



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

复变函数

李忠 编

数学基础课程系列
简明教材



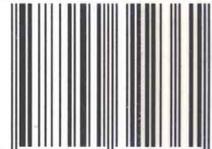
高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

数学基础课程系列简明教材

- > 数学分析教程（上册）
- > 数学分析教程（下册）
- > 高等代数
- > 概率论与数理统计
- > 常微分方程
- 复变函数
- > 近世代数导引
- > 解析几何
- > 数学物理方程

李 忠、方丽萍
李 忠、方丽萍
王萼芳
严士健、刘秀芳、徐承彝
丁同仁
李 忠
刘绍学、章 璞
王敬康
朱汝金

ISBN 978-7-04-032236-1



9 787040 322361 >

定价 16.00元

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
数学基础课程系列简明教材

复变函数

Fubian Hanshu

李忠 编



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是为高等院校本科数学类专业学生编写的复变函数课程教材。它是作者依据多年来讲授此课使用的一份讲稿修订而成。全书共有八章,其内容如下:复数的运算与表示,复变量函数,解析函数的概念,柯西定理与柯西公式,幂级数理论,洛朗展开与孤立奇点,留数定理与辐角原理,解析函数的几何理论。每节配有习题,书后附习题答案与提示。全书力图深入浅出,简明扼要,面向读者,面向教学。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数/李忠编. —北京:高等教育出版社,2011.6

ISBN 978-7-04-032236-1

I. ①复… II. ①李… III. ①复变函数-高等学校-教材 IV. ①O174.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第062391号

策划编辑	李蕊	责任编辑	张晓丽	封面设计	张申申	责任绘图	郝林
版式设计	王艳红	责任校对	姜国萍	责任印制	尤静		

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社址	北京市西城区德外大街4号	网址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印刷	北京市南方印刷厂	网上订购	http://www.landaco.com
开本	850 × 1168 1/32		http://www.landaco.com.cn
印张	8.25	版次	2011年6月第1版
字数	200 000	印次	2011年6月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定价	16.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物料号 32236-00

总 序

2005年,高等教育出版社为适应高校数学类专业的教学需求,经过一段时间的酝酿,决定在“十一五”期间推出一套“数学基础课程系列简明教材”。这套系列教材包含数学分析、高等代数、解析几何、复变函数、实变函数、概率统计、微分几何等。为作好此事,在高等教育出版社的主持下成立了编委会,并邀请了一批有多年教学实践经验的资深教授参加编写工作。这套系列教材中的第一批书目已经被列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材。经过几年的努力,这套教材开始正式与大家见面了。其中多数是新编的,也有一些是经过教学实践证明优秀的、深受读者欢迎的教材的修订版。

这套系列教材适用于我国综合性大学、理工科大学以及师范大学中的数学类专业,作为数学类专业基础课的教学用书;当然,它们也可以作为理工科中非数学类专业的教学参考书。面向全国各类高校的数学系,具有较广泛的适用性,这是我们编写这套系列教材的初衷之一。

在这套系列教材中,尽管每一本教材的风格各异,但是在编写的基本理念上大家有着相当多的共识。我们希望这套教材做到以下几点:

首先,教材内容“少而精”。

众所周知,“少而精”是教学的一个基本原则。它要求在教学中要紧紧地抓住所涉及学科的基础知识与基本训练这个纲,突出重点,纲举目张。相反,内容过多、过杂、过深,势必使人不得

要领，事倍功半。但是，有时人们会看不到讲得过多的害处，会在某些口号的驱使下使事情脱离了正确的轨道，比如求多求全、追求内容的先进性或现代化等等。我们知道，基础课教材的作用在于它为读者提供后续课以及日后参加工作不可或缺的基础知识、基本方法与基本思想。所讲的内容并非越多越好，越深越好。遗憾的是，目前基础课内容有一种不断扩充的趋势。这虽然出于良好的目的，而其效果却不如愿。实际上，就以我们这些“过来人”为例，认真回想一下自己以前所学到的、真正用得得心应手的内容并不多；而且真正用得到的内容也并不很多。与其求全求多，不如精选最基本的东西，帮助读者真正掌握这些内容的实质、方法和思想。读者有了这样的基础，在他们将来遇到没有学过但确有需要的内容时，也会有能力自学。课程内容“现代化”的要求，应当是针对数学系的整个的教学体系而言的，而不是要求基础课的内容更新换代。这对数学学科而言是无须争议的事实。基础课可以在观念上、记号上为专业课的现代化做些必要的准备，但不应该是把后续课的某些基本概念提到前面来讲述。

其次，教材尽可能做到“深入浅出”。

基础课教材是初学者入门的读本，而这些初学者在此之前没有任何学习高等数学的经验。在这种情况下，就要求教材注意循序渐进、由浅入深，尽可能做到通俗易懂，最好还能做到生动有趣，引起读者的兴趣。一个好的数学基础课教材应当既逻辑严谨、体系完整，又深入浅出、平实自然。我们应当学会通过典型的实例和足够详尽的解释，来帮助初学者学会解读数学的抽象形式，透过抽象的数学叙述，正确把握和理解其内容实质。教材的真正水准应当体现在是否能把那些艰深的内容讲得让人感到自然易懂。把本来容易的东西讲得复杂难懂，是不可取的。为此，我们要注意避免过度形式化的不良倾向。数学工作者由于长期从事数学研究与教学，已经养成了严谨的习惯，追求叙述的一般性与抽象性，但与此同时，也往往形成了某种毛病，那就是忽

视描述性语言,忽视那些抽象形式背后的直观模型,甚至抹杀直观的意义,这是很不妥当的。过度的形式化,不仅造成了初学者的困难,更重要的是歪曲了数学本质,误导了学生。在基础课教材中,为了帮助初学者理解抽象数学形式的意义,除了典型例子之外,用必要的直观描述性语言去解释它的意义,同样是十分重要、不可或缺的。

最后,教材重视基本训练,重视对学生的能力培养。

我们赞同“双基”的提法,即基础课的任务是传授基础知识和掌握基本技能。学好一门数学课程,单单知道有关数学结论是不够的,还要求读者具有一定的分析问题与解决问题的能力。这样,勤于思考,独立思考,并做好相当数量的习题,是完全必要的。这是一切在数学上学而有成的人的共同体。通过做题可以深入、具体地理解和掌握基本概念、结论和方法;获得计算和推理的能力;理解、掌握应用基本知识和方法解决问题的途径;同时也进一步锻炼刻苦思考和探索的毅力,培养创造性的思维能力和习惯。后一点不仅对学好数学很重要,而且对读者以后工作能力的提高和事业的成功都是很重要的。在这套教材中,我们精心选配好适合读者的各种例题与习题,它们是教材很重要的组成部分,不可忽视。习题中不仅有基本练习,而且有一些题目,需要读者经过一定的努力,花费一定的时间去探索,才能最终解决。此外,题目富有多样性、趣味性和启发性。当然,我们也不赞成出一些技巧性过强而没有训练价值的偏题与难题。

常言道:“授人以鱼,不如授人以渔”。一本好的基础课教材要努力做到授人以渔,而不只是罗列知识。这就需要帮助读者理解课程内容和方法的实质,理解其中的数学思想。在教材中要尽可能地介绍清楚问题和概念的来龙去脉,包括一些典型的例子;尽可能解释清楚解决问题的思路和方法,其中包括定理证明和计算过程的思路,以提高学生的创新意识与探索精神。

以上是我们对这套教材的希望与要求,也是我们编书的理念。

把它们写在这里,主要是为了自勉,并不表明这些我们已经全部做好了、做到位了。我们希望使用这套教材的师生和其他读者多提宝贵意见,使教材得以不断完善。

“数学基础课程系列简明教材”编委会

2008年1月5日

前 言

大家知道,复数最早出现在 16 世纪中叶,那是由于解二次与三次代数方程的需要而引入的。当时人们认为这是一种根本不存在的、想象中的数。然而,这种数一旦出现,就显示了顽强的生命力,后来在不同领域中不断出现一些应用。就这样,人们带着迷茫与困惑,一方面使用着它,而另一方面又不承认它的存在。这种状态一直持续了近两百年。高斯 (Gauss) 等人在 18 世纪初叶,提出了复数的几何表示,把一个复数看成平面上的一个点,其四则运算也有明显的几何意义。从此,人们对复数有了一种“真实感”,并最终接受了它。高斯对复数的这种几何解释,不仅为复数提供了一个实际模型,而且沟通了复数与几何的联系,为数学与物理中的平面问题应用复数与复变量函数奠定了基础。

19 世纪初,关于实变量函数的无穷小分析的理论日趋成熟,人们的注意力开始转向复变量函数的研究上,并把微积分的思想与方法推广到复变量函数。这样,就逐步形成一个新的数学分支——复变函数论。柯西 (Cauchy)、黎曼 (Riemann) 和魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 是这一领域的创始人。他们分别从积分、几何与幂级数三个不同角度研究了一类特殊的复变量函数——解析函数,并为解析函数的理论奠定了完整的基础。

所谓解析函数,就是指在一个平面区域内处处可导的复变量函数,而这里的可导在形式上与实变量函数完全一致。使人感到意外的是,虽然解析函数是处处可导的实变量函数的自然推广,然而它有一系列独特而优美的性质,远远强于实变量函数情形。

比如,解析函数一阶导数处处存在意味着它有任意阶导数;它沿着单连通区域内任意简单闭曲线的线积分为零;它所实现的映射具有保角性等等。此外,我们在微积分中遇到的基本初等函数,在复变函数论中也都有相应的推广。而且只有在复数域中,我们才看清了这些基本初等函数之间的联系与统一。当时对解析函数的研究不仅仅是出自纯数学的考虑,而且还由于它与物理和力学(特别是流体力学)有紧密的联系。柯西当时利用解析函数为一种平面物理场建立了复的位势理论,因此,解析函数论成为一种常用的数学物理方法是十分自然的事。

19世纪关于解析函数论的研究在当时数学领域中占据了中心地位,并取得了辉煌的成就。除去前面提到的柯西、黎曼、魏尔斯特拉斯的成就之外,还有阿贝尔(Abel)、施瓦茨(Schwarz)以及雅可比(Jacobi)等人关于椭圆函数与自守函数所做出的杰出贡献。19世纪关于解析函数的成就,对20世纪之后形成的当代数学产生了深远影响。举例而言,黎曼提出的 ζ 函数沟通了素数分布与解析函数的联系,使得数论的研究得以使用解析函数的工具。后来形成了现代数学的一个重要的数学分支——解析数论。黎曼所提出的有关 ζ 函数的零点的猜测,至今是数学尚未解决的最重大难题之一。又比如,黎曼为了讨论多值解析函数而提出的一种特殊曲面被后人称之为黎曼曲面。关于黎曼曲面的研究,则与后来的拓扑、代数几何和复流形等密切相关。20世纪初叶外尔(H.Weyl)所提出的一般黎曼曲面的概念,实际上是今天我们广泛使用的流形概念最早的雏形。今天,我们学习复变函数这门课的目的就是为进一步学习与掌握近代数学打下必要的基础。

大家知道,近半个世纪以来,科学技术的发展大大加快了步伐。数学科学也同样如此。我们正面临一个知识“大爆炸”的时代。对于今天的大学生而言,与以前的大学生相比,他们需要学习更多的新知识。然而,数学类专业的基础课,不可能像电子器件那样,来一个“更新换代”。在这种情形下,对于原有的基础课的传

统内容用现代的眼光重新做一番审视,加以删繁就简,就成为一项必要的、较为务实的措施。

这本教材的前身是作者在北京大学多次讲授复变函数时使用的一份油印讲稿。2010年作者又在首都师范大学使用了一遍,做过若干修改。

作为一本面向大学生的复变函数课的教材,作者一向主张不宜讲得过深、过难,或者过于琐碎。一些较深或较专的内容,不应讲给一般大学生,而应当留作研究生的专门教材。对于一些过于繁琐,技巧性很强,但缺乏一般意义的内容,应当简化或干脆删除。基于这样一个看法,作者对于复变函数课某些传统内容作了适当调整。比如,我们弱化了有关利用解析函数的回路积分计算实函数定积分的内容;删除了利用初等函数把某些具体区域变成单位圆的训练,删除了把多边形共形映射成上半平面的克里斯托佛(Christoffel)-施瓦茨公式叙述与证明;但我们详细讲述了分式线性变换的理论,并增强了解析函数几何理论的某些讨论。对于复变函数论中某些较为艰深的定理我们只叙述结论,讲清它们的意义,但略去了证明。

本书几乎在一开头,就用一种自然方式引入了形式偏导数的概念,并把它放在较显著的位置。这主要是考虑到形式偏导数在现代复分析中扮演着重要角色,而它们的引入并不会造成什么困难。多年的教学实践表明,这样做没有给学生带来任何困难,反而简化了基本初等函数解析性的处理,更重要的是,这样做有助于初学者对解析函数概念的理解。

面向读者是作者编写此书的一个基本指导思想。作者希望这本书便于初学者自学,容易把握要领。对于每一个重要概念与重要结论,我们花费了较多的笔墨解释其意义与价值,并列举了足够的例题,以加深读者的理解。复变函数的理论与实分析、代数和几何有广泛的联系,我们希望读者在学习的过程中,用更多的力气与时间,去用心思考概念的本质和定理的意义,以达到融会贯

通的目的。

本书每一节之后，都附有一定数量的习题，我们希望读者能够尽可能独立地完成这些习题。这里的大多数题并不难。个别题有一定难度，都在习题中做了必要的提示，相信多数初学者可以从提示中得到启发，能够自己动手解决。在本书之末附有“习题答案与提示”，其中不仅给出了计算题的答案，而且针对某些较难证明题提供了更进一步的提示。希望初学的读者，在没有经过充分思考之前，不要轻易地查阅后面的这些提示。作者希望这些习题，不仅使读者得以“学而时习之”，而且还能使读者从一些侧面深入了解解析函数的意义以及与其他学科的联系。

高等教育出版社的李蕊同志策划了这套数学基础课程系列简明教材，并促成了本书的出版。张晓丽同志对本书的书稿作了精心的编辑加工，纠正了作者的一些疏漏。在这里作者对她们致以衷心的感谢！

作者深知自己水平有限，书中定会有一些不当之处，诚恳欢迎使用此书的教师与学生提出批评和指正。

李 忠

2011年1月20日

目 录

第一章 复数的运算与复平面上的拓扑	1
§1. 复数域与复数的几何表示	1
§2. 复平面上的拓扑与复数域的完备性	18
第二章 复变量函数	27
§1. 复变量函数的概念	27
§2. 复变量函数的极限与连续性	37
§3. 复变量函数的形式偏导数	41
§4. 复变量基本初等函数	48
第三章 解析函数的概念	69
§1. 解析函数的定义	69
§2. 可导的充要条件	77
§3. 解析映射的几何意义	84
第四章 柯西定理与柯西公式	91
§1. 复变量函数的曲线积分	91
§2. 柯西定理	103
§3. 柯西积分公式及其应用	114
§4. 解析函数的最大模原理	125
第五章 解析函数的幂级数展开及其相关理论	132
§1. 解析函数的序列与幂级数	132
§2. 解析函数的幂级数展开及其推论	138
第六章 解析函数的洛朗展开与孤立奇点	149
§1. 洛朗展开	149

§2. 解析函数的孤立奇点	157
§3. 整函数与亚纯函数	168
第七章 留数定理与辐角原理	174
§1. 留数定理	174
§2. 亚纯函数的辐角原理	184
§3. 留数定理在定积分计算中的应用	191
第八章 解析函数的几何理论	201
§1. 解析映射的几何特征	201
§2. 分式线性变换	206
§3. 黎曼映射定理	218
§4. 解析延拓	223
§5. 完全解析函数与黎曼曲面	230
习题答案与提示	238

第一章 复数的运算与复平面上的拓扑

§1. 复数域与复数的几何表示

1.1 复数域

我们在中学数学教程中已经知道, 形如 $z = x + iy$ 的数称为复数^[注], 其中 x 和 y 是任意的实数, 而 i 是一个特殊的记号, 满足运算规律: $i^2 = -1$. 这里的实数 x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部, 分别记为 $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$. 特别地, 当 $x = 0$ 时, 形如 $z = 0 + iy$ 的复数称为纯虚数, 或简称为虚数, 通常简记为 iy . 当 $y = 0$ 时, 形如 $z = x + i0$ 的复数就是实数, 通常简记为 x .

显然, 实部与虚部都是零的复数 $z = 0 + i0$ (通常简记为 0), 既是实数又是虚数. 反过来, 既是实数又是虚数的复数也只有 $z = 0 + i0$.

设 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 是任意给定两个复数. 当且仅当它们的实部和虚部分别相等, 也即 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 = y_2$, 我们称 z_1 与 z_2 相等, 并记之为 $z_1 = z_2$. 如果 $x_1 \neq x_2$, 或 $y_1 \neq y_2$, 则我们称 z_1 与 z_2 不相等, 记为 $z_1 \neq z_2$.

和实数一样, 复数有加、减、乘、除四则运算. 对任意两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$, 我们按照下述规则定义它们的四则运算:

注 复数 $x + iy$ 也可写成 $x + yi$, 并认为两者代表同一个数.

加法运算: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$;

减法运算: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$;

乘法运算: $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$;

除法运算: 设 $z_2 \neq 0$, 也即 x_2 与 y_2 不同时为 0,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

这里加减法的定义是十分自然的, 而乍一看似乎乘除法的定义并不自然. 但其实不然.

先看乘法的定义. 事实上, 只要在下列计算中

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

将 i^2 换成 -1 就得到了我们现在乘法的定义.

再看除法的定义. 要定义 z_1 除以 z_2 的商, 实际上就是要找一个复数 z 使得 $z z_2 = z_1$, 其中 $z_2 \neq 0$. 我们令 $z = x + iy$, 那么

$$x_1 + iy_1 = (x + iy)(x_2 + iy_2) = x x_2 - y y_2 + i(x y_2 + y x_2),$$

也即

$$x x_2 - y y_2 = x_1, \quad x y_2 + y x_2 = y_1.$$

解此方程组, 即得到

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

这里的 x 与 y 分别就是定义中 $\frac{z_1}{z_2}$ 的实部与虚部.

上面定义的四则运算满足下列运算规律:

- (1) 关于加法的交换律: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
- (2) 关于加法的结合律: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;
- (3) 关于乘法的交换律: $z_1 z_2 = z_2 z_1$;
- (4) 关于乘法的结合律: $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$;

(5) 关于乘法对加法的分配律: $z(z_1 + z_2) = zz_1 + zz_2$.

这些运算规律很容易直接验证. 我们这里略去它们的验证.

这样, 全体复数组成了一个数域. 我们称之为复数域, 通常记为 \mathbb{C} .

例 1.1 $(2 - i\sqrt{3})^2 = 4 + 3i^2 - 4i\sqrt{3} = 1 - 4i\sqrt{3}$.

例 1.2 $(2 + i\sqrt{2})^2 / (1 + i)^3 = \frac{4 + 2i^2 + i4\sqrt{2}}{1 + 3i + 3i^2 + i^3} = \frac{1 + i2\sqrt{2}}{i - 1}$.

现在, 我们引入一个复数的共轭复数与模的概念.

对于给定的一个复数 $z = x + iy$, 我们称复数 $x - iy$ 为它的共轭复数, 并记之为 \bar{z} . 另外, 我们称实数 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 为复数 $z = x + iy$ 的模, 并记作 $|z|$.

很容易直接验证, 复数模与共轭复数具有下列性质:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|; \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|};$$

$$|z| = |\bar{z}|; \quad |z|^2 = z\bar{z};$$

$$\overline{(\bar{z})} = z; \quad \overline{(z_1 \pm z_2)} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2;$$

$$\overline{(z_1 z_2)} = \overline{(z_1)} \overline{(z_2)}; \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2};$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}; \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

这些公式在复数的计算上都是十分基本的. 希望读者能逐步熟练掌握与灵活运用它们.

例 1.3 共轭复数给除法运算带来方便, 至少使我们不必记忆复数除法的公式. 比如:

$$\frac{3 + 5i}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{(3 + 5i)(1 + \sqrt{3}i)}{(1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i)} = \frac{1}{4}[3 - 5\sqrt{3} + i(5 + 3\sqrt{3})].$$

例 1.4 证明 $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$.

证 事实上, 我们有

$$\begin{aligned}|z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} \\ &= (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - z_1\bar{z}_2 - \overline{z_1\bar{z}_2} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2).\end{aligned}$$

例 1.5 设

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

是一个实系数多项式, 也即其中的 a_j ($j = 1, 2, \cdots, n$) 均为实数.

证明: 若 α 是 $P(z)$ 的一个根, 则 α 的共轭 $\bar{\alpha}$ 一定也是它的一个根.

证 根据假定, $P(\alpha) = 0$. 运用共轭运算的有关规律, 我们有

$$\begin{aligned}P(\bar{\alpha}) &= a_0\bar{\alpha}^n + a_1\bar{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\bar{\alpha} + a_n \\ &= a_0\overline{(\alpha^n)} + a_1\overline{(\alpha^{n-1})} + \cdots + a_{n-1}\bar{\alpha} + a_n \\ &= \overline{a_0\alpha^n} + \overline{a_1\alpha^{n-1}} + \cdots + \overline{a_{n-1}\alpha} + \overline{a_n} \\ &= \overline{a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n} \\ &= \overline{P(\alpha)} = \bar{0} = 0.\end{aligned}$$

这里我们用到 $\overline{\bar{a}_j} = a_j$ ($j = 0, 1, \cdots, n$), 这是因为它们都是实数的缘故.

这个例子告诉我们: 对于实系数多项式而言, 非实数根的共轭复数也必然是一个根. 因此, 非实数根总是成双出现.

1.2 复数的几何表示

在平面上取定直角坐标系 Oxy . 这时平面上的一点 $P(x, y)$ 便对应于一个复数 $z = x + iy$. 反之, 对于任意一个复数 $z = x + iy$,

对应于一点 $P(x, y)$. 这样, 复数域与平面上的点建立了一一对应. 与复数建立了这种对应关系的平面称为复平面.

例如, 复数 $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i, z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ 和 $z_3 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$ 在复平面的位置有如图 1.1.1 所示.

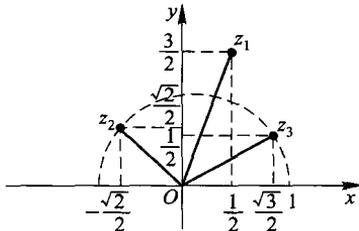


图 1.1.1

在复平面上, 全体实数与 x 轴上的点一一对应, 全体形如 iy 的虚数与 y 轴上的点一一对应. 因此, 我们把复平面上的 x 轴称为实轴, 而 y 轴称为虚轴. 虚数 i 对应于点 $(0, 1)$, 恰好是虚轴的单位.

显然, 一个复数 $z = x + iy$ 与其共轭复数 $\bar{z} = x - iy$ 关于实轴是对称的 (见图 1.1.2).

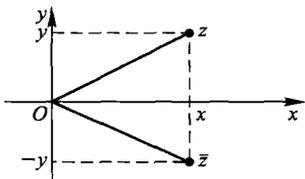


图 1.1.2

一个非零复数 $z = x + iy$ 又可看成是一个从原点出发到点 $P(x, y)$ 的向量 \overrightarrow{OP} , 其长度就是复数 z 的模 $|z|$. 该向量与 x 轴的正方向之间的夹角 θ 称为复数 z 的辐角. 换句话说, 复数的辐角就是 x 轴的正方向向量旋转到向量 \overrightarrow{OP} 的位置所扫过的角度.

应该强调指出, 一个非零复数的辐角是一个有向角, 并且是多值的. 它依赖于旋转的方向: 当沿逆时针旋转时, 辐角规定为正值;

而沿顺时针方向旋转时, 辐角规定为负值. 此外, 这种旋转也没有限定旋转的圈数. 因此, 一个非零复数的辐角有无穷多个值.

比如, 复数 $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ 辐角可以是

$$\frac{\pi}{4}; -\frac{7\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}; \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

一般说来, 若 θ_0 是非零复数 z 的任一给定的辐角, 则 $\theta_0 + 2k\pi$ 都是 z 的辐角, 其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 通常, 我们用 $\text{Arg}(z)$ 表示的 z 辐角的一般形式, 即

$$\text{Arg}(z) = \theta_0 + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

有时, 我们需要对辐角 θ 取值范围做如下规定: $-\pi < \theta \leq \pi$. 在这种限定下, 一个非零复数的辐角就是唯一确定的. 满足这种规定的辐角值通常称为**辐角的主值**, 并记之为 $\arg(z)$ ^[注]. 这时, 显然有:

$$\text{Arg}(z) = \arg(z) + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

设 θ 为一个非零复数 z 的辐角, 则我们有

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

此式有时也称为**复数的三角表示式**(见图 1.1.3).

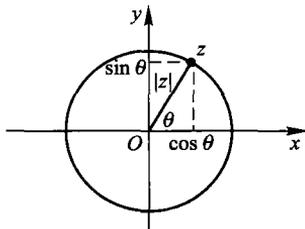


图 1.1.3

注 辐角主值范围的选定没有一个统一的规定, 可能因书而异. 也有一些书不引入这个概念.

假定一个复数 z 的实部与虚部分别为 $x(\neq 0)$ 与 y , 那么它的辐角等于

$$\operatorname{Arg}(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

这里应当指出, 一个非零复数才有辐角可言, 而复数 $z = 0 + i0$ 辐角无意义.

另外, 我们还要指出一个基本事实: 假若一个非零复数 z 有两个三角表示:

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta); \quad z = |z|(\cos \theta' + i \sin \theta')$$

则我们有 $\theta = \theta' + 2k\pi$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$. 这也就是说, 同一个复数的两个三角表示式中的辐角, 其差等于 $2k\pi$, 其中 k 是某个整数.

有了复数的几何表示后, 复数的运算也就有了几何意义.

首先, 我们指出, 两个复数相加就相当于相应的两个向量按照平行四边形法则相加 (见图 1.1.4).

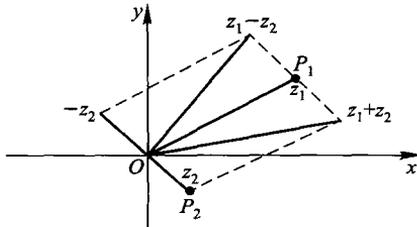


图 1.1.4

设 $z_j = x_j + iy_j$, 点 P_j 的坐标为 $(x_j, y_j)(j = 1, 2)$, 那么, 对复数 z_1 与 z_2 的求和或差 $z_1 \pm z_2$ 就相当于对向量 $\overrightarrow{OP_1}$ 与 $\overrightarrow{OP_2}$ 求和或差 $\overrightarrow{OP_1} \pm \overrightarrow{OP_2}$.

由复数的三角表示与复数加法的几何意义, 立即推出关于复数的三角不等式.

事实上, 由于 $|\overrightarrow{P_1P_2}| \leq |\overrightarrow{OP_1}| + |\overrightarrow{OP_2}|$, 我们立刻看出

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

这个不等式称为**三角不等式**.

由三角不等式可以导出另外一个常用的不等式:

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

事实上, 利用三角不等式我们有

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|,$$

也即

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|.$$

调换 z_1 与 z_2 的位置, 我们又得到

$$|z_1 - z_2| \geq -(|z_1| - |z_2|).$$

从上述两个不等式就可以推出了我们所要的公式: $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$. 这个不等式给出了 $|z_1 - z_2|$ 的下方估计.

现在我们讨论**乘法的几何意义**.

设 z_1 与 z_2 是两个非零复数, 并分别有辐角 θ_1 与 θ_2 . 则根据复数的三角表达式有

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= |z_1| |z_2| [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

这里最后一步用到了复数的乘法公式及三角函数的和角公式. 建议读者自行完成这个证明.

这样, 我们就证明了

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2).$$

这就是说, 两个复数相乘, 其积的模等于它们的模之积, 其积的辐角等于它们各自的辐角之和 (见图 1.1.5).

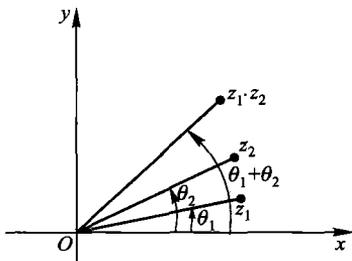


图 1.1.5

这里应当说明, 等式 $\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$ 的确切含义是, 在辐角忽略 2π 的整数倍不计时等式两边相等. 今后, 类似的等式均应作这样的理解.

思考题 设 z 是任意一个非零复数. 在复平面上根据 z 的位置画出 iz 的位置.

接下来, 我们讨论除法的几何意义.

设 z_1 与 z_2 是任意两个非零复数, 并沿用前面的记号. 这时, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1| \cos \theta_1 + i \sin \theta_1}{|z_2| \cos \theta_2 + i \sin \theta_2} \\ &= \frac{|z_1| (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{|z_2| (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)} \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2) \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

这样, 我们得到

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; \quad \text{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2).$$

这就是说, 两个复数相除, 其商的模等于它们的模之商; 其商的辐角等于被除数与除数的辐角之差 (见图 1.1.6).

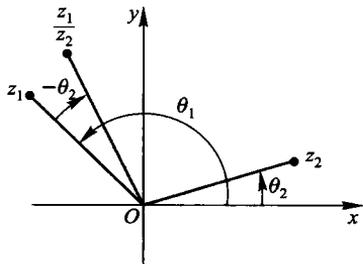


图 1.1.6

设 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $r = |z| > 0$. 根据前面的讨论, 对于任意自然数 n , 我们有

$$z^n = r^n(\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

这样, 我们就得到了大家已经熟知的棣莫弗 (De Moivre) 公式:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

下面我们通过一些例题来讨论复数乘方的逆运算——开方.

例 1.6 求 $i^{1/3}$, 也即求出所有满足方程 $z^3 = i$ 的复数 z .

解 假定复数 z 满足方程 $z^3 = i$, 并且有表达式 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, 其中 $r > 0$. 那么, 我们有

$$r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = |i| \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right).$$

注意到 $|i| = 1$, 我们即得到 $r = 1$. 另外, 由上式又有

$$3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

也即

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

令 $k = 0, 1, 2$, 便依次得到 θ 三个值:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{6}; \quad \theta_2 = \frac{5\pi}{6}; \quad \theta_3 = \frac{3\pi}{2}.$$

它们依次对应于方程 $z^3 = i$ 的三个根:

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2};$$

$$z_2 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2};$$

$$z_3 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = 0 - i = -i.$$

由于我们所考察的方程是一个三次代数方程, 它至多有三个不同的根. 因此这里我们所得到的三个根就是全部的根.

思考题 请画出这三个根在复平面的位置, 并直接根据乘法的几何解释说明它们是方程 $z^3 = i$ 的解.

例 1.7 求 $\sqrt{\frac{\sqrt{3}+i}{2}}$.

解 令 $\zeta = (\sqrt{3}+i)/2$, 则 ζ 的模

$$|\zeta| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

根据 ζ 的实部与虚部, 很容易看出, ζ 的辐角为 $\pi/6$. 故有

$$\zeta = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}.$$

设 z 满足 $z^2 = \zeta$, 那么 $|z|^2 = |\zeta| = 1$, 即 $|z| = 1$. 另外, 假定 θ 是 z 的辐角, 那么

$$z^2 = (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta.$$

另一方面, 我们已经知道

$$z^2 = \zeta = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}.$$

比较这两个三角表达式立刻可以推出

$$2\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

令 $k = 0, 1$, 分别得到两个 θ 的值 $\theta_1 = \frac{\pi}{12}$ 和 $\theta_2 = \frac{13\pi}{12}$. 它们分别对应于方程 $z^2 = \zeta$ 的两个根:

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}, \quad z_2 = \cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12}.$$

下面的例子是更一般的结果.

例 1.8 设有一个非零复数 α , 求方程 $z^n = \alpha$ 的一切根, 其中 n 为正整数.

解 假定 $\alpha = |\alpha|(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0)$, 其中 θ_0 为 α 的辐角的主值. 又设

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

则我们有

$$|z|^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = |\alpha|(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0).$$

所以 $|z| = |\alpha|^{1/n}$, 并有

$$n\theta = \theta_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

这样, 我们就得到了方程 $z^n = \alpha$ 的 n 个根:

$$z_k = |\alpha|^{1/n} \left(\cos \frac{2k\pi + \theta_0}{n} + i \sin \frac{2k\pi + \theta_0}{n} \right) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

这 n 个根在复平面上恰好组成了一个正 n 边形 (图 1.1.7 表示了 $n = 6$ 及 $\theta_0 = \pi/4$ 的情况).

特别地, 当 $\alpha = 1$ 时, $r = 1$, $\theta_0 = 0$. 这时, 所对应的 n 个根为

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

这就是数 1 开 n 次方所得到的 n 个值.

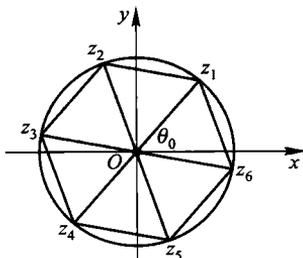


图 1.1.7

例 1.9 设有两个非零复数 z_1 与 z_2 , 其辐角分别是 θ_1 与 θ_2 .
证明

$$|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2| - 2|z_1||z_2|\cos(\theta_1 - \theta_2),$$

并说明其几何意义.

证 由例 1.4, 我们知道

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2).$$

另外一方面, \bar{z}_2 的辐角是 $-\theta_2$. 根据复数乘法的几何解释, $z_1\bar{z}_2$ 的辐角是 $\theta_1 - \theta_2$. 这样,

$$z_1\bar{z}_2 = |z_1||z_2|[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

对此式等号两边分别取其实部, 就得到

$$\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = |z_1||z_2|\cos(\theta_1 - \theta_2).$$

将此结果代入 $|z_1 - z_2|^2$ 的表达式就得到了所要的结果.

考虑由坐标原点, 点 z_1 和 z_2 所组成的三角形. 那么, 例 1.9 中的等式所表达的几何意义就是平面几何中的关于这个三角形的余弦定理.

下面利用复数来解决一个有趣的几何问题:

例 1.10 设平面上有一个三角形 $\triangle ABC$. 分别以边 AB 与边 AC 为直角边各作一个等腰直角三角形 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACE$, 使得 $\angle ABD$ 与 $\angle ACE$ 均为直角 (如图 1.1.8 所示). 试利用复数证明 DE 的中点 F 恰好落在 BC 的垂直平分线上, 并且 F 到 BC 中点的距离等于 BC 长度之半.

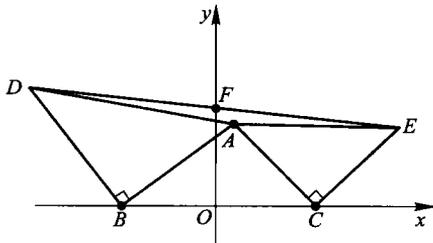


图 1.1.8

证 令 BC 的中点为 O , 并以它为原点取一个直角坐标系 Oxy , 使得 BC 恰好落在 x 轴上, 并且使得点 C 落在 x 轴的正方向. 不失一般性, 可取 OC 的长度为 1, 如图 1.1.8 所示.

现在, 我们将 x 轴视为实轴, 将 y 轴视为虚轴. 这样, 原来的点 B 与 C 用复数表示时, 则分别为 -1 与 1 .

假定原来的点 A 的复数表示为 $a + bi$. 那么, 向量 \overrightarrow{BA} 的复数表示为 $(a + bi) + 1$. 注意到 $\angle ABD$ 为直角, 且 $AB = BD$, 故向量 \overrightarrow{BD} 的复数表示为 $[(a + bi) + 1] \times i$. (为什么?) 这样, 点 D 的复数表示为

$$-1 + [(a + bi) + 1] \times i = -1 - b + (1 + a)i.$$

类似的讨论可知, 点 E 的复数表示为

$$1 + [(a + bi) - 1] \times (-i) = 1 + b + (1 - a)i.$$

这样, 线段 DE 的中点 F 的复数表示应该是

$$\frac{1}{2} \{ [-1 - b + (1 + a)i] + [1 + b + (1 - a)i] \} = i.$$

这就完全证明了我们所要的结论. 证毕.

值得注意的是, 在该命题中, DE 的中点 F 只与边 BC 有关, 而与 A 的选择无关. 也就是说, 无论点 A 多么远离 BC , 只要 BC 不变, 点 F 总在一个固定位置上. 这一现象似乎有点让人感到意外.

如果不用复数, 而用几何方法也可以直接证明这个结论, 但要费些力气. 读者不妨自己试一试.

1.3 无穷远点与扩充复平面

有许多理由促使我们引入无穷远点的概念, 并把无穷远点也作为一个复数看待, 添加在复平面中. 然而目前我们无法讲清这些理由. 但在今后的讨论中, 我们会逐步看到, 引入了无穷远点不仅给我们带来许多方便, 而且使得解析函数的理论更为和谐与统一.

添加了无穷远点的复平面, 称为**扩充复平面**, 或**黎曼球面**.

提出这样做的人是著名的德国数学家黎曼. 黎曼的这一想法是深刻的, 用近代数学的观点来看, 黎曼球面实际上是最早出现的一个流形.

下面我们来介绍黎曼的这一想法.

在三维空间中, 我们考虑一个直角坐标系 $Oxyu$. 这里, 我们把第 3 个坐标取为 u , 而不是像通常那样取成 z , 这是为了避免与复数的记号 z 相重. 在空间 $Oxyu$ 中, 考虑一个以原点 O 为中心、以 1 为半径的球面 S :

$$S := \{(x, y, u) : x^2 + y^2 + u^2 = 1\}.$$

我们把点 $(0, 0, 1)$ 称为**北极或球极**, 并记为 N .

我们把 $Oxyu$ 空间中的 Oxy 坐标平面看作复平面 \mathbb{C} . 在这样的看法下, 对于复平面 \mathbb{C} 中任意取定的一点 $z = x + iy$, 我们可以把它与北极 N 用直线相连, 而该直线与球面 S 有唯一的交点. 我

们将该交点记为 Z , 并假定它的坐标设为 (x', y', u') (见图 1.1.9). 经过一些初等计算, 可以得到

$$x' = \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \quad y' = \frac{2y}{1+x^2+y^2},$$

而

$$u' = \pm \sqrt{(1+x^2+y^2)^2 - 4x^2 - 4y^2} / (1+x^2+y^2),$$

其中的正负号取法要根据点 $z = x + iy$ 是否落在单位圆内而定. 从直观上很容易看出, 若 $|z| < 1$, 则点 Z 落在下半球面上, 这时上式取负号; 若 $|z| > 1$, 则点 Z 落在上半球面上, 这时取正号. 当 $|z| = 1$ 时, 则该连线与 S 的交点 Z 就是复平面上的点 z , 而这时 $u' = 0$.

反过来, 对于球面上任意一点 $Z \neq N$, 从北极 N 到点 Z 所连接的直线, 与复平面 \mathbb{C} 有唯一的一个交点 z .

总之, 按照上面的办法, 我们在球面上的点 ($N = (0, 0, 1)$ 除外) 到复平面 \mathbb{C} 上的点之间建立了一个一一对应. 这种一一对应通常被称为球极投影 (见图 1.1.9).

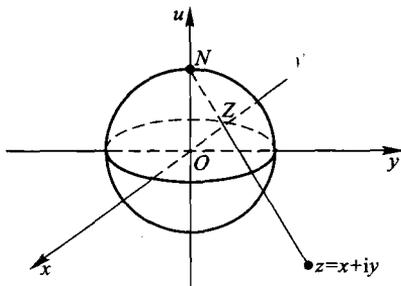


图 1.1.9

现在, 我们考虑一个复数序列 $\{z_n\}$, 并假定

$$|z_n| \rightarrow +\infty, \quad \text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时.}$$

设点 z_n 对应的球面点为 Z_n . 那么, 很容易看出, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $Z_n \rightarrow N$.

现在, 我们把复平面的无穷远设想为一个点, 称之为无穷远点, 并记作 ∞ . 当我们把它也添加到复平面 \mathbb{C} 上时, 前面所讲的球极投影便可以扩充到整个球面上, 从而使球面 S 到 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 的对应变成一个一一对应. 这时北极 N 对应到无穷远点 ∞ .

添加了无穷远点的复平面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 称为扩充复平面, 记作 $\bar{\mathbb{C}}$. 正像前面所指出的, 扩充复平面 $\bar{\mathbb{C}}$ 也称为黎曼球面.

无穷远点的引入, 相当于我们在复数域中添加一个新的数 ∞ . 对于这个新的数, 我们作如下约定:

$$z = x + iy \rightarrow \infty \text{ 当且仅当 } x^2 + y^2 \rightarrow \infty;$$

$$\infty \pm a = a \pm \infty = \infty;$$

$$\frac{a}{\infty} = 0; \quad \frac{\infty}{a} = \infty \quad (a \neq 0),$$

其中 a 是任意一个有穷复数. 此外, 我们约定 ∞ 的模是无穷, 而 ∞ 的辐角无意义.

此外, 我们认为, 一般说来, 进行下列运算是没有意义的:

$$\infty \pm \infty; \quad 0 \cdot \infty; \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

习题 1.1

1. 求下列复数 z 的模 $|z|$ 与辐角的主值 $\arg z$:

(1) $z = \sqrt{3} + i$;

(2) $-1 + i\sqrt{3}$;

(3) $z = \frac{1+i}{1-i}$;

(4) $z = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2$

2. 求下列方程的根:

(1) $z^4 = -1$;

(2) $z^2 = \sqrt{1+i}$.

3. 求二次方程 $z^2 + 2iz - 1 + i = 0$ 的两个根.

4. 设 $z = x + iy$, 其中 x 与 y 分别是 z 的实部与虚部. 证明

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x| + |y|) \leq |z| \leq (|x| + |y|).$$

5. 画出点 $3 + 4i$ 与 $-4 + 3i$ 的位置, 用乘法的几何意义说明 $\arg(-4 + 3i) = \arg(3 + 4i) + \pi/2$.

6. 设 z_1 与 z_2 是任意两个复数. 证明等式

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2),$$

并说明其几何意义.

7. 画出下列方程的图形:

(1) $\operatorname{Re}(3z + 2) = 0$;

(2) $|z - 1| = |z + 1|$;

(3) $|z - 1| + |z + 1| = 5$;

(4) $\arg \frac{z-i}{z+i} = \pi/4$.

8. 设 $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$, 证明不等式:

$$\left| \frac{\alpha - \beta}{1 - \bar{\alpha}\beta} \right| < 1.$$

提示 改为证明不等式 $|\alpha - \beta|^2 < |1 - \bar{\alpha}\beta|^2$, 其中注意使用不等式 $(1 - |\alpha|^2)(1 - |\beta|^2) > 0$.

9. 设 $|\alpha| < 1$, $|\beta| = 1$, 证明不等式:

$$\left| \frac{\alpha - \beta}{1 - \bar{\alpha}\beta} \right| = 1.$$

§2. 复平面上的拓扑与复数域的完备性

2.1 复平面上的开集与闭集

在多元微积分学中, 我们已经讨论过平面上的拓扑结构. 所谓拓扑结构是指关于集合的一种数学结构, 它使我们得以对该集合

上函数或映射讨论其极限与连续性. 拓扑结构通常是通过定义邻域实现的.

复平面上的拓扑与实平面上的拓扑是完全一致的. 因此, 这一节的内容本质上是过去已经知道的事实, 只不过是用复数的形式表述罢了. 已经熟悉这些内容的读者可以跳过这一节, 直接阅读下一节.

设 z_0 是复平面上的一点, $r > 0$ 是任意给定的实数. 我们称集合

$$U_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

为点 z_0 的一个邻域, 或者更确切地说, 点 z_0 的 r -邻域.

我们知道, $|z - z_0|$ 表示点 z 到点 z_0 的距离. 这样, 所谓点 z_0 的一个 r 邻域, 实际上就是复平面上以 z_0 为中心、以 r 为半径的一个圆盘 (不包括其边界).

有了邻域的概念之后, 就可以谈论开集与闭集了.

定义 设 E 是复平面 \mathbb{C} 上的一个集合, 而 z_0 是 \mathbb{C} 中的任意给定一点. 如果存在一个实数 $r > 0$, 使得 $U_r(z_0) \subset E$, 则我们称 z_0 是集合 E 的一个内点. 如果存在一个实数 $r > 0$, 使得 $U_r(z_0) \cap E = \emptyset$, 则我们称 z_0 为 E 的外点. 若 z_0 既不是 E 的内点, 又不是 E 的外点, 则我们称 z_0 为 E 的边界点.

E 的全体边界点的集合记作 ∂E .

显然, 若 z_0 是 E 的一个内点, 则必有 $z_0 \in E$. 若 z_0 是 E 的外点, 则 $z_0 \notin E$. 若 z_0 为 E 的一个边界点, 则有两种可能: $z_0 \in E$ 或者 $z_0 \notin E$.

根据定义, z_0 是集合 E 的一个边界点的充要条件是, 它的任意一个邻域内既有 E 中的点, 又有非 E 中的点.

定义 如果集合 $E \subset \mathbb{C}$ 中的每一点都是 E 的内点, 则称集合 E 为开集.

例如, 单位圆 $\Delta := \{z : |z| < 1\}$ 是开集, 而带边的单位圆 $\bar{\Delta} = \{z : |z| \leq 1\}$ 则不是开集. 事实上, 对 $\bar{\Delta}$ 而言, 单位圆周 $\{z : |z| = 1\}$ 上的点不是它内点.

另外, 下列集合都是开集:

$$\mathbb{C} \setminus \{0\}; \{z : r < |z - z_0| < R\} (r > 0); \{z : 1 < \operatorname{Re} z < 2\}.$$

请读者画出这些集合的图形.

思考题 试举出一个非空集合, 使得复平面任意一点既不是它的内点, 也不是它的外点.

定义 设 E 是复平面中一个集合, 而 z_0 是任意给定的一点. 如果对于任意的实数 $r > 0$, 使得 z_0 的空心邻域 $U_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ 内总有 E 中的点, 则我们称 z_0 为 E 的一个聚点. E 全体聚点集合记为 E' , 通常称其为 E 的导集.

显然, 一个集合的内点都是其聚点, 而其外点一定不是聚点. 它的边界点是否是聚点, 要视情况而定.

定义 集合 $E \subset \mathbb{C}$ 称为闭集, 如果其聚点集合全部包含于该集合之中, 即 $E' \subset E$.

显然, 集合 $\bar{\Delta} = \{z : |z| \leq 1\}$ 是一个闭集.

容易看出, 整个复平面 \mathbb{C} 既是开集, 又是闭集. 后者是因为它的导集是全集, 即 \mathbb{C} 本身.

今后, 我们约定空集 \emptyset 既是开集, 又是闭集.

在这种约定下, 在复平面上既是开集又是闭集的集合只有两个: 全集 \mathbb{C} 与空集 \emptyset .

下面, 我们列出两条有关开集与闭集的基本定理:

定理 2.1 集合 $E \subset \mathbb{C}$ 是开集的充要条件是其补集 $\mathbb{C} \setminus E$ 是闭集.

定理 2.2 任意多个开集的并集是开集, 而有限个开集的交集是开集.

这些定理的证明是容易的, 读者可作为练习自行证明.

2.2 区域

在解析函数论中, 最常用的集合便是区域. 所谓区域, 简单地说, 就是连通的开集.

现在, 我们先来定义什么是弧和集合的弧连通性.

定义 设 $x = x(t)$ 和 $y = y(t)$ 是闭区间 $[0, 1]$ 上的两个实值连续函数. 这时我们把它们所形成从区间 $[0, 1]$ 到复平面 \mathbb{C} 的映射

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \rightarrow z(t) = x(t) + iy(t)$$

连同它的像一起, 称为从 $z_0 = x(0) + iy(0)$ 到 $z_1 = x(1) + iy(1)$ 的曲线弧, 简称为弧. 这里的点 z_0 与 z_1 称为弧的端点 (见图 1.2.1).

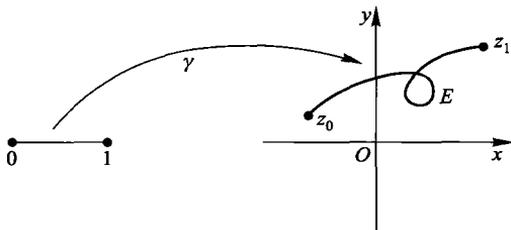


图 1.2.1

设 E 是复平面上的一个集合. 若 E 中任意两点 z_0 与 z_1 , 都存在一条落在 E 中的弧以 z_0 与 z_1 为其端点, 则称 E 为弧连通的.

定义 设 D 为复平面中一个非空的开集. 若 D 是弧连通的, 则称 D 为一个区域.

注 除去弧连通之外, 尚有更为广泛的拓扑连通的观念. 但在解析函数论中, 弧连通已经足够了.

集合 $\mathbb{C}, \Delta := \{z : |z| < 1\}, \{z : 1 < |z - 1| < 2\}$ 以及图 1.2.2 所示的集合 D 都是区域的例子.

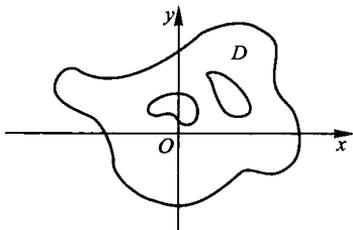


图 1.2.2

在今后的许多讨论中, 我们还需要闭区域的概念.

定义 设 $D \subset \mathbb{C}$ 是一个区域, 则 $D \cup \partial D$ 称为闭区域, 其中 ∂D 是 D 的全体边界点集合, 称作 D 的边界. 区域 D 的闭区域记为 \bar{D} .

复平面上的区域 \mathbb{C} , 上半平面 $\{z : \text{Im } z > 0\}$, 圆盘 $\Delta_R := \{z : |z| < R\}$, 环域 $\{z : r < |z - a| < R\}$ ($r > 0$) 所对应的闭区域依次是

$$\mathbb{C}, \{z : \text{Im } z \geq 0\}, \{z : |z| \leq R\}, \{z : r \leq |z - a| \leq R\}.$$

在上述区域的例子中, 环与其他集合的拓扑特征有所不同: 从直观上看就是, 它的内部有一个“洞”, 而其他几种都没有这样的“洞”. 为了严格刻画区域的这种差异, 我们引入单连通与多连通的概念, 而这需要若尔当 (Jordan) 曲线的概念与若尔当定理.

定义 设 $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$ 是一条曲线弧. 若其两个端点相重合, 即 $z(0) = z(1)$, 则称 γ 为闭曲线. 如果这条闭曲线除去两个端点之外, 并不自交, 也就是说, 对于 $(0, 1]$ 中任意不同的两点 t_1 和 t_2 , 必有 $z(t_1) \neq z(t_2)$, 则称它为简单闭曲线, 或若尔当闭曲线.

定理 2.3 (若尔当定理) 设 γ 是复平面上的一条简单闭曲线. 则 γ 的补集 $\mathbb{C} \setminus \gamma$ 是两个区域之并, 其中一个是有界区域, 而另一个是无界区域, 它们以 γ 为其共同边界.

从直观上看, 若尔当定理的结论显然成立. 但它的证明并不十分简单. 现在我们略去它的证明.

对于给定的一条简单闭曲线 γ , 我们将 $\mathbb{C} \setminus \gamma$ 中的有界区域, 称为 γ 的内部.

定义 设 D 是 \mathbb{C} 中的一个区域. 若 D 中任意一条简单闭曲线的内部, 总全部落在 D 之中, 则称该区域为**单连通区域**.

显然, 按照定义的条件, 单连通区域排除了内部有“洞”之可能.

整个复平面, 一个圆的内部, 一条带状的区域, 或者一条若尔当闭曲线的内部, 都是单连通区域.

非单连通的区域称为**多连通区域**. 例如, 一个环形的区域, 以及图 1.2.2 所示的区域都是多连通区域.

2.3 复数序列的极限与复数域的完备性

这一段内容与实数情形完全类似. 故我们只列出基本定义与基本结论, 而无须给出定理的证明, 也无须对这些概念与定理的意义做进一步地解释或说明.

定义 设 $\{z_n\}$ 是复平面 \mathbb{C} 中的一个点序列. 我们称这个序列以复数 a 为极限, 如果对于任意给定的实数 $\varepsilon > 0$, 存在一个自然数 N , 使得

$$|z_n - a| < \varepsilon, \quad \text{只要 } n > N.$$

如果序列 $\{z_n\}$ 以某个复数 a 为极限, 则称 $\{z_n\}$ 收敛, 并记为

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n.$$

对于复数序列的极限, 四则运算的定理同样成立. 这里我们就不再一一列出.

根据极限的定义及不等式 $||z_n| - |a|| \leq |z_n - a|$, 立刻推出: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |a|.$$

另外, 由于 $|\operatorname{Re}(z_n - a)| \leq |z_n - a|$ 和 $|\operatorname{Im}(z_n - a)| \leq |z_n - a|$, 又立刻推出: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} a, \quad \text{且} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} a.$$

反过来, 假如 $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n = \alpha$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z_n = \beta$, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha + i\beta.$$

这是因为

$$|z_n - (\alpha + i\beta)| \leq |\operatorname{Re}(z_n - \alpha)| + |\operatorname{Im}(z_n - \beta)|.$$

下面的三条定理与实数情形完全类似, 故我们只列出而不加证明.

定理 2.4(柯西收敛原理) 序列 $\{z_n\}$ 收敛的充要条件是, 对于任意给定的实数 $\varepsilon > 0$, 存在一个自然数 N 使得:

$$|z_m - z_n| < \varepsilon, \quad \text{只要 } m > N \text{ 且 } n > N.$$

满足上述条件的复数序列称为柯西序列.

柯西收敛原理告诉我们, 每一个柯西序列都收敛. 这就是所谓复数域的完备性.

定理 2.5(博尔扎诺 (Bolzano)–魏尔斯特拉斯定理) 设 $\{z_n\}$ 是一个有界序列, 也即存在一个实数 $M > 0$ 使得 $|z_n| \leq M$ ($n = 1, 2, \dots$), 则 $\{z_n\}$ 有一个子序列 $\{z_{n_k}\}$ 收敛.

由这个定理立刻推出:

定理 2.6(凝聚点原理) 复平面上一个有界的无穷集合 E 必有凝聚点, 也即 $E' \neq \emptyset$.

习题 1.2

1. 设 $|z| < 1$, 证明序列 $\{z^n\}$ 收敛.
2. 在下列集合中, 哪些是区域? 哪些不是区域?

(1) $\{z : |z - i| < |5 + i|\}$;

(2) $\{z : 0 < |z + 1 + i| \leq 2\}$;

(3) $\{z : \left| \frac{z-1}{z+1} \right| < 1\}$;

(4) $\{z = x + iy : y \neq \sin \frac{1}{x}\}$;

(5) $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$;

(6) $\mathbb{C} \setminus (1, +\infty)$.

3. 试将实数域中的区间套定理改述为复数域中的矩形套定理, 并利用区间套定理证明矩形套定理.

注 通常用 $[a, b] \times [c, d]$ 表示矩形

$$\{x + iy : a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}.$$

4. 利用矩形套定理证明定理 2.5.

5. 利用实数序列极限的柯西收敛原理证明复数序列的柯西收敛原理.

6. 设 $x = x(t), y = y(t)$ 是区间 $(0, 1)$ 上的两个连续的实函数, 则我们称映射

$$\gamma : (0, 1) \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$$

的像为一条曲线. 试举出一条曲线 $\gamma : t \mapsto z(t)$, 它有下列性质: 当 $t \rightarrow 0$ 时 $z(t)$ 没有极限. 这样的例子的表明: 一条曲线可能无端点可言.

7. 设有集合 $E := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{Q}\}$, 其中 \mathbb{Q} 是全体有理数的集合. 证明该集合没有一个内点, 且其聚点集合 $E' = \mathbb{C}$.

8. 证明: 一个集合的内点所组成的集合是一个开集, 一个集合的外点所组成的集合也是开集.

9. 设 $\{z_n\}$ 是一个复数序列. 若存在一个收敛子序列 $\{z_{n_k}\}$, 则其极限 $\zeta = \lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k}$ 被称作原来序列的一个极限点. 试举出一个序列, 其极限点集合是整个复平面.

第二章 复变量函数

§1. 复变量函数的概念

1.1 复变量函数的定义

自变量与因变量都是复数的函数,称为复变量函数,其确切定义如下:

定义 设 E 与 F 是复平面中的两个集合. 如果有一种对应规则 f , 使得 E 中的每个点 z , 都有一个唯一确定的点 $w \in F$ 与之对应, 则我们称 f 是一个**复变量函数**, 或简称为**复变函数**, 记作 $f: E \rightarrow F$, 或 $w = f(z)(z \in E)$.

这里的集合 E 称为 f 的**定义域**. 与 z 相对应的 w 称为 f 在 z 点的函数值, 并记为 $f(z)$. 函数 f 在 F 中所能取到的一切值 w 所组成的集合称为 f 的**值域**. 通常记为 $f(E)$.

从定义可以看出, 复变量函数本质上就是复平面上两个集合间的一个映射.

例 1.1 线性函数 $w = z + C$, 其中 C 为常数. 根据复数加法的几何意义, 这个函数把复平面上每一点 z 沿着 C 所代表的方向, 平移了 $|C|$ 的距离. 因此, 它是一个平移变换.

例 1.2 线性函数 $w = az$, 其中 $a \neq 0$ 为常数. 当 $a > 0$ 是一个实数时, 它是一个相似变换. 当 a 的模 $|a| = 1$ 而虚部不为零时, 它是一个旋转变换. 这是因为

$$|w| = |az| = |z|, \quad \text{而} \quad \text{Arg } w = \text{Arg } z + \text{Arg } a.$$

当 a 不是实数而且模不等于 1 时, 它是一个旋转变换复合以相似变换. 这是因为

$$w = az = |a| \left(\frac{a}{|a|} z \right).$$

例 1.3 设 n 为一个非负整数. 一个 n 次多项式是指下列的一个表达式:

$$w = P(z) := a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \quad (a_0 \neq 0),$$

其中 a_0, \dots, a_n 是常数, 称为多项式的系数. 这里的数 n 称为多项式的次数.

显然, 多项式的定义域是整个复平面.

代数基本定理断言: 任意一个次数大于或等于 1 的多项式 $P(z)$ 至少有一个根, 即存在一个复数 α 使得 $P(\alpha) = 0$. 后面我们将给出这个定理的严格证明.

如果现在我们承认代数基本定理, 那么根据这个定理可以推出, 多项式的值域是整个复平面. 作为思考题, 这个结论留给读者自己证明.

例 1.4 分式线性变换在复变量函数论中扮演着一个重要角色, 其一般形式为

$$w = L(z) := \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0).$$

分式线性变换有许多优美的几何性质, 我们将来在后面的章节中详细讨论. 现在我们只讨论它的定义域与值域.

当 $c = 0$ 时, 根据假定 $ad - bc \neq 0$, 我们有 $ad \neq 0$, 即 a 与 d 同时不为零. 这时分式线性变换就退化成一个线性函数:

$$w = L(z) = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d} \quad \left(\frac{a}{d} \neq 0 \right).$$

因此, 这时其定义域与值域都是 \mathbb{C} .

当 $c \neq 0$ 时, 其定义域是 $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$, 而其值域是 $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$.

它的定义域是显然的, 只需讨论其值域. 事实上, 上述分式线性变换不能取到 a/c . 因为如果有一个点 z 使得 $f(z) = a/c$, 即有

$$\frac{a}{c} = \frac{az + b}{cz + d}.$$

那么, $a(cz + d) = c(az + b)$. 这就导致 $ad - bc = 0$, 与假定矛盾. 这便证实了 f 的值域不含点 a/c . 另外, 对于 $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ 中的任意一点 w , 方程 $f(z) = w$ 一定有解. 事实上, 方程 $L(z) = w$ 等价于 $w(cz + d) = az + b$, 也即 $(cw - a)z = b - dw$. 注意到 $w \neq a/c$, 那么方程 $L(z) = w$ 有解:

$$z = \frac{b - dw}{cw - a}.$$

现在, 我们指出一个基本事实: 一个复变量函数可以用两个二元实函数表出.

设 $w = f(z)$ 是定义在集合 E 上的一个复变量函数. 又设 $w = f(z)$ 实部为 u , 虚部为 v . 如果我们将点 $z = x + iy$ 与点 (x, y) 看作是相等同的, 那么 u 与 v 都是 (x, y) 的函数: 即 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. 因此, f 可以写成

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy \in E.$$

反过来, 如果我们给定两个二元实函数 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$, 那么这两个实函数依据上式确定了一个复变量函数.

比如, 取 $u = e^x \cos y$ 与 $v = e^x \sin y$, 我们便得到一个复变函数:

$$w = e^x(\cos y + i \sin y).$$

今后我们把这个函数记作 e^z .

容易看出, 当 $y = 0$ 时, 上述函数就是实函数 e^x . 另外, 容易直接验证 $e^0 = 1, e^1 = e$, 并且保持了指数函数的基本性质:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}.$$

(请读者自己验证.) 从这些性质看, 它是实值的指数函数 e^x 到复数域的一种自然推广.

今后, 我们便把 $w = e^x(\cos y + i \sin y)$ 称作以 e 为底的 z 的指数函数.

指数函数的定义域显然是 \mathbb{C} . 其值域是 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, 也即它取遍一切非零复数. 事实上, 对于任意一点 $z = x + iy$, $|e^z| = e^x \neq 0$. 因此, $e^z \neq 0$. 另外一方面, 对于任意的 $w \neq 0$, 我们令 $x = \ln|w|$, 而 $y = \arg w$, 那么

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = |w|[\cos(\arg w) + i \sin(\arg w)] = w.$$

思考题 1 对于给定的 $w \neq 0$, 方程式 $e^z = w$ 有多少解?

思考题 2 任意的一条水平线 $\operatorname{Im}(z) = y_0$ (y_0 为常数) 在指数函数所形成的映射 $z \mapsto w = e^z$ 下的像是什么? 纵线 $\operatorname{Re}(z) = x_0$ (x_0 为常数) 在该映射下的像又是什么? 此外, 当 $z \rightarrow \infty$ 时, e^z 是否有极限? 是否趋于 ∞ ? 为什么?

1.2 复合函数与反演变换

复变量函数的复合函数在本质上与实函数的复合函数没有什么差别.

定义 设函数 f 在集合 E 中有定义, 其值域为 $f(E)$. 又设函数 g 在 F 中有定义, 并假定 $f(E) \subset F$. 这时, 对于任意一个 $z \in E$, f 将 z 对应于点 $w = f(z)$. 由于 $w \in f(E) \subset F$, 函数 g 又将点 $w = f(z)$ 对应于点 $\zeta = g(w)$. 这就形成一个由点 z 到 ζ 的映射. 这个映射称为 f 和 g 的复合函数, 记为 $g(f(z))$, 或 $g \circ f$.

有了复合函数的概念就可以把一些初等表达式表成基本初等函数的复合, 而基本的初等函数都有明显的几何意义. 因此, 这对我们理解某些初等函数的几何意义有帮助.

例 1.5 任何一个线性函数 $w = az + b$ (其中 a, b 为常数, $a \neq 0$) 可以表示为平移、旋转和相似变换之复合.

事实上, 我们有

$$az + b = a \left(z + \frac{b}{a} \right) = |a| \frac{a}{|a|} \left(z + \frac{b}{a} \right).$$

令

$$\zeta = f(z) := z + \frac{b}{a}, \quad \eta = g(\zeta) := \frac{a}{|a|} \zeta, \quad w = h(\eta) := |a| \eta,$$

这样, 函数 $w = az + b$ 可写成复合函数 $w = h(g(f(z)))$, 而其中 f, g, h 分别是平移、旋转和相似变换.

现在, 我们引入一种初等几何变换——反演变换, 它可以帮助我们理解分式线性变换.

在初等几何中, 我们早已熟悉了关于直线对称的概念. 设 L 为平面上的一条直线. 对于不在 L 上的任意一点 P , 我们称点 Q 是点 P 的关于 L 的对称点, 如果 L 恰好是线段 PQ 的垂直平分线. 若 P 落在 L 上, 则它的对称点就定义为它本身.

现在, 我们引入关于圆周对称的概念. 它是关于直线对称概念的一种推广.

定义 设 Γ 是一个以 A 为中心、以 R 为半径的圆周. 对于给定的一点 $P \neq A$, 若一点 Q 满足下列条件: 三点 A, P, Q 落在同一条直线上, 且作为向量 \overrightarrow{AP} 与 \overrightarrow{AQ} 有相同的方向, 并有 $|\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AQ}| = R^2$ (见图 2.1.1), 则我们称点 Q 是点 P 的关于圆周 Γ 的对称点.

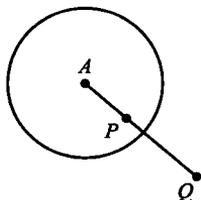


图 2.1.1

显然,若 Q 是 P 关于 Γ 的对称点,那么 P 必然也是 Q 关于 Γ 的对称点.

另外,当 P 落在圆周 Γ 上时,那么点 P 关于 Γ 的对称点 Q 就是点 P 本身.

定义 把点对应到关于圆周 Γ (或直线 L) 的对称点的映射,称为关于 Γ (或 L) 的**反演变换**.

例如,映射 $z \mapsto \bar{z}$ 是关于实轴的反演,而映射 $z \mapsto 1/\bar{z}$ 是关于单位圆周的反演.

显然,关于直线的反演一定把直线一侧的点变到另一侧,并保持直线上的点不动.而关于圆周 Γ 的反演,一定把 Γ 内的点变到 Γ 外,把 Γ 外的点变到 Γ 内,并且使得 Γ 上的点保持不动.

下面我们给出关于圆周反演的复数表达式,而关于直线反演的复数表达式则留作本节的习题.然而,这些公式无需记忆,它们不是基本公式.

例 1.6 设 Γ 是给定的一个圆周 $\{z : |z - a| = R\} (R > 0)$. 又设函数 $w = f(z) (z \neq a)$ 是关于 Γ 的反演变换,即对每一点 $z \neq a$, 点 $w = f(z)$ 是点 z 关于 Γ 的对称点. 试求出 $w = f(z)$ 表达式.

解 根据关于圆周对称的几何定义, w 与 z 关于 Γ 对称,当且仅当 $|w - a||z - a| = R^2$ 且存在一个实数 $\lambda > 0$ 使得 $w - a = \lambda(z - a)$. 代入前一个条件,可知 $\lambda = R^2/|z - a|^2$. 这样, w

与 z 关于 Γ 对称, 当且仅当

$$w = a + \frac{R^2}{|z - a|^2}(z - a) = a + \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}}.$$

于是, $f(z) = a + R^2/(\bar{z} - \bar{a})$.

例 1.7 倒数变换

$$z \mapsto w = \frac{1}{z}$$

可以表示成关于单位圆周的反演变换与关于实轴的反演变换的复合.

事实上, 倒数变换可以写成

$$w = \frac{1}{z} = \overline{\left(\frac{1}{\bar{z} - 0}\right)}.$$

显然, 变换 $z \mapsto \zeta = 1/(\bar{z} - \bar{0})$ 是关于单位圆周的反演, 而共轭变换 $\zeta \mapsto \bar{\zeta}$ 是关于实轴的反演变换.

命题 1.1 任何一个分式线性变换总可以表成平移、旋转、相似和倒数变换之复合.

事实上, 一个分式线性变换

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0),$$

当 $c = 0$ 时, 根据例 1.5, 上述结论显然成立 (这时无需倒数变换); 而当 $c \neq 0$ 时, 我们有

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cz + d)}.$$

故定理结论依旧成立.

根据例题 1.7, 我们立刻得到

推论 任何一个分式线性变换总可以表成平移、旋转、相似和两个反演变换之复合.

1.3 反函数

我们先来定义什么是单射与满射. 这些概念与实函数情形没有本质差异.

定义 设函数 $w = f(z)$ 在集合 E 中有定义, 且对 E 中任意两点 z_1, z_2 有下列性质:

$$f(z_1) \neq f(z_2), \quad \text{只要 } z_1 \neq z_2,$$

则称 $w = f(z)$ 在 E 上是单射 (injective), 或一一映射.

定义 设 $f: E \rightarrow F$ 是定义在 E 上的复变量函数. 如果对于任意一个 $w \in F$, 都有一个 $z \in E$, 使得 $w = f(z)$, 则称 $f: E \rightarrow F$ 是一个满射 (surjective).

定义 假如 $f: E \rightarrow F$ 既是单射, 又是满射. 在这种条件下, 对任意 $w \in F$, 总存在一个唯一的 z , 使得 $w = f(z)$. 这样就形成了一个从 w 到 z 的映射. 这个映射称为 f 的反函数.

例 1.8 一个分式线性变换

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

在其定义域内是单射.

事实上, 当 $c = 0$ 时, $d \neq 0$ 且 $a \neq 0$ (否则, 与 $ad - bc \neq 0$ 矛盾). 这时 $f(z) = az/d + b/d$. 由于 $a \neq 0$, 显然 f 是单射.

下面我们讨论 $c \neq 0$ 的情况. 我们已经知道, 在这种条件下, f 的定义域为 $E = \mathbb{C} \setminus \{d/c\}$.

现在证明 f 在 E 中是单射. 设 z_1 与 z_2 是 $\mathbb{C} \setminus \{d/c\}$ 中的两个点, 它们使得下式成立:

$$\frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d}.$$

那么, 我们有

$$(az_1 + b)(cz_2 + d) = (az_2 + b)(cz_1 + d).$$

将此式两端的乘式展开, 化简后得

$$(ad - bc)(z_1 - z_2) = 0.$$

注意到 $ad - bc \neq 0$, 立即推出 $z_1 = z_2$. 这就证明了 f 的单射性.

分式线性变换的单射性也可以由前面的命题 1.1 推出: 因为平移、旋转、相似以及倒数变换都是单射, 而单射之复合依旧是单射.

思考题 在通常的情况下, 函数的定义域是复平面的一个集合. 但在某些情况下, 也要考虑把扩充复平面上的集合作为某个函数的定义域. 分式线性变换就是如此. 如果我们把上述分式线性变换在 ∞ 的值定义为 a/c , 那么它在整个扩充复平面 $\bar{\mathbb{C}}$ 上处处有定义. 试证明分式线性变换

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

是 $\bar{\mathbb{C}}$ 到 $\bar{\mathbb{C}}$ 的一个一一满射.

1.4 有界函数与周期函数

定义 设 $f(z)$ 在集合 E 中有定义. 如果存在一个正的实数 M , 使得

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in E,$$

则我们称之为有界函数.

显然, $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ 是有界函数, 当且仅当 f 的值域 $f(E)$ 是有界集合.

定义 设 $f(z)$ 在 \mathbb{C} 上有定义. 若存在一个复数 ω 使得下式成立:

$$f(z + \omega) = f(z), \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

则称 $f(z)$ 是一个周期函数, 并称 ω 为它的一个周期.

指数函数 $w = e^z$ 是一个周期函数, 其周期为 $2\pi i$. 但是, 它不是有界函数, 而是一个无界函数.

习题 2.1

1. 证明: 函数 $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ 是以 $2\pi i$ 为周期的函数.
2. 证明: 指数函数 $w = e^z$ 有下列性质:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

3. 证明: 指数函数 $w = e^z$, 当自变量 z 限制在带形区域

$$S := \{E = x + iy : -\infty < x < +\infty; 0 < y < 2\pi\}$$

中时是一个单射. 说明该区域的像是什么.

4. 证明: 指数函数 $w = e^z$ 把每一条水平线 $\{z = x + iy : y = c\}$ (c 为常数) 变成 w 平面上从原点出发的一条射线, 它与轴正向的夹角为 c ; 另外, 它把每一条竖线 $\{z = x + iy : x = c\}$ 变成一条以原点为中心、以 e^c 为半径的圆周, 而且该圆周上的每一点都被取到无限次.

5. 证明: 指数函数 $w = e^z$ 是一个无界函数.
6. 设 L 是一条直线, 其实方程为

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \quad (a^2 + b^2 \neq 0),$$

其中 a, b, x_0, y_0 为已知常数. 令

$$z = x + iy, \quad \alpha = a + bi, \quad z_0 = x_0 + iy_0,$$

试证明该直线的方程的复形式为

$$\bar{\alpha}(z - z_0) + \alpha(\bar{z} - \bar{z}_0) = 0.$$

注 这里的复数 α 实际上代表着直线的法方向.

7*. 设有一条过 z_0 点的直线 L , 其方程为

$$L: \bar{\alpha}(z - z_0) + \alpha(\bar{z} - \bar{z}_0) = 0 \quad (\alpha \neq 0).$$

试求出关于直线 L 的反演变换的复数表达式.

提示 设 z 为复平面上的任意一点, 而 w 是点 z 关于 L 的对称点. 这时, 从点 z 到点 w 的连线中点 $\frac{1}{2}(w + z)$ 应该落在给定直线上, 即满足方程:

$$\bar{\alpha} \left[\frac{1}{2}(w + z) - z_0 \right] + \alpha \left[\frac{1}{2}(\bar{w} + \bar{z}) - \bar{z}_0 \right] = 0.$$

此外, 从点 z 到点 w 的所形成的向量的复数表示 $(w - z)$ 一定是该直线的法向量, 而该直线的法向量是 α (见第 6 题). 所以, 存在一个实数 λ 使得 $w - z = \lambda\alpha$. 代入上述方程即得

$$\lambda = \frac{-1}{|\alpha|^2} \left(\bar{\alpha}(z - z_0) + \alpha \overline{(z - z_0)} \right).$$

再由 $w - z = \lambda\alpha$ 便得出

$$w = z_0 - \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\bar{z} - \bar{z}_0).$$

§2. 复变量函数的极限与连续性

2.1 极限与连续性的概念

对于复变函数, 同样可以谈论它们的极限与连续性, 在形式上与实函数情形完全类似.

定义 假定 $z_0 \in \mathbb{C}$ 是给定的一点, 而 $w = f(z)$ 在 \mathbb{C} 的一个空心邻域 $\{z: 0 < |z - z_0| < r\}$ 内有定义. 如果存在一个常数 l , 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在一个实数 $\delta > 0$ ($\delta < r$) 使得

$$|f(z) - l| < \varepsilon, \quad \text{只要 } 0 < |z - z_0| < \delta,$$

则称当 z 趋向于点 z_0 时 $f(z)$ 以 l 为其极限, 记作

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l.$$

对于复变量函数的极限, 极限的四则运算定理同样成立. 由于完全类似于实函数的情形, 我们不再在此处一一列出这些定理.

定义 设 $w = f(z)$ 在一个区域 D 中有定义. 我们称它在一点 $z_0 \in D$ 处连续, 如果当 z 趋向 z_0 时, $f(z)$ 以 $f(z_0)$ 为其极限.

假如 f 在 D 中每一点都连续, 则称它在区域 D 中连续.

函数连续性的定义可以扩充到一般集合上.

定义 设 E 是 \mathbb{C} 的任意一个集合, 且 $f(z)$ 在 E 中有定义. 假定 z_0 是 E 的一个点. 我们称 $f(z)$ 在 z_0 连续, 如果对任意给定的实数 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $\delta > 0$ 使得

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon, \quad \text{只要 } |z - z_0| < \delta \text{ 且 } z \in E.$$

假如 $f(z)$ 在 E 中的每一点都连续, 则我们称 $f(z)$ 在 E 中连续.

比较两个定义异同, 就会发现: 后者在要求中, 增加了一条 $z \in E$. 有了这一条, 才能保证 f 在 z 处有定义.

今后, 我们经常要谈论一个函数在一个闭区域 \bar{D} 连续. 这时, 我们就需要后面这个关于连续性的定义. 当 z_0 是 D 的一个边界点时, $f(z)$ 在 z_0 连续意味着对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在着一个 $\delta > 0$, 使得

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon, \quad \text{只要 } |z - z_0| < \delta, \text{ 且 } z \in \bar{D}.$$

设 $f(x+iy)$ 的实部与虚部分别是 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$. 那么, $f(z)$ 在一点连续的充要条件是 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 同时在相应的点连续.

显然, 前面我们提到的多项式、分式线性变换、指数函数等在其定义域内是连续的.

2.2 连续函数的性质

关于有界闭区域上的复值连续函数, 我们有下列的定理:

定理 2.1 设 $f(z)$ 在有界闭区域 \bar{D} 中连续. 则 $f(z)$ 在 \bar{D} 中有界, 且 $|f(z)|$ 在 \bar{D} 中有最大值与最小值.

证明是容易的, 只要证明 $|f(z)|$ 在 \bar{D} 中连续就足够了. 事实上, 我们由不等式

$$||f(z)| - |f(z_0)|| \leq |f(z) - f(z_0)|$$

和 $f(z)$ 在 \bar{D} 中的连续性立即推出 $|f(z)|$ 在 \bar{D} 中的连续性.

函数 $|f(z)|$ 可以看作一个二元实函数, 根据多元连续实函数的定理就得到所要的结论.

这里我们应当提醒读者, 由于复数没有大小关系, 因此直接谈论 $f(z)$ 的最大值或最小值是没有意义的.

基于同样的理由, 谈论两个复数之间的中间值也是没有意义的. 因此, 对于复变量函数而言, 没有类似于一元实函数那样的所谓介值定理.

定义 设 E 是一个集合, 而 $f(z)$ 在 E 中有定义. 如果对任意给定的实数 $\varepsilon > 0$, 存在一个只依赖于 ε 的 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon, \quad \text{只要 } |z_1 - z_2| < \delta \text{ 且 } z_1, z_2 \in E,$$

则称 $f(z)$ 在 E 中一致连续.

显然, 函数 f 在 E 上的一致连续性蕴含着它在 E 上的连续性.

定理 2.2 设 $f(z)$ 在有界闭区域 \bar{D} 中连续, 则它在 \bar{D} 中一致连续.

证 我们将函数表成下列形式:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (z = x + iy),$$

其中 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 分别是 $f(x + iy)$ 的实部与虚部. 由 $f(z)$ 在 \bar{D} 中连续的假定, 立刻推出 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在 \bar{D} 中连续.

根据关于实值函数已知的结果, 函数 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在 \bar{D} 中是一致连续的.

另一方面, 对于 \bar{D} 中任意两个点 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$, 我们有

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq |u(x_1, y_1) - u(x_2, y_2)| + |v(x_1, y_1) - v(x_2, y_2)|.$$

这样, 由 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在 \bar{D} 中一致连续性就推出 $f(z)$ 在 \bar{D} 的一致连续性. 证毕.

习题 2.2

1. 设 $w = f(z)$ 在有界区域 D 上有定义. 证明: 若 f 是无界函数, 则在 D 中存在一个序列 $\{z_n\}$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)| = +\infty.$$

2. 利用上题结论, 证明: 在有界闭区域上的连续函数是有界函数.

3. 设 $f(z)$ 是有界闭区域 \bar{D} 中的一个连续函数且不等于常数. 证明: 对 $f(\bar{D})$ 中的任意两点 w_1 与 w_2 ($w_1 \neq w_2$), 存在一条弧 $\gamma \subset f(\bar{D})$ 连接它们, 也即 $f(\bar{D})$ 是弧连通的.

4. 设 $f(z)$ 是区域 D 中的一个连续函数, 且 $f(z)$ 只取整数. 证明: $f(z)$ 是一个常数.

5. 设 $w = f(z)$ 在 \mathbb{C} 上连续且

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0.$$

证明: 函数 $|f(z)|$ 在 \mathbb{C} 能达到最大值.

6. 设 $P(z)$ 为一多项式:

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \quad (n \geq 1, a_0 \neq 0).$$

证明:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |P(z)| = +\infty.$$

§3. 复变量函数的形式偏导数

3.1 形式偏导数的定义

在下面的讨论中,我们总是把点 $z = x + iy$ 与点 (x, y) 相等,并视 $f(x + iy)$ 为 (x, y) 的复值函数.

定义 设 $f(z)$ 在一点 $z_0 = x_0 + iy_0$ 的一个邻域内有定义. 如果存在两个常数 a 与 b 使得

$$f(x_0 + \Delta x + i(y_0 + \Delta y)) - f(x_0 + iy_0) = a\Delta x + b\Delta y + o(\rho) (\rho \rightarrow 0),$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 则我们称 $f(x + iy)$ 在点 $x_0 + iy_0$ 关于 (x, y) 可微.

这个定义实际上就是把关于二元实值函数的可微性定义推广到复值函数上.

很明显, $f(x + iy)$ 在某一点关于 (x, y) 可微的充要条件是它的实部 $u = u(x, y)$ 与虚部 $v = v(x, y)$ 在该点是可微的.

当 $f(x + iy)$ 在一点 $x_0 + iy_0$ 关于 (x, y) 可微时, 根据上述定义, 立刻看出 a 与 b 分别是

$$a = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{\Delta x} \quad \left(\text{记作 } \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0 + iy_0} \right)$$

和

$$b = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + i(y_0 + \Delta y)) - f(x_0 + iy_0)}{\Delta y} \quad \left(\text{记作 } \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_0 + iy_0} \right).$$

显然, 我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{和} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}.$$

命题 3.1 设 $f(z)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 的一个邻域内有定义, 且 $f(x + iy)$ 在点 z_0 处关于 (x, y) 可微, 则存在两个复数 A 与 B , 使得

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + B(\bar{z} - \bar{z}_0) + o(|z - z_0|) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (3.1)$$

其中

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{z_0}, \quad B = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{z_0}.$$

证 由 $f(x + iy)$ 在 (x_0, y_0) 的可微性, 我们有

$$f(x + iy) = f(x_0 + iy_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0) + o(\rho) \quad (\rho \rightarrow 0),$$

其中 $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, 并且

$$a = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{z_0}, \quad b = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{z_0}.$$

我们知道,

$$x - x_0 = \frac{1}{2} \left[(z - z_0) + \overline{(z - z_0)} \right],$$

$$y - y_0 = \frac{1}{2i} \left[(z - z_0) - \overline{(z - z_0)} \right].$$

将它们代入上式后经过简单计算就得到

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + B(\bar{z} - \bar{z}_0) + o(|z - z_0|) \quad (z \rightarrow z_0),$$

其中

$$A = \frac{1}{2}(a - ib), \quad B = \frac{1}{2}(a + ib).$$

命题证毕.

现在, 我们引入两个纯形式的记号

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

并称它们为 $f(z)$ 的形式偏导数.

引入 $f(z)$ 的形式偏导数之后, 上述命题中的展开式 (3.1) 就可写成

$$f(z) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z_0} (z - z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0} (\bar{z} - \bar{z}_0) + o(|z - z_0|). \quad (3.2)$$

或者写成

$$\Delta f = df + o(|\Delta z|) \quad (\Delta z \rightarrow 0),$$

其中 $\Delta z = z - z_0, \Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$, 而

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z_0} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0} \overline{\Delta z}. \quad (3.3)$$

这里 (3.2), (3.3) 成立的条件是 $f(x + iy)$ 在 (x_0, y_0) 点可微.

今后, 我们把 (3.3) 的 df 称为 f 在 z_0 点的微分.

与二元实变量函数的公式相比, 单从形式上看, 上述这些公式相当于把 f 看作两个独立变量 z 与 \bar{z} 的函数的局部展开式. 但是, z 与 \bar{z} 并不是彼此独立的. 所以, 读者应当切记, 这种记法纯属形式的记法而已.

形式偏导数在当代复分析中扮演着重要角色, 对于理解经典的解析函数理论也颇有帮助. 因此, 我们要用适当的篇幅来讨论它们.

3.2 形式偏导数的基本性质

现在, 我们现在来介绍形式偏导数的一些基本性质. 在下面的叙述中, 我们总假定所讨论的函数 f 与 g 在其定义域内关于 (x, y) 是可微的.

(I) 我们有

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}; \quad \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}.$$

(II) 形式偏导数作为一种运算是线性运算, 即对于任意的可微函数 f, g 和复数 α, β , 我们有

$$\frac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial z} = \alpha \frac{\partial f}{\partial z} + \beta \frac{\partial g}{\partial z},$$

$$\frac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial \bar{z}} = \alpha \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \beta \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}.$$

(III) 对于两个函数 f, g 乘积的形式偏导数, 我们有类似于实函数的公式:

$$\frac{\partial(fg)}{\partial z}(z) = f(z) \frac{\partial g}{\partial z}(z) + g(z) \frac{\partial f}{\partial z}(z),$$

$$\frac{\partial(fg)}{\partial \bar{z}}(z) = f(z) \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z) + g(z) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z).$$

(IV) (形式偏导数的链规则) 设 $w = f(z)$ 与 $g(w)$ 分别在区域 D 与 G 中具有连续偏导数, 且 $f(D) \subset G$. 则关于复合函数 $\zeta = g(f(z))$ 的形式偏导数, 我们有如下形式的链规则:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \zeta}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}},$$

其中 $w = f(z)$, $z \in D$.

从形式上看, 这条链规则与实函数偏导数的链规则完全相似. 它相当于把 $w = f(z)$ 看作彼此独立的 z 与 \bar{z} 的函数, 并把 $\zeta = g(w)$ 看作彼此独立的 w 与 \bar{w} 的函数.

上述结论的证明是容易的, 留给读者自己验证 (见本节后习题及其提示).

例 3.1 设 $f(x + iy) = x^3 + ix \cos y + y$, 求其两个形式偏导数.

解 我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + i \cos y \quad \text{和} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -ix \sin y + 1.$$

所以, 得到

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \sin y + \frac{i}{2}(\cos y - 1)$$

和

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \sin y + \frac{i}{2}(\cos y + 1).$$

例 3.2 证明

$$\begin{aligned} \frac{\partial z^n}{\partial z} &= nz^{n-1}; & \frac{\partial z^n}{\partial \bar{z}} &= 0; \\ \frac{\partial \bar{z}^m}{\partial z} &= 0; & \frac{\partial \bar{z}^m}{\partial \bar{z}} &= m\bar{z}^{m-1}. \end{aligned}$$

证 事实上, 当 $n = m = 1$ 时, 由形式偏导数定义可以直接验证

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(x + iy)}{\partial x} - i \frac{\partial(x + iy)}{\partial y} \right) = 1, \\ \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(x + iy)}{\partial x} + i \frac{\partial(x + iy)}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

至于一般情况, 则可以利用数学归纳法及性质 (II) 推出.

利用性质 (III) 与例 3.2 的结果, 立刻可以推出

$$\frac{\partial z^n \bar{z}^m}{\partial z} = nz^{n-1} \bar{z}^m; \quad \frac{\partial z^n \bar{z}^m}{\partial \bar{z}} = mz^n \bar{z}^{m-1}.$$

这个例子再次告诉我们一个有趣的事实: 从形式上看, 当我们对 z 与 \bar{z} 的方幂求形式偏导数时, 就相当于把它们看作彼此独立的两个变量.

例 3.3 证明

$$\frac{\partial e^z}{\partial z} = e^z; \quad \frac{\partial e^z}{\partial \bar{z}} = 0.$$

证明是简单验算. 事实上, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial e^z}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial e^z}{\partial x} - i \frac{\partial e^z}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} [e^x (\cos y + i \sin y) - ie^x (-\sin y + i \cos y)] \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) = e^z, \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \frac{\partial e^z}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial e^z}{\partial x} + i \frac{\partial e^z}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} [e^x (\cos y + i \sin y) + ie^x (-\sin y + i \cos y)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

习题 2.3

1. 设 $P(z)$ 为一多项式:

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \quad (a_0 \neq 0).$$

证明:

$$\frac{\partial P(z)}{\partial z} = P'(z), \quad \frac{\partial P(z)}{\partial \bar{z}} = 0.$$

其中

$$P'(z) = n a_0 z^{n-1} + (n-1) a_1 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1}.$$

2. 直接根据定义验证我们有

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}.$$

3. 根据定义直接验证形式偏导数性质 (II).

4. 设

$$f(z) := e^{z+2\bar{z}^2}$$

利用形式偏导数的性质 (IV) 和例 3.3 的结果, 计算

$$\frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{和} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.$$

5. 设 $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域 D 中有定义, 其中 u 与 v 分别是 f 的实部与虚部. 假定 u 与 v 都属于 $C^1(D)$. 证明: 若

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \forall z \in D,$$

则 u 与 v 在 D 中满足下列方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

反过来, 若 u 与 v 满足这个方程组, 则必有 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

6*. 设 $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, 其中 u 与 v 分别是 f 的实部与虚部. 假定 u 与 v 都属于 $C^1(D)$, 这里 D 是一个区域. 证明: 变换

$$f : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)), \quad \forall (x, y) \in D$$

的雅可比行列式

$$J_f(x, y) = u_x(x, y)v_y(x, y) - v_x(x, y)u_y(x, y)$$

可以表示成复形式:

$$J_f = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2.$$

提示 将 f 用 u, v 表出, 并注意

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)}, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right)},$$

然后直接计算.

或者利用

$$u_x + iv_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}},$$

$$u_y + iv_y = \frac{\partial f}{\partial y} = i \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right),$$

从而有

$$\begin{aligned} J_f &= \operatorname{Im} [(u_x - iv_x)(u_y + iv_y)] \\ &= \operatorname{Re} \left[\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right)} \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) \right]. \end{aligned}$$

7. 证明形式偏导数的性质 (III).

提示 将 $f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)$ 写成 $[f(z) - f(z_0)]g(z_0) + f(z)[g(z) - g(z_0)]$, 然后将 $f(z) - f(z_0)$ 与 $g(z) - g(z_0)$ 作一阶展开.

8*. 证明形式偏导数的性质 (IV).

提示 分别写出 Δf 与 Δg 的复形式的展开式 (前者关于 z , 而后者关于 w), 然后将 $\Delta w = \Delta f$ 代入 Δg 展开式之中即得.

§4. 复变量基本初等函数

4.1 复变量的幂级数的基本概念

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots$$

的无穷和称为关于变量 z 的一个**幂级数**, 其中 $a_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 是常数, 称作**幂级数的系数**.

像实的幂级数一样, 我们称

$$S_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k$$

为原幂级数的**部分和**.

若对于给定的点 z , 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 幂级数的部分和序列 $\{S_n(z)\}$ 收敛于 $S(z)$, 则称幂级数在点 z **收敛**, 并认为此极限

$S(z)$ 就是幂级数在点 z 的值, 记作

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

若幂级数在一点 z 不收敛, 则称它在该点发散.

根据柯西收敛原理, 上述幂级数在点 z 收敛的充要条件是, 对于任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在一个自然数 N , 使得

$$\begin{aligned} & |S_{n+p}(z) - S_n(z)| \\ &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(z - z_0)^k \right| < \varepsilon, \quad \forall n > N, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

这里 \mathbb{N} 表示自然数集合. 特别地, 当上述幂级数在一点 z 收敛时, 我们有

$$|a_n(z - z_0)^n| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

可见, 幂级数在一点 z 收敛的必要条件是通项的模趋于零, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n||z - z_0|^n = 0.$$

由于

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(z - z_0)^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k(z - z_0)^k|,$$

所以根据柯西收敛原理, 我们有下列命题:

命题 4.1 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z - z_0)|^n$ 收敛, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ 也收敛.

定义 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z - z_0)|^n$ 收敛, 则我们称幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ 绝对收敛.

上述命题告诉我们, 绝对收敛的幂级数收敛. 这样, 我们可以将微积分中有关正项级数的所有判别法, 用来讨论复的幂级数的绝对收敛性, 从而给出其收敛性的充分条件.

现在, 我们来研究幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ 的收敛范围问题.

一个实变量 x 的幂级数的收敛域通常为一个区间, 而一个复变量 z 的幂级数的收敛域一般是一个圆盘.

我们考虑级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n. \quad (4.1)$$

现在我们根据其系数定义如下的量

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n},$$

并定义 $R = 1/L$, 更确切地说,

$$R = \begin{cases} 0, & \text{当 } L = +\infty, \\ \infty, & \text{当 } L = 0, \\ 1/L, & \text{当 } 0 < L < +\infty. \end{cases}$$

这时, 我们便有下面的定理:

定理 4.1 设 $R > 0$, 则下列结论成立:

- (1) 若 $|z - z_0| < R$, 则上述幂级数 (4.1) 在点 z 收敛;
- (2) 若 $|z - z_0| > R$, 则上述幂级数 (4.1) 在点 z 发散.

证 因为 $R > 0$, 故有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = L \neq \infty.$$

设 z 是圆盘 $|z - z_0| < R$ 中的任意一点. 这时,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{|a_n||z - z_0|^n\}^{1/n} = L|z - z_0| < 1.$$

故根据柯西判别法, 正项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z - z_0|^n$$

收敛. 这表明, 原来的幂级数 (4.1) 在点 z 绝对收敛, 因而在该点收敛.

设点 z 使得 $|z - z_0| > R$. 这时,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{|a_n| |z - z_0|^n\}^{1/n} = L |z - z_0| > 1$$

这表明幂级数 (4.1) 的通项的模不趋于 0, 因而发散. 证毕.

定义 我们称上面定义的量 R 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ 的收敛半径. 若 $R > 0$, 则我们称圆盘 $\{z : |z - z_0| < R\}$ 为该级数的收敛圆.

定理 4.1 告诉我们, 一个幂级数在它的收敛圆内收敛, 而在其收敛圆外发散.

在收敛圆的边界上的点, 幂级数可能收敛, 也可能发散, 要视具体幂级数而定.

与实变量的幂级数情形类似, 我们有下列结论:

定理 4.2 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ 的收敛半径 $R > 0$, 则对任意一个 $R': 0 < R' < R$, 该幂级数在圆 $\{|z - z_0| < R'\}$ 内一致收敛.

人们通常把幂级数的这种性质简称为在收敛圆中的内闭一致收敛性.

根据幂级数在收敛圆中内闭一致收敛性, 可以推出幂级数在其收敛圆中可逐项求偏导数.

对于幂级数的有关性质, 我们将在第五章第 1 节中详细讨论.

4.2 幂级数与指数函数

考虑幂级数

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

该幂级数的收敛半径 $R = \infty$. 事实上, 根据微积分的知识, 我们知道

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n!} \right)^{1/n} = 0.$$

因此, 该幂级数的收敛半径 $R = \infty$, 也即它在复平面上处处收敛.

现在, 我们定义

$$E(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots.$$

下面我们要证明 $E(z)$ 就是前面定义的 e^z .

首先, 我们证明下列命题:

命题 4.2 设 $f(x + iy)$ 在整个平面上关于 (x, y) 可微, 且

$$\frac{\partial f}{\partial z} \equiv 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0.$$

则 $f(x + iy)$ 是一个常数函数.

证 由定理条件立刻推出

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0.$$

设 $f(x + iy)$ 的实部与虚部分别为 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$. 这意味着

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0.$$

这就推出 u 与 v 关于 x, y 的偏导数都是零. 于是 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 是常数, 从而 $f(x + iy)$ 是常数. 命题证毕.

现在, 我们来证明: $E(z) = e^z$.

事实上, 由幂级数在其收敛圆内可逐项求偏导数的性质和例 3.2, 容易验证

$$\frac{\partial E(z)}{\partial z} = E(z), \quad \frac{\partial E(z)}{\partial \bar{z}} = 0.$$

根据形式偏导数的性质 (III), 我们有

$$\frac{\partial E(z)e^{-z}}{\partial z} = E(z)e^{-z} - E(z)e^{-z} = 0$$

和

$$\frac{\partial E(z)e^{-z}}{\partial \bar{z}} = 0 \cdot e^{-z} + E(z) \frac{\partial e^{-z}}{\partial \bar{z}} = 0.$$

根据命题 4.2, $E(z)e^{-z}$ 是一个常数. 再注意到 $E(0)e^0 = 1$, 我们立刻便有 $E(z)e^{-z} \equiv 1$, 也即

$$e^z = E(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots.$$

这就是说, 前面我们所定义的指数函数 $w = e^z$ 可以展开成幂级数, 其形式与实函数 e^x 的幂级数形式一致.

特别地, 当 $x = 0, y = \theta$ 时, 我们便得到著名的欧拉公式:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \theta^k}{k!},$$

其中的 θ 恰好就是 $e^{i\theta}$ 的辐角. 这个公式也可以根据三角函数 $\cos \theta$ 与 $\sin \theta$ 的泰勒公式直接验证.

根据欧拉公式与复数的三角表示, 我们立刻得到复数 z 的另一种表示:

$$z = re^{i\theta}, \quad \text{其中 } r = |z|, \theta = \text{Arg}(z).$$

复数的这种表示称为复数的指数表示. 在一些情况下, 复数的指数表示较三角表示更为方便 (见图 2.4.1).

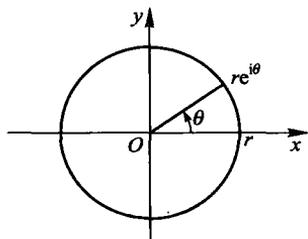


图 2.4.1

总结前面关于指数函数 e^z 的讨论, 指数函数具有下列性质:

(1) 设 $z = x + iy$, 则 e^z 有相互等价的两个解析表达式:

$$e^z \equiv e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y); \quad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

由此推出: $|e^z| = e^x$, $\text{Arg } e^z = y + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

(2) 对于任意的复数 z 与 ζ , $e^{z+\zeta} = e^z \cdot e^\zeta$.

(3) 指数函数 e^z 是一个以 $2\pi i$ 为周期的周期函数, 也即

$$e^{z+2\pi i} = e^z, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

(4) 指数函数 $w = e^z$ 是 \mathbb{C} 到 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 的满射, 它把 z 平面中的每一条水平线变为 w 平面的一条从原点出发的射线, 并把每一条纵线变成一条以原点为中心的圆周 (见图 2.4.2).

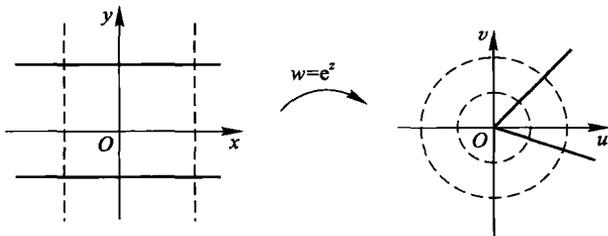


图 2.4.2

(5) e^z 的实部与虚部对于 (x, y) 连续可微, 并且 e^z 的两个形式偏导数为

$$\frac{\partial e^z}{\partial z} = e^z, \quad \frac{\partial e^z}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

4.3 对数函数

现在, 我们讨论指数函数 $w = e^z$ 的反函数——对数函数.

由于映射 $z \mapsto w = e^z$ 是“多对一”映射, 所以它的逆映射是多值的.

对于任意给定的值 $w \neq 0$, 我们考虑方程 $w = e^z$ 的解 z . 设 $z = x + iy$, 那么由

$$w = e^x(\cos y + i \sin y)$$

得到

$$|w| = e^x, \quad y = \text{Arg}(w).$$

这样, 我们得到方程 $w = e^z$ 的解

$$z = x + iy = \ln|w| + i\text{Arg}(w).$$

这也就是说, 映射 $z \mapsto w = e^z$ 的逆映射是

$$w \mapsto z = \ln|w| + i\text{Arg}(w) \quad (w \neq 0).$$

通常一个函数的自变量用 z 表示. 在上式中将 z 与 w 互换, 就得到对数函数的下述表示式:

$$\text{Ln}(z) = \ln|z| + i\text{Arg}(z) \quad (z \neq 0).$$

首先, 我们看到这个函数在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 是多值函数, 对于每一个 $z \neq 0$, 它有无穷多个值, 而这些值之间相差 $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. 如果适

当限制辐角的取值范围, 那么对数函数有可能变成一个单值函数. 比如, 限定 z 的辐角 θ 满足

$$-\pi < \theta \leq \pi.$$

也即 θ 是 z 的辐角的主值 $\arg z$. 这时相应的对数函数用 $\ln(z)$ 表示, 以区别于 $\text{Ln}(z)$. 也就是说, $\ln(z)$ 的表示式是

$$\ln z = \ln|z| + i\arg(z) \quad (-\pi < \arg z \leq \pi).$$

设 $\arg z$ 为 z 的辐角的主值. 显然, 我们有

$$\text{Ln}z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i \quad (k = 1, 2, \dots).$$

当 k 取任意一个固定值时, 上述函数都是一个单值函数. 我们称之为 $\text{Ln}z$ 的一个单值解析分支, 简称为单值分支. 这样, $\ln z$ 就是 $\text{Ln}z$ 的一个单值分支, 称为对数函数的主值分支. 而这个分支在实轴的正半轴上与通常的实对数函数 $\ln x$ 相等.

4.4 复变量的三角函数与双曲函数

我们知道, 实值函数 $\cos x$ 与 $\sin x$ 有展开式:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

这样, 我们自然就把复变量的余弦与正弦定义为

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

现在, 我们给出 $\cos z$ 与 $\sin z$ 的指数表示式. 显然, 下列两个公式成立:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos z + i \sin z; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e^{-iz} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} - i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
 &= \cos z - i \sin z.
 \end{aligned}$$

由此我们得到了 $\cos z$ 与 $\sin z$ 的指数表示:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

我们引入函数

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}),$$

并分别称之为双曲余弦与双曲正弦. 于是上述的指数表示可写成:

$$\cos z = \cosh iz, \quad \sin z = \frac{1}{i} \sinh iz.$$

总之, 我们看到了, 在复数域中三角函数与指数函数、双曲函数可以简单地相互表示. 在实数域中, 三角函数与指数函数、双曲函数之间似乎有一条“不可逾越的鸿沟”, 但在复数域中, 这条“鸿沟”消失了.

下面, 我们给出三角函数的实部与虚部的表示形式. 设 $z = x + iy$, 则有

$$\begin{aligned}
 \cos(x + iy) &= \frac{1}{2}(e^{-y+ix} + e^{y-ix}) \\
 &= \frac{1}{2}[e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)] \\
 &= \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \cos x - \frac{i}{2}(e^y - e^{-y}) \sin x \\
 &= \cosh y \cos x - i \sinh y \sin x.
 \end{aligned}$$

类似地有

$$\sin(x + iy) = \cosh y \sin x + i \sinh y \cos x.$$

由上述这些公式立刻推出 $\cos z$ 与 $\sin z$ 有下列性质:

(1) $\cos z$ 与 $\sin z$ 都是以 2π 为周期的函数, 即

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad \sin(z + 2\pi) = \sin z \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

(2) 当 z 限制在实轴上时, 即 $z = x + i0$ 时, $\sin z = \sin x$ 且 $\cos z = \cos x$. 也就是说, 现在我们所定义的函数 $\cos z$ 与 $\sin z$ 是实数函数的 $\cos x$ 与 $\sin x$ 到复数域的一种自然推广.

(3) $\cos z$ 与 $\sin z$ 在复平面上是无界函数. 事实上, 当固定 x 时, 上式中的 $\sinh y$ 与 $\cosh y$ 是无界函数. 这一点与实的正弦与余弦函数的有界性大相径庭.

(4) $\cos z$ 与 $\sin z$ 的零点全部落在实轴上. 事实上, 我们有

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 &= \cosh^2 y \cos^2 x + \sinh^2 y \sin^2 x \\ &= \sinh^2 y + (\cosh^2 y - \sinh^2 y) \cos^2 x. \end{aligned}$$

注意到 $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$, 立刻看出

$$\cos z = 0, \quad \text{当且仅当 } y = 0, x = k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

类似地讨论可得

$$\sin z = 0, \quad \text{当且仅当 } y = 0, x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

(5) 在整个复平面上, $\cos z$ 与 $\sin z$ 的实部与虚部作为 (x, y) 的函数处处连续可微, 且有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \cos z}{\partial z} &= -\sin z; & \frac{\partial \sin z}{\partial z} &= \cos z; \\ \frac{\partial \cos z}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial \sin z}{\partial \bar{z}} = 0. \end{aligned}$$

(6) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$. 此外, 与实三角函数相同的和角公式等同样成立.

最后两条性质可利用 $\cos z$ 与 $\sin z$ 的指数表示式直接验证.

复变量的正弦与余弦也有反函数. 由于复变量的正弦与余弦是周期函数, 所以其反函数必然是多值函数. 在我们的今后讨论中, 反三角函数用得较少, 远不及对数函数那么重要, 因此这里也就不加讨论了.

此外, 有了复变量的正弦与余弦, 也就随之可以用它们来定义复变量的正切与余切, 以及复变量的正割与余割:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z};$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}; \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}.$$

原来在初等数学中我们已经熟悉的那些公式, 对于复变量的三角函数都成立.

我们应当指出, $\tan z$ 与 $\sec z$ 的定义域是 $\mathbb{C} \setminus \{\pm \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, 而 $\cot z$ 与 $\csc z$ 的定义域是 $\mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. 另外, 它们都是周期函数, $\tan z$ 与 $\cot z$ 的周期为 π , 而 $\sec z$ 与 $\csc z$ 的周期为 2π .

4.5 复数的方幂与幂函数

形如

$$w = z^\alpha$$

的函数称为**幂函数**. 当 α 为整数或分数时, 其定义是清楚的. 但当 α 是无理数或一般复数时, 它还没有定义. 现在, 我们利用指数函数与对数函数给出这种函数的一般定义.

定义 设 α 是给定的一个复数, z 是任意一个非零复数. 定义

$$z^\alpha = \exp\{\alpha \operatorname{Ln}(z)\} \quad (z \neq 0).$$

这样定义的函数 $w = z^\alpha$, 有可能是一个多值函数.

当 α 是一个整数 n 时, 它是一个单值函数. 因为在这种情况下, 现在定义的方幂与通常意义下的 z^n 完全一致. 事实上, 若 θ 是非零复数 z 的辐角, 那么 $\text{Ln}(z) = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 并有

$$\begin{aligned}\exp \{n\text{Ln}(z)\} &= \exp \{n\ln|z| + ni(\theta + 2k\pi)\} \\ &= \exp \{n\ln|z| + ni\theta\} \\ &= |z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta).\end{aligned}$$

这里最后一项恰好就是通常意义下的 z^n .

当 $\alpha = m/n$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) 时, 可以验证 $(z^{m/n})^n = z^m$. 这样, $z^{m/n} = (z^m)^{1/n}$. 因此, 当 $n > 1$ 时函数 $w = z^{m/n}$ 有可能是一个多值函数. 但是, 最多有 n 个不同值.

当 α 是一个无理数或者非实数的复数时, $w = z^\alpha$ 不仅是一个多值函数, 而且有无穷多个不同的值. 我们看两个具体例子.

例 4.1 $w = z^{\sqrt{2}}$.

根据定义我们有

$$\begin{aligned}z^{\sqrt{2}} &= \exp \{\sqrt{2} \text{Ln}(z)\} \\ &= \exp \{\sqrt{2} \ln|z| + i\sqrt{2}(\theta + 2k\pi)\} \\ &= |z|^{\sqrt{2}} [\cos(\sqrt{2}\theta + 2k\pi\sqrt{2}) + i \sin(\sqrt{2}\theta + 2k\pi\sqrt{2})],\end{aligned}$$

其中 $\theta = \arg(z)$, $k \in \mathbb{Z}$. 注意到 $\sqrt{2}$ 是无理数, 从上式就会看出, 不同的整数 k , $z^{\sqrt{2}}$ 有不同的值. 这表明同一个 z , $w = z^{\sqrt{2}}$ 有无穷多个值.

例 4.2 $w = z^i$.

令 $\theta = \arg(z)$ ($z \neq 0$), 根据定义,

$$\begin{aligned}z^i &= \exp \{i \text{Ln}(z)\} = \exp \{i[\ln|i| + i(\theta + 2k\pi)]\} \\ &= \exp \{-\theta - 2k\pi\},\end{aligned}$$

这里 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 上式表明, z^i 有无穷多个值.

特别地, 当 $z = i$ 时, 由上式我们有

$$i^i = \exp \left\{ -\frac{\pi}{2} - 2k\pi \right\} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

i^i 居然是正的实数, 而且有无穷多个值!

根据定义不难看出, 幂函数 $w = z^\alpha$ 的多值性来自 $\text{Ln}(z)$ 的多值性. 因此, 只要对辐角加以限定, 使 $\text{Ln}(z)$ 成为一个单值分支, 就能得到 $w = z^\alpha$ 的一个单值函数.

比如, 当我们取对数函数的主值分支

$$\ln(z) = \ln|z| + i\arg(z) \quad (-\pi < \arg(z) \leq \pi)$$

时, 对应的幂函数

$$z^\alpha = \exp \{ \alpha \ln|z| + i\alpha \arg(z) \}$$

就是一个单值函数.

4.6* 多值函数的单值分支的确定

在前面我们遇到了若干个多值函数. 现在, 我们来研究怎样把一个多值函数通过适当限制自变量变化范围的办法, 使其变成若干个单值函数.

多值解析函数的处理是解析函数论中的一个困难问题. 后面的章节中还要讲到黎曼曲面的概念, 那就是为了处理多值函数而提出的.

这里我们只就若干例子加以讨论, 而不去深究其一般理论与一般概念.

设 $w = f(z)$ 是区域 D 中的一个多值解析函数. 如果存在一个较小的区域 $D' \subset D$, 使得当自变量 z 约束在 D' 时, 多值函数 $w = f(z)$ 变成若干个单值的解析函数, 则我们称 D' 为 $w = f(z)$ 的一个单值性区域.

我们先考察两个多值函数的例子： $w = \text{Ln}(z)$ 与 $w = \sqrt{z-a}$.
我们知道

$$\text{Ln}z = \ln|z| + i(\theta + 2k\pi) \quad (\theta = \arg z).$$

显然, $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 是它的一个单值性区域. 在上述表达式中, 对于任意固定一个 k , 上述表达式都是一个单值解析函数, 并且不同的 k 对应的单值解析函数不同. 这时, $\text{Ln}z$ 有无穷多个单值解析分支.

容易看出, $\text{Ln}z$ 的单值性区域有各种不同取法. 例如, $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ 与 $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ 都是它的单值性区域, 其中 γ 是任意一条原点到无穷远点的不自交的曲线.

另外, 我们知道

$$\begin{aligned} \sqrt{z-a} &= |z-a|^{1/2}(\cos(\theta/2 + k\pi) + i\sin(\theta/2 + k\pi)) \\ &(\theta = \arg(z-a)). \end{aligned}$$

这时我们可以取 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, a]$ 作为它的单值性区域. 在上述表达式中, 当我们任意固定一个 k 的值时, 它便是一个单值解析函数. 不过, 所有的偶数 k , 对应于同一个单值解析函数而所有奇数 k 则对应于另一个单值解析函数. 这时, 我们称这个多值函数有两个单值解析分支.

为了决定单值性区域, 我们引入支点的概念.

仔细观察这两个例子, 容易发现有一些点扮演着特殊角色, 比如在 $w = \text{Ln}(z)$ 中的点 $z = 0$, 在 $w = \sqrt{z-a}$ 中的点 $z = a$. 这些点的基本特征是, 当点 z 围绕它们旋转一周时, $w = f(z)$ 的函数值要改变. 这样的点我们称其为支点.

现在, 我们给出关于多值解析函数的支点的一般描述:

我们假定 $w = f(z)$ 是一个在空心邻域 $V := \{z : 0 < |z-a| < r\}$ 中有定义的多值的解析函数, 并假定对于任意一点 $z_0 \in$

V , 都存在一个充分小的邻域 $\{z : |z - z_0| < \delta\} \subset V$, 使之成为该多值函数的一个单值性区域. 现在, 我们设想动点 z 沿着 $C_\delta := \{z : |z - a| = \delta\}$ 移动, 而相应的函数值 $f(z)$ 连续地变动. 如果 z 沿任意的圆周 C_δ 旋转一周返回原处时, 函数值 $f(z)$ 总要改变, 则我们便称点 a 是多值函数 $w = f(z)$ 的一个支点. 否则, 点 a 不是支点.

显然, 根据这个定义, 0 是 $\text{Ln}(z)$ 的一个支点, a 是 $\sqrt{z-a}$ 的一个支点. 事实上, 当 z 沿着任意一个以 0 为中心的圆周逆时针旋转一周时, 函数

$$\text{Ln}z = \ln|z| + i(\theta + 2k\pi) \quad (\theta = \arg z)$$

总要增加 $2i\pi$. 而当 z 沿着任意一个以 a 为中心的圆周旋转一周时, 函数

$$\sqrt{z-a} = |z-a|^{1/2}(\cos(\theta/2+k\pi) + i \sin(\theta/2+k\pi)) \quad (\theta = \arg(z-a))$$

的函数值一定会改变.

无穷远点 ∞ 同样可能是支点, 其定义与上面的定义类似.

设 $w = f(z)$ 是在 ∞ 的一个空心邻域 $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R_0\}$ 内有定义的多值连续函数. 如果存在一个实数 $R_0 > 0$, 使得对于任意的 $R > R_0$, 当点 z 沿着圆周 $\Gamma_R := \{z : |z| = R\}$ 旋转一周回到原处时, $w = f(z)$ 的函数值总要更改, 则我们称无穷远点 ∞ 为函数 $w = f(z)$ 的一个支点.

显然, 在上面的两个例子中, 无穷远点 ∞ 都是函数的支点.

现在, 我们说明如何利用支点来确定一个多值函数的单值分支. 仅以 $\text{Ln}(z)$ 为例, 它有两个支点 0 与 ∞ . 我们任意取一条不自交的曲线 γ 连接点 0 与 ∞ , 并考虑区域 $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$. 这时, 多值函数 $w = \text{Ln}(z)$ 在这个区域上就是一个单值函数. 事实上, 设想有一个动点从任意一点 $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ 出发, 沿着任意一条不穿越 γ 的路

线, 旋转一周回到 z_0 , 其函数值显然不会改变. 因此, 当自变量 z 限制在 $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ 内时, 多值函数就分解成若干个单值函数. 这里 γ 称作割线.

现在, 我们再通过几个典型例子来进一步解释这种由支点确定单值分支的办法.

例 4.3 确定 $\text{Ln}z$ 的一个单值分支, 使得它

- (1) 在 $z = 1$ 的值为 0 ;
- (2) 在 $z = -1$ 的值为 πi .

解 (1) 取 $(-\infty, 0]$ (即取负半实轴) 为割线. 这时我们有

$$\text{Ln}(z) = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0],$$

其中 $\arg z$ 为 z 的辐角的主值. 为了使得单值分支在 $z = 1$ 的值等于 0 , 只要取 $k = 0$ 即可. 也就是说, 所要的单值分支就是

$$w = \ln|z| + i\arg(z).$$

(2) 取 $[0, +\infty)$ 为割线. 这时,

$$\text{Ln}(z) = \ln|z| + i(\theta(z) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty),$$

其中 $\theta(z)$ 是限制在 $(0, 2\pi)$ 之中 z 的辐角. 为了满足在 $z = -1$ 等于 πi 的要求, 可取 $k = 0$, 也即所求的单值分支是

$$w = \ln|z| + i\theta(z).$$

例 4.4 求多值函数

$$w = \text{Ln} \frac{z-1}{z+1} \quad (z \neq 1, -1)$$

的支点, 并确定一个单值分支使得该单值函数在 $z = 2$ 处等于 $\ln 1/3$.

解 首先,我们先来确定这个多值函数的支点.显然,有可能成为支点的点只有 $1, -1, \infty$. 现在,我们要证明只有 -1 与 1 是支点,而 ∞ 不是支点.

事实上,我们考虑一个以 $z = 1$ 为中心的半径充分小的圆周 γ (见图 2.4.3),使得点 $z = -1$ 落在小圆的外部.当动点沿着 γ 逆时针方向旋转一周时, $z - 1$ 的辐角增加 2π ,而 $(z + 1) = (z - (-1))$ 的辐角却没有改变.从而,当 z 沿 γ 旋转一周时 $(z - 1)/(z + 1)$ 的辐角就一定增加 2π .而 $\text{Ln}[(z - 1)/(z + 1)]$ 的虚部取决于 $(z - 1)/(z + 1)$ 的辐角.因此, $\text{Ln}[(z - 1)/(z + 1)]$ 在点 $z = 1$ 是一个支点.

同样的道理,可以证明点 $z = -1$ 也是支点.

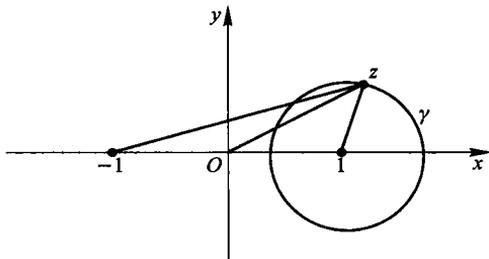


图 2.4.3

下面我们证明 ∞ 不是支点.我们考虑一个圆周 Γ ,其圆心为原点,半径 R 大于 1 .当动点沿着 Γ 的逆时针方向旋转一周时, $(z - 1)$ 的辐角与 $(z + 1)$ 的辐角同时增加了 2π ,从而这时 $(z - 1)/(z + 1)$ 的辐角没有改变.因而这时函数值 $\text{Ln}(z)$ 的值没有改变.这表明无穷远点不是支点.

在这例子中,由于支点只有两个,所以割线依旧取为一条连接两个支点 1 与 -1 的简单曲线.比如,可以取割线为实轴上的区间 $[-1, 1]$.这时 $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ 是多值函数 $\text{Ln}(z - 1)/(z + 1)$ 的单值性

区域, 也即

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \left(\arg \frac{z-1}{z+1} + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1],$$

对于每一个 $k \in \mathbb{Z}$ 都是一个单值函数.

由于当 $x > 1$ 时, $\arg(x-1)/(x+1) = 0$, 而 $\ln|(2-1)/(2+1)| = \ln 1/3$, 所以只要取 $k = 0$, 就得到所要的单值分支:

$$w = \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| + i \arg \frac{z-1}{z+1}.$$

例 4.5 确定多值函数 $\sqrt{(z-a)(z+b)}$ (其中 $a > 0, b > 0$) 的一个单值分支, 使得它在实轴的区间 $(a, +\infty)$ 上取正的实值.

解 与例 4.4 类似可以证明, 点 a 与 $-b$ 都是支点. 现在我们来证明无穷远点不是支点. 我们考虑一个充分大圆周 Γ , 使得点 a 与 $-b$ 在其内部. 当动点沿着 Γ 逆时针旋转一周时, $z-a$ 与 $z+b$ 的辐角同时增加 2π , 从而 $(z-a)(z+b)$ 的辐角增加了 4π . 我们知道

$$\sqrt{(z-a)(z+b)} = |\sqrt{(z-a)(z+b)}|^{1/2} e^{i[\operatorname{Arg}(z-a)(z+b)]/2}.$$

根据刚才的讨论, 当沿着 Γ 的逆时针方向旋转一周时, 辐角 $[\operatorname{Arg}(z-a)(z+b)]/2$ 增加 2π . 从上述表达式可知, 这时函数值并没有改变. 这就证明了 ∞ 不是支点.

我们取 $[-b, a]$ 为割线, 那么区域 $\mathbb{C} \setminus [-b, a]$ 便是 $\sqrt{(z-a)(z+b)}$ 的一个单值性区域, 也即

$$\sqrt{(z-a)(z+b)} = |\sqrt{(z-a)(z+b)}|^{1/2} e^{i[\theta(z)/2 + k\pi]} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

其中 $\theta(z) = \arg [(z-a)(z+b)]$, 对于每一个 $k \in \mathbb{Z}$, 上述函数都是单值函数.

当 $x > a$ 是一个实数时, $(x - a)(x + b) > 0$, 因此 $\theta(x) = \arg [(x - a)(x + b)] = 0$. 这时, 为了满足题目要求, 使得单值分支在 $x > a$ 处取正的实值, 我们取 $k = 0$ 即可. 也就是说, 所求的单值分支是

$$\sqrt{(z - a)(z + b)} = |\sqrt{(z - a)(z + b)}|^{1/2} e^{i \arg [(z - a)(z + b)]/2}.$$

习题 2.4

1. 请直接证明 (即不用收敛圆的结果): 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 收敛, 则该幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在任意一点 $z = x + iy$ ($|z| < |z_0|$) 收敛.

2. 求下列幂级数的收敛半径:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} (1 + in^3)z^n$; (2) $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n z^{n^2}$ ($\rho > 0$);

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$.

3. 证明: 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1 + z^{2n}}$$

当 $|z| \neq 1$ 时收敛, 而当 $|z| = 1$ 时发散.

4. 利用正弦与余弦的实部与虚部的表达式, 证明:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

5. 证明和角公式:

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.$$

6. 证明: 对于任意固定的 x , 我们有

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} |\cos(x + iy)| = +\infty.$$

7. 求 $\sin i$ 与 $\cos i$ 的值, 并证明 $\cos z$ 在虚轴上取实值, 而 $\sin z$ 在虚轴上取纯虚数值.

8. 求 $(1 + i\sqrt{3})^i$ 所有可能的值.

9. 设 $\alpha \neq 0, \operatorname{Im} \beta \neq 0$. 证明 α^β 可以取无穷多个值.

10. 求下列函数值:

(1) $\tan i$; (2) $\ln 2i$; (3) $\sin(\pi + i)$; (4) $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^i$.

11*. 求出多值函数 $\sqrt{(z-1)(z-2)(z-3)}$ 的支点, 取一个单值分支使其在实轴 $(3, +\infty)$ 上取正的实值.

12*. 求出多值函数 $\sqrt{(z-1)(z+1)(z-2)(z+2)}$ 的支点. 对于这个多值函数应该如何取其割线以取得单值分支.

第三章 解析函数的概念

§1. 解析函数的定义

1.1 复变量函数的可导与解析

解析函数是复变函数论的主要研究对象. 因此, 解析函数的概念是复变函数论中最基本的概念.

我们先给出复变量函数关于自变量 z 可导的定义. 单从形式上看, 它和实函数情形完全类似:

定义 设函数 $f(z)$ 在区域 $D \subset \mathbb{C}$ 中有定义. 又设 z_0 是 D 中一点. 若极限

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

存在, 则称 $f(z)$ 在点 z_0 关于 z 是可导的, 简称为可导. 上述极限值称为函数 $f(z)$ 在点 z_0 的导数, 并记为 $f'(z_0)$ 或 $\left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=z_0}$.

现在, 我们进一步给出函数解析的概念:

定义 若 $f(z)$ 在点 z_0 的某个邻域内是点点可导的, 则我们称 $f(z)$ 在点 z_0 是解析的 (analytic), 或称之为全纯的 (holomorphic). 若 $f(z)$ 在区域 D 内是点点解析的, 则称 $f(z)$ 在区域 D 中是解析的或全纯的. 若 $f(z)$ 在整个复平面 \mathbb{C} 上是解析的, 则称 $f(z)$ 是整函数 (entire functions).

显然, 根据定义, 一个函数在一点解析, 则它在该点的某一个邻域内解析.

这里我们提醒读者：一个复变量函数仅仅在一点可导，不能说它在该点解析。只有在该点的某一个邻域内处处可导，才能称之为在该点解析。这一点初学者应当留意。

另外，我们还要指出一个基本事实：一个函数 $w = f(z)$ 在一点 z_0 关于 z 可导，则蕴含着 $f(x + iy)$ 在该点关于 x, y 可微，而且有

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{z_0} = f'(z_0), \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{z_0} = if'(z_0).$$

事实上， $w = f(z)$ 在一点 z_0 关于 z 可导，则有

$$f(z_0 + \Delta z) = f(z_0) + f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|) \quad (\Delta z \rightarrow 0).$$

令 $z_0 = x_0 + iy_0$ 和 $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ ，于是上式可以写成下列形式：

$$\begin{aligned} & f(x_0 + \Delta x + i(y_0 + \Delta y)) \\ &= f(x_0 + iy_0) + f'(z_0)\Delta x + if'(z_0)\Delta y + o(\rho) \quad (\rho \rightarrow 0), \end{aligned}$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ 。这就表明 $f(x + iy)$ 在点 $z_0 = x_0 + iy_0$ 关于 x, y 可微。

在上述展开式中，令 $\Delta y = 0$ ，则有

$$f(x_0 + \Delta x + iy_0) = f(x_0 + iy_0) + f'(z_0)\Delta x + o(|\Delta x|) \quad (|\Delta x| \rightarrow 0).$$

这就得到

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{\Delta x} = f'(z_0).$$

在前式中令 $\Delta x = 0$ ，完全类似地可以得到

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + i(y_0 + \Delta y)) - f(x_0 + iy_0)}{\Delta y} = if'(z_0).$$

以上证明了 $f(z)$ 在一点 z_0 可导，则 $f(x + iy)$ 在该点关于 x, y 可微，且 $f'(z_0)$ 可用关于 x, y 的偏导数表出。

但是, $f(x + iy)$ 在一点关于 x, y 可微, 并不意味着 $f(z)$ 在该点必然关于 z 可导. 在下面的例子中, 就可看到这一点.

例 1.1 函数 $f(z) = z$ 在 \mathbb{C} 中处处可导, 而函数 $g(z) = \bar{z}$ 在任意一点 $z_0 \in \mathbb{C}$ 都不可导.

事实上, 对于任意一点 $z_0 \in \mathbb{C}$, 我们有

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1$$

也即对所有的点 $z_0 \in \mathbb{C}$ 都有 $f'(z_0) = 1$.

但是

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = e^{-2i \arg(z - z_0)}.$$

当动点 z 沿着不同方向的直线趋向 z_0 时, 上式的极限不同. 由此可见, 当 $z \rightarrow z_0$ 时, 比式

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

没有极限, 也即 $g(z) = \bar{z}$ 在任意一点 z_0 都不可导.

函数 $w = \bar{z} \equiv x - iy$ 显然关于 x, y 处处可微. 但是, 它关于 z 处处却不可导.

例 1.2 设 $f(z) = z + |z|^2$. 证明 $f(z)$ 在点 0 可导, 而在任意一点 $z_0 \neq 0$ 不可导.

事实上, 我们有

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z + z\bar{z}}{z} = 1.$$

可见, 该函数在 $z_0 = 0$ 点可导.

但是, 对于任意一点 $z_0 \neq 0$, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{z - z_0 + z\bar{z} - z_0\bar{z}_0}{z - z_0} \\ &= 1 + \frac{z\bar{z} - z_0\bar{z} + z_0\bar{z} - z_0\bar{z}_0}{z - z_0} \\ &= 1 + \bar{z} + z_0 \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \\ &= 1 + \bar{z} + z_0 e^{-2i \arg(z - z_0)}. \end{aligned}$$

当 $z \rightarrow z_0$ 时, 这个等式里的最后一项没有极限, 而其他项均有极限. 因而比式 $(f(z) - f(z_0))/(z - z_0)$ 没有极限.

这个例子告诉我们, 一个函数在一点关于 z 可导, 不能保证它在该点附近也可导.

尽管在形式上, 复变量函数的导数的定义与实函数完全一致, 但实际上两者差异很大: 复变量函数 $w = f(z)$ 的可导性的要求远远强于 $f(x + iy)$ 关于 x, y 的可微性. 这一点会在下一节的讨论中看得更清晰.

1.2 解析性与连续性

现在, 我们证明下列命题

命题 1.1 设 $w = f(z)$ 在一个区域 D 内解析, 则 $w = f(z)$ 在 D 内连续.

证 设 z_0 为区域 D 中一点. 那么, 根据假定

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

此式可以写成

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|) \quad (\text{当 } z \rightarrow z_0).$$

由此可见,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

这表明 $f(z)$ 在区域 D 中任意一点连续. 证毕.

由此可见, 函数可导的必要条件是连续. 这一点与实变量函数的可导意味着连续完全一致.

1.3 解析函数的四则运算

定理 1.1 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 D 中解析, 则它们的和、差、积、商 (除数不为零) 在 D 内解析, 并有下述求导公式:

$$\begin{aligned}[f(z) \pm g(z)]' &= f'(z) \pm g'(z), \\ [f(z)g(z)]' &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z), \\ \left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]' &= \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2} \quad (g(z) \neq 0).\end{aligned}$$

由于这个定理的证明与实函数情形完全类似, 故从略.

应该指出, 在这个定理的证明中实际上用到了上一段中的命题 1.1. 请读者在试着证明这些结论之后, 指出它用在何处.

定理 1.2 若 $w = f(z)$ 在区域 D 中解析, 而 $\zeta = g(w)$ 在区域 G 中解析, 并且 $f(D) \subset G$, 则复合函数 $\zeta = g(f(z))$ 在 D 中解析, 且有

$$\frac{dg(f(z))}{dz} = \frac{dg(w)}{dw} \Big|_{w=f(z)} \frac{df(z)}{dz},$$

或写成

$$(g(f(z)))' = g'(f(z))f'(z).$$

定理的证明与实函数情形完全类似, 故从略.

与实函数情形类似, 我们有下列定理:

定理 1.3 设 $f: D \rightarrow G$ 是区域 D 到区域 G 的一一满射, 并且是一个解析函数. 假定 $g: G \rightarrow D$ 是 f 的反函数, 则 g 是 G

中的一个解析函数,且有

$$g'(z) = \frac{1}{f'(w)} \quad (\text{其中 } w = g(z), \forall z \in G).$$

简单地说,一个解析函数的反函数(如果存在的话)是解析函数,其导数等于原来函数在对应点的导数的倒数.

函数 g 解析性的证明完全类似于实函数情形,而其求导公式则可看作是定理 1.2 的推论.事实上,我们有

$$f(g(z)) = z, \quad z \in G.$$

对此式两边求导并利用定理 1.2 就得到

$$f'(g(z))g'(z) = 1, \quad z \in G.$$

这便是我们所要的公式.

例 1.3 多项式函数

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

是一个整函数,即在整个复平面上解析的函数,并且有

$$P'(z) = n a_0 z^{n-1} + (n-1) a_1 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1}.$$

事实上,常数函数显然是一个整函数,而函数 $w = z$ 是一个整函数.基于这两件基本事实,利用上述关于导数乘法公式和数学归纳法,可以推得多项式中任意一项 $a_k z^{n-k}$ 都是一个整函数,并且

$$(a_k z^{n-k})' = (n-k) a_k z^{n-k-1} \quad (0 \leq k \leq n).$$

最后,再应用导数的求和公式即得到我们所要的结论.

例 1.4 有理函数

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}$$

$$(\text{其中 } a_0 \neq 0, b_0 \neq 0)$$

在除去 $Q(z)$ 的根之外的任意一点处解析, 并且

$$R'(z) = \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{(Q(z))^2}.$$

特别地, 分式线性变换

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

在其定义域内的导数

$$w' = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}.$$

这些结论由例 1.3 和关于导数的除法公式可以容易推得.

例 1.5 设函数 $w = \sqrt{z}$ (其中 $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$) 是 \sqrt{z} 的任意一个单值分支. 则它的导数

$$(\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}} \quad (\forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]).$$

事实上, 映射 $z \mapsto w = \sqrt{z}$ 的逆映射为 $w \mapsto z = w^2$. 而后者在 w 处的导数为 $2w$. 所以, 根据前面的公式, 我们有

$$(\sqrt{z})' = \frac{1}{2w} \quad (\text{其中 } w = \sqrt{z}),$$

也即 $(\sqrt{z})' = 1/(2\sqrt{z})$.

1.4 在无穷远点的解析性

函数的解析性概念可以推广到在无穷远点有定义的函数. 在某些讨论中我们需要这种推广, 它会带给我们许多方便.

首先, 我们需要说明什么是无穷远点 ∞ 的邻域. 无穷远点 ∞ 的一个邻域是指一个大圆的外部, 即 $\Delta_R^* := \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > R\}$, 其中 R 是一个正数.

定义 设 $w = f(z)$ 在一个无穷远点 ∞ 的一个邻域 Δ_R^* 内有定义, 也即函数 $w = f(1/\zeta)$ 在圆 $\Delta_{\frac{1}{R}} = \{\zeta : |\zeta| < 1/R\}$ 内有定义. 若函数 $w = f(1/\zeta)$ 对 ζ 而言在 $\zeta = 0$ 解析, 那么我们称 $w = f(z)$ 在无穷远点解析.

这就是说, 一个在无穷远点附近有定义的函数 $f(z)$ 在一定的条件下, 可以谈论它在无穷远点处的解析性, 而这种解析性是通过一个倒数变换 $\zeta = 1/z$ 被归结为函数 $g(\zeta) = f(1/\zeta)$ 在 $\zeta = 0$ 点的解析性.

例 1.6 考虑分式线性变换

$$w = f(z) \equiv \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0),$$

并假定 $c \neq 0$. 则该函数在 $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{-d/c\}$ 中解析.

该变换在 $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ 中解析性是已知的, 现在只需讨论它在无穷远点的解析性.

首先, 我们要指出, 该分式线性变换在无穷远点的邻域

$$\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > |d|/|c|\}$$

内连续, 只要我们定义它在无穷远点的值

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c}.$$

其次, 由于函数

$$w = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{a + b\zeta}{c + d\zeta}$$

对于 ζ 而言在 0 点是解析的 (注意条件 $c \neq 0$), 故原来的分式线性变换 $w = f(z)$ 在无穷远点是解析的.

解析性概念推广到无穷远点, 这使得无穷远点在函数的解析性问题上与普通点一样, 不再有任何特殊性.

习题 3.1

1. 求 $f(z) = (3z^5 + 2z^2 + 1)^5$ 的导数.
2. 设 $f(z) = e^{z+\bar{z}}$, 证明: 该函数处处不可导.
3. 设 $w = f(z)$ 在一点 $z_0 = x_0 + iy_0$ 关于 z 可导. 证明:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0+iy_0} = -i \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0+iy_0}$$

4. 设 $w = f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内有定义. 证明: $f(z)$ 在 z_0 处可导的充要条件是, 存在一个常数 A 使得

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(|z - z_0|) \quad (z \rightarrow z_0).$$

当 $w = f(z)$ 在 z_0 点可导时, $f'(z_0) = A$.

5. 证明定理 1.2 及定理 1.3.
6. 设 $w = f(z)$ 在一个区域 D 内解析, 且

$$f'(z) \equiv 0, \quad \forall z \in D.$$

证明: $f(z)$ 是一个常数函数.

7. 设 $f(z)$ 在 z_0 处可导且导数不为零, 证明: 函数 $w = \overline{f(z)}$ 在 z_0 处不可导.

8. 讨论下列函数在无穷远点的解析性 (即是否可以适当在无穷远点补充定义后使之解析):

- (1) $w = e^z$;
- (2) $w = (z - 1)/(z - 2)^2$;
- (3) $w = \ln[(z - 1)/(z - 2)]$.

§2. 可导的充要条件

2.1 柯西 - 黎曼条件

从上面的例子中, 我们已经看到, 一些非常简单的函数, 比如 $w = \bar{z}$, 处处不可导. 这就提示我们, 一个复变量的函数

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (z = x + iy)$$

在一点 $z = x_0 + iy_0$ 关于 x, y 的可微性, 不足以保证函数 $f(z)$ 的关于 z 的可导性.

因此, 要求一个函数 $f(z)$ 在一点可导, 它的实部与虚部, 还应该满足另外一些条件.

定理 2.1 设 $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域 D 中有定义, 其中 $u = u(x, y)$ 与 $v = v(x, y)$ 分别是 $f(x + iy)$ 的实部与虚部. 则 $f(z)$ 在一点 $z = x + iy \in D$ 关于 z 可导的充要条件是 $u = u(x, y)$ 与 $v = v(x, y)$ 在该点可微, 且满足方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

证 先证明条件的必要性.

假定函数 $w = f(z)$ 在一点 $z = x + iy \in D$ 可导. 则根据定义, 我们有

$$f(z + \Delta z) - f(z) = f'(z)\Delta z + o(|\Delta z|) \quad (\Delta z \rightarrow 0). \quad (2.2)$$

令 $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, $f'(z) = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$), 这时

$$f(z + \Delta z) - f(z) = (a + ib)\Delta z + o(|\Delta z|) \quad (\Delta z \rightarrow 0). \quad (2.3)$$

对该式分别取实部与虚部, 即有两个实形式的等式:

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = a\Delta x - b\Delta y + o(\rho) \quad (\rho \rightarrow 0), \quad (2.4)$$

$$v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) = b\Delta x + a\Delta y + o(\rho) \quad (\rho \rightarrow 0), \quad (2.5)$$

其中 $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. 这就表明, u 与 v 均在点 (x, y) 处可微. 从这两个式子中分别得到:

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad b = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{与} \quad b = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad a = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

于是有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

并由此推出 (2.1).

现在, 我们证明条件的充分性. 办法是将上述讨论倒推回去.

假定 u 与 v 在点 (x, y) 可微, 并且其偏导数满足 (2.1). 我们令

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad b = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

这时由实函数一阶近似展开的公式可知, (2.4) 成立.

另外, 由 (2.1) 有

$$b = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad a = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

基于同样的理由, (2.5) 成立.

在 (2.5) 的两边同乘以 i , 再加上 (2.4) 就得到 (2.3). 而 (2.3) 表明 $f(z)$ 在点 $z = x + iy$ 可导, 且 $f'(z) = a + ib$. 定理证毕.

作为复变量函数可导的条件, 通常 (2.1) 式被称为柯西 - 黎曼条件; 它作为一个方程组被称为柯西 - 黎曼方程组, 简称为柯西 - 黎曼方程.

我们必须强调指出, 如果在定理 2.1 中去掉关于 u, v 的可微性要求, 而只要求函数满足柯西 - 黎曼条件, 这不足以保证函数的可导性. 事实上, 在微积分中有这样的例子: 一个二元实函数在某一点两个偏导数都存在并且等于 0, 但它在该点不可微.

由定理 2.1 立刻推出复变量函数在一个区域中解析的充要条件.

定理 2.2 函数 $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域 D 中解析的充要条件是, $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 作为 (x, y) 的二元函数在 D 内处处可微, 且处处满足柯西 - 黎曼方程.

我们知道,一个二元函数的偏导数的连续性足以保证它的可微性.于是,我们又有下列的定理,它给出了一个复变量函数解析的充分条件:

定理 2.3 设函数 $f(x+iy)$ 的实部 $u(x, y)$ 与虚部 $v = v(x, y)$ 在区域 D 内有连续的偏导数,即 $u \in C^1(D), v \in C^1(D)$,并且在 D 内处处满足柯西 - 黎曼方程,则函数 $w = f(z)$ 在 D 内解析.

2.2 解析函数的形式偏导数

在柯西 - 黎曼方程组 (2.1) 式中的第 2 式乘以 i 再加上第 1 式就得到

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (2.6)$$

回顾形式偏导数的定义,我们由上式立刻得到

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (2.7)$$

这样,由两个方程组成的实形式的柯西 - 黎曼组,用形式偏导数表示时就变成了一个方程.这在形式上,更为简洁.定理 2.1 可以表述为下列形式:

定理 2.1' 设 $f(z)$ 在区域 D 中有定义.若 $f(z)$ 在一点 $z = x + iy \in D$ 关于 z 可导的充要条件是, $f(x + iy)$ 作为 x, y 的二元函数在该点是可微的,并满足下列条件:

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0.$$

此外,我们要指出,当 $f(z)$ 关于 z 可导时,

$$f'(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z}.$$

事实上,在前面我们已经知道,在 $f(z)$ 可导的条件下,

$$f'(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial x}, \quad f'(z) = -i \frac{\partial f(z)}{\partial y}.$$

这样, 我们得到

$$f'(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f(z)}{\partial x} - i \frac{\partial f(z)}{\partial y} \right) = \frac{\partial f(z)}{\partial z}$$

因此, 根据这个结论和定理 2.1', 我们推出了下列定理:

定理 2.4 若 $f(z)$ 在区域 D 中解析, 则在区域 D 中处处有

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \text{且} \quad \frac{\partial f(z)}{\partial z} = f'(z), \quad \forall z \in D.$$

也就是说, 对于解析函数而言, 关于 \bar{z} 的形式偏导数总是零, 而其形式偏导数 $\frac{\partial f}{\partial z}$ 恰好就是导数 $f'(z)$.

这也可以从比较解析函数 $f(z)$ 的两种展开式看出. 由 $f(x + iy)$ 关于 x, y 的可微性有

$$f(z + \Delta z) - f(z) = \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Delta \bar{z} + o(|\Delta z|) \quad (|\Delta z| \rightarrow 0).$$

另一方面, 由 f 的解析性又有

$$f(z + \Delta z) - f(z) = f'(z) \Delta z + 0 \cdot \Delta \bar{z} + o(|\Delta z|) \quad (|\Delta z| \rightarrow 0).$$

比较这两个展开式立即得到 $\frac{\partial f}{\partial z} = f'(z)$ 和 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

下面我们证明若干基本初等函数的解析性.

例 2.1 指数函数 e^z 是整函数, 即在整个复平面 \mathbb{C} 解析, 且 $(e^z)' = e^z$.

事实上, 根据 e^z 的定义, $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. 很容易看出, 它在全平面上关于 x, y 有连续的偏导数, 从而它在全平面上关于 x, y 可微. 此外, 我们已经知道

$$\frac{\partial e^z}{\partial \bar{z}} = 0$$

(见第二章例 3.3). 可见, 函数 $w = e^z$ 在整个复平面上解析. 另外, 我们第二章例 3.3 中已经验证过

$$\frac{\partial e^z}{\partial z} = e^z.$$

这就告诉我们 $w = e^z$ 的导数就是它自身: $(e^z)' = e^z$.

例 2.2 三角函数 $\sin z$ 与 $\cos z$ 是整函数, 且有

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

全部验证见第二章第 4 节.

例 2.3 对数函数 $\operatorname{Ln} z$ 的主值分支 $w = \ln |z| + i \arg z$ 在区域 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 内是一个解析函数, 并有

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

事实上, 根据定义,

$$w = \ln z = \ln |z| + i \arg(z), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0],$$

它是一个单值函数, 并且是函数 $z = e^w$ 的反函数. 根据解析函数的反函数是解析函数的结论可知, $w = \ln z$ 是解析函数. 另外, 根据反函数求导公式,

$$w'(z) = \frac{1}{\left(\frac{de^w}{dw}\right)} = \frac{1}{e^w} \quad (\text{其中 } w = \ln z),$$

即 $w'(z) = 1/z$.

习题 3.2

1. 证明下列函数在整个复平面中是解析函数, 并求其导数:

(1) $f(x + iy) = x^4 + 4ix^3y - 6x^2y^2 - 4ixy^3 + y^4 + 8(x + iy)$;

$$(2) f(x + iy) = e^x(x \cos y - y \sin y + ix \sin y + iy \cos y).$$

2. 设 $w = f(z)$ 在一个区域 D 内解析, 并假定 $f(x + iy)$ 的实部与虚部分别为 $u = u(x, y)$ 与 $v = v(x, y)$. 利用柯西 - 黎曼方程, 证明: 变换 $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ 的雅可比行列式

$$J_f(x, y) = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = |f'(x + iy)|^2 \quad (\forall x + iy \in D).$$

3. 设 $f(x + iy) = x^2 - iy$, 问: 它在何处满足柯西 - 黎曼方程? 它是否是一个整函数?

4. 设函数 $w = f(z)$ 与函数 $w = \overline{f(z)}$ 在区域 D 内同时是解析的, 证明: $f(z)$ 必为常数函数.

5. 设函数 $w = f(z)$ 在区域 D 内解析, 且在 D 内 $|f(z)|$ 为常数, 证明: 函数 $f(z)$ 在 D 内为一常数函数.

6. 设 $w = f(z)$ 在区域 $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ 内解析, 证明: 函数 $w = \overline{f(\bar{z})}$ 在 Δ 内也解析.

7. 设 $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域 D 内解析, 并且 $u \in C^2(D)$, $v \in C^2(D)$. 证明: $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在 D 内满足拉普拉斯方程, 即

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \forall (x, y) \in D;$$

$$\Delta v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad \forall (x, y) \in D.$$

注 满足拉普拉斯方程的函数称为调和函数 (harmonic functions). 从下一章的讨论可知, 一个解析函数的实部与虚部总是任意阶可微的. 因此, 一个解析函数的实部虚部总是一个调和函数. 如果两个调和函数 $u = u(x, y)$ 与 $v = v(x, y)$ 使得 $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ 是一个解析函数, 则称它们互为共轭的调和函数.

8. 设 $f(z)$ 在一个区域 D 中解析, 且 $\operatorname{Im} f(z)$ 是一个常数函数. 证明: $f(z)$ 是一个常数函数.

9. 在一个区域中设有两个调和函数 $v = v(x, y)$ 与 $\bar{v} = \bar{v}(x, y)$ 同时与调和函数 $u = u(x, y)$ 共轭, 则 $v(x, y)$ 与 $\bar{v}(x, y)$ 相差一个常数:

$$v(x, y) \equiv \bar{v}(x, y) + C,$$

其中 C 是一个常数.

10. 设 $u = u(x, y)$ 在一个单连通的区域 D 中是一个调和函数. 证明: 积分

$$\oint_{\gamma} (u_y dx + u_x dy) = 0,$$

其中 γ 是区域 D 中的任一条逐段光滑的闭曲线.

11. 设 D 为一个单连通区域, 而 $u(x, y)$ 是 D 中的一个调和函数. 证明: 函数

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

在 D 中解析, 其中 $v(x, y)$ 是下列积分确定的函数:

$$v(x, y) := \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (-u_y dx + u_x dy),$$

其中 (x_0, y_0) 为 D 中的一个固定点.

注 根据第 10 题, 上述积分与路径无关, 所以上述积分定义了一个函数.

此题的意义在于它证明了对于任意给定的调和函数, 其共轭调和函数存在, 并提供了求共轭调和函数的途径.

§3. 解析映射的几何意义

现在我们假定函数 $w = f(z)$ 在 z_0 点可导, 并且假定 $f'(z_0) \neq 0$. 这时,

$$w = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|) \quad (z \rightarrow z_0). \quad (3.1)$$

这就是说, 该函数在 z_0 点的一阶近似 (即忽略高阶无穷小量) 为

$$w = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) = f(z_0) + e^{i \arg f'(z_0)} |f'(z_0)| (z - z_0). \quad (3.2)$$

它是一个旋转变换复合以相似变换, 然后再复合一个平移变换. 这里旋转的角度为 $\arg f'(z_0)$, 而相似变换的伸缩比为 $|f'(z_0)|$. 总之, 在这个函数的一阶近似保持了图形的相似性.

现在, 让我们进一步解释这一性质的几何意义.

我们考虑从 z_0 点出发的任意一条射线

$$\alpha_\theta: z = z_0 + re^{i\theta}, \quad r > 0,$$

并讨论沿着这条射线方向, z 趋于 z_0 时, 量 $|f(z) - f(z_0)|$ 在 z_0 点的变化率

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{|f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)|}{r}.$$

我们称这个极限的值为映射 $z \mapsto w = f(z)$ 沿方向 α_θ 的伸缩比.

对于一般函数而言, 这种伸缩比可能与射线 α_θ 的方向有关. 但是, 对于解析函数而言, 它与射线方向无关.

事实上, 我们有

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{|f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)|}{r} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|.$$

这表明量 $|f(z) - f(z_0)|$ 在 z_0 点沿任何方向的射线 α_θ 的伸缩比都等于 $|f'(z_0)|$, 也就是说, 它与射线方向无关.

另外, 我们考虑两条交于 z_0 的曲线

$$\gamma_j: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto z = \zeta_j(t) \quad (j = 1, 2),$$

其中 $z = \zeta_j(t)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续的导数, $\zeta'_j(t) \neq 0$ ($j = 1, 2$), 且 $\zeta_1(0) = \zeta_2(0) = z_0$. 我们考虑曲线 γ_j 在映射下的像:

$$\beta_j: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto w_j(t) := f(\zeta_j(t)) \quad (j = 1, 2).$$

我们很容易从 (3.2) 证得 $w'_j(0) = f'(\zeta_j(0))\zeta'_j(0)$ ($j = 1, 2$), 即

$$w'_1(0) = f'(z_0)\zeta'_1(0), \quad w'_2(0) = f'(z_0)\zeta'_2(0). \quad (3.3)$$

这样一来, 我们得到 $w'_j(0) \neq 0$ ($j = 1, 2$), 并且

$$\frac{w'_2(0)}{w'_1(0)} = \frac{\zeta'_2(0)}{\zeta'_1(0)}.$$

进一步我们便得到

$$\arg \frac{w'_2(0)}{w'_1(0)} = \arg \frac{\zeta'_2(0)}{\zeta'_1(0)}. \quad (3.4)$$

我们知道, 复数 $\zeta'_j(0)$ 代表着曲线 γ_j 在起点处的一条切向量, 而 $w'_j(0)$ 代表 β_j 在起点处的切向量. 于是, $\arg(\zeta'_2(0)/\zeta'_1(0))$ 代表 γ_1 与 γ_2 在交点处的夹角, 而 $\arg(w'_2(0)/w'_1(0))$ 代表 β_1 与 β_2 在交点处的夹角 (见图 3.3.1).

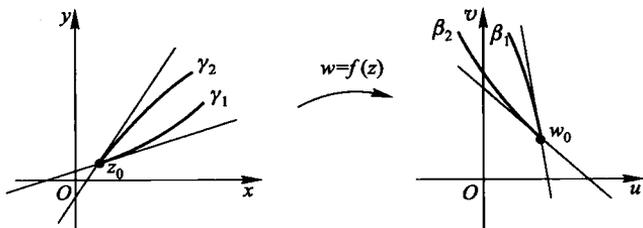


图 3.3.1

这样, (3.4) 式告诉我们: 若映射 $w = f(z)$ 在 z_0 点可导且 $f'(z_0) \neq 0$, 则在 z_0 点的任意两条相交曲线的夹角等于在映射 $w = f(z)$ 下的像的夹角.

总之, 我们证明了下面的定理:

定理 3.1 设 $f: D \rightarrow G$ 是区域 D 到区域 G 的一个解析映射, 且其导数处处不等于零. 则 $w = f(z)$ 保持相交曲线的夹角不变.

解析映射的这种性质, 通常称之为保角性.

例 3.1 坐标曲线 $\{x = \text{常数}\}$ 与 $\{y = \text{常数}\}$ 在变换 $w = z^2$ ($z \neq 0$) 下的像是彼此正交的抛物线族.

设 $c \neq 0$ 为一实常数, 并记水平线 $\{(x, y) : x = c\}$ 为 α_c . 令 $z = x + iy$ 与 $w = u + iv$, 那么, 在变换 $w = z^2$ 下 α_c 的像为

$$u = c^2 - y^2, \quad v = 2cy.$$

它是一条抛物线:

$$\gamma_c: u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2}.$$

另外, 我们考虑垂直线 $\beta_d = \{(x, y) : y = d\}$, 其中 $d \neq 0$ 是常数. 用类似前面的讨论可知, β_d 在变换 $w = z^2$ 下的像也是一条抛物线:

$$\delta_d: u = \frac{v^2}{4d^2} - d^2.$$

由于坐标曲线族 $\{\alpha_c\}$ 与 $\{\beta_d\}$ 彼此正交, 所以, 抛物线族 $\{\gamma_c\}$ 与 $\{\delta_d\}$ 也彼此正交. 见图 3.3.2.

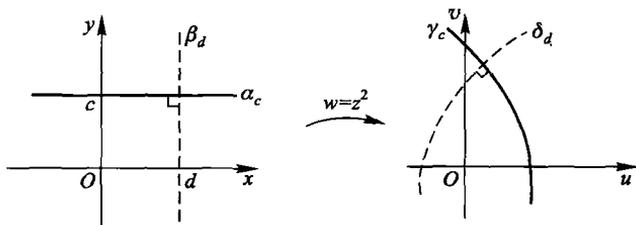


图 3.3.2

例 3.2(茹科夫斯基变换) 下列变换称为茹科夫斯基变换:

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

令 $z = x + iy = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($\rho > 0$), $w = u + iv$, 这时茹科夫斯基变换可以写成下列形式:

$$u = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \theta, \quad v = \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \theta. \quad (3.5)$$

假定 $\rho > 1$, 并考虑圆周 $c_\rho = \{(x, y) : x^2 + y^2 = \rho^2\}$. 它的像是一条椭圆周:

$$e_\rho: \frac{u^2}{\frac{1}{4} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right)^2} = 1,$$

其长半轴为 $\frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right)$, 而其短半轴为 $\frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right)$.

当 $\rho < 1$ 时, 上述椭圆方程和其长半轴不变, 但其短半轴换成 $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} - \rho \right)$.

当 $\rho = 1$ 时, 我们有 $u = \cos \theta, v = 0$. 可见, 单位圆周的像是 w 平面实轴上的区间 $[-1, 1]$.

现在, 我们考虑射线

$$\gamma_\theta : x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta \quad (\rho > 1).$$

由 (3.5) 可以看出, 在茹科夫斯基变换下, γ_θ 的像是双曲线:

$$h_\theta : \frac{u^2}{(\cos \theta)^2} - \frac{v^2}{(\sin \theta)^2} = 1.$$

对于 $\rho < 1$ 时所对应的射线, 其讨论完全类似.

由于圆周 c_ρ 与射线 γ_θ 彼此正交, 故由定理 3.1 推出, 它们的像——椭圆周 e_ρ 与双曲线 h_θ 也彼此正交. 见图 3.3.3.

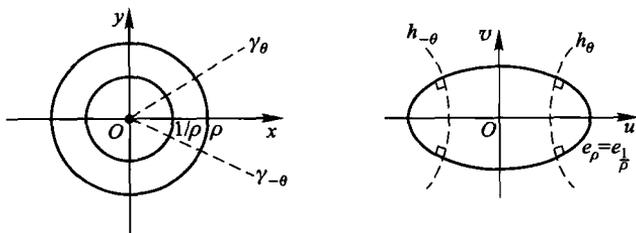


图 3.3.3

在结束本节时, 我们要留一个思考题, 它是我们证明定理 3.1 的基础.

思考题 设 $z = z(t)$ 是 $[0, 1]$ 中的一个连续的复值函数. 这时, 这个映射的像可以视为一条曲线, 其起点为 $z(0)$. 假如极限

$$z'(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{z(t) - z(0)}{t}$$

存在, 且不为零, 试从直观上说明:

(1) $z'(0)$ 代表曲线 $z = z(t)$ 在起点处的一条切向量, 其方向指向参数 t 增加时曲线上的点的移动方向;

(2) $\arg z'(0)$ 等于切向量与实轴正向的夹角 (见图 3.3.4).

(注: 像通常在微积分中那样, 这里曲线在一点的切线, 被理解为在该点处其割线的极限.)

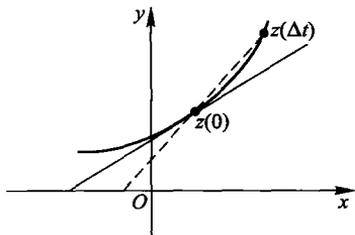


图 3.3.4

习题 3.3

1. 设 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域 D 内解析, 且其导数在 D 内处处不等于零. 试用柯西 - 黎曼条件直接证明, 在映射 $w = f(z)$ 下坐标直线 $\{x = \text{常数}\}$ 与 $\{y = \text{常数}\}$ 的像彼此正交.

提示 证明 $u_x v_x + u_y v_y = 0$.

2. 设 $w = f(z)$ 在区域 D 内解析, 导数 $f'(z)$ 在 D 中连续^[注], 并在一点 $z_0 \in D$ 的导数为 $f'(z_0)$, 证明: 映射 $w = f(z)$ 在 z_0 点是局部一一的, 也即存在 $\delta > 0$ 使得 f 在 U_δ 上的限制 $f|_{U_\delta}$ 是一一映射, 其中 $U_\delta = \{z : |z - z_0| < \delta\}$.

提示 将映射 $w = f(z)$ 看作 $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$, 并注意到该映射在 z_0 点的雅可比行列式 $J = |f'(z_0)|^2 > 0$.

3. 设 α 是单位圆 Δ 中的一点, 并考虑分式线性变换

$$w = L(z) := \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}.$$

注 下一章将证明区域中一个解析函数的导数总是连续的, 因此这个条件实际上是不必要的.

证明: (1) $L(\Delta) = \Delta$, $L(\partial\Delta) = \partial\Delta$;

(2) 过原点的每一条直线在 $w = L(z)$ 下的像必与单位圆周正交 (见图 3.3.5).

提示 利用习题 1.1 中的第 8 题与第 9 题的结果证明 (1). 利用解析映射的保角性证明 (2).

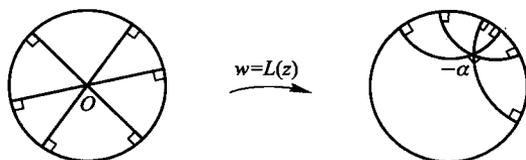


图 3.3.5

第四章 柯西定理与柯西公式

§1. 复变量函数的曲线积分

1.1 复变量函数的积分

在这一段中,我们先讨论复变函数在区间上的定积分与区域上的二重积分,然后重点讨论复变函数的曲线积分.

现在,我们定义复变函数的定积分. 设 $w = f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ (或 $[b, a]$) 上的复值连续函数. 又设 $f(x) = u(x) + iv(x)$, 其中 $u(x)$ 与 $v(x)$ 分别是 $f(x)$ 的实部与虚部. 那么, $u(x)$ 与 $v(x)$ 都在 $[a, b]$ 上连续. 我们定义

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^b u(x)dx + i \int_a^b v(x)dx.$$

显然,这样定义的复变量函数的定积分与实函数的定积分有许多类似性质:

(1) 对于任意的实数 a 与 b , 总有

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

(2) 对于任意的常数 C_1 与 C_2 , 我们有

$$\int_a^b [C_1 f(x) + C_2 g(x)]dx = C_1 \int_a^b f(x)dx + C_2 \int_a^b g(x)dx.$$

(3) 若 $a < b$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则有

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

前两条显然成立, 唯一需要证明的是性质 (3). 现在证明这条性质. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的积分的辐角为 θ , 也即

$$\int_a^b f(x) dx = e^{i\theta} \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

那么

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &= e^{-i\theta} \int_a^b f(x) dx = \int_a^b e^{-i\theta} f(x) dx \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} [e^{-i\theta} f(x)] dx + i \int_a^b \operatorname{Im} [e^{-i\theta} f(x)] dx. \end{aligned}$$

等式左端项为实数, 因而等式右端的第二项应该等于零. 于是, 我们有

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \int_a^b \operatorname{Re} [e^{-i\theta} f(x)] dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

这里用到 $\operatorname{Re} [e^{-i\theta} f(x)] \leq |f(x)|$.

假定 $w = f(z)$ 在区域 D 中连续, 且 $f(x + iy)$ 的实部与虚部分别为 $u = u(x, y)$ 与 $v = v(x, y)$. 我们定义

$$\iint_D f(z) dx dy := \iint_D u(x, y) dx dy + i \iint_D v(x, y) dx dy.$$

复变函数的二重积分与实函数的二重积分在许多基本性质上是相同的. 这里我们无须一一列出, 而只指出下列性质:

$$\left| \iint_D f(z) dx dy \right| \leq \iint_D |f(z)| dx dy \leq M \operatorname{mes}(D),$$

其中 $M = \max \{|f(z)| : z \in D\}$, 而 $mes(D)$ 是区域 D 的面积. 这个估计式的证明类似于定积分的性质 (3) 的证明.

下面讨论曲线积分. 为此, 我们先给出有关曲线的若干术语与记号.

我们知道, 复平面上的一条曲线是指实数轴上的一个区间到复平面的一个连续映射:

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto z = z(t),$$

其中 $z = z(t)$ 是 $[a, b]$ 上的一个连续的复值函数. 设 $x = x(t)$ 与 $y = y(t)$ 分别是 $z(t)$ 的实部与虚部. 那么, 曲线 γ 的实参数方程是

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad a \leq t \leq b.$$

用这种方式表示一条曲线是大家已经熟悉的.

假如 $z = z(t)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导数, 也即 $x = x(t)$ 与 $y = y(t)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导数 $x'(t)$ 与 $y'(t)$, 并且满足条件

$$|z'(t)|^2 = [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0, \quad \forall t \in [a, b],$$

则我们称曲线 γ 为一条光滑曲线.

光滑曲线的几何意义是: 曲线处处有切线可言, 并且切线方向连续变化.

如果存在有限个点 $\{t_j\} (j = 0, 1, \dots, n)$, 满足

$$t_0 = a < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b,$$

并使得 $x = x(t)$ 与 $y = y(t)$ 限制在每一个闭区间 $[t_{j-1}, t_j]$ 上都对应一条光滑曲线弧, 则我们称曲线 γ 为逐段光滑曲线.

逐段光滑曲线的表示式 $z = z(t)$ 有可能在分段的端点 $x(t_j)$ 处左右导数不等. 这便是逐段光滑的概念广于光滑概念的地方.

根据微积分的知识, 逐段光滑曲线是一条可求长曲线. 也就是说, 逐段光滑曲线有长度可言. 在光滑弧段上, 曲线的弧微分等于

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = |z'(t)| dt = |dz|.$$

设 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$ 是一条逐段光滑曲线. 假如我们规定了参数的变化方向 (由大变小或由小变大), 就为曲线选定了一种走向. 这时, 我们称 γ 是一条有定向曲线. 当然, 曲线的方向也可以用其他方式确定. 比如, 对于一条圆周, 我们可以用顺时针或逆时针来规定它的定向.

又设 $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 γ 上有定义, 其中 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 分别是 $f(x+iy)$ 的实部与虚部, 并且假定它们在 γ 上连续^[注].

在多元微积分中, 我们定义了关于 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在曲线 γ 上的第二型曲线积分, 并且知道, 在 γ 逐段光滑和 $u(x, y), v(x, y)$ 在 γ 连续条件下, 这种曲线积分是存在的. 现在, 我们用平面上的第二型曲线积分来定义 $f(z)$ 在逐段光滑曲线 γ 上的积分:

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

定义 设 γ 是一条有定向的逐段光滑曲线. 又设 $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在曲线 γ 上连续. 我们定义

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_{\gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

现在我们来解释这个定义的理由: 如果我们把 f 写成 $u + iv$ 并把 dz 写成 $dx + idy$, 那么从形式上看

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} [u(x, y) + iv(x, y)] (dx + idy).$$

注 这里我们作了较强的假定. 这一假定是为了避开关于曲线积分存在性的讨论.

也就是说,把等式右端积分中的被积函数展开就得到了上面的定义.

由定义可以看出,复变量函数的曲线积分相当于两个实函数在平面上的第二型曲线积分.

因此,我们强调指出:它的值依赖于曲线的定向. 设 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 是一条有定向的曲线. 今后,我们用 $-\gamma$ 来表示与之相反定向的同一条曲线. 这时我们有

$$\int_{\gamma} f(z)dz = - \int_{-\gamma} f(z)dz.$$

也就是说,积分方向的改变导致积分值变号.

像实函数的第二型积分一样,复变量函数的曲线积分对积分曲线具有可加性. 设 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto z = z(t)$ 是一条逐段光滑的有定向的曲线,并假定它可以分解为两条彼此衔接的子弧之并 $\gamma = \alpha \cup \beta$, 其中

$$\alpha : [a, c] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto z = z(t), \quad \beta : [c, b] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto z = z(t),$$

并且两个子弧的定向与 γ 的原有定向一致. 又设 $f(z)$ 在 γ 上连续, 则我们有

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\alpha} f(z)dz + \int_{\beta} f(z)dz.$$

此外,假如一条逐段光滑的有定向的曲线 γ 有两个连续函数 $f(z)$ 与 $g(z)$, 那么对于任意复数 C_1 与 C_2 , 我们有

$$\int_{\gamma} [C_1 f(z) + C_2 g(z)]dz = C_1 \int_{\gamma} f(z)dz + C_2 \int_{\gamma} g(z)dz.$$

与微积分中第二型曲线积分类似, 我们有

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)|ds \leq ML,$$

其中 M 是 $|f(z)|$ 在 γ 上的上界, 而 L 是 γ 的弧长. 这一估计式的严格证明, 将在下面给出.

1.2 复变量函数曲线积分的计算

现在假定 γ 为一条逐段光滑的曲线, 其参数表示为

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t),$$

且 $f(z)$ 在 γ 上连续. 此外, 我们还假定: 曲线 γ 的定向恰好相当于参数 t 增加时动点移动方向.

在这些假定之下, 根据复变量函数曲线积分的定义, 容易推出下列计算积分的公式:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt,$$

其中 $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

利用前面有关定积分的性质 (3), 并注意到 $|z'(t)| dt$ 就是曲线 γ 的弧微分 ds , 我们有

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(z)| |z'(t)| dt = \int_{\gamma} |f(z)| ds \leq ML,$$

其中 L 是 γ 的弧长, 而 M 是 $|f(z)|$ 在 γ 上的最大值.

在一般情况下, 曲线 γ 的定向的选择并无一定之规. 但是, 当 γ 是一条简单闭曲线时, 习惯上 γ_+ 总代表所谓正向, 即恰好使得 γ 的内部总是落在左侧的定向. 此时, 相应的曲线积分记作

$$\oint_{\gamma_+} f(z) dz.$$

例 1.1 设 γ 是以 a 为中心、以 $r > 0$ 为半径的圆周, n 为整数. 证明积分

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_+} (z-a)^n dz = \begin{cases} 1, & \text{当 } n = -1, \\ 0, & \text{当 } n \neq -1. \end{cases}$$

证 首先,我们给出 γ 的参数表示:

$$z = a + r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

这时参数 θ 的增加恰好对应于逆时针方向,因而代表 γ 的正向. 这样,

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n r (-\sin \theta + i \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^{n+1} (\cos \theta + i \sin \theta)^{n+1} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^{n+1} \{ \cos[(n+1)\theta] + i \sin[(n+1)\theta] \} d\theta. \end{aligned}$$

由此式立即看出: 当 $n+1=0$ 时, 显然 $I_n=1$; 而当 $n+1 \neq 0$ 时, I_n 的实部与虚部分别是 $\cos[(n+1)\theta]$ 与 $\sin[(n+1)\theta]$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的积分, 从而等于 0. 证毕.

在这个例子中, 如果使用复数的指数表示, 证明的叙述将会更简洁. 事实上, γ 的参数方程可以写成 $z = z(\theta) := a + re^{i\theta}$. 这样,

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} r e^{ni\theta} z'(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^{n+1} e^{(n+1)i\theta} d\theta.$$

后面的论述与例 1.1 中的相同.

例 1.2 设 α 是点 0 到点 $\pi + i\pi$ 的直线, 其定向是 0 走向 $\pi + i\pi$. 又设 β 是一条折线, 由点 0 到点 π 的折线与点 π 到点 $\pi + i\pi$ 的折线组成, 其定向也是由 0 走向 $\pi + i\pi$. 试计算

(1) $\int_{\alpha} e^z dz$;

(2) $\int_{\beta} e^z dz$.

解 α 的参数表示为 $z = z(t) = t + it \quad (0 \leq t \leq \pi)$. 根据 α

的定向, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{\alpha} e^z dz &= \int_0^{\pi} e^{t+it}(1+i)dt = (1+i) \int_0^{\pi} e^t(\cos t + i \sin t)dt \\ &= (1+i) \left(\int_0^{\pi} e^t \cos t dt + i \int_0^{\pi} e^t \sin t dt \right).\end{aligned}$$

经过简单的定积分计算, 我们得到

$$\int_0^{\pi} e^t \cos t dt = \frac{1}{2}(-e^{\pi} - 1), \quad \int_0^{\pi} e^t \sin t dt = \frac{1}{2}(e^{\pi} + 1).$$

代入上式后我们就有

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \frac{1}{2}(1+i)[(-e^{\pi} - 1) + i(e^{\pi} + 1)] = -e^{\pi} - 1.$$

另外, 根据 β 的定义与定向, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} e^z dz &= \int_0^{\pi} e^t dt + \int_0^{\pi} e^{\pi+it} d(it) \\ &= e^{\pi} - 1 + ie^{\pi} \int_0^{\pi} (\cos t + i \sin t) dt \\ &= e^{\pi} - 1 - 2e^{\pi} = -e^{\pi} - 1.\end{aligned}$$

有些读者可能会发现下列的做法: $F(z) = e^z$ 是 $f(z) = e^z$ 的一个原函数, 即 $F'(z) = f(z)$. 因此立刻得到

$$\int_{\alpha} e^z dz = \int_{\beta} e^z dz = F(\pi + i\pi) - F(0) = -e^{\pi} - 1.$$

但是, 这里用到了一个函数的原函数的概念, 而这些内容是后面一节要讨论的主题.

1.3 积分与路径无关问题和原函数

设 D 是一个区域, 而 $f(z)$ 是 D 中的一个连续函数. 如果对于区域 D 中的任意两点 a 与 b ($a \neq b$), 和任意一条起点为 a 、终点

为 b 的逐段光滑的曲线 α , 积分

$$\int_{\alpha} f(z) dz$$

的值只依赖于点 a 与 b , 而与 α 的选择无关, 则我们称该积分在区域 D 内与路径无关.

定理 1.1 设 D 是一个区域, 而 $f(z)$ 是 D 中的一个连续函数. 则积分

$$\int_{\alpha} f(z) dz$$

在 D 内与路径无关的充要条件是对于区域 D 中的任意一条逐段光滑的闭曲线都有

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

证 证明与平面上实函数的曲线积分的情形完全相同. 现在, 我们假定 $f(z)$ 的积分在 D 内与路径无关. 设 γ 是区域 D 中的任意一条逐段光滑的有向闭曲线. 我们在 γ 上任意取定两点 a 与 b . 那么, 这两个点将 γ 分解成两段弧之并. 把 γ 上从 a 到 b 的一段弧记作 α , 而把另一段弧记作 β . 根据积分与路径无关的假定,

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \int_{-\beta} f(z) dz,$$

其中 $-\beta$ 表示 β 的反向. 这样,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha} f(z) dz + \int_{\beta} f(z) dz = 0.$$

这就证明了条件的必要性.

现在证明条件的充分性. 假定 $f(z)$ 在 D 中任意一条闭路 γ 上的积分等于零. 又设 a 与 b 是 D 中任意两个不同点. 对于任意

两条逐段光滑的从 a 到 b 的曲线 α 与 $\tilde{\alpha}$, 我们取 $\beta = -\tilde{\alpha}$. 这时 α 与 β 的并构成了一条闭曲线, 那么

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\alpha \cup \beta} f(z) dz = \int_{\alpha} f(z) dz + \int_{\beta} f(z) dz \\ &= \int_{\alpha} f(z) dz - \int_{\tilde{\alpha}} f(z) dz. \end{aligned}$$

这表明积分与路径无关. 证毕.

若在一个区域 D 内的解析函数 $F(z)$ 的导函数是 $f(z)$, 即

$$F'(z) = f(z), \quad \forall z \in D,$$

则称 $F(z)$ 是 $f(z)$ 在 D 内的一个原函数.

定理 1.2 设 $f(z)$ 在区域 D 内连续, 并且假定曲线积分

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

在 D 内与路径无关. 则函数

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

在 D 内解析, 并且是 $f(z)$ 在 D 内一个原函数. 这里 z_0 是 D 内的一个固定点.

注 积分

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

表示 $f(z)$ 沿着 D 中任意一条从 z_0 到 z 的逐段光滑的曲线的积分. 根据 $f(z)$ 的积分与路径无关的假定, 上述积分的值仅依赖于点 z 与 z_0 . 又由于 z_0 是一个固定点, 所以这个积分是 z 的一个函数.

证 对于任意给定的一点 $z \in D$, 我们考虑一个复数 $\Delta z \neq 0, |\Delta z|$ 充分小, 使得 $z + \Delta z \in D$. 这时我们有

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta.$$

现在, 我们取一条从 z 到 $z + \Delta z$ 的直线弧:

$$\alpha: [0, |\Delta z|] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \zeta(t) = z + te^{i\theta},$$

其中 $e^{i\theta} = \Delta z/|\Delta z|$. 当 $|\Delta z|$ 足够小时, 显然直线弧 α 落在 D 中. 这时,

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{\alpha} f(\zeta) d\zeta = \int_0^{|\Delta z|} f(z + te^{i\theta}) e^{i\theta} dt.$$

由此推出

$$\begin{aligned} |F(z + \Delta z) - F(z) - f(z)\Delta z| &= \left| \int_0^{|\Delta z|} [f(z + te^{i\theta}) - f(z)] e^{i\theta} dt \right| \\ &\leq \int_0^{|\Delta z|} |f(z + te^{i\theta}) - f(z)| dt \\ &= o(|\Delta z|), \quad \Delta z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

最后一步用到了函数 $f(z)$ 的连续性. 由上式立刻得到

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z).$$

定理证毕.

容易证明下列两个命题:

命题 1.1 若函数 $f(z)$ 在 D 中连续, 且其积分与路径无关, 并有两个原函数 $F_1(z)$ 与 $F_2(z)$, 那么 $F_1(z) = F_2(z) + C$, 其中 C 是一个常数.

命题 1.2 设连续函数 $f(z)$ 在区域 D 内的曲线积分与路径无关. 又设 $F(z)$ 是 $f(z)$ 在 D 内的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a).$$

显然, 这一公式是微积分基本定理的推广.

上述两命题的证明留作习题.

习题 4.1

1. 计算下列曲线积分, 其中 γ 是点 1 与 i 之间的直线段, 其定向由 1 走向 i :

(1) $\int_{\gamma} (z^2 + 2z + 1)dz$;

(2) $\int_{\gamma} e^z dz$.

2. 设 $c = \{z : |z| = r\}$, 求下列曲线积分

(1) $\oint_{c_+} z^m \bar{z}^n dz$, 其中 $m, n \in \mathbb{Z}$;

(2) $\oint_{c_+} e^{z^2} dz$.

3. 设 $c_R = \{z : |z| = R\}$, 而 c_R^+ 表示 c_R 的逆时针方向. 又设 $P(z)$ 是一个次数大于 2 的多项式:

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \quad (n > 2).$$

证明:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{c_R^+} \frac{dz}{P(z)} = 0.$$

4. 设 $\phi(z)$ 在圆周 $c = \{z : |z| = r\}$ 上连续. 令

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_+} \frac{\phi(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \quad (|z| < r),$$

证明: $|f(z)| \leq M(r - |z|)^{-1}$, 其中 $M := \max \{|\phi(\zeta)| : \zeta \in c\}$.

5. 设 $R = \{z = x + iy : a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$ 是一个矩形, ∂R 表示它的边界. 我们假定 ∂R 的定向是逆时针方向, 证明: 积分

$$\oint_{\partial R} (z - a)dz = 0,$$

其中 a 是任意一个复数.

6. 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内积分与路径无关并有两个原函数 $F_1(z)$ 与 $F_2(z)$. 证明: $F_1(z) - F_2(z)$ 在 D 内是常数.

7. 设连续 $f(z)$ 在 D 内曲线积分与路径无关, 并假定 $F(z)$ 是 $f(z)$ 在 D 内的任意一个原函数. 那么, 对任意一条从起点为 $a \in D$ 而终点为 $b \in D$ 的逐段光滑的曲线 γ , 都有

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(b) - F(a),$$

这里 γ 的定向为从起点到终点的走向.

§2. 柯西定理

2.1 柯西定理与格林公式

柯西定理有许多陈述形式, 但最基本形式如下:

定理 2.1(柯西定理) 设 D 是一个单连通区域, 而 $f(z)$ 是区域 D 内的解析函数. 又设 γ 是 D 内的任意一条逐段光滑简单闭曲线. 则对于 γ 任意一种定向, 我们有

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

从历史上看, 这个定理的最初形式要比上述定理条件要强. 无论是柯西, 还是黎曼, 他们在叙述和证明这条定理时, 都附加了解析函数 $f(z)$ 的导数 $f'(z)$ 连续的条件. 但是后来人们发现, 这个条件是多余的. 实际上, 在后面一节的讨论中, 我们可以看到这样的结论: 一个解析函数的导函数仍是解析函数, 从而推出解析函数的导数连续的结论.

不过, 在附加了 $f'(z)$ 连续的条件之后, 柯西定理的证明要简单得多, 并且它揭示了柯西定理与格林公式的关系. 所以, 我们还是先来叙述在附加这样条件之后的证明.

命题 2.1 设 D 是一个单连通区域. 又设函数 $f(z)$ 在 D 内解析, 且其导数 $f'(z)$ 在 D 内连续. 则对于 D 中的任意一条有定向的逐段光滑简单闭曲线 γ , 我们有

$$\oint_{\gamma_+} f(z)dz = 0.$$

证 设 $f(x+iy)$ 的实部与虚部分别是 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$. 根据定理假定, $f(z)$ 在 D 中解析, 而且 $f'(z)$ 在 D 中连续.

由 $f(z)$ 导数的存在性, 可知 u, v 偏导数存在, 并有

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = u_x(x, y) + iv_x(x, y),$$

$$f'(z) = -i\frac{\partial f}{\partial y} = -iu_y(x, y) + v_y(x, y).$$

这样, 再由 $f'(z)$ 的连续性可知, u_x, v_x, u_y, v_y 在 D 内连续. 因此, 我们可以对于 u, v 沿曲线 γ 的第二型曲线积分使用格林公式.

由格林公式, 我们有

$$\oint_{\gamma_+} u(x, y)dx - v(x, y)dy = - \iint_D u_y(x, y) + v_x(x, y)dxdy;$$

$$\oint_{\gamma_+} v(x, y)dx + u(x, y)dy = \iint_D u_x(x, y) - v_y(x, y)dxdy.$$

将第二个式子乘以 i 加到第一个式子上, 就得到

$$\oint_{\gamma_+} f(z)dz = - \iint_D (u_y + v_x)dxdy + i \iint_D (u_x - v_y)dxdy = 0.$$

这里最后一步用到了柯西 - 黎曼方程. 证毕.

这个命题实际上就是格林公式的应用. 假定 $f(z)$ 不一定解析, 而是一个一般复变函数, 但同样假定 $f(x+iy)$ 对于 x, y 有连续偏导数, 这时我们有

$$\oint_{\gamma_+} f(z)dz = 2i \iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x+iy)dxdy.$$

此式可以看作是格林公式的复形式, 其证明留作习题.

2.2 柯西定理的古尔萨证明

1900年法国数学家古尔萨 (Goursat) 发表了柯西定理的新证明, 其中不需要 $f'(z)$ 连续性假定, 也不需要 $f(z)$ 的实部与虚部使用格林公式.

现在我们介绍柯西定理的古尔萨证明. 这个证明较长, 我们将它分成三步.

定理 2.1 的证明

第一步 证明当给定的简单闭曲线 γ 是一个三角形的边缘时定理成立.

设 T 是 D 中的任意一个三角形, ∂T 代表 T 的边界所形成的闭曲线. 下面我们要证明,

$$\oint_{\partial T} f(z) dz = 0.$$

这里 ∂T 的定向是逆时针方向.

我们令

$$I(T) = \oint_{\partial T} f(z) dz.$$

今后我们对于其他任意一个三角形 T' , 我们同样用记号 $I(T')$ 表示 $f(z)$ 沿 T' 的边界曲线的积分, 其积分方向是逆时针方向.

现在, 我们用直线段连接三角形 T 的三条边的中点, 将 T 分解成 4 个全等的三角形 T^1, T^2, T^3 和 T^4 , 并规定它们的定向都是逆时针方向 (如图 4.2.1 所示). 注意到下述事实: 在任意两个小三角形的公共边界上积分走向相反, 我们便得到

$$\oint_{\partial T} f(z) dz = \oint_{\partial T^1} f(z) dz + \oint_{\partial T^2} f(z) dz + \oint_{\partial T^3} f(z) dz + \oint_{\partial T^4} f(z) dz,$$

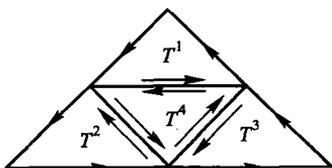


图 4.2.1

也就是

$$I(T) = I(T^1) + I(T^2) + I(T^3) + I(T^4).$$

因此, 我们有

$$|I(T)| \leq |I(T^1)| + |I(T^2)| + |I(T^3)| + |I(T^4)|.$$

这样, 在 4 个小三角形中至少有一个三角形, 记之为 T_1 , 使得

$$|I(T_1)| \geq \frac{1}{4}|I(T)|.$$

我们再用同样的方式, 将 T_1 分解成 4 个全等的三角形, 并重复上述讨论, 可知在这 4 个小三角形中有至少一个三角形, 记之为 T_2 , 使得

$$|I(T_2)| \geq \frac{1}{4}|I(T_1)| \geq \frac{1}{4^2}|I(T)|.$$

如此继续做下去, 我们便得到了一个三角形序列 $\{T_n\}$, 它们的周长趋于零, 并有

$$|I(T_n)| \geq \frac{1}{4^n}|I(T)|, \quad n = 1, 2, \dots$$

根据复数域的完备性, 存在一个复数 z_0 属于所有的三角形 $T_n, n = 1, 2, \dots$

显然, $z_0 \in D$. 根据 $f(z)$ 在 z_0 的可导性, 对于任意给定的一个正数 ε , 存在一个 $\delta > 0$, 使得

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon, \quad \text{只要 } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

由此推出

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon|z - z_0|, \text{ 只要 } |z - z_0| < \delta.$$

另外一方面, 对于上述 $\delta > 0$, 存在一个自然数 N , 使得

$$T_n \subset \{z : |z - z_0| < \delta\}, \text{ 只要 } n > N.$$

由命题 2.1 可得:

$$\oint_{\partial T_n} [f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)] dz = 0.$$

于是, 我们有

$$I(T_n) = \oint_{\partial T_n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] dz.$$

那么, 当 $n > N$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} |I(T_n)| &\leq \oint_{\partial T_n} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| ds \\ &\leq \varepsilon \oint_{\partial T_n} |z - z_0| ds \leq \varepsilon d_n L_n, \end{aligned}$$

其中 d_n 表示 T_n 的直径, 而 L_n 表示 ∂T_n 的周长.

设 d 与 L 分别为三角形 T 的直径与 ∂T 的周长. 根据 T_n 的构造方式, 注意到 T_n 与 T 相似, 其边长相差 2^{-n} 倍, 不难看出 $d_n = 2^{-n}d$, 而 $L_n = 2^{-n}L$. 这样, 我们得到

$$|I(T_n)| \leq 4^{-n}\varepsilon dL, \text{ 只要 } n > N.$$

另外一方面, 我们已经知道, $|I(T_n)| \geq 4^{-n}I(T)$. 于是

$$|I(T)| \leq 4^n |I(T_n)| \leq \varepsilon dL, \text{ 只要 } n > N.$$

由 ε 的任意性, 立即推出 $I(T) = 0$.

第二步 当简单闭曲线 γ 是由有限条直线弧组成折线时证明定理成立.

在这种情况下, 我们总可以用互不重叠的有限个三角形布满 γ 所围成的多边形, 如图 4.2.2 所示.

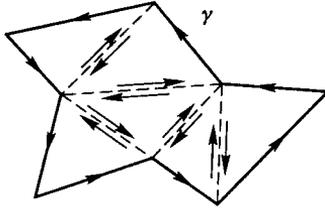


图 4.2.2

我们考察沿着每一个三角形的边界曲线积分, 其定向是逆时针方向. 很容易发现, 两个相邻的三角形的公共边界, 其积分走向恰好相反. 于是, 函数 $f(z)$ 在 γ 上的积分刚好等于 $f(z)$ 沿所有三角形的边界积分之和. 根据第一步的结论, $f(z)$ 沿每一个三角形的积分等于零. 于是, 函数 $f(z)$ 在整条闭折线 γ 上积分为零.

第三步 在一般情况下证明定理的结论.

假定 γ 是任意一条逐段光滑的简单闭曲线, 并规定其定向为正向. 我们要用折线来逼近 γ , 从而利用上一步的结论, 来证明要证的结论.

设 U 是 γ 的内部所构成的区域, $\bar{U} = U \cup \gamma$. 令 $\eta > 0$ 是一个足够小的正数, 使得集合

$$F := \{z : d(z, \bar{U}) \leq \eta\} \subset D,$$

其中 $d(z, \bar{U})$ 表示点 z 到 \bar{U} 的距离, 即

$$d(z, \bar{U}) := \inf\{|z - \zeta| : \zeta \in \bar{U}\}.$$

显然, F 是一个有界闭集合, 并且对于任意一点 $\zeta \in \gamma$, 圆盘 $\{z : |z - \zeta| < \eta\}$ 必落在 F 之中.

设 ε 是任意给定的正数. 根据 $f(z)$ 在 F 的一致连续性, 对于给定的 ε , 存在一个正数 δ , 使得

$$|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon, \quad \text{只要 } |z - \zeta| < \delta \text{ 且 } z, \zeta \in F.$$

不失一般性, 我们假定 $\delta < \eta$.

假定给定的闭曲线 γ 的参数方程是: $z = z(t)$ ($a \leq t \leq b$), 其中 $z(t)$ 在 $[a, b]$ 中分段光滑, 且 $|z'(t)| \neq 0$. 设有 $n+1$ 个点 $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, 它们满足下列条件:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

我们将点 $z(t_k)$ 记作 z_k , 并将弧 $z = z(t)$ ($t_{k-1} \leq t \leq t_k$) 记为 γ_k ($k = 1, 2, \dots, n$). 假定这些分点足够稠密, 使得

$$\max \{l(\gamma_k) : k = 0, 1, \dots, n\} < \delta,$$

其中 $l(\gamma_k)$ 表示 γ_k 的弧长. 这里的 δ 是前面根据 ε 找的.

这时我们有

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz.$$

注意到在 γ_k 上任意一点 z , 都有 $|f(z) - f(z_k)| < \varepsilon$, 立即得到

$$\begin{aligned} |I| &= \left| \oint_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z_k) dz \right| + \varepsilon L \\ &= \left| \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta z_k \right| + \varepsilon L, \end{aligned}$$

其中 L 是 γ 的弧长, 而 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ (见图 4.2.3).

(注: 这里用到

$$\int_{\gamma_k} dz = z_k - z_{k-1}.$$

请读者自己说明这是为什么?)

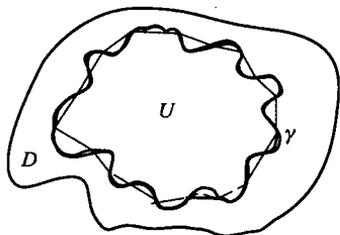


图 4.2.3

我们用 τ_k 表示点 z_{k-1} 到 z_k 的直线弧. 根据 F 的定义与 $\delta < \eta$ 的假定, $\tau_k \subset F$ ($k = 1, 2, \dots, n$). 那么

$$f(z_k)\Delta z_k = \int_{\tau_k} f(z_k)dz = \int_{\tau_k} f(z)dz + \int_{\tau_k} [f(z_k) - f(z)]dz.$$

注意到在 τ_k 上 $|f(z) - f(z_k)| < \varepsilon$, 我们有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n f(z_k)\Delta z_k \right| &\leq \left| \sum_{k=1}^n \int_{\tau_k} f(z)dz \right| + \varepsilon \sum_{k=1}^n |\Delta z_k| \\ &\leq \left| \int_{\tau} f(z)dz \right| + \varepsilon L, \end{aligned}$$

其中 τ 表示直线弧 τ_k 组成的闭的折线. 这里我们用到了 $\sum_{k=1}^n |\Delta z_k| \leq L$, 这是因为该折线之周长不超过 γ 的弧长.

根据第二步的讨论, 我们有

$$\int_{\tau} f(z)dz = 0.$$

于是, 我们得到

$$\left| \sum_{k=1}^n f(z_k)\Delta z_k \right| \leq \varepsilon L.$$

将此估计式代入到前面关于积分 I 的估计式, 就有

$$|I| = \left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq 2\varepsilon L.$$

由 ε 的任意性, 立刻得到 $I = 0$.

定理 2.1 证毕.

2.3 柯西定理的推广形式

定理 2.2 设 D 是一个单连通区域, 而 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数. 则对于 D 中任意一条逐段光滑的闭曲线 γ 都有

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

这条定理将原来定理 2.1 中的积分曲线由逐段光滑简单闭曲线放宽到任意逐段光滑闭曲线. 但这一结论依然可以由定理 2.1 推出. 这里我们只给出它的直观说明. 事实上, 任意一条逐段光滑闭曲线, 总可以分解成有限条彼此连接的简单闭曲线之并 (见图 4.2.4). 因此, 应用定理 2.1 就能推出所要的结论.

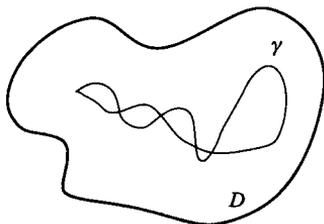


图 4.2.4

推论 单连通区域内的解析函数总有原函数.

定理 2.1 中的曲线 γ 可以不在区域的内部, 而是区域的边界.

定理 2.3 设 D 为单连通区域, 其边界为逐段光滑的若尔当曲线 γ . 又设 $w = f(z)$ 在 D 内解析, 在闭区域 \bar{D} 上连续. 则

$$\oint_{\gamma^+} f(z) dz = 0.$$

这个定理证明的思路如下: 用一串区域内的简单闭曲线 $\{\gamma_n\}$ 去逼近 γ . 而根据 $f(z)$ 在 \bar{D} 上的一致连续性得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{\gamma_n} f(z) dz = \oint_{\gamma} f(z) dz.$$

再应用定理 2.1 即得到所要的结论. 虽然此思路很简单, 但是写起来却十分繁琐. 我们此处略去它的证明.

定理 2.3 可以推广到多连通区域的情形:

定理 2.4 设 D 是一个区域, 其边界由 $n+1$ ($n \geq 0$) 条逐段光滑的简单闭曲线

$$\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$$

组成, 其中 $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ 落在 γ_0 的内部. 又设 $f(z)$ 在 D 解析, 在 $\bar{D} = D \cup \partial D$ 上连续. 如果我们将 γ_0 的定向设为逆时针方向, 而其他边界曲线的定向设为顺时针方向, 并且把 D 的边界记为 γ , 那么

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

这个定理可以由定理 2.3 推出. 事实上, 只要作几条辅助线即可将区域变成单连通区域, 如图 4.2.5 所示.

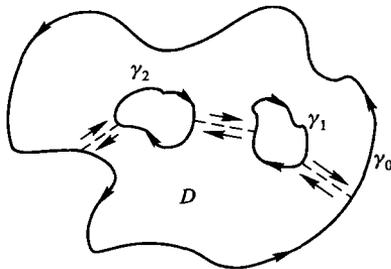


图 4.2.5

定理 2.4 中关于边界的定向的基本特征是曲线的走向使得区域总落在前进方向的左侧. 今后, 我们称这样的边界曲线的定向为关于区域 D 的正向.

2.4 解析函数的原函数

回顾本章定理 1.1 和定理 1.2, 由定理 2.2 立刻推出下列定理:

定理 2.5 设 D 是一个单连通区域, 而 $f(z)$ 是 D 中的一个解析函数. 则 $f(z)$ 在区域 D 内的曲线积分与路径无关. 特别地, $f(z)$ 在 D 中有原函数.

这样, 对于单连通域中的解析函数的曲线积分, 可以通过求原函数的方法来计算 (见命题 1.2).

例 2.1 证明: 对于任意一条从 0 到 $2\pi i$ 的逐段光滑的曲线 γ , 总有

$$\int_{\gamma} e^z (\sin z + \cos z) dz = i \sinh(2\pi).$$

解 很明显, $e^z \sin z$ 是 $e^z (\sin z + \cos z)$ 的一个原函数. 由命题 1.1 与命题 1.2 可知,

$$\int_{\gamma} e^z (\sin z + \cos z) dz = e^z \sin z \Big|_0^{2\pi i} = e^{2\pi i} \sin(2\pi i) = i \sinh(2\pi).$$

最后我们指出: 在解析函数论中, 利用原函数求曲线积分的值, 这件事并不像微积分中利用牛顿 - 莱布尼茨公式计算定积分那么重要. 在这方面无须做过多的练习.

习题 4.2

1. 设 γ 是一条逐段光滑简单闭曲线, 其内部记为 D . 又设 $f(x + iy)$ 在 $\bar{D} = D \cup \{\gamma\}$ 中有连续的偏导数 $f_x(x + iy)$ 与 $f_y(x + iy)$. 证明:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2i \iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x + iy) dx dy,$$

其中曲线积分的方向为逆时针方向.

提示 参照命题 2.1 的证明.

2. 设 γ 是单位圆周, 其定向为逆时针方向. 求积分

$$I = \oint_{\gamma} (z^3 e^{z+1} + e^z(z+1) + |z|^2 \cos z) dz.$$

3. 用你所知道的办法求下列积分的值, 并说明其理由:

(1) $\int_0^{3+i\pi} e^z dz$;

(2) $\int_0^{\pi} \sin z dz$;

(3) $\int_0^z (\zeta^5 + 5\zeta^2 + 1) d\zeta$;

(4) $\int_0^z \zeta^n dz$ (其中 n 为正整数).

4. 证明分部积分公式: 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在单连通区域中解析, 则对于 D 中任意逐段光滑的弧 γ , 我们有

$$\int_{\gamma} f(z)g'(z)dz = f(z)g(z)\Big|_a^b - \int_{\gamma} f'(z)g(z)dz.$$

其中 a 与 b 分别为 γ 的起始点与终端点.

5. 证明:

$$\int_1^z \frac{1}{\zeta} d\zeta = \ln |z| + i \arg z,$$

其中积分路径为区域 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 的任意一条以 $z = 1$ 为起始点, 以 z 为终端点的逐段光滑曲线.

6. 设 Γ 为以 0 与 1 为端点的半圆周, 定向为从 0 走向 1. 证明:

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{1+z^2} dz = \frac{\pi}{4}.$$

§3. 柯西积分公式及其应用

3.1 柯西公式的一般形式

柯西积分公式是柯西定理的直接推论. 它给出了解析函数的积分表示. 解析函数的许多基本性质是由柯西积分公式推出来的. 因此, 它是解析函数论中最基本的公式.

柯西积分公式的一般形式如下:

定理 3.1 设 D 是一个区域, 其边界 ∂D 由 $n+1$ ($n \geq 0$) 条逐段光滑的简单闭曲线

$$\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$$

组成, 其中 $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ 落在 γ_0 的内部. 又设 $f(z)$ 在 D 中解析, 在闭区域 $\bar{D} = D \cup \partial D$ 上连续. 则对于区域 D 中的任意一点 z , 我们有表示式:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

其中 γ 代表的边界, 即 $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ 之并, 其定向是关于区域 D 的正向 (见图 4.3.1).

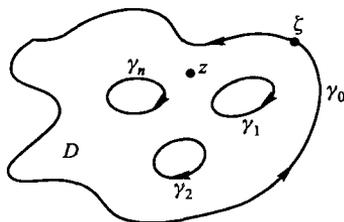


图 4.3.1

柯西积分公式的意义在于: 它告诉我们, 一个解析函数在区域内一点的值, 可以用它在边界上的值表示出来. 这个定理的下列特殊形式是柯西公式的常用形式:

定理 3.1' 设 U 是一个圆盘 $\{z: |z-a| < r\}$. 又设 $w = f(z)$ 在 U 中解析, 在闭圆盘 \bar{U} 上连续. 则有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \forall z: |z-a| < r,$$

其中积分曲线的定向是逆时针方向.

为了方便, 这个定理中的积分通常简单地写成下列形式:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \quad (\forall z: |z-a| < r).$$

定理 3.1 的证明 设 $z \in D$ 是定理中给定的点. 我们考虑以 z 为中心、以 $r > 0$ 为半径的圆盘 $U_r = \{\zeta: |\zeta-z| < r\}$. 显然, 当 r 充分小时, $\overline{U_r} \subset D$. 这时 $D_r = D \setminus \overline{U_r}$ 是一个区域, 而点 z 是它的一个外点.

这样, 函数

$$F(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$$

在区域 D_r 内是关于 ζ 的一个解析函数. 我们在 D_r 上对于 $F(\zeta)$ 应用柯西定理, 就得到

$$\int_{\partial D_r} F(\zeta) d\zeta = 0.$$

这里 D_r 的边界 ∂D_r 除去 D 的边界 $\partial D = \gamma$ 之外, 还包含 U_r 的边界. 我们将圆周 ∂U_r 记作 c_r , 并将其定向规定为逆时针方向.

这时, $\partial D_r = \gamma \cup \{-c_r\}$, 并因此有

$$\oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = 0,$$

也就是

$$\oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

另外一方面, 我们有

$$2\pi i f(z) = f(z) \oint_{c_r} \frac{1}{\zeta-z} d\zeta = \oint_{c_r} \frac{f(z)}{\zeta-z} d\zeta,$$

并因此得到

$$\oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - 2\pi i f(z) = \oint_{c_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta-z} d\zeta.$$

由此我们又进一步推出

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z) \right| &\leq \oint_{c_r} \left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right| ds \\ &\leq \oint_{c_r} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{r} ds \\ &= \int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta}) - f(z)| d\theta \end{aligned}$$

在这个不等式中, 左端的第一项与 r 无关, 其右端的最后一项, 当 $r \rightarrow 0$ 时趋于 0, 故其左端的第一项等于零. 证毕.

例 3.1 求积分

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=5} \frac{(1+z^2)\sin z + e^z}{z} dz,$$

其中积分路线为逆时针方向.

解 显然, 所求积分可以写成

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=5} \frac{(1+z^2)\sin z + e^z}{z-0} dz.$$

因此, I 的值恰好等于被积函数的分子在点 0 处的值:

$$I = [(1+z^2)\sin z + e^z] \Big|_{z=0} = 1.$$

例 3.2 求积分

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z}{z^2 - 1} dz,$$

其中 C 是一条逐段光滑的简单闭曲线, 将点 $z = \pm 1$ 包含于其内部, C 的定向为逆时针方向.

解 I 可以改写成

$$I = \frac{1}{4\pi i} \left[\oint_C \frac{e^z}{z-1} dz - \oint_C \frac{e^z}{z+1} dz \right].$$

根据柯西公式, 我们有

$$I = \frac{1}{2} [e - e^{-1}].$$

3.2 柯西型积分与解析函数的导数的柯西公式

解析函数的柯西公式有众多重要应用: 解析函数的许多基本性质是利用它推出的.

现在, 我们利用它推出一条重要定理: **解析函数的导函数依然是解析函数.**

这条性质深刻地反映着复变量解析函数与实的可导函数之间的巨大差异. 在实变量函数中, 一个函数在一个区间中关于自变量处处可导, 决不蕴含着它的导函数仍然可导, 甚至其导函数不一定连续. 而在复变量函数的理论中, 一个函数在一个区域中关于自变量 z 的处处可导性, 意味着它无穷次可导.

为了利用柯西公式讨论解析函数的导函数的导数, 我们先来讨论柯西型积分.

设 D 是一个区域, 其边界由有限条逐段光滑的简单闭曲线组成, 记作 γ . 我们规定 γ 的定向是关于区域 D 的正向, 即前进方向使区域总落在左侧. 又设 $\phi(\zeta)$ 是 γ 上的一个连续函数. 我们称积分

$$\psi(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (z \in D)$$

是 ϕ 在 γ 上的**柯西型积分**.

让我们先来观察一下这个积分. 积分中积分变量是 ζ , 它在曲线 γ 上变动, 而点 z 在区域 D 内是一个固定值 (可以视作积分的参数). 被积函数 $\phi(\zeta)/(\zeta - z)$ 是曲线 γ 上的一个连续函数, 并且有一个上界:

$$\left| \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} \right| \leq M d^{-1},$$

其中 $M = \max\{|\phi(\zeta)| : \zeta \in \gamma\}$, 而 d 是点 z 到边界 γ 的距离:

$$d := \inf\{|\zeta - z| : \zeta \in \gamma\}.$$

因此, 柯西型积分是通常意义下的参变量积分, 而不是瑕积分或奇异积分.

定理 3.2 在上述假定之下, ϕ 在 γ 上的柯西型积分 $\psi(z)$, 是区域 D 中的一个解析函数, 并且 $\psi(z)$ 在 D 内关于 z 有任意阶导数, 其 n 阶导数公式为

$$\psi^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

证 设 z 是 D 中的任意给定的一点. 我们取一个改变量 $\Delta z \neq 0$, $|\Delta z|$ 足够小, 使得 $z + \Delta z \in D$. 这时, 我们有

$$\psi(z + \Delta z) - \psi(z) = \frac{\Delta z}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)} d\zeta,$$

或写成

$$\frac{\psi(z + \Delta z) - \psi(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)} d\zeta.$$

因此, 为了验证 $\psi'(z)$ 的存在性, 只要说明我们在上式中可以在积分号下取极限就够了.

设 M 是 $|\phi(\zeta)|$ 在 γ 上的最大值, 而 d 是点 z 到曲线 γ 的距离. 这时我们有下列估计式

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[\frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)} - \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \right] d\zeta \right| \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{|\phi(\zeta)| |\Delta z|}{|\zeta - z|^2 |\zeta - z - \Delta z|} ds \end{aligned}$$

当 $|\Delta z| < d/2$ 时, 对于 γ 上任意一点 ζ , 我们有

$$|\zeta - z - \Delta z| \geq |\zeta - z| - |\Delta z| \geq \frac{d}{2},$$

并因此有

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \phi(\zeta) \left[\frac{1}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)} - \frac{1}{(\zeta - z)^2} \right] d\zeta \right| \leq \frac{1}{\pi} M L d^{-3} |\Delta z|,$$

其中 L 代表 γ 的弧长. 这样, 我们得到

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\phi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta,$$

从而 $\psi(z)$ 在点 z 处可导, 并且

$$\psi'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\psi(z + \Delta z) - \psi(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

这样, $\psi(z)$ 在 D 内解析.

以上讨论实际上是证明了, 作为参变量积分, 柯西型积分可以在积分号下直接对参数 z 求导数:

$$\psi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{d}{dz} \left(\frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} \right) d\zeta.$$

用数学归纳法可以证明

$$\psi^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

其证明方法完全类似于上面, 但叙述起来有些啰嗦, 故略去.

定理证毕.

现在假定 γ 是区域 D 的边界, 由有限条逐段光滑的简单闭曲线组成, 其定向是关于区域 D 的正向. 我们又假定 $w = f(z)$ 在 D 内解析, 在 \bar{D} 上连续. 根据定理 2.1, 我们有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

这就是说一个解析函数的边界值的柯西型积分在区域内一点的值,恰好等于该解析函数在该点的值.

因此,由定理 3.1 和定理 3.2 可推出下列的定理:

定理 3.3 假定 $f(z)$ 在 D 是解析函数,则 $f(z)$ 在 D 内有任意阶导数.特别地,它的导函数 $f'(z)$ 在 D 内仍是解析函数.

证明是容易的.我们在 D 内任意取一个圆盘 U ,并使得 $\bar{U} \subset D$. 根据柯西公式,我们有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \forall z \in U.$$

由定理 3.2 可知, $f(z)$ 在 U 内有任意阶导数.再注意到 U 的任意性,就证明了定理的结论.

下列定理是定理 3.2 和定理 3.1 的直接推论:

定理 3.4 设 D 是一个区域,其边界由有限条逐段光滑的简单闭曲线组成,记作 γ .又设 $f(z)$ 在区域 D 内解析,在闭区域 \bar{D} 上连续.则关于 $f(z)$ 的 n 阶导数,我们有下列公式:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad \forall z \in D, \quad n = 1, 2, \dots,$$

其中积分回路的定向是关于 D 的正向.

最后,我们指出,柯西型积分在解析函数的边界值问题以及弹性力学的某些平面问题中扮演着重要角色.但作为大学复变函数教程的内容,我们不可能叙述这些应用.

3.3 莫雷拉定理与柯西不等式

作为柯西公式的应用,我们将推出莫雷拉 (Morera) 定理、柯西不等式和刘维尔 (Liouville) 定理.

通常,莫雷拉定理在一定的意义下可以看作是柯西定理的逆定理:

定理 3.5(莫雷拉定理) 设 $f(z)$ 在区域 D 内连续. 若对于 D 中任意一条逐段光滑闭曲线 γ , 都有

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0,$$

则 $f(z)$ 在 D 内解析.

证 根据定理的条件和定理 1.1 可知, $f(z)$ 在 D 中的曲线积分与路径无关. 我们在 D 中取定一个固定点 z_0 , 并考虑函数

$$F(z) := \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta.$$

根据定理 1.2, $F(z)$ 是一个解析函数, 且有

$$F'(z) = f(z), \quad \forall z \in D.$$

然而, 定理 3.3 又告诉我们, 一个解析函数的导函数是解析函数. 因此, $f(z)$ 在 D 内解析. 证毕.

有了莫雷拉定理, 我们就得到解析函数的一个充要条件:

定理 3.6 设 D 是一个单连通区域, 而 $f(z)$ 是 D 中一个连续函数. 则 $f(z)$ 在 D 内解析的充要条件是对于 D 内任意一条逐段光滑的闭曲线 γ , 都有

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

柯西公式 (包括导数公式) 的另一个重要应用是给出了解析函数的各阶导数的一个估计式, 而这个估计式在后面有若干重要应用.

定理 3.7(柯西不等式) 设 $f(z)$ 在半径为 R 的圆盘 $U = \{z : |z - a| < R\}$ 中解析. 若 $|f(z)|$ 在 U 中有上界 M , 则 $f(z)$ 在点 a 的各阶导数有如下估计式:

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

证 我们令 c_r 以 a 为中心、以 r 为半径的圆周, 并规定其定向是逆时针方向. 根据导数的公式, 我们有

$$\begin{aligned} |f^n(a)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \oint_{c_r} \frac{|f(z)|}{r^{n+1}} ds \leq \frac{n!M}{r^n}. \end{aligned}$$

此不等式对于一切满足不等式 $0 < r < R$ 的 r 都成立. 在上式中, 令 $r \rightarrow R$, 立刻就得到所要的结论. 证毕.

由柯西不等式立即推出一个有关整函数的有趣的、并令人有点意外的定理:

定理 3.8(刘维尔定理) 若 $f(z)$ 是一个整函数, 且 $|f(z)|$ 在整个复平面上界, 则 $f(z)$ 必是一个常数.

证 设 $|f(z)|$ 在复平面上的上界为 M . 又设 a 为复平面上任意一点, R 是任意取定的正数, 我们考虑以 a 为中心、以 R 为半径的圆盘 U_R .

在 U_R 上应用柯西不等式, 我们得到

$$|f'(a)| \leq \frac{M}{R}.$$

由于 $f(z)$ 是整函数, 而 M 是 $|f(z)|$ 在整个复平面上的上界, 故上述不等式对于一切正数 R 成立. 在上述不等式中令 R 趋于无穷, 我们即得到

$$f'(a) = 0, \quad \forall a \in \mathbb{C}.$$

由此就推出 $f(z)$ 是一个常数 (见习题 2.2 第 6 题). 证毕.

在实变量函数的理论中, 我们知道, 一个在整个实数域中有定义的函数, 即使它有任意阶导数, 且其绝对值有上界, 但这并不意味着它是常数, 比如 $y = \sin x$. 但在解析函数论中, 刘维尔定理就告诉我们, 模有上界的整函数必然是常数.

习题 4.3

1. 计算下列积分 (其中闭曲线的定向是逆时针方向):

$$(1) \oint_{|z|=1} \frac{e^z + 3}{z^2} dz;$$

$$(2) \oint_{|z+1|=3} \frac{4z^2 + 1}{z(z-1)} dz;$$

$$(3) \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{1}{(z^3 + 1)(z^2 + 1)} dz.$$

2. 设 D 是一个区域, 其边界由有限个逐段光滑简单闭曲线组成. 又设 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 在区域 D 内解析, 在闭区域 \bar{D} 上连续. 如果在区域的边界 ∂D 上两个函数的函数值相等, 即

$$f_1(\zeta) = f_2(\zeta), \quad \forall \zeta \in \partial D.$$

则它们在区域内的函数值也相等, 即

$$f_1(z) = f_2(z), \quad \forall z \in D.$$

3. 设 D 是一个区域, 其边界由有限个逐段光滑简单闭曲线组成. 又设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 在闭区域 \bar{D} 上连续. 若 $f(z)$ 在边界 ∂D 上是常数, 则它在 D 内也是常数.

4. 设 D 是一个区域, 其边界由有限个逐段光滑简单闭曲线组成. 又设 $f(z)$ 与 $f_n(z)$ 在区域 D 内解析, 在闭区域 \bar{D} 上连续, $n = 1, 2, \dots$. 若当 $n \rightarrow \infty$ 时, $f_n(\zeta)$ 在 ∂D 上一致趋向 $f(\zeta)$, 则对于任意一点 $z \in D$, 我们有

$$f_n(z) \rightarrow f(z), \quad \text{当 } n \rightarrow \infty.$$

5. 设 C 是包含原点的一条逐段光滑的简单闭曲线. 证明:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{z\zeta}}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \frac{z^n}{n!}.$$

6. 设 $f(z)$ 在圆盘 $U = \{z : |z| < R\}$ 解析, 在 \bar{U} 上连续. 又设 $z \neq 0$ 是 U 中任意一点. 而 z^* 是点 z 关于圆周 $c = \{\zeta : |\zeta| = R\}$ 的对称点, 即

$$z^* = \frac{R^2}{z}.$$

证明:

$$(1) \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z^*} d\zeta = 0;$$

$$(2) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z^*} \right) d\zeta;$$

$$(3) f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - |z|^2)f(Re^{i\theta})}{|Re^{i\theta} - z|^2} d\theta;$$

$$(4) u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{R^2 - 2R|z|\cos(\theta - \phi) + |z|^2} u(Re^{i\theta}) d\theta;$$

$$(5) 1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{R^2 - 2R|z|\cos(\theta - \phi) + |z|^2} d\theta,$$

其中 $u(z)$ 是 $f(z)$ 的实部, 而 ϕ 是 z 的辐角.

注 这里的公式 (4) 可以看作单位圆中的调和函数的表达式, 被称为泊松 (Poisson) 公式. 它将调和函数在单位圆内部的值用其边界值来表达.

§4. 解析函数的最大模原理

解析函数的柯西公式, 使我们看到解析函数的边界值对函数的在区域内点的值有决定性的影响. 现在我们利用柯西公式来研究解析函数的模, 并得到所谓最大模原理.

解析函数的最大模原理是解析函数的一条基本性质, 有广泛的应用.

4.1 解析函数的平均值公式与最大模原理

命题 4.1 设 $U = \{z : |z - a| < R\}$, 而 $f(z)$ 在 U 内解析, 并在 \bar{U} 上连续. 则有平均值公式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{i\theta}) d\theta \quad (4.1)$$

和

$$f(a) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_U f(x + iy) dx dy. \quad (4.2)$$

证 根据柯西公式, 我们有

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_R} \frac{f(z)}{z - a} dz,$$

其中积分曲线 $c_R = \{z : |z - a| = R\}$, 其定向是逆时针方向.

注意到当 $z \in c_R$ 时, $z = a + Re^{i\theta}$, 根据曲线积分的计算公式即得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_R} \frac{f(z)}{z - a} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} Re^{i\theta} i d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

应用此公式于圆周 $c_r = \{z : |z - a| = r\}$ ($0 < r < R$), 又得

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

对上式乘 r , 然后对 r 积分, 即推得

$$\int_0^R f(a) r dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta,$$

根据极坐标计算重积分的公式, 上式的右端等于

$$\frac{1}{2\pi} \iint_U f(x + iy) dx dy.$$

而上式的左端显然等于 $f(a)R^2/2$. 这就证明了所要的公式 (4.2). 证毕.

现在利用上述平均值公式证明最大模原理. 最大模原理有一些不同叙述形式, 我们先讲一种常见形式.

定理 4.1 设 $f(z)$ 是区域 D 中的一个解析函数, 并且不是常数函数. 则 $|f(z)|$ 在 D 中的任意一点 $a \in D$ 不可能达到极大值.

简单地说, 解析函数的模不能在区域内部达到极大值, 除非它是一个常数函数.

证 用反证法. 假定有一点 $a \in D$, 使得 $|f(z)|$ 在该点达到极大值. 这时存在一个圆盘 $U_r = \{z : |z - a| < r\}$, 使得 $\overline{U_r} \subset D$ 且

$$|f(a)| \geq |f(z)|, \quad \forall z \in \overline{U_r}. \quad (4.3)$$

应用平均值公式 (4.2), 我们由 (4.3) 得到

$$|f(a)| \leq \frac{1}{\pi r^2} \iint_{U_r} |f(x + iy)| dx dy \leq |f(a)|. \quad (4.4)$$

由 (4.4) 立刻推出

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{U_r} f(x + iy) dx dy.$$

我们由此又可以进一步推出

$$|f(z)| \equiv |f(a)|, \quad \forall z : |z - a| < r.$$

事实上, 若有任意一点 $b \in U_r$ 使得 $|f(b)| \neq |f(a)|$, 那么必有 $|f(b)| < |f(a)|$. 根据 $|f(z)|$ 的连续性, 必存在 b 的一个小邻域 $V (\subset U_r)$ 内, 使得

$$|f(z)| \leq |f(a)| - \delta, \quad \forall z \in V,$$

其中 $\delta = [|f(a)| - |f(b)|]/2 > 0$, 从而得到

$$\iint_V |f(z)| dx dy \leq (|f(a)| - \delta) A(V),$$

其中 $A(V)$ 是 V 的面积. 这时, 我们有

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{U_r} |f(x+iy)| dx dy \leq |f(a)| - \frac{\delta}{\pi r^2} A(V) < |f(a)|$$

这就导致矛盾: $|f(a)| < |f(a)|$. 由此推出, 在 U_r 中 $|f(z)| \equiv |f(a)|$.

根据模为常数的解析函数必是常数函数 (见习题 3.2 第 5 题), 我们进一步推出

$$f(z) \equiv f(a), \quad \forall z \in U_r.$$

根据解析函数的唯一性定理 (见下一章), 我们有

$$f(z) \equiv f(a), \quad \forall z \in D.$$

这就与假定矛盾, 从而证明了定理. 证毕.

思考题 如果不引用解析函数唯一性定理, 也可以直接证明. 读者不妨试着自己证明.

最大模原理也可以叙述成下列形式:

定理 4.2 设 D 是一个有界区域, 而 $f(z)$ 是区域 D 中的一个解析函数, 并在闭区域 \bar{D} 上连续. 令

$$m := \sup\{|f(\zeta)| : \zeta \in \partial D\},$$

则对于任意一点 $z \in D$, 我们有

$$|f(z)| \leq m, \quad \forall z \in D. \quad (4.5)$$

证 显然, $|f(z)|$ 在 \bar{D} 上连续. 令 $M := \max\{|f(z)| : z \in \bar{D}\}$, 那么,

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in D. \quad (4.6)$$

如果 $f(z)$ 是一个常数, 那么必然有 $M = m$. 现在假定 $f(z)$ 不是常数. 根据微积分的知识, 存在一点 $z_0 \in \bar{D}$, 使得 $|f(z_0)| = M$.

根据定理 4.1, 这样的点 z_0 不能在 D 内, 而只能落在边界 ∂D 上. 因此, 这时仍有 $M = m$.

总之, 不论哪一种情况, 总有 $M = m$. 因此, 由 (4.6) 推出 (4.5) 成立. 定理证毕.

注 由定理 4.1 知道, 当 $f(z)$ 不是常数时, (4.6) 中等号不可能成立, 从而 (4.5) 中等号也不可能成立. 因此, 在 $f(z)$ 不是常数的条件下, 严格不等式

$$|f(z)| < m, \quad \forall z \in D$$

成立.

对于不等于零的解析函数, “最小模原理”成立: 若 $w = f(z)$ 在区域 D 中解析, 并且处处不等于零, 则 $|f(z)|$ 在 D 内不能达到极小值, 除非 $f(z)$ 是一个常数. 证明是容易的: 只要对函数 $1/f(z)$ 应用最大模原理就够了.

4.2 代数基本定理的证明

作为最大模原理的一个应用, 现在我们证明代数基本定理.

定理 4.3(代数基本定理) $n(\geq 1)$ 次多项式在复数域中至少有一个根.

证 设 $P(z)$ 是一个 n 次多项式 ($n \geq 1$):

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \quad (a_0 \neq 0),$$

其中 a_j 是常数, $j = 0, 1, \cdots, n$. 显然, 有下列估计式:

$$|P(z)| \geq |a_0| |z|^n \times \left(1 - \frac{|a_1|}{|a_0|} |z|^{-1} - \cdots - \frac{|a_{n-1}|}{|a_0|} |z|^{-n+1} - \frac{|a_n|}{|a_0|} |z|^{-n} \right).$$

令 $M = |a_1| + \cdots + |a_n|$, 那么当 $|z| \geq \max\{1, 2M/|a_0|\}$ 时,

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |a_0||z|^n \left(1 - \frac{|a_1|}{|a_0|}|z|^{-1} - \cdots - \frac{|a_{n-1}|}{|a_0|}|z|^{-1} - \frac{|a_n|}{|a_0|}|z|^{-1}\right) \\ &= |a_0| \left(1 - \frac{M}{|a_0|}|z|^{-1}\right) \geq \frac{1}{2}|a_0||z|^n. \end{aligned}$$

由此可见, 当 $|z| \rightarrow \infty$ 时, $|f(z)|$ 趋于无穷.

我们考虑圆周 $c_R = \{z : |z| = R\}$, 并取 R 足够大, 使得

$$|P(Re^{i\theta})| > |P(0)| \quad (\forall \theta \in [0, 2\pi]).$$

这时 $|P(z)|$ 在 $\overline{U_R} = \{z : |z| \leq R\}$ 的最小值只能在 c_R 的内部达到. 假定其最小值在一点 $z_0 \in U_R$ 达到. 那么, z_0 必是 $P(z)$ 的一个根. 事实上, 若 $P(z_0) \neq 0$, 即 $|P(z)|$ 在 $\overline{U_R}$ 中的最小值不等于零, 于是 $P(z)$ 在 $\overline{U_R}$ 中处处不等于零. 我们考虑函数

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}, \quad \forall z \in \overline{U_R}.$$

那么, $f(z)$ 在 $\overline{U_R}$ 中解析, 并且 $|f(z)|$ 在 U_R 中的点 z_0 达到最大值. 但 $f(z)$ 并不是常数. 这就与定理 4.2 矛盾. 证毕.

习题 4.4

1. 设 $f(z)$ 在 $U_R = \{z : |z - a| < R\}$ 中解析. 令

$$m(r) := \max\{|f(a + re^{i\theta})| : \theta \in [0, 2\pi]\} \quad (0 < r < R),$$

证明:

(1) $m(r) = \max\{|f(a + te^{i\theta})| : 0 \leq t \leq r; \theta \in [0, 2\pi]\}$;

(2) $m(r)$ 是 $(0, R)$ 中单调递增函数;

(3) $f(z)$ 在圆盘 $\{z : |z - a| \leq r_2\}$ 中是常数的充要条件是, 对于任意的 r_1 与 r_2 ($0 < r_1 < r_2 < R$), 总有 $m(r_1) = m(r_2)$.

2. 设 $f(z)$ 在 $U = \{z : |z - a| < R\}$ 中解析, 在 \overline{U} 中连续, 并且不等于零. 证明:

$$|f(z)| \geq \min\{|f(\zeta)| : \zeta \in \partial U\}, \quad \forall z \in U,$$

其中等号仅在 $f(z)$ 是常数函数时成立.

注 读者应当注意, 与最大模原理不同, 最小模原理需要解析函数在区域中不等于零的条件.

3. 设 $f(z)$ 在 $U = \{z : |z - a| < R\}$ 中解析, 不是常数函数, 并假定 $f(z)$ 在 \bar{U} 中连续, 在边界上 $|f(\zeta)|$ 等于常数. 证明: 存在一点 $z_0 \in U$ 使得 $f(z_0) = 0$.

4. 设 $w = f(z)$ 在 $U_R := \{z : |z - a| < R\}$ 中解析. 令 $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$, 推导下列平均公式:

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta \quad (0 < r < R);$$

$$u(a) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-a|<r} u(x + iy) dx dy.$$

5. 设 $w = f(z)$ 在区域 D 中解析, 令 $u = u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + iy)$, 并假定 $u(x, y)$ 不是常数. 证明: 对于 $u(x, y)$ 而言, 不能在 D 的内部达到最大值或最小值.

注 此题的结论表明非常数的调和函数不能在区域内部达到最大值或最小值. 此性质称为调和函数的极值原理.

6. 设 $f(z)$ 在有界区域 D 中解析, 并且

$$A = \iint_D |f(x + iy)| dx dy < +\infty.$$

证明: 对于任意一点 $a \in D$, 下列估计式成立:

$$|f(a)| \leq \frac{A}{\pi[d(a)]^{-2}},$$

其中 $d(a) := \inf\{|\zeta - a| : \zeta \in \partial D\}$

提示 利用平均值公式 (4.2).

7. 设 $f(z)$ 与 $f_n(z)$ 在有界区域 D 中解析 ($n = 1, 2, \dots$), 并且

$$A_n = \iint_D |f_n(x + iy) - f(x + iy)| dx dy \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

证明: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\{f_n(z)\}$ 在 D 中内闭趋于 $f(z)$.

第五章 解析函数的幂级数展开及其相关理论

§1. 解析函数的序列与幂级数

1.1 魏尔斯特拉斯定理

解析函数的序列 (或级数), 有许多一般序列 (或级数) 所不具备的特性. 现在, 让我们来叙述这些特性.

由于有关函数项级数的讨论可归结于函数序列的讨论, 所以下面的定理只就解析函数序列的情形加以证明, 而有关级数情形的证明则无须列出.

定理 1.1(魏尔斯特拉斯第一定理) 设有一个函数序列 $\{f_n(z)\}$, 其中每一项都在一个共同区域 D 中解析. 假定 $\{f_n(z)\}$ 在 D 中内闭一致收敛于 $f(z)$, 则

- (1) $f(z)$ 在 D 中解析;
- (2) 导函数序列 $\{f'_n(z)\}$ 在区域 D 中内闭一致收敛于 $f'(z)$.

将这个定理翻译成级数情形, 就有下列定理:

定理 1.1' 设 $u_n(z)$ 是区域 D 中的解析函数 ($n = 1, 2, \dots$), 并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ 在 D 中内闭一致收敛于 $f(z)$, 则 $f(z)$ 在 D 内

解析, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(z)$ 在 D 中内闭一致收敛, 并有

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(z), \quad \forall z \in D.$$

多次使用定理 1.1, 就可以得到: 对于任意一个整数 $k \geq 1$, 序列 $\{f_n^{(k)}(z)\}$ 在 D 中内闭一致趋于 $f^{(k)}(z)$. 多次使用定理 1.1', 可以得到类似的有关级数的结果.

定理 1.1 的证明 由于给定函数序列 $\{f_n(z)\}$ 在 D 中的内闭一致收敛性和序列中每一项的连续性, 立刻看出, 极限函数 $f(z)$ 在 D 内连续. 设 z_0 是 D 中任意一点, 并取一个圆盘:

$$U_r = \{z : |z - z_0| < r\},$$

使得 $\overline{U}_r \subset D$. 将圆周 $\{z : |z - z_0| = r\}$ 记作 c_r , 并规定其定向是逆时针方向. 我们考察积分

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

当点 $z \in \overline{U}_{r/2}$ 时, 不难看出 $|\zeta - z| \geq r/2$, 并有

$$|I_n(z)| \leq 2 \max \{|f_n(\zeta) - f(\zeta)| : \zeta \in c_r\}, \quad \text{只要 } \forall z \in \overline{U}_{r/2}.$$

根据 f_n 在 c_r 上的一致收敛性, 上式表明 $I_n(z)$ 在 $\overline{U}_{r/2}$ 一致趋于 0.

另外一方面, 根据柯西定理, 我们有

$$\begin{aligned} I_n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= f_n(z) - \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned}$$

由于 $I_n(z)$ 在 $\overline{U}_{r/2}$ 上一致趋于 0, 所以 $f_n(z)$ 在 $\overline{U}_{r/2}$ 上一致趋于函数

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

但是根据定理假设, $f_n(z)$ 在 D 中内闭一致收敛于 $f(z)$, 于是

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z), \quad \forall z \in \overline{U_{r/2}}.$$

依据有关柯西型积分的解析性, 立刻推出 $f(z)$ 在 $U_{r/2}$ 解析.

另外, 由于 z_0 是 D 中任意一点, 上述结果表明, $f(z)$ 在 D 中的任意一点解析, 也即 $f(z)$ 在区域 D 内解析. 这样, 我们证明了定理的结论 (1).

现在, 证明结论 (2). 为此, 我们沿用前面的记号, 并证明 $f'_n(z)$ 在 $\overline{U_{r/2}}$ 中一致收敛于 $f'(z)$.

证明完全与前面讨论类似. 事实上, 当 $z \in \overline{U_{r/2}}$ 时,

$$\begin{aligned} |f'_n(z) - f'(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{c_r} \frac{|f_n(\zeta) - f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} ds \\ &\leq \frac{4}{r} \cdot \max \{|f_n(\zeta) - f(\zeta)| : \zeta \in c_r\}. \end{aligned}$$

再一次利用 $f_n(\zeta)$ 在 c_r 上一致收敛于 $f(\zeta)$ 的事实, 我们就证明了 $f'_n(z)$ 在 $\overline{U_{r/2}}$ 上一致收敛于 $f'(z)$, 从而证明了定理. 证毕.

定理 1.2(魏尔斯特拉斯第二定理) 设 $f_n(z)$ 在区域 D 内解析, 在闭区域 \overline{D} 连续, $n = 1, 2, \dots$. 假定 $f_n(\zeta)$ 在 D 的边界 ∂D 上一致收敛, 则 $f_n(z)$ 在闭区域 \overline{D} 上一致收敛.

证 根据定理的假定, $f_n(\zeta)$ 在 ∂D 上一致收敛. 对于任意给定的正数 ε , 存在一个只依赖于 ε 的自然数 N , 使得

$$|f_n(\zeta) - f_m(\zeta)| < \varepsilon, \quad \text{只要 } n > N, m > N, \zeta \in \partial D.$$

另一方面, 根据最大模原理 (第四章定理 4.2), 我们又有

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \max \{|f_n(\zeta) - f_m(\zeta)| : \zeta \in \partial D\}, \quad \forall z \in \overline{D}.$$

因此, 我们得到

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon, \quad \text{只要 } n > N, m > N, z \in \bar{D}.$$

这表明 $f_n(z)$ 在 \bar{D} 上一致收敛. 证毕.

这条定理翻译成解析函数项级数的情形, 就是下面的定理:

定理 1.2' 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ 中的每一项 $u_n(z)$ 在区域 D 中解析, 在闭区域 \bar{D} 上连续. 若该级数在区域 D 的边界 ∂D 上一致收敛, 则它在闭区域 \bar{D} 上一致收敛.

1.2 幂级数的和函数的解析性

我们已经在前面的章节中讨论过幂级数, 建立了有关幂级数的收敛半径的公式与收敛圆的概念. 现在我们要进一步证明, 一个收敛半径大于零的幂级数的和函数, 在其收敛圆内解析.

定理 1.3 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ 的收敛半径 $R > 0$. 则该级数在其收敛圆中内闭一致收敛.

证 现在, 我们先假定 $R < \infty$. 设 $U_R = \{z : |z-a| < R\}$, 即上述级数的收敛圆. 为了证明上述级数在收敛圆中的任意闭集合上一致收敛, 只要证明, 对于任意的 $\delta > 0$ ($\delta < R$), 该级数在闭圆盘 $\{z : |z-a| \leq R-\delta\}$ 上一致收敛即可.

令 $z^* = a + R - \delta/2$, 那么 $|z^* - a| = R - \delta/2 < R$, 因而级数在 z^* 点收敛. 特别地, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z^* - a)^n$ 中的通项的模趋于零, 即

$$|a_n(z^* - a)^n| \rightarrow 0, \quad \text{当 } n \rightarrow \infty.$$

因此, 存在一个自然数 N , 使得

$$|a_n(z^* - a)^n| < 1, \quad \text{只要 } n > N.$$

设 z 是任意一点, 满足条件: $|z - a| \leq R - \delta$. 这时, 我们有

$$\begin{aligned} |a_n(z - a)^n| &= |a_n(z^* - a)^n| \left| \left(\frac{z - a}{z^* - a} \right)^n \right| \\ &\leq |a_n(z^* - a)^n| \cdot \left(\frac{R - \delta}{R - \delta/2} \right)^n \\ &\leq \left(\frac{R - \delta}{R - \delta/2} \right)^n, \quad \text{只要 } n > N. \end{aligned}$$

注意到数值级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R - \delta}{R - \delta/2} \right)^n$$

是一个公比小于 1 的等比级数, 根据魏尔斯特拉斯判别法, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$ 在闭圆盘 $\{z : |z - a| \leq R - \delta\}$ 上一致收敛.

最后讨论 $R = \infty$ 的情况. 显然, 这时我们只需证明对于任意的 $L > 0$ 上述幂级数在 $U_L = \{z : |z - a| \leq L\}$ 中一致收敛即可.

取 $R' = 2L$, 则上述幂级数在圆 $U_{R'} = \{z : |z - a| < R'\}$ 中收敛. 将上述证明中的 R 换成 R' , 并重复上述证明中的每一步骤, 就得到该幂级数在 $U_{R'}$ 内闭一致收敛, 特别地, 在 U_L 中一致收敛. 证毕.

定理 1.4 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$ 的收敛半径 $R > 0$. 则和函数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$$

在其收敛圆 $\{z : |z - a| < R\}$ 内解析, 并且对于任意一个正整数 k ,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-a)^{(n-k)}, \quad (1.1)$$

特别地,

$$f^{(k)}(a) = k! a_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

证 由定理 1.3 可知, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ 在任意一个闭圆盘 $\{z : |z-a| \leq R-\delta\}$ 中一致收敛. 根据本节中的定理 1.1', 该幂级数的函数 $f(z)$ 在圆盘 $\{z : |z-a| < R-\delta\}$ 中解析. 由于 $\delta > 0$ 可以任意小, 所以 $f(z)$ 在收敛圆内任意一个点解析. 再次依据定理 1.1', 该幂级数可在其收敛圆内逐项求导, 于是 (1.1) 与 (1.2) 成立. 证毕.

设 $w = f(z)$ 在一点 a 解析. 我们称形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (z-a)^n$$

的级数为 $w = f(z)$ 的泰勒级数. 定理 1.4 表明, 如果 $w = f(z)$ 在 a 点能展开成幂级数, 则该幂级数必然是 $w = f(z)$ 的泰勒级数. 正因为如此, 解析函数的幂级数展开, 也称为泰勒展开.

定理 1.4 告诉我们, 像实函数的泰勒展开式具有唯一性一样, 解析函数的泰勒展开式也同样有其唯一性. 也就是说, 无论我们用什么方法求得了关于 $f(z)$ 一个如下形式幂级数展开式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

则它必定是 $f(z)$ 在点 z_0 的泰勒展开式.

比如, 求函数 e^{z^2} 在 0 处的泰勒展开式, 我们不必逐项地去求它在 0 点处的各阶导数, 而可以利用已经知道的 e^z 的泰勒展开式得到. 事实上, 由

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!},$$

立刻得到

$$e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}.$$

这个幂级数就一定是 e^{z^2} 的泰勒展开式.

习题 5.1

1. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (z^{n+1} - z^n)$ 的收敛区域.

2. 设 γ 是逐段光滑的有定向的曲线. 又设 $f_n(z)$ 是 γ 上的连续函数 ($n = 0, 1, \dots$), 并在 γ 上一致收敛于 $f(z)$. 证明:

(1) $f(z)$ 在 γ 上连续;

(2) $\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz$.

3. 利用莫雷拉定理与上题的结果, 证明魏尔斯特拉斯定理, 即: 若 $f_n(z)$ 是区域 D 中的解析函数, 且在 D 中内闭一致收敛于 $f(z)$, 则 $f(z)$ 在 D 内解析.

提示 由于函数的解析性是一个局部邻域的性质, 故不失一般性可以假定 D 为单连通区域.

4. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ 在 $z = z_0$ 点绝对收敛, 且 $z_0 \neq a$. 证明: 该幂级数在 $\{z : |z-a| < |z_0-a|\}$ 内闭一致收敛.

5. 证明: 幂级数在其收敛圆内的每一点绝对收敛.

6. 求下列幂级数 (即用初等函数表示):

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z-1)^{n+1}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n-1)!} z^{2n-1}$.

§2. 解析函数的幂级数展开及其推论

在这一节中, 我们将证明一个重要而基本的事实: 解析函数在其定义域内的任意一点可以展开成关于 z 的幂级数, 并利用这一事实推出解析函数零点的孤立性定理和解析函数的唯一性定理.

2.1 解析函数的幂级数展开

定理 2.1 设函数 $f(z)$ 在圆盘 $U = \{z : |z - z_0| < R\}$ 内解析, 则在该圆盘中, $f(z)$ 可展开成下列幂级数:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

其中

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

证 设 z 是 U 中任意的一点, 并取 ρ 满足下列条件: $|z - z_0| < \rho < R$. 令 c_ρ 是以 z_0 为中心、以 ρ 为半径的圆周, 并规定其定向为逆时针方向. 根据柯西公式, 我们有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad |z - z_0| < \rho.$$

对于任意一点 $\zeta \in c_\rho$, 显然有

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1.$$

把 $(z - z_0)/(\zeta - z_0)$ 看作一个复数 η , 并注意到其模 $|\eta| < 1$, 利用等比级数的求和公式

$$\frac{1}{1 - \eta} = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n,$$

我们就得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \end{aligned}$$

很容易证实, 级数

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

对于 $\zeta \in c_\rho$ 一致收敛 (留作思考题请读者自行证明). 于是, 我们得到

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{c_\rho} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

根据解析函数的导数公式, 我们知道

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

证毕.

推论 设 $f(z)$ 在区域 D 中解析, z_0 是 D 中的一点. 令 $d(z_0)$ 是点 z_0 到 D 的边界 ∂D 的距离, 即

$$d(z_0) = \inf\{|\zeta - z_0| : \zeta \in \partial D\} \text{ (允许等于无穷),}$$

则 $f(z)$ 在圆盘 $U = \{z : |z - z_0| < d(z_0)\}$ 中展开成幂级数:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = f^{(n)}(z_0)/n!.$$

这个推论告诉我们, 一个在区域 D 中解析的函数 $f(z)$, 在 D 中的一点 z_0 幂级数展开式的收敛圆半径 $R \geq d(z_0)$, 这里 $d(z_0)$ 表示点 z_0 到 D 的边界距离 (见图 5.2.1).

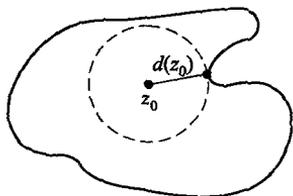


图 5.2.1

例 2.1 函数 e^z 在 $z = 0$ 的泰勒展开式为

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots.$$

这是因为 $(e^z)^{(n)} = e^z$, 因而 $(e^z)^{(n)}|_{z=0} = 1$, 并有 $a_n = 1/n!$.

由于 $w = e^z$ 是一个整函数, 由定理 2.1 的推论知道, 该幂级数的收敛半径是无穷. 请注意, 这里我们并不是按照收敛半径公式得出这一结论的, 而是根据上述推论推出来的.

例 2.2 设 $\sqrt{1+z}$ 是该根式的一个单值分支, 定义在区域 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ 之中^[注], 并在 $z = 0$ 点取值为 1. 求它在 $z = 0$ 的泰勒展开式.

解 令 $f(z) = \sqrt{1+z}$, 那么, $f(0) = 1$, $f'(0) = 1/2$. 用数学归纳法, 不难证明

$$f^{(n)}(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{2} - n + 1 \right).$$

因此, 根据定理 2.1 的推论, $\sqrt{1+z}$ 有展开式

$$\sqrt{1+z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{2} - n + 1 \right)}{n!} z^n.$$

由于点 0 到集合 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ 的边界的距离为 1, 故上述展开式在单位圆盘 $\{z : |z| < 1\}$ 成立.

注 这里 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ 代表整个复平面去掉实轴上的区间 $(-\infty, -1]$.

前面我们已经知道, 一个收敛半径大于零的幂级数, 其和函数在收敛圆内解析. 现在我们又知道, 任意一个解析函数在其定义域内的一个邻域内总能展开成一个幂级数. 因此, 我们便得到一个函数解析的一个充要条件.

定理 2.2 设函数 $f(z)$ 在一个区域 D 中有定义. 则该函数在 D 中解析的充要条件是, 对于 D 的任意一点 z_0 , $f(z)$ 可以在 z_0 点的一个邻域内展开成幂级数.

这里, 请读者回顾一下, 我们过去已经知道的一个函数解析的充要条件: 除了定义之外, 还有柯西 - 黎曼条件, 以及任何闭回路上积分等于零 (单连通域). 现在的定理 2.2 是第 3 个这样的充要条件. 这些充要条件从不同的角度刻画着解析函数的本质特征.

2.2 解析函数零点的孤立性

设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 而 z_0 是 D 中的一点. 若 $f(z_0) = 0$, 则称 z_0 为解析函数 $f(z)$ 的一个零点.

下面我们要证明一个不恒等于零的解析函数的零点是孤立的, 即对于任意零点 z_0 , 存在一个小邻域 $U_\delta = \{z : |z - z_0| < \delta\}$, 使得在 U_δ 中除 z_0 外, 不再有其他零点. 这一条性质是解析函数所特有的性质. 显然, 一般复变量函数显然不具有这样的性质.

为了证明解析函数唯一性定理, 我们需要下列命题:

命题 2.1 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 而 a 是 D 中的一点. 若 $f(z)$ 在 a 的某个邻域 $U_\delta(a) = \{z : |z - a| < \delta\} (\delta > 0)$ 内恒等于零, 则它在整个区域 D 中恒等于零, 即

$$f(z) \equiv 0, \quad \forall z \in D.$$

证 假定 $f(z)$ 在 $U_\delta(a)$ 中恒等于零. 根据上一节的结果, $f(z)$ 在 a 点有幂级数展开式:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n, \quad \forall z : |z - a| < d(a). \quad (2.1)$$

这里 $d(a)$ 是 a 到 D 的边界的距离. 根据前面的结果,

$$a_n = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta, \quad \forall \rho: 0 < \rho < d(a). \quad (2.2)$$

由于 $f(z)$ 在 $U_\delta(a)$ 中恒等于零, 故在式 (2.2) 中令 $\rho < \delta$, 即得到

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

这样, 我们由 $a_n = 0$ 及式 (2.1), 便进一步得到

$$f(z) \equiv 0, \quad \forall z: |z-a| < d(a).$$

总之, 零点集合由 $U_\delta(a)$ 扩大到 $\{z: |z-a| < d(a)\}$. 下面我们要进一步把它扩大到区域 D .

设 b 是 D 中的任意一点. 为了证明命题, 下面我们只要证明 $f(b) = 0$ 就足够了.

现在, 我们用 D 中的一条逐段光滑曲线 γ 连接 a 与 b , 并假定 d 是 γ 到 ∂D 的距离:

$$d = \inf\{|\zeta - z|: \zeta \in \partial D; z \in \gamma\}.$$

显然, $d > 0$, 并且对于任意一点 $c \in \gamma$, $d(c) \geq d$, 这里 $d(c)$ 表示点 c 到 ∂D 的距离. 根据前面的讨论, 只要 $f(z)$ 在 c 点的一个邻域为零, 则必在 $\{z: |z-c| < d(c)\}$ 中为零.

不失一般性, 设 γ 的参数方程为

$$z = z(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad z(0) = a; \quad z(1) = b.$$

在 $[0, 1]$ 上取 $n+1$ 个点 t_j ($j = 0, 1, \dots, n$) 使得

$$t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1.$$

这样就在 γ 上得到了相应的 $n+1$ 个点: $c_j = z(t_j)$ ($j = 0, 1, \dots, n$), 而这些点将 γ 分成 n 条小的弧段. 我们取这些分点足够稠密, 使得 γ 上的每一个小的弧段的弧长小于 $d/2$.

由于 $d \leq d(c_0)$, 并注意到 $|c_0 - c_1| < d/2 < d(a)$, 故 c_1 必然落在圆 $\{z : |z - c_0| < d(c_0)\}$ 之内. 因此, $f(z)$ 在 c_1 的一个邻域等于零, 从而导致 $f(z)$ 在 $\{z : |z - c_1| < d(c_1)\}$ 内恒等于零. 又因为 c_2 落在 $\{z : |z - c_1| < d(c_1)\}$ 之中, 重复同样的讨论, 我们又进一步推出 $f(z)$ 在圆 $\{z : |z - c_2| < d(c_2)\}$ 内恒等于零. 如此下去, 最后推出 $f(z)$ 在 $\{z : |z - c_n| < d(c_n)\}$ 中恒等于零. 注意到 $c_n = b$, 即得 $f(b) = 0$. 证毕.

定理 2.3(零点孤立性定理) 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 且 $f(z)$ 不恒等于零. 若 $z_0 \in D$ 是 $f(z)$ 的一个零点, 则存在一个正数 δ , 使得在 z_0 的邻域 $U_\delta(z_0) = \{z : |z - z_0| < \delta\}$ 中, 除 z_0 外 $f(z)$ 没有其他零点.

证 设 $f(z)$ 在 z_0 点的一个邻域 U 有幂级数展开式:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

根据命题 1.1 和函数 $f(z)$ 在 D 中不恒等于零的假定, 由命题 2.1 推出, $f(z)$ 在 U 内不恒等于零. 这样, 上述级数的系数不全为零.

假定 a_k 是第一个不等于零的系数, 则 $k \geq 1$ (因为 $a_0 = f(z_0) = 0$). 因此, 我们可将上述级数写成

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = (z - z_0)^k \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+k}(z - z_0)^m.$$

令

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+k}(z - z_0)^m,$$

则 $g(z)$ 在 U 中解析, 并且 $g(z_0) = a_k \neq 0$. 根据 $g(z)$ 在 z_0 的连续性和 $g(z_0) \neq 0$, 存在一个 $\delta > 0$, 使得

$$|g(z)| > \frac{1}{2}|g(z_0)| > 0, \quad \text{只要 } |z - z_0| < \delta.$$

这样, 当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时, $|f(z)| = |(z - z_0)^k| |g(z)| > 0$. 这也就是说, $f(z)$ 在邻域 $U_\delta(z_0)$ 内, 除去 z_0 之外, 没有其他零点. 证毕.

定义 设 $f(z)$ 在 z_0 点的一个邻域内解析. 若

$$f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(z_0) = 0, f^{(n)}(z_0) \neq 0,$$

则我们称 z_0 是 $f(z)$ 的 n 阶零点; 或者说, 零点 z_0 的阶为 n .

从定理 2.3 的证明中立刻看出下列结论:

命题 2.2 点 z_0 是 $f(z)$ 的一个 n 阶零点的充要条件是, 存在 z_0 的一个邻域 V 和一个在 V 中解析的函数 $g(z)$, 使得

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z), \quad g(z) \neq 0, \quad \forall z \in V.$$

由此命题立刻看出, $(z-1)^2(z-4)e^z/(2-z)$ 有两个零点: $z = 1$ 与 $z = 4$, 它们分别是 2 阶与 1 阶零点.

另外, 很容易根据定义证实, 点 $z = 0$ 是函数 $\sin z - z$ 的 3 阶零点. 请读者自行证明.

现在, 我们回到零点孤立性定理的讨论上. 根据定理 2.3 与命题 2.1, 立刻推出下列结论, 通常人们称之为解析函数的唯一性定理:

定理 2.4(解析函数的唯一性定理) 设 $f(z)$ 在区域 D 中解析. 又设 E 是 D 的一个子集合, 它在 D 中至少有一个聚点. 若 $f(z)$ 在集合 E 等于零, 则 $f(z)$ 在 D 中恒等于零.

这条定理也可以叙述成下列形式:

定理 2.4' 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 是两个在区域 D 中解析的函数. 又设 E 是 D 的一个子集合, 它在 D 中至少有一个聚点. 若 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在集合 E 相等, 则 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在整个区域 D 中恒等, 即

$$f(z) \equiv g(z), \quad \forall z \in D.$$

请读者自己完成定理 2.4 与定理 2.4' 的证明.

关于集合 E , 我们应当指出: 定理中要求它至少有一个聚点落在 D 中, 这一点是重要的, 是不可缺少的. 事实上, 如果一个解析函数具有无穷个零点, 但这些零点的聚点落在定义域的边界上, 这时它在区域内可以不恒等于零. 例如, $w = \sin \frac{1}{z}$ 在 $\{z: |z-1| < 1\}$ 中解析有无穷多个零点, 但不恒等于零.

解析函数唯一性定理有许多应用. 现在举一些例子来说明它的应用:

例 2.3 设有一个整函数 $f(z)$, 它在实轴上与 e^x 取相同的值, 即 $f(x) = e^x (\forall x \in \mathbb{R})$. 证明: $f(z) \equiv e^z (\forall z \in \mathbb{C})$.

证 设 $F(z) = f(z) - e^z$. 那么 $F(z)$ 是一个整函数, 并且 $F(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. 而实轴作为复平面的一个子集合, 显然在复平面中有聚点. 因此, $F(z)$ 在整个复平面上恒等于零, 即 $f(z) \equiv e^z (\forall z \in \mathbb{C})$. 证毕.

例 2.4 用解析函数唯一性定理证明 $\sin z$ 以 2π 为周期.

我们考虑整函数 $F(z) = \sin(z + 2\pi) - \sin z$. 注意到它在实轴上处处为零, 而实轴在复平面上有聚点, 由解析函数唯一性定理, 立刻推出它在复平面上恒等于零.

习题 5.2

1. 用解析函数的唯一性定理证明下列结论:

- (1) $e^{z+2\pi i} = e^z$;
- (2) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$;
- (3) $(\sin z)' = \cos z$;
- (4) $(\sinh z)' = \cosh z, (\cosh z)' = \sinh z$;
- (5) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

2. 利用解析函数的唯一性定理, 由 $\ln(1+x)$ 的泰勒展开式推出 $\ln(1+z)$ 泰勒展开式, 并说明其收敛半径.

3. 设 $f(z)$ 是区域 D 中的一个解析函数, 不恒等于常数. 又设 $\gamma: z = z(t) (0 \leq t \leq 1)$ 是 D 中的一条简单曲线. 试证明对于任意一个常数 a , 方程

$$f(z(t)) = a \quad (t \in [0, 1])$$

至多有有限个解.

4. 写出下列函数在点 $z = 0$ 处的泰勒展开式中的前 3 项, 并说明各自的收敛半径:

$$(1) \tan z; \quad (2) \sin^2 z; \quad (3) \ln(1+z).$$

5. 设 $f(z)$ 是区域 D 中一个解析函数, 而 a 是 D 中的一个点. 若

$$f^{(n)}(a) = 0, \quad n = k+1, k+2, \dots,$$

则 $f(z)$ 必定是一个 k 阶多项式, 并有

$$f(z) \equiv f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k, \quad \forall z \in D.$$

6. 设 $w = f(z)$ 是一个整函数, 且存在一个常数 $M > 0$ 及自然数 n , 使得对于任意的一个 $R > 0$ 都有

$$|f(z)| \leq MR^n, \quad \text{当 } |z| < R.$$

证明: $f(z)$ 是一个多项式.

7. 证明: 不存在一个函数 $f(z)$, 在 $z = 0$ 附近解析, 并满足下列条件:

$$f(x_n) = \frac{1 + (-1)^n}{n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

其中 $x_n \neq 0$, 满足 $x_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

8*. 设 $f(z)$ 在区域 D 中的一个不恒等于常数的解析函数, 而 D 的边界 γ 是一条简单闭曲线. 又设 $f(z)$ 在闭区域 $\bar{D} = D \cup \{\gamma\}$ 连续, 且 $|f(z)|$ 在 γ 上等于常数 $m (m > 0)$. 证明:

(1) $f(z)$ 在 D 内有一个零点;

(2) 对于任意的一个复数 $w, |w| < m$, 存在一个点 $z \in D$, 使得 $f(z) = w$;

(3) $f(D) = \{w : |w| < m\}$.

提示 利用反证法和最小模原理证明 (1). 考虑辅助函数

$$F(z) = \frac{f(z) - w}{m^2 - \bar{w}f(z)} \quad (\forall z \in \bar{D}),$$

并证明它在边界上的模等于常数 m , 然后对于 F 使用 (1) 的结果, 从而证明(2).

9. 设有一个整函数 $w = f(z)$ 满足

$$f(1/n) = (n+1)/n^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

证明: $f(z) = z + z^2, \forall z \in \mathbb{C}$.

第六章 解析函数的洛朗展开 与孤立奇点

§1. 洛朗展开

1.1 环域中解析函数的洛朗展开式

在这一章中,我们要讨论解析函数中的另一种展开式:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n. \quad (1.1)$$

这种级数与幂级数不同,除了非负方幂之外,它还包含了负的方幂.一般说来,它的收敛范围也不再是一个圆盘,而是一个圆环.

洛朗展开将为解析函数的孤立奇点的研究和下一章的辐角原理提供必要的基础.

现在,我们先对级数 (1.1) 作一些讨论.

首先我们指出,它是一个双向无穷的级数:

$$\cdots + a_{-2}(z-z_0)^{-2} + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots,$$

我们可以把级数 (1.1) 写成两个级数:

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n; \quad \psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}.$$

对于给定一点 z , 当且仅当两个级数 $\phi(z)$ 与 $\psi(z)$ 都在 z 收敛时, 我们才称级数 (1.1) 在 z 收敛, 并且认为

$$f(z) = \phi(z) + \psi(z).$$

现在, 我们假定级数 $\phi(z)$ 的收敛半径为 $R > 0$, 那么它在收敛圆 $\{z : |z - z_0| < R\}$ 中内闭一致收敛, 其和函数是该圆盘内的一个解析函数. 另外, 级数 $\psi(z)$ 可改写成:

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} [(z - z_0)^{-1}]^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \zeta^n, \quad \zeta = (z - z_0)^{-1}.$$

假如幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \zeta^n$ 的收敛半径为 $\rho > 0$, 那么, 级数 $\psi(z)$ 在圆 $\{z : |z - z_0| = 1/\rho\}$ 的外部 $|z - z_0| > 1/\rho$ 收敛, 并且级数 $\psi(z)$ 在 $\{z : |z - z_0| > 1/\rho\}$ 中内闭一致收敛. 因此, 其和函数在圆 $\{z : |z - z_0| = 1/\rho\}$ 的外部是一个解析函数.

总之, 我们证明了下列命题:

命题 1.1 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ 的收敛半径 $R > 0$. 又

设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \zeta^n$ 的收敛半径 $\rho > 0$. 若 $\rho^{-1} < R$, 则级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ 在环域 $\{z : r < |z - z_0| < R\}$ 中内闭一致收敛, 其中 $r = 1/\rho$. 若 $R < \rho^{-1}$, 则级数 (1.1) 处处发散.

设 $r = \rho^{-1} < R$. 我们把环域 $\{z : r < |z - z_0| < R\}$ 称为级数 (1.1) 的收敛环域. 显然, 级数 (1.1) 在其收敛圆外部处处发散.

现在, 我们要问: 若 $f(z)$ 在某个环域中解析, 它是否一定都能在该环内展开成有如 (1.1) 的级数呢? 回答是肯定的.

定理 1.1 设 $f(z)$ 在环域 $\{z : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ 中解析 (这里 $r_1 \geq 0, r_2 \leq +\infty$). 则下列展开式成立:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z : r_1 < |z - z_0| < r_2, \quad (1.2)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_\eta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1.3)$$

这里 c_η 是圆周 $\{z : |z - z_0| = \eta\}$, 其中 η 是满足不等式 $r_1 < \eta < r_2$ 的任意一个实数, 而 c_η 的定向为逆时针方向.

证 设 z 是任意给定的一点, 满足 $r_1 < |z - z_0| < r_2$. 我们取两个实数 r'_1, r'_2 使得

$$r_1 < r'_1 < |z - z_0| < r'_2 < r_2.$$

将圆周 $\{\zeta : |\zeta - z_0| = r'_1\}$ 与 $\{\zeta : |\zeta - z_0| = r'_2\}$ 分别记作 γ_1 与 γ_2 , 并规定它们的定向都是逆时针方向. 这时, 根据第三章定理 3.1, 我们有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (1.4)$$

重复解析函数展开成幂级数的证明步骤, 立刻得到

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^n,$$

其中

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

现在, 我们讨论积分

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta.$$

注意到

$$\frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{(z - z_0) \left(1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)}$$

和

$$\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| = \frac{r_1}{|z - z_0|} < 1,$$

利用等比级数求和公式, 我们就得到

$$\frac{1}{z - \zeta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}.$$

对这个等式两端乘 $f(\zeta)$, 然后在 γ_1 上对级数逐项积分 (请读者验证逐项积分的合理性), 就得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n (z - z_0)^{-n}, \\ n &= 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

其中

$$B_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} f(\zeta) (\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta.$$

现在, 我们令

$$a_n = \begin{cases} A_n, & \text{当 } n \geq 0, \\ B_{-n}, & \text{当 } n < 0, \end{cases}$$

由 (1.4) 式就得到

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

下面证明 a_n 满足条件 (1.3). 容易看出函数

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

在环域 $\{r_1 < |\zeta - z_0| < r_2\}$ 中是 ζ 的解析函数. 由柯西定理可推出, 它在该环域中的任何两个以 z_0 为中心的圆周上的积分 (均沿逆时针方向) 都相等. 因此, 对于任意整数 n , 都有

$$\oint_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \oint_{c_n} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

$$\oint_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \oint_{c_n} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

根据 a_n 与 A_n 和 B_n 的关系, 可知 a_n 满足 (1.3) 式. 证毕.

注 设 $f(z)$ 在环域 $\{r_1 < |z - z_0| < r_2\} (r_1 > 0)$ 内解析, 并假定 $f(z)$ 的洛朗级数的收敛环域为 $\{r < |z - z_0| < R\}$. 显然, 环域 $\{r_1 < |z - z_0| < r_2\} (r_1 > 0)$ 应该包含在其收敛域之中, 即 $r \leq r_1$ 且 $r_2 \leq R$.

设 $f(z)$ 在环域 $\{r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ 中解析, 并有展开式 (1.2). 若其中的系数 a_n 根据下列公式确定,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_\eta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (r_1 < \eta < r_2),$$

则级数 (1.2) 称作 $f(z)$ 的洛朗级数, 其中 a_n 称为洛朗系数. 而展开式 (1.2) 称为洛朗展开.

定理 1.1 告诉我们, 环域中的一个解析函数总能在该环域中展开成洛朗级数.

1.2 洛朗展开的唯一性

定理 1.2 (洛朗展开的唯一性) 设 $f(z)$ 在环域 $\{z : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ 中解析 ($r_1 \geq 0, r_2 \leq +\infty$). 若函数 $f(z)$ 有一个展开式:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n, \quad \forall z : r_1 < |z - z_0| < r_2, \quad (1.5)$$

则该级数必定是 $f(z)$ 的洛朗级数, 即 b_n 是 $f(z)$ 的洛朗系数 a_n , 也即

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_\eta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

其中 $\eta \in (r_1, r_2)$.

证 由命题 1.1 可知级数 (1.5) 在环域 $\{z : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ 内闭一致收敛. 于是, 下列逐项积分是合理的:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{c_\eta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}} d\zeta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{b_n}{2\pi i} \int_{c_\eta} (\zeta - z_0)^{n-m-1} d\zeta.$$

此式的左端等于前面定义的洛朗系数 a_m , 而其右端等于 b_m (利用第四章例 1.1). 这样, 我们证明了

$$b_m = a_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

证毕.

这个命题告诉我们, 不论我们采用什么方法, 求得了给定的解析函数 $f(z)$ 的一个形如 (1.5) 展开式, 那么这个展开式一定是它的洛朗展开式.

例 1.1 求函数

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-4)}$$

在环域 $\{z : 1 < |z| < 4\}$ 中的洛朗展开式.

解 在这个题目中所要求的洛朗展开式相当于定义中的 $z_0 = 0$ 的情况.

设 z 满足不等式 $1 < |z| < 4$, 则我们有

$$f(z) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z-4} - \frac{1}{z-1} \right).$$

另外, 利用等比级数求和公式, 我们又有

$$\frac{1}{z-4} = \frac{1}{4} \times \frac{-1}{1-\frac{z}{4}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+1}}$$

和

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \times \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

从而得到

$$f(z) = \frac{-1}{3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \right).$$

此展开式就是 $f(z)$ 的洛朗展开式.

例 1.2 求函数 $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ 在环域 $\{z: 0 < |z-z_0| < +\infty\}$ 中的洛朗展开式.

解 由于 $\sin z$ 在整个复平面上有幂级数展开式:

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

故在 $\{z: 0 < |z-z_0| < +\infty\}$ 中, 下列展开式成立:

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}z + \frac{1}{5!}z^3 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1}.$$

根据洛朗展开式的唯一性定理, 此展开式就是 $f(z)$ 的洛朗展开式.

例 1.3 函数 $f(z) = e^{1/z}$ 在环域 $\{z: 0 < |z-z_0| < +\infty\}$ 中的洛朗展开式为

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}.$$

例 1.4 求函数

$$f(z) = \frac{z^3 + 5z - 2}{(z-1)^3}$$

在环域 $\{z : 0 < |z-1| < +\infty\}$ 中的洛朗展开式.

解 先求出分子 $P(z) = z^3 + 5z - 2$ 在 $z=1$ 的泰勒展开式:

$$\begin{aligned} P(z) &= P(1) + P'(1)(z-1) + \frac{P''(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{P^{(3)}(1)}{3!}(z-1)^3 \\ &= 4 + 8(z-1) + 3(z-1)^2 + (z-1)^3. \end{aligned}$$

这样, 我们得到

$$f(z) = \frac{4}{(z-1)^3} + \frac{8}{(z-1)^2} + \frac{3}{z-1} + 1.$$

习题 6.1

将下列函数在指定的环域中展开成洛朗级数:

1. $\frac{1}{z-2}$ ($3 < |z| < +\infty$).
2. $\frac{1}{(z-2)(z-1)}$ ($3 < |z| < +\infty$).
3. $\frac{z+1}{z^2(z-1)}$ ($0 < |z| < 1$).
4. $e^{1/(1-z)}$ ($1 < |z| < +\infty$) (只求出三项负幂即可).
5. $\sin \frac{1}{z^2}$ ($0 < |z| < +\infty$).
6. 设 $f(z)$ 环域 $0 < |z-z_0| < R$ 中解析, 其洛朗级数为

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

试说明级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} \zeta^n$ 的收敛半径为 ∞ .

§2. 解析函数的孤立奇点

2.1 孤立奇点的分类

洛朗展开的最主要的用途是用来研究解析函数的孤立奇点.

定义 设函数 $f(z)$ 在一个穿孔盘 $\{z : 0 < |z - z_0| < r\}$ 中解析, 换句话说, $f(z)$ 在 z_0 附近但除去 z_0 之外解析. 这时我们称 z_0 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点, 或简称为奇点.

比如, $z = 0$ 是下列各个函数的奇点:

$$\frac{\sin z}{z}; \quad e^{1/z}; \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}; \quad \frac{1}{z^5}.$$

一个解析函数 $f(z)$ 的 z_0 奇点, 有下列三种可能性:

(I) 极限 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 存在. 这时, 我们称 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点.

(II) 极限 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$. 这时, 我们称 z_0 为 $f(z)$ 的极点.

(III) 极限 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 不存在, 并且在 $z \rightarrow z_0$ 时 $f(z)$ 也不趋于无穷. 这时, 我们称 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点.

利用正弦函数的泰勒展开式, 可以看出 $\lim_{z \rightarrow 0} (\sin z)/z = 1$. 因此 $z = 0$ 是函数 $(\sin z)/z$ 的可去奇点. 利用同样的办法, 可以看出 $\lim_{z \rightarrow 0} e^z/z^3 = \infty$, 从而 $z = 0$ 是函数 e^z/z^3 的极点. 最后, 我们说明 $z = 0$ 是函数 $e^{1/z}$ 的本性奇点. 这是因为

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} e^{1/x} = 0, \quad \text{而} \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} e^{1/x} = +\infty.$$

下面我们利用洛朗展开对上述三种奇点作进一步的讨论.

设 $f(z)$ 在 $\{z : 0 < |z - z_0| < r\}$ 有洛朗展开式:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z : 0 < |z - z_0| < r,$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

这里 $0 < \rho < r$, 而 c_ρ 表示以 z_0 为中心、以 ρ 为半径的圆周, 其定向为逆时针方向.

我们将这个展开式写成: $f(z) = \phi(z) + \psi(z)$, 其中

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n; \quad \psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}.$$

也就是说, $\phi(z)$ 包含了洛朗展开中所有 $(z - z_0)^n$ 的非负幂项, 而 $\psi(z)$ 则包含了其所有负幂项. 显然, $\phi(z)$ 在 $\{z : |z - z_0| < r\}$ 中解析, 而 $\psi(z)$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ 中解析.

$\phi(z)$ 称为 $f(z)$ 在奇点 z_0 的洛朗展开的解析部分, 而 $\psi(z)$ 称为 $f(z)$ 在奇点 z_0 的洛朗展开的主要部分, 简称 $f(z)$ 的主部.

显然, 前面所说的 $f(z)$ 在奇点的不同性态, 完全取决于它的主部 $\psi(z)$.

考察级数 $\psi(z)$ 的结构, 有下列三种可能:

(A) $\psi(z)$ 的全部系数 $a_{-n} = 0 (n > 0)$;

(B) $\psi(z)$ 的系数 $a_{-n} (n > 0)$ 中不全为零, 但仅有有限个不为零;

(C) $\psi(z)$ 的系数 $a_{-n} (n > 0)$ 中有无限多个不为零.

下面我们将要证明前面所说的 (I),(II),(III) 三种情况, 分别对应于现在的 (A),(B), (C) 三种情况.

2.2 可去奇点

定理 2.1 设 $f(z)$ 在 $\{z : 0 < |z - z_0| < r\}$ 中解析. 则 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点的充要条件是其主部 $\psi(z) \equiv 0 (\forall z : 0 < |z - z_0| < r)$.

证 假设 $\psi(z) \equiv 0$. 那么, 这时我们有

$$f(z) = \phi(z), \quad \forall z: 0 < |z - z_0| < r,$$

其中 $\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ 是 $f(z)$ 在 z_0 的洛朗展开的解析部分. 这样, 我们推出极限

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \phi(z) = a_0.$$

由此可见, z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点.

现在我们假定 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点, 即极限 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 存在. 这时, 在 z_0 一个空心邻域内 $f(z)$ 是一个有界函数, 即存在常数 $M > 0$ 和 $0 < \delta < r$, 使得

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z: 0 < |z - z_0| < \delta.$$

设 $f(z)$ 的主部为 $\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$. 根据前面的结果, 对于任意自然数 $n > 0$, $\psi(z)$ 的第 n 个系数

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_\rho} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta,$$

其中 ρ 可取 $(0, r)$ 中的任意数. 这样, 当 $0 < \rho < \delta$ 时, 我们有

$$|a_{-n}| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{c_\rho} |f(z)| |z - z_0|^{n-1} ds \leq M\rho^n.$$

对于任意固定的 n , 令 $\rho \rightarrow 0$, 即得到 $a_{-n} = 0$. 由此推出 $\psi(z) \equiv 0$. 定理证毕.

由上述证明中我们很容易看出下列定理成立:

定理 2.2 设 $f(z)$ 在 $\{z: 0 < |z - z_0| < r\}$ 中解析. 则 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点的充要条件是 $f(z)$ 在某个空心邻域 $\{z: 0 < |z - z_0| < \delta\}$ 中有界.

条件的必要性可由可去奇点的定义直接推出, 而条件的充分性可以在定理 2.1 的证明中找到.

最后, 我们指出, 从定理 2.1 的结论立刻推出: z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点时我们可以在 z_0 适当补充定义, 使得 $f(z)$ 在 $\{z: |z-z_0| < r\}$ 解析, 反之亦然. 这正是“可去奇点”一词的缘由.

2.3 极点

定理 2.3 设 $f(z)$ 在 $\{z: 0 < |z-z_0| < r\}$ 中解析. 则 z_0 是 $f(z)$ 的极点的充要条件是其主部 $\psi(z)$ 具有下列形式:

$$\psi(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}, \quad a_{-m} \neq 0,$$

其中 $m > 0$, 并且

$$a_{-j} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_\rho} f(\zeta)(\zeta-z_0)^{j-1} d\zeta, \quad j = 1, 2, \cdots, m.$$

这里 c_ρ 的意义同前.

证 设 $f(z)$ 的解析部分为 $\phi(z)$. 那么, $\phi(z)$ 在圆盘 $\{z: |z-z_0| < r\}$ 中解析.

我们先证条件的充分性. 假定主部 $\psi(z)$ 具有定理中的形式. 这时, 显然有

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \psi(z) = \infty,$$

并由此得到

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \phi(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} \psi(z) = \infty.$$

因此, z_0 是 $f(z)$ 的极点.

现在, 证明条件的必要性. 假定 z_0 是 $f(z)$ 的极点, 即

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty.$$

由此可知, 存在一个 $\delta: 0 < \delta < r$ 使得

$$|f(z)| \geq 1, \quad \forall z: 0 < |z - z_0| < \delta.$$

我们考虑函数

$$F(z) = \frac{1}{f(z)}, \quad \forall z: 0 < |z - z_0| < \delta.$$

这时, $|F(z)| \leq 1, \forall z: 0 < |z - z_0| < \delta$. 根据定理 2.2, z_0 是 $F(z)$ 的可去奇点. 我们在 z_0 点补充定义

$$F(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = 0.$$

这时, $F(z)$ 在 $\{z: |z - z_0| < \delta\}$ 中解析. 设 z_0 是 $F(z)$ 的 m 阶零点, 那么根据零点孤立性定理, $F(z)$ 可表成

$$F(z) = (z - z_0)^m G(z) \quad (G(z) \neq 0), \quad \forall z: |z - z_0| < \delta_1,$$

其中 $\delta_1 < \delta$, 而 $G(z)$ 是解析函数. 这样,

$$(z - z_0)^m f(z) = \frac{1}{G(z)}, \quad \forall z: |z - z_0| < \delta_1.$$

令 $g(z) = 1/G(z)$, 并假定

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (c_0 \neq 0).$$

那么, 我们有

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{c_j}{(z - z_0)^{m-j}} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m} (z - z_0)^n \quad (c_0 \neq 0) \\ &\quad (\text{只要 } z: 0 < |z - z_0| < \delta_1). \end{aligned}$$

根据洛朗展开的唯一性, 我们有

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m}(z-z_0)^n, \quad \psi(z) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{c_j}{(z-z_0)^{m-j}} \quad (c_0 \neq 0).$$

这样, $f(z)$ 的主部 $\psi(z)$ 具有所要求的形式. 定理证毕.

由定理 2.3 立刻推出下列定理成立:

定理 2.4 设 $f(z)$ 在 $\{z : 0 < |z - z_0| < r\}$ 中解析. 则 z_0 是 $f(z)$ 的极点的充要条件是: 存在一个自然数 $m \geq 1$ 使得

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = A \quad (A \neq 0).$$

当 z_0 是 $f(z)$ 的极点时, 这里的自然数 m 是唯一确定的. 实际上, A 就是定理 2.3 中的 a_m .

定义 若

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = A \quad (A \neq 0),$$

则我们称 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点, 自然数 m 称为极点 z_0 的阶.

根据定义, 不难看出, $z = 0$ 是函数

$$\cot(z), \quad \frac{e^z}{z^3}, \quad z^{-4} \sin\left(\frac{z}{z-1}\right)^2$$

的极点, 它们的阶依次是 1, 3 和 2. 请读者自己验证.

根据上述定义, 很容易看出: 点 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点的充要条件是 z_0 是 $1/f(z)$ 的 m 阶零点.

2.4 本性奇点

由定理 2.1 和定理 2.4 立刻推出, 条件 (III) 对应于情况 (C), 也即有下列定理:

定理 2.5 设 $f(z)$ 在 $\{z: 0 < |z - z_0| < r\}$ 中解析. 则 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点的充要条件是其主部有无穷多个系数不等于零.

根据本性奇点的定义和前面的定理, 我们有下面的定理:

定理 2.6 设 $f(z)$ 在 $\{z: 0 < |z - z_0| < r\}$ 中解析. 则 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点的充要条件是存在 $\{z_n\}$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $z_n \rightarrow z_0$, 但 $\{f(z_n)\}$ 没有极限, 也不趋于 ∞ .

例如, 点 $z = 0$ 是函数 $f(z) = \sin 1/z$ 的本性奇点. 事实上, 取 $z_n = 2/(n\pi)$, 那么极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$ 不存在, 而且 $|f(z_n)| \leq 1$. 这就保证了当 $z \rightarrow z_0$ 时, $f(z)$ 没有极限, 也不趋于 ∞ . 因此, 点 $z = 0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点.

下面的定理是对本性奇点的进一步刻画:

定理 2.7(魏尔斯特拉斯定理) 设 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点, 则对于任意一个复数 ζ , 存在一个序列 $\{z_n\}$ ($z_n \neq z_0$), 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $z_n \rightarrow z_0$, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \zeta.$$

注 这个定理告诉我们, 在一个本性奇点 z_0 的附近, 函数 $f(z)$ 的取值状况异常复杂: 在 $z \rightarrow z_0$ 的过程中, 函数 $f(z)$ 能以任意一个复数 ζ 作为它的一个极限点 (当然, 这不意味着 $f(z)$ 能够取到这个值).

令人意外的是, 皮卡 (Picard) 证明了下面的有趣的定理:

皮卡大定理 设 $w = f(z)$ 在 $\{z: 0 < |z - a| < r\}$ 中解析, 并且点 a 是它的本性奇点. 则 $w = f(z)$ 在 $\{z: 0 < |z - a| < r\}$ 中可取到任意一个复数, 最多只有一个值不能取到.

比如, 函数 $w = e^{1/z}$ 在 $z = 0$ 的任何一个空心邻域内取遍所有非零复数, 而 0 是它唯一取不到的值.

皮卡大定理的证明超出了本书的范围.

定理 2.7 的证明 设 ζ 是任意给定的复数. 若对于任意自然数 n , 在 z_0 的空心邻域

$$\{z : 0 < |z - z_0| < 1/n\}$$

中总有一点 z_n 使得 $f(z_n) = \zeta$, 那么定理的结论已经得到证明.

现在我们假定有某个自然数 N 使得

$$f(z) \neq \zeta, \quad \forall z : 0 < |z - z_0| < \frac{1}{N}.$$

这时, 我们考虑函数

$$F(z) = \frac{1}{f(z) - \zeta}, \quad \forall z : 0 < |z - z_0| < \frac{1}{N},$$

那么, $F(z)$ 在这个空心邻域中解析, 并以 z_0 为奇点.

我们现在说明, z_0 不是 $F(z)$ 的可去奇点. 事实上, 若 z_0 是 $F(z)$ 的可去奇点, 那么适当定义 $F(z)$ 在 z_0 的值之后, $F(z)$ 在 z_0 解析. 这时, 如果 $F(z)$ 以 z_0 为零点, 则 $f(z) - \zeta$ 在 z_0 为极点; 如果 $F(z)$ 在 z_0 不等于零, 则 $f(z) - \zeta$ 在 z_0 为可去奇点. 然而, 这两种情况都导致 $f(z)$ 不是本性奇点, 与假设矛盾. 所以, z_0 不是 $F(z)$ 的可去奇点.

这样, $F(z)$ 在 z_0 任意一个空心邻域 $\{z : 0 < |z - z_0| < 1/n\}$ 中无界, 这里 $n > N$. 由此可见, 对于每一个自然数 $n > N$, 存在一个点 z_n 使得

$$|F(z_n)| > n, \quad \text{其中 } 0 < |z_n - z_0| < \frac{1}{n}.$$

由此推出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(z_n) = \infty,$$

而这意味着

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \zeta.$$

定理证毕.

2.5 无穷作为孤立奇点的情况

前面有关孤立奇点的讨论都是限定奇点是有穷点的情况. 现在我们讨论无穷远点作为解析函数的孤立奇点的情况.

首先, 我们给出孤立奇点及其分类的定义.

设 $f(z)$ 在区域 $\{z: r < |z| < +\infty\}$ 中解析, 其中 $r \geq 0$. 这时, 我们称 ∞ 是 $f(z)$ 的一个孤立奇点. 这里, 区域 $\{z: r < |z| < +\infty\}$ 也可写成 $\{z \in \mathbb{C}: |z| > r\}$.

设 ∞ 是 $f(z)$ 的一个孤立奇点. 我们依据下列三种情况将奇点分类:

(I) 若 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ 存在, 则我们称 ∞ 为 $f(z)$ 的可去奇点.

(II) 若 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$, 则我们称 ∞ 为 $f(z)$ 的极点.

(III) 若 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ 不存在, 且当 $z \rightarrow \infty$ 时 $f(z)$ 也不趋向于无穷, 则我们称 ∞ 为 $f(z)$ 的本性奇点.

设 $f(z)$ 在环域 $\{z: r < |z| < +\infty\}$ 中有洛朗展开式:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \quad \forall z: r < |z| < +\infty.$$

这时我们有

$$f(z) = \Phi(z) + \Psi(z),$$

其中

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \Psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}.$$

我们把 $\Phi(z)$ 称为 $f(z)$ 的解析部分, 而把 $\Psi(z)$ 称为 $f(z)$ 的主要部分, 或简称为主部.

这里我们提醒读者注意, 这样定义主部, 跟前面有穷奇点的情形有所不同: 在有穷奇点的情况, 主部包含了洛朗级数的全部的负幂项, 而在无穷作为奇点时, 主部却包含了洛朗展开中全部正幂项. 为什么要这样做呢? 这是因为我们是依据 $z \rightarrow \infty$ 时, 函数

值 $f(z)$ 的性态来定义奇点的类型的, 而在 $z \rightarrow \infty$ 时, 洛朗展开中全部正幂项所形成的级数, 对 $f(z)$ 的性态起着主导作用.

我们不加证明地列出如下的定理, 它们的证明与前面完全类似:

定理 2.8 设 $f(z)$ 在区域 $\{z : r < |z| < +\infty\}$ 中解析, 则 ∞ 是 $f(z)$ 的可去奇点的充要条件是其洛朗展开的主部 $\Psi(z) \equiv 0$.

定理 2.9 设 $f(z)$ 在区域 $\{z : r < |z| < +\infty\}$ 中解析, 则 ∞ 是 $f(z)$ 的可去奇点的充要条件是存在一个数 $R > r$ 使得 $f(z)$ 在 $\{z : R < |z| < +\infty\}$ 有界.

定理 2.10 设 $f(z)$ 在区域 $\{z : r < |z| < +\infty\}$ 中解析, 则 ∞ 是 $f(z)$ 的极点的充要条件是其洛朗展开的主部 $\Psi(z)$ 只有有穷项:

$$\Psi(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m \quad (m \geq 1, a_m \neq 0).$$

定理 2.11 设 $f(z)$ 在区域 $\{z : r < |z| < +\infty\}$ 中解析, 则 ∞ 是 $f(z)$ 的极点的充要条件是存在一个自然数 $m \geq 1$, 使得

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-m} f(z) = A \quad (A \neq 0).$$

这两个定理中的自然数 m 称为极点的阶.

后面我们还会用到无穷远点作为零点时的阶. 若有一个自然数 $m \geq 1$, 使得

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^m f(z) = A \quad (A \neq 0),$$

则我们称 ∞ 为 $f(z)$ 的 m 阶零点.

定理 2.12 设 $f(z)$ 在区域 $\{z : r < |z| < +\infty\}$ 中解析, 则 ∞ 是 $f(z)$ 的本性奇点的充要条件是其洛朗展开的主部有无穷多个系数不为零.

定理 2.13 设 $f(z)$ 在 $\{z: r < |z| < +\infty\}$ 中解析. 则 ∞ 是 $f(z)$ 的本性奇点的充要条件是当 $z \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(z)$ 没有极限, 也不以 ∞ 为极限.

对于无穷作为本性奇点的情况, 魏尔斯特拉斯定理依旧成立. 现在, 我们看一些简单例子, 以便具体理解上述讨论的意义. 无穷远点 ∞ 作为函数

$$f(z) = \frac{z-a}{z-b}$$

的奇点是可去奇点, 这是因为 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 1$.

函数

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + 3z^3 + 5z + 7 + \frac{9}{z}$$

作为 $0 < |z| < +\infty$ 中的解析函数在无穷远点的展开式, 其解析部分与主要部分分别是

$$\Phi(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{9}{z} + 7, \quad \Psi(z) = 3z^3 + 5z.$$

可见 $f(z)$ 在无穷远点是 3 阶极点.

函数 $f(z) = \exp\{z + \frac{1}{z}\}$ 作为区域 $\{z: 0 < |z| < +\infty\}$ 中的解析函数, 在无穷远点是本性奇点. 这是因为当实数 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x) \rightarrow +\infty$, 而当实数 $x \rightarrow -\infty$ 时 $f(x) \rightarrow 0$. 这就保证了当 $z \rightarrow \infty$ 时, $f(z)$ 的极限不存在, 也不可能以无穷为其极限. 因而根据定理 2.13, ∞ 是 $f(z)$ 的本性奇点.

习题 6.2

判断下列函数在指定的奇点的类型 (如是极点请指出其阶数):

1. $\sec^2 z \quad \left(z_0 = \pm \frac{\pi}{2}\right).$

2. $\frac{1}{\sinh z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}} \quad (z_0 = 0).$

3. $z^3 \sin \frac{1}{z}$ ((1) $z_0 = 0$; (2) $z_0 = \infty$).

4. $(z-1)e^z \ln \frac{z-1}{z-2}$ ((1) $z_0 = 1$; (2) $z_0 = 2$).

5. $(e^z - 1)^{-1} e^{z-1}$ ($z_0 = 1$).

6. 证明: 有理函数

$$Q(z) = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n} \quad (a_0 \neq 0, b_0 \neq 0)$$

在 ∞ 要么是可去奇点, 要么是极点.

7. 设 $f(z)$ 在 $\{z: 0 < |z - z_0| < R\}$ 中解析, 且不等于零. 证明: 若 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点, 则 $g(z) = 1/f(z)$ 在 z_0 也是本性奇点.

8. 设 z_0 是 $f(z) (\neq 0)$ 的本性奇点, 且 $g(z)$ 在 z_0 也是本性奇点. 问: z_0 是否一定是 $f(z) \pm g(z)$ 与 $f(z) \cdot g(z)$ 的本性奇点.

9. 设函数 $f(z)$ 在环域 $\{z: r < |z| < +\infty\}$ 中解析. 我们考虑函数

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right), \quad \forall z: 0 < |z| < \frac{1}{r}.$$

证明: $f(z)$ 的奇点 ∞ 与 $g(z)$ 的奇点 $z = 0$ 的类型相同, 并讨论它们的主部之间的关系.

10. 设 $f(z)$ 为一整函数, 且 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 是一个一一满射. 证明:

$$f(z) = az + b, \quad \text{其中 } a(\neq 0), b \text{ 为常数.}$$

提示 利用魏尔斯特拉斯定理与代数基本定理.

11. 设 $f(z)$ 在 $\{z: 0 < |z - z_0| < R\}$ 中解析, 且不恒等于零. 若存在一个序列 $z_n \neq z_0, z_n \rightarrow z_0 (n \rightarrow \infty)$, 并使得 $f(z_n) = 0 (n = 1, 2, \cdots)$. 则 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点. 试证明这一结论.

§3. 整函数与亚纯函数

3.1 整函数

我们已经知道, 所谓整函数就是在整个复平面上解析的函数. 我们所熟悉的一些基本初等函数, 比如, 多项式, $\sin z$, $\cos z$, e^z 等

都是整函数. 但是, $\tan z$, $\cot z$ 和 $\operatorname{Ln} z$ 都不是整函数——这是因为前两个函数在复平面上有极点, 而最后一个是多值函数.

每一个整函数, 都有一个唯一的孤立奇点, 那就是 ∞ . 因此, 整函数在 ∞ 的性态对函数的性质有决定性的影响.

设 $f(z)$ 是一个整函数, 并有展开式:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (3.1)$$

特别地, 此式在任何一个环域 $\{z : r < |z| < +\infty\}$ 中成立. 因此, 它也可视为该环域中的洛朗展开式. 在这种看法下, 其洛朗展开的解析部分与主部分别是

$$\Phi(z) = a_0; \quad \Psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad \forall z : r < |z| < +\infty.$$

应用上一节的定理, 立刻得到:

定理 3.1 设 $f(z)$ 是一个整函数, 并具有展开式 (3.1), 则有下列三种可能性:

- (1) 若 ∞ 是 $f(z)$ 的可去奇点, 则 $f(z)$ 是一个常数;
- (2) 若 ∞ 是 $f(z)$ 的极点, 则是一个 $m (\geq 1)$ 次多项式:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m \quad (a_m \neq 0);$$

- (3) 若 ∞ 是 $f(z)$ 的本性奇点, 则在展开式中有无穷多个系数 a_n 不等于 0.

定义 若 ∞ 是整函数 $f(z)$ 的本性奇点, 则我们称 $f(z)$ 是一个 **超越整函数**.

显然, $\sin z$, $\cos z$, e^z , $\sinh z$ 以及 $\cosh z$ 都是超越整函数.

一个超越函数在无穷远点附近的取值十分复杂. 根据前面的魏尔斯特拉斯定理, 超越函数在无穷远点的任意一个邻域中, 其函

数值可以以任何一个给定的复数为其极限点. 而根据前面我们提到的皮卡定理, 超越函数在无穷远点的任意一个邻域中, 其函数值可以取到任何一个复数, 最多有一个例外值. 因此, 将前面提到的皮卡大定理应用于整函数就得到下面的定理:

皮卡小定理 若 $w = f(z)$ 是一个整函数, 且不取两个值 a 与 b ($a \neq b$), 则 $f(z)$ 一定是常数.

在皮卡定理的影响下, 在 20 世纪 20 年代前后, 整函数的值分布问题引起人们的兴趣与广泛的研究.

3.2 亚纯函数

定义 在区域 D 内除去孤立极点之外处处解析的函数称为区域 D 内的亚纯函数. 一个在整个复平面 \mathbb{C} 内的亚纯函数, 有时简称为亚纯函数.

首先, 让我们来考察一类典型的亚纯函数——有理函数. 所谓有理函数是指两个多项式的商:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \equiv \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n} \quad (a_0 \neq 0, b_0 \neq 0).$$

这里我们假定分子 $P(z)$ 与分母 $Q(z)$ 互素, 也即它们没有公因子. 这时 $Q(z)$ 的每一个 k 阶零点都是 $R(z)$ 的 k 阶极点. 显然, 除去这些孤立极点 (至多 n 个) 之外, $R(z)$ 处处解析. 因此, 有理式是复平面 \mathbb{C} 上一个亚纯函数.

现在我们要进一步指出, 有理函数不仅是 \mathbb{C} 上的亚纯函数, 而且也是扩充复平面 $\bar{\mathbb{C}}$ 上的亚纯函数.

这是因为 $R(z)$ 的有穷极点只有有限个, 所以在一个充分大圆外, 不再有 $R(z)$ 的极点. 这样, ∞ 是 $R(z)$ 的一个孤立奇点. 若 ∞ 是可去奇点 (当 $m \leq n$), 那么要么 ∞ 是 $R(z)$ 的零点 (当 $m < n$); 要么当 $z \rightarrow \infty$ 时, $R(z)$ 有一个非零的极限值 $\frac{a_0}{b_0}$ (当 $m = n$). 如果 ∞ 不是可去奇点, 则必然是 $R(z)$ 的极点 (当 $m > n$). 总之,

有理函数 $R(z)$ 除了有穷极点之外, 尚有可能在 ∞ 为孤立极点.

如果我们把 $R(z)$ 的一个 k 阶零点, 看成 k 个零点 (按重数计算), 并把一个 k 阶极点看成 k 个极点 (按重数计算), 则我们有如下命题:

作为扩充复平面上的亚纯函数, $R(z)$ 在 $\bar{\mathbb{C}}$ 上的零点个数与极点个数相等. 下面来证明这一结论.

设 $P(z)$ 共有 l 个不同的根: β_1, \dots, β_l , 则 $P(z)$ 可分解成下列形式的乘积:

$$P(z) = a_0(z - \alpha_1)^{m_1}(z - \alpha_2)^{m_2} \cdots (z - \alpha_l)^{m_l}.$$

同样, 设 $Q(z)$ 共有 k 个不同的根: β_1, \dots, β_k , 则 $Q(z)$ 可以分解成下列形式的因式的乘积:

$$Q(z) = b_0(z - \alpha_1)^{n_1}(z - \alpha_2)^{n_2} \cdots (z - \alpha_k)^{n_k}.$$

这样, 我们得到

$$R(z) = \frac{a_0(z - \alpha_1)^{m_1}(z - \alpha_2)^{m_2} \cdots (z - \alpha_l)^{m_l}}{b_0(z - \beta_1)^{n_1}(z - \beta_2)^{n_2} \cdots (z - \beta_k)^{n_k}}.$$

由于 P 与 Q 无公因子, 故 $\alpha_i \neq \beta_j$ ($1 \leq i \leq l; 1 \leq j \leq k$).

由这个表达式可以看出, 每一个 α_i 都是 $R(z)$ 的一个 n_i 阶零点, 而每一个 β_j 都是 $R(z)$ 的一个 m_j 阶极点. 这样, 按重数计算, $R(z)$ 在 \mathbb{C} 中共有

$$m_1 + \cdots + m_l = m \text{ 个零点, 和 } n_1 + \cdots + n_k = n \text{ 个极点.}$$

当 $n = m$ 时, ∞ 不是 $R(z)$ 的零点与极点, 因而 $R(z)$ 在 $\bar{\mathbb{C}}$ 上有相同个数的零点与极点. 当 $n < m$ 时, ∞ 是 $R(z)$ 的 $m - n$ 阶零点. 加上在 \mathbb{C} 上的 n 个零点, 在 $\bar{\mathbb{C}}$ 上 $R(z)$ 共有 m 个零点, 恰与极点个数相等. 当 $m > n$ 时, ∞ 是 $R(z)$ 的 $m - n$ 阶极点. 加上在 \mathbb{C} 上的 n 个极点, $R(z)$ 在 $\bar{\mathbb{C}}$ 上共有 m 个极点, 恰与零点个数相等.

定义 如果 \mathbb{C} 上的一个亚纯函数不是有理函数, 则我们称它为**超越亚纯函数**.

比如, $e^z/(z^2 - 1)$ 与 $\tan z$ 等都是超越亚纯函数.

这里, 函数 $e^z/(z^2 - 1)$ 只有两个极点: $z = 1$ 与 $z = -1$, 而 ∞ 是该函数的孤立奇点, 而且是一个本性奇点.

函数 $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ 的极点有无穷多个:

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

不难验证这些极点都是 2 阶极点. 它在 \mathbb{C} 中的其他点处处解析.

这里我们要注意, 在这个例子中, ∞ 并不是孤立奇点, 因为 ∞ 的任何一个邻域内都包含有它的极点. 所以, 我们无法谈论它在无穷远点的奇点类型.

习题 6.3

1. 设 $f(z)$ 是一个整函数, 且 $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$, 证明: $f(z)$ 是一个常数.

提示 利用魏尔斯特拉斯定理与代数基本定理.

2. 设 $f(z)$ 是在扩充复平面 $\bar{\mathbb{C}}$ 上的一个亚纯函数, 即在 $\bar{\mathbb{C}}$ 上除去孤立极点之外处处解析. 证明: $f(z)$ 是一个有理函数.

提示 设 $f(z)$ 在 \mathbb{C} 中有 k 个极点: $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, 其阶数分别为 n_1, n_2, \dots, n_k . 考虑多项式

$$Q(z) := (z - a_1)^{n_1} (z - a_2)^{n_2} \cdots (z - a_k)^{n_k}.$$

证明 $Q(z)f(z)$ 是一个整函数, 并证明它只能是一个多项式.

3. 证明:

(1) 在扩充复平面上有一个极点的亚纯函数 $f(z)$ 必定是一个分式线性变换, 即 $f(z)$ 具有下列形式:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

(2) 上述分式线性变换 $f(z)$ 在扩充复平面 $\bar{\mathbb{C}}$ 中有且只有一个零点.

(3) 对于任意的复数 w , 方程 $f(z) - w = 0$ 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 中有解而且只有一个解.

提示 将 $f(z) - w$ 化成分式线性变换的形式, 然后应用 (2) 中的结果.

注 本题的结果告诉我们分式线性变换是 $\overline{\mathbb{C}}$ 到自身的一个一对一的满射. 对于分式线性变换的几何性质, 以后章节中有专门的讨论.

第七章 留数定理与辐角原理

§1. 留数定理

1.1 留数的概念

柯西定理告诉我们, 在一个单连通区域中的解析函数沿着一条闭的回路积分等于零. 现在, 我们要把柯西定理推广到函数有孤立奇点的情况.

现在, 我们引入留数 (Residue) 的概念.

定义 设 $f(z)$ 在空心邻域 $\{z : 0 < |z - a| < r\}$ 中解析. 又设 c_ρ 是圆周

$$\{z : |z - a| = \rho\} \quad (0 < \rho < r),$$

其定向是逆时针方向. 则我们把积分

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{c_\rho} f(z) dz$$

的值称为函数 f 在奇点 a 的留数, 简称 f 在 a 点的留数, 记作 $\text{Res}(f; a)$.

首先, 我们要指出, 留数 $\text{Res}(f; a)$ 只取决于函数 f 和奇点 a , 而与定义中的积分路径 c_ρ 的半径 ρ 无关. 事实上, 对于任意的 ρ_1 与 $\rho_2, 0 < \rho_1 < \rho_2 < r$, 函数 $f(z)$ 在环域 $\{z : \rho_1 < |z - a| < \rho_2\}$ 解析, 所以

$$\oint_{c_{\rho_1}} f(z) dz = \oint_{c_{\rho_2}} f(z) dz.$$

其次,我们还要指出, $\text{Res}(f; a)$ 恰好等于 $f(z)$ 在区域 $\{z: 0 < |z - a| < r\}$ 中洛朗展开中含 $(z - a)^{-1}$ 项的系数 a_{-1} . 事实上, 若

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - a)^n, \quad \forall z: 0 < |z - a| < r,$$

则有

$$\text{Res}(f; a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_p} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_p} (z - a)^n dz.$$

根据已知结果

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{c_p} (z - a)^n dz = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \neq -1, \\ 1, & \text{当 } n = -1, \end{cases}$$

立刻得到 $\text{Res}(f; a) = a_{-1}$.

由此推出, 若奇点 a 是 f 的可去奇点时, $\text{Res}(f; a) = 0$.

例 1.1 设 $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$, 求 $\text{Res}(f; 0)$.

解 由于

$$\frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \cdots \quad (0 < |z| < +\infty),$$

所以, $\text{Res}(f; 0) = -1/6$.

现在我们给出函数在无穷远点处的留数的定义.

定义 设 $f(z)$ 在区域 $\{z: r < |z| < +\infty\}$ 中解析. 又设 C_R 是圆周

$$\{z: |z| = R\} (r < R < +\infty),$$

其定向是顺时针方向. 则我们把积分

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} f(z) dz$$

的值称为函数 f 在 ∞ 的留数, 记作 $\text{Res}(f; \infty)$.

同样地, $\text{Res}(f; \infty)$ 值与 R 的选择无关.

类似于前面, 我们可以证明: 若 $f(z)$ 以无穷为其孤立奇点并有洛朗展开式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \quad \forall z: r < |z| < +\infty,$$

则 f 在无穷的留数等于洛朗展开式中的系数 a_{-1} 的负值, 即 $\text{Res}(f; \infty) = -a_{-1}$. 这里请注意: 这时不再是 a_{-1} , 而是 $-a_{-1}$. 这是因为 C_R 的定向是顺时针方向的缘故.

至于为什么要把 C_R 规定为顺时针方向, 这是因为这样的定向恰好是关于 ∞ 的邻域 $\{z: |z| > R\}$ 的正向.

例 1.2 设 $f(z) = z^{-3}e^z$, 求 $\text{Res}(f; \infty)$.

解 显然, 我们有

$$z^{-3}e^z = z^{-3} + \frac{z^{-2}}{1!} + \frac{z^{-1}}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \cdots \quad (0 < |z| < +\infty).$$

故 $\text{Res}(f; \infty) = -1/2$.

这里我们要提醒读者, 当 ∞ 是 $f(z)$ 的可去奇点时, f 在 ∞ 的留数不一定等于零, 比如 $f(z) = 1/z$, ∞ 是可去奇点, 但 $\text{Res}(f; \infty) = -1$.

例 1.3 求出函数

$$f(z) = \frac{z-1}{(z-2)(z-3)}$$

在各个奇点 $z = 2, 3, \infty$ 的留数, 并证明

$$\text{Res}(f; 2) + \text{Res}(f; 3) + \text{Res}(f; \infty) = 0.$$

解 我们有

$$f(z) = \frac{z-1}{(z-2)(z-3)} = \frac{2}{z-3} - \frac{1}{z-2}.$$

以 $z = 3$ 为中心, 以一个充分小的 $\rho > 0$ 为半径, 做一个圆周 c_ρ , 使得点 $z = 2$ 落在 c_ρ 之外, 并规定其定向为逆时针方向, 则有

$$\operatorname{Res}(f; 3) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_\rho} \frac{2}{z-3} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_\rho} \frac{1}{z-2} dz = 2.$$

(请读者说明最后一步 $= 2$ 的理由.)

类似地, 可以证明: $\operatorname{Res}(f; 2) = -1$.

我们考虑圆周 $c_R = \{z : |z| = R\}$ (其中 $R > 3$), 并规定其定向为顺时针方向, 则有

$$\operatorname{Res}(f; \infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_R} \left(\frac{2}{z-3} - \frac{1}{z-2} \right) dz = -2 + 1 = -1.$$

这样, $\operatorname{Res}(f; 2) + \operatorname{Res}(f; 3) + \operatorname{Res}(f; \infty) = -1 + 2 - 1 = 0$.

思考题 证明: 任意一个有理函数在各个奇点 (包括 ∞) 的留数和等于零.

1.2 留数定理

留数概念为计算具有孤立奇点的解析函数在闭回路上的积分, 提供了一条有效途径.

定理 1.1 设 $f(z)$ 在一个单连通区域 D 中除去有限个点 a_1, a_2, \dots, a_n 之外处处解析. 又设 Γ 是 D 中的一条逐段光滑的简单闭曲线, 它的内部 G 包含上述 n 个奇点. 则我们有

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}(f; a_j),$$

这里 Γ 的定向是关于区域 G 的正向.

证 记 c_j 为圆周 $\{z : |z - a_j| = \rho\}$, 并规定其定向为逆时针方向 ($j = 1, 2, \dots, n$). 我们取 ρ 足够小, 使得这些圆周彼此不交, 且全部包含于 G 中 (见图 7.1.1). 我们又记 $U_j = \{z : |z - a_j| <$

$\rho\}(j = 1, 2, \dots, n)$, 并在多连通区域 $G \setminus \bigcup_{j=1}^n \overline{U}_j$ 上使用柯西定理, 便得到

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz - \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_j} f(z) dz = 0$$

根据留数的定义, 上式中的和号就是留数之和. 证毕.

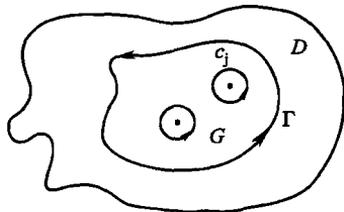


图 7.1.1

定理 1.2 假定 Γ 是 \mathbb{C} 中的一条逐段光滑的简单闭曲线, 并记 Γ 的外部为 D . 又设 a_1, \dots, a_n 为 D 中 n 个不同的有穷点, 而函数 $w = f(z)$ 在区域 $D \setminus \{a_1, \dots, a_n, \infty\}$ 中解析, 并且在 $\overline{D} \setminus \{a_1, \dots, a_n, \infty\}$ 中连续. 则我们有

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^n \text{Res}(f; a_j) + \text{Res}(f; \infty) \right),$$

这里 Γ 的定向为顺时针方向.

注 根据假定, 函数 $w = f(z)$ 在 D 中有 $n+1$ 个奇点: a_1, \dots, a_n, ∞ . 因此, 定理的结果是: 函数在该简单闭曲线的积分等于它的外部所包含奇点的留数之和乘以 $2\pi i$. 由于我们考虑的是曲线外部, 因此积分曲线的方向是顺时针方向.

证 证明完全类似于定理 1.1. 我们取 $c_j = \{z : |z - a_j| = \rho\}(j = 1, 2, \dots, n)$, 其中 ρ 足够小, 使得 c_{ρ_j} 彼此不交, 并包含于 D 之中. 另外, 我们取一个充分大圆周 $C = \{z : |z| = R\}(R > r)$, 使所有 c_j 都包含于 C 的内部. 我们规定 C 的定向为逆时针方向, 而小圆周 c_j 的定向为顺时针方向 (见图 7.1.2).

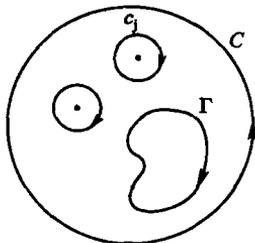


图 7.1.2

应用柯西定理, 我们有

$$\oint_C f(z)dz + \oint_\Gamma f(z)dz + \sum_{j=1}^n \oint_{c_j} f(z)dz = 0.$$

注意到 C 与 c_j 的定向恰好与定义留数时的积分的方向相反, 于是

$$\begin{aligned} \oint_\Gamma f(z)dz &= - \oint_C f(z)dz - \sum_{j=1}^n \oint_{c_j} f(z)dz \\ &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f; \infty) + \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}(f; a_j) \right). \end{aligned}$$

定理证毕.

推论 设 $f(z)$ 在复平面上除有限个奇点 a_1, a_2, \dots, a_n 之外处处解析. 则有

$$\operatorname{Res}(f; \infty) + \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}(f; a_j) = 0.$$

注 由于 $f(z)$ 除去有限个有穷点之外处处解析, 故 ∞ 是它的一个孤立奇点, 因而函数在无穷远点有留数可言.

另外, 这个结论是前面有关有理函数的相同结果的推广.

证 在复平面上取一点 $a \neq a_j (j = 1, 2, \dots, n)$. 取 Γ 是一个以 a 为中心的圆周, 其半径足够小使得所有奇点均落在 Γ 的外部.

假定 Γ 的定向为顺时针方向, 则根据定理 1.2 有

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f; \infty) + \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}(f; a_j) \right).$$

另外一方面, $f(z)$ 在 Γ 的内部解析, 故有

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

这就证明了 $f(z)$ 在 ∞ 以及在 a_1, a_2, \dots, a_n 各点的留数和等于 0. 证毕.

1.3 留数的求法

定理 1.1 与定理 1.2 把计算某些回路积分的问题归结为留数的计算. 这样如何计算留数就显得很重要.

下面我们给出计算留数的一些方法.

定理 1.3 设 $f(z)$ 以 a 为 n 阶极点, 则

$$\operatorname{Res}(f; a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}[(z-a)^n f(z)]}{dz^{n-1}}.$$

特别地, 当 $n = 1$ 时,

$$\operatorname{Res}(f; a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z).$$

证 设 $f(z)$ 在点 a 的一个空心邻域 $\{z: 0 < |z-a| < r\}$ 有洛朗展开式:

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \dots.$$

等式两端各乘 $(z-a)^n$, 我们得到

$$\begin{aligned} (z-a)^n f(z) &= a_{-n} + \dots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + a_0(z-a)^n \\ &\quad + a_1(z-a)^{n+1} + \dots. \end{aligned}$$

这样, 我们进一步得到

$$\begin{aligned} & \frac{d^{n-1}[(z-a)^n f(z)]}{dz^{n-1}} \\ &= (n-1)!a_{-1} + n!a_0(z-a) + \dots \end{aligned}$$

令 $z \rightarrow a$, 就有

$$\operatorname{Res}(f; a) = a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}[(z-a)^n f(z)]}{dz^{n-1}}.$$

定理证毕.

推论 设 $f(z)$ 在空心邻域 $\{z: 0 < |z-a| < r\}$ 中有表达式:

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{\psi(z)},$$

其中 $\phi(z)$ 与 $\psi(z)$ 在 $\{z: |z-a| < r\}$ 中解析, 并且 $\phi(a) \neq 0, \psi(z)$ 在 a 点为一阶零点. 则

$$\operatorname{Res}(f; a) = \frac{\phi(a)}{\psi'(a)}.$$

证 函数 $f(z)$ 在 a 为一阶极点. 事实上,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) &= \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{\phi(z)}{\psi(z)} \\ &= \frac{\lim_{z \rightarrow a} \phi(z)}{\lim_{z \rightarrow a} \frac{\psi(z) - \psi(a)}{z-a}} \\ &= \frac{\phi(a)}{\psi'(a)} \neq 0. \end{aligned}$$

根据定理 1.3, $\operatorname{Res}(f; a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = \frac{\phi(a)}{\psi'(a)}$. 证毕.

例 1.4 设 Γ 是圆周 $\{z: |z| = R\}$ ($R > 2$) 定向为逆时针方向. 求曲线积分

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^z}{(z-1)(z-2)} dz.$$

解 设 $f(z) = e^z/(z-1)(z-2)$, 根据定理 1.1, 我们有

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^z}{(z-1)(z-2)} dz = 2\pi i [\operatorname{Res}(f; 1) + \operatorname{Res}(f; 2)].$$

根据定理 1.3, $f(z)$ 在 $z=1$ 与 $z=2$ 的留数分别是

$$\operatorname{Res}(f; 1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^z}{z-2} = -e,$$

$$\operatorname{Res}(f; 2) = \lim_{z \rightarrow 2} (z-2)f(z) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{e^z}{z-1} = e^2.$$

这样, 我们便得到

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^z}{(z-1)(z-2)} dz = 2\pi i (e^2 - e).$$

注 由定理 1.2 的推论可知:

$$\operatorname{Res}(f; \infty) + \operatorname{Res}(f; 1) + \operatorname{Res}(f; 2) = 0.$$

由此推出: $\operatorname{Res}(f; \infty) = e - e^2$.

例 1.5 求函数 $\tan z$ 在奇点

$$z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

处的留数, 并求下列积分

$$I_n = \oint_{\Gamma_n} \tan z dz,$$

其中 $\Gamma_n = \{z : |z - \pi/2| = n\pi - \pi/2\}$, n 是大于 1 的自然数, Γ_n 的定向为逆时针方向.

解 令 $\phi(z) = \sin z$, $\psi(z) = \cos z$, 那么根据定理 1.3 的推论,

$$\operatorname{Res}(\tan z; z_k) = \frac{\phi(z_k)}{\psi'(z_k)} = \frac{\sin z_k}{-\sin z_k} = -1.$$

因此, 我们得到

$$I_n = 2\pi i \sum_{k=-n}^n \operatorname{Res}(\tan z; z_k) = -(2n+1)2\pi i.$$

例 1.6 求积分

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1+z \sin z}{z^3} dz,$$

这里积分曲线单位圆周的定向为逆时针方向.

解 显然, $z=0$ 是被积函数 $f(z) = (1+z \sin z)/z^3$ 在圆 $\{z: |z| \leq 1\}$ 的唯一奇点. 它是一个 3 阶极点. 根据定理 1.3,

$$\operatorname{Res}(f; 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2} [1+z \sin z]'' = \frac{1}{2} [2 \cos z - z \sin z] \Big|_{z=0} = 1.$$

因此, 我们得到

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}(f; 0) = 2\pi i.$$

习题 7.1

1. 应用留数定理, 计算下列积分 (其中积分回路的方向为逆时针方向):

$$(1) \oint_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)^2} dz;$$

$$(2) \oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^5} dz;$$

$$(3) \oint_{|z|=1} e^{1/z} dz;$$

$$(4) \oint_{|z|=2} \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} dz;$$

$$(5) \oint_{|z|=2} \frac{z^{2n}}{(z-1)^n} dz;$$

$$(6) \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1} dz.$$

2. 设 $f(z)$ 在区域 $\{z: R < |z| < +\infty\}$ ($R > 0$) 中解析. 证明:

$$\operatorname{Res}(f(z); \infty) = -\operatorname{Res}(z^{-2}f(1/z); 0).$$

3. 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 a 的一个邻域中解析, 且 $f(a) \neq 0$ 而 $g(z)$ 在 $z=a$ 点为 2 阶零点. 试用 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 a 的泰勒展开系数表示 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 在 $z=a$ 的留数.

§2. 亚纯函数的辐角原理

设 Γ 是一条逐段光滑的简单闭曲线, 其内部记为 D . 又设 $f(z)$ 在闭区域 \bar{D} 中是一个亚纯函数, 并假定在边界 Γ 上函数 $f(z)$ 没有极点, 也没有零点.

在上述假定下, 下面我们要讨论一个特殊形式的积分:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

作为留数定理的应用, 我们将证明上述积分的值恰好等于函数 $f(z)$ 在区域 D 内的零点个数与极点个数之差.

上述积分的值又可以解释为函数的辐角沿边界 Γ 的增量除以 2π . 这样, 我们便得到了一条定理: 函数的辐角沿边界曲线的增量除以 2π 等于函数在区域内的零点个数与极点个数之差. 这就是所谓辐角原理.

我们要首先说明: 在上述假定之下, 根据极点与零点的孤立性, 亚纯函数 $f(z)$ 在区域 D 内极点与零点的个数都是有限的.

容易看出, 上述积分的被积函数的奇点是 $f(z)$ 的零点或极点. 为了计算这个积分, 现在让我们先来讨论函数 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 $f(z)$ 的零点与极点处的留数.

设 $f(z)$ 以点 a 为 m 阶零点. 根据解析函数零点的孤立性可知, 存在点 a 的一个邻域 $U = \{z : |z - a| < \delta\}$, 使得下式成立:

$$f(z) = (z - a)^m g(z), \quad \text{其中 } g(z) \neq 0, \quad \forall z \in U.$$

经过简单计算, 我们得到

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \quad \forall z \in U.$$

显然, $\frac{g'(z)}{g(z)}$ 在 U 中解析. 因此, 上式表明

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}; a\right) = m.$$

也就是说, $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 a 的留数恰好是 $f(z)$ 的零点的阶数.

设 $f(z)$ 以点 b 为 n 阶极点. 这时, $f(z)$ 在点 b 的一个空心邻域 $\{0 < |z-b| < \delta\}$ 内有洛朗展开式:

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-b)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-b} + a_0 + a_1(z-b) + \cdots \quad (a_{-n} \neq 0).$$

由此很容易看出, 存在一个充分小的 $\delta_1 > 0$ 使得

$$f(z) = (z-b)^{-n}h(z), \quad \text{其中 } h(z) \neq 0, \quad \forall z: 0 < |z-b| < \delta_1.$$

类似于前面的讨论, 我们得到

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n}{z-b} + \frac{h'(z)}{h(z)}, \quad \forall z: 0 < |z-b| < \delta_1.$$

和

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}; b\right) = -n.$$

也就是说, $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 $f(z)$ 的 n 阶极点的留数恰好就等于 $-n$.

现在, 我们假定 $f(z)$ 在区域 D 内有 k 个零点: a_1, a_2, \cdots, a_k , 它们的阶数分别是 m_1, m_2, \cdots, m_k . 又假定 $f(z)$ 有 l 个极点: b_1, b_2, \cdots, b_l , 它们的阶数分别是 n_1, n_2, \cdots, n_l . 如果我们按照重数来

计算零点与极点的个数, 那么 $f(z)$ 共有 $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ 个零点和 $P = n_1 + n_2 + \cdots + n_l$ 个极点.

根据前面的讨论和留数定理, 我们立刻得到

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P,$$

其中 N 是按重数计算时 $f(z)$ 的零点的个数, 而 P 是按重数计算时 $f(z)$ 的极点的个数.

总之, 我们证明了下列定理:

定理 2.1(辐角原理) 设 Γ 是一条逐段光滑的简单闭曲线, 其内部记为 D . 又设 $f(z)$ 是闭区域 \bar{D} 中的一个亚纯函数, 并假定在边界 Γ 上, 函数 $f(z)$ 没有极点和零点. 若按照重数计算, $f(z)$ 在 D 中有 N 个零点, 有 P 个极点, 则我们有公式

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P,$$

这里 Γ 的定向是关于区域 D 的正向.

特别地, 当 $f(z)$ 在区域 D 中解析时,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N.$$

现在, 让我们给积分

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

一个几何解释.

我们知道,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} dz = d \ln f(z) = d(\ln |f(z)| + i \arg f(z)).$$

我们假定边界曲线 Γ 的参数方程是 $z = z(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$, 并且假定当参数 t 自 α 移动到 β 时, 动点 $z = z(t)$ 的移动方向恰好符合

Γ 的定向. 这时我们有

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \left(\frac{1}{2\pi i} \ln |f(z(t))| + \frac{1}{2\pi} \arg f(z(t)) \right) \Big|_{t=\alpha}^{t=\beta}.$$

由于 Γ 是闭曲线, 故 $z(\beta) = z(\alpha)$. 注意到 $\ln |f(z)|$ 是 z 的单值函数, 立刻看出:

$$\ln |f(z(t))| \Big|_{\alpha}^{\beta} = 0.$$

然而, 辐角函数 $\arg f(z)$ 是一个多值函数, 当 t 自 α 连续变动到 β 时, $f(z(t))$ 辐角随之连续变动, 但到达 β 时, $f(z(t))$ 的辐角值未必等于开始时的值, 一般说来两者之差是 2π 的某个整数倍. 比如, 当 $f(z) = z^2$ 时, 当 z 沿着单位圆周的逆时针方向旋转一周时, z^2 的辐角增加了 4π .

今后, 我们用 $\Delta_{\Gamma} \arg f(z)$ 表示当点 z 在曲线 Γ 上按给定的方向旋转一周时, 函数 $f(z)$ 的辐角的增量, 即终结时的辐角值与起始时辐角值之差. 总结前面的讨论, 我们便得到

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg f(z).$$

定理 2.2(辐角原理) 设 Γ 是一条逐段光滑的简单闭曲线, 其内部记为 D . 又设 $f(z)$ 是闭区域 \bar{D} 中的一个亚纯函数, 并假定在边界 Γ 上, 函数 $f(z)$ 没有极点和零点. 若按照重数计算, $f(z)$ 在 D 内共有 N 个零点和 P 个极点, 则我们有公式

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg f(z) = N - P,$$

这里 Γ 的定向是关于区域 D 的正向.

特别地, 当 $f(z)$ 在区域 D 中解析时,

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg f(z) = N.$$

也就是说, 当 z 沿边界曲线 Γ 的正向旋转一周时, 函数 $f(z)$ 辐角的增量除以 2π , 恰好等于函数 $f(z)$ 在区域内的零点个数 (按重数计算).

定理 2.1 与定理 2.2 可以推广到多连通区域的情形, 其中区域的边界由有限条简单闭曲线组成. 请读者作为练习自行完成.

为便于应用辐角原理, 我们有下列的定理:

定理 2.3(鲁歇 (Rouché) 定理) 设 Γ 是一条逐段光滑的简单闭曲线, 其内部记为 D . 又设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在闭区域 \bar{D} 中解析, 且在边界 Γ 上, 函数 $|f(z)| > |g(z)|$. 则 $f(z)$ 与 $f(z) + g(z)$ 在 D 内的零点个数 (按重数计算) 相等.

证 显然 $f(z)$ 在 Γ 上不等于零. 又因为在 Γ 上,

$$|f(z) + g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0,$$

故 $f(z) + g(z)$ 在 Γ 上也不等于零. 因此, 可以利用辐角原理计算它们各自的零点个数.

为了证明定理, 只要证明下列等式就足够了:

$$\Delta_{\Gamma} \arg f(z) = \Delta_{\Gamma} \arg [f(z) + g(z)].$$

令 $h(z) = g(z)/f(z)$, 那么在 Γ 上 $|h(z)| < 1$, 而 $w = 1 + h(z)$ 总落在圆盘 $\{w : |w - 1| < 1\}$ 的内部 (见图 7.2.1). 因此, 立刻看出

$$\Delta_{\Gamma} \arg (1 + h(z)) = 0.$$

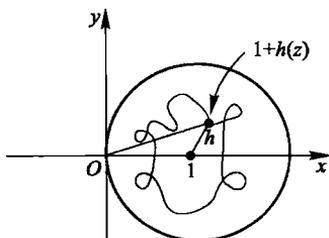


图 7.2.1

于是, 我们得到

$$\begin{aligned}\Delta_{\Gamma} \arg (f(z) + g(z)) &= \Delta_{\Gamma} \arg f(z)[1 + h(z)] \\ &= \Delta_{\Gamma} \arg f(z) + \Delta_{\Gamma} \arg (1 + h(z)) \\ &= \Delta_{\Gamma} \arg f(z).\end{aligned}$$

定理证毕.

例 2.1 求函数

$$f(z) = z^9 + 6z^2 + z$$

在单位圆 $\{z : |z| = 1\}$ 的零点个数.

解 令 $f(z) = 6z^2$, $g(z) = z^9 + z$, 那么在单位圆周上, $|f(z)| = 6 > |g(z)|$. 应用鲁歇定理, $f(z) = 6z^2$ 应该与 $z^9 + 6z^2 + z$ 在单位圆内有相同个数的零点.

另一方面, $f(z) = 6z^2$ 在单位圆内有两个零点. 于是函数 $z^9 + 6z^2 + z$ 在单位圆内恰有两个零点.

例 2.2 设 $n > 1$, 证明 n 次多项式

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \quad (n > 0, a_0 \neq 0)$$

在复平面上恰有 n 个根 (按重数计算).

证 我们考虑圆周 $\Gamma_R = \{z : |z| = R\}$. 在 Γ_R 上, 我们有

$$|P(z)| \geq R^n \left(|a_0| - \frac{|a_1|}{R} - \cdots - \frac{|a_n|}{R^n} \right).$$

由于 $|a_0| > 0$, 故当 R 充分大时, 在 Γ_R 上 $|P(z)| > 0$, 也即 $P(z) \neq 0$.

令 $f(z) = a_0 z^n$, $g(z) = a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, 则当 R 充分大且 $z \in \Gamma_R$ 时,

$$\begin{aligned}|f(z)| - |g(z)| &\geq |a_0| R^n - |a_1| R^{n-1} - \cdots - |a_n| \\ &= R^n \left(|a_0| - \frac{|a_1|}{R} - \cdots - \frac{|a_n|}{R^n} \right) > 0,\end{aligned}$$

也即在 Γ 上 $|f(z)| > |g(z)|$.

应用鲁歇定理, 便得到 $f(z) + g(z) = P(z)$ 与 $f(z)$ 在 $\{z : |z| < R\}$ 中有相同个数的零点. 而 $f(z) = a_0 z^n$ 在 $\{z : |z| < R\}$ 中有 n 个零点. 故 $P(z)$ 在 $\{z : |z| < R\}$ 中有 n 个零点.

这样, n 次多项式在复平面上至少有 n 个根. 另外一方面, 根据代数的知识, 一个 n 次多项式至多有 n 个根. 故 n 次多项式恰有 n 个根. 证毕.

习题 7.2

1. 设 $a > e$ 是实数, $n \geq 1$ 是自然数. 证明: 方程 $e^z = az^n$ 在单位圆内有 n 个根.

2. 应用鲁歇定理, 求出下列方程在单位圆内根的个数:

(1) $z^9 + 4z^6 + z^2 - 1 = 0$; (2) $z^4 - 5z + 1 = 0$;

(3) $z^4 + 3z^3 + 1 = 0$.

3. 求出方程 $z^4 - 5z + 1 = 0$ 在 (1) $\{z : |z| < 1\}$ 中根的个数, 并求在 (2) $\{z : 1 < |z| < 2\}$ 中根的个数.

4. 设 $f(z)$ 及 $f_n(z)$ ($n = 1, 2, \dots$) 在单连通区域 D 中解析, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $f_n(z)$ 内闭一致趋于 $f(z)$. 又设 Γ 是区域 D 中一条逐段光滑的简单闭曲线, 在 Γ 上 $f(z) \neq 0$. 证明: 存在一个自然数 N 使得当 $n > N$ 时, $f_n(z)$ 与 $f(z)$ 在 Γ 的内部有相同的零点个数.

5. 设 $f(z)$ 在闭的单位圆 $\Delta = \{z : |z| \leq 1\}$ 中解析, 且 $f(z)$ 限制在单位圆周上是一个一一映射. 这时单位圆周的像是一个简单闭曲线, 记之为 C . 证明: C 的内部的一点都被 $f(z)$ 取到, 而且只取一次.

提示 对于任意一点 $z_0 \in \Delta$, 我们有 $\Delta_{\text{arg}}(f(z) - f(z_0)) \geq 1$. 利用此事, 证明 $f(z_0)$ 在 C 的内部 (这里 Γ 为单位圆周, 定向为逆时针方向). 由 $f(z_0)$ 落在 C 的内部, 进一步推出当 z 在 Γ 上逆时针方向移动时, $f(z)$ 也必然沿逆时针方向移动. 注意到 $f|_{\Gamma}$ 的一一性, 利用辐角原理即可推出, 对于 C 的内部中任意一个点 w , 必然可以取到, 而且只取到一次.

§3. 留数定理在定积分计算中的应用

微积分中有一些定积分, 由于种种原因, 其积分值往往不易求得. 本节我们要通过若干实例, 来介绍利用解析函数的回路积分与留数定理, 来计算定积分或反常积分的方法^[注].

3.1 普通定积分的计算

例 3.1 计算定积分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \cos^2 \theta}.$$

解 令 $e^{i\theta} = z$, 则在单位圆周上有

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

$$d\theta = \frac{de^{i\theta}}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}.$$

经过简单计算, 我们得到

$$I = \int_{|z|=1} \frac{4zdz}{i(z^4 + 6z^2 + 1)}.$$

这样, 我们把问题归结为求被积函数

$$f(z) = \frac{4z}{i(z^4 + 6z^2 + 1)}$$

在单位圆中的奇点及其留数.

令 $w = z^2$, 则 $(z^4 + 6z^2 + 1) = w^2 + 6w + 1$. 而方程 $w^2 + 6w + 1 = 0$ 有 2 个根: $-3 \pm 2\sqrt{2}$, 其中 $-3 + 2\sqrt{2}$ 落在单位圆内. 记

注 在学时不足的情况下, 此节内容可以少讲或不讲.

$\alpha = i\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$, 则有

$$z^4 + 6z^2 + 1 = (z^2 + 3 + 2\sqrt{2})(z - \alpha)(z + \alpha).$$

这样, $\pm\alpha$ 是 $f(z)$ 在单位圆内仅有两个极点. 因此, 有

$$I = 2\pi i (\text{Res}(f; \alpha) + \text{Res}(f; -\alpha)).$$

我们略去留数的计算, 最后得到:

$$I = \sqrt{2}\pi.$$

3.2 无穷积分的计算

例 3.2 计算无穷积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

解 考虑函数

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$$

和回路 Γ_R , 它是由区间 $[-R, R]$ 和上半圆周 C_R 组成 (见图 7.3.1). 我们规定它的定向是逆时针方向.

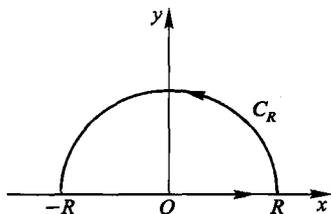


图 7.3.1

当 $R > 1$ 时, 我们有

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{(1+x^2)^2} + \int_{C_R} \frac{dz}{(1+z^2)^2} = 2\pi i \text{Res}(f; i).$$

注意到 $f(z)$ 在 i 处为 2 阶极点, 且

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2},$$

便可得到

$$\operatorname{Res}(f; i) = \frac{d[(z-i)^2 f(z)]}{dz} \Big|_{z=i} = \left(\frac{1}{(z+i)^2} \right)' \Big|_{z=i} = \frac{1}{4i}.$$

另外一方面, 我们又有

$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{(1+z^2)^2} \right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } R \rightarrow +\infty).$$

这样就得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2},$$

也即 $I = \pi/4$.

处理这类题的基本关键步骤有 4 个: (1) 选择适当回路; (2) 选择适当的亚纯函数, 使其在实轴上的值等于给定的实函数, 或者其实部等于给定的实函数; (3) 计算留数以及回路的积分值; (4) 处理回路附加部分.

但是, 所有这些步骤中的具体办法可能因题而异, 没有统一成法.

在处理这类积分时, 经常要处理某些圆弧上的积分的极限, 下面的两个引理是有用的:

引理 3.1 (若尔当引理) 设函数 $f(z)$ 在上半圆周

$$C_R = \{z = Re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

上连续, 且在 C_R 上 $f(z)$ 一致趋于零 (当 $R \rightarrow +\infty$). 则对于任意 $m > 0$, 有

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) e^{imz} dz = 0.$$

证 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $R_0 > 0$, 使得

$$|f(z)| < \varepsilon, \quad \forall z \in C_R, \quad \forall R > R_0.$$

由此推出

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z) e^{imz} dz \right| &= \left| \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) e^{imRe^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq R\varepsilon \int_0^\pi e^{-mR \sin \theta} d\theta \\ &= 2R\varepsilon \int_0^{\pi/2} e^{-mR \sin \theta} d\theta. \end{aligned}$$

注意到

$$\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin \theta \leq \theta \quad \left(\text{当 } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right),$$

我们进一步得到: 当 $R > R_0$ 时,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z) e^{imz} dz \right| &\leq 2R\varepsilon \int_0^{\pi/2} e^{-mR \sin \theta} d\theta \\ &\leq 2R\varepsilon \int_0^{\pi/2} e^{-2mR\theta/\pi} d\theta \\ &= 2R\varepsilon \left(-\frac{e^{-2mR\theta/\pi}}{2mR/\pi} \right)_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \\ &= \frac{\pi\varepsilon}{m} (1 - e^{-mR}) < \frac{\pi\varepsilon}{m}. \end{aligned}$$

这表明:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) e^{imz} dz = 0.$$

引理证毕.

引理 3.2 设 $C_r = \{z = a + re^{i\theta} : \alpha \leq \theta \leq \beta\}$, 而 $f(z)$ 在 a 的某个空心邻域内连续, 且

$$(z - a)f(z) \text{ 在 } C_r \text{ 上一致趋于 } A, \text{ 当 } r \rightarrow 0.$$

则

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = iA(\beta - \alpha).$$

证 根据定理条件, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $\delta > 0$, 使得, 当 $0 < r < \delta$ 时有,

$$|(z - a)f(z) - A| < \varepsilon, \quad \forall z \in C_r.$$

这样, 当 $0 < r < \delta$ 时,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{C_r} f(z) dz - iA(\beta - \alpha) \right| \\ &= \left| \int_{C_r} \frac{(z - a)f(z) - A}{z - a} dz + \int_{C_r} \frac{A}{z - a} dz - iA(\beta - \alpha) \right| \\ &\leq \left| \int_{C_r} \frac{(z - a)f(z) - A}{z - a} dz \right| \\ &\leq \varepsilon(\beta - \alpha). \end{aligned}$$

这里我们用到了

$$\int_{C_r} \frac{A}{z - a} dz = iA(\beta - \alpha).$$

上述不等式表明我们已经证明了引理. 证毕.

例 3.3 计算无穷积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

证 我们取一条回路 Γ , 它由两个区间 $[-R, -r]$ 与 $[r, R]$, 以及两个上半圆 C_R 与 C_r 组成, 其定向如图 7.3.2 所示.

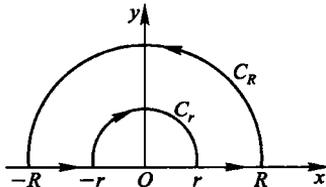


图 7.3.2

令 $f(z) = e^{iz}/z$, 那么 $\text{Im}\{f(x)\} = \sin x/x$.

根据柯西定理, 我们有

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

也即有

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

根据若尔当引理,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

根据引理 3.2,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = i\pi.$$

这样, 我们得到

$$\lim_{R \rightarrow +\infty, r \rightarrow 0} \left(\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx \right) = i\pi.$$

由此推出

$$\begin{aligned} i\pi &= \lim_{R \rightarrow +\infty, r \rightarrow 0} \left(- \int_r^R \frac{e^{-ix}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty, r \rightarrow 0} \int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx \\ &= 2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \end{aligned}$$

因此, 最后我们得到: $I = \pi/2$.

3.3 利用多值解析函数计算定积分

在某些定积分中可能包含 $\ln x$ 或根式等, 作为实函数它们都是单值函数, 但是它们在复平面上却是多值函数. 这时, 要利用留数定理与回路积分来计算这种积分, 就不可避免地要涉及到多值解析函数的单值分支的选择以及它们的留数的计算等问题.

例 3.4 计算无穷积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} dx.$$

解 我们考虑函数

$$f(z) = \frac{\ln z}{(1+z^2)^2},$$

这里 $\ln z$ 是多值函数 $\operatorname{Ln} z$ 的一个单值分支:

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \quad -\pi < \arg z < \pi.$$

$\ln z$ 的定义域是复平面 \mathbb{C} 割去负半实轴. 但是, 有时我们需要讨论 $\ln z$ 在这个区域的边界上的值, 为此我们应当把负半实轴看成有两个“岸”: “上岸”与“下岸”, 并认为 $\ln z$ 在两岸取不同的值:

$$\text{“上岸”} : \ln z = \ln |x| + i\pi; \quad \text{“下岸”} : \ln z = \ln |x| - i\pi.$$

在这种看法下, 函数 $\ln z$ 连续到带割线区域的“边界”——具有两个“岸边”的割线 (原点除外).

现在, 我们取一条回路 $\Gamma_{R,r}$, 它由两个区间 $[-R, -r]$ 与 $[r, R]$, 和两个上半圆周 C_R 与 C_r 组成 (见图 7.3.2). 我们将 $\Gamma_{R,r}$ 的内部记作 $D_{R,r}$. 另外, 我们假定 C_R 半径 $R > 1$, 而 C_r 的半径 $r < 1$. 这样, 区域 $D_{R,r}$ 包含点 $z = i$.

现在, 我们认为 $\ln z$ 在 $[-R, -r]$ 上取“上岸”的值. 这时 $\ln z$ 便在闭区域 $\overline{D_{R,r}}$ 上连续, 从而 $f(z)$ 在 $D_{R,r}$ 中除去孤立奇点 $z = i$ 之外处处解析.

另外, 函数 $f(z)$ 有两个 2 阶极点 $\pm i$, 但只有 $z = i$ 包含于 $D_{R,r}$ 之中.

我们在闭区域 $\overline{D_{R,r}}$ 上使用留数定理, 于是有

$$\int_{\Gamma_{R,r}} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; i).$$

首先, 让我们来计算留数 $\operatorname{Res}(f; i)$. 注意到 $f(z)$ 为 2 阶极点, 根据定理 1.3, 我们有

$$\operatorname{Res}(f; i) = \left. \frac{d(z-i)^2 f(z)}{dz} \right|_{z=i}.$$

由于

$$(z-i)^2 f(z) = \frac{\ln z}{(z+i)^2},$$

经过简单计算, 我们得到

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f; i) &= \left[\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(z+i)^2} - \frac{2 \ln z}{(z+i)^3} \right]_{z=i} \\ &= -\frac{1}{4i} + \frac{\pi i}{8i} = \frac{\pi + 2i}{8}. \end{aligned}$$

其次, 我们来计算积分

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{R,r}} f(z) dz &= \int_{C_R} f(z) dz + \int_{C_r} f(z) dz \\ &\quad + \int_{[-R,-r]} f(z) dz + \int_{[r,R]} f(z) dz \end{aligned}$$

的极限. 由于

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} z f(z) = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{z \ln z}{(1+z^2)^2} = 0,$$

根据若尔当引理, 有

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

显然, 在 C_r 上 $f(z)$ 一致地趋于零. 事实上,

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} \frac{\ln z}{(1+z^2)^2} = 0.$$

因此, 立刻得到

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = 0.$$

另外, 我们有

$$\lim_{R \rightarrow +\infty, r \rightarrow 0} \int_{[r, R]} f(z) dz = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} dx.$$

注意到 $\ln z$ 在 $[-R, -r]$ 上取值的约定, 我们得到

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty, r \rightarrow 0} \int_{[-R, -r]} f(z) dz &= \int_{-\infty}^0 \frac{\ln |x| + \pi i}{(1+x^2)^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln x + \pi i}{(1+x^2)^2} dx. \end{aligned}$$

总之, 我们得到了

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\ln x + \pi i}{(1+x^2)^2} dx \\ &= 2\pi i \left(\frac{\pi + 2i}{8} \right) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2 i}{4}. \end{aligned}$$

对上式取实部即得到所求积分的值:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{\pi}{4}.$$

注 对于上式取虚部就顺便得到了例 3.2 的结果:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

习题 7.3

1. 利用留数定理计算下列积分.

$$(1) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2p \cos \theta + p^2} \quad (0 < |p| < 1);$$

$$(2) \int_0^{\pi} \frac{\cos 2x}{5 - 4 \cos x} dx.$$

2. 设 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 为两个无公因子的多项式:

$$P(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m \quad (a_0 \neq 0)$$

与

$$Q(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n \quad (b_0 \neq 0).$$

假定 Q 在实轴上没有零点, 且 $n \geq m + 2$. 证明

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res} \left(\frac{P}{Q}; z_j \right),$$

其中 z_j 为上半平面中的 Q 的零点.

3. 利用上题的结果, 计算下列积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^4 + a^4)} \quad (a > 0).$$

4. 假定已知

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

计算

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx \quad \text{与} \quad \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx.$$

提示 考虑辅助函数 $f(z) = e^{-z^2}$ 以及如下的积分回路 (见图 7.3.3):

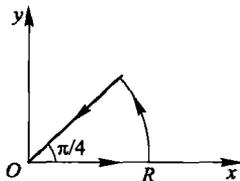


图 7.3.3

第八章 解析函数的几何理论

§1. 解析映射的几何特征

1.1 解析映射是开映射

在这一节中,我们要研究解析映射的拓扑与几何的特征.

设 $f(z)$ 是一个定义在区域 D 上的复值函数,其值域为 G . 这时,函数 f 实际上是区域 D 到集合 G 的一个映射:

$$f: D \rightarrow G, \quad z \mapsto w = f(z).$$

若对于任意一个 D 的开子集 $E, f(E)$ 总是 \mathbb{C} 中的一个开集,那么我们称 f 为开映射.

显然,并不是任意一个映射都是开映射. 比如,

$$w = f(x + iy) : \equiv x, \quad \forall x + iy \in \mathbb{C}$$

就不是一个开映射. 事实上, $f(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$ 不是 \mathbb{C} 中的开集.

假如 f 是区域 D 中的一个开映射,那么,对于任意一点 z_0 的邻域 $U \subset D$, 集合 $f(U)$ 是一个包含 $f(z_0)$ 的开集. 因此,存在一个 $\delta > 0$, 使得

$$\{w : |w - f(z_0)| < \delta\} \subset f(U).$$

见图 8.1.1.

这样一来,开映射 f 不可能在其定义域的内点达到模的极大值. 也就是说,对于开映射而言,最大模原理成立.

现在, 我们利用鲁歇定理证明: 不恒等于常数的解析函数所形成的映射是开映射.

这一结论给最大模原理以清晰的几何解释 (见图 8.1.1).

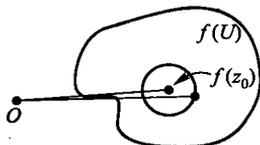


图 8.1.1

定理 1.1 设 $f(z)$ 在区域 D 中解析, 且不恒等于常数, 则 $w = f(z)$ 是一个开映射.

证 设 $E \subset D$ 是一个开集, 我们要证明 $f(E)$ 是一个开集. 也就是说, 对于 E 中任意一点 z_0 , 应当证明: $f(z_0)$ 是 $f(E)$ 的一个内点.

设 z_0 是 E 中任意给定的一点. 根据 f 的幂级数展开式和 $f(z) \neq \text{常数}$ 可以推出, 存在一个自然数 n 和一个 $r > 0$ 使得

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^n g(z) \quad (\text{其中 } g(z) \neq 0), \quad \forall z : |z - z_0| < r,$$

且取 r 足够小, 使得当 $|z - z_0| < r$ 时, $z \in E$.

我们取 $c = \min \{|g(z)| : \forall z : |z - z_0| \leq r\}$, 并考虑圆周:

$$\Gamma := \{z : |z - z_0| = r\}.$$

这时在 Γ 上 $|f(z) - f(z_0)| \geq cr^n$. 取 $\delta = cr^n$, 那么对于圆

$$\{w : |w - f(z_0)| < \delta\}$$

中的任意一点 w , 一定被 $f(z)$ 取到. 事实上, 对于这样的点 w , 在 Γ 上

$$|f(z) - f(z_0)| \geq cr^n > |w - f(z_0)|.$$

于是, 根据鲁歇定理, 函数 $f(z) - w = [f(z) - f(z_0)] + [f(z_0) - w]$ 与函数 $f(z) - f(z_0)$ 在 Γ 内部有相同的零点个数. 而 $f(z) - f(z_0)$ 在 Γ 内部至少有一个 n 重零点 z_0 , 这样圆盘 $\{w : |w - f(z_0)| < \delta\}$ 中每一点 w , 都在圆盘 $\{z : |z - z_0| < r\}$ 中取到 n 次. 可见, $f(z_0)$ 是 $f(E)$ 的内点.

由于 z_0 是 E 中任意一点, 故 $f(E)$ 是开集. 定理证毕.

1.2 保持区域定理

由前面的有关解析映射是开映射的结论立刻推出下面结论: 一个非常数的解析函数总是把区域变成区域.

定理 1.2 设 $f(z)$ 是区域 D 中的解析函数, 且不恒等于一个常数, 则 $f(D)$ 也是一个区域.

证 根据定理 1.1, $f(D)$ 是一个开集. 可见只要证明 $f(D)$ 的连通性就足够了.

设 w_0 与 w_1 是 $f(D)$ 中任意两个点. 这时 D 中存在 z_0 与 z_1 , 使得 $f(z_0) = w_0, f(z_1) = w_1$. 由于 D 是连通的, 故存在一条 D 中的曲线 γ 连接 z_1 与 z_2 .

现在假定 γ 的参数方程是

$$\gamma: t \mapsto z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$$

其中 $z(t)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数, 且 $z_0 = z(\alpha), z_1 = z(\beta)$. 这样, 复合函数 $w = f(\gamma(t))$ 也是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数, 因而它代表了 $f(D)$ 中的一条曲线.

这一条曲线的参数方程为 $w = f(\gamma(t))$ ($t \in [\alpha, \beta]$). 它落在 $f(D)$ 之中, 并连接了点 w_0 与 w_1 . 由此可见, $f(D)$ 是连通的. 定理证毕.

注 这个定理仅是断言 $f(D)$ 是一个区域, 而没有涉及区域的边界的对应问题. 即使 $f(z)$ 在 \bar{D} 上连续, 我们也不能断言映射

f 一定将 D 的边界映为 $f(D)$ 的边界. 它有可能把 D 的一部分边界变成 $f(D)$ 的内点. 例如: $f(z)$ 是函数 e^z 在矩形

$$R = \{x + iy : 0 < x < 1; 0 < y < 4\pi\}$$

上的限制. 这时, 不难验证

$$f(R) = \{w : 1 < |w| < e\}.$$

当我们把 $f(z)$ 视作 \bar{R} 上连续映射时, f 把矩形 R 的上下两水平边中的点都变成内点.

1.3 单叶解析函数的保角性与共形映射

设 $w = f(z)$ 在区域 D 中解析. 若映射 $z \mapsto w = f(z)$ 在区域 D 中是一个一一映射 (即不同点的像总是不同的), 则我们称 $w = f(z)$ 在 D 中是单叶解析函数, 简称为单叶函数.

现在我们证明关于单叶函数的一条性质:

定理 1.3 设 $f(z)$ 在区域 D 是一个单叶解析函数, 则它的导数在 D 内处处不等于 0.

证 我们用反证法. 假定 $f(z)$ 在一点 $z_0 \in D$ 的导数等于 0. 则在该点有幂级数展开:

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k,$$

其中 $n \geq 1$ 是第一个 $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ 的阶数 k . 这时 $f(z)$ 可以写成

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^n g(z),$$

其中

$$g(z) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} (z - z_0) + \dots$$

由于 $f^n(z_0) \neq 0$, 故可取一个充分小的正数 r , 使得 $g(z) \neq 0$ ($\forall z: |z - z_0| < r$).

仔细检查定理 1.1 或定理 1.2 的证明, 就可以得出下列结论: 存在 $f(z_0)$ 的一个空心邻域 $\{w: 0 < |w - f(z_0)| < \delta\}$, 使得其中的任意一点 w , 都被 f 至少取到 n 次, 而 $n > 1$. 这就导致与 f 的一一性矛盾. 定理证毕.

这条定理告诉我们, 对于解析函数而言, 映射的一一性总蕴含着其导数不等于 0.

我们必须强调指出: 一个在区域 D 中解析的函数, 其导数处处不为 0, 不一定在 D 中是单叶的. 例如, $f(z) = e^z$ 的导数处处不等于零, 但它在复平面上不是一个单叶函数.

在第三章, 我们曾经指出过解析映射在其导数不等于零的点处具有保角性. 它断言: 若一个在 z_0 点解析的函数 $f(z)$ 在 z_0 的导数 $f'(z_0) \neq 0$, 则保持在 z_0 相交的曲线的夹角不变. 由此可见, 一个单叶函数在其定义域内必定处处具有保角性.

定义 在区域 D 中的一个单叶解析函数 $w = f(z)$ 所实现的映射

$$z \mapsto w = f(z) \quad (\forall z \in D),$$

称为 D 的一个共形映射. 若 G 是单叶函数的值域 $f(D)$, 则称 $f: D \rightarrow G$ 是 D 到 G 的共形映射.

设 $w = f(z)$ 是区域 D 中的共形映射. 对于任意一点 $z_0 \in D$, 则 $w = f(z)$ 有下列一阶展开式:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|) \quad (z \rightarrow z_0).$$

由于 $f'(z_0) \neq 0$, 故在忽略高阶无穷小量之后, 上式变成一个非退化的线性变换

$$w = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0).$$

这个变换是平移、旋转和相似变换之复合. 因此, 它保持图形的形状不变. 这样, 一个共形映射在一个点附近, 共形映射的一阶近似所形成的映射保持图形的形状不变. 这便是“共形映射”一词的来由.

§2. 分式线性变换

分式线性变换是最常见与最常用的共形映射. 现在让我们详细讨论它的基本性质.

在前面的章节中, 我们已经讨论过分式线性变换. 我们知道形如

$$w = L(z) := \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

的变换称为分式线性变换, 其中 a, b, c, d 是系数. 根据过去的讨论, 我们知道分式线性变换是扩充复平面到自身的一一满射, 除去极点之外, 它处处是解析的.

分式线性变换也称为默比乌斯 (Möbius) 变换.

2.1 分式线性变换保持交比不变

我们先来定义交比.

设 z_1, z_2, z_3, z_4 为 \mathbb{C} 中的有序的 4 个不同点, 定义它们的交比是

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

交比又称为交叉比, 这是因为交比是给定的 4 个数交叉作差之比, 如图 8.2.1 所示.

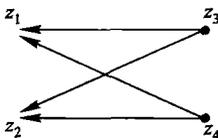


图 8.2.1

我们可以取极限将交比的定义扩充到包含 ∞ 的情况:

$$(\infty, z_2, z_3, z_4) = \lim_{z_1 \rightarrow \infty} (z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{z_4 - z_2} : \frac{1}{z_3 - z_2};$$

$$(z_1, \infty, z_3, z_4) = \lim_{z_2 \rightarrow \infty} (z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_4 - z_1}{1} : \frac{z_3 - z_1}{1};$$

$$(z_1, z_2, \infty, z_4) = \lim_{z_3 \rightarrow \infty} (z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} : \frac{1}{1};$$

$$(z_1, z_2, z_3, \infty) = \lim_{z_4 \rightarrow \infty} (z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{1} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

从形式看, 包含 ∞ 的交比, 相当于在上述比式中把包含 ∞ 的分子与分母改写为 1.

定理 2.1 分式线性变换保持 $\bar{\mathbb{C}}$ 中任意有序的 4 个不同点的交比不变.

证 显然, 我们只要证明给定的 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 均为有限点即可, 而包含无穷的情况可以通过取极限推出. 假定给定的分式线性变换为

$$w = L(z) := \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0).$$

当 $c = 0$ 时, $L(z) = Az + B$ ($A = a/d, B = b/d$). 令

$$w_j = Az_j + B \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

这时显然有

$$\begin{aligned} (w_1, w_2, w_3, w_4) &= \frac{Az_4 - Az_1}{Az_4 - Az_2} : \frac{Az_3 - Az_1}{Az_3 - Az_2} \\ &= (z_1, z_2, z_3, z_4). \end{aligned}$$

现在讨论 $c \neq 0$ 的情况. 令

$$w_j = \frac{az_j + b}{cz_j + d} \quad (j = 1, 2, 3, 4),$$

并假定 $cz_j + d \neq 0$ ($j = 1, 2, 3, 4$). 这时, 直接验证可得

$$w_i - w_j = \frac{(ad - bc)(z_i - z_j)}{(cz_i + d)(cz_j + d)}.$$

由此立即推出

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

当 z_j 中有一个等于 $-d/c$ 时, 比如 $z_1 = -d/c$, 这时我们令 ζ 是充分接近 $-d/c$ 的一个数, 根据已知结果,

$$(L(\zeta), w_2, w_3, w_4) = (\zeta, z_2, z_3, z_4).$$

令 $\zeta \rightarrow -d/c$, 我们就得到

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4),$$

其中 $w_1 = \infty$. 其他 z_j 等于 $-d/c$ 的情况的证明完全类似. 证毕.

由定理 2.1 推出下列定理, 它告诉我们: 一个分式线性变换由它在 3 个不同点的值唯一确定.

定理 2.2 设扩充复平面上有三个不同的点 z_1, z_2, z_3 及 w_1, w_2, w_3 . 则存在一个唯一的分式线性变换 $w = L(z)$, 使得

$$w_1 = L(z_1), \quad w_2 = L(z_2), \quad w_3 = L(z_3).$$

证 对于任意的一点 z , 不同于 z_1, z_2 和 z_3 , 我们令 w 满足下列等式:

$$(z_1, z_2, z_3, z) = (w_1, w_2, w_3, w),$$

也即

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

由此不难验证, w 是 z 的分式线性变换. 这就证明了定理中的存在性部分.

假定 $w = L(z)$ 是一个分式线性变换, 在三个不同点 z_1, z_2, z_3 的值依次是 w_1, w_2, w_3 . 根据定理 1.2, 我们有

$$(w_1, w_2, w_3, L(z)) = (z_1, z_2, z_3, z) \quad (z \neq z_1, z_2, z_3).$$

也即, 当 $z \neq z_1, z_2, z_3$ 时,

$$\frac{L(z) - w_1}{L(z) - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

$L(z)$ 由此式唯一确定. 证毕.

例 2.1 求一个分式线性变换将 $-i, i, 0$ 依次变为 $\infty, 0, 1$.

解 设 $z \neq -i, i, 0$, 而 w 是分式线性变换对应于 z 的值. 那么,

$$(\infty, 0, 1, w) = (-i, i, 0, z),$$

也即,

$$\frac{1}{w-0} : \frac{1}{1-0} = \frac{z+i}{z-i} : \frac{0-(-i)}{0-i}.$$

这样我们得到所求分式线性变换是

$$w = -\frac{z-i}{z+i}.$$

2.2 分式线性变换的保圆性

分式变换的一个重要性质是**将直线或圆周变成直线或圆周**. 为了证明这个结论, 我们先来证明有关交比的一个命题:

命题 2.1 扩充复平面上的四个点 z_1, z_2, z_3, z_4 共线或共圆的充要条件是它们的交比为实数.

证明是简单的. 事实上, 若四个点共线, 则它们的交比显然是实数. 若该四点共圆, 则由图 8.2.2 可以看出

$$\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} = \left| \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \right| e^{i\theta_1},$$

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \left| \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \right| e^{i\theta_2},$$

其中 θ_1 与 θ_2 如图 8.2.2 所示. 由几何的知识可知, θ_1 与 θ_2 要么相等, 要么互补. 但无论哪种情况, 都使得四个点的交比为实数. 条件的充分性得证.

条件的必要性的证明留给读者自己完成. 这里作如下提示: 当两个比值

$$\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \quad \text{与} \quad \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

都是实数时, 四点共线; 而它们不都是实数但它们的比是实数时, 四点共圆.

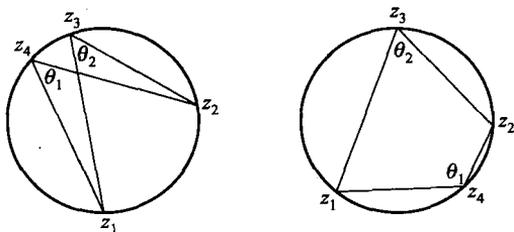


图 8.2.2

由这个命题与定理 2.1 立刻推出:

定理 2.3 分式线性变换将复平面上的圆周或直线变成圆周或直线.

注 读者应当注意: 在分式线性变换下, 圆周可能变成直线, 而直线可能变成圆周.

然而, 直线在扩充复平面上可以看成一条圆周: 一条通过无穷远点的圆周. 在这种看法下, 定理 2.3 简称为分式线性变换的保圆性定理.

现在, 我们提出下列的一个问题: 设 $w = L(z)$ 是一个分式线性变换, 把圆周 C 变成圆周 $\Gamma := L(C)$, 并假定 C 的内部为 D . 那

么 D 的像 $L(D)$ 要么是 Γ 的内部, 要么是 Γ 的外部. 现在要问: 我们用什么方法来确定 $L(D)$ 属于哪种情况?

办法有两个: 一个办法是在 C 的内部任意取一点 z_0 代入得到一点 $w_0 = L(z_0)$. w_0 所在的分支就自然是 $L(D)$. 另一办法如下: 对于曲线 C 规定一个方向, 比如取定关于区域 D 的正向, 即前进的方向使 D 落在左侧. 这时在变换 $w = L(z)$ 在 Γ 也就诱导了一个定向. 在 Γ 诱导定向下, 落在其左侧的分支便是 $L(D)$.

现在, 我们说明后一个做法的依据. 在 D 中考虑一点 z_0 , 这时 $w_0 = L(z_0)$ 应该落在 $L(D)$ 之中, 并有

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg(L(z) - w_0) = 1.$$

设想动点 ζ 沿关于 D 的正向旋转, 即 $\arg(z - z_0)$ 不断增加. 这时, $w = L(\zeta)$ 也应相应移动, 沿着使得 $\arg(w - w_0)$ 增加的方向前进. 这相当说, $L(z)$ 在 Γ 上的诱导定向必是关于 $L(D)$ 的正向. 见图 8.2.3.

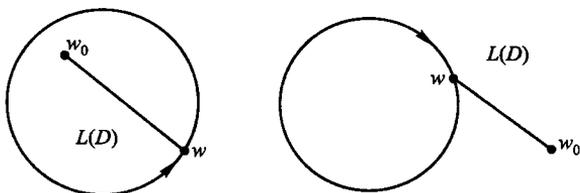


图 8.2.3

上述规则也可以叙述成一个更一般的形式: 设 C 是扩充复平面 \bar{C} 上的一条简单闭曲线, 其内部为 D . 假定 Γ 是 C 在分式线性变换 $w = L(z)$ 下的像, 即 $\Gamma = L(C)$. 如果我们在 C 上取定了关于 D 正向 (即落在左侧的前进方向). 那么, C 的正向在 Γ 上所诱导的定向也一定是正向, 即其前进方向使得 $L(D)$ 落在左侧. 这一原理也称为分式线性变换的保向性.

例 2.2 求在分式线性变换 $w = L(z) := \frac{z}{z-1}$ 下单位圆周及单位圆的像.

解 设 C 是单位圆周, Δ 是单位圆. 为了决定 $L(C)$, 我们只要找三点的像就足够了. 显然, $L(1) = \infty, L(-1) = 1/2$, 而

$$L(i) = \frac{i}{i-1} = \frac{1-i}{2}.$$

由此可见, $L(C)$ 是一条过 $w = 1/2$ 与 $w = (1-i)/2$ 的直线 (见图 8.2.4).

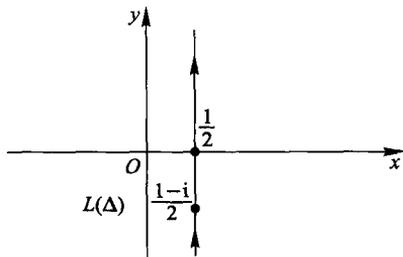


图 8.2.4

现在来确定 $L(\Delta)$ 是在此直线的左侧, 还是在它的右侧. 我们依据 C 的正向, 从 $z = 1$ 走到 $z = i$, 再从 $z = i$ 走到 $z = -1$, 这时相应的 $w = L(z)$ 的点则应从 $w = \infty$ 沿着直线走到 $w = (1-i)/2$, 再由此走到 $w = 1/2$, 并且这样一种走向是关于 $L(\Delta)$ 的正向. 这样, $L(\Delta)$ 应在上述直线的左侧 (见图 8.2.4).

实际上, 在这个题目中, 也可以通过另一种方法确定 $L(\Delta)$ 的位置. 由于 $z = 0$ 在 Δ 之中, 那么 $w = L(0)$ 也应在 $L(\Delta)$ 之中. 但 $L(0) = 0$, 而 $w = 0$ 在直线 $L(C)$ 的左侧, 故 $L(\Delta)$ 也应在 $L(C)$ 的左侧.

2.3 分式线性变换的保对称性

我们先不加证明地指出一条刻画对称性的几何命题:

点 ζ 与点 ζ^* 关于圆周或直线 Γ 对称的充要条件是, 过 ζ 与 ζ^* 的任何一条圆周或直线都与 Γ 正交.

关于直线对称情形, 这条几何命题的证明是简单的. 关于圆周对称情形的证明, 读者可以根据图 8.2.5 自己完成证明, 只要注意到下列几何事实: 在图 8.2.5 中圆心 a 到 C 与 Γ 的交点 b 的连线切于 Γ 的充要条件是:

$$|a - b|^2 = |\zeta - a| \cdot |\zeta^* - a|.$$

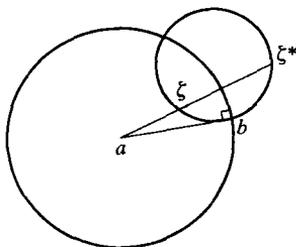


图 8.2.5

定理 2.4 设 Γ 是一条圆周或直线. 又设 ζ 与 ζ^* 是关于 Γ 对称的两个点. 若 $w = L(z)$ 是一个分式线性变换, 则点 $\tilde{\zeta} = L(\zeta)$ 与点 $\tilde{\zeta}^* = L(\zeta^*)$ 关于 $\tilde{\Gamma} = L(\Gamma)$ 对称.

证 设 \tilde{C} 是过 $\tilde{\zeta}$ 与 $\tilde{\zeta}^*$ 的任意一条圆周或直线. 这样, 根据定理 2.3, $C = L^{-1}(\tilde{C})$ 是一条圆周或直线. 应用上述几何命题就得到, C 与 Γ 正交. 根据分式线性变换的保角性, \tilde{C} 与 $\tilde{\Gamma}$ 正交. 由于 \tilde{C} 是过 $\tilde{\zeta}$ 与 $\tilde{\zeta}^*$ 的任意一条圆周或直线, 再次应用上述几何命题就得到, 点 $\tilde{\zeta}$ 与 $\tilde{\zeta}^*$ 关于 $\tilde{\Gamma}$ 对称. 证毕.

这个定理的一个应用, 就是利用它确定以圆周 (或直线) 作为边界的区域之间的分式线性变换.

例 2.3 求一个分式线性变换, 将单位圆 Δ 变成上半平面

$$\mathbb{H} := \{z = x + iy : -\infty < x < +\infty, y > 0\}.$$

解 设所求变换为 $w = L(z)$, 并假定 $L(0) = i, L(1) = 0$. 由于点 0 关于单位圆周的对称点为 ∞ , 而 i 关于实轴的对称点为 $-i$, 故由定理 2.4 可知 $L(\infty) = -i$. 因此, 根据定理 2.2, $w = L(z)$ 由下式确定

$$(0, \infty, 1, z) = (i, -i, 0, w),$$

也即

$$\frac{z-0}{1} : \frac{1-0}{1} = \frac{w-i}{w+i} : \frac{0-i}{0+i}.$$

这样, 我们得到

$$z = -\frac{w-i}{w+i}, \quad \text{也即} \quad w = -i \frac{z-1}{z+1}.$$

2.4 两类典型的分式线性变换

下面我们介绍单位圆到自身和上半平面到自身的分式线性变换的一般形式. 为什么要专门讨论这样两类变换的一般形式, 这是因为它们在现代复分析中有其特殊的意义.

定理 2.5 将单位圆 $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ 变成自身, 且把该给定的点 $a \in D$ 变成 0 的分式线性变换的一般形式是

$$w = e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \quad (\text{其中 } \alpha \in \mathbb{R}).$$

证 设 $w = L(z)$ 是所求的分式线性变换. 那么, $L(a) = 0$. 注意到点 a 关于单位圆周的对称点是 $a^* = 1/\bar{a}$, 而点 0 的对称点是 ∞ , 根据定理 2.4, 应当有: $L(a^*) = \infty$. 另外, 我们假定单位圆周上的点 1 变成 $e^{i\theta}$.

这样, $w = L(z)$ 将三点 $a, a^*, 1$ 依次变为 $0, \infty, e^{i\theta}$. 根据定理 2.2, $w = L(z)$ 由下式确定:

$$(a, a^*, 1, z) = (0, \infty, e^{i\theta}, w).$$

我们先讨论 $a \neq 0$ 的情况. 这时, $a^* = 1/\bar{a}$ 是一个有穷数, 由上式得到

$$\frac{z-a}{z-a^*} : \frac{1-a}{1-a^*} = \frac{w-0}{1} : \frac{e^{i\theta}-0}{1}.$$

将

$$a^* = \frac{1}{\bar{a}}$$

代入上式, 再经过简单整理后便得到

$$w = e^{i\theta} \frac{1-\bar{a}}{1-a} \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

很容易看出, $|1-a| = |1-\bar{a}|$, 因此 $(1-\bar{a})/(1-a)$ 可以写成 $e^{i\tilde{\theta}}$, 其中 $\tilde{\theta}$ 是一个实数. 这样, $w = L(z)$ 可以写成下列形式:

$$w = e^{i(\theta+\tilde{\theta})} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

当 $a = 0$ 时, $a^* = \infty$. 完全类似于前面的讨论, 可以得到 $w = e^{i\theta} z$.

综合两种情况的结果, 所求的分式线性变换的一般形式是

$$w = e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \quad (\text{其中 } \alpha \in \mathbb{R}).$$

证毕.

定理 2.6 上半平面 \mathbb{H} 到自身的分式线性变换总可以写成

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad-bc > 0).$$

证 设

$$w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc \neq 0)$$

是 \mathbb{H} 到自身的一个分式线性变换. 由于该分式线性变换的分子与分母可以同时除以任何一个非零复数时, 分式线性变换不变, 故在后面的讨论中不妨假定不为零的某个系数为实数.

当 $c = 0$ 时, $d \neq 0$. 这时, 不妨假定 d 为实数, 并有

$$L(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

由于 $L(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, 立即推出 a/d 与 b/d 都是实数. 但已知 d 为实数, 故 a 与 b 均为实数.

当 $c \neq 0$ 时, 不妨假定 c 为实数. 根据表达式, $L(-d/c) = \infty$. 注意到 $L^{-1}(\infty) = -d/c$ 应当落在实轴上, 可知 d/c 为实数. 另外一方面, 当 $x \in \mathbb{R}$ 趋于无穷时,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} L(x) = \frac{a}{c},$$

而 $L(x)$ 为实数, 故 a/c 为实数. 回顾对 c 的假设, 可知 a 与 d 均为实数. 此外, 由 $L(0) = b/d$ 可得出 b/d 为实数, 从而 b 也为实数.

以上证明了: 由自身的任何一个分式线性变换, 总可以把它的系数全部取成实数. 下面我们要证明 $ad - bc > 0$.

事实上, 我们已经知道

$$L'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

特别地,

$$L'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

由分式线性变换的保向性可知, $L(x)$ 是严格递增函数, 故

$$L'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2} \geq 0 \quad (x \neq -d/c).$$

由此推出 $ad - bc \geq 0$. 但 $ad - bc \neq 0$, 这样便得到 $ad - bc > 0$. 证毕.

习题 8.2

1. 试将分式线性变换

$$w = \frac{2z - 1}{z - i}$$

分解成 4 种简单变换（平移、旋转、倒数、相似）之复合。

2. 求一个分式线性变换 $w = L(z)$ 将 $-1, i, 1$ 分别对应于 $-1, 0, 1$, 并确定单位圆 Δ 的像 $L(\Delta)$.

3. 试求一个分式线性变换把以 $0, 1, i$ 为顶点的三角形变为以 $0, 2, 1-i$ 为顶点的三角形, 并保证顶点依次对应。

4. 求一个分式线性变换把上半平面变成上半平面, 且把 $z = 0, i$ 依次分别变成 $w = 0, 1+i$.

5. 设

$$w = L(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}},$$

其中 θ 是一个实数 $\text{Im}(\alpha) > 0$. 证明 $w = L(z)$ 将上半平面变成单位圆。

6. 设 $w = L(z)$ 是一个分式线性变换, 把上半平面变成单位圆. 证明 $w = L(z)$ 必然具有下列形式:

$$w = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}} \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

7. 求一个分式线性变换将单位圆变成单位圆, 并分别将 $z = 1/2, 1$ 依次对应于 $w = 0, 1$.

8. 设有一个分式线性变换 $w = L(z)$ 将上半平面变成上半平面, 并把点 $z = 0, i$ 分别对应于 $w = 1, 2+i$. 证明: $L(\infty) = 3$.

提示 设 I 为上半虚轴, 那么 $L(I)$ 应该是一条圆弧, 并且它的一端为 $w = 1$, 而另一端是 $L(\infty)$. 由于 I 与实轴在原点正交, 故 $L(I)$ 在 $w = 1$ 与实轴正交. 所以, $L(I)$ 是一条经过 1 与 $2+i$ 的半圆周. 同时经过 1 与 $2+i$ 与实轴正交的半圆周, 只能以 $w = 2$ 为中心、以 1 为半径. 见图 8.2.6.

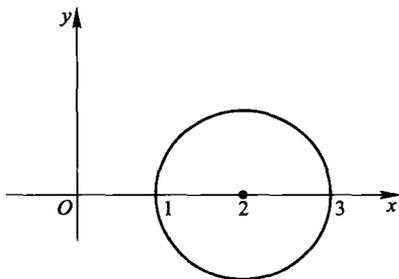


图 8.2.6

§3. 黎曼映射定理

1851年黎曼在其博士论文中证明了一条重要的定理: 扩充复平面上任何一个边界点多于一点单连通区域都可以共形映射为单位圆. 这条定理把在一般单连通区域上许多数学与物理问题归结成单位圆上的问题, 而单位圆是最简单的单连通区域, 使得问题得到有效的化简.

现在, 我们先来解释什么是边界点多于一点单连通区域. 我们知道整个扩充复平面 $\bar{\mathbb{C}}$ 与整个复平面 \mathbb{C} (或者更一般地说, 扩充复平面 $\bar{\mathbb{C}}$ 挖去一点) 都是单连通区域. 但前者没有边界点, 而后者只有一个边界点 ∞ . 所以, 这两种区域都不满足黎曼定理的要求. 然而, 除去这两种区域之外, 扩充复平面上的其他单连通区域的边界点都是多于一点的. 事实上, 从直观上可以看出, 任何一个不属于前两种情况的单连通区域, 其边界点都必然有无穷多个.

我们通常所看到的单连通区域, 如上半平面, 矩形区域, 扇形区域, 带形区域, $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$, 等等都满足黎曼映射定理的条件. 可见, 这个条件是相当宽泛的.

我们知道, 依据拓扑的观点, 扩充复平面等价于一个球面. 而球面是一个紧致集, 但单位圆不是紧致集. 所以不存在一个同胚映射, 把 $\bar{\mathbb{C}}$ 变成单位圆, 更不必说共形映射了. 现在, 我们不妨问: \mathbb{C} 能否共形映射为单位圆呢? 回答也是否定的. 这是由于有刘维尔定理的缘故. 请读者严格证明这一结论.

由此可见, 黎曼映射定理中关于单连通的条件已经是最广泛的了.

黎曼映射定理还包含一个唯一性条件. 因此, 通常也称其为黎曼映射存在唯一性定理.

定理 3.1 (黎曼) 设 D 是一个边界点多于一点单连通

区域. 又设 z_0 是 D 中指定的一个点. 则存在一个 D 到 $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ 的一个共形映射 $f : D \rightarrow \Delta$ 使得

$$f(z_0) = 0 \quad \text{且} \quad f'(z_0) > 0.$$

满足这样条件的共形映射是唯一的.

这里条件 $f(z_0) = 0$ 的意义是清楚的: 映射 f 把指定的点变成 0. 而条件 $f'(z_0) > 0$ 是要求 $f'(z_0)$ 是一个实数, 并且为正数. 这一要求的几何意义是, 在 z_0 点水平弧的像的切线方向与 x 轴正向一致 (见图 8.3.1) (回顾 $f'(z_0) = f'_x(z_0)$). 这个条件也相当于 $\arg f'(z_0) = 0$.

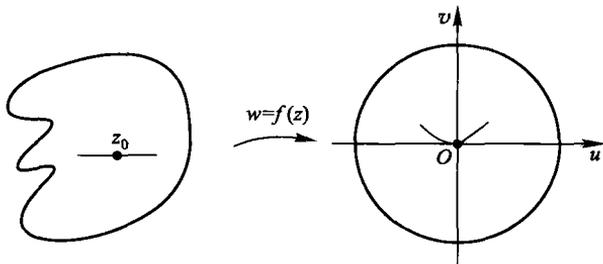


图 8.3.1

黎曼定理的存在性部分的证明已经超出本书范围, 我们将其略去. 而唯一性部分的证明需要一个引理:

定理 3.2 (施瓦茨引理) 设 $w = f(z)$ 在单位圆 $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ 中解析, 且满足下列条件:

$$f(0) = 0, \quad |f(z)| < 1 \quad (\forall z \in \Delta).$$

则下列不等式成立:

$$|f'(0)| \leq 1, \quad |f(z)| \leq |z| \quad (\forall z \in \Delta). \quad (3.1)$$

此外,若在 (3.1) 中第一个不等式成立等号,或者在 (3.1) 中第二个不等式中对于某一个 $z \neq 0$ 等号成立,则 f 必然是一个旋转变换,即

$$f(z) \equiv e^{i\theta} z \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

这条定理虽然通常称作引理,但它实际上是一条具有很强独立意义的定理. 现代复分析中的一个重要研究方向——双曲几何就是基于这条引理.

证 根据第五章中的结果, $w = f(z)$ 在 Δ 中有展开式:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (\forall z \in \Delta).$$

由于 $f(0) = 0$, 故 $a_0 = 0$, 也即有

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \quad (\forall z \in \Delta).$$

我们考虑函数

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} = a_1 + a_2 z + \cdots + a_n z^{n-1} + \cdots \quad (0 < |z| < 1).$$

显然,作为 g 的一个孤立奇点, $z = 0$ 是一个可去奇点. 因此,在补充定义

$$g(0) = \lim_{z \rightarrow 0} g(z) = a_1 = f'(0)$$

之后, $w = g(z)$ 是一个在 Δ 中解析的函数.

我们在闭区域 $\Delta_r := \{z : |z| \leq r\}$ ($0 < r < 1$) 上对函数 $g(z)$ 使用最大模原理,对于任意一个固定点 $z \in \Delta_r$, 我们得到

$$|g(z)| \leq \max_{|\zeta|=r} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta} \right| \leq \frac{1}{r} \quad (|z| \leq r).$$

在上式中,令 $r \rightarrow 1$, 即得到 $|g(z)| \leq 1$. 由此推出 $|f(z)| \leq |z|$, 从而 (3.1) 中的第二个不等式成立. 另外,由 $|g(0)| \leq 1$ 推出 $|a_1| = |f'(0)| \leq 1$. 这就得到了 (3.1) 中第一个不等式.

当 (3.1) 中第一个不等式等号成立, 或者第二个不等式中对于某个 $z \neq 0$ 等号成立时, 都表明 $|g(z)|$ 在 Δ 的内部达到了最大值. 因此, 这时 $g(z)$ 是一个常值函数 $g(z) \equiv C$. 显然, 这时 $|C| = 1$, 即 $C = e^{i\theta}$. 总之, 这时有 $f(z) \equiv e^{i\theta}z$. 证毕.

现在, 我们利用施瓦茨引理来证明黎曼定理的唯一性部分.

设 $f: D \rightarrow \Delta$ 与 $\tilde{f}: D \rightarrow \Delta$ 是两个共形映射, 且满足下列条件:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) > 0 \quad \text{且} \quad \tilde{f}(0) = 0, \quad \tilde{f}'(0) > 0.$$

我们考虑复合映射

$$\phi := f \circ (\tilde{f})^{-1} : \Delta \rightarrow \Delta.$$

显然, $\phi(0) = 0$ 且 $\phi'(0) > 0$. 对 ϕ 使用施瓦茨引理, 我们得到 $\phi'(0) \leq 1$. 同样, 可以对 $\phi^{-1} = \tilde{f} \circ f^{-1}$ 使用施瓦茨引理, 我们又得到 $[\phi^{-1}]'(0) \leq 1$. 由此推出, $\phi'(0) = 1$. 根据施瓦茨引理, $\phi \equiv z$, 从而 $f(z) \equiv \tilde{f}(z)$. 证毕.

作为黎曼唯一性定理的一个推论, 我们有下列定理:

定理 3.3 单位圆到自身的共形映射 $f: \Delta \rightarrow \Delta$ 是下列形式的分式线性变换:

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \quad (z_0 \in \Delta; \theta \in \mathbb{R}).$$

在上一节中, 我们已经给出了单位圆到自身的分式线性变换的一般形式. 而这个定理进一步断言, 单位圆到自身的共形映射必然是这一类的分式线性变换, 没有另外的映射.

证 设 $f: \Delta \rightarrow \Delta$ 是一个共形映射, 且 $f(z_0) = 0$. 设 $\theta_1 = \arg f'(z_0)$, 那么 $F(z) = e^{-i\theta_1} f(z)$ 是 Δ 到 Δ 的共形映射, $F(z_0) = 0$, 且 $F'(z_0) > 0$.

我们另外考虑

$$L(z) = e^{-i\theta_2} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

其中 θ_2 等于变换 $w = (z - z_0)/(1 - \bar{z}_0 z)$ 在 z_0 的导数的辐角. 这样 $w = L(z)$ 也是 Δ 到自身的共形映射, $L(z_0) = 0$ 且 $L'(z_0) > 0$.

根据黎曼映射唯一性定理, $F(z) = L(z)$, 也即

$$f(z) = e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}.$$

因此, $f(z)$ 是一个上述形式的分式线性变换. 证毕.

黎曼映射存在性与唯一性定理还有其他形式. 在上述形式的定理中, 单连通区域的典型区域选为单位圆. 其实, 也可以把典型区域选为上半平面. 这时黎曼映射存在唯一性定理可以叙述成下列形式, 它与定理 3.1 等价:

定理 3.4 设 D 是一个边界点多于一点单连通区域, z_0 是 D 中的一个点. 则存在一个 D 到上半平面的共形映射 $f: D \rightarrow \mathbb{H}$ 使得

$$f(z_0) = i \text{ 且 } f'(z_0) > 0.$$

满足这些条件的共形映射是唯一的.

我们可以利用定理 3.1 证明这个定理.

另外, 黎曼映射的唯一性的条件也有其他形式.

当给定的单连通区域是以一条若尔当曲线为边界时, 我们称之为若尔当区域. 可以证明: 一个若尔当区域 D 到单位圆 Δ 的共形映射 f 可以延拓成闭区域 \bar{D} 上的一个映射 $f: \bar{D} \rightarrow \bar{\Delta}$, 使得后者是一个连续的一一满射. 这个结论通常称为若尔当区域的共形映射的边界对应定理, 这里我们略去它的证明.

因此, 对于一个若尔当区域到单位圆的共形映射而言, 我们总可以谈论它的边界值.

设 $f: D \rightarrow \Delta$ 是一个若尔当区域 D 到单位圆的共形映射. 则这个映射满足下列条件之一时, 它是唯一确定的:

(I) $f(z_0) = 0$, 且 $f(\zeta) = 1$, 其中 $z_0 \in D$ 与 $\zeta \in \partial D$ 是两个指定的点;

(II) $f(\zeta_1) = 1$, $f(\zeta_2) = i$, $f(\zeta_3) = -1$, 其中 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ 是按照关于区域 D 的正向在边界 ∂D 上依次指定的三个点.

总之, 在若尔当区域 D 的内部指定一点的像并指定一个边界点的像, 或者同时指定三个边界点的像, 就足以保证黎曼映射 $f: D \rightarrow \Delta$ 的唯一性. 证明的基础依然是施瓦茨引理. 事实上, 两个不同的黎曼映射相差一个单位圆之间的共形映射, 而我们已经由施瓦茨引理推出单位圆之间的共形映射只能是一个分式线性变换. 在上述条件下, 这个分式线性变换必然是恒同映射.

习题 8.3

1. 设 $\Omega := \{z = x + iy : x > 0, y > 0\}$. 求一个共形映射将 Ω 映射为单位圆.

提示 先将 Ω 变为上半平面, 然后再通过分式线性变换变成单位圆.

2. 设 $\Sigma := \{z = x + iy : -\infty < x < +\infty, 0 < y < \pi\}$. 求一个共形映射将 Σ 变成单位圆.

提示 利用指数函数将 Σ 变成右半平面, 然后再利用分式线性变换将右半平面变成单位圆.

3. 证明本节中所叙述的黎曼映射定理的唯一性条件 (I) 与 (II).

§4. 解析延拓

设 $w = f(z)$ 在一个集合 E 中解析. 假如存在一个比 E 更大的集合 E' 以及一个在 E' 中解析的函数 $w = F(z)$ 使得 F 在 E 上的限制 $F|_E$ 就是 f , 也即

$$F(z) = f(z), \quad \forall z \in E,$$

那么我们称 $w = F(z)$ 是 $w = f(z)$ 的一个解析延拓.

例如, 设

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1),$$

其定义域为单位圆, 并在其中解析. 另外, 我们考虑函数

$$F(z) = \frac{1}{1-z} \quad (z \neq 1).$$

它在一个更大的区域内解析, 但在单位圆内等于 $f(z)$. 于是, 它是 $w = f(z)$ 的一个解析延拓.

这里我们有几个问题需要讨论: 对于任何一个解析函数是否总可以向其定义域外解析延拓? 如果有这样的解析延拓它是否是唯一确定的? 有什么具体办法进行这种延拓吗?

显然, 第一个问题的回答是, 一般说来不总是可能进行解析延拓的. 例如, 在前面的例子中, $F(z) = 1/(1-z)$ 就不能再进一步解析延拓.

第二个问题的回答一般说来是肯定的, 只要集合 E 中有一个聚点, 就能保证解析延拓是唯一的. 这是由于解析函数的唯一性定理的缘故. 当 E 只有有限个点时, 显然解析延拓是不唯一的.

解析延拓的办法有很多. 下面的几个定理是解析延拓的基本方法:

定理 4.1 设有两个区域 D_1 与 D_2 , 并且它们的交集: $G = D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. 又设有两个函数 $w = f_1(z)$ 与 $w = f_2(z)$ 分别在 D_1 与 D_2 中解析, 并且在 G 上处处相等, 即

$$f_1(z) = f_2(z), \quad \forall z \in G.$$

则函数 $w = f_1(z)$ 有一个解析延拓:

$$F(z) := \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1, \\ f_2(z), & z \in D_2 \setminus G. \end{cases}$$

证明是简单的. 事实上, 由定理条件有: $F|_G = f_2|_G$. 根据 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 分别在 D_1 与 D_2 中的解析性, 就得到 $F(z)$ 在 $D_1 \cup D_2$ 中解析性. 见图 8.4.1.

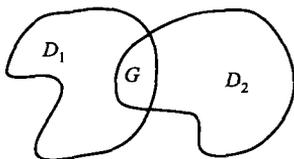


图 8.4.1

定理 4.2 设有两个区域 D_1 与 D_2 , $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, 并且假定有一条逐段光滑的 Γ 作为它们的公共边界. 又设有两个函数 $w = f_1(z)$ 与 $w = f_2(z)$ 分别在 D_1 与 D_2 中解析, 并且分别在 $D_1 \cup \Gamma$ 与 $D_2 \cup \Gamma$ 上连续, 且

$$f_1(z) = f_2(z), \quad \forall z \in \Gamma.$$

则函数 $w = f_1(z)$ 有一个解析延拓:

$$F(z) := \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1, \\ f_2(z), & z \in D_2, \\ f_1(z) = f_2(z), & z \in \Gamma. \end{cases}$$

证 显然, 只要证明 $F(z)$ 在 Γ 上解析就足够了. 而这个证明基于莫雷拉定理. 设 γ 是在 Γ 上一点附近任意取定的一条逐段光滑的有定向的简单闭曲线, 其内部全部落入 $D_1 \cup \Gamma \cup D_2$. 我们要证明

$$\oint_{\gamma} F(z) dz = 0. \quad (4.1)$$

假如 γ 全部落入 $D_1 \cup \Gamma$ 或 $D_2 \cup \Gamma$ 之中, 则由柯西定理可知 (4.1) 成立. 假如 γ 部分落入 $D_1 \cup \Gamma$ 之中, 而另一部分落入 $D_2 \cup \Gamma$ 之

中, 则存在有限条逐段光滑有定向的闭曲线 $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, 它们要么落入 $D_1 \cup \Gamma$ 之中, 要么落入 $D_2 \cup \Gamma$ 之中, 并使得

$$\oint_{\gamma} F(z) dz = \oint_{\gamma_1} F(z) dz + \dots + \oint_{\gamma_n} F(z) dz.$$

见图 8.4.2. 依据前面的讨论, 这时 (4.1) 式依旧成立. 这就证明了 $F(z)$ 在 Γ 上的解析性. 证毕.

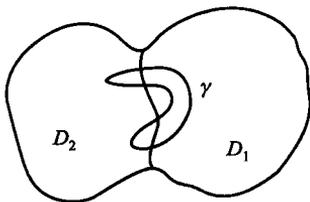


图 8.4.2

定理 4.2 为我们提供了某些特殊情况下的解析延拓的具体办法.

定理 4.3(对称延拓原理) 设区域 D 是一条若尔当曲线的内部, 该若尔当曲线有一段是直线弧:

$$\Gamma := \{z = x + iy : \alpha < x < \beta, y = 0\},$$

并且区域 D 落在实轴的一侧. 又设 $w = f(z)$ 在 D 中解析, 在 $D \cup \Gamma$ 上连续, $f(\Gamma)$ 也落在实轴上. 则函数 $w = f(z)$ 可以解析延拓到区域 D 关于 Γ 的对称区域 $D^* = \{z : \bar{z} \in D\}$ 上:

$$F(z) := \begin{cases} f(z), & z \in D \cup \Gamma, \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in D^*. \end{cases}$$

显然, $w = \overline{f(\bar{z})}$ 在 D^* 中解析. 所以, 根据定理 4.2, 只要证明 $w = F(z)$ 在 $D \cup \Gamma \cup D^*$ 上连续就足够了. 这一点是显然的 (见图 8.4.3).

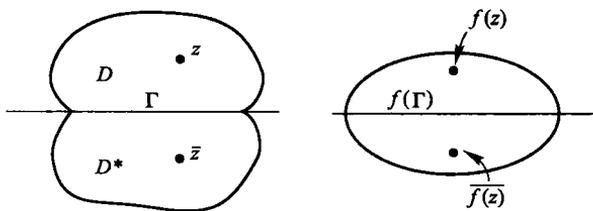


图 8.4.3

定理 4.4 设区域 D 是一条若尔当曲线的内部, 该若尔当曲线有一段是圆弧:

$$\Gamma_r := \{z = re^{i\theta} : \alpha < \theta < \beta\},$$

并且 D 落在圆周 $\{z : |z| = r\}$ 的一侧. 又设 $w = f(z)$ 在 D 中解析, 在 $D \cup \Gamma_r$ 上连续, 且 $f(\Gamma)$ 落在一条圆弧上:

$$\Gamma_R := \{z = Re^{i\theta} : a < \theta < b\}.$$

则 $w = f(z)$ 可以依照下列公式解析延拓到 Γ_R 的另一侧:

$$F(z) := \begin{cases} f(z), & z \in D \cup \Gamma_r, \\ \frac{R^2}{f\left(\frac{r^2}{\bar{z}}\right)}, & z \in D^* \setminus \{0\}; f(z) \neq 0. \end{cases}$$

证明与前面类似 (见图 8.4.4).

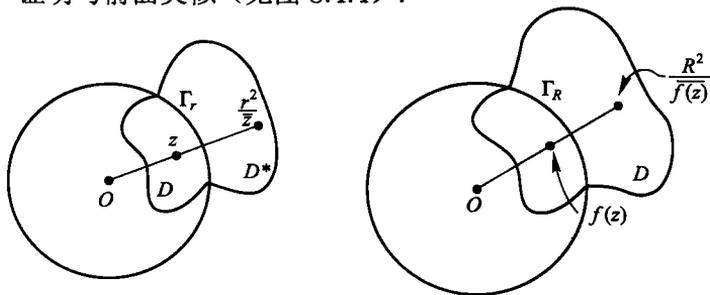


图 8.4.4

在进行对称解析延拓时,一个基本原则是应该把 z 点关于 Γ 的对称点 z^* 的函数值, 定义为 $f(z)$ 关于 $f(\Gamma)$ 的对称点的值. 比如, 在定理 4.4 的情况下,

$$F\left(\frac{r^2}{\bar{z}}\right) = \frac{R^2}{f(z)}, \quad z \in D.$$

也即

$$F(z) = \frac{R^2}{f\left(\frac{r^2}{\bar{z}}\right)}, \quad z \in D^*.$$

从下面的例子中, 可以看到解析延拓在解析函数论中的意义.

例 4.1 设 D 是一个若尔当区域, 且有一段边界 Γ 是实轴上的一段直线弧, 而 D 落在实轴的一侧. 又设 $w = f(z)$ 在 D 中解析, 在 $D \cup \Gamma$ 上连续, 且 $f(\zeta) = 0, \forall \zeta \in \Gamma$. 证明: $f(z) \equiv 0, \forall z \in D$.

证明是简单的. 事实上, 在所设的条件下, $w = f(z)$ 可以解析延拓到一个包含 Γ 的更大的区域之中. 对延拓后的函数使用唯一性定理, 即推得所要的结论.

例 4.2 设 $w = f(z)$ 是 $B_r := \{z : 1 < |z| < r\}$ 到 $B_R := \{w : 1 < |w| < R\}$ 的共形映射. 又设映射 $f : \overline{B_r} \rightarrow \overline{B_R}$ 是一个连续的一一满射, 并且 $f(1) = 1$. 证明: $r = R$ 且 $f(z) \equiv z (\forall z \in B_r)$.

证 显然, $w = f(z)$ 可以从 B_r 解析延拓到 B_{r^2} 之中. 而且根据对称延拓的办法知道, 延拓后的函数依然是 B_{r^2} 到 B_{R^2} 的共形映射. 我们把延拓后的函数依然记为 $w = f(z)$. 不断继续这个步骤, $w = f(z)$ 可以解析延拓到整个单位圆外部, 并且是单位圆外到单位圆外的共形映射. 完全类似地, $w = f(z)$ 也可以从 B_r 对称延拓到 $B_{1/r}$, 进而又对称延拓到 $B_{1/r^2}, \dots$. 不停地继续下去, 便可解析延拓到整个穿孔盘 $\{z : 0 < |z| < 1\}$ 之中. 总之, 我们便得到了一个 $f : \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 到自身的解析的一一满射.

显然, 我们有

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0.$$

这样, $z = 0$ 是一个可去奇点. 在补充定义 $f(0) = 0$ 之后, $w = f(z)$ 就变成一个 \mathbb{C} 到自身的一个解析的一一满射. 根据习题 6.2 第 10 题可知, 这样的映射只能有下列表达式:

$$f(z) = az + b, \quad \text{其中 } a(\neq 0), b \text{ 为常数.}$$

根据 $f(0) = 0$ 和 $f(1) = 1$, 立刻推出 $a = 1, b = 0$, 也即 $f(z) \equiv z, \forall z \in \mathbb{C}$. 这样我们就证明了 $r = R$, 且 $f(z) \equiv z, \forall z \in B_r$. 证毕.

习题 8.4

1. 设 $w = f(z)$ 在环域 $B = \{z : 1 < |z| < R\}$ 中解析, 在 $\{z : 1 < |z| \leq R\}$ 连续, 且满足

$$f(Re^{i\theta}) = Re^{i\theta}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

证明: $f(z) \equiv z, \forall z \in B$.

2. 将定理 4.3 中的假定 Γ 与 $f(\Gamma)$ 在实轴上, 改为在虚轴上. 写出解析延拓的公式.

3. 设 $w = f(z)$ 在区域 D 中解析. 若边界点 ζ 具有下列性质: 对于 ζ 的任何一个邻域 $U_\delta = \{z : |z - \zeta| < \delta\}$, $w = f(z)$ 不能解析延拓到 U_δ , 则我们称 ζ 是 $w = f(z)$ 的一个奇点^[注]. 若 D 的每一个边界点都是奇点, 则 D 的边界 ∂D 称为 $w = f(z)$ 的自然边界. 证明:

(1) 若 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ 的收敛半径为 $R, 0 < R < +\infty$, 则在圆周

$$\{z : |z - z_0| = R\}$$

上至少有一个奇点.

(2) 设

$$f(z) = z + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2^n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}.$$

证明: $w = f(z)$ 以单位圆周为其自然边界.

注 请读者将此处的奇点概念与前面讲的孤立奇点的概念加以比较. 现在所定义的奇点不一定是孤立的, 是一个更广的概念. 但前面所讲的可去孤立奇点不是现在所说的奇点.

提示 先证明 $z = 1$ 是奇点, 即证明 $\lim_{r \rightarrow 1} f(r) = +\infty$, 其中 $r < 1$ 为实数. 然后, 利用 $f(z) = z + f(z^2)$ 推出, 若 $z^2 = 1$ (即 $z = \pm 1$), 则 z 点为奇点. 另外, 又由

$$f(z) = z + z^2 + f(z^4)$$

推出, 若 $z^4 = 1$, 则 z 为其奇点. 如此推下去, 每一个满足方程 $z^{2^n} = 1$ (n 为自然数) 的 z 都是奇点. 但这样的点集合在单位圆周上是稠密的.

4. 证明函数

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$$

在单位圆周上处处为 $w = f(z)$ 的奇点.

提示 考虑点 $z = e^{2\pi i p/q}$, 其中 p, q 为任意整数.

§5. 完全解析函数与黎曼曲面

现在, 我们介绍魏尔斯特拉斯完全解析函数的概念, 它与多值解析函数紧密相关.

我们考虑一个幂级数

$$f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad |z-a| < r_a,$$

这里 $r_a > 0$ 为其收敛半径. 我们记其收敛圆 $\{z : |z-a| < r_a\}$ 为 U_a .

今后我们把偶 (f_a, U_a) 称为一个解析元素.

若存在一点 b 及一个幂级数

$$f_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n, \quad |z-b| < r_b,$$

其中 r_b 为其收敛半径, 使得

$$U_a \cap U_b \neq \emptyset, \quad \text{且} \quad f_a(z) = f_b(z) (\forall z \in U_a \cap U_b),$$

则 $f_a(z)$ 与 $f_b(z)$ 可以解析延拓到 $U_a \cup U_b$ (见图 8.5.1). 这时我们称解析元素 (f_a, U_a) 与 (f_b, U_b) 互为直接延拓.

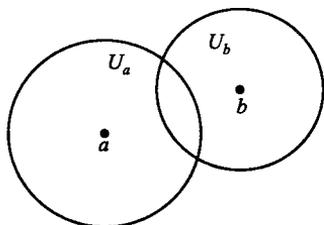


图 8.5.1

对于给定的两个解析元素 (f_a, U_a) 与 (f_b, U_b) , 若存在有限个解析元素

$$(f_{c_1}, U_{c_1}), (f_{c_2}, U_{c_2}), \dots, (f_{c_{n-1}}, U_{c_{n-1}}), (f_{c_n}, U_{c_n}),$$

使得每相邻两项都互为直接延拓, 且

$$(f_{c_1}, U_{c_1}) = (f_a, U_a), \quad (f_{c_n}, U_{c_n}) = (f_b, U_b),$$

则我们称 (f_a, U_a) 与 (f_b, U_b) 互为间接延拓. 如图 8.5.2 所示.

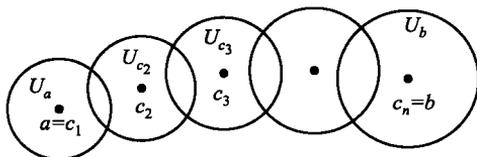


图 8.5.2

现在, 我们考虑一个解析元素的集合:

$$F := \{(f_\alpha, U_\alpha) : \alpha \in A\},$$

其中 A 为一个 \mathbb{C} 中的一个点集合. 若 F 非空, 并且其中的任意两个都彼此互为间接延拓, 则我们称 F 定义了一个解析函数, 并且把集合

$$D = \cup\{U_\alpha : \alpha \in A\}$$

称为 F 的定义域. 对于任意一点 $z_0 \in D$, 我们称集合

$$F(z_0) := \{f_\alpha(z_0) : \text{只要 } \alpha \text{ 使得 } z_0 \in U_\alpha\}$$

为 F 在 z_0 点的函数值. 如果对于每一个点 z_0 , 集合 $F(z_0)$ 都只有一个元素, 那么 F 称为单值解析函数, 否则称为多值解析函数.

显然, 若 F 中只有两个元素, 那么显然它是一个单值解析函数. 但是, 更一般的情况, 一般说来无法判断.

例 5.1 我们考虑在 $z = 1$ 处的函数 $z \mapsto 1/z$ 幂级数展开:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n, \quad |z-1| < 1.$$

再考虑这个函数在 $z = i, -1, -i$ 处的幂级数展开:

$$f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1} (z-i)^n, \quad |z-i| < 1;$$

$$f_{-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} -(z+1)^n, \quad |z+1| < 1;$$

$$f_{-i}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n-1} (z+i)^n, \quad |z+i| < 1.$$

设

$$F = \{(f_1, U_1), (f_i, U_i), (f_{-1}, U_{-1}), (f_{-i}, U_{-i})\}$$

其中 U_α 代表在 α 处展开式的收敛圆. 见图 8.5.3. 显然, 这时 $F(z)$ 是一个单值函数, 其定义域为 $D = U_1 \cup U_i \cup U_{-1} \cup U_{-i}$, 在每一点 $z \in D$, $F(z) = 1/z$.

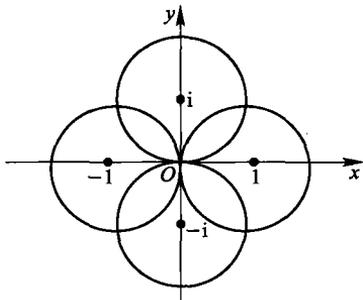


图 8.5.3

例 5.2 我们考虑函数 $w = \sqrt{z} = \sqrt{1 + (z - 1)}$ 在 $z = 1$ 处的幂级数的展开式:

$$f_1(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} (z - 1)^n, |z - 1| < 1.$$

显然, $f_1(1) = 1$. 现在, 我们沿着单位圆周对这个幂级数进行直接解析延拓: 我们会得到有限个解析元素序列, 使得其中每一个都是前一个的直接延拓, 而最后一个解析元素覆盖点 $z = 1$. 现在, 我们要指出: 最后一个解析元素在 $z = 1$ 处的函数值是等于 -1 . 事实上, 上述延拓保持了

$$\sqrt{z} = |z|^{1/2} e^{i \arg z / 2}$$

的辐角的连续变动. 因此, 当动点沿单位圆周的逆向连续变动一周回到 $z = 1$ 时, \sqrt{z} 的辐角增加了 π . 因而在上述做法中, 最后一个解析元素在 $z = 1$ 的函数值为 -1 .

我们把上述延拓中的解析元素取来组成一个集合 F , 它由有限个元素组成, 但是一个多值函数. 可见有限解析元素组成的集合也可能是定义一个多值函数.

定义 设 (f_α, U_α) 为给定的一个解析元素. 假如解析元素集合

$$F = \{(f_\alpha, U_\alpha) : \alpha \in A\}$$

包含了所有可能的与给定的 (f_α, U_α) 互为间接延拓的解析元素, 那么我们便称 F 为一个完全解析函数. 区域

$$D = \cup\{U_\alpha : \alpha \in A\}$$

称为 F 的定义域. 同样地, 集合

$$F(z_0) := \{f_\alpha(z_0) : \text{只要 } \alpha \text{ 使得 } z_0 \in U_\alpha\}$$

称为 F 在 z_0 的值.

显然, 一个解析元素 (f_α, U_α) 的完全解析函数, 实际上就是从这个解析元素出发, 考虑它的一切间接解析延拓的结果. 这就有可能导致多值解析函数. 而且我们过去所熟知的初等的多值解析函数都可以认为是这样得到的. 总之, 完全解析函数的概念为多值解析函数给予了一个明确的定义.

显然, 并非任意一个解析元素所生成的完全解析函数 F 都是多值的. 比如

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n, \quad \{z : |z-1| < 1\}$$

生成的完全解析函数 F 是一个单值函数:

$$F(z) = \frac{1}{z}, \quad \forall z \neq 0.$$

例 5.2 中解析元素所生成的完全解析函数 F , 定义域为 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, 是一个多值函数: 对于每一点 $z \neq 0$, $F(z)$ 都有两个值, 符号相反. 通常, 我们把它记为 $F(z) = \sqrt{z}$.

显然, 完全解析函数所对应的定义域的边界一定是自然边界, 即它不能再向更大的范围解析延拓.

定义 设

$$F = \{(f_\alpha, U_\alpha) : \alpha \in A\}$$

是一个完全解析函数, D 是它的定义域. 对于每一点 $z \in D$, 我们把偶 $(z, f_\alpha(z))$ (其中 $z \in U_\alpha$) 视作一个点, 称为黎曼点. 全体黎曼点组成的集合称为 F 的黎曼曲面, 有时记作 S_F .

比如, $F(z) = \sqrt{z}$ 的黎曼曲面, 对于每一个点 $z \neq 0$, 有两个黎曼点 $(z, |z|^{1/2}e^{i\arg z/2})$ 与 $(z, |z|^{1/2}e^{i(\arg z/2+\pi)})$ 与之相对应. 这样, 本来的一个点变成了两个点. 如果我们把多值函数 F 看成是其黎曼曲面 S_F 到 \mathbb{C} 的一个映射, 这时的映射不再是多值的映射, 而是一个单值的映射. 使多值函数单值化是黎曼当初引入黎曼曲面的初衷.

尽管我们这里是通过魏尔斯特拉斯完全解析函数的概念引入黎曼曲面的, 但当年黎曼有更为直观的构造方法. 比如, $F(z) = \sqrt{z}$ 的黎曼曲面可以如下构造:

我们考虑带割痕的复平面:

$$D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0],$$

并在割痕 $(-\infty, 0]$ 的上下“两岸”分别记上负号 $-$ 与正号 $+$. 另外, 我们考虑 D 的一个“拷贝”

$$D' = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0],$$

并在其割痕上下两岸分别记上正号“ $+$ ”与负号“ $-$ ”, 如图 8.5.4 所示. 这样, 原来割痕的每一个点 z 变成成分在两岸的两个点. 我们记它们 z^+ 或 z^- , 依照所在割痕的岸的记号“ $+$ ”或“ $-$ ”而定.

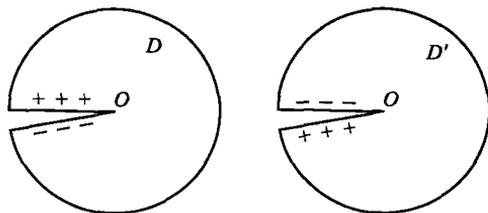


图 8.5.4

然后, 我们设想把 D 上割痕的每点 z^+ 与 D' 上割痕的对应点

z^+ 黏成一点, 并把 D 的割痕上的每点 z^- 与 D' 的割痕上的对应点 z^- 黏成一点, 就得到了 $w = \sqrt{z}$ 黎曼曲面. 如图 8.5.5(a) 所示.

总之, 原来 \mathbb{C} 中的一个非零点 z 在这个曲面上变成了两个点. 而 $w = \sqrt{z}$ 则可以视为这样的曲面到 \mathbb{C} 的一个映射, 而这个映射恰好是单值的, 而不是多值的了.

这个曲面可以看作是架构在穿孔复平面 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上的一个两层的覆盖, 两层之间在割痕处从一层换到另一层. 如图 8.5.5(b) 所示.

类似地可以构造多值函数 $w = z^{1/n}$ ($n > 1$ 为自然数) 的黎曼曲面. 但这时它是穿孔复平面的一个 n 层覆盖, 如图 8.5.6 所示.

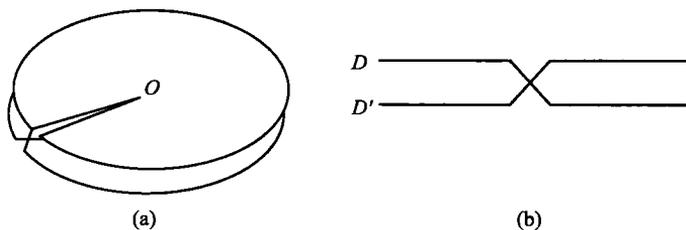


图 8.5.5

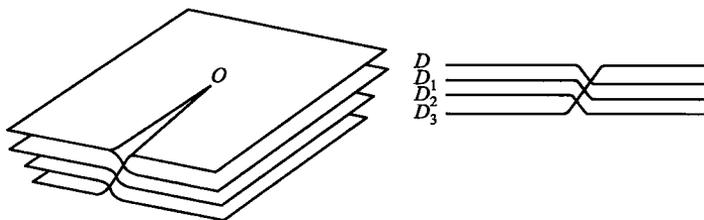


图 8.5.6

现在, 我们考虑对数函数:

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

的黎曼曲面. 当动点围绕原点旋转一周时, 其函数值增加或减少 $2\pi i$. 显然它的黎曼曲面应该有无穷层. 因此, 我们应该考虑无穷

多个带割痕的复平面 $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 的“拷贝”：

$$\dots, D_{-2}, D_{-1}, D, D_1, D_2, \dots$$

对数函数的黎曼曲面如图 8.5.7 所示.

黎曼曲面的提出使得人们关于解析函数的研究从一个平面区域推广到曲面上.

黎曼曲面在 20 世纪得到广泛深入的研究,而这种研究为当代数学的发展产生了深远影响. 20 世纪初外尔 (H. Weyl) 提出了抽象黎曼曲面的概念与理论,这是最早的流形概念的雏形. 后来关于黎曼曲面的模空间的研究使复分析与多个领域建立了联系.

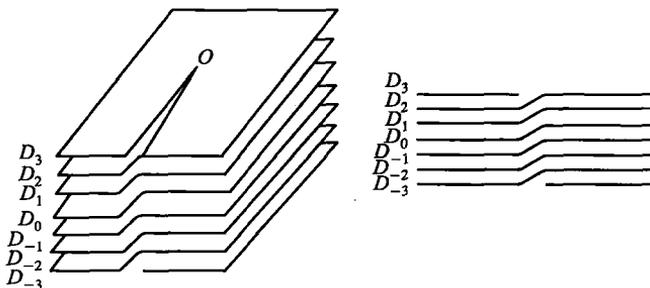


图 8.5.7

习题答案与提示

习题 1.1

1. (1) 2, $\pi/6$; (2) 2, $2\pi/3$; (3) 1, $\pi/2$; (4) 1, $4\pi/3$.

2. (1) $\cos\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ ($k = 0, 1, 2, 3$);

(2) $2^{1/4}e^{i(\pi/8+k\pi)}$ ($k = 0, 1$).

3. $-i + \sqrt{-i} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-1 \mp \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4. 提示：右面不等式的证明可利用三角不等式或复数的三角表示. 左面不等式的证明可利用不等式

$$(|x| + |y|)^2 \leq 2(|x|^2 + |y|^2).$$

6. 提示：利用本节的例题 1.4 即可.

9. 提示：注意由假设推出 $\beta\bar{\beta} = 1$, 从而有

$$|1 - \bar{\alpha}\beta| = |\beta||\bar{\beta} - \bar{\alpha}| = |\bar{\beta} - \bar{\alpha}|.$$

习题 1.2

2. (1) 是区域; (2) 不是区域; (3) 是区域; (4) 不是区域, 因为形如 $0 + iy$ ($-1 < y < 1$) 的点落在该集合之中, 但它们不是该集合的内点; (5) 是区域; (6) 不是区域, 因为点 1 属于该集合, 但不是内点.

6. 例如下列曲线

$$\gamma: (0, 1) \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto z(t) = t + i\sin \frac{1}{t}.$$

当 $t \rightarrow 0$ 时无端点可言.

7. 利用无理数集合在实数域中的稠密性, 可知复平面中的任何一个复数的任何邻域中, 都有一个复数其实部或虚部为无理数. 这样, 集合 E 中的点都不是内点.

8. 根据内点 (或外点) 的定义证明, 任何一个内点 (或外点) 的一个充分小邻域内的点都是内点 (或外点).

9. 将全体实部与虚部皆为有理数的复数集合排成一个序列, 则此序列的极限点集合就是整个复平面.

习题 2.1

2. 提示: 利用指数函数 e^z 的定义与三角函数的和角公式.

3. 提示: 若 $x_1 \neq x_2$, 则显然 $e^{x_1+iy_1} \neq e^{x_2+iy_2}$, 因为两端的模不相等. 若 $x_1 = x_2$, 且 $0 < y_1 < y_2 < 2\pi$, 这时要么 $\cos y_1 \neq \cos y_2$, 要么 $\sin y_1 \neq \sin y_2$, 从而

$$\cos y_1 + i \sin y_1 \neq \cos y_2 + i \sin y_2.$$

习题 2.2

4. 提示: 用反证法, 假定 $f(z)$ 不是常数, 则 D 中有不同两点 z_1 与 z_2 , 使得 $f(z_1) \neq f(z_2)$. 在 D 中取一条弧 $\gamma: [0, 1] \rightarrow D$ 连接 z_1 与 z_2 . 这时, $f(\gamma(t))$ 是 $[0, 1]$ 中的一个连续函数. 另一方面, 由 $f(z)$ 只取整数的假定可知 $f(z)$ 一个实值函数. 利用实函数的介值定理即可导出矛盾.

5. 提示: 若 $f(z) \equiv 0$, 则要证的结论成立. 现在假定 $f(z_0) \neq 0$. 由 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ 推出

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} |f(x+iy)| = 0.$$

取一个 R_0 充分大, 使得

$$|f(x+iy)| < |f(z_0)|, \quad \text{只要 } x^2 + y^2 > R_0.$$

设 $R > R_0$. 这时实函数 $|f(z)|$ 在圆盘 $\{x+iy: x^2+y^2 \leq R^2\}$ 上有最大值, 并且它便是 $|f(z)|$ 在 \mathbb{C} 上的最大值.

6. 提示: 当 $z \neq 0$ 时, 我们有

$$|P(z)| \geq |a_0||z|^n \left(1 - \frac{|a_1|}{|a_0|}|z|^{-1} - \dots - \frac{|a_{n-1}|}{|a_0|}|z|^{-(n-1)} - \frac{|a_n|}{|a_0|}|z|^{-n} \right).$$

当 $|z| \rightarrow +\infty$ 时, 括号内的项趋于 1.

习题 2.3

8*. 提示: 设 $w = f(z)$ 在 z_0 关于 (x, y) 可微. 令 $\Delta z = z - z_0$, 则有

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + B\Delta\bar{z} + o(|\Delta z|),$$

其中 $A = \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z_0}$, $B = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0}$. 又设 $\zeta = g(w)$ 在点 $w_0 = f(z_0)$ 处可微. 令

$\Delta w = w - w_0$, 则我们又有

$$\Delta \zeta = g(w) - g(w_0) = \tilde{A}\Delta w + \tilde{B}\Delta\bar{w} + o(|\Delta w|),$$

其中 $\tilde{A} = \frac{\partial g}{\partial w} \Big|_{w_0}$, $\tilde{B} = \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \Big|_{w_0}$. 以 $w = f(z)$ 代入上式, 则有 $o(|\Delta w|) =$

$o(\Delta z)$, 且有

$$\Delta g(f(z)) = (\tilde{A}A + \tilde{B}\bar{B})\Delta z + (\tilde{B}\bar{A} + \tilde{A}B)\Delta\bar{z} + o(|\Delta z|).$$

这就得到

$$\frac{\partial g(f(z))}{\partial z} = \tilde{A}A + \tilde{B}\bar{B}$$

和

$$\frac{\partial g(f(z))}{\partial \bar{z}} = \tilde{B}\bar{A} + \tilde{A}B.$$

注意到形式偏导数的性质 (II), 由 $A, B, \tilde{A}, \tilde{B}$ 的定义立即得到所要的结果.

习题 2.4

2. (1) $R = 1$; (2) $R = 1$; (3) $R = 1/e$.

3. 提示: 当 $|z| < 1$ 时, 利用不等式:

$$\left| \frac{z^n}{1+z^{2n}} \right| \leq \frac{|z|^n}{1-|z|^{2n}}.$$

当 $|z| > 1$ 时, 利用不等式

$$\left| \frac{z^n}{1+z^{2n}} \right| \leq \frac{|z|^n}{|z|^{2n}-1} \leq \frac{1}{|z|^n} \cdot \frac{1}{1-1/|z|^{2n}}.$$

而当 $|z| = 1$ 时, 利用不等式

$$\left| \frac{z^n}{1+z^{2n}} \right| \geq \frac{|z|^n}{1+|z|^{2n}} = \frac{1}{2}.$$

$$7. \cos i = \frac{1}{2}(e^{-1} + e), \quad \sin i = \frac{1}{2i}(e^{-1} - e).$$

$$8. (1+i\sqrt{3})^i = e^{-2\pi/3-2k\pi}[\cos(\ln 2) + i\sin(\ln 2)] \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$10. (1) \tan i = i(e - e^{-1})/(e + e^{-1}); \quad (2) \ln 2i = \ln 2 + \pi i/2,$$

$$(3) \sin(\pi + i) = -\sin i = \frac{1}{2i}(e - e^{-1}); \quad (4) e^{-\pi/3+2k\pi}.$$

11*. 支点为 $1, 2, 3$ 和 ∞ . 单值性区域可取为 $\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, 1] \cup [2, 3]\}$. 所求单值分支为

$$w = \sqrt{\{(z-1)(z-2)(z-3)\}} (\cos \theta + i \sin \theta),$$

其中 $\theta = \frac{1}{2} \arg(z-1)(z-2)(z-3)$.

12*. 支点为 ± 1 与 ± 2 . 割线可取为 $[-2, -1]$ 与 $[1, 2]$.

习题 3.1

$$1. f'(z) = 5(2z^5 + 2z^2 + 1)^4(10z^4 + 4z).$$

2. 提示: 注意下列事实: $f(z) = e^{z+\bar{z}} \equiv e^{2x}$ (其中 $x = \operatorname{Re} z$) 和极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{2x+\Delta x} - e^{2x}}{\Delta x}$$

存在, 以及极限 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\Delta x/\Delta z)$ 的不存在.

$$3. \text{提示: } f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0+iy_0}, \quad f'(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_0+iy_0}$$

6. 提示: 设 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 分别为 $f(x+iy)$ 的实部与虚部. 根据给定的条件 $f'(z) \equiv 0$ 推出 u 与 v 关于 x, y 的偏导数恒等于零. 根据微积分的论可知, u 与 v 均为常数函数.

8. (1) $w = e^z$ 在无穷远点不可微, 因为极限 $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z$ 不存在, 从而无法在无穷远点补充定义使之解析. (2) 与 (3) 中的函数可在无穷远点适当定义后使之解析.

习题 3.2

1. 用直接计算的办法验证是可以的, 但这样做较繁. 尚有较简单的办法:

$$(1) f(x + iy) = (x + iy)^4 + 8(x + iy) = z^4 - 8z;$$

$$(2) f(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y)(x + iy) = ze^z.$$

2. 将柯西 - 黎曼条件代入雅可比行列式.

3. 提示: $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = x + 1/2$, 故该函数仅在纵线 $x = -1/2$ 上满足柯西 - 黎曼方程. 因此, 它不是整函数.

4. 提示: 对于函数 $f(z)$ 与 $\overline{f(z)}$ 分别使用柯西 - 黎曼条件, 推出 f 的实部与虚部的偏导数均为零. 利用习题 3.1 中的第 6 题的结果, 即得到 f 是一个常数.

5. 提示: 由题设有 $f(z)\overline{f(z)} = C$ (其中 C 为常数). 由此推出

$$\frac{\partial(f \cdot \bar{f})}{\partial z} \equiv \frac{\partial(f \cdot \bar{f})}{\partial \bar{z}} \equiv 0.$$

简单计算表明 $f'(z)\overline{f(z)} \equiv 0$ 与 $f(z)\overline{f'(z)} \equiv 0$, 从而得到 $|f'(z)|^2|f(z)|^2 \equiv 0$, 也即 $|f'(z)|^2|C|^2 \equiv 0$. 如果 $C = 0$, 则根据假设 $f(z) \equiv 0$; 如果 $C \neq 0$, 则 $f'(z) \equiv 0$.

习题 3.3

2. 提示: 设 $f(x + iy)$ 的实部与虚部分别为 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$. 根据前面已经知道的结果, 映射 $(x, y) \mapsto (u, v)$ 的雅可比行列式 $J = |f'(z_0)|^2$. 现在, 回顾有关下列方程组的隐函数存在定理:

$$\begin{cases} u - u(x, y) = 0, \\ v - v(x, y) = 0. \end{cases}$$

隐函数存在定理告诉我们: 在雅可比行列式 $J \neq 0$ 的条件下, 在一个局部范围内总有解:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v).$$

也就是说, $(x, y) \mapsto (u, v)$ 在一个小范围内有逆映射. 这就表明, 一个解析函数 $w = f(z)$ 在其导数不为零的点附近是一个一一映射.

应当提醒读者, 解析函数的这一条性质是局部的, 不能推广到整体上. 事实上, 即使是一个解析函数在其定义域内导数处处不为零, 也不能推出它在整个区域中是一一映射, 例如, $w = e^z$.

习题 4.1

- (1) $-10/3 + 2i/3$; (2) $\cos 1 - 1 + i \sin 1$.
- (1) 当 $m - n + 1 = 0$ 时, 积分等于 $2\pi i$; 否则, 积分等于零. (2) 积分等于零.
- 提示: 利用已经知道的事实: 当 $R \rightarrow \infty$ 时, $|P(z)|$ 趋于无穷. 见习题 2.2 第 6 题.
- 提示: 注意当 $\zeta \in c$ 及 $|z| < r$ 时, $|\zeta - z| \geq (r - |z|)$.

习题 4.2

- 注意积分曲线为单位圆, 因而在被积函数中出现的 $|z|^2$ 等于 1, 于是

$$I = \oint_{\gamma} (z^3 e^{z+1} + e^z(z+1) + \cos z) dz.$$

这时的被积函数是解析函数, 于是 $I = 0$.

- (1) $-e^3 - 1$; (2) 2; (3) $z^6/6 + 5z^3/3 + z$; (4) $z^{n+1}/(n+1)$.
- 提示: 在所设定的区域中, $w = \ln z$ 是一个单值解析函数, 并且是 $1/z$ 的一个原函数. 因此, 要证明的公式成立.
- 提示: 添加积分路径 $[0, 1]$, 使得积分路径成为一条闭路, 然后应用柯西定理. 借助于实函数的积分就得到所要的结果.

习题 4.3

1. (1) $2\pi i$; (2) $6\pi i$; (3) πi .

5. 提示: 令 $f(\zeta) = e^{z\zeta}$ (将 z 视为一个参变量), 那么关于导数的柯西公式, 我们得到

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{z\zeta}}{\zeta^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{z^n}{n!}.$$

6. 提示: (1) 点 z^* 落在 U 外; (2) 利用柯西公式与 (1) 中的结果; (3) 利用 $z^* = R^2/\bar{z}$ 和 $\zeta = R^2/\bar{\zeta}$; (4) 在 (3) 中, 等式两端取实部; (5) 在 (4) 中, 令 $u(Re^{i\theta}) = 1$.

习题 4.4

3. 提示: 利用反证法与最小模原理.

5. 提示: 考虑辅助函数 $g(z) = e^{f(z)}$, 这时 $|g(z)| = \exp\{\operatorname{Re} f(z)\}$. 对于 $g(z)$ 使用最大模原理与最小模原理.

6. 提示: 利用解析函数的平均值公式, 即推得

$$|f(a)| \leq \frac{1}{\pi[d(a)]^2} \iint_{|z-a| \leq d(a)} |f(z)| dx dy \leq \frac{A}{\pi[d(a)]^2}.$$

7. 提示: 利用第 6 题的结果.

习题 5.1

1. $\{|z| < 1\}$.

6. (1) 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z-1)^{n+1} &= \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z-1)^{(n+2)} \\ &= \frac{1}{z-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^{n+1} \right]' \\ &= \frac{1}{(z-1)(2-z)^2}; \end{aligned}$$

(2) $(e^{z^2})' = 2ze^{z^2}$.

习题 5.2

1. 提示: 这里的第 (2) 题需要特别注意, 我们不可以对二元解析函数使用唯一性定理 (对于二元解析函数这样的定理并不成立). 这个题目需要两步走: 首先, 对于任意固定的 $z_2 = x \in \mathbb{R}$, 对于函数

$$F(z) = \sin(z+x) - \sin z \cos x - \cos z \sin x$$

使用唯一性定理, 得到

$$\sin(z+x) - \sin z \cos x - \cos z \sin x = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

这就是说,

$$\sin(z_1+x) - \sin z_1 \cos x - \cos z_1 \sin x = 0, \quad \forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

然后, 我们固定 z_1 并考虑函数

$$G(z) = \sin(z_1+z) - \sin z_1 \cos z - \cos z_1 \sin z.$$

上式表明 $G(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. 对于 $G(z)$ 使用唯一性定理, 即得到 $G(z) = 0$. 特别地, $G(z_2) = 0$, 也即

$$\sin(z_1+z_2) - \sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2 = 0.$$

4. (1) $\tan z = 0 + z + 0z^2 + o(|z|^2)$; (2) $(\sin z)^2 = 0 + z + 0z^2 + o(|z|^2)$;
(3) $\ln(1+z) = 0 + z - z^2 + o(|z|^2)$.

6. 提示: 首先利用柯西不等式证明: 当 $m > n$ 时, $f^{(m)}(0) = 0$. 然后利用第 5 题结果.

9. 提示: 由假定有

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

这就是说, 函数 $F(z) = f(z) - z - z^2$ 在集合 $E = \{\frac{1}{n}\}$ 上等于零, 而集合 E 在 \mathbb{C} 中有聚点.

习题 6.1

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^{n+1}}$.
3. $-2 - \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2z^{n+1}$.
4. $-\frac{1}{z} - \frac{1}{2} \frac{1}{z^2} - \frac{2}{3} \frac{1}{z^3} + \dots$.
5. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{-2(k+1)}$.

习题 6.2

1. 2 阶极点.
2. 1 阶极点.
3. (1) 0 为本性奇点; (2) ∞ 为 2 阶极点.
4. (1) 1 为可去奇点; (2) 2 为本性奇点.
5. 可去奇点.

10. 提示: 考虑单位圆 Δ 及其像 $f(\Delta)$. 根据映射的一一性, $f(\mathbb{C} \setminus \Delta) = \mathbb{C} \setminus f(\Delta)$. 显然, ∞ 不可能是 f 的可去奇点, 否则 f 是一个常数. 假如 ∞ 是 f 的本性奇点, 那么根据魏尔斯特拉斯定理, 对于 $f(0)$, 存在一个序列 $\{z_n\}, z_n \rightarrow \infty$ (当 $n \rightarrow \infty$). 但这是不可能的, 因为当 n 充分大时, $f(z_n) \notin f(\Delta)$. 假如 ∞ 是 f 的极点时, f 是一个多项式. 若它的次数大于 1. 这时与 f 的一一性矛盾, 也是不可能的. 于是, 只能是一个一次式.

11. 提示: 若 z_0 为 f 的可去奇点, 立刻推出 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 0$. 在 z_0 补充定义: $f(z_0) = 0$. 由解析函数的唯一性定理, $f(z) \equiv 0$. 显然, z_0 不可能是极点.

习题 6.3

1. 提示: 请参考习题 6.2 的第 10 题的提示.
3. (1) 提示: 利用上一题的结果.

习题 7.1

1. (1) 0; (2) 0; (3) $2\pi i$; (4) 0; (5) $2\pi i \frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{(n-1)!}$;
(6) $\pi i(e - e^{-1})$.

2. 设 $g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n(z-a)^n$ 和 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$. 则 $f(z)/g(z)$ 在 a 点的留数为 $(b_1 a_2 - b_0 a_3)/a_2^2$.

习题 7.2

2. (1) 6; (2) 1; (3) 3.
3. 在单位圆内有 1 个零点; 在环内有 3 个零点.

习题 7.3

1. (1) $2\pi/(1-p^2)$ (令 $z = e^{i\theta}$, 仿照例 3.1);
(2) $\pi/3(2^m)$. (注意到被积函数为偶函数, 故所求积分为

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos mx}{5-4x} dx.$$

再利用变换 $z = e^{i\theta}$.)

2. 提示: 取上半圆周 Γ_R 及区间 $[-R, R]$ 组成的回路, 并考虑辅助函数 $f(z) = P(z)/Q(z)$. 问题的关键在于证明

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0,$$

而证明此事的基础是 $n \geq m+2$.

3. $\pi/[2\sqrt{2}a^3]$ (引用若尔当引理并注意只有两个极点落在上半平面).

习题 8.2

1. 提示: 注意

$$w = \frac{2z-1}{z-i} = 2 + \frac{2i-1}{z-i}.$$

令

$$\zeta_1 = f_1(z) = z - i, \zeta_2 = f_2(\zeta_1) = \frac{1}{\zeta_1}, \zeta_3 = f_3(\zeta_2) = \frac{2i-1}{\sqrt{5}}\zeta_2, \zeta_4 = \sqrt{5}\zeta_3,$$

及 $\zeta_5 = f_5(\zeta_4) = \zeta_4 + 2$, 则上述变换可以写成相似变换、旋转变换、倒数变换与平移变换之复合

$$w = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z).$$

2. $w = (z-i)/(1-iz)$, $L(\Delta)$ 为下半平面.

3. $w = [2(i-1)z]/[1+(i-2)z]$.

4. $w = 2z/(1+z)$.

7. $w = \left(z - \frac{1}{2}\right) / \left(1 - \frac{1}{2}z\right)$.

习题 8.3

1. $f: \Omega \rightarrow \Delta; z \mapsto w = (z^2 - i)/(z^2 + i)$.

2. $f: \Sigma \rightarrow \Delta; z \mapsto w = (e^{2z} - i)/(e^{2z} + i)$.

习题 8.4

1. $w = -\overline{f(-\bar{z})}$.

4. 提示: 集合 $\{e^{2\pi ip/q} : p, q \text{ 为有理数}\}$ 在单位圆周上稠密, 故只要证明该集合中的每一个点都是奇点即可. 用反证法: 若有一点 $\zeta = e^{2\pi ip/q}$ 不是奇点, 那么级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \zeta^{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{(2\pi ip/q)n!}$$

收敛. 但这是不可能的, 因为当 $n > q$ 时, $e^{(2\pi ip/q)n!} = 1$.

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120