目录

1 第一章 图

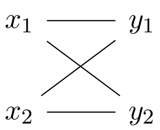
1.1.2 $G[X,Y]$ 是简单二部图,$|X|=r,|Y|=s$. 证明 (1)$m\le rs$.(2) 证明 $m\le n^2/4$.(3) 给出满足 (2) 取等的简单二部图.

证明. 由于在简单二部图 $G[X,Y]$ 中 $E(G)\to X\times Y, xy\mapsto(x,y)$ 是单射 (由二部图知其为映射且像在 $X\times Y$ 中, 由简单图知为单射), 故

$$m=|E(G)|\le|X\times Y|=rs.$$

而 $n=r+s$, 故

$$m\le rs\le\frac{rs}{2}+\frac{r^2+s^2}{4}=\frac{(r+s)^2}{4}=\frac{n^2}{4}.$$

如取 $r=s=2,n=m=4$, 如 

则 $m=rs=n^2/4=4$. □

1.1.9 $G[X,Y]$ 是二部图, 证明 (1)$\sum\limits_{v\in X}d(v)=\sum\limits_{v\in Y}d(v)$.(2) 证明若 G 是 k-正则图,$k\ge1$, 则 $|X|=|Y|$.

证明. 由于在二部图 $G[X,Y]$ 中对于 $\forall x_1,x_2\in X,\{x_1y\in E|y\in Y\}$ 与 $\{x_2y\in E|y\in Y\}$ 不交, 其对 Y 同理. 故有

$$\sum_{x\in X}d(x)=\sum_{x\in X}\#\{xy\in E|y\in Y\}=\#\bigcup_{x\in X}\{xy\in E|y\in E\}=\#\{xy\in E|x\in X,y\in Y\}=m.$$

其对 Y 同理, 从而有

$$\sum_{x\in X}d(x)=\sum_{y\in Y}d(y).$$

若 G 同时为 k-正则图, 则上式变为 $k|X|=k|Y|$, 从而 $|X|=|Y|$. □

1.1.12 (1) 若 G 是简单图且 $m > \binom{n-1}{2}$ 则 G 连通.(2) 对于 $n>1$, 给出不连通简单图满足 $m=\binom{n-1}{2}$.

证明. 若 $V(G)$ 可分为不交两非空子集 X,Y 使得其间没有边, 记 $|X|=x\geq 1,|Y|=y\geq 1,x+y=n$. 由 n 点简单图有 $m\leq\binom{n}{2}$, 则我们有

$$m\leq\binom{x}{2}+\binom{y}{2}=\frac{x^2-x+y^2-y}{2}\leq\frac{x^2+y^2-(x+y)}{2}+(x-1)(y-1)=\frac{n^2-3n+2}{2}=\binom{n-1}{2}<m$$

从而矛盾, 即 G 是连通图. 若 $m=\binom{n-1}{2}$, 则可取其中 $n-1$ 个点的任意两点间形成边, 剩余一点不与任何点有边, 此即不连通图. □

1.1.16 度数序列 若 G 有顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$, 序列 $(d(v_1),d(v_2),\cdots,d(v_n))$ 被称为 G 的度数序列. 令 $\mathbf{d}:=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 是非负整数的不增序列, 即 $d_1\geq d_2\geq\cdots\geq d_n\geq 0$. 证明 (1) 存在度数序列为 $\mathbf{d}$ 的图 $\iff \sum\limits_{i=1}^n d_i$ 是偶数.(2) 存在度数序列为 $\mathbf{d}$ 的无自环图 $\iff \sum\limits_{i=1}^n d_i$ 是偶数且 $d_1\leq\sum\limits_{i=2}^n d_i$.

证明. (1) $\Longrightarrow$: 由

$$2m=\sum_{i=1}^n d(v_i)=\sum_{i=1}^n d_i$$

知右端为偶数. $\Longleftarrow$: 将 $\mathbf{d}$ 中奇数取出, 将其两两配对并对于每对构造对应顶点间的边, 由题设知奇数的个数为偶数, 故配对可行. 再对所有点不断构造自环 (loop), 使得 $d(v_i)=d_i$, 由在第一步后 $d_i-d(v_i)$ 均为偶数, 从而终止条件成立.

(2) $\Longrightarrow$: 由上知 $\sum\limits_{i=1}^n d_i$ 为偶数, 而在无自环图中有

$$d_1=\#\{v_1v_i\in E|i\in[n]\}=\#\{v_1v_i\in E|i\in[n]-\{1\}\}\leq m=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n d_i$$

从而知 $d_1\leq\sum\limits_{i=2}^n d_i$.

$\Longleftarrow$: 对 $\mathbf{d}$ 的非零分量数 k 考虑数学归纳法. 对于 $k=2$ 时有 $d_1\leq d_2$, 而由 $\mathbf{d}$ 递减知 $d_1\geq d_2$, 从而可构造 d_1 条 v_1v_2 平行边, 其为满足条件的无自环图. 设 $k\leq n-1$ 时对任意满足题设条件的 $\mathbf{d}$ 都存在其对应无自环图, 下考虑 $r=n$ 的情形, 即 $\mathbf{d}=(d_1,\cdots,d_n,0,\cdots)$.

构造 d_n 条平行边 v_1v_n, 从而仅需考虑新序列 $\mathbf{d}'$, 其为序列

$$(d_1-d_n,d_2,\cdots,d_{n-1},0,\cdots)$$

的递减重排, 其非零分量数 $\leq n-1$. 若 $\mathbf{d}'$ 满足题设条件, 则由归纳假设知存在其对应无自环图, 再在其上对应地添加上述构造平行边, 即可得以 $\mathbf{d}$ 为度数序列的无自环图. 下证 $\mathbf{d}'$ 满足题设条件.

由 $\sum\limits_{i=1}^n d_i$ 为偶数显然可知 $\sum\limits_{i=1}^{n-1} d_i-d_n$ 也为偶数. 若 d_1-d_n 为 $\mathbf{d}'$ 首项, 则

$$d_1-d_n\leq\sum_{i=2}^n d_i-d_n=\sum_{i=2}^{n-1} d_i$$

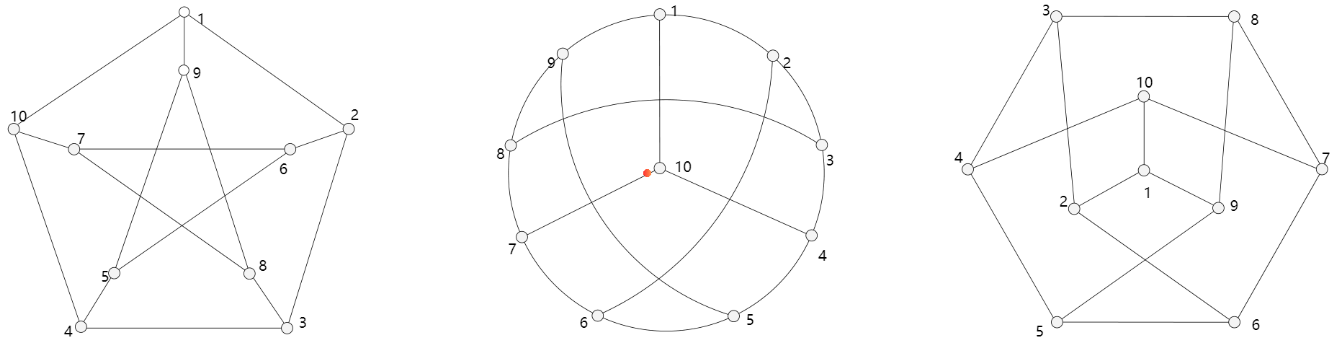
从而满足条件. 若否, 则 d_2 为首项, 也有

$$(d_1-d_n)+\sum_{i=3}^{n-1} d_i\geq d_2+\sum_{i=3}^{n-1} d_i-d_n\geq d_2+d_{n-1}-d_n\geq d_2$$

从而同样满足条件. 由此得证. □

1.2.5 证明图 1.9 中的三个图同构.

证明. 注意到如下标号:



它们的边均有且仅有: 从 1 到 9 的 9-圈, 边 2-6, 边 3-8, 边 4-10, 边 5-9, 边 7-10. 这些构成了所有 15 条边, 从而可以看出它们确实互相同构. □

1.3.15a de Bruijn-Erdös 定理 $G[X,Y]$ 是二部图, 其每个顶点都与另一个部分中至少一个 (但不是全部) 顶点连接, 若 $\forall xy \notin E$ 有 $d(x) \geq d(y)$, 证明 $|Y| \geq |X|$, 取等当且仅当 $\forall xy \notin E, d(x) = d(y)$.

证明. 由于有

$$|X| = \sum_{x\in X} \sum_{\substack{y\in Y\\ xy\notin E}} \frac{1}{|Y| - d(x)}, |Y| = \sum_{y\in Y} \sum_{\substack{x\in X\\ xy\notin E}} \frac{1}{|X| - d(y)}$$

若 $|Y| < |X|$, 则对 $\forall xy \notin E$ 有 $|X|\, d(x) > |Y|\, d(y)$, 从而有

$$1 = \sum_{\substack{x\in X, y\in Y\\ xy\notin E}} \frac{1}{|X|\,(|Y| - d(x))} > \sum_{\substack{x\in X, y\in Y\\ xy\notin E}} \frac{1}{|Y|\,(|X| - d(y))} = 1$$

矛盾, 因此 $|Y| \geq |X|$. 考虑取等条件, 若 $|X| = |Y|$ 且有 $x_0y_0 \notin E, d(x_0) > d(y_0)$, 则

$$|X| = \sum_{\substack{x\in X, y\in Y\\ xy\notin E}} \frac{1}{|X| - d(x)} > \sum_{\substack{x\in X, y\in Y\\ xy\notin E}} \frac{1}{|Y| - d(y)} = |Y|$$

矛盾, 从而可见若能取到 $|X| = |Y|$ 则 $\forall xy \notin E$ 有 $d(x) = d(y)$, 反之若已有 $\forall xy \notin E, d(x) = d(y)$, 而

$$1 = \sum_{\substack{x\in X, y\in Y\\ xy\notin E}} \frac{1}{|X|\,|Y| - |X|\, d(x)} = \sum_{\substack{x\in X, y\in Y\\ xy\notin E}} \frac{1}{|Y|\,|X| - |Y|\, d(y)} = 1$$

则可见 $|X| = |Y|$, 从而可知取等条件有且仅有 $\forall xy \notin E, d(x) = d(y)$. □

2 第二章 子图

2.1.5 (1) 若简单图 G 有 $\delta \geq 2$, 则其中含长度 $\geq \delta + 1$ 的圈.(2) 对每个 $k \geq 2$ 给出简单图 G, 其满足 $\delta = k$ 但不含任何长度 $> k + 1$ 的圈.

证明. (1) 任选图中一个顶点 v_1, 其至少与 δ 个顶点相邻, 任取其一记为 v_2,v_2 至少与 $\delta - 1$ 个未选择顶点相邻. 以此类推, 可得长 δ 的路 $v_1v_2\cdots v_{\delta+1}$. 若 $v_{\delta+1}$ 与 v_1 相邻则命题成立, 否则 $v_{\delta+1}$ 与已选择的 δ 个顶点中至多 $\delta - 1$ 个相邻, 从而有未取到的新点 $v_{\delta+2} \notin \{v_i\}_{i=1}^{\delta+1}$. 继续考虑 $v_{\delta+2}$ 是否与 v_1, v_2 其中的点相邻, 若否则同理可取到 $v_{\delta+3}$. 以此类推, 总有 $v_{\delta+k}$ 不与 $\{v_i\}_{i=1}^{k}$ 中的点相邻, 而 $k = n - \delta$ 时必然有 $\{v_i\}_{i=1}^{k}$ 中的点与 v_n 相邻, 因此这一算法能在有限步后终止, 即总能取到长至少 $\delta + 1$ 的圈.

(2) 考虑完全图 K_n, 则 $\delta = n - 1$, 而图中圈长不超过 n. □

2.2.4 用最长路径的论证给出定理 2.3 的证明.

定理 2.3 Rédei 定理: 每个竞赛图都有有向 Hamilton 圈.

证明. 考虑竞赛图 G 中的最长路 $v_1\cdots v_k$, 若有 $v\in V-\{v_i\}_{i=1}^k$, 则 $(v_1,v),(v,v_k)\in E$, 否则与最长条件矛盾. 考虑使 $(v_i,v)\in E$ 的下标最大的 v_i, 有 $1\le i\le k-1$, 则仍有 $(v,v_{i+1})\in E$, 从而有更长的路 $v_1\cdots v_ivv_{i+1}\cdots v_k$, 矛盾, 从而最长路遍历所有顶点, 即为 Hamilton 路. □

2.3.1 (1)$\forall e\in E$ 证明 $c(G/e)=c(G)$.(2)G 是无圈图,$e\in E$, 证明 (i)G/e 是无圈图.(ii)$m=n-c$.

证明. (1) 若 G 是连通图, 记 $e=u_1u_2\in E$, 其在 G/e 中缩并为顶点 v. 在 $V(G)-\{u_1,u_2\}$ 中任取两顶点 s,t, 则在 G 中有路 $sv_1\cdots v_kt$ 连接之. 若路中不含 u_1,u_2, 则在 G/e 中仍有同样的路连接 s 和 t; 若路中有 $v_i=u_1$ 或 u_2, 则 $sv_1\cdots v_{i-1}vv_{i+1}\cdots v_kt$ 为 G/e 中连接 s 与 t 的路. 由 s,t 选取的任意性可知 G/e 是连通的.

现考虑任意图 $G,c(G)=k$, 则有 $G=G_1+\cdots+G_k$, 其中 $G_i(i\in[k])$ 为其所有连通分支. 若 e 是其中 G_i 的边, 则 $G/e=G_1+\cdots+G_i/e+\cdots+G_k$, 由 G_i/e 仍为连通图可知 $c(G/e)=k$, 从而得证.

(2.1) 仍记 $e=u_1u_2\in E$ 在 G/e 中缩并为顶点 v. 若 G/e 中有不经过 v 的圈 $v_1v_2\cdots v_kv_1$, 则在 G 中同样存在该圈, 矛盾. 若有经过 v 的圈 $vv_1\cdots v_kv$, 则在 G 中 v_1 与 v_k 均至少与 u_1,u_2 其中一个相邻, 从而在 G 中同样存在圈, 矛盾. 综上可知 G/e 同样为无圈图.

(2.2) 收缩无圈图 G 中的任意边 e 时, 由上知 $c(G)=c(G/e)$, 由无圈图无自环知 $v(G/e)=n-1$, 由无圈图无平行边知 $e(G/e)=m-1$. 而无圈图收缩后仍为无圈图, 从而可以对所有边不断收缩 m 次直到无边 (即平凡图), 此时其顶点数等于连通分支个数 c. 从而

$$\begin{aligned}c&=v(G/\{e_1,\cdots,e_m\})-e(G/\{e_1,\cdots,e_m\})=[v(G/\{e_1,\cdots,e_{m-1}\})-1]-[e(G/\{e_1,\cdots,e_{m-1}\})-1]\\&=v(G/\{e_1,\cdots,e_{m-1}\})-e(G/\{e_1,\cdots,e_{m-1}\})=\cdots\\&=v(G/e_1)-e(G/e_1)=[v(G)-1]-[e(G)-1]\\&=n-m\end{aligned}$$

从而得证. □

2.4.2 偶有向图 称有向图 D 是偶图, 若 $\forall v\in V,d^-(v)=d^+(v)$. 证明 Veblen 定理的有向图版本: 有向图有有向圈分解 $\iff$ 有向图是偶图.

证明. $\Longrightarrow$: 若 G 有一个圈分解 $\{G_1,\cdots,G_k\}$, 即顶点 v 在 G_i 中的度数为 $d_i^-(v)$ 与 $d_i^+(v)$, 则每个 G_i 中不在圈上的顶点 v 有 $d_i^-(v)=d_i^+(v)=0$, 在圈上的则有 $d^-(v)=d^+(v)=1$, 从而

$$\forall v\in V,d^-(v)=\sum_{i=1}^k d_i^-(v)=\sum_{i=1}^k d_i^+(v)=d^+(v).$$

$\Longleftarrow$: 对 m 进行归纳, 当 $m=0$ 时有空的圈分解, 下设 $m<M$ 时命题成立, 考虑 $m=M$ 的情形. 由于任意非孤立点 v 有 $d^+(v)=d^-(v)\ge 1$, 故可任取非孤立点 $v_1,d^+(v_1)\ge 1$, 故 v_1 至少有一条出边 (v_1,v_2), 再对 v_2 如此考虑, 以此类推. 若有 v_k 使得某个 $1\le i\le k-1$ 有 $v_k=v_i$, 则有有向圈 $C=(v_i,v_{i+1},\cdots,v_k,v_i)$. 若对 $\forall k\ge 1$ 都没有对应的 v_i, 则其矛盾于图的有限性, 故总有有向圈 C.

考虑 G 的删边子图 $G-C=(V,E-C)$, 由前知 $\forall v\in V,d_C^+(v)=d_C^-(v)$, 从而 $d_{G-C}^+(v)=d_G^+(v)-d_C^+(v)=d_G^-(v)-d_C^-(v)=d_{G-C}^-(v)$, 且 $e(G-C)<e(G)=M$, 故满足归纳假设, 即 $G-C$ 已存在圈分解 $\{C_1,\cdots,C_k\}$, 从而 G 也有圈分解 $\{C_1,\cdots,C_k,C\}$. □

2.5.1 (1) 证明定理 2.9.(2) 证明命题 2.13.(3) 由命题 2.11 推出定理 2.14.

定理 2.9: 图 G 及其顶点子集 $X \subset V$ 有 $d(X) = \sum_{v \in V} d(v) - 2e(X)$.

命题 2.11: 图 G 及其顶点子集 $X, Y \subset V$ 有 $\partial(X) \triangle \partial(Y) = \partial(X \triangle Y)$.

命题 2.13:F_1, F_2 是 G 的生成子图,$X \subset V$ 是顶点子集, 则 $\partial_{F_1 \triangle F_2}(X) = \partial_{F_1}(X) \triangle \partial_{F_2}(X)$.

定理 2.14: 图的一个边子集是边割集当且仅当其是键的不交并.

证明. (1) 定理 2.9 的证明:

$$d(X) = \#\{xy \in E | x \in X, y \in V - X\} = \sum_{x \in X} \sum_{\substack{y \in V - X \\ xy \in E}} 1 = \sum_{x \in X} \left(\sum_{\substack{y \in V \\ xy \in E}} 1 - \sum_{\substack{x' \in X \\ xx' \in E}} 1 \right) = \sum_{x \in X} d(x) - \sum_{x \in X} \sum_{\substack{x' \in X \\ xx' \in E}} 1$$

$$\sum_{x \in X} \sum_{\substack{x' \in X \\ xx' \in E}} 1 = \sum_{(x, x') \in X^2} \sum_{xx' \in E} 1 = 2 \sum_{x, x' \in X} \sum_{xx' \in E} 1 = 2e(X)$$

(2) 推论 2.13 的证明:

$$\begin{aligned}\partial_{F_1 \triangle F_2}(X) &= \{xy \in E(F_1 \triangle F_2) | x \in X, y \in V - X\} = \{xy \in E(F_1) \triangle E(F_2) | x \in X, y \in V - X\} \\ &= \{xy \in E(F_1) | x \in X, y \in V - X\} \triangle \{xy \in E(F_2) | x \in X, y \in V - X\} = \partial_{F_1}(X) \triangle \partial_{F_2}(X)\end{aligned}$$

(3) 定理 2.14 的证明: $\Longrightarrow$: 若 $S \subset E$ 是一个边割集, 则要么 S 是键, 要么不是. 若是则证毕, 否则由 S 不是极小边割集知, 有键 $B_1 \subsetneq S$, 且 $S - B_1 = S \triangle B_1$ 是边割集. 继续考虑 $S - B_1$ 是不是键, 以此类推. 由 S 是有限集可知, 总存在 $n \geq 1$ 使得 $S - \bigcup_{1 \leq i < n} B_i$ 是键, 而由上构造键 B_i 之间两两不交, 从而可取到不交并 $S = \bigsqcup_{1 \leq i \leq n} B_i$.

$\Longleftarrow$: 若 $S = \bigsqcup_{1 \leq i \leq n} B_i$, 其中 B_i 是键且其间两两不交, 则 $B_1 \sqcup B_2 = B_1 \triangle B_2$ 是边割集,$B_1 \sqcup B_2 \sqcup B_3$ 同理也是, 以此类推 S 是边割集. □

2.5.4 G 是无自环图,$X, Y \subset Y$.(1) 证明

$$d(X) + d(Y) = d(X \cup Y) + d(X \cap Y) + 2e(X - Y, Y - X)$$

(2) 推出关于顶点子集度数的次模不等式

$$d(X) + d(Y) \geq d(X \cup Y) + d(X \cap Y)$$

(3) 叙述并证明有向图版本的次模不等式.

证明. (1)(2) 下记 $C = V - (X \cup Y)$, 有分解

$$\begin{aligned}d(X) + d(Y) =& [e(X - Y, C) + e(X \cap Y, C) + e(X - Y, Y - X) + e(X \cap Y, Y - X)] \\ &+ [e(Y - X, C) + e(X \cap Y, C) + e(Y - X, X - Y) + e(X \cap Y, X - Y)] \\ =& [e(X - Y, C) + e(X \cap Y, C) + e(Y - X, C)] + [e(X \cap Y, X - Y) + e(X \cap Y, Y - X) + e(X \cap Y, C)] \\ &+ [e(X - Y, Y - X) + e(Y - X, X - Y)] \\ =& d(X \cup Y) + d(X \cap Y) + 2e(X - Y, Y - X) \geq d(X \cup Y) + d(X \cap Y)\end{aligned}$$

(3) 对于有向图, 同上证明也有

$$d^+(X) + d^-(Y) = d^+(X \cup Y) + d^+(X \cap Y) + a(X - Y, Y - X) + a(Y - X, X - Y) \geq d^+(X \cup Y) + d^+(X \cap Y)$$

□

2.5.5 奇图即每个顶点度数为奇数的图. 证明 G 是奇图 $\iff \forall X \subset V, d(X) \equiv |X| \bmod 2$.

证明. $\Longrightarrow$: 注意到对于奇图总有 $d(v) \equiv 1 \bmod 2 (\forall v \in V)$, 从而有

$$d(X) = \sum_{x\in X} d(x) - 2e(X) \equiv \sum_{x\in X} d(x) \equiv \sum_{x\in X} 1 = |X| \pmod 2$$

$\Longleftarrow$: $d(v) = d(\{v\}) \equiv |\{v\}| = 1 \pmod 2$, 由 v 选取的任意性知为奇图. □

2.6.2 证明边空间 $\mathcal{E}(G)$ 是关于对称差运算的 $\mathbb{F}_2$-向量空间, 且同构于 $\mathbb{F}_2^E$.

证明. 由定义 $\mathcal{E}(G) = 2^E$, 考虑映射 $\varphi : \mathcal{E}(G) \to \mathbb{F}_2^E, S \mapsto (\mathbf{f}_S : e \mapsto [e \in S])$, 其中 $[e \in S]$ 是 Iverson 括号, 下考虑 $\mathbb{F}_2^E$ 中由逐点运算自然诱导的 $\mathbb{F}_2$-向量空间结构, 为同样赋予 2^E 以 $\mathbb{F}_2$-向量空间结构, 定义 $0 \cdot S = \varnothing, 1 \cdot S = S$. 由 $\varphi(S_1 \triangle S_2) = \mathbf{f}_{S_1\triangle S_2}$ 和 $\mathbf{f}_{S_1\triangle S_2}(e) = [e \in S_1\triangle S_2] = [e \in S_1] + [e \in S_2]$(此处加法是 $\mathbb{F}_2$ 意义下的), 从而知 $\mathbf{f}_{S_1\triangle S_2} = \mathbf{f}_{S_1} + \mathbf{f}_{S_2}$. 另一方面 $0 \cdot \mathbf{f}_S = \mathbf{0} = \mathbf{f}_\varnothing, 1 \cdot \mathbf{f}_S = \mathbf{f}_S$. 综上有

$$\forall S_1, S_2 \in \mathcal{E}(G), \forall a \in \mathbb{F}_2, \varphi(S_1\triangle S_2) = \varphi(S_1) + \varphi(S_2), \varphi(aS_1) = a\varphi(S_1)$$

从而 φ 是一个 $\mathbb{F}_2$-模同态, 而由上同理 $\mathbf{f}_S \mapsto S$ 为 φ 的一个逆映射和 $\mathbb{F}_2$-模同态, 从而 φ 为同构. □

3 第三章 连通图

3.1.3 证明由顶点间连通关系决定的等价类就是图连通分支的顶点集.

证明. 考虑顶点关于连通关系的任意等价类 $[a] = \{v \in V | \text{存在}av\text{-途径}\}$, 则 $\forall v \in [a], a$ 与 v 在同一个连通分支, 即 $[a]$ 在某个连通分支内. 若某个连通分支中有多个等价类 $[a], [b]$, 则由 a, b 在同一个连通分支中知有从 a 到 b 的路径, 从而 a, b 同属一个等价类, 矛盾. 综上可知, 连通等价类即连通分支. □

3.1.8 G 是直径为 2 的简单图,$\Delta = n - 2$, 证明 $m \geq 2n - 4$.

证明. 考虑度数为 $n - 2$ 的顶点 u, 其与顶点 $v_1, \cdots, v_{n-2}$ 相邻, 且有唯一顶点 v 与之不相邻. 考虑删点子图 $G - \{u, v\}$ 所有连通分支的顶点集 $V_1, \cdots, V_k (1 \leq k \leq n - 2)$, 若有 V_i 使得 v 与 V_i 间无边, 则连接 v 与 V_i 的路径必然首先经过某个 $V_j (j \neq i)$, 否则 v 与 $V - v$ 不连通, 而又知 V_i 与 V_j 间不连通知其次只能经过 u, 最后从 u 到 V_i, 从而 $d(v, V_i) \geq 3$, 与题设矛盾. 因此 v 与每个 V_i 之间都有边.

综上所述,u 与除 v 外的所有顶点相邻,v 与每个 V_i 中至少一个顶点相邻, 而 V_i 之间两两无边, 从而 $E = E(u) \sqcup E(v) \sqcup E(V_1) \sqcup \cdots \sqcup E(V_k)$, 注意到作为连通分支,$E(V_i) = E(V_i, V_i) \geq |V_i| - 1$. 从而

$$m = d(u) + d(v) + \sum_{i=1}^{k} e(V_i) \geq n - 2 + \sum_{i=1}^{k} 1 + \sum_{i=1}^{k} (|V_i| - 1) = n - 2 + \left| \bigsqcup_{i=1}^{k} V_i \right| = 2n - 4$$

□

3.2.3 G 是连通偶图, 证明 (1)G 没有割边.(2)$\forall v \in V, c(G - v) \leq d(v)/2$.

证明. G 作为偶图有圈分解 $G = \bigcup_{i\in[k]} C_i$, 从而 G 中任意边 e 都在某条圈 C_i 中, 由推论 3.3.2 知其等价于 e 不是割边 (cut edge). 对于任意顶点 v, 若其是某条圈 C_i 的顶点, 则 $d_{C_i}(v) = 2$, 而 $\{C_i\}_{i=1}^k$ 之间边两两不交, 从而 $d(v) = \sum_{i=1}^{k} d_{C_i}(v) = \sum_{v\in V(C_i)} 2$, 即圈分解 $\{C_i\}_{i=1}^k$ 中有 $d(v)/2$ 条圈以 v 作为顶点. 从 G 中依次删除 v 在 $C_i (i \in [k])$ 中的边, 直到使 v 成为孤立点. 由于仅删除 v 在 C_i 中连接的一条边不会产生新的连通分支, 故删去全部两条仅可能增加一个连通分支, 从而对 $d(v)/2$ 条圈如此操作后最多增加 $d(v)/2$ 个连通分支. 最后删去连通分支 v, 从而 $c(G - v) \leq (1 + d(v)/2) - 1 = d(v)/2$. □

3.3.3 图 G 中有两不同顶点 x, y, 令 $G+e$ 是向 G 中添加连接 x, y 的边得到的图.(1) 证明 G 有连接 x, y 的 Euler 迹 $\iff$ $G+e$ 有 Euler 回路.(2) 证明 G 有连接 x, y 的 Euler 迹 $\iff$ $d(x), d(y)$ 为奇数且 $\forall v \in V-\{x, y\}, d(v)$ 是偶数.

证明. (1) 若在 G 中存在连接 x 和 y 的 Euler 迹 $xe_1v_1\cdots v_ke_my$, 即迹中的 $e_1, \cdots, e_m$ 为 G 中全部边, 则在 $G+e$ 中可取 Euler 回路 $xe_1\cdots e_myex$, 其边已经遍历了 $G+e$ 中全部边. 反之若能在 $G+e$ 中取到上述 Euler 回路, 去掉 e 即为 G 中连接 x 和 y 的 Euler 迹, 因为已经遍历了所有 G 中的边.

(2) 若 G 中存在连接 x 和 y 的 Euler 迹, 则 $G+e$ 中含 Euler 回路, 从而是连通偶图, 即 G 中除 x, y 的顶点度数为偶数,x, y 的度数为奇数. 反之, 由题设可知 $G+e$ 中含 Euler 回路, 即 G 中存在连接 x 和 y 的 Euler 迹. □

3.3.4 G 是连通图,X 是 G 中奇数度数的顶点构成的集合. 设 $|X|=2k, k\geq 1$.(1) 证明 G 中有 k 条边不交的迹 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$ 使得 $E(G)=\bigsqcup_{i=1}^{k} E(Q_i)$. (2) 推出 G 中含 k 条边不交的迹将 X 中的点成对连接.

证明. 对于 $X=\{x_1, \cdots, x_{2k}\}$, 给 G 中加 k 条边 $E'=\{x_1x_2, x_3x_4, \cdots, x_{2k-1}x_{2k}\}$, 则加边图 $G+E'$ 中每个顶点的度数为偶数, 从而为连通偶图, 即存在 Euler 回路, 其经过所有 E' 的 k 条边. 将圈中所有 E' 中的边删去, 则可断为相应的 k 条迹, 每条连接 X 中的两个顶点, 且所有迹中边不交, 并集仍为 $E(G)$. □

3.3.6 支配子图 G 的子图 F 是支配子图, 若 G 中任意边都有至少一个端点在 F 中. 令 $m\geq 3$, 证明 $L(G)$ 是 Hamilton 图 $\iff$ G 有支配 Euler 子图.

证明. 简单图 G 的线图 $L(G)$ 以 $E(G)=\{e_i\}_{i=1}^m$ 为顶点, 在 $L(G)$ 中存在边 e_ie_j 等价于 G 中 e_i 与 e_j 有共同顶点 v. 任取 $v_i\in V(G)$, 在所有 $d(v_i)$ 条连接 v_i 的边中任取两条, 其在 $L(G)$ 中有边相连, 从而 v_i 对应于 $E(L(G))$ 中的 $m_i=\binom{d(v_i)}{2}$ 条边, 记这些边为 $v_{i1}, \cdots, v_{im_i}$, 即 $E(L(G))=\{v_{ij}|i\in[n], j\in[m_i]\}$.

$\Longrightarrow$: 考虑 $L(G)$ 中的 Hamilton 圈 $e_1v_{1j_1}e_2\cdots e_mv_{mj_m}e_1$, 则取 $\{v_1, \cdots, v_m\}$ 为 G 子图 F 的顶点集 (其中可能有 $v_i=v_j, i\neq j$). 由于 $L(G)$ 中任意点 e_i 都与某边 v_{ij_i} 相邻, 从而 G 的任意边 e_i 都与 F 的顶点 v_i 相邻, 即 F 是支配子图. 下为 F 添加边使其成为 Euler 图.

考虑 G 的点边交错的循环序列 $R=(e_1, v_1, e_2, \cdots, e_m, v_m)$, 若其中存在子序列 $(v_k, e_{k+1}, v_k=v_{k+1}, e_{k+2}, \cdots, e_{\ell-1}, v_k=v_\ell)$, 则将该子序列替换为 (v_k), 如此替换直到不能继续. 注意到每次替换前后, 序列中所有点仍为 $E(F)$, 任意子序列 (e_i, v_j, e_k) 都表明 G 中 v_j 与 e_i, e_k 相连. 操作后得到序列 $R_0=(e_{i_1}, v_{i_1}, \cdots, e_{i_\ell}, v_{i_\ell})$, 令 $E(F)=\{e_{i_1}, \cdots, e_{i_\ell}\}$. 若 $R=(v), E(F)=\varnothing$, 命题得证. 否则由于 $\forall v\in E(F)$ 都在 R_0 中有一些形如 (e_i, v_k, e_j) 的不相邻子序列, 从而 v_k 与偶数条边相连, 即 F 为偶图. 最后,F 中任意两点 v_i, v_j, 都可以在 R_0 中取到子序列 $(v_i, e_{i_i}, \cdots, e_{i_j}, v_j)$, 这对应于 F 中的一条路径, 故 F 也是连通的. 综上,F 即为所需的支配 Euler 子图.

$\Longleftarrow$: 若 F 是 G 的一个支配 Euler 子图, 则 F 中存在 Euler 回路 $v_1e_1\cdots e_{k-1}v_ke_kv_1$, 其对应于 $L(G)$ 中的圈 $C=e_1v_{2j_2}\cdots v_{kj_k}e_kv_{1j_1}e_1$. 若 $e\in E(G)$ 不在圈上, 则由 F 是支配子图知有 $v_i\in V(F)$ 与其相连, 从而其与 e_{i-1}, e_i 均有公共端点 v_i, 从而可以向 C 中添加边, 即为 $e_1\cdots e_{i-1}v_{ij_a}ev_{ij_b}e_{i+1}\cdots e_1$. 对所有不在圈上的边如此操作, 最终可得到 $L(G)$ 中的经过所有顶点恰一次的回路 $C'=e_1\cdots e_mv_{1j_1}e_1$. 若其中有边相同, 即说明有点被经过超过一次, 矛盾. 从而 C' 是 $L(G)$ 的 Hamilton 圈. □

4 第四章 树

4.1.1 (1) 若树有 $\Delta=k$, 则至少有 k 个叶子.(2) 什么样的树有恰好 k 个叶子?

证明. 若 $\Delta(T)=k$, 取树中度数为 k 的节点 v 并以其为根节点, 即 v 有 k 个子节点. 而每个子节点及其子节点形成的子树叶子数至少为 1, 从而 T 的叶子数至少为 k.$K_{1,k}$ 即为恰有 k 个叶子的树. □

4.2.1 连通图 G 有边 e.(1) 在 G 的含 e 生成树集合与 G/e 的生成树集合间构造双射.(2) 推出命题 4.9.

证明. 取任意边 $e_0 = xy \in E(G)$, 注意到有满射 (从而为双射)$f: E(G) - \{e_0\} \to E(G/e_0)$, 从而可考虑映射

$$\varphi: \{G\text{中含}e_0\text{的生成树}T\} \to \{G/e_0\text{的生成树}T'\}, T = (V(G), E(T)) \mapsto T' = (V(G/e_0), E(T') = f(E(T))).$$

由于 f 是双射, 从而 $E(T) \to E(T'), e \mapsto f(e)$ 也是双射, 故可取逆映射

$$\varphi^{-1}: T' = (V(G/e_0), E(T')) \mapsto T = (V(G), E(T) = f^{-1}(E(T'))),$$

从而 φ 是双射. 最后,G 的生成树数量等于含 e_0 与不含 e_0 的生成树数之和, 从而有 $t(G) = t(G - e_0) + t(G/e_0)$. □

3.4.11* (1) 证明含奇长度有向闭途径的有向图含有向奇圈.(2) 证明含奇圈的强有向图含有向奇圈.

证明. (1) 有向图 D 中存在奇长度有向闭途径 $W = (v_1, a_1, \cdots, a_k, v_1)$, 若其中所有顶点 v_i 互不相同则命题成立, 否则考虑其中相同顶点 $v_i = v_j (i < j)$, 则 W 可以拆为两个子途径 $W_1 = (v_1, a_1, \cdots, v_i, a_j, \cdots, a_k, v_1)$ 与 $W_2 = (v_i, a_i, \cdots, a_{j-1}, v_j)$. 对子途径如此不断拆分直到其中所有顶点都互不相同 (即成为圈), 则 W 可视作圈 $W_1, \cdots, W_\ell$ 首尾相连, 而所有圈 W_i 长度之和, 即 W 长度为奇数, 故存在圈 W_k 长度为奇数, 即得证.

(2) 强有向图 D 的底图 $G(D)$ 中有奇圈 $v_1 a_1 \cdots a_k v_1$, 考虑 W_i 为 D 中极小 (v_i, v_{i+1})-途径 $(i \in [k])$, 若已有弧 $a_i = (v_i, v_{i+1})$ 则 $W_i = (v_i, a_i, v_{i+1})$, 若否则由底图中存在圈知存在 (v_{i+1}, v_i)-途径 (v_{i+1}, a_i, v_i), 从而由强连通性知存在极小 (v_i, v_{i+1})-途径 W_i. 若 W_i 长为偶数, 则 W_i 后加上 (v_{i+1}, a_i, v_i) 成为有向奇圈, 命题成立. 若否, 则综上所述可知所有有向途径 $W_1, \cdots, W_k$ 长度为奇数, 故将其首尾相连得到的闭途径 W 长也为奇数, 由 (1) 知其中存在有向奇圈, 从而得证. □

4.2.8 使用定理 4.11 与习题 3.4.11b, 证明有向图含有向奇圈等价于其中一些强连通分支不是二部图.

证明. $\Longrightarrow$: 有向图 D 有有向奇圈则其底图 $G(D)$ 有奇圈, 从而 $G(D)$ 不是二部图, 故 D 也不是. $\Longleftarrow$: 若 D 的某些强连通分支不是二部图, 则该强连通分支的底图中存在奇圈, 由习题 3.4.11(2) 知 D 中存在有向奇圈. □

4.3.5 证明定理 4.13, 推论 4.14 与 4.15.

证明. (1) 定理 4.13 的证明: 由于基本键 (fundamental bond)B_e 是边割集, 因此其对称差 $B = \mathop{\triangle}\limits_{e \in S} B_e$ 也是边割集, 而由 $e \in B_e \subset \overline{T} \cup \{e\}$ 可知 $B_e \cap T = \{e\}$, 从而

$$B \cap T = \left(\mathop{\triangle}\limits_{e \in S} B_e\right) \cap T = \mathop{\triangle}\limits_{e \in S} (B_e \cap T) = \mathop{\triangle}\limits_{e \in S} \{e\} = S$$

最后, 若 G 中有另一边割集 B' 满足 $B' \cap T = S$, 则

$$(B \triangle B') \cap T = (B \cap T) \triangle (B' \cap T) = S \triangle S = \varnothing$$

从而边割集 $B \triangle B'$ 含于 $\overline{T}$ 中, 而 $\overline{T}$ 中仅有的边割集为 $\varnothing$, 从而 $B \triangle B' = \varnothing, B = B'$.

(2) 推论 4.14 的证明: 对 G 中任意边割集 B, 考虑 $S = B \cap T \subset T$, 由上定理知满足 $S = B' \cap T$ 的边割集 B' 仅有 $B' = B = \mathop{\triangle}\limits_{e \in S} B_e$, 从而任意边割集均为一些基本键的对称差.

(3) 推论 4.15 的证明: 在定理 4.13 中取 $S = T$, 则 $B = \mathop{\triangle}\limits_{e \in T} B_e, B \cap T = T$, 即 $T \subset B$, 且 B 是唯一的. □

4.3.10 证明任意含两个边不交的生成树的图中含:(1) 一个 Euler 生成子图;(2) 两个偶子图构成的覆盖.

证明. 考虑图 G 中两个边不交的生成树 T_1, T_2, 有 $T_2 \subset \overline{T_1} \subset C_2$, 其中 C_2 是唯一包含 $\overline{T_1}$ 的偶子图, 从而 C_2 同样含所有顶点 (即生成子图) 且连通, 故 C_2 为 Euler 生成子图. 同理可取出 C_1, 故 $E = T_1 \cup \overline{T_1} \subset C_1 \cup C_2$, 即 $\{C_1, C_2\}$ 为所求覆盖. □

6.1.1 T 是连通图 G 的 BFS 树, 证明 $\ell(v) = d_T(r,v), \forall v \in V$.

证明. r 是 T 的根节点, 从而 $\forall v \in V$ 在 T 中有且仅有一个顶点 v_1 与之相连, 且 $\ell(v_1) = \ell(v) - 1$, 以此类推可知存在长 $\ell(v)$ 的 vr-路径 $vv_1v_2\cdots v_{\ell(v)-1}r$, 该路径在 T 中唯一, 从而得证. □

5 第五章 不可分图

5.1.2 连通图 $G(n \geq 3)$ 中有割边 $e = uv$, 证明 u 或 v 是 G 的割点.

证明. 由 e 是割边知 $G - e$ 不连通, 且 u 与 v 分属两个连通分支. 由 $n \geq 3$ 知另有点 w 与 u 或 v 同连通分支. 设 w 与 u 同连通分支, 若 $G - u$ 中有连接 w 与 v 的路, 则在 $G - e$ 中有同样的路, 矛盾, 故在 $G - u$ 中 w 与 v 不在同一连通分支, 即 $G - u$ 不连通,u 是割点. 同理可对 v 讨论, 故 u, v 中至少一个为割点. □

5.2.2 图 G 中有边 e, 证明:(1) 若 $G - e$ 是不可分图且 e 不是 G 中的自环, 则 G 也是不可分图;(2) 若 G/e 是不可分图且 e 不是 G 中的自环或割边, 则 G 也是不可分图.

证明. (1)$G - e$ 不可分故为连通无自环图, 而 e 不是自环, 故 G 也为连通无自环图, 仅需证 G 无割点. 记 $e = uv$, 由 $G - e$ 中无割点知 $(G - e) - u = G - u$ 和 $(G - e) - v = G - v$ 均连通, 且 $\forall w \in V - \{u, v\}$ 有 $(G - e) - w$ 连通, 从而加边 e 得到的 $G - w$ 仍连通, 故 u, v, w 均不是割点, 即 G 无割点.

(2) 记 $e = uv$, 由 G/e 不可分知其连通且无自环, 从而 G 同样连通且无自环. 而若 G 有除 u, v 外的割点, 则其也为 G/e 的割点, 矛盾. 若 G 的割点为 u 或 v, 即 $G - u$ 或 $G - v$ 不连通, 则 G/e 删去 u, v 缩并而成的顶点同样不连通, 矛盾于 G/e 不可分. 从而 G 不可分. □

5.2.9 考虑定理 5.4 的证明中出现的图 G', 证明 (1)G' 连通;(2)G' 中每条边都在一个圈上.

证明. 对于不可分图 G 中顶点 v, 其是 $H = G - f$ 的割点且满足 $d(v) \geq 4, |N(v)| \geq 2$. 在 H 中 v 连接分别属于两个不同区块的边 $e_1 = vv_1, e_2 = vv_2$, 将两者分拆 (split off), 即在 H 中删去 e_1, e_2 并加边 $e = v_1v_2$, 即得 G'. 由 $d(v) \geq 4$ 知 G' 中仍有连接 v 的边 e'.

由 H 区块树为路径, 知 v 仅连接两个区块, 从而 $H - v$ 仅被分为两个连通分支,x, y 分别在两分支中, 则 $(H - v) + e$ 连通,G' 同样连通. 而由定理 5.4 知 G' 无割边, 由命题 3.2 知 G' 中每条边都在一个圈上. □

5.2.11 不可分图 G 中有边 e 使得 $G - e$ 可分, 证明 $G - e$ 的区块树是路.

证明. $e = xy$ 的端点 x, y 是 $G - e$ 的分离点或某区块的内部顶点, 其不能是同一个区块 B 的两内部顶点, 否则 $B + e$ 仍是 $G = (G - e) + e$ 中的区块, 与 G 不可分矛盾. 从而 x, y 对应于区块树 $B(G - e)$ 的两节点, 其在树上有唯一路径连接. 对于任意不在路径上的区块, 其在 $G = (G - e) + e$ 中同样是区块, 从而矛盾, 即所有 $B(G - e)$ 中区块都在路上. 从而也可看出 e 端点分属 $B(G - e)$ 的两叶子区块. □

6 第九章 连通度

9.1.3 (1) 若简单图 G 满足 $\delta \geq n - 2$ 则 $\kappa = \delta$.(2) 对任意 $n \geq 4$ 给出一个简单图 G, 使得 $\kappa < \delta = n - 3$.

证明. (1) 若 G 中不存在一对不相邻点, 即所有点两两相邻, 则 $G = K_n, \delta = \kappa = n - 1$. 若存在点 x, y 不相邻, 则 $n - 2 \leq \delta \leq d(x) \leq n - 2$, 从而 $\delta = n - 2$, 对任意顶点至多有一个点与其不相邻. 由于对任意不相邻点 x, y,$N(x) = N(y) = V - \{x, y\}$, 即 $p(x, y) = n - 2$, 从而 $\kappa(G) = \min\limits_{u \neq v, uv \notin E} p(u, v) = n - 2$, 命题得证.

(2) 对 $\forall n\geq 4$ 考虑 $H=K_{n-2}-xy$, 其中 $x,y\in V(K_{n-2})$, 显然 $\delta(H)=\kappa(H)=n-4$. 再在 H 中添加另外两点 u,v, 其与 $V(K_{n-2})-\{y\},V(K_{n-2})-\{x\}$ 中的 $n-3$ 个点分别连接, 得到 G, 显然 $v(G)=n,\delta(G)=n-3$. 令 $S=V(K_{n-2})-\{x,y\}=V(G)-\{x,y,u,v\},|S|=n-4$, 由 $G-S$ 不连通知 $\kappa(G)\leq|S|=n-4<\delta$. □

9.1.8 G 是不完备的连通图, 证明 G 是 k-连通图 $\iff(\forall u,v\in V,d(u,v)=2\implies p(u,v)\geq k)$.

证明. $\implies:\forall u,v\in V,p(u,v)\geq\kappa(G)\geq k$. $\impliedby$: 若 G 不是 k-连通图, 取其极小点割集 S, 则 $G-S$ 有连通分支 $H_1,\cdots,H_r$. 若在 G 中有 $s\in S$ 与连通分支 H_i 不相邻, 则 $G-(S\cup\{s\})$ 中 H_i 仍是连通分支, 这与 S 极小矛盾. 因此 $\forall s\in S$ 在两不同连通分支中分别有邻点 x,y, 显然两者不相邻, 故 $d(x,y)=2$ 且 S 是一个 xy-点割, 从而 $|S|<k\leq p(x,y)=c(x,y)\leq|S|$, 矛盾. □

9.1.10 (1)G 是 k-连通图, 则 $\forall e\in E,G/e$ 是 $(k-1)$-连通图. (2) 对每个 $k\geq 4$ 找出一个 k-连通图 $G\neq K_{k+1}$, 使得 $\kappa(G/e)=k-1(\forall e\in E)$.

证明. (1)k-连通即 $\forall u,v\in V,p(u,v)\geq k$. 记 $e=xy$, 则 $\forall u,v\in V-\{x,y\}$ 有至少 k 条内点不交的 uv-路, 而 $\{x,y\}$ 是其中最多 2 条的内点, 故在 G/e 中 u,v 间仍有至少 $k-1$ 条内点不交的路. 而 u,v 中有一点为 x 或 y, 不失一般性取 $u=x$, 则 G 中 x,v 间的 k 条内点不交路同样为 G/e 中的. 综上 $p_{G/e}(u,v)\geq k-1$, 从而得证.

(2) 考虑圈 C_{k+3} 的补图 $\overline{C_{k+3}}$, 即 K_{k+3} 去掉其中一个 Hamilton 圈所得的图. 首先证明 $\kappa(\overline{C_{k+3}})=k$: 考虑 $\overline{C_{k+3}}$ 中不相邻的点 u,v, 又记 u 与 u_0,v 不相邻,v 与 v_0,u 不相邻, 则 $\forall w\in V-\{u,v,u_0,v_0\},uwv$ 是 uv-路且这 $k-1$ 条路互不相交. 再考虑路 uv_0u_0v, 其与上面的路不相交, 从而 $p(u,v)\geq k,k\leq\min\limits_{u\neq v,uv\notin E}p(u,v)=\kappa\leq\delta=k$. 而该图收缩任意边后总有点与另外两点不相邻, 故 $\delta(\overline{C_{k+3}}/e)=k-1\geq\kappa(\overline{C_{k+3}}/e)$, 由 (1) 知 $\kappa(\overline{C_{k+3}}/e)=k-1$. □

9.2.1 给出扇形引理 (命题 9.5) 的证明.

证明. 考虑 k-连通图 $G,x\in V,Y\subset V-\{x\}$ 是含 $\geq k$ 点子集. 在 G 外添加新点 z, 并将其与 Y 中所有点连接, 得到图 H. 由引理 9.3 知 H 也是 k-连通图, 从而有 k 条内点不交的 xz-路 $P_1,\cdots,P_k$, 每条 P_i 含有一条 (x,Y)-路 Q_i, 由 P_i 之间内点不交知 Q_i 的内点与末端点不同, 从而 $Q_1,\cdots,Q_k$ 构成一个 x 到 Y 的 k-扇. □

9.2.3 不可分图 G 中有圈 $C,v(C)\geq 3$ 及顶点子集 $S\subset V(C),|S|=3$. 若 $G-V(C)$ 中有连通分支 H 与 S 的所有顶点相邻, 则 $\exists v\in H$ 到 S 有 3-扇.

证明. 记 $S=\{s_1,s_2,s_3\}$,H 中分别有点 h_1,h_2,h_3 与之相连. 若有 $v=h_1=h_2$, 则在 H 中有 vh_3-路 P, 故可取 vs_1,vs_2,vPh_3s_3 为 3-扇. 下考虑 h_1,h_2,h_3 互不相同, 则 H 中有 h_1h_2-路 P, 且有 $(h_3,V(P))$-路 Q',Q' 中可取到不与 P 相交的 $(h_3,V(P))$-路 Q, 记 Q 末端点为 v. 则 v 分 $P=h_1P_1vP_2h_2$, 故有 3-扇 $vP_1h_1s_1,vP_2h_2s_2,vQh_3s_3$, 显然它们内点不交. [1] □

9.3.2 (1) 证明 $\kappa\leq\kappa'\leq\delta$.(2) 找出满足 $\kappa=3,\kappa'=4,\delta=5$ 的图 G.

证明. (1) 任二点 $u\neq v$ 间有 $p'(u,v)$ 条边不交 uv-路, 但其并不一定内点不交, 故 $p'(u,v)\geq p(u,v)$. 而以 v 为端点的 $p'(u,v)$ 条边不交 uv-路需要连接 v 的边数 $d(v)\geq p'(u,v)$. 综上有:

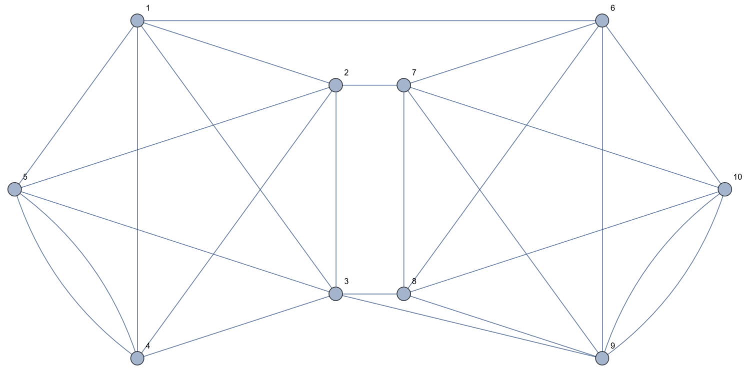
$$\kappa=\min_{u\neq v}p(u,v)\leq\min_{u\neq v}p'(u,v)=\kappa'\leq\min_{v}d(v)=\delta$$

(2)76 点 Owens 图满足条件. 另可由此回答思路构造图[2]: 考虑不交集合 $V_1,V_2,|V_1|=|V_2|=5,V=V_1\sqcup V_2$ 为图顶点集. 在 V_1,V_2 分别构造完备图 K_5, 并取子集 $X\subset V_1,Y\subset V_2,|X|=4,|Y|=3$ 构造满射 $f:X\to Y$, 添加边

[1] 这里并没有用到不可分与圈的条件. 我不确定是否存在问题, 或本就可如此.

[2] 也可以本质相同的思路构造类似满足要求的图, 详见我的回答

$\{\{x, f(x)\}\,|x \in X\}$. 最后取 $x' \in X$ 与 $x_0 \in V_1 - X$, 以及 $V_2 - Y = \{y_1, y_2\}$, 添加边 $\{x', x_0\}$ 与 $\{y_1, y_2\}$. 如图, 其满足 $\kappa = 3, \kappa' = 4, \delta = 5$:



□

9.3.5 立方图有 $\kappa = \kappa'$.

证明. 立方图即 $d(v) = 3(\forall v \in V), \delta = 3$, 故 $\kappa = 0, 1, 2, 3$.$\kappa = 0$ 时图不连通, 故 $\kappa' = 0$.$\kappa = 1$ 即图可分, 其有割点连接至少两个区块, 由 $d(v) = 3$ 知与至少一个区块仅以一条边连接, 删去此边可使图不连通, 从而 $\kappa' = 1$.$\kappa = 3$ 时由 $3 = \kappa \le \kappa' \le \delta = 3$ 知 $\kappa' = 3$.

$\kappa = 2$ 时, 考虑图的极小点割 $S = \{s_1, s_2\}$, 由极小点割中的点与所有连通分支相邻 (见 9.1.8 的证明),$2 \le c(G - S) \le d(s_1) = 3, c(G - S) = 2, 3$. 记 $G - S = \sum_{i=1}^{c} H_i, H_i$ 为连通分支, 则 $\forall H_i \forall s_j \in S \exists e_{ij} \in E, e_{ij} \in E(H_i, s_j)$. 下对 $c(G - S)$ 分别讨论.

- $c(G - S) = 3$ 时由 $d(s_j) = 3$ 知 $E(H_i, s_j) = \{e_{ij}\}$. 故从 G 中删去 e_{i1}, e_{i2} 后 $\partial(H_i) = E(H_i, G - H_i) = E(H_i, S) = \varnothing$, 即 $G - \{e_{i1}, e_{i2}\}$ 中 H_i 是连通分支. 故 $\kappa' = 2$.
- $c(G - S) = 2$ 时, 由 $d(s_j) = e(s_j, H_1) + e(s_j, H_2) + e(s_j, s_{j'}) = 3$ 及抽屉原理知,$\forall s_j \in S \exists H_{i_j}, e(s_j, H_{i_j}) = 1$.
  若存在 $i_1 = i_2 = i, E(H_i, S) = \{e_{i1}, e_{i2}\}$, 则 $G - \{e_{i1}, e_{i2}\}$ 中 $\partial(H_i) = \varnothing$, 即 $G - \{e_{i1}, e_{i2}\}$ 不连通.
  若不存在, 即 $i_1 \ne i_2$, 则 $e(s_1, H_{i_2}) = e(s_2, H_{i_1}) = 2, e(s_1, s_2) = 0$, 从而 $H_{i_1} + s_1 + e_{i_1 1}$ 与 $H_{i_2} + s_2 + e_{i_2 2}$ 为 $G - \{e_{i_1 1}, e_{i_2 2}\}$ 的分支. 故 $\kappa' = 2$. □

7 第十章 平面图

10.2.4 G 是平面图, 则 $G^{**} \cong G \iff G$ 连通.

证明. $\Longrightarrow$: 平面图的对偶总是连通的, 因为 $V(G^*) = F(G)$ 中的面可以经过有限步长与唯一的外面 (outer face) 相邻, 故 G^* 中的点总与外面对应的点间有路. 而连通图的对偶连通, 故 $G \cong G^{**}$ 连通.

$\Longleftarrow$: 注意到 G^{**} 的点对应于 G^* 的面, 而后者边界上的每条边都要在平面上仅经过一条 G 中的边, 且 G 中的边也要经过一条 G^* 的边, 从而由 Jordan 曲线定理知 G^* 的面边界内有且仅有一个 G 的点, 因此有 $V(G^{**})$ 与 $V(G)$ 之间的对应. 而 G^{**} 中点通过边 e^{**} 相邻等价于 G^* 中面通过边 e^* 相邻, 等价于 G 中的点通过边 e 相邻, 即边集之间有对应关系且保持相邻关系. 综上所述 $G^{**} \cong G$. □

10.3.2 (1) 连通平面图 G 的最短圈长 (girth)$k \ge 3$, 证明 $m \le \dfrac{k(n-2)}{k-2}$.(2) 证明 Petersen 图不是平面图.

证明. 注意到圈 $\partial(f)$ 长 $d(f) \ge k$, 故

$$2m = \sum_{f \in F} d(f) \ge kf = k(2 + m - n), (n-2)m \ge (k-2)n, m \le \frac{k(n-2)}{k-2}$$

而 Petersen 图有 $n = 10, m = 15, k = 5$, 即 RHS $= 40/3 < 15 = m$, 从而不是平面图. □

8 第十六章 匹配

16.1.5 (1)M, M' 是图 G 的最大匹配, 描述子图 $H = G[M \triangle M']$ 的结构.
(2)M, M' 是图 G 的完美匹配, 描述子图 $H = G[M \triangle M']$ 的结构.
(3) 由 (2) 证明树有至多一个完美匹配.

证明. (1) 由于 H 中点的度数仅可能为 1 或 2, 故 H 中连通分支仅可能有路和圈. 而对于点 $v \in V(H), d(v) = 2$ 即其连接 M 与 M' 中各一条边, 故所有路和圈都是交错的, 从而均为偶长度.

(2) 完美匹配也是最大匹配, 故 H 中仅可能有 M-交错路或圈. 若有交错路, 则其首端点不被 M 或 M' 覆盖, 与完美匹配矛盾, 故不存在交错路, 仅存在交错圈.

(3) 若取 G 是树,M, M' 是其两个完美匹配, 则 H 中不可能含圈, 即 $H = \varnothing$, 从而 $M = M'$. □

16.1.7 M 是图 G 的完美匹配,$S \subset V$, 证明 $|M \cap \partial(S)| \equiv |S| \bmod 2$.
(2) 若 M 是 Petersen 图的完美匹配, C 是图中一个 5-圈的边集, 则 $|M \cap C|$ 是偶图.

证明. (1)$s \in S$ 都被 M 覆盖, 故 s 是 $M \cap \partial(S)$ 中边的端点或 $M \cap E(S)$ 中边的端点, 且不可能同时是两者中边的端点. 而 $e \in M \cap \partial(S)$ 在 S 中的端点仅有 1 个,$e \in M \cap E(S)$ 在 S 中的端点有 2 个, 故

$$\begin{aligned}|S| &= \#\{v \in S | v\text{被}M \cap \partial(S)\text{覆盖}\} + \#\{v \in S | v\text{被}M \cap E(S)\text{覆盖}\} = |M \cap \partial(S)| + 2|M \cap E(S)| \\ &\equiv |M \cap \partial(S)| \bmod 2\end{aligned}$$

(2) 由上知 $|M \cap \partial(C)| + 2|M \cap C| = v(C) = 5, |M \cap C| = 0, 1, 2$, 故即证 $|M \cap C| \neq 1, |M \cap \partial(C)| \neq 3$. 记 $C = u_1u_2u_3u_4u_5u_1$, 由于 Petersen 图是 3-正则图, 故 C 中每个点都与 C 外一点相邻, 记 u_i 在 C 外的邻点为 v_i. 若 $|M \cap C| = 1$, 不失一般性的, 记 $M \cap C$ 中唯一边为 $e = u_1u_2$, 而 u_3, u_4, u_5 均被 $M \cap \partial(C)$ 覆盖, 故 $u_1u_2, u_3v_3, u_4v_4, u_5v_5 \in M$, 而 v_1, v_2 不相邻 (否则 Petersen 图有 4-圈 $u_1u_2v_2v_1u_1$), 这与 M 完美矛盾, 故得证. □

16.1.15 称 $v \in V$ 为必要点 (essential vertex), 若其被 G 的所有最大匹配覆盖, 即 $\alpha'(G - v) = \alpha'(G) - 1$.
(1) 给出无穷个不含必要点的连通图.(2) 证明每个非空二部图都有必要点.

证明. (1) 奇圈图的最大匹配总不匹配其中一点, 故对其上任意点都可构造对应的最大匹配不含该点, 即奇圈图不含必要点.

(2) 记二部图为 $G[X, Y]$, 取最大匹配 M, 存在点 $x \in X$ 不被其覆盖 (否则为完美匹配, 命题自然成立), 则 $N(x) \subset Y$ 被 M 覆盖, 否则 $\exists y \in N(x), xy$ 为 M-增广路, 矛盾. 再取最大匹配 M', 若其不覆盖 x 则同理 M' 覆盖 $N(x)$. 若 M' 覆盖 x, 下证 $N(x)$ 同样被 M' 覆盖, 从而 $N(x)$ 总为必要点.

若存在 $y \in N(x)$ 不被 M' 覆盖, 而其被 M 覆盖, 故 $\exists x_1 \in X - \{x\}, yx_1 \in M$, 故 $yx_1 \in M \triangle M'$. 由 $M \triangle M'$ 中路长度为偶数知, 有路 $yx_1y_1 \subset M \triangle M'$, 即 $x_1y_1 \in M'$. 若 y_1 不被 M 覆盖, 则 xyx_1y_1 是 M-增广路, 矛盾, 故 $\exists x_2 \in X - \{x, x_1\}, y_1x_2 \in M$. 以此类推,$M \triangle M'$ 有路 $xyx_1y_1x_2y_2\cdots$, 但 $M \triangle M'$ 有限, 从而矛盾. □

16.2.7 二部图 $G = G[X, Y]$ 有最大匹配 M^*,$U \subset X$ 不被 M^* 覆盖. 记从 U 中顶点通过 M^*-交错路可达的点构成点集 Z,$R = X \cap Z, B = Y \cap Z$. 证明 (1)$K^* = (X - R) \cup B$ 是覆盖.(2)$|K^*| = |M^*|$.

证明. (1) 若存在 $e = xy \in E, x \in X - K^* = R, y \in Y - K^* = Y - B$, 则存在从 $u \in U$ 到 x 的 M^*-交错路 P, 讨论奇偶性知 $\exists y' \in Y, y'x \in M$. 而 $y \notin B$ 即不存在 U 到 y 的 M^*-交错路,$P + e$ 不是 M^*-交错路, 故 $e \in M$, 矛盾于匹配定义. 从而 $V - K^*$ 的点之间不存在边.

(2) 已知 $|K^*| \geq |M^*|$, 即证 $|K^*| \leq |M^*|$. 而 $|K^*| = |X| - |R| + |B|$, 由于 $R - U$ 与 B 中点通过交错路一一对应, 故 $|R - U| = |B|, |R| - |B| = |U|, |K^*| = |X| - |U|$. 另一方面,$X$ 中至多有 $|X - U|$ 个元素被 M^* 覆盖, 即 $|M^*| \geq |X - U| = |K^*|$, 从而得证. □

16.2.11 无孤立点的图的一个边覆盖是与所有点关联的边构成的边集, 图 G 中最小边覆盖中边的个数记作 $\beta'(G)$. 证明对无孤立点图都有 $\alpha' + \beta' = n$.

证明. 首先证明任意最小边覆盖 F 中含有最大匹配. 考虑生成子图 $G[F]$ 的最大匹配 M, 其也为 G 的匹配. 注意到 $\forall e \in F - M$ 的端点不能都被 M 匹配, 否则 e 的端点均在 F 中, 从而 $F - e$ 仍为边覆盖, 与 F 最小矛盾; 也不能都不被 M 覆盖, 否则其为 M-增广路, 与 M 最大矛盾. 因此 $e \in F - M$ 的端点能且仅能被 M 覆盖一个.

下证 M 为 G 的最大匹配. 若否, 则 G 中有长 $2k+1$ 的 M-增广路 P. 由于 P 的首尾端点 u, v 均被 F 覆盖而不被 M 覆盖, 故有边 $uu_1, vv_1 \in F - M$, 由上知 u_1, v_1 被 M 覆盖. 且 uu_1, vv_1 均不在 P 中, 否则 P 成为 F 中的 M-增广路, 矛盾于 M 在 F 中最大. 综上所述, 取 $F' = (F - M \cap P - \{e_1, e_2\}) \cup (P - M)$, 其为 G 的边覆盖, 因为 $V(P)$ 被 $P - M$ 覆盖, 其余点被 $F - M \cap P$ 覆盖. 而 $\left|F'\right| < |F|$, 矛盾于最小性, 从而 M 是 G 的最大匹配.

最后证明问题: 取最小边覆盖 F 中 G 的最大匹配 M,U 是未被 M 覆盖的点集, 注意到 U 中的点与 $F - M$ 中的边一一对应, 故有 $\beta' = |F| = |M| + |F - M| = \alpha' + |U|$. 再对被 M 覆盖的点集计数, 由于, 有 $n - |U| = 2|M| = 2\alpha'$. 综上可知 $\alpha' + \beta' = 2\alpha' + |U| = n$, 得证. □

9 第十八章 Hamilton 圈

18.1.3 证明 Meredith 图不是 Hamilton 图.

证明. 注意到 Meredith 图是 10 个 $K_{3,4}$ 以 Peterson 图的方式连接起来, 而 Peterson 图无 Hamilton 回路, 故若 Meredith 图有 Hamilton 回路 P, 则其中一个 $K_{3,4}$ 图被 P 经过至少两次. 而每个 $K_{3,4}$ 图与其他部分仅以 4 个点连接, 且 4 个点都在一个 partite set X 中, 而 P 仅可从连接点出入, 每次出入仅能经过 partite set Y 中一个点, 故 Y 中三个点不能全被遍历. 从而 Meredith 图没有 Hamilton 回路. □

18.3.5 G 是简单图, 证明 (1) 若 G 连通且 $\delta \leq \dfrac{n-1}{2}$, 则 G 中有长 2δ 的路.(2) 若 $\delta \geq \dfrac{n-1}{2}$ 则 G 是可追踪 (traceable) 图.

证明. (1) 证明有误待补.

(2) 在 G 外另取一点 v 并将其与 G 中所有点连边, 得到的图 $G + v$ 满足 $\delta(G + v) \geq n/2$, 从而由 Dirac 定理知其有 Hamilton 圈, 从中删去 v 后 G 中有 Hamilton 路, 即得证. □

18.3.6 图 G 有 $\alpha \leq \kappa + 1$(其中 α 和 κ 分别是图的稳定性数与连通度), 证明 G 是可追踪图.

证明. 在 G 外另取一点 v 并将其与 G 中所有点连边, 得到的图 $G + v$ 有 $\alpha(G + v) = \alpha(G) \leq \kappa(G) + 1 = \kappa(G + v)$, 从而由 Chvátal-Erdős 定理知 $G + v$ 有 Hamilton 圈, 从中删去 v 后 G 中有 Hamilton 路, 即得证. □

18.3.9 简单二部图 $G = G[X, Y]$ 满足 $|X| = |Y| \geq 2$, 其度数序列为 $(d_1, d_2, \cdots, d_n), d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$. 若不存在整数 $k \leq n/4$ 使得 $d_k \leq k, d_{n/2} \leq n/2 - k$, 证明 G 是 Hamilton 图.[3]

证明. □

[3] HINT: Form a new graph H from G by adding edges between all pairs of vertices of X. Show that H is hamiltonian if and only if G is hamiltonian.

10 期末考试

1 证明 Ramsey 数 $R(3,3)=6$.

2 Exercise 18.3.5a

3 Exercise 1.3.15a

4 Exercise 2.5.5

5 Exercise 4.3.5a

6 Exercise 5.2.11

7 Exercise 9.1.8

8 Exercise 9.3.5

9 Exercise 16.2.11

10 若非完备图 G 中点 u,v 有 $d(u,v)=2$ 都有 $d(u)+d(v)\geq n$, 证明 G 是 Hamilton 图.