. 而 $C[-N,N]$ 由 (4) 有一个可数稠密集 B_N, 因此 $\overline{\bigcup\limits_{N\ge0}B_N}=C_0(\mathbb{R})$.

(6) 由 $L^1(0,1)$ 中阶梯函数族稠密于 $L^p(0,1)$, 而可以选取函数值为有理数和分段点为有理函数的阶梯函数稠密于前者, 因此 $L^p(0,1)$ 有可数稠密子集.

3.$\forall x,y\in C:x\ne y\implies\|x-y\|_\infty=\sup\limits_{n\ge1}|x_n-y_n|=2$, 这是由于 $\exists N:x_N\ne y_N\implies|x_N-y_N|=|1-(-1)|=2$.
而 $C\to\mathcal{P}\mathbb{N},x=\{x_n\}\mapsto A\subset\mathbb{N},x_n=1\iff n\in A$ 给出一个双射, 因此 $|C|=|\mathcal{P}\mathbb{N}|>\mathbb{N}$, 故不可数.
因此, 若 ℓ_∞ 有可数稠密子集 A, 则 C 有可数稠密子集 $A\cap C$, 但 $\exists x\in C-A\cap C\exists\varepsilon<2\forall y\in A\cap C:\|x-y\|>\varepsilon$, 因此 C 中不存在这样的稠密子集. □

3.16 (卷积) 设 $f,g\in L^1(\mathbb{R})$.(下述积分为 Lebesgue 积分)
1. 证明 $\int_{\mathbb{R}^2}f(u)g(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\left(\int_{\mathbb{R}}f(u)\mathrm{d}u\right)\left(\int_{\mathbb{R}}g(v)\mathrm{d}v\right)=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$, 由此导出 $x\mapsto\int_{\mathbb{R}}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$ 在 $\mathbb{R}$ 上 a.e. 有定义.
2. 定义卷积 $f*g(x)=\begin{cases}\int_{\mathbb{R}}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y, & \text{积分存在,}\\ 0, & \text{else.}\end{cases}$. 证明 $f*g\in L^1(\mathbb{R})$ 且 $\|f*g\|_1\le\|f\|_1\|g\|_1$.
3. 取 $f=1_{[0,1]}$, 计算 $f*f$.

证明. 1. 第一个等号由 Fubini 定理立得. 第二个等号:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}}g(y)\left(\int_{\mathbb{R}}f(x-y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}}g(y)\left(\int_{\mathbb{R}}f(x-y)\mathrm{d}(x-y)\right)\mathrm{d}y\\&=\int_{\mathbb{R}}g(v)\left(\int_{\mathbb{R}}f(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v=\int_{\mathbb{R}^2}f(u)g(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\end{aligned}$$

而 $\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\left(\int_{\mathbb{R}}f(u)\mathrm{d}u\right)\left(\int_{\mathbb{R}}g(v)\mathrm{d}v\right)<\infty$, 因此 $\int_{\mathbb{R}}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$ 在 $\mathbb{R}$ 上 a.e. 有限, 故有定义.

2. 由上,

$$\|f*g\|_1=\int_{\mathbb{R}}|f*g(x)|\,\mathrm{d}x\le\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}}|g(y)|\,\mathrm{d}y\right)=\|f\|_1\|g\|_1<\infty$$

因此 $f*g\in L^1(\mathbb{R}),\|f*g\|_1\le\|f\|_1\|g\|_1$.

3. 由 $1_{[0,1]}(x-y)=1_{[x-1,x]}(y)$, 因此

$$f*f(x)=\int_{\mathbb{R}}1_{[0,1]}(x-y)1_{[0,1]}(y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}}1_{[x-1,x]}(y)1_{[0,1]}(y)\mathrm{d}y=m([x-1,x]\cap[0,1])=\begin{cases}x, & x\in[0,1]\\ 2-x, & x\in[1,2]\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

□

3.17 (Hardy 不等式) 在 $\mathbb{R}$ 上考虑 Borel σ-代数和 Lebesgue 测度. 设 $p\in(1,\infty)$ 且 $f\in L^p(0,+\infty)$. 在 $(0,+\infty)$ 上定义 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 本题的目标是证明 Hardy 不等式:

$$\|F\|_p\leq\frac{p}{p-1}\|f\|_p\,,\qquad\forall f\in L^p(0,\infty)$$

1. 说明 F 在 $(0,+\infty)$ 上的定义是合理的, 且

$$\forall x_1,x_2>0:|x_1F(x_1)-x_2F(x_2)|\leq|x_1-x_2|^{\frac{1}{q}}\|f\|_p$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 并由此证明 F 在 $0,+\infty$ 上连续, 故可测.

2. 若 f 是有紧支撑的非负连续函数, 证明 F 在 $(0,+\infty)$ 上连续可导, 且有

$$(p-1)\int_0^{+\infty}F(x)^p\mathrm{d}x=p\int_0^{+\infty}F(x)^{p-1}f(x)\mathrm{d}x$$

并由此导出 Hardy 不等式.

3. 证明 Hardy 不等式对所有 $f\in L^p(0,+\infty)$ 成立.

4. 用反例说明 $p=1$ 时不等式不成立, 即不存在任何常数 $C>0,\forall f\in L^p(0,+\infty):\|F\|_p\leq C\|f\|_p$.

5. 证明 $\frac{p}{p-1}$ 是使不等式成立的最优常数, 即 $\|F\|_p\leq C\|f\|_p\implies C\geq\frac{p}{p-1}$.

HINT: 考虑 $f(x)=x^{-\frac{1}{p}}1_{[1,n]}(x)$ 和极限 $\lim_{n\to\infty}\left\|F1_{[1,n]}(x)\right\|_p/\|f\|_p$.

证明. 1.

□

3.18 令 $p\in[2,+\infty)$.

1. 首先证明 Clarkson 不等式:

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p\leq\frac{1}{2}\left(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p\right),\qquad\forall f,g\in L^p(\mathbb{R})$$

1.1. 证明 $\forall s,t\in[0,+\infty):s^p+t^p\leq\left(s^2+t^2\right)^{\frac{p}{2}}$.

1.2. 证明 $\forall a,b\in\mathbb{R}:\left|\frac{a+b}{2}\right|^p+\left|\frac{a-b}{2}\right|^p\leq\frac{1}{2}(|a|^p+|b|^p)$.

1.3. 导出 Clarkson 不等式.

2. 设 C 为 $L^p(\mathbb{R})$ 中非空闭凸集, 且 $f\in L^p(\mathbb{R})$, 记 $d=d(f,C)$. 下证:$\exists!g_0\in C:d=\|f-g_0\|_p$.

2.1. 解释为什么存在 C 中序列 $\{g_n\}_{n\geq1}$ 有 $\|f-g_n\|_p^p\leq d^p+\frac{1}{n}$.

2.2. 用 Clarkson 不等式证明 $\left\|\frac{g_n+g_m}{2}\right\|_p^p\leq\frac{1}{2n}+\frac{1}{2m}$.

2.3. 导出存在函数 $g_0\in C$ 使得 $d(f,C)=\|f-g_0\|_p$.

2.4. 证明上述 $g_0\in C$ 唯一.

3. 记上述 g_0 为 $P_C(f)$, 下证 $P_C:L^p(\mathbb{R})\to C$ 连续.

3.1. 证明 $\forall f,g\in L^p(\mathbb{R}):\|g-P_C(g)\|_p\leq\|f-g\|_p+\|f-P_C(f)\|_p$.

3.2. 用 Clarkson 不等式证明

$$\forall f,g\in L^p(\mathbb{R}):\left\|\frac{P_C(f)-P_C(g)}{2}\right\|_p^p\leq\frac{1}{2}\left(\|f-P_C(g)\|_p^p-\|f-P_C(f)\|_p^p\right)$$

3.3. 最后导出 P_C 的连续性.

5 第五章

习题 1 设 $A=\{x(t)\in C^1[a,b]:|x(t)|\le M,|x'(t)|\le M_1\}$, 则 A 是 $C[a,b]$ 中的列紧集.

证明. 仅需证明 A 等度连续, 这样由 A 一致有界 (即 $\forall t\in[a,b]\forall x\in A:|x(t)|\le M$), 再由 Ascoli 定理得到 A 相对紧 (即列紧).

首先由 $\forall x\in A\forall t\in[a,b]:|x'(t)|\le M_1$ 可以给出 $\forall t\in[a,b]\exists\delta_t>0:|t-t_0|<\delta_t \implies |x(t)-x(t_0)|\le M_1|t-t_0|$. 用 $B(t,\delta_t/2)$ 覆盖 $[a,b]$, 由紧性可以得到有限个开球 $\left\{B\left(t_i,\dfrac{\delta_i}{2}\right)\right\}$ 覆盖 $[a,b]$. 令 $t_{n_1},t_{n_2},\cdots,t_{n_m}$ 依次是 t 到 t_0 之间所有的开球中心 t_i, 因此有

$$\begin{aligned}\forall t,t_0\in[a,b]:|x(t)-x(t_0)|&\le|x(t)-x(t_{n_1})|+|x(t_{n_1})-x(t_{n_2})|+\cdots+|x(t_{n_m})-x(t_0)|\\&\le M_1(|t-t_{n_1}|+|t_{n_1}-t_{n_2}|+\cdots+|t_{n_m}-t_0|)=M_1|t-t_0|\end{aligned}$$

由 x 的任意性, 所以有

$$\forall t_0\in[a,b]\forall\varepsilon>0\exists B\left(t_0,\frac{\varepsilon}{M_1}\right)\forall t\in B\left(t_0,\frac{\varepsilon}{M_1}\right)\forall x\in A:|x(t)-x(t_0)|\le M_1|t-t_0|<\varepsilon$$

故等度连续得证. □

习题 2 设 M 是 $C[a,b]$ 中的有界集, 证明集合 $S=\left\{F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t:f\in M\right\}$ 是列紧集.

证明. 我们有

$$\forall F\in S\forall x\in[a,b]:F(x)\le\int_a^b|f(t)|\,\mathrm{d}t=\|f\|_1\le(b-a)\|f\|_\infty$$

$$|F(x)-F(x_0)|=\left|\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t\right|\le\int_{x_0}^x|f(t)|\,\mathrm{d}t\le|x-x_0|\,\|f\|_\infty$$

因此在 M 关于 $\|\cdot\|_\infty$ 有界时,S 一致有界, 且 F 是 Lipschitz 映射, 故 S 等度连续.

最后由 Ascoli 定理,S 是列紧的. □

习题 3 证明集合 $M=\{\sin nx:n\in\mathbb{Z}_{\ge0}\}$ 在空间 $C[0,\pi]$ 中是有界集, 但不是列紧集.

证明. 显然 $\|\sin nx\|_\infty=1$, 但若 M 列紧, 则 $\exists\{n_i\}_{i\ge1}\subset\mathbb{Z}_{\ge0}\exists f\in C[0,\pi]:\sin n_ix\to f(x)$.
而 $\|f(x)-\sin n_ix\|_\infty\ge\left|f\left(\dfrac{k\pi}{n_i}\right)\right|\to0,k\in[n_i]$, 因此在 $\left\{\dfrac{k\pi}{n_i}:i\in\mathbb{Z}_{\ge0},k\in[n_i]\right\}$ 上 f 取 0, 而这是一个稠密集, 且 f 连续, 故 $f=0$. 但 $\|\sin n_ix\|_\infty=1$, 矛盾. 因此不存在这样的连续函数 f, 即 M 不列紧. □

习题 4 设 (M,d) 是一个列紧距离空间,$E\subset C(M)$, 其中 $C(M)$ 表示 M 上一切实值或复值连续函数全体,E 中函数一致有界并满足下列不等式

$$|x(t_1)-x(t_2)|\le c\cdot d(t_1,t_2)^\alpha,\qquad\forall x\in E,t_1,t_2\in M$$

其中 $0<\alpha\le1,c>0$, 求证 E 在 $C(M)$ 中是列紧集.

证明. 仅需证明 E 等度连续.

$$\forall t_0\in M\forall\varepsilon\exists B\left(t_0,\sqrt[\alpha]{\frac{\varepsilon}{c}}\right)\forall t\in B\left(t_0,\sqrt[\alpha]{\frac{\varepsilon}{c}}\right)\forall x\in E:|x(t)-x(t_0)|\le c\cdot d(t,t_0)^\alpha<\varepsilon$$

□

5.3 拓扑空间 K 和度量空间 (E,d) 中, 若 $\{f_n\}$ 在 $C(K,E)$ 中依一致范数收敛, 则 $\{f_n\}$ 等度连续.

证明. 若 $\|f\|=\sup\limits_{t\in K}|f(t)|,\exists f\in C(K,E):\|f-f_n\|\to0$, 则 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N\in\mathbb{Z}_{\ge1}$, 有 $\forall n\ge N:\|f-f_n\|<\varepsilon$.
考虑 $\forall x_0\in K\exists O(x)\forall x\in O(x_0):d(f(x),f(x_0))<\varepsilon$, 则 $\forall\varepsilon>0\forall x_0\in K\exists O(x_0)\forall x\in O(x_0)\forall n\ge N$ 时有

$$d(f_n(x),f_n(x_0))\le d(f_n(x),f(x))+d(f(x),f(x_0))+d(f(x_0),f_n(x_0))\le3\varepsilon$$

因此 $\{f_n\}_{n\ge N}$ 等度连续, 故 $\{f_n\}_{n\ge1}=\{f_n\}_{1\le n<N}\cup\{f_n\}_{n\ge N}$ 等度连续. □

5.12 $[0,1]$ 上所有偶多项式 $\mathcal{Q}$ 是否稠密于 $C([0,1],\mathbb{R})$?$[-1,1]$ 上所有偶多项式 $\mathcal{R}$ 是否稠密于 $C([-1,1],\mathbb{R})$?

证明. 首先 $\mathcal{Q}$ 可分点, 仅需注意到 x^2 在 $[0,1]$ 上是双射. 其次,$\forall x \in [0,1] : x^2 + 1 \neq 0$.
最后证明 $\mathcal{Q}$ 是一个子代数:$\forall P, Q \in \mathcal{Q}, \forall c \in \mathbb{R}$, 记 $P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k}, Q = \sum_{k=0}^{m} b_k x^{2k}$,

$$cP = \sum_{k=0}^{n} c a_k x^{2k} \in \mathcal{Q}, P + Q = \sum_{k=0}^{\max\{n,m\}} (a_k + b_k) x^{2k} \in \mathcal{Q}, PQ = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k \in \mathcal{Q}$$

因此由 Stone-Weierstrass 定理可知 $\mathcal{Q}$ 稠密于 $C([0,1],\mathbb{R})$.

另一方面,$\mathcal{R}$ 中的多项式都不是 $[-1,1]$ 上的双射, 因为 $\forall P \in \mathcal{R} \forall x \in [0,1] : P(x) = P(-x)$. 因此不能用 Stone-Weierstrass 定理.

□

6 第六章

SJ 4.1 设 $\sup\limits_{n\geq 1}|\alpha_n|<\infty$, 在 ℓ^1 上定义 $T:\{\xi_k\}\mapsto\{\alpha_k\xi_k\}$. 证明 T 有界线性且 $\|T\|=\sup\limits_{n\geq 1}|\alpha_n|$.

证明. T 的线性性显然. 设 $a=\sup\limits_{n\geq 1}|\alpha_n|, \xi=\{\xi_k\}_{k\geq 1}$, 有 $\|T\xi\|_1=\sum\limits_{k\geq 1}|\alpha_k\xi_k|\leq a\sum\limits_{k\geq 1}|\xi_k|=a\|\xi\|_1$, 因此 $\|T\|\leq a$. 另一方面对 $\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, 仅需考虑 $\xi_k=\delta_{kn}, \|\xi\|_1=1, \|T\xi\|_1=|\alpha_n|, \|T\|\geq\sup\limits_{n\geq 1}|\alpha_n|$. 故 $\|T\|=a$. □

SJ 4.9 X,Y 是 Banach 空间,$T\in\mathcal{B}(X,Y)$. 若 T 是双射, 证明 $\exists a>0\exists b>0\forall x\in X: a\|x\|\leq\|Tx\|\leq b\|x\|$.

证明. 考虑双射 $T^{-1}:Y\to X$, 首先 $\forall y_1,y_2\in Y\forall a_1,a_2\in\mathbb{F}\exists x_1,x_2\in X$:

$$T^{-1}(a_1y_1+a_2y_2)=T^{-1}(a_1T(x_1)+a_2T(x_2))=T^{-1}\circ T(a_1x_1+a_2x_2)=a_1T^{-1}(y_1)+a_2T^{-1}(y_2)$$

因此 T^{-1} 线性. 其次由开映射定理,$\exists r>0: rB_Y\subset T(B_X)\implies rT^{-1}(B_Y)\subset B_X$, 因此 $\left\|T^{-1}\right\|=\sup\limits_{y\in B_Y}\left\|T^{-1}(y)\right\|\leq r^{-1}$, 因此 $T^{-1}\in\mathcal{B}(X,Y)$,

$$\forall x\in X\exists y\in Y:\|x\|=\left\|T^{-1}(y)\right\|\leq\left\|T^{-1}\right\|\|y\|\leq r^{-1}\|Tx\|\implies r\|x\|\leq\|Tx\|$$

因此仅需取 $a=r, b=\|T\|$ 即可. □

SJ 4.13 考虑 $T:C^1[-1,1]\to C[-1,1], x(t)\mapsto x'(t)$.
1. 若 $C^1[-1,1]$ 中范数是 $\|x\|_1=\max\left\{\max\limits_{t\in[-1,1]}|x(t)|,\max\limits_{t\in[-1,1]}|x'(t)|\right\}$, 则 T 是否有界?
2. 若 $C^1[-1,1]$ 中范数是 $\|x\|_2=\max\limits_{t\in[-1,1]}|x(t)|$, 则 T 是否有界?

证明. 1.$\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|_1}=\dfrac{\|x'\|_\infty}{\max\{\|x\|_\infty,\|x'\|_\infty\}}\leq 1$, 因此 $\|T\|\leq 1$, 有界.

2.$\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|_2}=\dfrac{\|x'\|_\infty}{\|x\|_\infty}$, 因此取 $x(t)=t^n$ 时,$\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|_2}=n$, 由 n 任意性, 其无界. □

SJ 4.14 定义 $T(f)(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\forall f\in L^1[a,b]$. 证明:
1. 若 $T:(L^1[a,b],\|\cdot\|_1)\to(C[a,b],\|\cdot\|_\infty)$, 则 $\|T\|=1$;
2. 若 $T:(L^1[a,b],\|\cdot\|_1)\to(L^1[a,b],\|\cdot\|_1)$, 则 $\|T\|=b-a$.

证明. 1.$\|Tf\|_\infty=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|\leq\max\limits_{x\in[a,b]}\displaystyle\int_a^x|f(t)|\,\mathrm{d}t=\int_a^b|f(t)|\,\mathrm{d}t=\|f\|_1$, 因此 $\|T\|\leq 1$.
另一方面,$f(t)=\dfrac{1}{b-a},\|Tf\|_\infty=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|\dfrac{x-a}{b-a}\right|=1$, 因此 $\|T\|\geq 1$, 得证.

2.$\|Tf\|_1=\displaystyle\int_a^b\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x\leq\int_a^b\int_a^x|f(t)|\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\leq\int_a^b\int_a^b|f(t)|\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_a^b\|f\|_1\,\mathrm{d}x=(b-a)\|f\|_1$, 因此 $\|T\|\leq b-a$.
另一方面, 取 $f_n(t)=n\cdot 1_{[a,a+\frac{1}{n}]}(t),\|f_n\|_1=1,\|Tf\|_1=b-a-\dfrac{1}{2n}$, 因此 $\|T\|\geq\sup\limits_{n\geq 1}\dfrac{\|Tf_n\|_1}{\|f_n\|_1}=b-a$. 因此 $\|T\|=b-a$. □

SJ 4.32 X 是 Banach 空间,X_0 是 X 的闭子空间, 定义 $\Phi:X\to X/X_0, x\mapsto[x]$, 其中 $[x]$ 是含 x 的等价类, 求证 Φ 是开映射.

证明. 在 X/X_0 上定义 $\|[x]\|=\inf\limits_{x\in[x]}\|x\|$, 容易证明这是一个范数.

其次, 取 X/X_0 中的 Cauchy 列 $\{[x_n]\}$, 容易选取子列 $\{[x_{n_k}]\}=\{[u_k]\}$ 使得

$$\forall k\in\mathbb{N}^*\exists N_k\forall n,m\geq N_k:\|[u_n]-[u_m]\|<2^{-k}.$$

考虑 $u_n' \in [u_n], u_{n+1}' \in [u_{n+1}], v_n' \in X_0 : \left\|u_{n+1}' - u_n' + v_n'\right\| < 2^{-n}$. 记 $w_n = u_{n+1}' - u_n' + v_n', \sum\limits_{n\geq 1} \|w_n\| = 1 < \infty$, 故 $\{w_n\}$ 绝对收敛. 由 X 完备, 有 $\sum\limits_{n\geq 1} w_k = w$. 令 $[u] = [w] + [u_1]$, 有

$$\|[u_{n+1}] - [u]\| = \left\|\left[u_{n+1} - w - u_1 + \sum_{k=1}^{n} w_k\right]\right\| \leq \left\|u_{n+1} - w - u_1 + \sum_{k=1}^{n} w_k\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} w_k - w\right\| \to 0$$

因此 $[u_n] \to [u]$. 而 $\{[u_n]\}$ 是 $\{[x_n]\}$ 的收敛子列, 因此 $[x_n] \to [u]$. 故其收敛, 故 X/X_0 是 Banach 空间.

最后, 显然有 $\|\Phi\| \leq 1, \Phi \in \mathcal{B}(X, X/X_0)$ 且满, 因此 Φ 是开映射. □

SJ 4.33 设 X 是 ℓ^∞ 中只有有限个非 0 项的序列构成的子空间. 定义 $T : X \to X, \{x_k\} \mapsto \left\{\dfrac{x_k}{k}\right\}$, 证明:
1.$T \in \mathcal{B}(X)$, 并求出 $\|T\|$;2.T^{-1} 无界;
3. 这是否和 Banach 逆算子定理矛盾?

证明. T 显然线性,$x = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, \cdots\} \in X, Tx = \left\{x_1, \dfrac{x_2}{2}, \cdots, \dfrac{x_n}{n}, 0, \cdots\right\} \in X.\|Tx\| = \max\limits_{k\in[n]} \dfrac{|x_k|}{k} \leq \max\limits_{k\in[n]} \dfrac{\|x\|}{k} = \|x\|, \|T\| \leq 1$. 而 $x' = \{1, \cdots, 1, 0, \cdots\}$ 时 $\|Tx'\| = 1, \|T\| \geq \dfrac{1}{1} = 1$, 故 $\|T\| = 1$.

$T^{-1}x = \{x_1, 2x_2, \cdots, nx_n, 0, \cdots\}, \left\|T^{-1}x'\right\| = n$, 因此 $\left\|T^{-1}\right\| \geq n$, 由 n 任意可知 T^{-1} 无界.

这与 Banach 逆算子定理不矛盾, 因为 X 不完备. 如 $x_n = \left\{1, 2^{-1}, 3^{-1}, \cdots, n^{-1}, 0, \cdots\right\}, x = \left\{1, 2^{-1}, 3^{-1}, \cdots, n^{-1}, \cdots\right\}$, $\|x_n - x\|_\infty = \dfrac{1}{n+1} \to 0, x \notin X$. □

SJ 4.36 令 $\mathrm{Dom}(T) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}) : \displaystyle\int_{\mathbb{R}} t^2 \left|u(t)\right|^2 \mathrm{d}t < \infty\right\}$, 且 $\forall u \in \mathrm{Dom}(T) : T(u)(t) = tu(t)$. 说明 T 无界且闭.

证明. 首先取 $u(t) = \mathrm{e}^{-|t|/n}, n > 0, \|u\|_2^2 = n, \|Tu\|_2^2 = \dfrac{n^3}{2}, \|T\| \geq \dfrac{n}{\sqrt{2}}$, 由 n 任意可知 T 无界.

要说明 $G(T) = \left\{(u, Tu) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) : u \in \mathrm{Dom}(T)\right\}$ 闭, 需要说明 $G(T)$ 中的收敛列 $(u_n, Tu_n) \to (u, v) \in G(T)$. 而 $T(u_n - u) = tu_n(t) - tu(t), \displaystyle\int_{\mathbb{R}} t^2(u_n - u)(t)^2 \mathrm{d}t$ □