22-23 年第二学期偏微分方程期末考试考纲

章小明

2023 年 7 月 4 日

1 绪论

1. 大题: 二阶半线性方程的分类与化为标准型
2. 基本概念: 偏微分方程, 偏微分方程的解; 拟线性, 非线性, 半线性; 叠加原理 (微分形式); 三类定解问题 (Dirichlet 问题,Neumann 问题,Robin 问题) 的写法; 适定性的定义

2 一阶拟线性方程

1. 大题: 解一阶拟线性方程初值问题 (习题 + 例题)
2. 基本概念: 一阶拟线性方程; 特征方向, 特征方程组, 积分曲面, 积分曲线; 传输方程, 行波解
3. 积分曲线上一点在积分曲面上, 则全体在其上.

3 波动方程

1. 大题: 分离变量法解一维波动方程初值问题
2. Gauss 公式,d'Alembert 公式及其物理意义 (左右行波叠加)
3. 特征线法 (平行四边形公式)
4. 依赖区域, 决定区域, 影响区域 (章节测验题, 用集合语言描述)

4 热传导方程

1. 基本解 $E(x-y,t)=t^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$, 解核 $K(x-y,t)=(4\pi)^{-\frac{n}{2}}E(x-y,t)=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$.
   (a) $K>0, K\in C^\infty, \forall x,y\in\mathbb{R}^n, t>0$.
   (b) $(\partial_t-\Delta)K=0$.
   (c) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t)\mathrm{d}y=1$.
   (d) $\displaystyle\forall\delta>0:\lim_{t\to0^+}\int_{|y-x|>\delta} K(x-y,t)\mathrm{d}y=0$.
2. 解的存在性的四条注记
   (a) 初值函数 φ 有界则解函数 u 有界.
   (b) φ 增长越慢则 u 存在范围越大,φ 有界则 u 全局存在.
   (c) φ 仅可测时也有 C^∞ 解, 且在连续点 x 附近 $t\to0$ 时 $u(y,t)\to\varphi(x)$.
   (d) u 依赖 φ 在所有点上的取值, 即具有无穷传播速度.
3. 用最大值原理讨论解的唯一性和稳定性 (习题, 必考)
4. 比较原理

5 调和方程

1. 基本解 $k(x-y)=\begin{cases}\dfrac{|x-y|^{2-n}}{n(2-n)\omega_n}, & n>2\\ \dfrac{\ln|x-y|}{2\pi}, & n=2\end{cases}$.(其中 $\omega_n=\dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(n/2)},\omega_2=\pi,\omega_3=\dfrac{4}{3}\pi$.)
2. Green 第一第二公式, 调和函数基本积分公式, 平均值公式 (球上, 球面上).
3. 最大值原理 (必考), 常值调和函数可在区域内取极值.
4. Green 函数的性质 3,4
5. 能量法讨论解的唯一性
6. Dirichlet 原理 (要求会证), 调和函数的基本性质,Liouville 定理 (要求会证)
7. Hopf 最大值原理 (记住结论)