# 复分析读书笔记

章小明

2025 年 1 月 2 日

## 目录



本笔记蓝本为史济怀《复变函数》, 参考 Ahlfors, Complex Analysis (3rd).

# 1 复变函数和全纯函数

本章有太多学过的内容, 因此本人只会选一些不太记得的东西记录. 需要注意的是,$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$.

## 1.1 复数的几何和积分

**1.** Euler 公式和 de Moivre 公式.

**2.** 直线:$a, b \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} \dfrac{z-a}{b} = 0 \iff b_1 y - b_2 x - a_2 b_1 + a_1 b_2 = 0 \iff y = \dfrac{b_2}{b_1}(x - a_1) + a_2.$

3. 圆周:$a,d\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{C},az\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+d=0 \iff \left(x+\dfrac{\beta_1}{a}\right)^2+\left(y+\dfrac{\beta_2}{a}\right)^2=\dfrac{|\beta|^2-d}{a} \iff \left|z-\dfrac{\beta}{a}\right|=\sqrt{\dfrac{|\beta|^2-d}{a}}$.

4. 平面上四点 $z_1,z_2,z_3,z_4$ 的交比 $(z_1,z_2,z_3,z_4)=\dfrac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\Big/\dfrac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$ 为实数, 即 $\mathrm{Im}(z_1,z_2,z_3,z_4)=0$.

5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta=\frac{\sin\frac{\theta}{2}+\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}},\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$.

6. $(2n-1)!!(2n)!!=(2n)!,(2n)!!=n!2^n$.

7. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^{2n}\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\mathrm{d}\theta=2\pi\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=2\pi\cdot2^{-2n}\binom{2n}{n}$. 其中次数为奇数时结果为 0.

   但由 Wallis 公式可知:$\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{2k+1}\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi/2}\cos^{2k+1}\theta\mathrm{d}\theta=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$.

8. $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{\cos n\theta}{n}=-\log2\sin\frac{\theta}{2},\sum_{n\geq1}\frac{\sin n\theta}{n}=\frac{\pi-\theta}{2}.(\sum\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{n}=-\log(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).)$

   分别代入 $\theta=\pi$ 和 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, 得到 $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\log2$ 和 $\displaystyle\sum_{k\geq0}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}$.

9. $0<p<m\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin p\pi}\frac{(1-p)\cdots(m-1-p)}{(m-1)!}$.

10. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\log x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}$.

剩下请查阅史济怀习题 1.2.

## 1.2 全纯函数

**Cauchy-Riemann 方程** 复变函数 $f=u+\mathrm{i}v$ 在某点全纯当且仅当 $f$ 在该点实可微 (即 $u,v$ 均可微) 且满足如下等价条件:

- 满足方程组 $\partial_x u=\partial_y v,\partial_y u+\partial_x v=0$.(此即 Cauchy-Riemann 方程)
- 记 $\partial_z=\dfrac{\partial_x-\mathrm{i}\partial_y}{2},\partial_{\bar{z}}=\dfrac{\partial_x+\mathrm{i}\partial_y}{2}$, 有 $\partial_{\bar{z}}f=0$. 此时 $f'=\partial_z f$.

也可记作 $\partial_x f+\mathrm{i}\partial_y f=0$ 或 $\partial_z\bar{f}=0$. 另外, 可以得到 $f'(z)=\partial_x u+\mathrm{i}\partial_x v=-\mathrm{i}\partial_y u+\partial_y v$.

可以认为,$u,v\in C^1(\Omega,\mathbb{R})$ 且满足 CR 方程 $\iff f=u+\mathrm{i}v\in H(\Omega)$.

全纯函数有如下性质

1. $|\partial_z f|^2-|\partial_{\bar{z}}f|^2=\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$. 特别的,$f$ 全纯时 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=|f'|^2$.

2. 全纯函数 $f$ 为常数等价于 $\mathrm{Re}\,f,\mathrm{Im}\,f,|f|,\arg f$ 之一为常数, 或 $\mathrm{Re}\,f=(\mathrm{Im}\,f)^2$.

**全纯函数与调和函数** 我们定义 Laplace 算子 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$. 调和函数 $u\in C^2(\Omega)$ 即 $\Delta u=0$ 的函数.

注意到 $\Delta u=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial\bar{z}}$, 因此可知

3. $f\in H(\Omega)$ 是调和函数.

   若调和函数 $u,v$ 满足 Cauchy-Riemann 方程, 则称 $v$ 为 $u$ 的共轭调和函数. 显然有

4. $v$ 是 $u$ 的共轭调和函数 $\iff$ $u$ 是 $-v$ 的共轭调和函数.

5. $\mathrm{Re}\,f$ 和 $\mathrm{Im}\,f$ 都是调和函数, 且 $\mathrm{Im}\,f$ 是 $\mathrm{Re}\,f$ 的共轭调和函数.

6. 对单连通域 $\Omega$ 上的调和函数 $u$, 其有共轭调和函数 $v$, 使 $u+\mathrm{i}v\in H(\Omega)$.(考虑 $v$ 为全微分 $-\partial_y u\mathrm{d}x+\partial_x u\mathrm{d}y$ 的积分.)

7. $f(z)$ 和 $\bar{f}(\bar{z})$ 同时调和;$u(z)$ 和 $u(\bar{z})$ 同时调和.

   剩下请查阅史济怀习题 2.2.

**全纯函数导数的几何意义** 全纯函数 $f$ 在 $f' \neq 0$ 处是 $E^2 \to E^2$ 的保角变换, 即在变换 $f$ 作用下, 两曲线交点处夹角不变. 另外, 若 $f'(z_0) \neq 0$, 曲线在 $z_0$ 处切线的角度在作用下 (逆时针) 旋转 $\operatorname{Arg} f'(z_0)$, 且 $z_0$ 附近像点之间距离与原像之间距离的 $|f'(z_0)|$ 倍.

可以考虑微分几何的运算, 我们可以考虑 $(x,y) \mapsto (x,y,0) \overset{f}{\mapsto} (u(x,y), v(x,y), 0)$, 计算可知 $\tilde{\mathrm{I}} = \left((\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2\right) \mathrm{I}$, 因此的确是一个保角映射, 且注意到此系数即 $|f'(z_0)|^2$.

## 1.3 初等全纯函数

**指数函数** 对 $z = x + \mathrm{i}y$ 定义 $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$. 事实上这也对 $x, y \in \mathbb{C}$ 成立. 我们称之为 Euler 公式.

指数函数有性质 (1) 非负且在 $\mathbb{C}$ 上全纯;(2) 满足 $\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1+z_2}$;(3)$(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z$;(4) 以 $2\pi\mathrm{i}$ 为周期.

若 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 在 $D \subset \Omega$ 上是单射, 则我们称 $D$ 是 $f$ 的**单叶性域**,$f$ 在 $D$ 上是单叶的.

$\mathrm{e}^z$ 的单叶性域如条状区域 $\mathbb{R} \times (2k\pi, 2(k+1)\pi)(k \in \mathbb{Z})$, 宽 $2\pi$. 其被映到 $\mathbb{C} - \mathbb{R}_{\geq 0}$. 其中 $\operatorname{Im} z = 2k\pi$ 映到正实轴的上岸,$\operatorname{Im} z = 2(k+1)\pi$ 映到正实轴的下岸.$\mathbb{R} \times (2k\pi, (2k+1)\pi)$ 映到上半平面,$\mathbb{R} \times ((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi)$ 映到下半平面. 实际上对于 $[a,b] \times [\alpha,\beta](\beta - \alpha < 2\pi)$, 其映到一个扇环形面, 内外半径为 $[\mathrm{e}^a, \mathrm{e}^b]$, 辐角范围 $\arg z \in [\alpha, \beta]$. 直观上来说,$\mathrm{e}^z$ 将一个条状区域映为一个扇形区域, 条越窄则扇角越小.

**对数函数** 对数函数是指数函数的反函数, 定义其为 $\operatorname{Log} z = \log|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z = \log|z| + \mathrm{i}\arg z + 2k\pi\mathrm{i}$.

对数函数是一个多值函数, 因此我们可以选取其单值连续分支 $\operatorname{Log}_{(k)} z = \log|z| + \mathrm{i}\arg z + 2k\pi\mathrm{i}$, 在 $D$ 上单值全纯, 且有 $\mathrm{e}^{\operatorname{Log}_{(k)} z} = z$. 其中 $D$ 是不含 0 和 $\infty$ 的单连通域. 并且对每个 $\operatorname{Log}_{(k)} z$ 有 $\operatorname{Log}'_{(k)} z = \dfrac{1}{z}$.(验证 $\log r$ 和 $\mathrm{i}\theta$ 满足极坐标下的 Cauchy-Riemann 方程, 并可算出结果.)

之所以不含 0 和 $\infty$, 是因为若取含 0 的简单闭曲线,$z$ 逆时针绕其一圈后辐角增加 $2\pi$, 因此 $\operatorname{Log}_{(k)} z$ 连续变动成 $\operatorname{Log}_{(k+1)} z$. 因此,$D$ 不再是单值的.

我们定义多值函数 $f$ 的**支点**为, 若 $z$ 在其足够小邻域内的简单闭曲线上连续绕一圈,$f(z)$ 的值从一支变为另一支. 显然,Log 的支点为 0 和 $\infty$. 我们一般取 $k = 0$ 时的 $\operatorname{Log}_{(0)}$ 为 Log 的主支.

我们可以定义 Log 的单叶性域在 $\mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$ 或 $\mathbb{C} - \mathbb{R}_{\geq 0}$ 上, 前者映到 $\mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$ 上, 后者映到 $\mathbb{R} \times (0, 2\pi)$ 上. 考虑到 Log 是 exp 的反函数, 这是显然的, 上述情形也反过来可以运用到 Log 上.

**幂函数** 我们讨论 $z^\mu$ 中 $\mu$ 的范围.

$\mu = n \in \mathbb{N}$ 此时 $z^n$ 是一个**整函数** ($H(\mathbb{C})$ 中函数), 且 $(z^n)' = nz^{n-1}$. 此时 $z^n$ 在除原点外均为保角变换.

$z^n$ 的单叶性域为辐角差小于 $\dfrac{2\pi}{n}$ 的扇形区域, 如 $\left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Arg} z \in \left(\dfrac{2k\pi}{n}, \dfrac{2(k+1)\pi}{n}\right)\right\}$, 其被映到 $\mathbb{C}$ 上. 直观上来说,$z^n$ 将一个扇形的辐角增大 $n$ 倍.

$\mu = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ 此时 $z^{\frac{1}{n}}$ 是 $z^n$ 的反函数, 因此也是个多值函数.0 和 $\infty$ 是其支点. 在 $\mathbb{C} - \mathbb{R}_{\geq 0}$ 上我们可以划分 $n$ 个单值连续分支:

$$z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \qquad (z^{\frac{1}{n}})_{(k)} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\theta}{n}\right), k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

实际上这便是将 $\mathbb{C} - \mathbb{R}_{\geq 0}$ 映为上述第 $k$ 个单叶性域.

$\mu = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ $z^\mu = \mathrm{e}^{\mu \operatorname{Log} z} = \mathrm{e}^{(a\log|z| - b\operatorname{Arg} z) + (b\log|z| + a\operatorname{Arg} z)\mathrm{i}}$, 主值即为 $\mathrm{e}^{\mu \operatorname{Log}_{(0)} z}$.

- $b = 0, a = n$ 时,$z^n$ 为单值函数.
- $b = 0, a = \dfrac{p}{q}$ 时,$z^{\frac{p}{q}}$ 为多值函数, 有 $q$ 个分支. 实际上即为 $(z^p)^{\frac{1}{q}}$.
- $b = 0, a$ 是无理数或 $b \neq 0$ 时,$z^\mu$ 为无穷值函数.

**三角函数** 定义 $\cos z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}, \sin z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$. 其满足 Euler 公式, 且将 Euler 公式推广到 $x, y \in \mathbb{C}$.

可以验证此时的三角函数满足原先在 $\mathbb{R}$ 上的所有函数性质和运算法则, 但 $\mathbb{C}$ 上的三角函数是无界的.

**多值函数** $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{m}(z-a_k)^{\beta_k}}$　其中 $n,m\in\mathbb{N}^*,\beta_k\in\mathbb{Z},a_k\in\mathbb{C}$.

我们有如下结论:$n\nmid\beta_k$ 时 $a_k$ 是其支点,$n\nmid\sum_{k=1}^{m}\beta_k$ 时 $\infty$ 是其支点. 因此我们有: 若在区域 $D$ 中没有支点或区域中支点对应的 $\sum_{j\in J}\beta_j$ 是 $n$ 的倍数, 则 $D$ 中可以分出 $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{m}(z-a_k)^{\beta_k}}$ 的单值全纯分支.

### 1.4　分式线性变换与交比

分式线性变换或 Möbius 变换指的是形如 $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 的变换, 其中所有系数为复常数, 且 $ad-bc\neq 0$. 由于 $T'(z)=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}\neq 0$, 因此其也是在 $z\neq -d/c$ 处的保角变换. 而 $c=0$ 时 $T(z)=Az+B$, 称之为整线性变换, 因其为整函数.

分式线性变换的反函数 $z=T^{-1}(w)=\dfrac{-dw+b}{cw+a}$ 也是分式线性变换, 因此 $T$ 在 $\mathbb{C}$ 上是单叶的. 我们规定 $c\neq 0$ 时 $T(-d/c)=\infty,T(\infty)=a/c;c=0$ 时 $T(\infty)=\infty$, 因此给出了单叶映射 $T:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty$.

我们给出分式线性变换的一些特殊性质:

1. 分式线性变换把圆周 $|z-z_0|=r$ 变为圆周 $|z-\alpha|=\beta,\alpha=\dfrac{a-c\frac{c\cdot\overline{d-z_0}}{|d-z_0|^2-|r|^2}}{bc-ad},\beta=\dfrac{c}{bc-ad}\dfrac{|d-z_0|^2-|c|^2}{|d-z_0|^2-|r|^2}$.
2. 有唯一分式线性变换将 $\mathbb{C}_\infty$ 上三不同点映为事先给定的 $\mathbb{C}_\infty$ 上的三点.
(考虑分式变换交比函数 $L=(\cdot,z_2,z_3,z_4)$ 在 $z=z_i$ 时有三不同值, 给定点的交比函数 $S$ 也是, 因此所求变换 $M=S^{-1}\circ L$. 唯一性需注意分式变换最多仅有二不动点, 除非为恒等变换.)
3. 交比是分式线性变换的不变量.(前证明中 $L=S\circ M$.)
4. 分式变换下的不变量一定是交比的函数.($f(z_1,z_2,z_3,z_4)=f((z_1,z_2,z_3,z_4),1,0,\infty)$.)

接下来我们定义圆周的所谓内部和外部:$\mathbb{C}_\infty$ 上圆周 $\gamma$ 分平面为两个区域 $g_1,g_2$,$\gamma$ 上有 $z_1,z_2,z_3$. 若依次走过三点, 而 $g_1,g_2$ 分别在我们左边和右边, 则称 $g_1,g_2$ 分别是 $\gamma$ 关于走向 $z_1,z_2,z_3$ 的左边和右边. 因此我们有

5. $\gamma$ 关于走向 $z_1,z_2,z_3$ 的左边中的点 $z$ 满足 $\mathrm{Im}(z,z_1,z_2,z_3)<0$. 相应右边的点满足 $\mathrm{Im}(z,z_1,z_2,z_3)>0$.(画图计算.)
6. 分式变换 $T$ 将 $\gamma$ 关于走向 $z_1,z_2,z_3$ 的左右边分别变换为 $T(\gamma)$ 关于走向 $T(z_1),T(z_2),T(z_3)$ 的左右边.

我们定义 $z,z^*$ 是一对关于圆周 $\gamma:|z-a|=R$ 的对称点, 若两点在 $a$ 所射射线上, 且满足 $|z-a|\,|z^*-a|=R^2$. 若 $\gamma$ 是直线, 则定义为两点连线的垂直平分线等于 $\gamma$. 实际上,$z^*=a+\dfrac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}}$.

我们最后得到如下性质:

7. $\gamma$ 的对称点 $z,z^*$ 满足, 对 $\gamma$ 上任三点有 $(z^*,z_2,z_3,z_4)=\overline{(z,z_2,z_3,z_4)}$.(直接计算.)
8. 若 $z,z^*$ 是关于 $\gamma$ 的对称点, 则 $T(z),T(z^*)$ 是关于 $T(\gamma)$ 的对称点.(直接由不变性.)

上述讨论给出许多例子, 在此不一一举出. 其中比较重要的有:

- 若一个变换将 $a$ 映成 0, 则 $a^*$ 映成 $\infty$, 可以直接设变换为 $\lambda\dfrac{z-a}{z-a^*}$.
- 单位圆 $B$ 上的全纯自同构有 (且仅有) 分式变换 $T(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ 一类.

## 2　全纯函数的积分表示

### 2.1　复变函数的积分

复变函数的积分定义在可求长曲线 $\gamma\subset\mathbb{C}$ 上, 即为其上 Riemann 和的极限 $\int_\gamma f\mathrm{d}z=\lim\sum f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})$. 若 $f=u+\mathrm{i}v$ 在 $\gamma$ 上连续, 则 $\int_\gamma f\mathrm{d}z=\int_\gamma(u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y)+\mathrm{i}\int_\gamma(v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y)$. 若此时 $\gamma$ 光滑, 则 $\int_\gamma f\mathrm{d}z=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$.

由定义马上可以得到性质 (1) 积分线性;(2) 积分关于曲线可加;(3) 曲线反向则积分变号; 以及

**4.** 有长大不等式 $\left|\int_\gamma f\mathrm{d}z\right| \le \sup_{z\in\gamma}|f(z)|\,L$, 其中 $L$ 是 $\gamma$ 长度.

我们给出一些实用的例子:

**5.** $\gamma$ 在参数 $t\in[a,b]$ 起终点有 $\gamma(a)=\alpha,\gamma(b)=\beta$, 则有 $\int_\gamma z^n\mathrm{d}z=\dfrac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{n+1}(n\ge 0)$.

**6.** $\displaystyle\int_{|z-a|=R}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=\begin{cases}0, & n\ne 1\\ 2\pi\mathrm{i}, & n=1\end{cases}$. 实际上,$\displaystyle\int_{|z-a|=R}\frac{\mathrm{d}z}{z-b}=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & |a-b|<R\\ \text{不定,PV}=\pi\mathrm{i}, & |a-b|=R\\ 0, & |a-b|>R\end{cases}$.

**7.** 正向可求长简单闭曲线 $\gamma$ 的内部面积为 $\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\int_\gamma\bar{z}\mathrm{d}z$.

若单叶全纯映射 $f$ 将可求长简单闭曲线 $\gamma$ 映为正向简单闭曲线 $\Gamma$, 则 $\Gamma$ 内部面积为 $\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\int_\Gamma\overline{f(z)}f'(z)\mathrm{d}z$.

**8.** $\gamma$ 以 $\alpha,\beta$ 为起终点,$f\in C^1(D)$, 则 $\displaystyle\int_\gamma\left(\frac{\partial f(z)}{\partial z}\mathrm{d}z+\frac{\partial f(z)}{\partial\bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}\right)=f(\beta)-f(\alpha)$.

## 2.2 Cauchy 积分定理与原函数

我们首先给出定理内容

**1.** (Cauchy 积分定理) 对 $\mathbb{C}$ 中单连通域 $D, f\in H(D)$, 则对 $D$ 中任意可求长闭曲线 $\gamma$ 有 $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0$.($f'$ 连续则用 Green 公式.)

若 $f'$ 不连续, 则我们如下给出 Goursat(1900) 的证明.

证明. 首先存在 $D$ 中顶点在 $\gamma$ 上的折线 $P$,$f$ 在 $\gamma$ 和 $P$ 上的积分差能任意小. 这需要用 $f$ 在 $D$ 中一个紧集上一致连续来估计每段积分差, 使和足够小. 注意到可以取每段弧线长足够小的顶点.

若 $\gamma$ 是三角形的, 对其作无穷划分, 每次划分将每个三角形分为四个全等的小三角形, 并使其上积分方向不变, 以使小三角形边界上的积分抵消. 设 $M=\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right|\le\sum_{\gamma^n_{(k)}}\left|\int_{\gamma^n_{(k)}}f(z)\mathrm{d}z\right|$.

取一列递减的小三角形, 其中有点 $z_0$, 考虑 $B(z_0,\delta)$ 满足 $|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)|<\varepsilon\,|z-z_0|$. 此邻域中含一 $n$ 次分划后的三角形 $\gamma^n$, 周长为 $2^{-n}L$, 因此 RHS $<2^{-n}L\varepsilon$.

对 $f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)$ 在小三角形上积分, 注意到 $\gamma^n$ 闭合, 得到仅 $\int_{\gamma^n}f(z)\mathrm{d}z$ 一项. 最后考虑长大不等式,$\left|\int_{\gamma^n}f(z)\mathrm{d}z\right|\le\int_{\gamma^n}\mathrm{LHS}\,\mathrm{d}z<2^{-2n}L^2\varepsilon$. 最后累加 $\gamma^n$, 得到 $M\le L^2\varepsilon\to 0$.

若 $\gamma$ 是多边形的边界, 则可分其为多个三角形, 因此得到 0. 若 $\gamma$ 是一般可求长闭曲线, 则由上有 $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0$. □

注意到, 对非单连通域此结论不一定成立, 因为 “洞” 中可能有极点, 使得所画的曲线积出非 0.

更进一步地, 我们有

1*. 可求长简单闭曲线 $\gamma$ 内部为 $D, f\in H(D)\cap C(\overline{D})$, 则 $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0$.

证明这个定理需要一些其他知识. 我们暂且可以认为曲线逐段光滑且能写成 $z=z_0+\lambda(t)$, 这是为了能控制 $\lambda$, 并能将积分写成 $\mathbb{R}$ 上积分的显式. 在 $D$ 内考虑曲线, 且使曲线上点与 $\gamma$ 上点有 $|f(z_0+\lambda(t))-f(z_0+\rho\lambda(t))|<\varepsilon$, 细微估计略去. 因此我们最终可以估计得到 $\gamma$ 上积分为 $M\varepsilon$, 得证.

若对多连通域, 有如下定理:

**2.** 可求长简单闭曲线 $\gamma_0$ 的内部含有不交的多条可求长简单闭曲线 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$, 且每条都在其他 $n-1$ 条外部, 这 $n+1$ 条曲线围成区域 $D$. $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$.$f$ 在大闭曲线上的积分等于内部多条闭曲线的积分.(用辅助线割多连通域为多个单连通域即可.)

**全纯函数的原函数** $F$ 是 $f$ 的原函数, 若 $F \in H(D), F' = f$ 在 $D$ 上成立. 注意到原函数一定是全纯的. 另一方面, 哪怕 $f$ 是全纯的, 若 $D$ 不是单连通的, 则 $D$ 上曲线可能包含 $f$ 的极点, 也没有相应的 $F$ 满足条件. 我们给出条件更弱下的更强结论.

**3.** $f \in C(D)$, 且在 $D$ 中可求长闭曲线 $\gamma$ 上的积分总为 0, 则 $F(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 是 $f$ 在 $D$ 中的原函数.

(仅需说明 $F'(a) = f(a)$. 在 $a$ 附近邻域有 $\left|\dfrac{F(z)-F(a)}{z-a} - f(a)\right| = \dfrac{1}{|z-a|}\left|\displaystyle\int_a^z (f(\zeta)-f(a))\mathrm{d}\zeta\right| < \varepsilon$ 即得证.)

因此这也说明了

3*. 单连通域中的全纯函数有原函数.

最后我们给出 $\mathbb{C}$ 上类似于 Newton-Leibniz 公式的结论:

**4.** 单连通域上的全纯函数 $f$ 有原函数 $F$, 则 $\displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = F(z) - F(z_0)$.

(由导数为 0, 原函数减原函数总为常数, 再考虑 $\displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$.)

至于多连通域上的全纯函数,$F(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 的值随曲线不同而不同, 即为多值函数. 考虑 $z^{-1}$ 从 1 到 $z$ 积分, 若曲线不绕原点, 则积分总为 $1 \to |z| \to z$ 的积分, 而后者 $= \log|z| + \mathrm{i}\arg z = \log z$. 若绕原点逆时针 $k$ 全, 则可分解曲线, 最终得到的积分为 $\log z + 2k\pi\mathrm{i}$.

## 2.3 Cauchy 积分公式及其应用

Cauchy 积分公式是 Cauchy 积分定理最重要的推论之一, 我们首先给出定理内容.

**1.** (Cauchy 积分公式) 可求长简单闭曲线 $\gamma$ 围成的域 $D$ 上有 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$, 则 $\forall z \in D : f(z) = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$.

(取 $z$ 附近的小圆周积分, 然后用长大不等式估计. 注意到使 $f(z) - f(\zeta)$ 很小.)

这说明全纯函数在域中的值由其在边界上的值完全确定.

实际上由这种形式的积分定义的函数都有很好的性质. 取可求长曲线 (不一定闭)$\gamma$ 上的连续函数 $g$, 定义 $\mathbb{C} - \gamma$ 上函数 $G(z) = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{g(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$ 为 Cauchy 型积分. 我们可以得到:

**2.** Cauchy 型积分定义的函数在 $\mathbb{C} - \gamma$ 上有任意阶导数, 且 $G^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$.

*证明.* 我们用数学归纳法来证明, 首先考虑 $n = 1$. 取 $z$ 附近适当的 $z_0$ 有 $\dfrac{1}{\zeta - z} = \dfrac{1}{\zeta - z_0}\left(1 + \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0} + h(z, \zeta)\right)$. 代入可得 $\dfrac{G(z) - G(z_0)}{z - z_0} - \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}\mathrm{d}\zeta = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}(z - z_0)}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{g(\zeta)h(z,\zeta)}{\zeta - z_0}\mathrm{d}\zeta$, 再估计右端的模可知是 $o(1)$, 因此得证.

然后假设 $n$ 成立需证 $n+1$. 同上有 $\dfrac{1}{(\zeta - z)^{n+1}} = \dfrac{1}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\left(1 + (n+1)\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0} + H(z, \zeta)\right)$, 其中 $H(z, \zeta) = o(z - z_0)$. 同上估计即可. □

因此我们可知:

2*. 区域上的全纯函数有任意阶导数.

另外, 区域并不限制是单连通还是多连通. 对于大闭曲线包含不交的多个小闭曲线的情形, 两者所夹的区域中仍然成立上述定理, 在此不再赘叙.

剩下请查阅史济怀习题 3.4.

接下来我们给出 Cauchy 积分公式的一些重要推论.

**3.** (Cauchy 不等式)$f \in H(B(a, R))$ 且在其中 $|f(z)| \le M$, 则 $\left|f^{(n)}(a)\right| \le \dfrac{n!M}{R^n}$.($f$ 在 $\overline{B(a,r)}$ 中全纯, 用长大不等式.)

**4.** (Liouville 定理) 有界整函数为常数.($f'$ 的界任意小.)

**5.** (代数学基本定理) 复系数多项式 $P(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$ 必在 $\mathbb{C}$ 中有零点.

(反证, 考虑 $1/P(z)$ 是整函数则远处趋于 0 且近处有界, 因此为常数.)

**6.** (Morera 定理)$f\in C(D)$ 且在 $D$ 中任意可求长闭曲线上积分为 0, 则 $f\in H(D)$.(有原函数 $F$ 全纯, 故 $f$ 全纯.)

**非齐次 Cauchy 积分公式 (Pompeiu 公式)** 考虑 $\mathbb{C}$ 上的外微分, 其定义和运算性质不再赘叙. 定义

$$\partial f=\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z,\bar{\partial}f=\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}\mathrm{d}\bar{z},\mathrm{d}=\partial+\bar{\partial},\partial\omega=\mathrm{d}z\wedge\omega,\bar{\partial}\omega=\mathrm{d}\bar{z}\wedge\omega.$$

因此对于 $\omega=f_1\mathrm{d}z+f_2\mathrm{d}\bar{z}$,

$$\partial\omega=\frac{\partial f_2}{\partial z}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z},\bar{\partial}\omega=-\frac{\partial f_1}{\partial\bar{z}}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}.$$

注意到 $\omega\in C^2$ 时 $\mathrm{d}^2\omega=0$. 当然 $\omega$ 是一二次微分形式时也为 0. 因此 $\mathrm{d}^2=0$. 同样可以证明 $\partial^2=\bar{\partial}^2=\bar{\partial}\partial+\partial\bar{\partial}=0$.

**7.** (Green 公式)$\omega=f_1\mathrm{d}z+f_2\mathrm{d}\bar{z},f_1,f_2\in C^1(\overline{D})$, 则 $\int_{\partial D}\omega=\int_D\mathrm{d}\omega$.

证明. 首先用 $f=u+\mathrm{i}v,z=x+\mathrm{i}y$ 展开 $\omega$, 然后运用 $\mathbb{R}^2$ 中的 Green 公式. 其次展开 $\mathrm{d}\omega=\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}-\frac{\partial f_1}{\partial\bar{z}}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}$, 注意到 $\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}=-2\mathrm{i}\mathrm{d}A$. 两展开式相等, 得证. □

最后我们给出非齐次 Cauchy 积分公式及其证明, 这是 Cauchy 积分公式在 $C^1$ 上的推广.

**8.** (Pompeiu 公式) 可求长简单闭曲线 $\gamma_0$ 的内部含有不交的多条可求长简单闭曲线 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$, 且每条都在其他 $n-1$ 条外部, 这 $n+1$ 条曲线围成区域 $D$. 若 $f\in C^1(\overline{D})$, 则对 $z\in D$ 有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_D\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\zeta-z}.$$

证明. 固定 $z$, 考虑其附近充分小开邻域 $O$, 使其在 $D$ 内且满足一致连续条件. 取 $G=D-O$, 在其上考虑对 $\omega=\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$ 使用 Green 公式. 注意到 $\partial\omega=0$ 且 $\frac{1}{\zeta-z}$ 全纯于 $G$, 计算得到 $\mathrm{d}\omega=-\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\zeta-z}$. 注意到

$$\int_{\partial D}\omega=\int_{\partial O}\omega+\int_G\mathrm{d}\omega=\int_{\partial O}\omega+\int_D\mathrm{d}\omega-\int_O\mathrm{d}\omega$$

首先, 我们可以拆 $\int_{\partial O}\omega=\int_{\partial O}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta+f(z)\int_{\partial O}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}$. 其中后项为 $2\pi\mathrm{i}f(z)$, 而前项可以做估计任意小.
其次,$\int_O\mathrm{d}\omega$ 也可以估计, 需注意到 $\left|\frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}\right|$ 在 $\overline{O}$ 上有界, 最终得到关于邻域半径的无穷小.
综合上述内容, 代入上等式, 将两个无穷小趋于 0 可得到等式, 定理得证. □

**一维 $\bar{\partial}$ 问题的解** 一维 $\bar{\partial}$ 问题即指给定 $f$ 求 $u$ 满足 $\frac{\partial u}{\partial\bar{z}}=f$.

我们首先构造 $h_1(z)=\begin{cases}\exp\left(\frac{1}{|z-a|^2-R_1^2}\right), & z\in B(a,R_1)\\ 0 & z\notin B(a,R_1)\end{cases}$ 和 $h_2(z)=\begin{cases}0 & z\in\overline{B(a,r)}\\ \exp\left(\frac{1}{r^2-|z-a|^2}\right) & z\notin\overline{B(a,r)}\end{cases}$, 其中 $a\in\mathbb{C},0<r<R_1<R$. 再构造 $\varphi(z)=\frac{h_1(z)}{h_1(z)+h_2(z)}$, 其满足 (1)$\varphi\in C^\infty(\mathbb{C})$;(2)$\operatorname{supp}\varphi\subset B(a,R)$;(3)$\varphi(\overline{B(a,r)})=1$;(4)$0\le\varphi\le1$.

接下来我们说明一维 $\bar{\partial}$ 问题的解不仅存在, 而且可以写出显式.

**9.** $f\in C^1(D),u(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_D\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta},z\in D$ 满足 (1)$u\in C^1(D)$;(2)$\frac{\partial u}{\partial\bar{z}}=f$.

证明. (1) 扩展 $f$ 定义到 $\mathbb{C}$ 上,$\mathbb{C}-D$ 上取 0 值. 此时 $u(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{\mathbb{C}}\dfrac{f(z+\eta)}{\eta}\mathrm{d}\eta\wedge\mathrm{d}\bar{\eta}$, 由 $f\in C^1(D)$, 取导数定义有 $u\in C^1(D)$.

(2) 固定 $a\in D$, 下证 $\dfrac{\partial u(a)}{\partial\bar{z}}=f(a)$. 取不大的 $r$ 并任取 $\varepsilon<r$, 下面我们认为 $z\in B(a,\varepsilon)$. 考虑所构造的函数 $\varphi$, 其在 $B(a,\varepsilon)$ 上取 1 而在 $B(a,r)$ 外取 0. 然后我们定义

$$u_1(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathbb{C}}\frac{\varphi(\zeta)f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta},\qquad u_2(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathbb{C}}\frac{(1-\varphi(\zeta))f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}.$$

显然 $u=u_1+u_2$. 注意到 $(1-\varphi)f$ 在 $\zeta\in B(a,\varepsilon)$ 时为 0, 故 $u_2$ 仅需在 $\mathbb{C}-B(a,\varepsilon)$ 上积分, 因此对于 $z\in B(a,\varepsilon)$,$u_2$ 全纯, 因此 $\dfrac{\partial u}{\partial\bar{z}}(z)=\dfrac{\partial u_1}{\partial\bar{z}}(z)$. 对后者求导积分换序, 并注意到 $\dfrac{\partial\zeta}{\partial\bar{z}}=0,\dfrac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{z}}=1$, 最后注意到在 $\mathbb{C}-B(a,r)$ 上 $\varphi(\zeta)=0$, 化简得到 $\dfrac{\partial u}{\partial\bar{z}}=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{B(a,r)}\dfrac{\partial(\varphi f)}{\partial\bar{\zeta}}\dfrac{\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\zeta-z}$.

再对 $B(a,r)$ 上的 $\varphi f$ 运用 Pompeiu 公式, 由于 $\partial B(a,r)$ 上 $\varphi(\zeta)=0$, 也得到 $\varphi(z)f(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{B(a,r)}\dfrac{\partial(\varphi f)}{\partial\bar{\zeta}}\dfrac{\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\zeta-z}$.

最后由 $B(a,\varepsilon)$ 上 $\varphi(z)=1$, 并比较上述二式, 得到 $z\in B(a,\varepsilon)$ 有 $\dfrac{\partial u(z)}{\partial\bar{z}}=f(z)$. 由于 $a,\varepsilon$ 任取, 定理得证. □

# 3 全纯函数的 Taylor 展开及其应用

## 3.1 复数项级数与 Weierstrass 定理

复数项级数几乎同于 $\mathbb{R}$ 上情形, 因此不做过多介绍.

我们定义函数列的一致收敛为 $\forall\varepsilon\exists N\forall n\geq N:\sup\limits_{z\in E}\left|\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(z)-f(z)\right|<\varepsilon$.

**1.** (数项级数的 Cauchy 收敛准则)$\sum\limits_{k=1}^{\infty}z_k$ 收敛 $\iff\forall\varepsilon\exists N\forall n\geq N\forall p\in\mathbb{N}:\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}z_k\right|<\varepsilon$.

**2.** (函数列的 Cauchy 收敛准则)$\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(z)$ 一致收敛 $\iff\forall\varepsilon\exists N\forall n\geq N\forall p\in\mathbb{N}:\sup\limits_{z\in E}\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}f_k(z)\right|<\varepsilon$.

**3.** (Weierstrass 一致收敛判别法)$|f_n(z)|\leq a_n$, 且 $\sum a_n$ 收敛, 则 $\sum f_n(z)$ 一致收敛.(用 Cauchy 收敛准则.)

**4.** $\sum f_n\xrightarrow{\text{uni.}}f$, 若 $f_n$ 均连续则 $f$ 连续.

**5.** 若在可求长曲线 $\gamma$ 上连续函列 $\sum f_n\xrightarrow{\text{uni.}}f$, 则 $\displaystyle\int_\gamma f\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z$. 这说明积分和求和换序需要一致收敛.

**6.** (Dirichlet 判别法和 Abel 判别法的推广) 若部分和 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 有界,$b_n\to 0$ 且 $\sum\limits_{k\geq 1}|b_n-b_{n+1}|<\infty$, 则 $\sum\limits_{n\geq 1}a_nb_n$ 收敛.

**7.** (Raabe 判别法)$z_n\neq 0$, 且 $\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|\to 1$. 若 $\overline{\lim}\,n\left(\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|-1\right)<-1$, 则 $\sum\limits_{n\geq 1}z_n$ 绝对收敛.

我们定义 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 内闭一致收敛于 $D$, 若级数在 $D$ 的任意紧 (即闭) 子集上一致收敛. 我们有: 一致收敛 $\Longrightarrow$ 内闭一致收敛 $\Longrightarrow$ 逐点收敛. 例子就是 $f_n(z)=z^n-z^{n-1}$ 在 $B$ 上.

另外, 我们记 $G\subset D$ 相对于 $G$ 紧为 $G\prec D$, 意为 $\overline{G}\subset D$ 紧.

最后我们来给出 Weierstrass 定理.

**8.** (Weierstrass 定理) 区域 $D$ 上有 $f_n\in H(D)$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(z)$ 内闭一致收敛于 $D$ 中, 则 (1)$f\in H(D)$ 且 (2)$\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k^{(n)}(z)$ 内闭一致收敛到 $f^{(n)}(z)$.

证明. 首先我们给出引理:$K$ 紧且 $K \subset G \prec D$, 则 $f \in H(D)$ 有 $\sup\limits_{z\in K}\left|f^{(n)}(z)\right| \leq C\sup\limits_{z\in G}|f(z)|$.

使 $K$ 中任意点 $a$ 为圆心的圆盘始终在 $G$ 中, 即令半径为 $\rho = d(K, \partial G) > 0$(由紧性). 对 $B(a, \rho)$ 用 Cauchy 不等式 (紧性保证有界), 取 $\sup\limits_{z\in G}$ 和 $\sup\limits_{a\in K}$, 得证.

(1) 仅需证对任一点的某邻域 $f$ 全纯. 取点的邻域在 $D$ 中, 且在邻域中取可求长曲线, 得到

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum \int_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z = 0.$$

由 Morera 定理,$f$ 在邻域中全纯.

(2) 首先任取 $D$ 中紧集 $K$, 类似引理证明取 $K$ 中点的邻域且始终含于 $D$, 其可有限覆盖 $K$, 取有限并为 $G$, 故 $G \prec D$. 由内闭一致收敛, 可以控制部分和和 $f$ 的差 $\sup\limits_{z\in\overline{G}}|S_n(z) - f(z)|$ 为任意小. 最后用引理可以再控制 $S_n^{(p)} - f^{(p)}$ 为任意小, 故在 $K$ 上部分和的导数一致收敛. 而 $K$ 任意, 故内闭一致收敛. □

Weierstrass 定理实际上指出了比连续性更强而比一致收敛更弱的结论: 全纯函数构成的函数列仅需内闭一致收敛, 那么其和就一定全纯.

剩下请查阅史济怀习题 4.1.

## 3.2 幂级数

首先对幂级数 $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ 有

**1.** 幂级数的收敛半径 $R$ 有 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{R}$.

简略叙述证明思路如下:$R = 0$ 时, 则充分大的 $n$ 有 $|a_n|^{\frac{1}{n}} > \dfrac{1}{|z|}$, 因此 $|a_n z^n| > 1$.$R = \infty$ 时, 充分大的 $n$ 有 $|a_n|^{\frac{1}{n}} < \dfrac{1}{2|z|}$, 因此 $|a_n z^n| < 2^{-n}$. 对 $R \in (0, \infty)$ 时, 取 $|z| < r < R$, 因此对充分大的 $n$ 有 $|a_n|^{\frac{1}{n}} < \dfrac{1}{r}$, 因此 $|a_n z^n| < (|z|/r)^n$. 对 $R < \rho < |z|$, 有 $|a_n|^{\frac{1}{n}} > \dfrac{1}{r}$, 同理.

**2.** (Abel 定理) 若幂级数 $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处收敛, 则在 $|z_0|\, B$ 中内闭绝对一致收敛.

(对 $|z| \leq r < |z_0|$ 有 $|a_n z^n| \leq (\sup|a_n z_0^n|)\left(\dfrac{r}{|z_0|}\right)^n$, 故绝对一致收敛于 $r\overline{B}$.)

**3.** 幂级数在收敛圆内确定一个全纯函数.(Weierstrass 定理.)

幂级数在收敛圆周上的收敛情况不定, 我们对此讨论. 我们记 $S_\alpha(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(\alpha < \pi/2)$ 为这样的两个三角形之并, 三角形是以 0 和 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 的连线为斜边, 且点 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 处的角为 $\alpha$ 构成的直角三角形. 若 $z$ 在 $S_\alpha(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 中趋于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 定义在 $B$ 上的函数 $g$ 有极限 $l$, 则称 $g$ 在 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 处有非切向极限 $l$. 对此我们有:

**4.** (Abel 第二定理) 幂级数 $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ 的收敛半径 $R = 1$, 且在 $z = 1$ 处收敛于 $S$, 则 $f$ 在 $z = 1$ 有非切向极限 $S$, 即 $\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ z\in S_\alpha(1)}} f(z) = S$.

证明. 仅需证明 $f$ 在 $z = 1$ 附近小邻域交 $S_\alpha(1)$ 的闭包 $S$ 上一致收敛, 故在其上连续. 而用 $|\sigma_{n,p}| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$ 估计, 对 $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k z^k$ 作 Abel 变换, 得到 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k z^k\right| < \varepsilon\left(\dfrac{|1-z|}{1-|z|} + 1\right)$. 注意到 $z \in S$ 时 $|z|$ 和 $|1-z|$ 的三角关系, 对 $\dfrac{|1-z|}{1-|z|}$ 适当控制得到 $\dfrac{2}{2\cos\theta - |1-z|}$. 其中 $\theta$ 是边 $|1-z|$ 和边 1 的夹角,$\theta \leq \alpha$. 再稍微控制可得到 $\dfrac{2}{\cos\alpha}$, 代入即可. 最终其满足 Cauchy 收敛准则, 得到 $S$ 上幂级数一致收敛. □

### 3.3 全纯函数的 Taylor 展开

$f\in H(B(z_0,R))$ 的 Taylor 级数指 $f(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, z\in B(z_0,R)$.

之所以函数与级数相等, 可以如下证明: 考虑 Cauchy 积分公式并展开 $\frac{1}{\zeta-z}$ 为 $\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}$ 的级数 (前文有例子). 代入, 并用 Weierstrass 判别法得到级数一致收敛. 最后代入积分即得上式. 级数也是关于函数唯一的, 证明略去.

由于幂级数确定一个全纯函数, 全纯函数又可以展开成一个 Taylor 级数, 因此我们有

**1.** $f$ 在 $z_0$ 处全纯 $\iff$ $f$ 在 $z_0$ 邻域中可展开成 Taylor 级数.

若 $f$ 在 $z_0$ 处全纯且不恒为 0, 且 $f^{(k)}(z_0)=0, k=0,\cdots,m-1, f^{(m)}(z_0)\neq 0$, 我们定义 $z_0$ 是 $f$ 的 $m$ 阶零点. 其有等价定义:$f$ 在 $z_0$ 邻域中可表为 $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, 其中 $g$ 在 $z_0$ 处全纯, 且 $g(z_0)\neq 0$.

我们有一系列结论.

**2.** $f\in H(D)$ 且 $B(z_0,\varepsilon)\in D$, 若 $f(B(z_0,\varepsilon))=0$, 则 $f(D)=0$.
(f 在 $z_0$ 邻域内 Taylor 级数系数为 0, 故邻域内点为圆心的圆盘的 Taylor 级数系数也为 0. 不断延伸圆盘到 $D$ 中每一点, 得证.)

**3.** $f\in H(D)$ 不恒为 0, 则其零点是孤立点.(不恒为 0 则零点是有限阶的, 由有限阶零点定义可证.)

**4.** (唯一性定理)$f_1,f_2\in D$, 若有 $D$ 中点列使 $f_1(z_n)=f_2(z_n)$, 且 $\lim z_n=a\in D$, 则 $D$ 中有 $f_1=f_2$.
(由上,$f_1-f_2$ 的零点不是孤立点, 故 $g$ 恒为 0.)

### 3.4 辐角定理和 Rouché 定理

由唯一性定理, 不恒为 0 的全纯函数在区域内仅有有限个零点, 我们试图计算其数量. 我们限制区域在一可求长曲线内部.

**1.** $f\in H(D)$ 且 $D$ 上有可求长简单闭曲线 $\gamma$,$f$ 在 $\gamma$ 上非 0. 若 $f$ 在 $\gamma$ 内部有零点 $\{a_k\}$, 则所有零点阶的和 $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$.

证明仅需注意到对 $\gamma$ 内部的零点 $a_k$ 的邻域, 其外 $f'/f$ 全纯, 因此积分仅需在邻域附近圆周上积. 而其内 $\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\alpha_k}{z-a_k}+\frac{g_k'(z)}{g_k(z)}$, 后者全纯, 因此积分得到 $2\pi\mathrm{i}$, 故得证.

从几何意义上来说,$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k$ 是 $f$ 在 $\gamma$ 内的零点个数总和, 而 $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{\mathrm{d}w}{w}\mathrm{d}z$ 是 $\Gamma=f(\gamma)$ 绕原点的圈数, 称之为 $\Gamma$ 关于原点的环绕指数.

因此我们得到:

**2.** (辐角定理)$f\in H(D)$ 且 $\gamma$ 是 $D$ 中可求长简单闭曲线,$f$ 在 $\gamma$ 上非 0.$z$ 绕 $\gamma$ 正方向转动一圈时,$f(z)$ 在 $f(\gamma)$ 转动的总圈数等于 $f$ 在 $\gamma$ 内的零点个数.

**3.** (Rouché 定理)$f,g\in H(D)$ 且 $\gamma$ 是 $D$ 中可求长简单闭曲线. 若 $z\in\gamma$ 时有 $|f(z)-g(z)|<|f(z)|$, 则 $f$ 和 $g$ 在 $\gamma$ 内部零点个数相同.
(该不等式即说明 $f$ 和 $g$ 在 $\gamma$ 上都没有零点. 令 $w=g/f$, 可知 $w\in B(1,1)$ 中, 因此 $w$ 的环绕指数为 0, 换言之 $f$ 和 $g$ 的环绕指数相同.)

辐角定理即说明此积分可以直接得到某范围内函数的零点个数.Rouché 定理即说明, 若在曲线上函数的差能被其中一个函数控制, 则两者在曲线内零点个数相同. 更进一步的, 一个函数的一部分能被另一部分控制, 则其零点个数为其中一部分在此区域上的零点个数.

Rouché 定理有一系列重要的应用.

**4.** $f\in H(D), z_0\in D, w_0=f(z_0)$. 若 $z_0$ 是 $f-w_0$ 的 $m$ 阶零点, 则对充分小的 $\rho$ 有 $\delta$ 使得对 $a\in B(w_0,\delta)$,$f(z)-a$ 在 $B(z_0,\rho)$ 中有 $m$ 个零点.

这个定理不是很好理解. 我们可以认为, 若 $f(z_0)=w_0$ 是一个 $m$ 阶零点, 那么在 $w_0$ 附近取值, 即 $f^{-1}(w_0)$ 附近的纤维中, 总仍有 $m$ 个零点. 换言之,$f(z)=w_0$ 的切片 (即纤维) 上有一个 $m$ 阶零点, 但将切片上下移动一个很小的距离, 在 $z$ 平面中一个充分小的范围内,$z_0$ 这个 $m$ 阶零点散开成了 $m$ 个零点.

证明思路:$f-w_0$ 在一个小邻域中没有其他零点, 由此可取充分小的 $\rho$. 取 $\delta$ 为 $|f(z)-w_0|$ 在 $|z-z_0|=\rho$ 上的最小值. 取 $a\in B(w_0,\delta)$, 故 $\delta>|w_0-a|$, 因此 $f-w_0$ 控制了 $w_0-a$, 由 Rouché 定理 $f-a$ 和 $f-w_0$ 在小邻域上零点个数相同.

定理4也说明了

**5.** (开映射定理)$f\in H(D), z_0\in D, w_0=f(z_0), \forall\rho>0\exists\delta>0: B(w_0,\delta)\subset f(B(z_0,\rho))$.(由上显然.)

**6.** 非常数 $f\in H(D)$ 使 $f(D)$ 也是 $\mathbb{C}$ 中区域.
($f(D)$ 的开性由前者显然.$f(D)$ 的连通性仅需考虑 $f(\gamma)$ 是连通的.(Why?))

**7.** $f$ 是 $D$ 中单叶全纯函数, 则 $f'$ 在 $D$ 中总不为 0.
(若有 $z_0$ 处导数为 0, 则其为 $f(z)-f(z_0)$ 的 $m$ 阶零点. 运用定理4, 对 $f(z_0)$ 附近的 $a$,$f(z)-a$ 有至少两个零点, 这与单叶性矛盾.)

**8.** $f\in H(D)$, 若 $\exists z_0\in D: f'(z_0)\neq 0$, 则 $f$ 在 $z_0$ 邻域中是单叶的.
($z_0$ 是 $f(z)-f(z_0)$ 的一阶零点, 故在 $z_0$ 附近 $f(z)-a$ 仅有一个零点. 换言之, 在 $f^{-1}(O(f(z_0)))\cap O(z_0)$ 上 $f$ 是单叶的, 而后者开.)

**9.** $D$ 上单叶全纯函数 $f$ 的反函数是 $f(D)$ 上的全纯函数, 且 $(f^{-1})'(w)f'(z)=1$.
(由开映射定理,$f^{-1}$ 连续. 由于单叶全纯函数的导数非 0, 故导数关系式合理, 易证之.)

由最后一条, 单叶全纯函数也被称为双全纯函数.

最后我们来看 Hurwitz 定理.

**10.** (Hurwitz 定理)$D$ 中一列全纯函数 $f_n$ 在其中内闭一致收敛到不恒为 0 的函数 $f$.$\gamma$ 是 $D$ 中可求长简单闭曲线, 且 $f$ 在其上非 0. 则对充分大的 $n$, $f_n$ 和 $f$ 在 $\gamma$ 内部零点个数相同.
(由于 $|f_n-f|$ 可以足够小, 且 $f$ 全纯, 取 $\min\limits_{z\in\gamma}|f(z)|$, 考虑 Rouché 定理控制, 得证.)

**11.** $D$ 上一列单叶全纯函数 $f_n$ 在 $D$ 上内闭一致收敛到 $f$. 若 $f$ 不是常数, 则也是 $D$ 上的单叶全纯函数.
($f$ 全纯, 若非单叶则考虑 $F(z)=f(z)-f(z_1), F(z_2)=0$.$F_n(z)=f_n(z)-f(z_1)$ 内闭一致收敛到 $F$, 由上,$F_n$ 在 $z_1,z_2$ 邻域中各有一零点, 矛盾于 $f_n$ 单叶.)

Rouché 定理可以确定某些函数在一定范围内的零点个数, 例子略去. 剩下请查阅史济怀习题 4.4.

## 3.5 最大模原理和 Schwarz 引理

**1.** (最大模原理)$f\in H(D)$ 非常值, 则 $|f|$ 在 $D$ 中取不到最大值.(开集 $f(D)$ 中每点都有邻域, 其中必有模比其大的点.)

**2.** 有界区域 $D$ 中有 $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$, 则 $f$ 的最大模在且仅在 $\partial D$ 上取到.($\overline{D}$ 紧.)

**3.** (Schwarz 引理)$f\in H(B)$ 且 $|f(B)|\le 1, f(0)=0$, 则 $\forall z\in B: |f(z)|\le|z|$, 且 $|f'(0)|\le 1$.
另外, 若 $\exists z_0\in B-\{0\}: |f(z_0)|=|z_0|$ 或 $|f'(0)|=1$, 则 $f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$.
(展开 $f$ 为幂级数, 得到 $g=f/z, g(0)=f'(0)$. 取 $r\in(0,1)$, 在 $\partial(rB)$ 上 $|g(z)|\le\dfrac{1}{r}$. 由最大模原理,$rB$ 中也如此.$r\to 1$, 前二结论得证. 若附加条件成立, 则在内点取到最大模 1, 故 $g(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.)

我们首先给出 Schwarz 引理的一个应用, 即 $B$ 上的全纯自同构群 $\mathrm{Aut}(B)$ 中仅有分式线性变换一族. 更详细的即

**4.** $f\in\mathrm{Aut}(B), a\xrightarrow{f}0$, 则 $f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}$.

首先记 $\varphi_a(z)=\dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}$, 并注意到 $\varphi_a=\varphi_a^{-1}$. 令 $g=f\circ\varphi_a, g(0)=0$ 且 $g^{-1}(0)=\varphi_a(a)=0$, 故对 $g,g^{-1}$ 用 Schwarz 引理, 有 $|g'(0)|\le 1, \left|(g^{-1})'(0)\right|\le 1$, 故 $|g'(0)|=1, g(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$, 得证.

Schwarz 引理还可以推广为:

**5.** (Schwarz-Pick 引理)$f \in H(B_{\mathbb{C}}, B_{\mathbb{C}})$. 若对 $a \in B$ 有 $f(a) = b$, 则有 (1)$\forall z \in B : |\varphi_b(f(z))| \le |\varphi_a(z)|$; (2)$|f'(a)| \le \dfrac{1-|b|^2}{1-|a|^2}$;(3) 若存在 $z_0 \in B - \{a\}$ 使 $|\varphi_b(f(z_0))| = |\varphi_a(z_0)|$, 或 $|f'(a)| = \dfrac{1-|b|^2}{1-|a|^2}$, 则 $f \in \mathrm{Aut}(B)$.

证明. 令 $g = \varphi_b \circ f \circ \varphi_a$, 其满足 Schwarz 引理条件. 对其使用之, 得到 $|g(\zeta)| \le |\zeta|, |g'(0)| \le 1$. 令 $z = \varphi_a(\zeta)$, 得到 (1).

注意到 $\varphi_a'(0) = -(1-|a|^2), \varphi_b'(b) = -\dfrac{1}{1-|b|^2}$. 对 $g'(0)$ 链式法则分解, 可以得到 (2).

最后, 若存在符合条件的 $z_0$, 则 $\zeta_0 = \varphi_a^{-1}(z_0) \ne 0$, 运用 Schwarz 引理 $g \in \mathrm{Aut}(B)$, 故 $f$ 也是. 另一情况同理. □

剩下请查阅史济怀习题 4.5.

# 4 全纯函数的 Laurent 展开及其应用

称 $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ 为 Laurent 级数, 其 $n \in \mathbb{N}$ 部分为幂级数, 称为全纯部分,$n \in \mathbb{Z}_{<0}$ 部分为负幂项级数, 称为主要部分. 若两部分都收敛则称此级数收敛.

Laurent 级数的收敛域为圆环 $r < |z-z_0| < R$, 其中全纯部分的收敛半径为 $R$, 主要部分的收敛半径为 $\dfrac{1}{r}$. 且在圆环中绝对内闭一致收敛, 在圆环内全纯.(由 Abel 定理和 Weierstrass 定理.)

反过来我们也有

**1.** 设 $D = \{z : r < |z-z_0| < R\}$. 若 $f \in H(D)$, 则 $f$ 在 $D$ 上可展为 Laurent 级数 $f(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n, a_n = \dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$, 其中 $\gamma_\rho = \{\zeta : |\zeta - z_0| = \rho \in (r, R)\}$. 展开式是唯一的.

证明. 先取 $z \in D$, 取两同 $z_0$ 心圆周, 其中一包住 $z$, 另一不包住. 注意到多连通域上 $f(z)$ 的值为外圆周积分减内圆周积分, 积分项为 $\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$. 在内圆周上将 $\dfrac{1}{\zeta - z}$ 展开为 $\dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}$ 的级数, 估计其一致收敛, 再积分求和换序, 最终得到

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = -\sum_{n\ge 1}\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{1-n}}\mathrm{d}\zeta\right)(z-z_0)^{-n} = -\sum_{n\le -1}\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right)(z-z_0)^{n}.$$

在外圆周上同理, 仅需注意需要展开为 $\dfrac{z-z_0}{\zeta - z_0}$ 的级数. 得到积分式类似,$n \ge 0$.

最后可以发现被积项与 $z$ 无关, 因此可以将半径合并为同一值. 稍微代换, 得证.

唯一性: 若另有展开式, 考虑 $a_m = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{m+1}}\mathrm{d}\zeta$. 若将其用另一展开式展开 $f(\zeta)$, 仍得到 $a_m'$. □

剩下请查阅史济怀习题 5.1.

## 4.1 孤立奇点和亚纯函数

若 $f$ 在无心圆盘 $\{z : 0 < |z-z_0| < R\}$ 中全纯, 则称 $z_0 \in \mathbb{C}$ 是 $f$ 的孤立奇点. 此时有:

- $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = a \in \mathbb{C}$:$z_0$ 是 $f$ 的可去奇点.
- $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$:$z_0$ 是 $f$ 的极点.
- $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在:$z_0$ 是 $f$ 的本性奇点.

我们分别讨论之. 首先对于可去奇点有:

**2.** (Riemann 可去奇点定理)$z_0$ 是 $f$ 的可去奇点 $\iff$ $f$ 在 $z_0$ 附近有界.

( $\implies$ 显然. $\impliedby$: 估计 Laurent 展开式中负幂次项系数, 由有界性, 半径趋于 0 时系数为 0. 因此这是幂级数, 故有有限极限.)

由此可看出, 在可去奇点附近的无心圆盘中, 函数的 Laurent 展开式为幂级数, 仅需适当定义常数项即可令其在中心处也全纯. 其次, 对于极点有:

**3.** $z_0$ 是 $f$ 极点 $\iff$ $z_0$ 是 $1/f$ 零点.(显然.)

我们定义 $z_0$ 是 $f$ 的 $m$ 阶极点, 若 $z_0$ 为 $1/f$ 的 $m$ 阶零点. 因此我们有:

**4.** $z_0$ 是 $f$ 的 $m$ 阶极点 $\iff f(z)=\sum_{n\geq -m} a_n(z-z_0)^n$.

(${1/f=(z-z_0)^m g}$, 而 $1/g$ 在 $z_0$ 处全纯, 故 $1/g$ 有 Taylor 展开式, 代入即可. 反之仅需注意到 $\dfrac{1}{(z-z_0)^m f}$ 在 $z_0$ 处全纯, 代换得证.)

最后我们讨论本性奇点. 上面已经说明, 可去奇点附近的 Laurent 展开式没有主要部分, 极点附近的仅有有限项主要部分, 因此可以看出实际上本性奇点附近的 Laurent 展开式有无穷项. 实际上我们有更深刻的结论:

**5.** (Casorati-Weierstrass 定理)$z_0$ 是 $f$ 的本性奇点, 则对任意的 $A\in\mathbb{C}_\infty$ 都有趋于 $z_0$ 的点列 $z_n$, 使 $f(z_n)\to A$. 换言之, 对于 $z_0$ 的邻域 $U$,$f(U-\{z_0\})$ 稠密于 $\mathbb{C}_\infty$.

证明. 若 $A=\infty$, 则由于本性奇点附近 $f$ 无界, 可取点列.

若 $A\in\mathbb{C}$, 考虑 $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)-A}$, 即证其在 $z_0$ 附近无界. 若否, 则 $z_0$ 是 $\varphi$ 可去奇点, 故可重定义 $\varphi(z_0)$(即 $f(z_0)$) 使 $\varphi$ 在 $z_0$ 附近全纯. 若 $\varphi(z_0)\neq 0$, 则 $f(z)=\dfrac{1}{\varphi(z)}+A$ 在 $z_0$ 附近全纯; 若 $\varphi(z_0)=0$, 则 $z_0$ 是 $f$ 极点, 均矛盾, 故 $\varphi$ 在 $z_0$ 附近无界, 故可取到点列. □

我们还有 Picard 大小定理, 但证明略去.

**6.** (Picard 小定理)$f$ 是非常数整函数, 则 $f(\mathbb{C})$ 为 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{C}$ 去掉一个点.

**7.** (Picard 大定理)$z_0$ 为 $f$ 的本性奇点, 则 $z_0$ 邻域中 $f$ 无穷次取得 $\mathbb{C}$ 中值, 最多仅有一个例外 (即 $\mathbb{C}$ 去掉一个点).

我们已经讨论了孤立奇点在 $\mathbb{C}$ 中的情形, 接下来讨论 $\infty$ 处为孤立奇点的情况: 我们定义 $\infty$ 是 $f$ 的孤立奇点, 若 $f$ 在 $B(\infty,R)=\{z\in\mathbb{C}:R<|z|<\infty\}$ 中全纯. 换言之,0 是 $g(\zeta)=f(1/\zeta)$ 的孤立奇点. 相应地, 若 $\zeta=0$ 是 $g$ 的可去奇点,$m$ 阶极点或本性奇点, 则称 $\infty$ 是 $f$ 的可去奇点,$m$ 阶极点或本性奇点.

考虑在无穷远点的邻域全纯的 $f$, 其有 Laurent 展开式 $f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$, 则 $g(z)=f(1/z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n}=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{-n} z^n$. 对照定义, 若 $\infty$ 是 $f$ 的可去奇点, 则 $f$ 的 Laurent 展开式仅有主要部分加上一个常数. 若为 $m$ 阶极点, 则全纯部分仅有 $m$ 阶项. 若为本性奇点, 则全纯部分有无穷项.

若 $f$ 是在无穷远点全纯的整函数, 那么其 Laurent 展开式没有主要部分 (即没有负幂次项), 而在无穷点处全纯 [1] 即 $f(1/z)$ 在 0 处全纯, 即 0 为 $f(1/z)$ 可去奇点, 故 $f$ 的 Laurent 展开式仅有主要部分加上一个常数. 综上得到

**8.** 在无穷远点全纯的整函数是常数.

**9.** 若 $\infty$ 是整函数 $f$ 的 $m$ 阶极点, 则 $f$ 是 $m$ 次多项式.

不是常数和多项式的整函数称为超越整函数,$\infty$ 一定是超越整函数的本性奇点.

若 $f$ 在 $\mathbb{C}$ 上除了极点没有其他奇点 (即孤立奇点均为极点), 则称 $f$ 为亚纯函数. 整函数和有理函数都是亚纯函数. 关于有理函数还有一个结论:

**10.** $\infty$ 是亚纯函数 $f$ 的可去奇点或极点 $\iff$ $f$ 是有理函数.

证明. $\Longleftarrow:\lim_{z\to\infty}\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}=\begin{cases}a_n/b_m, & n=m;\\ \infty, & n>m;\\ 0, & n<m.\end{cases}$

$\Longrightarrow: f$ 在 $\infty$ 邻域全纯, 而在该邻域外 (即 $|z|\leq R$) 有有限个极点 (否则子列极限不是孤立奇点), 对每个极点 $z_i$ 有阶 $m_i$, 在其附近 $f$ 的 Laurent 展开式为的主要部分 $h_i(z)=\sum_{k=1}^{m_i}\dfrac{c_{-k}^{(i)}}{(z-z_i)^k}$. 而 $f$ 在 $\infty$ 附近的 Laurent 展开式的主要部分 $g$ 是 0 或一个多项式. 令 $F=f-\sum h_i-g$, 其在极点和 $\infty$ 处消去了所有主要部分 ($h_j$ 是全纯的), 在其他部分也是全纯的, 因此是整函数, 故是常数. 变换, 因此 $f$ 是有理函数. □

[1]($\infty$ 是 $f$ 的可去奇点) $\Longleftarrow$ ($f$ 在 $\infty$ 处全纯) $\iff$ ($f(1/z)$ 在 0 处全纯) $\Longrightarrow$ ($f(1/z)$ 在 0 的空心邻域全纯) $\iff$ ($\infty$ 的邻域全纯) $\iff$ ($\infty$ 是 $f$ 的孤立奇点)

由上定理, 我们可以讨论 $\mathbb{C}$ 的全纯自同构群和 $\mathbb{C}_\infty$ 的亚纯自同构群.

**11.** $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ 由所有一次多项式组成.

(一次多项式显然属于 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$. 对任意 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ 中元素 (整函数), 若 $\infty$ 是可去奇点则是常数, 若是本性奇点则对 $f^{-1}(f(z_n))=z_n$ 在 $z_n\to\infty$ 时有 $f^{-1}(A)=\infty$, 故 $A$ 是 $f^{-1}$ 极点, 矛盾. 因此 $\infty$ 是 $f$ 极点, 故 $f$ 是多项式. 由单叶性,$f$ 是一次的.)

**12.** $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ 由所有分式线性变换组成.

((To be continued...))

## 4.2 留数定理

对于 $f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(z-a)^n$, 有 $c_{-1}=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_\gamma f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$. 另一方面,$\displaystyle\int_\gamma f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$. 若 $a$ 是 $f$ 的一个孤立奇点, 则称 $c_{-1}$ 是 $f$ 在 $a$ 点的留数, 记为 $\mathrm{Res}(f,a)=c_{-1}$. 我们定义 $\mathrm{Res}(f,\infty)=-\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_\gamma f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=-\mathrm{Res}(f,0)$.

我们首先给出计算方法:

**1.** $a$ 是 $f$ 的 $m$ 阶极点, 则 $\mathrm{Res}(f,a)=\dfrac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}((z-a)^m f(z))^{(m-1)}$. 特别的,$m=1$ 时 $\mathrm{Res}(f,a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$.

($g=(z-a)^m f, g(a)\neq 0$ 且 $g$ 在 $a$ 处全纯. 取 $g$ 在 $a$ 处的 Taylor 展开得到 $f$ 的 Laurent 展开式. 取 $-1$ 次项系数即可.)

**2.** $f=g/h$,$g,h$ 在 $a$ 处全纯, 且 $g(a)\neq 0, h(a)=0, g'(a)\neq 0$, 则 $\mathrm{Res}(f,a)=\dfrac{g(a)}{h'(a)}$.(由上由定义.)

接着我们给出关于留数最重要的定理:

**3.** (留数定理) 有界区域 $D\subset\mathbb{C}$ 的边界 $\gamma$ 由若干条简单闭曲线组成.$S$ 表示 $f$ 在 $D$ 中所有孤立奇点,$f\in H(D-S)\cap C(\overline{D}-S)$, 则 $\displaystyle\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{z_i\in S}\mathrm{Res}(f,z_i)$.

**4.** $f$ 在 $\mathbb{C}$ 上除 $z_1,\cdots,z_n$ 均全纯, 则 $\displaystyle\sum_{k=1}^n\mathrm{Res}(f,z_k)+\mathrm{Res}(f,\infty)=0$.

留数定理的主要贡献是把积分计算归结为留数的计算, 而计算留数是一个微分运算. 因此从实质上来说, 留数定理把积分运算变成了微分运算.

最后我们给出留数定理计算实变定积分的各种技巧与方法.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ **型积分**　下设 $f$ 在上半平面 $D$ 上的奇点 $z_1,\cdots,z_n$ 全集为 $S$.

**1.** $f\in H(D-S)\cap C(\overline{D}-S)$. 若 $\lim_{z\to\infty}zf(z)=0$, 则 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^n\mathrm{Res}(f,z_k)$.

(取曲线 $-R\overset{\text{实轴}}{\to}R\overset{\text{上半圆周}}{\to}-R$, 令 $R\to\infty$, 给定限制可估出上半圆周的积分趋于 0.)

**2.** $P,Q$ 为既约多项式,$Q$ 没有实零点, 且 $\deg Q-\deg P\geq 2$, 则 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum\mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)},z_k\right)$.

**3.** (Jordan 引理)$f$ 在 $\{z:R\leq|z|<\infty,\mathrm{Im}\,z\geq 0\}$ 上连续, 且 $\lim_{\substack{z\to\infty\\ \mathrm{Im}\,z\geq 0}}f(z)=0$, 则 $\lim_{R\to\infty}\displaystyle\int_{\gamma_R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}f(z)\mathrm{d}z=0$, 其中 $\gamma_R$ 是充分大的上半圆周.(直接用长大不等式估计, 其中 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}$ 的实部需要 $\sin\theta\geq\dfrac{2\theta}{\pi}$.)

**4.** $f\in H(D-S)\cap C(\overline{D}-S)$. 若 $\lim_{z\to\infty}f(z)=0$, 则对 $\alpha>0$ 有 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}f(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum\mathrm{Res}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}f(z),z_k)$.

因此我们有 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\alpha x\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\left\{2\pi\mathrm{i}\sum\mathrm{Res}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}f(z),z_k)\right\}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\alpha x\mathrm{d}x=\mathrm{Im}\left\{2\pi\mathrm{i}\sum\mathrm{Res}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}f(z),z_k)\right\}$.

若 $f$ 在实轴上有奇点, 则需要如下引理.

**5.** $G=\left\{a+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}:0<\rho\le\rho_0,\theta\in[\theta_0,\theta_0+\alpha]\right\},f\in C(G),\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=A$, 则 $\lim\limits_{\rho\to 0}\displaystyle\int_{\gamma_\rho}f(z)\mathrm{d}z=\mathrm{i}\alpha A$. 其中 $\gamma_\rho$ 是 $G$ 中以 $a$ 为心,$\rho$ 为半径的圆弧.

(令 $g(z)=(z-a)f(z)-A$, $\displaystyle\int f(z)\mathrm{d}z=\int\frac{A\mathrm{d}z}{z-a}+\int\frac{g(z)\mathrm{d}z}{z-a}$. 前项为 $\mathrm{i}\alpha A$. 注意到 $g(z)\to 0$, 故 $\rho\to 0$ 时上界趋于 0, 直接估计得到后项为 0.)

若需要积分 $\displaystyle\int_0^{\infty}$, 一般都是取锁眼型闭曲线, 即 $\rho\to R\overset{\text{优弧}}{\to}R\to\rho\overset{\text{优弧}}{\to}\rho$, 或半圆环形曲线 $\rho\to R\overset{\text{半圆周}}{\to}-R\to-\rho\overset{\text{半圆周}}{\to}\rho$.

$\displaystyle\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta$ **型积分** $R(\cdot,\cdot)$ 是有理函数. 注意到三角函数万能公式: 作代换 $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$, 有

$$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\tan\theta=\frac{2t}{1-t^2},\mathrm{d}\theta=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

因此 $\displaystyle\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta=2\int_{-\infty}^{\infty}R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

另一种方法是考虑单位圆周上 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 有

$$\cos\theta=\frac{z+1/z}{2},\sin\theta=\frac{z-1/z}{2\mathrm{i}},\tan\theta=\mathrm{i}\frac{1-z^2}{1+z^2},\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

因此 $\displaystyle\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta=\int_{|z|=1}R\left(\frac{z-1/z}{2},\frac{z+1/z}{2}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$.

类似可以计算 $\displaystyle\int_0^{2\pi}R(\sin n\theta,\cos n\theta)\mathrm{d}\theta$.

$\displaystyle\int_a^b(x-a)^r(b-x)^sf(x)\mathrm{d}x$ **型积分** 其中 $r+s=-1,0$ 或 1, 且 $-1<r,s<1$. 我们有:

**6.** $a_1,\cdots,a_n$ 不在区间 $[a,b]$ 上, 且 $f$ 在 $\mathbb{C}$ 上除这些点全纯.$r,s\in(-1,1),s\ne 0,r+s$ 为整数.

设 $F(z)=(z-a)^r(b-z)^sf(z)$, 若 $\lim\limits_{z\to\infty}z^{r+s+1}f(z)=A\ne\infty$, 则

$$\int_a^bF(x)\mathrm{d}x=-\frac{A\pi}{\sin s\pi}+\frac{\pi}{\mathrm{e}^{-s\pi\mathrm{i}}\sin s\pi}\sum_{k=1}^n\mathrm{Res}(F,a_k).$$

证明. (To be continued...) □

**Fresnel 积分** 即 $\displaystyle\int_0^{\infty}\cos x^n\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_0^{\infty}\sin x^n\mathrm{d}x$.

构造围道 $0\to R\overset{\text{劣弧}}{\to}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}\to 0$, 对 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^n}$ 积分. 若令 $R\to\infty$, 第一段积分即为我们所求, 第二段圆弧可以估计出此时其趋于 0, 第三段曲线上 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}$, 故 $-\displaystyle\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^n}\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}\int_0^R\mathrm{e}^{-r^n}\mathrm{d}r\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-r^n}\mathrm{d}r=\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)$. 综上,

$$\int_0^{\infty}\cos x^n\mathrm{d}x=\cos\frac{\pi}{2n}\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right),\int_0^{\infty}\sin x^n\mathrm{d}x=\sin\frac{\pi}{2n}\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

**Poisson 积分** 即 $\displaystyle\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x(a>0)$.

取围道 $-R\to R\to R+\dfrac{b}{2a}\mathrm{i}\to -R+\dfrac{b}{2a}\mathrm{i}\to -R$, 对 $\mathrm{e}^{-az^2}$ 积分. 其中 $R\to\infty$ 时第二段和第四段积分可以估计为趋于 0, 而第三段积分变换为 $-\mathrm{e}^{\frac{b^2}{4a}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x$. 最终通过变换得到

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

剩下请查阅史济怀习题 5.5.(共 31 题, 同书附最终答案.)

## 4.3 Mittag-Leffler 定理, Weierstrass 因式分解定理和 Blaschke 乘积

我们首先给出一些无穷乘积的性质. 我们一般将无穷乘积写成 $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ 的形式, 因为收敛时其中 $a_n \to 0$.

我们有

**1.** $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ 和 $\sum_{n\geq 1}\log(1+a_n)$ 同敛散.

**2.** $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ 绝对收敛等价于 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 绝对收敛.

我们扩展亚纯函数的定义: 区域 $D$ 上的**亚纯函数**指除了极点在 $D$ 上均全纯的函数. 上文所定义的亚纯函数是指在 $\mathbb{C}$ 上亚纯的函数.

下三定理中均认为区域 $D$ 上有互不相同且在 $D$ 内部无极限点的点列 $S=\{a_n\}$.

**3.** (Mittag-Leffler 定理) 给定一列有理函数 $\psi_n(z)=\sum_{i=1}^{k_n}\frac{c_{n,i}}{(z-a_n)^i}$, 则存在 $D$ 上的亚纯函数 $f$ 仅以 $\{a_n\}$ 为极点, 且在每个 $a_n$ 处的 Laurent 展开式的主要部分为 $\psi_n$.

证明. 这个定理的证明依赖于前文提到的一维 $\bar\partial$ 问题的解.

对每个点取不交圆盘, 在圆盘上取此处所构造的函数 $\varphi_n$, 在圆盘外均取 0 且在点附近更小圆盘 $B(a_n,\varepsilon)$ 中取 1. 再取 $u=\sum\varphi_n\psi_n \in C^\infty(D-S)$, 且在每个 $B(a_n,\varepsilon)-a_n$ 中 $u=\psi_n$. 构造 $h(z)=\begin{cases}\dfrac{\partial u(z)}{\partial\bar z}, & z\in D-S;\\ 0, & z\in S,\end{cases}$ 显然 $h\in C^\infty(D)$, 因此 $\frac{\partial v}{\partial \bar z}=h$ 有解 $v\in C^\infty(D)$.

令 $f=u-v$, 则在 $D-S$ 上 $f$ 全纯 (由 $\frac{\partial f}{\partial\bar z}=0$), 而在 $a_n$ 处 $f(z)=\varepsilon_n(z)-o(1), z\to a_n$, 因此 $f$ 满足条件. □

因此我们有:

**4.** (弱化的 Weierstrass 因式分解定理)$D$ 单连通,$\{k_n\}\subset\mathbb{N}^*$, 则存在 $f\in H(D)$ 使得 $f$ 以 $\{a_n\}$ 为零点, 且在 $a_n$ 处的零点阶数为 $k_n$.

证明. 对 $S$ 运用 Mittag-Leffler 定理, 每个点处的主要部分为 $\frac{k_n}{z-a_n}$, 可以得到亚纯函数 $g$. 对于 $a\in D-S$ 可以取 $F(z)=\int_a^z g(\zeta)\mathrm{d}\zeta, z\in D-S$. 注意到 $g$ 可以分为主要部分 (负一次项) 和全纯部分, 因此原函数尽管多值 (亚纯, 随路径变化), 但分支之差为 $2\pi\mathrm{i}$ 的整数倍, 因此有单值全纯函数 $f=\mathrm{e}^F$. 在每个 $a_n$ 对 $f$ 附近代入 $g$, 符合条件, 得证. □

**5.** (Weierstrass 因式分解定理) 任意整函数 $f$ 可以被写成无穷乘积

$$f(z)=z^m\mathrm{e}^{g(z)}\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^{k_n}\exp\left(k_n\sum_{k=1}^{p_n}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k\right)=z^m\mathrm{e}^{g(z)}\prod_{n\geq 1}E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n}.$$

其中 $g$ 是另一整函数,$a_n$ 是 $f$ 的 $k_n$ 阶零点,$m\geq 0$ 是 $f$ 在 0 处的零点阶数.

定理中,$E_{p_n}(z)=(1-z)\exp\left(\sum_{k=1}^{p_n}\frac{z^k}{k}\right)$ 被称为基本因子, 其乘积被称为典范乘积.

证明. [2] 实际上我们可以认为 $a_n$ 重复出现 $k_n$ 次, 因此不需考虑 $k_n$ 次幂, 转而对每个零点考虑. 另一方面, 仅需考虑 $f(0)\neq 0$ 的情形, 这样可以对 $\frac{f(z)}{z^m}$ 运用得到上式.

首先给出, 在 $\overline{B}$ 上有 $|1-E_p(x)|\leq|z|^{p+1}$. 计算 $E_p'(z)$ 得到其在 0 处有 $p$ 阶零点, 故其原函数 $1-E_p(z)$ 有 $p+1$ 阶零点, 因此仅需估计 $\overline{B}$ 中的 $\frac{1-E_p(z)}{z^{p+1}}$. 由其 Taylor 展开式系数均为正实数, 故其 $\leq\frac{1-E_p(1)}{1}=1$.

[2]此处我们的证明来源于 RCA.

其次我们给出一个引理: 对模趋于无穷的复数列 $\{a_n\}$, 若有 $\{p_n\}\subset\mathbb{N}$ 满足 $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{a}{|a_n|}\right)^{1+p_n}<\infty, a>0$, 则无穷乘积 $P(z)=\prod_{n\geq 1}E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$ 是整函数, 且仅在 $a_n$ 处是零点. 更准确的,$a_n$ 在序列中出现多少次, 则是 $P$ 的多少阶零点.

由于 $a_n$ 几乎都在 $2a$ 之外,$a/|a_n|$ 被限制, 再取 $1+p_n=n$, 上述级数和小于一个几何级数, 故得到满足条件的 $p_n$. 另一方面, 在有界圆盘上运用首先得到的不等式, 得到 $\sum_{n\geq 1}\left|1-E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)\right|$ 内闭一致收敛, 由无穷乘积性质, 引理得证.

最后设 $f$ 的零点构成上述的 $P$, 故在 $f/P$ 只有可去奇点, 可扩展为整函数, 且其没有零点, 故在单连通区域上有整函数 $g$ 使得 $f/P=\mathrm{e}^g$. □

注意到 $\sum_{n\geq 1}\left|1-E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)\right|$ 收敛相当于 $\sum_{n\geq 1}\left|\log E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)\right|$ 收敛, 即余项 $r_n(z)=-\sum_{k\geq p_n+1}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k$ 的无穷加和收敛, 而对充分大的 $z\in B(\infty,R)$,$|r_n(z)|\leq\left(1-\frac{R}{|a_n|}\right)^{-1}\frac{1}{p_n+1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{p_n+1}$. 变换之, 因此若有 $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{|a_n|^{h+1}}$ 收敛, 则所有的 $p_n\leq h$. 满足条件的最小 $h$ 被称为 $f$ 的亏格. 若 $g$ 是多项式, 则称其为有限亏格函数.$f$ 的亏格为 $\max\{\deg g,h\}$.

再由 Weierstrass 因子分解定理我们得到

**6.** $\mathbb{C}$ 上亚纯函数是两个整函数之商.

(取亚纯函数极点为整函数零点, 乘积为整函数.)

**7.** (插值定理)$D$ 单连通,$P_n(z)=\sum_{i=0}^{k_n}b_{n,i}(z-a_n)^i$ 是给定的一列多项式, 则存在 $f\in H(D)$ 在 $a_n$ 处的 Taylor 级数的前 $k_n+1$ 项恰为 $P_n$.

证明. 对 $S$ 和 $\{k_n+1\}$ 运用 Weierstrass 因式分解定理得到全纯函数 $g$. 再对每点取不交大圆盘 $B(a_n,3\varepsilon)$, 其上取此处所构造函数 $\varphi_n$, 在小圆盘 $B(a_n,\varepsilon)$ 上取 1. 设大圆盘之并为 $A$, 令 $u$ 仅在每个去心大圆盘上取 $\frac{\varphi_n P_n}{g}$, 其他处 (含 $S$) 取 0. 可以发现 $u\in C^\infty(D-S)$ 且在每个去心小圆盘上 $u=P_n/g$.

考虑 $h=\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial\bar{z}}, & z\in D-S;\\ 0, & z\in S,\end{cases}$ 而其在去心小圆盘上和大圆盘外取 0, 因此 $h\in C^\infty(D)$. 再令 $\frac{\partial v}{\partial\bar{z}}=h$, 令 $f=g(u-v)$, 则 $f\in H(D-S)$(考虑 $\bar{z}$ 偏导). 而在每点附近 $f=P_n-gv$, 其全纯. 注意到 $a_n$ 是 $gv$ 至少 $k_n+1$ 阶零点, 则 $f$ 在 $a_n$ 处 Taylor 级数的前 $k_n+1$ 项为 $P_n$. □

上述定理的证明都依赖于一维 $\bar{\partial}$ 问题的解的构造与结论, 基本思路都是取不交圆盘应用函数, 使得在点附近保持函数原样, 但在外部都取到 0, 最后构造函数满足题目所给条件.

接着我们考虑特殊域上的情形. 我们定义一列可求长简单闭曲线 $\{\gamma_n\}$ 是正则曲线列, 并给定 $l_n$ 为其长度,$d_n=d(0,\gamma_n)$ 是其到原点的最短距离, 若 (1)$\gamma_n$ 在 $\gamma_{n+1}$ 内部, 且原点在 $\gamma_1$ 内部;(2)$d_n\to\infty$;(3)$\{l_n/d_n\}$ 有界.

**8.** (特殊域上的 Mittag-Leffler 定理)$\{\gamma_n\}$ 是正则曲线列,$f$ 是 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数. 若 (1)$f$ 全部互不相同极点 $S=\{a_n\}$ 是 $f$ 的一阶极点,$c_n=\mathrm{Res}(f,a_n)$;(2) 原点不是 $f$ 极点;(3)$f$ 在 $\bigcup_{n\geq 1}\gamma_n$ 上有界, 则 $f(z)=f(0)+\sum_{n\geq 1}c_n\left(\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}\right)$, 且 RHS 在 $\mathbb{C}-S$ 上内闭一致收敛.

证明. 记 $D_m$ 为 $\gamma_m$ 围成的单连通域, 在其内考虑 $I_m=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_m}\frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta$. 考虑其中极点 $0,z,a_n\in D_m$ 分别有留数 $-\frac{f(0)}{z},\frac{f(z)}{z},\frac{c_n}{a_n(a_n-z)}$, 得到 $f(z)=f(0)+\sum_{a_n\in D_m}c_n\left(\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}\right)+zI_m$ 在 $D_m$ 中圆盘去掉所有极点上成立. 最后估计 $|zI_m|$, 注意限制 $z$ 在 $D_m$ 中的圆盘里 (有界), 运用题设可估计出其趋于 0. 注意到定义总在有界圆盘上, 因此最后得到的式子是内闭一致收敛的, 得证. □

**9.** (特殊域上的 Weierstrass 因式分解定理)$\{\gamma_n\}$ 是正则曲线列,$f$ 是整函数. 若 (1)$f$ 全部互不相同零点 $S=\{a_n\}$ 的阶数为 $\{k_n\}$;(2)$f(0)\neq 0$;(3)$f'/f$ 在 $\bigcup\limits_{n\geq 1}\gamma_n$ 上有界,

则 $f(z)=f(0)\mathrm{e}^{\frac{f'(0)}{f(0)}z}\prod\limits_{n\geq 1}\left(1-\dfrac{z}{a_n}\right)^{k_n}\mathrm{e}^{\frac{k_n}{a_n}z}$, 且 RHS 在 $\mathbb{C}-S$ 上内闭一致收敛.

证明. 对 $f'/f$ 运用上定理, 并注意到 $\mathrm{Res}(f'/f,a_n)=k_n$, 于是 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}=\dfrac{f'(0)}{f(0)}+\sum\limits_{n\geq 1}\left(\dfrac{k_n}{z-a_n}+\dfrac{k_n}{a_n}\right)$ 内闭一致收敛. 考虑 $\mathrm{Log}\,\dfrac{f(z)}{f(0)}=\displaystyle\int_0^z\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\mathrm{d}\zeta=\frac{f'(0)}{f(0)}z+\sum_{n\geq 1}k_n\left(\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+\frac{k_n}{a_n}z\right)$, 即得上式. □

**10.** (Blaschke 定理)$S=\{a_n\}$ 是 $RB-0$ 中互不相同点列,$\{k_n\}\subset\mathbb{N}$. 若 $\sum\limits_{n\geq 1}k_n(R-|a_n|)<\infty$, 则 $\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{R(a_i-z)}{R^2-\bar{a}_iz}\right)^{k_i}\left(\dfrac{|a_i|}{a_i}\right)^{k_i}$ 在 $RB$ 上内闭一致收敛于一个全纯映射 $f:RB\to B$, 使其恰以 $S$ 为零点集,$a_n$ 处的零点阶数为 $k_n$.

证明. 首先由 $k_n\to\infty, R-|a_n|\to 0$, 故 $a_n$ 不在 $RB$ 中收敛, $RB-S$ 是域.(To be continued...) □

我们给出一些例子:

- $\cot z-\dfrac{1}{z}$ 在极点 $\pm n\pi$ 处的 Laurent 级数主要部分.

  注意到其全部极点 $\pm n\pi$ 都是一阶的, 且 $\mathrm{Res}(f,\pm n\pi)=1, f(0)=0$. 之所以去掉 $\dfrac{1}{z}$ 是为了满足原点处不是极点的条件, 以可运用定理8. 考虑边长 $(2n-1)\pi$ 且以原点为中心, 平行于坐标轴的正方形折线, 这是一族正则曲线列, 且在上可估计出 $|\cot(z)|$ 有界, 因此可运用定理8. 我们有

$$\cot z-\frac{1}{z}=\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}+\frac{1}{z+n\pi}-\frac{1}{n\pi}\right)=\sum_{n\geq 1}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}$$

  或

$$\pi\cot\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n\geq 1}\frac{2z}{z^2-n^2}$$

- $\sin z$ 的因子分解.

  注意到对 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ 有 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}=\cot z-\dfrac{1}{z}$, 由定理9得到

$$\frac{\sin z}{z}=1\cdot\mathrm{e}^0\prod_{n\geq 1}\left(\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)\mathrm{e}^{\frac{z}{n\pi}}\left(1+\frac{z}{n\pi}\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{n\pi}}\right)=\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

- $f(z)=\dfrac{\pi^2}{\sin^2\pi z}$ 的另一种因式分解.

  注意到其在 $n$ 处是二阶极点, 且在原点处的主要部分为 $\dfrac{1}{z^2}$. 类似给出极点处的, 可知 $f$ 的主要部分为 $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\dfrac{1}{(z-n)^2}$, 下证全纯部分 $g=0$. 由于 $f$ 及其主要部分有周期为 1, 故 $g$ 也是. 而 $|\mathrm{Im}\,z|\to\infty$ 时 $f\to 0, \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\dfrac{1}{(z-n)^2}\to 0$. 因此这可以给出 $|g|$ 在 $\mathrm{Re}\,z\in[0,1]$ 上有界且无穷远处极限为 0, 故 $g=0$. 因此 $\dfrac{\pi^2}{\sin^2\pi z}=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\dfrac{1}{(z-n)^2}$.

## 4.4 Γ 函数和 Riemann ζ 函数

**Γ 函数** 我们首先介绍一种仅以负整数为零点的最简单函数 $G(z)=\prod\limits_{n\geq 1}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{n}}$. 我们可以得到:

- $zG(z)G(-z)=\dfrac{\sin\pi z}{\pi}$.
- $G(z-1)=z\mathrm{e}^{\gamma}G(z)$.

  (注意到 $G(z-1)$ 的零点仅比 $G(z)$ 的多了一个原点, 故有 $G(z-1)=z\mathrm{e}^{\gamma(z)}G(z)$. 取对数导数并相消, 得到 $\gamma'(z)=0$, 可以直接计算 $G(0)=\mathrm{e}^{\gamma}G(1)$ 可知 $\gamma=\lim H_n-\log n$ 是 Euler 常数.)

令 $H(z)=\mathrm{e}^{\gamma z}G(z),\Gamma(z)=\dfrac{1}{zH(z)}$, 有

**1.** $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z),\Gamma(1)=1$, 因此 $\Gamma(n+1)=n!$.

**2.** $\Gamma(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{-\gamma z}}{z}\prod_{n\geq 1}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^{-1}\mathrm{e}^{\frac{z}{n}}$.

**3.** $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin\pi z}$.

**4.** $\Gamma(z)$ 的极点为非正整数, 但没有零点.

注意到 $(\log\Gamma(z))''=\sum_{n\geq 0}\dfrac{1}{(z+n)^2}$, 可以写出 $(\log\Gamma(z)+\log\Gamma(z+1/2))''=2(\log(2z))''$, 积分两次并代入 $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi},\Gamma(1)=1$, 我们可以得到

**5.** (Legendre 加倍公式)$\sqrt{\pi}\Gamma(2z)=2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\dfrac{1}{2}\right)$.

同理有

**6.** (Gauss 公式)$(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(z)=n^{z-\frac{1}{2}}\prod_{n=0}^{n-1}\Gamma\left(\dfrac{z+k}{n}\right)$.

**Stirling 公式**　本节我们用留数来证明 Stirling 公式.Ahlfors 上的证明十分冗长且不易懂, 在此直接引用他人对证明的解释:Stirling's Formula: Ahlfors' Derivation.

**Riemann $\zeta$ 函数**　$\zeta(s)=\sum_{n\geq 1}n^{-s},\operatorname{Re}s>1$.

首先我们有

**1.** $\dfrac{1}{\zeta(s)}=\prod_{p\in\mathbb{P}}(1-p^{-s})$.

展开 $\zeta(s)\prod_{n=1}^{N}(1-p_n)^{-s}=\sum_{m\in\mathbb{N}}m^{-s}$,$m$ 是不被 $2,3,\cdots,p_n$ 整除的整数, 因此 $N\to\infty$ 时为 1.

其次我们希望扩张 $\zeta(s)$ 到 $\mathbb{C}$ 上. 我们有:

**2.** $\zeta(s)=-\dfrac{\Gamma(1-s)}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_C\dfrac{(-z)^{s-1}}{\mathrm{e}^z-1}\mathrm{d}z$, 其中 $C$ 是不包含 $2k\pi\mathrm{i}$ 且包含正实轴的路径,$(-z)^{s-1}$ 定义在 $\mathbb{C}-\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上.
因此,$\zeta$ 函数可以扩张为 $\mathbb{C}$ 中的亚纯函数, 仅有极点 1, 留数为 1.

*证明.* 考虑 $\Gamma(z)$ 的积分定义式, 代换 $x$ 为 $nx$ 并对 $n$ 求和, 得到 $\zeta(s)\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^\infty\dfrac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x$. 此处由于绝对收敛, 积分和求和可以换序.

将 RHS 拆为上岸和下岸上的实变积分之和, 注意到 $(-z)^{s-1}=x^{s-1}\mathrm{e}^{\pm(s-1)\pi\mathrm{i}}$, 因此 RHS $=2\mathrm{i}\sin(s-1)\pi\zeta(s)\Gamma(s)$. 稍微代换可得上式.

$\zeta$ 在右半平面总解析, 故抹去所有 $\Gamma(1-s)$ 的零点, 仅剩 1. 留数为 1 仅需注意到递推公式. □

另一方面, 注意到 $\dfrac{1}{\mathrm{e}^z-1}=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2}+\sum_{n\geq 1}(-1)^{k-1}\dfrac{B_k}{(2k)!}z^{2k-1}$,((To be continued...)) 代入定理所得式, 我们可以得到如下数值:$\zeta(0)=-\dfrac{1}{2},\zeta(-2m)=0,\zeta(1-2m)=(-1)^m\dfrac{B_m}{2m}$.$z=-2m$ 被称为平凡零点.

最后我们给出 $\zeta$ 函数的函数方程.

**3.** $\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\dfrac{\pi s}{2}\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$, 或 $\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi_{-s}\cos\dfrac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s)$.

证明. 我们考虑正方形 $C_n$, 中心在原点, 平行于坐标轴, 边长为 $(4n+2)\pi$, 再将正方形去掉正实轴部分, 得到曲线 $C_n - C$. 注意到这个曲线环绕 $\pm 2m\pi\mathrm{i}$ 一圈, 而在这些点上 $\dfrac{(-z)^{s-1}}{\mathrm{e}^z-1}$ 有一阶极点, 其留数为 $(\mp 2m\pi\mathrm{i})^{s-1}$.$\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{C_n-C}\dfrac{(-z)^{s-1}}{\mathrm{e}^z-1}\mathrm{d}z$ 由留数定理, 变形得到 $2\displaystyle\sum_{m=1}^{n}(2m\pi)^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\to 2^s\pi^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\zeta(1-s)$.

另一方面,$C_n$ 上的线积分在 $n$ 足够大时趋于 0, 因此仅有 $-C$ 上的积分作贡献. 由上定理, 积分趋于 $\dfrac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)}$. □

我们也可以表述定理为如下形式:

**4.** $\xi(s)=\dfrac{s(1-s)}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right)\zeta(s)$ 是整函数, 且满足 $\xi(s)=\xi(1-s)$.
(整函数仅需注意到每个函数的一阶极点被其他的零点抵消, 后者需要变换后使用 Legendre 加倍公式.)

$\xi(s)$ 的阶由 $\zeta$ 和 $\Gamma$ 函数界定, 由 Stirling 公式我们可以估计后者, 下面来估计 $\zeta$ 函数.

注意到 $\displaystyle\int_N^\infty \lfloor x\rfloor x^{-s-1}\mathrm{d}x = s^{-1}\left(N^{1-s}+\sum_{N+1}^{\infty}n^{-s}\right)$, 因此 $\zeta(s)=\displaystyle\sum_{n=1}^{N}n^{-s}+\frac{N^{1-s}}{s-1}-s\int_N^\infty(x-\lfloor x\rfloor)x^{-s-1}\mathrm{d}x$, 因此对足够大的 $s$,$|\zeta(s)|\le N+A|N|^{-\frac{1}{2}}|s|$.

## 4.5 Jensen 公式和 Hadamard 定理

**1.** (Jensen 公式)[3] $f\in H(RB)$, $f(0)\neq 0$. 在 $r\overline{B}$ 内 $f$ 有零点 $a_1,\cdots,a_N$, 出现次数为零点的阶数. 有

$$|f(0)|\prod_{n=1}^{N}\frac{r}{|a_n|}=\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|\mathrm{d}\theta\right).$$

证明. 我们记 $|z|=r$ 上的所有零点为 $a_{m+1},\cdots,a_N$, 构造 $g(z)=f(z)\displaystyle\prod_{n=1}^{m}\frac{r^2-|a_n|z}{r(a_n-z)}\prod_{n=m+1}^{N}\frac{a_n}{a_n-z}$. 注意到 $g$ 在 $(r+\varepsilon)B$ 上调和且没有零点, 因此由均值性质 $\log|g(0)|=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|g(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|\mathrm{d}\theta$. 代入 $g$ 定义,$|g(0)|=|f(0)|\displaystyle\prod_{n=1}^{m}\frac{r}{|a(n)|}$.

对于 $|z|=r$, 注意到 $\left|\dfrac{r^2-\bar{a}_nz}{r(a_n-z)}\right|=1$, 因此 $\log\left|g(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|-\log\left|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|=\displaystyle\sum_{n=m+1}^{N}\log\left|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta_0)}\right|$. 代入积分式, 有 $\displaystyle\int\mathrm{RHS}\,\mathrm{d}\theta=0$, 因此定理得证.

下证 $I=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|1-\mathrm{e}^{\theta}\right|\mathrm{d}\theta=0$. 注意到 $\displaystyle\int_0^\pi\log\sin x\mathrm{d}x=-\pi\log 2$ [4], 因此

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\log\left|1-\mathrm{e}^{\theta}\right|\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\left(\log\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1}{2}\right|+\log 2\right)\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}}{2\mathrm{i}}\right|\mathrm{d}\theta+2\pi\log 2\\&=\int_0^{2\pi}\log\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta+2\pi\log 2=2\int_0^{\pi}\log\sin x\mathrm{d}x+2\pi\log 2=0\end{aligned}$$

□

这个公式也可以写成

$$\log|f(0)|=-\sum_{n=1}^{N}\log\frac{r}{|a_n|}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|\mathrm{d}\theta.$$

表明了圆上的模 $|f(z)|$ 与其各零点的模之间的关系.

接着我们来看 Hadamard 定理. 在此之前我们定义整函数的阶 $\lambda=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\log\log M(r)}{r}$, 其中 $M(r)=\sup\limits_{|z|=r}|f(z)|$.

我们给出:

[3] Jensen 公式的证明来自 RCA.

[4] 注意到 $\sin x=\sin(\pi-x)$, 因此原式 $=2I_1=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin x\mathrm{d}x$. 考虑区间反演公式,$I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\cos x\mathrm{d}x$. 因此 $2I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin 2x\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log 2\mathrm{d}x=I_2-\frac{\pi}{2}\log 2$. 注意到 $I_2=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}\log\sin t\mathrm{d}t=I_1$, 因此 $I_1=-\dfrac{\pi}{2}\log 2$, $2I_1=-\pi\log 2$.

**2.** (Hadamard 定理) 整函数的亏格 $h$ 和阶 $\lambda$ 满足 $h \le \lambda \le h+1$.

(To be continued...)

### 4.6 正规族

我们定义一个函数族 $\mathcal{F}$ 在 $\Omega$ 上是正规的, 若其中任意序列都有在 $\Omega$ 中任意紧集上一致收敛的子列. 换言之, $\mathcal{F}$ 在任意 $S^K$ 中列紧. 我们构造紧集 $K_k = \left\{x \in \Omega : d(x, \mathbb{F}^n - \Omega) \ge \frac{1}{k}\right\} \cap k\overline{B}, \Omega = \bigcup K_k$, 则我们在 $S^\Omega$ 中定义度量 $\rho(f,g) = \sum_{k\ge 1} 2^{-k} \sup_{x \in K_k} \frac{d(f(z), g(z))}{1 + d(f(z), g(z))}$. 注意到这实际上是将紧集上函数的距离拓展到开集上.

**1.** $\mathcal{F}$ 正规 $\iff$ $\mathcal{F}$ 在 $\rho$ 下相对紧.
(注意到 $\mathcal{F}$ 正规, 则其中序列在度量 $\rho$ 下总有收敛子列, 即列紧, 即相对紧. 推理反向亦然.)

由此,Arzela-Ascoli 定理可以将条件改为 $\mathcal{F}$ 正规, 这是另一种叙述. 定理本身在此不赘叙. 我们还有:

**2.** (Montel 定理) 全纯函数族 $\mathcal{F}$ 关于 $\mathbb{C}$ 正规 $\iff$ $\mathcal{F}$ 在每个紧集上一致有界, 即局部有界.(证明见泛函分析读书笔记.)

因此我们可以称关于 $\mathbb{C}$ 正规为局部有界.

**3.** 局部有界全纯函数族具有局部有界导数.(同上证明的估计.)

函数族 $\mathcal{F}$ 关于区域 $\Omega$ 正规的经典定义为, 每个序列都有子列在每个 $\Omega$ 中紧集上或一致收敛或一致趋于 $\infty$. 这个定义实际上是在复球面上作考察, 并将亚纯函数族也囊括到上述讨论中. 我们有

**4.** 全纯 (亚纯) 函数族在任意紧集上按球面距离一致收敛, 则极限函数是全纯 (亚纯) 的或恒为 $\infty$ 的.
(若 $f(z_0) \ne \infty$, 则其邻域中 $f_n$ 均非 $\infty$, 故由 Weierstrass 定理,$f$ 在邻域中全纯. 若 $= \infty$, 则 $1/f$ 在其附近解析, 故 $f$ 亚纯.)

**5.** 全纯或亚纯函数族在经典意义下正规 $\iff$ $\rho(f) = \dfrac{2\,|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}$ 局部有界.