# 泛函分析读书笔记

章小明

2025 年 1 月 2 日

## 目录



## 1 Hahn-Banach 定理, 弱拓扑与弱 * 拓扑

### 1.1 Hahn-Banach 定理: 分析形式

首先给出一些定义上的比较:

**定义 1.** 范数满足:⓪$\mathbb{F}$-VS $E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$;①正定性 $p(x) = 0 \iff x = 0$;②正齐性 $\forall \lambda \in \mathbb{F} : p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$;③次可加性 $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

半范数满足:⓪②③.

次线性泛函满足:⓪*$\mathbb{R}$-VS $E \to \mathbb{R}$;②* $\forall \lambda \geq 0 : p(\lambda x) = \lambda p(x)$;③.

**引理 1.1.** *$\mathbb{R}$-VS $E$, VS $F \subset E$,$\operatorname{codim} F = 1$.$p : E \to \mathbb{R}$ 次线性,$f : F \to \mathbb{R}$ 线性. 若 $f \leq p|_F$, 则有线性延拓 $\tilde{f} : E \to \mathbb{R} : \tilde{f}|_F = f, \tilde{f} \leq p$.*

*证明.* 可以取 $x_0 \in E - F, E = \operatorname{span}(F, x_0)$. 可以构造线性泛函 $\tilde{f}(x + tx_0) = f(x) + t\tilde{f}(x_0)$. 仅需保证 $a = \tilde{f}(x_0)$ 的存在性.

为保证另一条件 $f(x) + ta \leq p(x + tx_0), t \in \mathbb{R}$, 通过变换可以得到不等式 $f(x/t) - p(x/t - x_0) \leq a \leq p(x/t + x_0) - f(x/t), t \geq 0$. 容易证明不等式下限小于等于上限, 因此符合条件的 $a$ 是存在的. 因此 $\tilde{f}$ 是存在的. □

由上可知, 实际上 $\operatorname{codim} F < \infty$ 甚至可数时, 都可以作线性延拓. 下考虑任意多的 codim.

**定理 1.2** (Hahn-Banach 延拓定理 ($\mathbb{R}$))**.** $\mathbb{R}$-VS $E$, VS $F \subset E$. $p : E \to \mathbb{R}$ 次线性,$f : F \to \mathbb{R}$ 线性,$f \leq p|_F$, 则存在 $f$ 的线性延拓 $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}, \tilde{f}|_F = f, \tilde{f} \leq p$.

*证明.* 此定理用 Zorn 引理证. 考虑偏序集 $\mathcal{F}$, 其元素为 $(G, g)$,$G$ 是含 $F$ 的 VS,$g$ 是 $G$ 上满足题设的线性泛函, 即 $g|_F{=}f, g{\leq}p|_G$.
其上的偏序关系 $\leq$ 定义为 $(G, g) \leq (H, h) \iff G \subset H, h|_G = g$. 首先, 每条链 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 上都有最大元 $(H, h)$.$H$ 是所有 VS 的并,$h$ 是对应的线性泛函的 "粘贴". 由定义这样的 $h$ 存在且确定, 并且 $h \leq p|_H$. 因此 $(H, h) \in \mathcal{F}$.

最后由引理可知, 存在极大元 $(M, m) \in \mathcal{F}$. 可知 $E = M$, 否则 $M$ 可以用上引理延拓, 矛盾, 因此可以得到符合条件的线性泛函. □

**定理 1.3** (Hahn-Banach 延拓定理)**.** $\mathbb{F}$-VS $E$, VS $F \subset E$.$p$ 是 $E$ 上半范数,$f : F \to \mathbb{F}$ 线性, 且 $f \leq p|_F$. 则其有线性延拓 $\tilde{f}, \tilde{f}|_F = f, |\tilde{f}| \leq p$.

证明. $\mathbb{R}$ 情形可直接由上定理得到相应线性泛函 $\tilde{f} \le p$. 而 $-\tilde{f}(x) \le p(-x) = p(x)$, 因此 $|\tilde{f}| \le p$.

$\mathbb{C}$ 情形可视 $E$ 为 $\mathbb{R}$-VS. 设 $\varphi = \Re f$, 其为实线性泛函. 由 $f$ 的复线性可知 $f = \varphi - \mathrm{i}\varphi(\mathrm{i}\cdot)$. 可以认为 $f \leftrightarrow \varphi$ 建立了实线性和复线性之间的对应关系. 对 $\varphi$ 可作 $\mathbb{R}$-VS 中的延拓 $\tilde{\varphi} \le p$. 再取 $\tilde{f} = \tilde{\varphi} - \mathrm{i}\tilde{\varphi}(\mathrm{i}\cdot)$, 其复线性.

最后, 对 $x \in E$ 设 $|\tilde{f}|(x) = \lambda \tilde{f}(x) = \tilde{\varphi}(\lambda x) - \mathrm{i}\tilde{\varphi}(\mathrm{i}\lambda x) \le p(\lambda x) = p(x)$. 其中最后一个不等号是因为模是实数, 因此可以去掉虚部. 这样就得到了我们需要的线性泛函. □

接下来我们给出一系列推论. 它们很小但或许会有重要的作用.

**命题 1.4.** *TVS $E$, VS $F \subset E$, $p$ 是 $E$ 上连续半范数,$f : F \to \mathbb{F}$ 线性且 $|f| \le p|_F$. 因此有连续线性延拓 $\tilde{f} \in E^*, \tilde{f}|_F = f, |\tilde{f}| \le p$.*

证明. 由上可得到相应延拓, 只需证其连续. 由其线性, 仅需证其在原点连续. 由 $|\tilde{f}|(x) \le p(x) < \varepsilon$ 可知其连续. □

**命题 1.5.** *LCS $E$, VS $F \subset E$, $f \in F^*$, 则其有延拓 $\tilde{f} \in E^*$.*

证明. $E$ 有一个半范数族, 由上 [哪里?] 有 $|f(x)| \le C \max\limits_{i \in J} p_i(x), J$ 有限. 因此 $|f|$ 小于连续半范数 $C \max p_i$. 由上命题1.4得证. □

**命题 1.6.** *TVS $E$, $p$ 是 $E$ 上连续半范数,$x_0 \in E$, 则存在 $f \in E^*, f(x_0) = p(x_0)$, 且 $|f| \le p$.*

证明. 可以先作 $E$ 上的线性泛函 $g.F = \mathrm{span}(x_0), g : F \to \mathbb{F}, tx_0 \mapsto tp(x_0)$, 然后延拓之到 $E$ 上, 结论成立. □

**命题 1.7.** *$T_2$ LCS $E$ 则 $E^*$ 可分点.*

证明. $E$ 有连续半范数 $p, p(x_0) \ne 0$. 由上命题可知有 $f \in E^*, f(x_0) \ne 0$. □

接下来给出一个重要的推论,VS $F$ 上的 $f \in F^*$ 不仅可以连续延拓, 而且可以保范的连续延拓.

**命题 1.8.** *$\mathbb{F}$-VS $E$, VS $F \subset E$ 且 $f \in F^*$. 则存在延拓 $\tilde{f} \in E^*, \tilde{f}|_F = f, \|f\| = \|\tilde{f}\|$.*

证明. 首先由 $\tilde{f}|_F = f, \|f\| \le \|\tilde{f}\|$. 而 $|f|(x) \le \|f\|\,\|x\|$ 在延拓后有 $|\tilde{f}|(x) \le \|f\|\,\|x\|$. 因此有 $\|\tilde{f}\| \le \|f\|$. 因此可知保范. □

**命题 1.9.** *赋范空间 $E$ 中有非零元 $x_0$, 存在 $f \in E^*, f(x_0) = \|x_0\|, \|f\| \le 1$.*

证明. $F = \mathrm{span}(x_0)$, 在 $F$ 上取 $g : x \mapsto \|x\|$. 其保范延拓到 $E$ 上, 为 $f. \|f\| = \|g\| = 1$.
为什么不是 $\le 1$? □

**命题 1.10.** *赋范空间 $E$, 取 $x \in E$ 有 $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in E^*, \|f\| \le 1\}$. 且上确界是可以达到的.*

证明. 记右式为 $\alpha$. 首先,$|f(x)| \le \|f\|\,\|x\| \le \|x\|$, 故 $\alpha \le \|x\|$. 另一方面由上命题, 有 $f_0 \in E^*, f_0(x) = \|x\|, \|f_0\| \le 1$. 因此 $\|x\| \le \alpha$. 结论也得证. □

最后我们来讨论一下二次对偶空间 $E^{**}$. 考虑 $B : (x, f) \mapsto f(x)$, 显然 $|B(x, f)| \le \|x\|\,\|f\|$, 因此其连续,$B(x, \cdot)$ 连续, 即 $B(x, \cdot) \in E^{**}$ 且 $\|B(x, \cdot)\|_{E^{**}} \le \|x\|$. 而上推论给出 $\exists f \in \overline{B}_{E^*} : \|x\| = \sup|f(x)| = \sup|B(x, f)|$, 即反向情形, 因此 $\|B(x, \cdot)\| = \|x\|$.

因此,$x \mapsto B(x, \cdot)$ 是等距同构, 此映射为 $E$ 等距嵌入到 $E^{**}$ 中, 记作 $E \hookrightarrow E^{**}$.

**命题 1.11.** *$E$ 赋范, 闭 VS $F \subset E$, $x \in E - F$. 则存在 $f \in E^*, \|f\| = 1, f|_F = 0, f(x) = d(x, F)$.*

证明. 给出 $\mathrm{span}(F, x)$ 上的线性泛函 $\varphi : \mathbb{F}x + F \to \mathbb{F}, tx + y \mapsto td(x, F)$. 显然 $\varphi$ 满足上述条件. 而 $d(x, F) \le d(x, y') = \|x - y'\|$. 更换记号 $y' = -y/t$, 有 $|\varphi(tx + y)| \le \|tx + y\|, \|\varphi\| \le 1$.

另一方面, 取 $y_n \in F, \|x - y_n\| < d(x, F) + \dfrac{1}{n}, \dfrac{|\varphi(x - y_n)|}{\|x - y_n\|} > \dfrac{d(x, F)}{d(x, F) + \frac{1}{n}}$. 因此 $\sup \dfrac{|\varphi(x - y_n)|}{\|x - y_n\|} \ge 1$. 因此 $\|\varphi\| = 1$.

最后由推论1.8给出结论. □

## 1.2 Hahn-Banach 定理: 几何形式

对 $f : E \to \mathbb{R}$ 记 $\{f < \alpha\} := \{x \in E : f(x) < \alpha\}$.

**定理 1.12** (Hahn-Banach 隔离定理)**.** TVS $E$ 中 $A, B \subset E$ 非空凸且不交. 若 $A$ 开, 则 $\exists f \in E^* \exists \alpha \in \mathbb{R} : A \subset \{\Re f < \alpha\}, B \subset \{\Re f \geq \alpha\}$.
换言之,$\Re f(a) < \alpha \leq \Re f(b), \forall a \in A, b \in B$.

本定理就是说,TVS 中不交凸集 (需要其中一个开) 射到 $\mathbb{R}$ 上, 可以用一个 $E^*$ 的泛函和一个常数分割开两个集合的像.

*证明.* 先证 $\mathbb{R}$ 情形. 任取 $a \in A, b \in B, x_0 = b - a$, 考虑 $C = A - B + x_0$. 这是一个开凸集. 再考虑其确定的 Minkowski 泛函 $p$. 由前 [哪里?], 这是一个半范数. 由于 $A, B$ 不交,$x_0 \notin C, p(x_0) \geq 1$.

由前 [哪里?], 可取 $f \in E^*, f(x_0) = p(x_0), f \leq p$. 因此

$$1 > f(0) = f(a) - f(b) + f(x_0) \geq f(a) - f(b) + 1.$$

因此 $f(a) \leq f(b), \sup f(A) \leq \inf f(B)$.

由 $A, B$ 凸,$f$ 线性, 因此 $f(A), f(B)$ 凸, 即为 $\mathbb{R}$ 上区间. 最后通过证明 $f(A)$ 是开的来完成证明.$x \in A$ 则对足够小的 $t$ 有 $x + tx_0 \in A$. 而 $f(x + tx_0) \in f(A)$, 随之 $t$ 变化其构成一个小的开区间. 因此 $f(A)$ 开.

对于开区间 $f(A)$,$f(a) < \alpha = \sup f(A) \leq \inf f(B)$, 得证.

$\mathbb{C}$ 情形下先将 $E$ 看作 $\mathbb{R}$-VS, 这样由上有实的 $\varphi \in E^*$ 符合条件. 然后再取相应的复线性 $f = \varphi - \mathrm{i}\varphi(\mathrm{i}\cdot)$. $\square$

**注 1.** 第三段说明 TVS 中非零线性泛函都是开映射.

**定理 1.13** (Hahn-Banach 严格隔离定理)**.** $T_2$ LCS $E$ 中 $A, B$ 非空凸且不交. 若 $A$ 紧而 $B$ 闭, 则

$$\exists f \in E^* \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \sup \Re f(A) < \alpha < \beta < \inf \Re f(B).$$

本定理是前定理的加强, 使得两集合的像足够分离.

*证明.* 取 $x \in A$ 有 $x \in B^c$, 由 $B^c$ 开可取邻域 $x + V \subset B^c$.TVS 中可取 $U_x \in N(0) : U_x + U_x \subset V$, 故有 $(x + U_x + U_x) \cap B = \emptyset$.

由 $A$ 紧, 可取有限元素及其对应 $U_k : A \subset \bigcup (x_k + U_k)$. 设 $U = \bigcap U_k$, 这是一个含原点的开凸集. 考虑开凸集 $\tilde{A} = A + U$, 其中元素 $\tilde{a} = a + u \in x_k + U_k + U$, 后者不交 $B$. 故 $\tilde{A}$ 不交 $B$.

最后由前定理隔离 $\tilde{A}$ 和 $B$, 有 $\Re f(a) \leq \Re f(\tilde{a}) < r \leq \Re f(b)$. 而 $A$ 紧凸则 $\Re f(A)$ 紧凸, 即有界闭区间 $[r_1, r_2]$, 取 $r_2 < \alpha < \beta < r$ 即可. $\square$

由上两定理有一系列推论. 以下均认为 $E$ 是 $T_2$ LCS.

**命题 1.14.** *$B$ 是平衡闭凸集,$x_0 \in B^c$, 则有 $f \in E^*, f(x_0) > 1, \sup\limits_{x \in B} |f(x)| \leq 1$.*

*证明.* 取 $A = \{x_0\}$, 运用定理1.13, 可以得到 (方向不是本质的)$\sup \Re f(B) < \alpha < \Re f(x_0)$. 取 $g = f/\alpha$, 有

$$\sup \Re g(B) < 1 < \Re g(x_0) \leq |g(x_0)| = \lambda g(x_0)$$

考虑 $h = \lambda g, |h| = |g|$, 有

$$\sup |h|(B) = \sup |g|(B) = \sup \Re g(\lambda B) = \sup \Re g(B) < 1$$

最后一个等号是因为 $B$ 平衡. 取 $h$ 为所需函数即可. $\square$

**命题 1.15.** *VS $F \subset E, x_0 \in E$. 有 $x_0 \in \overline{F} \iff (\forall f \in E^* : f|_F = 0 \implies f(x_0) = 0)$.*

*证明.* $\implies$ 显然. $\impliedby$: 若否, 由上有 $f(x_0) > 1, \sup |f|(\overline{F}) \leq 1$. 而 $\forall x \in F : |f(x)| \leq 1$ 可知 $f|_F = 0$. 因此得证. $\square$

这一命题直接给出:

**命题 1.16.** *VS* $F \subset E.\overline{F} = E \iff \forall f \in E^* : f|_F = 0 \implies f = 0$.

**命题 1.17** (命题1.7的重新叙述)**.** $E^*$ 可分点[1]

证明. $F = \operatorname{span}(x)$, 分类讨论 $y$. 若 $y \notin F$ 则存在 $f \in E^*$ 有 $f(x) = 0 \wedge f(y) \neq 0$(由反命题得到). □

**命题 1.18** (Mazur 定理)**.** *VS* $E$, $\tau_1, \tau_2$ 是其上 $T_2$ 拓扑, 且 $(E, \tau_1), (E, \tau_2)$ 均为 *LCS*. 若 $(E, \tau_1)^* = (E, \tau_2)^*$, 即对任意线性 $f : E \to \mathbb{F}$, 其在两拓扑上的连续性等价. 则凸集 $A \subset E$ 在两拓扑上的闭性等价.

本定理说明具有相同的连续线性泛函的 $T_2$ *LCS* 拓扑具有相同的凸闭集.

证明. 若 $A$ 仅在 $\tau_1$ 中闭, 则 $\exists x_0 \in \overline{A}^{\tau_2} - A$. 由定理1.13可得不等式. 而 $f$ 在 $\tau_2$ 下连续, 因此 $\sup \Re f(A) < \alpha \implies \Re f(x_0) \leq \alpha$, 矛盾. □

## 1.3 弱拓扑与弱 * 拓扑

$\mathbb{F}$-VS $E$ 上某些线性泛函[2]生成 VS $F$, 我们假设其可分点.$\{|f| : f \in F\}$ 是 $E$ 上可分点的半范数族, 其诱导拓扑 $\sigma(E, F)$.
由前 (7.2.6)[哪里?] 知 $\sigma(E, F)$ 是与 TVS$E$ 相容且使 $F$ 元素连续的最弱拓扑, 下证反向结论, 即 $(E, \sigma(E, F))^* = F$.

**引理 1.19.** $\mathbb{F}$-*VS* $E$ 上有有限个线性泛函 $\{f_k\}_{k=1}^n$. 有等价命题:

$$f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k \iff \exists C \geq 0 : |f(x)| \leq C \max_{k \in [n]} |f_k(x)| \iff \bigcap_{k \in [n]} \ker f_k \subset \ker f$$

证明. (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3) 显然, 仅需证 (3) $\implies$ (1).

考虑 $G = \{(f_1(x), \cdots, f_n(x)) : x \in E\} \subset \mathbb{F}^n$. 由线性性,$G$ 是 VS. 再有 $\varphi : G \to \mathbb{F}, (f_1(x), \cdots, f_n(x)) \mapsto f(x)$. $(f_1(x), \cdots, f_n(x)) = (f_1(x'), \cdots, f_n(x')) \iff (f_1(x - x'), \cdots, f_n(x - x')) = 0 \implies x - x' \in \bigcap \ker f_k \subset \ker f \implies f(x) = f(x')$. 因此 $\varphi$ 是映射. 显然其为线性. 由延拓定理 [哪里?] 可延拓其为线性泛函 $\tilde{\varphi} : (y_1, \cdots, y_n) \mapsto \sum \alpha_k y_k$. 因此有 $f(x) = \tilde{\varphi}|_G(f_1(x), \cdots, f_n(x)) = \sum \alpha_k f_k(x)$. □

**定理 1.20.** $(E, \sigma(E, F))^* = F$. 即 $f \in F \iff E$ 上线性泛函 $f$ 是 $\sigma(E, F)$-连续的.

证明. 由前 (7.2.6)[哪里?] 显然 $F \subset (E, \sigma(E, F))^*$. 下证反向.

$f \in (E, \sigma(E, F))^*$, 则由前 (7.2.9)[哪里?], 有 $|f| \leq C \max |f_k|, f_k \in F$. 由上即 $f = \sum \alpha_k f_k \in F$. □

**定义 2.** $E$ 上的弱拓扑指 $\sigma(E, E^*)$.$(E, \sigma(E, E^*))$ 是 $T_2$ LCS. 约定不写 $\sigma(E, E^*)$-, 而写作 $w$-.

$\forall x \in E$ 定义 $\hat{x} : E^* \to \mathbb{F}, f \to f(x)$, 记 $\hat{E} = \{\hat{x} : x \in E\}$. 定义 $\sigma(E^*, \hat{E})$ 为 $E^*$ 上的弱 * 拓扑.$\sigma(E^*, \hat{E})$ 是 $T_2$ LCS. 约定不写 $\sigma(E^*, \hat{E})$-, 而写作 $w$*-.

$E \to \hat{E}, x \mapsto \hat{x}$ 是线性双射, 即 $E$ 线性同构于 $\hat{E}$. 可记 $E = \hat{E}, \sigma(E^*, \hat{E}) = \sigma(E^*, E)$.

若 $E$ 赋范, 则 Banach 空间 $E^*$ 上有范数拓扑 $\|\cdot\|$, 相对于 $w$*-拓扑, 称 $\|\cdot\|$ 为 $E^*$ 上强拓扑.

**命题 1.21.**
1. 由上定理,$(E, \sigma(E, E^*))^* = E^*, (E^*, \sigma(E^*, E))^* = E$.
2. 凸集 $A \subset E$ 有 $\overline{A} = \overline{A}^w$.

**例 1.1** (缓增广义函数)**.** Schwartz 函数类 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上有半范数族 $\left\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta}\right\}_{\alpha,\beta}, \|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta f(x)\right|, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 在此拓扑下是 LCS, 其对偶空间记为 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 后者中元素为缓增广义函数. 下给出例子:

- Dirac 函数$\delta_a, a \in \mathbb{R}^n$:$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \delta_a(f) = f(a)$.
- $L_g(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\mathrm{d}x, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. 容易验证 $\forall p \in [1, \infty] \forall g \in L^p(\mathbb{R}^n), L_g$ 是缓增广义函数.

最后我们来证明双极定理.

---

[1]即 $\forall x, y \in E \exists f \in E^* : x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$.

[2]指 $\mathcal{L}(E, \mathbb{F})$

**定义 3.** $T_2$ LCS $E$, $A \subset E$, 称 $\mathrm{pol}(A) = \{x^* \in E^* : |x^*(x)| \le 1, \forall x \in A\}$ 为 $A$ 的极集.

相应的,$B \subset E^*$ 时, 称 $\mathrm{pol}(B) = \{x \in E : |\langle x^*, x\rangle| \le 1, \forall x^* \in B\}$ 为 $B$ 的极集.

极集的极集记作 $\mathrm{pol}^2(\cdot)$.

**命题 1.22.** *考虑 $A \subset E, B \subset E^*$.*

1. *$\mathrm{pol}(A)$ 和 $\mathrm{pol}(B)$ 均是凸平衡的, 且分别是 $w^*$-闭的和 $w$-闭的.*
2. *$\mathrm{pol}(\cdot)$ 是单调递减的, 即 $A_1 \subset A_2 \implies \mathrm{pol}(A_2) \subset \mathrm{pol}(A_2)$.*
3. *记 $A$ 的凸平衡包为 $\mathrm{convba}(A) = \left\{\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k : x_k \in A, \lambda_k \in \mathbb{F}, \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \le 1\right\}$, 闭凸平衡包 $\mathrm{ccb}(A) = \overline{\mathrm{convba}(A)}$. 有 $\mathrm{pol}(\mathrm{ccb}(A)) = \mathrm{pol}(A)$.*
4. *非零 $\lambda \in \mathbb{F}$ 有 $\mathrm{pol}(\lambda A) = \lambda^{-1}\mathrm{pol}(A)$.*
5. *$\mathrm{pol}\left(\bigcup A_i\right) = \bigcap \mathrm{pol}(A_i)$*
6. *VS $F \subset E$, 则 $\mathrm{pol}(F) = \{x^* \in E^* : x^*|_F = 0\}$, 称后者为 $F$ 的零化子 $F^\perp$. 并且 $F^\perp$ 是 $E^*$ 的 $w^*$-闭 VS.*

*证明.* 1. 取 $\lambda x^* + (1-\lambda)y^*$ 和 $\lambda x^*$, 易证其为凸平衡的. $\forall a \in A, \hat{a}$ 是 $w^*$-连续的, 因此 $\mathrm{pol}(A) = \bigcap_{a\in A} \hat{a}^{-1}(\overline{B}_{\mathbb{F}})$ 是 $w^*$-闭的.

需要说明的是 $\hat{a}^{-1}(\overline{B}_{\mathbb{F}}) = \{x^* \in E^* : |x^*(a)| \le 1\}$, 取交后即为定义.$B$ 的情况同理.

2. 由 $\mathrm{pol}(A) = \bigcap_{a\in A} \hat{a}^{-1}(\overline{B}_{\mathbb{F}})$ 显然.

3. 显然 $A \subset \mathrm{ccb}(A)$, 下证 $\mathrm{pol}(A) \subset \mathrm{pol}(\mathrm{ccb}(A))$. 注意到 $\forall x \in \mathrm{convba}(A) : x = \sum \lambda_k x_k$, 取 $x^* \in \mathrm{pol}(A)$, $\left|x^*\left(\sum \lambda_k x_k\right)\right| \le \sum |\lambda_k|\,|x^*(x_k)| \le 1$. 由 $x$ 任意性且 $x^*$ 连续,$x^* \in \mathrm{pol}(\mathrm{ccb}(A))$. 得证.

4,5,6. 易证.

最后可以注意到 $\mathrm{pol}(B) = \bigcap_{b\in B} b^{-1}(\overline{B}_{\mathbb{F}})$ 及定义, 同理可证上述性质对 $B$ 成立. □

**定理 1.23** (双极定理)**.** $T_2$ LCS $E, A \subset E, B \subset E^*$.

1. $\mathrm{pol}^2(A) = A \iff A$ 是 $w$-闭凸平衡的. 一般 $\mathrm{pol}^2(A) = \mathrm{ccb}(A)$.
2. $\mathrm{pol}^2(B) = B \iff B$ 是 $w^*$-闭凸平衡的. 一般 $\mathrm{pol}^2(B) = \mathrm{ccb}(B)$.

*证明.* 仅证 (1). $\implies$ 显然, 由上性质 3 得到.

$\impliedby$ : 显然 $A \subset \mathrm{pol}^2(A)$, 这是因为 $\forall a \in A \forall x^* \in \mathrm{pol}(A) : |x^*(a)| \le 1$.$A$ 是闭凸平衡集, 任取 $x \in A^c$, 则由命题1.14有 $x^* \in E^*$ 满足条件. 条件给出 $x^* \in \mathrm{pol}(A)$ 而 $x \notin \mathrm{pol}^2(A)$, 因此 $\mathrm{pol}^2(A) \subset A$. □

# 2 符号表

| | |
|---|---|
| LCS | Locally Convex Space, 局部凸空间 |
| $T_2$ | Hausdorff 空间, 即满足 $\forall x, y \exists O(x), O(y) : x \ne y \implies O(x) \cap O(y) = \emptyset$. |
| TVS | Topological Vector Space, 拓扑向量空间 |
| VS | Vector Space, 向量空间 |