# 安徽大学 2019-2020 学年第二学期微积分 II 期末考试试卷 (A 卷)

出卷人: 王良龙

## I 填空题 (4小题×3分=12分)

1.已知 $A(0,0,0), B(1,1,1), C(1,2,3), M(x,y,z)$ 四点共面, 则 $M(x,y,z)$ 点的轨迹方程为__________.

2.已知 $f(x,y)=(3+e^{\cos x}\sin^2 y)^{2\sin y}+(2x+1)^{y+1}$, 则偏导数 $f'_x(0,0)$ 为__________.

3.数量场 $u=xy^2z^3$ 在点 $P(0,0,0)$ 处沿方向 $\boldsymbol{a}=(2,1,2)$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{a}}\right|_P=$__________.

4.数量场 $u=xy^2z^3$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的梯度 $\mathrm{grad}\, u|_P=$__________.

## II 计算题 (6小题×9分=54分)

5.设 $x=e^{yz}+z^2$, 求 $\mathrm{d}z$

6.计算二重积分 $I=\oint_D \dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D$ 是由 $x=\pi, y=x, y=0$ 所围闭区域.

7.计算三重积分 $I=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 $\Omega$ 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围立体.

8. 记第二型曲线积分$I=\oint_L \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 二元函数$P(x,y)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}, Q(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.(1) 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, 求 $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$; (2) 若正向封闭曲线 $L$ 所围区域不包含原点, 求 $I$; (3) 若原点在正向封闭曲线 $L$ 所围闭区域内部, 求 $I$.

9.计算第一型曲线积分 $I=\oint_L z^2\mathrm{d}s$, 其中 $L$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 和平面 $x+y+z=0$ 的交线.

10.计算第二型曲线积分 $I=\oint_L z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z$, 其中曲线 $L$ 为平面 $x+y+z=1$ 和三个坐标面的交线, 从 $x$ 轴的正向看去定向为逆时针.

## III 应用题 (2小题×8分=16分)

11.半径为 1 的球置于$O$–$xyz$坐标系的原点$O$处,即该球面与原点$O$相切,球心在$(0,0,1)$.记该球面为$\Omega$, 最高点为$N(0,0,2)$.
(1) 求球面 $\Omega$ 的方程; (2) 设 $P$ 点坐标为 $(1,-1,0)$, 直线 $NP$ 与球面 $\Omega$ 的交点为 $Q$, 求点 $Q$ 的坐标;
(3) 设球面 $\Omega$ 上点 $T$ 的坐标为 $(-\frac{5}{13}.\frac{12}{13},1)$, 直线 $NT$ 与 $xOy$ 的坐标面的交点为 $M$, 求 $M$ 点的坐标.

12.要设置一个容量为 $V$ 的长方体开口水箱, 试问水箱的长宽高分别等于多少时所用材料最省?

## IV 证明题 (8 分)

13.设空间有界闭区域 $\Omega$ 由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=0$ 围成, 记 $\Omega$ 的表面的外侧为 $S^+$,$\Omega$ 的体积为 $V$, 证明:

$$\oint x^2yz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xy^2z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z(1+xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=V$$

## V 综合分析题 (10 分)

14. 记 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$. (1) 计算 $f(0)$ 的值;
(2) 求 $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 上的解析表示式, 并将 $f'(x)$ 展开成 $x$ 的幂级数; (3) 将 $f(x)$ 展开成 $x$ 的幂级数;
(4) 该幂级数在点 $x=\pm1$ 处是否收敛? 若收敛, 是条件收敛还是绝对收敛? (5) 写出该幂级数的收敛域.