安徽大学 2020-2021 学年第二学期数理统计期末考试试卷 (A 卷)

出卷人: 王学军

1 填空题 (5小题×2分=10分)

1. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 且 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$, $\quad i=1,2,\cdots,n$. 则 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)^2$ 的分布为__________.

2. 设随机变量 $X \sim t(10)$, 已知 $P(X^2 > x_0) = 0.05$, 则 x_0=_____.

3. 已知某型号的导线电阻值服从$N(\mu,\sigma^2)$. 现测量16次, 算得$\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=10.78\Omega, S_*=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}=1.40\Omega$, 则均值 μ 的置信水平 $1-\alpha=0.95$ 的置信区间为__________. 其中 $t_{0.025}(15)=2.131, t_{0.05}(15)=1.753$.

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 是来自 Bernoulli 分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本,$\bar{X}=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}X_i, S_*=\sqrt{\dfrac{1}{m-1}\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2}$. 若 $\bar{X}+kS_*^2$ 是 np^2 的无偏估计, 则 $k=$_____.

5. 设总体 X 的概率密度函数为 $f(x;\theta)$,$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体的简单随机样本.
考虑假设 $H_0: \theta=\theta_0 \leftrightarrow H_1: \theta=\theta_1$ 的 UMP 检验, 利用似然比检验法, 拒绝域为__________.

2 选择题 (5小题×2分=10分)

6. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $U(\theta_1,\theta_2)$ 的简单随机样本, 其中 θ_1 已知,θ_2 未知, 则_____ 是统计量.

   A.$X_1+X_n+\bar{X}-\theta_2$ **B.**$\min(X_1,X_2,X_3)+\theta_1$ **C.**$\bar{X}-\theta_1\theta_2^2$ **D.**$S^2-\theta_1\theta_2^2$

7. 总体 $X \sim N(\mu,\sigma_0^2)$,σ_0^2 已知. 样本容量 n 不变时, 若置信度 $1-\alpha$ 减小, 则 μ 的置信区间_____.

   A. 长度变小 **B.** 长度变大 **C.** 长度不变 **D.** 以上都有可能

8. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自总体 $N(0,4)$ 的简单随机样本, 若_____, 则随机变量 $X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$ 的分布为 χ^2 分布.

   A.$a=\dfrac{1}{12}, b=\dfrac{1}{28}$ **B.**$a=\dfrac{1}{20}, b=\dfrac{1}{100}$ **C.**$a=\dfrac{1}{30}, b=\dfrac{1}{40}$ **D.**$a=\dfrac{1}{40}, b=\dfrac{1}{60}$

9.下列说法正确的是_____.

   A. 设一个正态总体均值 μ 的 95% 置信区间是 (8.6,10.4), 这意味着 μ 有 95% 的概率落在 (8.6,10.4) 中
   B. 未知参数的最大似然估计是唯一的
   C. 在假设检验中, 原假设 H_0 和对立假设 H_1 的地位是平等的
   D.UMP 检验是指在限制第一类错误概率不超过 α 的条件下, 犯第二类错误概率最小的检验

10. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu,\sigma_0^2)$ 的样本, 其中 σ_0^2 已知. 若在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下接受了 $H_0: \mu=\mu_0$, 则在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下, 下面结论正确的是_____.

   A. 必接受 H_0 **B.** 必拒绝 H_0 **C.** 可能接受 H_0, 也可能拒绝 H_0 **D.** 无法求解

3 解答题 (4小题×12分=48分)

11. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $U(0,\theta)$ 的简单随机样本. 考虑假设检验问题 $H_0: \theta = 3 \leftrightarrow H_1: \theta = 2$, 拒绝域 $W = \{(X_1, X_2, \cdots, X_n) | \max(X_1, X_2, \cdots, X_n) < 1.5\}$. 求:(1) 功效函数;(2) 第一类和第二类错误的概率和检验水平.

12. 设总体 X 的概率密度函数为 $f(x;\mu) = \chi_{[\mu,+\infty)}(x)\mathrm{e}^{\mu-x}$. 其中 $\mu \in \mathbb{R}$ 是未知参数,$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体的简单随机样本.

    (1) 求参数 μ 的矩估计 $\hat{\mu}_1$ 和最大似然估计 $\hat{\mu}_M$;
    (2) 判断 $\hat{\mu}_1$ 和 $\hat{\mu}_M$ 是否是 μ 的无偏估计. 若否, 则进行修正, 并求两个无偏估计的均方误差.

13. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 Poisson 分布总体 $\mathcal{P}(\lambda)$ 的简单随机样本, 其中 $\lambda > 0$ 为未知参数.

    (1) 求未知参数 λ 的充分完全统计量; (2) 求 $g(\lambda) = \lambda$ 的 UMVUE;
    (3) 判断 (2) 中的 UMVUE 的方差是否达到 Cramer-Rao 下界.

14. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $N(\mu, 3^2)$ 的简单随机样本, 其中 $\mu \in \mathbb{R}$ 为未知参数.
    求检验问题 $H_0: \theta \geq 0 \leftrightarrow H_1: \theta < 0$ 的水平 α 的 UMP 检验.

4 证明题 (12 分)

15. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本, 且 $Y_1 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} X_i, Y_2 = \frac{1}{3}\sum_{i=7}^{9} X_i, S_*^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i - Y_2)^2$, $Z = \dfrac{Y_1 - Y_2}{S_*/\sqrt{2}}$. 求证 $Z \sim t(2)$.

5 应用题 (2小题×10分=20分)

16. 在一正 20 面体的 20 个面上, 分别标以数字 $0, 1, 2, \cdots, 9$, 每个数字在两个面上标出. 为检验它是否质地匀称, 共做了 800 次投掷试验, 数字 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 朝正上方的次数如下. 问: 能否在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下认为该 20 面体是匀称的? $\chi^2_{0.05}(10) = 18.307, \chi^2_{0.05}(9) = 16.919, \chi^2_{0.025}(10) = 20.483, \chi^2_{0.025}(9) = 19.023$.

数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
频数	74	92	83	79	80	73	77	75	76	91

17. 某批矿砂的 5 个样品中的 Ni 含量经测定为 3.25%,3.27%,3.24%,3.26%,3.24%. 设测定值总体服从正态分布, 但参数均未知. 问: 在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 下能否认为这批矿砂的 Ni 含量均值为 3.25%?