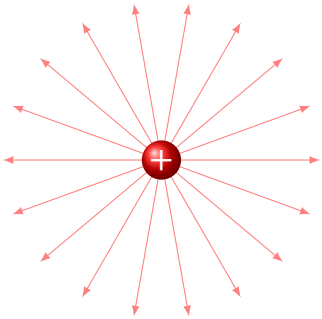
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КПІ ім. Ігоря Сікорського

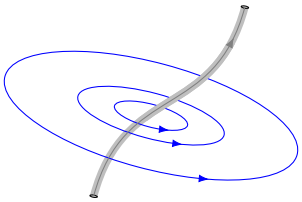
Навчально-науковий
фізико-технічний інститут

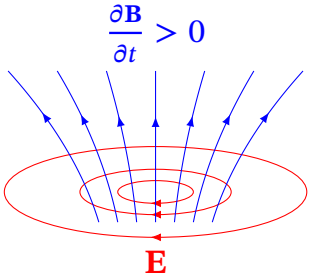
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

С. М. Пономаренко

Електрика та магнетизм
Підручник







КИЇВ 2026

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

С. М. Пономаренко

Електрика та магнетизм

Підручник

Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як підручник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальностями Е6 Прикладна фізика та наноматеріали.

КИЇВ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2026

УДК 537(075.8)
ББК 22.31я73
П 563

Рецензенти: І. Р. Зачек, д.ф.-м.н., професор кафедри загальної фізики Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету «Львівська політехніка».

О. Я. Оліх, д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри загальної фізики, фізичного факультету КНУ імені Тараса Шевченка.

Відповідальний редактор: Т. В. Литвинова, к.т.н., доцент, перший заступник директора НН ФТІ КПІ ім. Ігоря Сікорського.

Гриф надано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № Х від ХХ.ХХ.2026 р.) за поданням Вченої ради Навчально-наукового Фізико-технічного інституту (протокол № 13 від 26.10.2026 р.)

Пономаренко С.М.

П 563 Електрика та магнетизм [Електронний ресурс] : підруч. для студ. спеціальностей Е6 «Прикладна фізика та наноматеріали» / С. М. Пономаренко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Електронні текстові дані (1 файл: 16,6 МБ). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2026. — 505 с.

Для студентів фізико-технічного інституту КПІ ім. Ігоря Сікорського, які навчаються за спеціальностями Е6 Прикладна фізика та наноматеріали.

Реєстр. № П ХХ/ХХ-ХХХ. Обсяг Х,Х авт. арк.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© С. М. Пономаренко, 2026 р.
© КПІ ім. Ігоря Сікорського (НН ФТІ), 2026 р.

Зміст

Зміст **3**

Передмова **10**

I Постійне електричне поле 13

1 Електричні заряди та їх взаємодія **14**
1.1 Сили (взаємодії) в природі 14
1.2 Електричний заряд 16
1.3 Як заряджають тіла? 17
1.4 Закон Кулона 18
Підсумки 21
Задачі 21

2 Постійне електричне поле у вакуумі **23**
2.1 Електромагнітне поле 23
2.2 Напруженість поля 24
2.3 Силові лінії та математичне поняття поля 27
2.4 Теорема Гаусса 29
2.5 Зауваження щодо інтегральної та диференціальної форм теореми Гаусса 37
2.6 Потенціальність електростатичного поля 37
2.7 Циркуляція вектора **E** 42
2.8 Граничні умови 45
2.9 Рівняння Пуассона та Лапласа 47
2.10 Повна система рівнянь електростатичного поля у вакуумі 48
Підсумки 49
Задачі 50

3 Електричне поле статичної системи зарядів **54**
3.1 Дипольний момент системи зарядів . . . 54
3.2 Поле точкового диполя . . . 55
3.3 Потенціал поля точкового диполя . . . 57
3.4 Потенціал системи зарядів на далеких відстанях . . . 58
3.5 Диполь в електричному полі . . . 61
3.6 Енергія довільної системи зарядів у зовнішньому полі . 65
Підсумки . . . 66
Задачі . . . 67

4 Електричне поле у провідниках **70**
4.1 Структура провідників . . . 70
4.2 Провідник у полі . . . 71
4.3 Електричне поле біля вістря . . . 76
4.4 Єдиність розв'язку електростатичної задачі . . . 80
4.5 Металева куля в однорідному полі . . . 84
4.6 Сили, що діють на поверхню провідника в полі . . . 87
Підсумки . . . 88
Задачі . . . 89

5 Основи електростатики діелектриків **92**
5.1 Основні поняття . . . 92
5.2 Структура діелектриків . . . 93
5.3 Поляризація діелектриків . . . 95
5.4 Вектор поляризації . . . 98
5.5 Вектор електричної індукції . . . 101
5.6 Граничні умови в присутності діелектриків . . . 103
5.7 Мікроскопічна теорія діелектричної проникності . . . 106
5.8 Типи діелектриків та їх застосування . . . 110
Підсумки . . . 114
Задачі . . . 115

6 Енергія електричного поля **118**
6.1 Електрична ємність . . . 118
6.2 Енергія електричного поля . . . 127
6.3 Пондеромоторні сили . . . 135
Підсумки . . . 140
Задачі . . . 141

II Постійний електричний струм **145**

7 Постійний електричний струм **146**
7.1 Основні поняття . . . 146
7.2 Природа носіїв заряду . . . 148
7.3 Закон збереження заряду . . . 149
7.4 Закон Ома . . . 151
7.5 Закон Джоуля–Ленца . . . 163
7.6 Струми в необмежених середовищах . . . 163
7.7 Перехідні процеси в колі з конденсатором . . . 166
7.8 Максвеллівський час релаксації заряду . . . 168
Задачі . . . 170

8 Електричний струм у різних середовищах **174**
8.1 Електричний струм у металах . . . 175
8.2 Електричний струм в електролітах . . . 183
8.3 Електричний струм у газах . . . 186
8.4 Електричний струм у вакуумі . . . 190
8.5 Електричний струм у напівпровідниках . . . 193
Підсумки . . . 200
Задачі . . . 201

III Постійне магнітне поле **206**

9 Магнітне поле у вакуумі **207**
9.1 Означення . . . 207
9.2 Характеристика магнітного поля . . . 208
9.3 Дія магнітного поля на заряджені частинки та струми . . . 209
9.4 Закон Біо–Савара–Лапласа . . . 211
9.5 Вектор-потенціал магнітного поля . . . 216
9.6 Теореми магнітостатики . . . 217
9.7 Магнітний момент . . . 221
9.8 Потенціальна енергія диполя та сила, що діє на диполь у магнітному полі . . . 228
Підсумки . . . 231
Задачі . . . 232

10 Магнітне поле в речовині **236**
10.1 Основні поняття . . . 236
10.2 Намагнічування . . . 238
10.3 Теорема про циркуляцію в речовині . . . 239

10.4 Магнітна сприйнятливість речовини . . . 241
10.5 Граничні умови . . . 242
10.6 Мікроскопічна природа діа-, пара- і феромагнетизму . . 246
Підсумки . . . 252
Задачі . . . 252

IV Рух частинок в електричному та магнітному полях 257

11 Рух заряджених частинок 258
11.1 Рух частинок в однорідних полях . . . 258
11.2 Мас-спектрометр і циклотрон . . . 264
11.3 Застосування схрещених полів . . . 266
11.4 Методи вимірювання питомого заряду електрона . . . 269
11.5 Досліди Міллікена . . . 273
Підсумки . . . 275
Задачі . . . 276

V Електродинаміка 280

12 Явище електромагнітної індукції 281
12.1 Явище електромагнітної індукції . . . 281
12.2 Закон електромагнітної індукції . . . 283
12.3 Робота, що виконується при переміщенні провідника зі струмом у магнітному полі . . . 283
12.4 Електромагнітна індукція в рухомих провідниках . . . 285
12.5 Електромагнітна індукція в нерухомих провідниках . . 288
12.6 Явище самоіндукції . . . 293
12.7 Індукція в надпровідниках. Ефект Мейснера . . . 296
Підсумки . . . 301
Задачі . . . 302

13 Енергія магнітного поля 307
13.1 Енергія магнітного поля . . . 307
13.2 Взаємна індукція . . . 310
13.3 Енергія системи зв'язаних контурів . . . 316
13.4 Потенціальна енергія струмів . . . 319
13.5 Принцип роботи трансформаторів . . . 321
13.6 Пондеромоторні сили в магнітному полі . . . 323
Підсумки . . . 328
Задачі . . . 328

14 Система рівнянь Максвелла **331**
14.1 Струм зміщення . . . 332
14.2 Система рівнянь Максвелла . . . 338
14.3 Про рівняння Максвелла . . . 341
14.4 Енергія електромагнітного поля . . . 343
14.5 Скін-ефект . . . 348
Підсумки . . . 353
Задачі . . . 354

15 Відносність електричного і магнітного полів **357**
15.1 Нерелятивістські закони перетворення полів . . . 359
15.2 Релятивістські закони перетворення полів . . . 360
15.3 Тензор електромагнітного поля* . . . 365
Підсумки . . . 367
Задачі . . . 368

VI Електромагнітні хвилі **371**

16 Електромагнітні хвилі **372**
16.1 Хвильове рівняння . . . 372
16.2 Електромагнітні хвилі . . . 375
16.3 Енергія та вектор Пойнтінга для хвилі . . . 377
16.4 Імпульс і момент імпульсу електромагнітного поля . . . 380
16.5 Відбивання хвиль від межі двох діелектриків . . . 382
Підсумки . . . 390
Задачі . . . 391

17 Випромінювання електромагнітних хвиль **395**
17.1 Історична довідка: досліди Герца . . . 395
17.2 Елементарна модель випромінювання . . . 396
17.3 Дипольне випромінювання . . . 400
17.4 Потужність випромінювання осцилятора . . . 404
17.5 Випромінювання рухомого заряду . . . 406
Підсумки . . . 408
Задачі . . . 409

VII Електромагнітні коливання та хвилі в колах і хвилеводах **412**

18 Коливальні процеси в електричних колах **413**
18.1 Квазістаціонарне наближення . . . 413

18.2 Вільні коливання в коливальному контурі 414
18.3 Вимушені коливання під дією гармонічної ЕРС 424
18.4 Змінний струм 430
18.5 Трансформатор 441
18.6 Частотні фільтри 442
18.7 Трифазний струм 445
Підсумки 446
Задачі 447

19 Довгі лінії. Телеграфні рівняння **452**
19.1 Від зосереджених елементів до розподілених 452
19.2 Виведення телеграфних рівнянь 453
19.3 Гармонічний режим. Хвильове рівняння 454
19.4 Лінія без втрат 456
19.5 Польова картина. Зв'язок з рівняннями Максвелла . . . 458
Підсумки 462
Задачі 463

20 Хвилеводи **465**
20.1 Від довгої лінії до хвилеводу 465
20.2 Прямокутний хвилевід 466
Підсумки 471
Задачі 471

Відповіді **473**

Додатки **489**

А Таблиця переходу між гауссовою системою одиниць та SI 489
Б Основні позначення 492
В Основні формули векторного аналізу 494
В.1 Диференціальні операції в різних системах координат 494
В.2 Другі похідні 495
В.3 Похідні від добутків 495
В.4 Індексна нотація формул векторного аналізу . . . 495
В.5 Інтегральні характеристики та теореми 498

Література **499**

Алфавітний покажчик **500**

Передмова

Цей підручник охоплює дисципліну «Електрика та магнетизм», яку викладають на другому курсі для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності Е6 «Прикладна фізика та наноматеріали». Матеріал побудовано за класичною схемою: від електростатики у вакуумі, провідниках і діелектриках — через постійний струм і магнітне поле — до рівнянь Максвелла, електромагнітних хвиль та коливальних процесів у колах і хвилеводах.

Більшість розділів супроводжується короткою історичною чи філософською довідкою, яка нагадує, що за рівняннями стоїть жива історія експериментальної думки. Там, де це можливо, наведено фізичні аналогії (наприклад, зв'язок еквіпотенціальних поверхонь з рельєфом місцевості), які допомагають побудувати інтуїцію, перш ніж переходити до формального апарату.

Текст має наскрізну систему позначок, яка полегшує самостійну роботу з підручником:

- знаком «!» виділено принципові зауваження та поширені помилки, на які варто звернути особливу увагу;
- знаком «?» позначено задачі для самостійного розв'язання, зібрані наприкінці розділу; відповіді до них подано в кінці книги, перед додатками (номер задачі є посиланням на відповідь, а номер відповіді — на задачу);
- зірочкою «*» відмічено додатковий матеріал — складніші виведення чи приклади, які виходять за межі обов'язкового мінімуму, але поглиблюють розуміння теми; його набрано дрібнішим шрифтом, і при першому читанні його можна пропустити.

Наприкінці кожного розділу наведено короткі підсумки, задачі та список контрольних питань для підготовки до семестрового контролю.

У класичній механіці природно будувати систему одиниць як абсолютну, тобто таку, в якій усі фізичні величини виражаються через базові — довжину, масу та час. Саме так виникає метрична система СГС, а її послідовне поширення на електродинаміку приводить до гауссової системи одиниць, де електричні величини вимірюються в СГСЕ, а магнітні — в СГСМ. У цій системі рівняння не містять діелектричної ε_0 чи магнітної μ_0 сталих, електричні $\mathbf{E}$ та магнітні $\mathbf{B}$

поля мають однакову розмірність, а співвідношення між одиницями безпосередньо випливають із рівнянь, що робить формули теорії «елегантнішими» та симетричнішими. На противагу цьому, у СІ для електромагнітних величин введено окрему базову одиницю — ампер; через це в рівняннях з'являються сталі ε_0 і μ_0, які по суті є коефіцієнтами переведення одиниць. Хоча СІ є зручною для практичних та інженерних застосувань, гауссова система залишається стандартом у теоретичній електродинаміці. Саме на ній ґрунтується виклад цього підручника, а також подальших дисциплін курсу теоретичної фізики — «Класична електродинаміка» та «Електродинаміка суцільних середовищ».

Виняток становить частина VII (коливання в електричних колах, довгі лінії, хвилеводи): її викладено в СІ. Ці розділи стоять на межі фізики й електротехніки, де всі величини — опори, ємності, індуктивності, напруги — вимірюють і задають в омах, фарадах, генрі й вольтах, а формули кіл (закон Ома, $\Phi = LI$, ЕРС самоіндукції $-L\,dI/dt$) у СІ мають звичний інженерний вигляд. Перехід між системами пояснено в додатку А, а позначення зведено в таблицю в додатку Б.

Підручник адресований насамперед студентам фізико-технічного інституту, які вивчають цей курс, але може бути корисним і всім, хто прагне поєднати строгий математичний виклад класичної електродинаміки з глибоким розумінням фізики явищ.

Методологічні аспекти підготовки навчального видання

Сучасне технологічне середовище змінює підхід до підготовки навчальних видань. Поряд із традиційними методами автор використовував цифрові інструменти: засоби перевірки правопису, моделі штучного інтелекту для редагування, уніфікації термінології та уточнення формулювань, а також генерації растрових ілюстрацій за розробленими технічними завданнями. Ці засоби прискорювали технічну роботу, але не замінювали авторського задуму. Добір матеріалу, логіка викладу, методична послідовність і наукова коректність залишалися визначальними критеріями, а відповідальність за зміст і якість видання несе автор.

Якість підручника залежить не лише від задуму та інструментів, а й від фахової оцінки, діалогу та досвіду інших людей. Тому дякую рецензентам і колегам, чиї зауваження допомогли вдосконалити цю працю. За будь-яких технологічних змін людське судження та незалежна експертиза залишаються незамінними: вони виявляють недоліки, перевіряють обґрунтованість викладу й оцінюють навчальну цінність.

Окрема подяка — студентам. Їхні запитання на лекціях та по-

милки в задачах найточніше показують, де бракує чіткості, логічного кроку чи прикладу. Чимало фрагментів цього підручника набули нинішнього вигляду саме завдяки їм. Буду вдячний і майбутнім читачам за конструктивні зауваження та вказівки на неточності.

Автор

Частина I

Постійне електричне поле

Я отримав іскрові розряди завдовжки понад сто футів [...] та електричні збурення в природному середовищі, які за інтенсивністю перевершують збурення від блискавки.

Нікола Тесла, «Передавання електричної енергії без проводів як засіб сприяння миру» (1905)

1 Електричні заряди та їх взаємодія

...взаємне тяжіння електричної рідини, іменованої позитивною, і електричної рідини, іменованої зазвичай негативною, полягає у зворотному відношенні квадратів відстаней...

Шарль Огюстен Кулон

1.1. Сили (взаємодії) в природі

Фізичні явища в природі зумовлені взаємодією між тілами. Наприклад, рух Землі навколо Сонця пояснюється гравітаційною взаємодією, яка визначає орбіту планети. Магнітні сили притягують залізні предмети, а молекулярні сили дозволяють воді підійматися в капілярі. Радіоактивний β-розпад ядер є результатом слабкої взаємодії, тоді як притягання між нуклонами в ядрі відбувається завдяки сильній ядерній взаємодії. Попри різноманіття цих явищ, усі взаємодії в природі можна звести до чотирьох фундаментальних типів: гравітаційної, електромагнітної, сильної (ядерної) та слабкої взаємодій.

Гравітаційна та електромагнітна взаємодії досліджуються у межах класичної фізики, хоча для електромагнітних сил, на відміну від гравітаційних, розроблена квантова теорія, відома як квантова електродинаміка. Водночас сильна та слабка взаємодії описуються виключно у межах квантової теорії. Ці чотири типи взаємодій охоплюють весь спектр фізичних процесів — від подій у Всесвіті до явищ на рівні елементарних частинок та процесів у живих організмах (рис. 1.1).

Серед чотирьох фундаментальних взаємодій електромагнітна займає особливе місце завдяки своєму впливу на всі рівні організації матерії — від атомів до макроскопічних об'єктів.[1] Вона визначає

[1] Виняток — *темна матерія*: вона не бере участі в електромагнітній взаємодії (не випромінює й не поглинає світло) і виявляє себе лише гравітаційно.

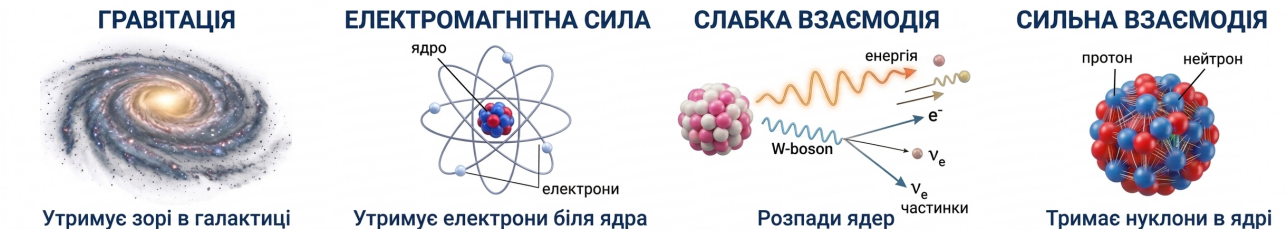


Рис. 1.1. Взаємодії в природі

структуру атомів і молекул, а також властивості речовини, які ми спостерігаємо у повсякденному житті. Саме завдяки електромагнітній взаємодії атоми утримуються разом, забезпечуючи існування твердих і рідких тіл.

Електромагнітна взаємодія також є основою для таких явищ, як поширення світла, радіохвиль та інших форм випромінювання. Ці процеси відіграють ключову роль у передачі енергії та інформації, що є неодмінною частиною сучасного життя.

Звичайні сили, які ми відчуваємо у повсякденному житті, такі як тиск руки на камінь чи взаємодія підошви із землею, також зумовлені електромагнітною взаємодією. Коли два тіла стикаються, їхні атоми зближуються на відстані порядку атомних розмірів, і взаємодія між електронами та ядрами цих атомів визначає характер цього контакту, створюючи силу, яка не дозволяє тілам проникати одне в одне.[1]

Особливістю електромагнітної взаємодії є її величезна інтенсивність порівняно з гравітаційною. Навіть невеликий дисбаланс між електричними зарядами може призвести до ефектів, що перевершують найпотужніші гравітаційні явища. Як яскраво зазначає Річард Фейнман у своїх лекціях:

> *Якби у вашому тілі або в тілі вашого сусіда (який стоїть від вас на відстані витягнутої руки) електронів виявилося б усього на 1% більше, ніж протонів, то сила вашого відштовхування була б неймовірно великою. Наскільки великою? Достатньою, щоб підняти хмарочос? Більше! Достатньою, щоб підняти гору Еверест? Більше! Сили відштовхування вистачило б, щоб підняти «вагу», що дорівнює вазі нашої Землі!*
>
> *Р. Фейнман у книзі «Фейнманівські лекції з фізики».*

[1] Повне пояснення цієї сили відштовхування потребує квантової механіки: електронні оболонки атомів не можуть перекриватися через принцип Паулі. Проте й тут ідеться про електрони, утримувані в атомах електромагнітною взаємодією.

1.2. Електричний заряд

Електричний заряд — це фізична величина, яка є джерелом електромагнітної взаємодії і визначає її силу та характер (притягання чи відштовхування). Це базова властивість елементарних частинок, яку в межах класичної електродинаміки неможливо вивести з якихось глибших принципів. Тому властивості заряду ми змушені встановлювати не теоретично, а експериментально. Зокрема, дослідним шляхом було виявлено такі його властивості:

1. *Існування зарядів двох знаків*.
   У природі існують заряди двох типів, які називають *позитивними* та *негативними*. Позитивний заряд несуть, наприклад, протони, а негативний — електрони.

   > Два роди електрики («скляна» і «смоляна») виявив ще Ш. Дюфе (1733 р.), а Б. Франклін запропонував називати їх позитивною та негативною — ця термінологія й закріпилася у фізиці.

2. *Дискретність заряду*.
   У дослідах 1909–1913 років Роберт Ендрюс Міллікен (спільно з Гарві Флетчером) виміряв заряди дрібних крапель олії й виявив, що всі вони кратні одній і тій самій величині. Так було надійно визначено заряд електрона (з точністю, кращою за 1%) і підтверджено існування найменшої порції заряду (докладно дослід розглянуто в розділі 11).
   Згідно з цими результатами, будь-який ненульовий заряд є кратним *елементарному заряду* e, що дорівнює модулю заряду електрона:[1]

   $$e = 4{,}803 \cdot 10^{-10}\ \text{Фр} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}, \qquad 1\ \text{Кл} \approx 3 \cdot 10^{9}\ \text{Фр}.$$

   Це означає, що заряд не може набувати довільних значень, а лише кратних елементарному заряду.
3. *Адитивність заряду*.
   Заряд системи тіл дорівнює алгебраїчній сумі зарядів тіл, що до неї входять.
4. *Збереження заряду*.
   Заряд — це величина, що *зберігається*. Позитивні й негативні заряди можуть народжуватися лише парами, у рівних кількостях, або попарно зникати (анігілювати). При цьому сумарний електричний заряд електрично ізольованої системи не змінюється. Пізніше ми побачимо, що заряд зберігається й локально: він не

[1] Кварки мають дробові заряди $\pm e/3$ і $\pm 2e/3$, проте у вільному стані вони не спостерігаються: заряди всіх частинок, які можна виділити, кратні e.

може зникнути в одному місці й одночасно з'явитися в іншому, не протікаючи між ними у вигляді струму.

5. *Релятивістська інваріантність заряду*.
   Величина електричного заряду однакова в усіх інерціальних системах відліку. Іншими словами, заряд частинки не залежить від її швидкості. Про це свідчить, зокрема, сувора електрична нейтральність атомів і молекул, хоча швидкості електронів і ядер у них дуже різні.

1.3. Як заряджають тіла?

Слово «*електрика*» походить від грецького «*ηλεκτρον*» (*електрон*), що означає «*бурштин*». Ще давні греки (Фалес Мілетський, VI ст. до н. е.) помітили, що бурштин, натертий об хутро, притягує дрібні предмети, і це явище згодом стало основою для дослідження електричних явищ.

Тіла складаються із заряджених частинок, і в нормальних умовах кількості позитивних і негативних зарядів у них однакові, тому тіло електрично нейтральне. Однак коли два тіла вступають у контакт, між ними може відбутися перенесення електронів, що змінює баланс зарядів. Під час тертя площа справжнього контакту поверхонь багаторазово зростає, тому перенесення електронів стає значно інтенсивнішим. Таке явище називається *трибоелектричним ефектом* (рис. 1.2). В результаті цього ефекту одне тіло набуває негативного заряду, а інше — позитивного.

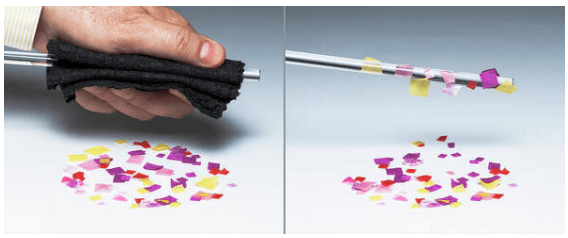


Рис. 1.2. Демонстрація трибоелектричного ефекту.

Матеріали, що виявляють трибоелектричний ефект, прийнято розташовувати в *трибоелектричний ряд*, один кінець якого є позитивним, а інший — негативним. Під час тертя пари матеріалів з ряду матеріал, розташований ближче до позитивного кінця ряду, зарядиться позитивно, а інший — негативно (рис. 1.3).

Трибоелектричний ефект має не лише пізнавальне, а й практичне значення. З одного боку, він лежить в основі *трибоелектричних наногенераторів* (TENG) — пристроїв, які перетворюють механічну енергію тертя чи вібрацій (кроки людини, вітер, хвилі) на електричну; завдяки високій ефективності на низьких частотах їх розглядають як перспективне джерело живлення для носимої електроніки та ав-

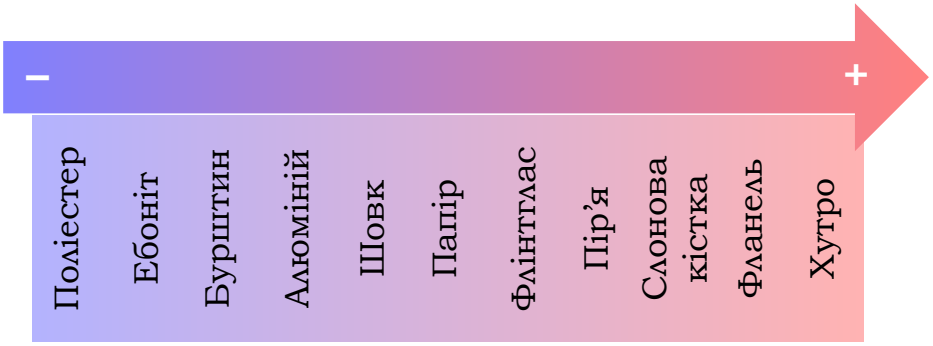


Рис. 1.3. Трибоелектричний ряд

тономних сенсорів у системах «інтернету речей».

З іншого боку, неконтрольоване трибоелектричне заряджання створює практичні проблеми. У мікроелектроніці раптовий електростатичний розряд здатний вивести з ладу чутливі напівпровідникові елементи, тому виробництво мікросхем супроводжується суворими заходами захисту від статичної електрики (антистатичні браслети, заземлені робочі поверхні, іонізатори повітря). У хімічній та харчовій промисловості трибоелектричне заряджання дрібнодисперсних матеріалів (борошна, вугільного пилу) може спричинити електростатичний розряд — одну з причин вибухів пилоповітряних сумішей. Водночас керовану електризацію тіл використовують і на користь: в *електрофільтрах* частинки диму чи пилу заряджаються в коронному розряді й осідають на протилежно заряджених електродах, очищуючи промислові гази, а в *ксерографії* (принцип роботи копіювальних апаратів і лазерних принтерів) світлочутливий барабан заряджають коронним розрядом, а частинки тонера — трибоелектрично, тертям об зерна носія; це й забезпечує перенесення зображення на папір.

Тертя — не єдиний спосіб зарядити тіло. Тіло можна зарядити й *дотиком* до вже зарядженого тіла: частина заряду переходить на нього (див. задачу 1.2). Нарешті, провідник можна зарядити без дотику — *електростатичною індукцією*: у полі зарядженого тіла заряди в провіднику перерозподіляються, і якщо в цей момент з'єднати провідник із землею, а потім розірвати з'єднання, на ньому залишиться заряд. Детально це явище розглянуто в розділі 4.

1.4. Закон Кулона

Експериментально встановлено, що заряди одного знака (однойменні заряди) *відштовхуються*, а заряди різного знака (різнойменні заряди) — *притягуються*. Ці властивості зарядів лягли в основу формулювання закону їхньої взаємодії.

Для спрощення аналізу часто використовують ідеалізовані моделі заряджених тіл, однією з яких є *точковий заряд*. Точковим зарядом

називають заряджене тіло, розмірами якого в конкретних умовах можна знехтувати порівняно з відстанями до інших тіл.

З цією моделлю заряджених тіл пов'язаний важливий закон, встановлений Ш. Кулоном у 1785 році. Він стверджує, що *сила, що діє між двома нерухомими точковими зарядами q_1 і q_2, розташованими на відстані r один від одного, описується законом*:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}_{12}}{r}. \tag{1.1}$$

Тут $\mathbf{F}_{12}$ — сила, що діє на заряд q_2 з боку заряду q_1, а $\mathbf{r}_{12}$ — радіус-вектор, проведений від заряду q_1 до заряду q_2, $r = |\mathbf{r}_{12}|$ (рис. 1.4). Сила, що діє на q_1, за третім законом Ньютона дорівнює $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$. Обидві сили напрямлені вздовж лінії, яка з'єднує заряди, тобто є *центральними*. У гауссовій системі одиниць коефіцієнт пропорційності в законі Кулона дорівнює одиниці, що й визначає одиницю заряду — франклін; у СІ в (1.1) з'являється множник $1/4\pi\varepsilon_0$.

! *У реальних умовах точкові заряди не існують. Закон Кулона в формі* (1.1) *точно справджується для заряджених куль зі* сферично симетричним *розподілом заряду (як ми переконаємось за допомогою теореми Гаусса); для тіл довільної форми він виконується тим точніше, чим більша відстань між ними порівняно з їхніми розмірами. Тому під «фізично» точковими зарядами будемо розуміти або малі (порівняно з відстанями) заряджені тіла, або тіла зі сферично симетричним розподілом заряду.*

На рис. 1.4 показано величини, що входять до закону Кулона, а також центральний характер взаємодії та напрям сил для однойменних і різнойменних зарядів.

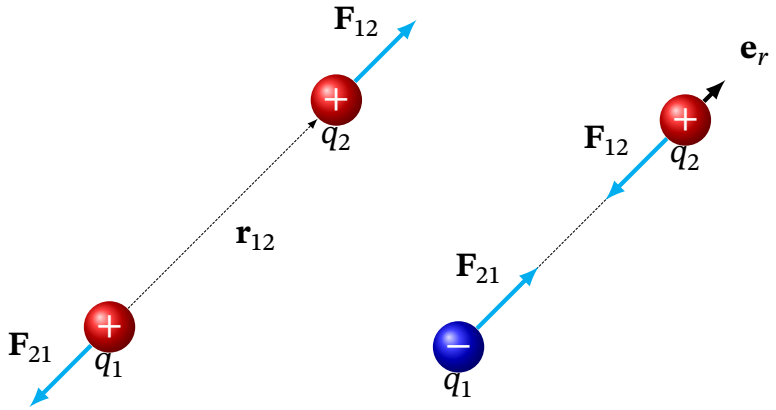


Рис. 1.4. Ілюстрація до закону Кулона

Досліди самого Кулона не відзначалися високою точністю, і можна було припустити, що знайдений ним простий закон обернених квадратів виконується лише наближено, наприклад $F = q_1 q_2 / r^{2+\varepsilon}$, де $|\varepsilon| \ll 1$. Перевірити це можна на провіднику: якщо $\varepsilon = 0$, то в стані

рівноваги заряди зосереджуються лише на його поверхні, а в об'ємі заряду немає. Якщо ж $\varepsilon \neq 0$, то частина заряду опиниться в товщі провідника.[1]

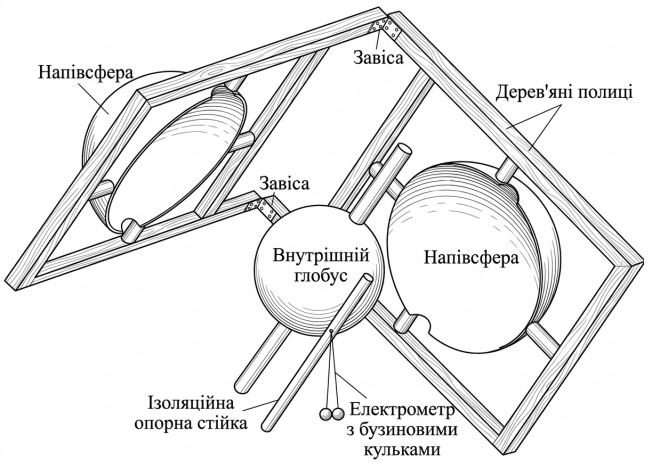


Рис. 1.5. Установка Г. Кавендіша для перевірки закону обернених квадратів.

Експеримент, що дозволив перевірити ці припущення, провів Г. Кавендіш (1773 р., рис. 1.5). Його ідея така:

1. провідну кулю оточують двома провідними напівсферами, які щільно прилягають одна до одної й утворюють майже суцільну оболонку;
2. кулю з'єднують з оболонкою провідником і заряджають цю систему;
3. з'єднання розривають, напівсфери розводять і перевіряють, чи залишився заряд на внутрішній кулі.

Якщо закон обернених квадратів точний, увесь заряд перейде на зовнішню оболонку, а куля залишиться незарядженою. Якщо ж $\varepsilon \neq 0$, на кулі залишиться заряд, приблизно пропорційний ε. Цей заряд можна виміряти чутливим електрометром (на рисунку роль електрометра відіграють дві кульки на нитках). Кавендіш не виявив заряду на кулі й дійшов висновку, що $|\varepsilon| < 0{,}02$; Максвелл, повторивши дослід у 1870-х роках, отримав $|\varepsilon| < 5 \cdot 10^{-5}$. У сучасних варіантах досліду (Вільямс, Фаллер і Гілл, 1971 р.) отримано обмеження $|\varepsilon| \lesssim 10^{-16}$.

! *Порушення закону обернених квадратів вимагало б перегляду теорії Максвелла, яка спирається на його точність. Зокрема, $\varepsilon \neq 0$ означало б, що фотон має ненульову масу; тому досліди на зразок досліду Кавендіша дають і найточніші лабораторні обмеження на масу фотона.*

[1] Строге обґрунтування цього факту спирається на теорему Гаусса, з якою ми познайомимося в розділі 2, «Теорема Гаусса»; поки що приймемо його як наслідок точного закону обернених квадратів.

Підсумки

Серед чотирьох фундаментальних взаємодій саме електромагнітна визначає будову атомів і молекул, властивості речовини та всі «звичайні» сили повсякденного життя. Її джерелом є електричний заряд — фундаментальна величина, властивості якої встановлено з досліду: заряди бувають двох знаків, заряд *дискретний* (кратний елементарному заряду $e = 4{,}803 \cdot 10^{-10}$ Фр), *адитивний*, *зберігається* в електрично ізольованій системі та *релятивістськи інваріантний*. Тіла заряджаються перенесенням електронів — при терті (трибоелектричний ефект), при дотику до зарядженого тіла або через електростатичну індукцію, а електрична нейтральність макроскопічних тіл є наслідком майже точної рівноваги позитивних і негативних зарядів.

Кількісно взаємодію двох нерухомих точкових зарядів описує закон Кулона (1.1): сила є центральною, обернено пропорційною квадрату відстані, і відштовхує однойменні заряди та притягує різнойменні. Точність закону обернених квадратів підтверджена дослідами на зразок досліду Кавендіша: $|\varepsilon| \lesssim 10^{-16}$. Закон Кулона, однак, лише фіксує результат взаємодії двох зарядів, нічого не кажучи про те, *як* вона передається. Наступний логічний крок — ввести поняття *електричного поля* як посередника взаємодії, навчитися знаходити поле системи зарядів і, як наслідок, довести теорему Гаусса (розділ 2).

Задачі

? **1.1.** *Перевіряємо Фейнмана.* Оцініть силу відштовхування двох людей масою 70 кг кожна на відстані 1 м, якщо в кожного електронів на 1% більше, ніж протонів. Порівняйте її з «вагою» Землі $M_\oplus g$ ($M_\oplus \approx 6 \cdot 10^{27}$ г). Вважайте, що приблизно половина нуклонів тіла — протони, $m_p \approx 1{,}7 \cdot 10^{-24}$ г.

? **1.2.** *Дотик кульок.* Дві однакові провідні кульки радіусом R із зарядами $+3q$ і $-q$ розташовані на відстані $r \gg R$ одна від одної. Їх привели в дотик і розвели на ту саму відстань. У скільки разів і як змінилася сила взаємодії?

? **1.3.** *Електрика проти гравітації.* Знайдіть відношення кулонівської сили до гравітаційної для електрона й протона. Чи залежить воно від відстані між ними? ($e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ Фр, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-28}$ г, $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ г, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ см^3/(г $\cdot$ с^2).)

? Контрольні питання

1. Назвіть чотири фундаментальні взаємодії. Яка з них визначає будову атомів і молекул та силу, з якою рука тисне на камінь? Чому цю силу вважають електромагнітною за природою?
2. Чому в повсякденному житті ми не відчуваємо величезних електричних сил, про які говорить Фейнман? Що забезпечує електричну нейтральність макроскопічних тіл?
3. Що означає, що електричний заряд є фундаментальною величиною? Чому його властивості ми вивчаємо з досліду, а не виводимо з інших принципів?
4. Сформулюйте основні властивості заряду: існування двох знаків, дискретність, адитивність, збереження та релятивістську інваріантність. Чи може тіло мати заряд $2{,}5\,e$? Відповідь обґрунтуйте.
5. У чому полягав дослід Міллікена та Флетчера і що він довів? Який зв'язок між значеннями елементарного заряду в одиницях СГС (Фр) та СІ (Кл)?
6. Що таке трибоелектричний ефект і чому при терті двох тіл одне заряджається позитивно, а інше — негативно? Якими ще способами можна зарядити тіло? Користуючись трибоелектричним рядом (рис. 1.3), визначте знаки зарядів, яких набудуть шовк і поліестер при терті один об одного.
7. Наведіть по одному прикладу корисного та шкідливого прояву трибоелектричного ефекту. Поясніть, як працює електрофільтр або ксерографія.
8. Сформулюйте закон Кулона й запишіть його у векторній формі. Що означає, що кулонівська сила є *центральною*? Як напрямлений вектор $\mathbf{r}_{12}$ у (1.1)?
9. За яких умов заряджене тіло можна вважати точковим? Для яких тіл скінченних розмірів закон Кулона виконується точно?
10. Як зміниться сила взаємодії двох точкових зарядів, якщо: а) відстань між ними збільшити втричі; б) один із зарядів збільшити вдвічі; в) знаки обох зарядів змінити на протилежні?
11. У чому полягала ідея досліду Кавендіша? Чому за точного закону обернених квадратів ($\varepsilon = 0$) заряд зосереджується лише на зовнішній поверхні провідника, а при $\varepsilon \neq 0$ з'явився б заряд усередині?
12. Яке обмеження на $|\varepsilon|$ отримано в експериментах і чому порушення закону обернених квадратів було б настільки важливим для електродинаміки? Як воно пов'язане з масою фотона?

2 Постійне електричне поле у вакуумі

2.1. Електромагнітне поле

Закон Кулона описує взаємодію електричних зарядів на відстані, що ставить фундаментальне питання: як саме ці заряди «відчувають» один одного? Подібне питання виникло раніше у теорії всесвітнього тяжіння Ісаака Ньютона. Ньютон свідомо відмовився приписувати гравітації який-небудь механізм — матеріальний посередник, ефір чи щось подібне — обмежившись математичним описом того, *як* тіла взаємодіють, без відповіді на питання, *чому* і *за допомогою чого*. У другому виданні «Начал» (1713) він так сформулював цю позицію: «Hypotheses non fingo» («Я не вигадую гіпотез»), залишивши питання про механізм взаємодії для майбутніх досліджень. Закон працював з приголомшливою точністю, однак сама ідея миттєвої дії на відстані (*actio in distans*) суперечила інтуїції про те, що будь-який вплив повинен якимось чином поширюватися у просторі.

У фізиці існували два підходи до пояснення природи взаємодії. Теорії далекодії стверджували, що сила передається миттєво через порожній простір, тоді як теорії близькодії припускали наявність матеріального посередника, який переносить цю взаємодію.

Закон Кулона успадковує ту саму проблему, що й закон тяжіння Ньютона. Записуючи $\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$, ми неявно припускаємо, що сила залежить лише від *миттєвого* взаємного розташування зарядів. Але чи справді це так? Уявімо, що заряд q_1 раптово зміщується вбік. Якщо закон Кулона буквально відображає фізичну реальність, то заряд q_2 на відстані r повинен миттєво «відчути» цю зміну. Проте дослід показує, що жодний сигнал чи збурення не передається миттєво — будь-яка зміна поширюється у просторі зі скінченною швидкістю. Правильніше очікувати, що заряд q_2 «дізнається» про зміщення q_1 не одразу, а лише через деякий час Δt, необхідний, щоб інформація встигла дійти від одного заряду до іншого. До цього моменту q_2 продовжує «відчувати» *старе* положення заряду q_1, ніби він досі там перебуває.

Це запізнення взаємодії і є найпростішим аргументом на користь того, що носієм взаємодії не можуть бути самі заряди чи миттєвий геометричний зв'язок між ними, а мусить бути щось третє. Вирішальний внесок у розуміння того, чим саме є це «третє», зробив Майкл Фарадей. Він запропонував ідею *поля* — фізичного об'єкта, що виникає навколо заряджених тіл, займає простір між ними, має власну енергію та імпульс і слугує посередником у передачі сил між зарядами. Джеймс Клерк Максвелл розвинув ідеї Фарадея і створив математичну теорію такого поля, яке називають *електромагнітним*. Згідно з цією теорією, інформація про зміну положення одного заряду поширюється до іншого через поле зі скінченною швидкістю — швидкістю світла.

У фізиці з'явилося нове поняття, найважливіше досягнення з часу Ньютона: поле. Знадобилася велика наукова уява, щоб усвідомити собі, що не заряди і не частинки, а поле в просторі між зарядами і частинками істотне для опису фізичних явищ.

А. Ейнштейн, Л. Інфельд «Еволюція фізики»

Закон Кулона в його класичному, статичному вигляді є лише *граничним випадком* більш загальної теорії — випадком, коли заряди нерухомі й запізненням можна знехтувати.

2.2. Напруженість поля

Отже, взаємодія зарядів здійснюється не миттєво і не напряму, а через поле — фізичний об'єкт, що існує в кожній точці простору незалежно від того, чи перебуває там інший заряд. Щоб працювати з цим об'єктом математично, потрібно навчитися описувати його кількісно: задавати, наскільки «сильним» є поле в тій чи іншій точці простору.

Найпростіший випадок — коли заряди, що створюють поле, нерухомі. Тоді поле також не змінюється з часом і називається *електростатичним*. Саме з нього зручно почати, оскільки в цьому випадку запізнення, про яке йшлося вище, не відіграє ролі: поле вже «встановилося» відповідно до положення зарядів, і немає потреби враховувати швидкість поширення взаємодії.

Для опису властивостей електричного поля і його ролі у взаємодії зарядів вводять кількісну характеристику, яка називається *напруженістю електричного поля*.

Напруженість визначають через силу, яка діє на *пробний заряд* — точковий додатний заряд настільки малого значення, що його при-

сутність не впливає на розподіл зарядів, які створюють поле. Це забезпечує можливість досліджувати поле без змін його властивостей. Експериментально встановлено, що відношення сили $\mathbf{F}$, яка діє на пробний заряд q, до його величини є сталою для кожної точки поля. Це відношення і визначає *напруженість електричного поля*:

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q},} \tag{2.1}$$

де $\mathbf{E}$ — векторна величина, яка характеризує поле в даній точці.

Ця концепція ґрунтується на принципі близькодії: сила, що діє на пробний заряд, визначається полем, а не іншими зарядами. У результаті сила $\mathbf{F}$, яка діє на пробний заряд q, може бути подана у вигляді:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}), \tag{2.2}$$

де $\mathbf{r}$ — радіус-вектор, що визначає положення точки в просторі, у якій знаходиться пробний заряд (рис. 2.1).

З означення напруженості електричного поля видно, що ця величина є *силовою характеристикою поля*, оскільки принцип її вимірювання полягає у визначенні сили, яка діє на пробний заряд.

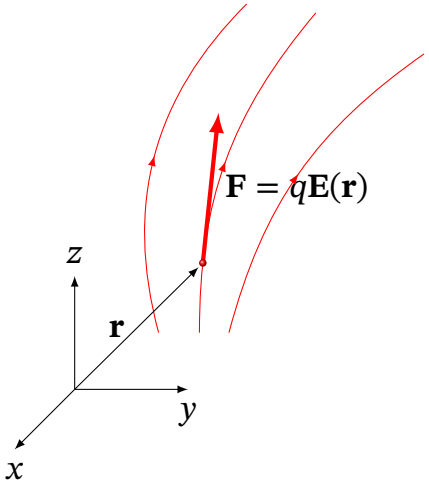


Рис. 2.1. Поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ діє на заряд q у тій самій точці простору, де перебуває заряд (дія поля локальна): $\mathbf{F} = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

Знайдемо напруженість електростатичного поля, яке створюється точковим нерухомим зарядом Q. Положення заряду задаємо радіус-вектором $\mathbf{r}'$. Із закону Кулона легко знайти напруженість як функцію точки спостереження, яка задається радіус-вектором $\mathbf{r}$ (рис. 2.2):

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\,\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.} \tag{2.3}$$

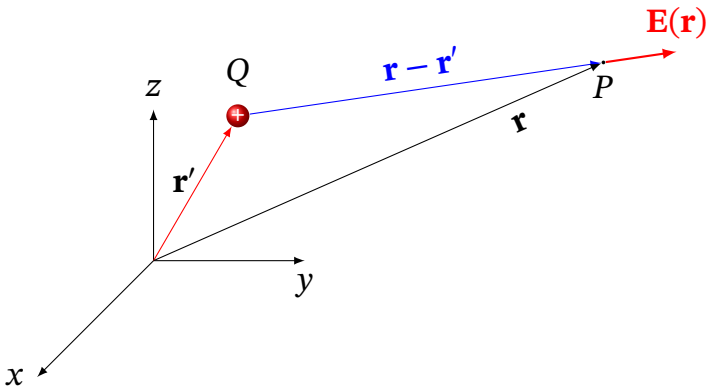


Рис. 2.2. Напруженість поля точкового заряду Q

Напруженість поля заряджених тіл складної геометричної форми можна знайти за принципом суперпозиції.

Розглянемо електричне поле двох точкових зарядів q_1 і q_2. Нехай $\mathbf{E}_1$ — напруженість поля в точці P, створювана зарядом q_1 (коли заряду q_2 немає зовсім), а $\mathbf{E}_2$ — напруженість поля заряду q_2 (коли немає заряду q_1). *Дослід показує*, що напруженість $\mathbf{E}$ результуючого поля (за наявності обох зарядів) може бути знайдена за правилом додавання векторів (рис. 2.3).

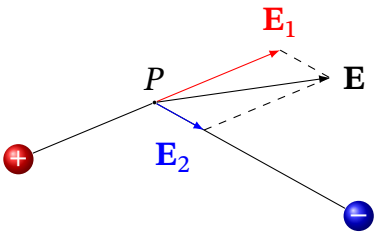


Рис. 2.3. Ілюстрація принципу суперпозиції для випадку двох різнойменних зарядів

Правило векторного додавання електричних полів справедливе не тільки для двох, а й для будь-якої системи зарядів. Якщо $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, …, $\mathbf{E}_n$ — напруженості полів, створюваних окремими зарядами в якій-небудь точці, то напруженість $\mathbf{E}$ результуючого поля в тій самій точці дорівнює:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i, \tag{2.4}$$

це співвідношення виражає *принцип суперпозиції електричних полів* і є важливою властивістю електричного поля.

Якщо заряди розподілені неперервно, то принцип суперпозиції матиме вигляд:

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E}, \tag{2.5}$$

де $d\mathbf{E}$ — напруженість електричного поля, створювана елементарним зарядом dq, а інтегрування ведеться за всією областю, в якій розподілені заряди. Для різних типів розподілів використовуються відповідні диференціальні елементи заряду:

- Для лінійного розподілу: $dq = \lambda\, dl$, де λ — лінійна густина заряду, dl — елемент довжини.

- Для поверхневого розподілу: $dq = \sigma\, dS$, де σ — поверхнева густина заряду, dS — елемент площі.
- Для об'ємного розподілу: $dq = \rho\, dV$, де ρ — об'ємна густина заряду, dV — елемент об'єму.

В разі об'ємного розподілу напруженість поля визначається як (рис. 2.4):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\,\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{2.6}$$

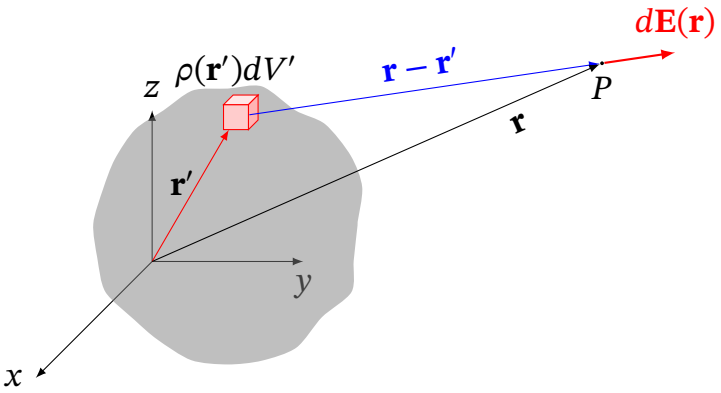


Рис. 2.4. До розрахунку електричного поля за принципом суперпозиції у разі об'ємного розподілу заряду.

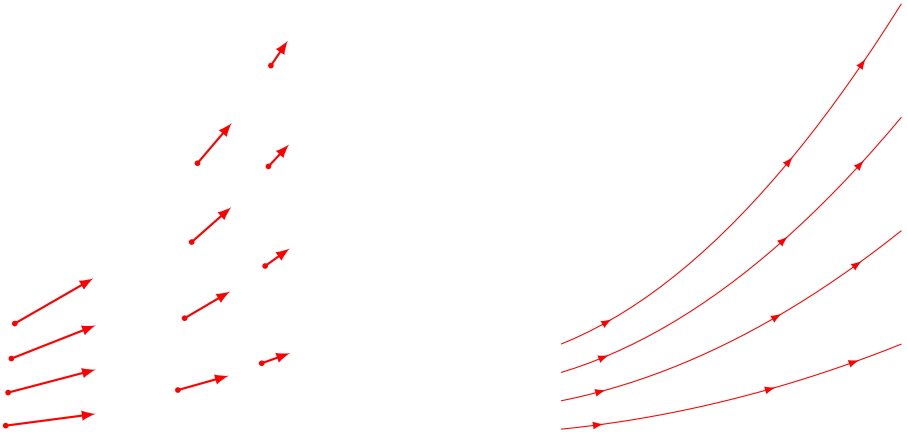
2.3. Силові лінії та математичне поняття поля

У механіці ми звикли до векторів, які описують сили, що діють на тіла. Ці вектори мають певну величину та напрямок, і ми могли переносити їх у просторі, змінюючи положення вздовж лінії дії сили, щоб їх додавати. Однак у фізиці поняття вектора набагато ширше. Наприклад, вектор напруженості $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ — це вектор, «прикріплений» до точки простору $\mathbf{r}$. В іншій точці його величина і напрямок можуть бути зовсім іншими. Кажуть, що всі ці вектори утворюють векторне поле. З математичного погляду електричне поле є полем вектора $\mathbf{E}$; оскільки $\mathbf{E}$ визначає силу, що діє на заряд, це поле називають *силовим*.

Окрім силових полів, є й інші приклади векторних полів, такі як поле швидкостей рідини, що тече. У цьому випадку кожній точці рідини приписується вектор, що описує її швидкість у певний момент часу.

Поля можуть бути не тільки векторними, а й скалярними, коли кожній точці простору приписується не вектор, а просто число. Наприклад, температура $T(\mathbf{r})$ є скалярним полем, оскільки кожній точці простору $\mathbf{r}$ відповідає лише її числове значення, без напрямку.

Електричне поле можна зобразити графічно, накресливши в багатьох точках простору по вектору так, щоб кожен із них показував



(а) Векторне поле, представлене безліччю стрілок, довжина та напрямок яких показують величину й напрямок поля у тих точках, звідки виходять стрілки.

(б) Векторне поле, представлене силовими лініями. Густина ліній вказує величину вектора поля.

Рис. 2.5. Графічне представлення векторного поля

величину й напрямок напруженості в цій точці (рис. 2.5а). Також можна накреслити лінії, які в будь-якій точці будуть дотичними до цих векторів. Такі лінії для електричного поля називаються *силовими лініями* (рис. 2.5б). Силовій лінії надають напрямок, позначаючи стрілкою.

Силові лінії домовилися проводити так, щоб їхня густота була пропорційна величині напруженості: чим більша напруженість, тим більше ліній перетинають одиницю площі, перпендикулярної до них. Для поля точкового заряду така домовленість послідовна: усі лінії йдуть радіально, і через сферу радіуса r проходить одна й та сама їх кількість, тож густота ліній спадає як $1/r^2$ — так само, як і напруженість. Чому це правило виконується для будь-якого електростатичного поля, ми побачимо, вивчивши теорему Гаусса.

Зображуючи силові лінії поля, ми отримуємо своєрідні графіки або карти поля, які відразу наочно показують, чому дорівнює напруженість у різних частинах поля і як вона змінюється в просторі.

Вигляд картини силових ліній можна отримати в експерименті, занурюючи електроди у ванну із суспензією манної крупи в касторовій олії.

Вигляд силових ліній можна й розрахувати. Оскільки елемент лінії $d\mathbf{r}$ у кожній точці паралельний до вектора напруженості, то, ввівши деякий скалярний множник p, можна записати диференціальне рівняння:

$$d\mathbf{r} = p\mathbf{E}, \tag{2.7}$$

або в проекціях:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}. \tag{2.8}$$

Приклад аналітичного знаходження силових ліній. Нехай задано двовимірне електростатичне поле з напруженістю:

$$\mathbf{E}(x, y) = Ay\mathbf{e}_x + Ax\mathbf{e}_y, \tag{2.9}$$

де $A = \text{const}$. Знайдемо геометричний вигляд його силових ліній.

Запишемо рівняння силових ліній у проекціях на осі Ox та Oy:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y}. \tag{2.10}$$

Підставивши проєкції поля $E_x = Ay$ та $E_y = Ax$, маємо:

$$\frac{dx}{Ay} = \frac{dy}{Ax}. \tag{2.11}$$

* Скоротивши коефіцієнт A та розділивши змінні, отримуємо:

$$x\,dx = y\,dy. \tag{2.12}$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int x\,dx = \int y\,dy \implies \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C_0, \tag{2.13}$$

де C_0 — довільна стала інтегрування.

Перенесши $y^2/2$ в ліву частину та позначивши $C = 2C_0$, отримуємо рівняння сімейства силових ліній:

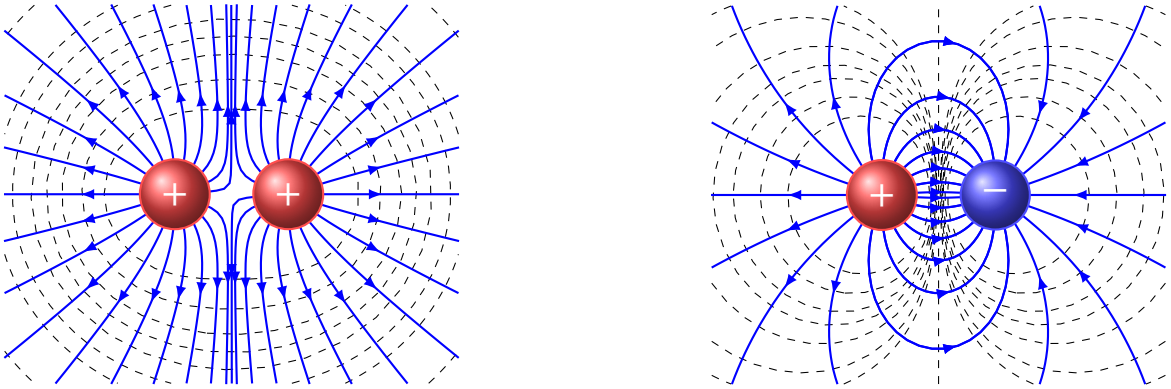
$$x^2 - y^2 = C. \tag{2.14}$$

Таким чином, силові лінії цього поля є сімейством рівносторонніх гіпербол.

На рис. 2.6 як приклад наведено картину силових ліній пари точкових зарядів, розраховану чисельно за формулою (2.8).

2.4. Теорема Гаусса

Якщо відомо розташування зарядів, то поле **E** цих зарядів може бути визначено за принципом суперпозиції. Для простих випадків це робити досить легко. Проте часто інтегрування за принципом суперпозиції стає дуже громіздким, а для складної геометрії розподілу зарядів аналітичний розрахунок узагалі неможливий. Тому



(а) Два однойменні заряди (б) Два різнойменні заряди

Рис. 2.6. Вигляд силових ліній системи двох зарядів

в теорії поля *введено допоміжні поняття та методи*, які *спрощують обчислення й аналіз* полів.

> ! *Наприклад, спробуйте обчислити за допомогою закону Кулона і принципу суперпозиції напруженість поля всередині рівномірно зарядженої кулі. Це можливо, але потребує громіздкого інтегрування по об'єму кулі з ретельним урахуванням напрямків векторів* $d\mathbf{E}$. *Теорема Гаусса, яку ми зараз виведемо, дає той самий результат у два рядки (задача 2.6).*

Потік векторного поля. Перше важливе нове поняття, яке ми введемо, — це потік вектора. Воно використовується при формулюванні найважливіших властивостей електричного, магнітного та інших векторних полів. Поняття потоку прийшло з гідродинаміки, де течію рідини можна розглядати як поле вектора швидкості $\mathbf{v}$. Порахуємо об'єм рідини dV, що протікає за час dt через поверхню S (рис. 2.7).

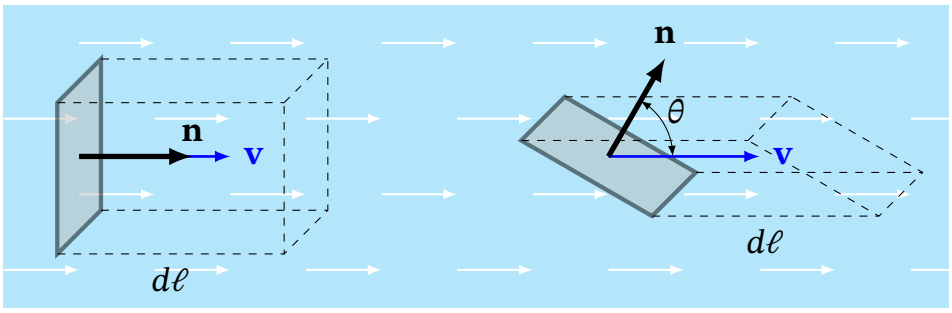


Рис. 2.7. До виведення поняття потоку вектора

З геометрії рисунка видно, що:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{Sd\ell\cos\theta}{dt} = \frac{d\ell}{dt}S\cos\theta = v_n S = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\ S = \mathbf{v}\cdot\mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{n}S.$$

Об'єм рідини $\Phi = dV/dt$, що протікає за одиницю часу через поверхню S, виражається через скалярний добуток вектора швидкості $\mathbf{v}$ і вектора площі $\mathbf{S}$ і називається *потоком вектора швидкості*.

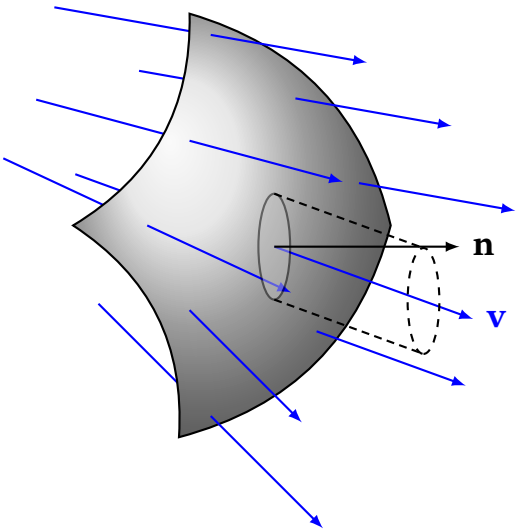


Рис. 2.8. Потік вектора **v** через довільну поверхню.

Для довільної (не обов'язково плоскої) поверхні потік через елементарну площадку $d\Phi = v_n dS = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$. А через всю поверхню S (рис. 2.8):

$$\Phi_v = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

! *Загалом, поняття потоку можна застосовувати до будь-якого векторного поля. Потік — величина скалярна. Вона залежить не тільки від конфігурації поля* **v**, *а й від вибору напрямку нормалі: зміна напрямку нормалі змінює знак потоку. У випадку замкнених поверхонь прийнято нормаль* **n** *брати назовні області, що охоплюється цими поверхнями, тобто* вибирати зовнішню нормаль, *що надалі буде завжди матися на увазі.*

Потік вектора E. Потік вектора **E** через елементарну площадку dS:

$$d\Phi = E_n dS = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

Інтеграл

$$\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_S E_n \, dS \qquad (2.15)$$

називають *потоком вектора напруженості електричного поля* **E** через поверхню S, хоча з цим поняттям і не пов'язана жодна реальна течія.

Теорема Гаусса. Потік вектора **E** крізь довільну замкнену поверхню S має таку властивість, що він залежить тільки від сумарного заряду, що охоплюється цією поверхнею:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \sum_i q_i, \qquad (2.16a)$$

де кружок біля інтеграла нагадує нам, що інтегрування проводиться по замкненій поверхні S. Це твердження має назву *теореми Гаусса*.

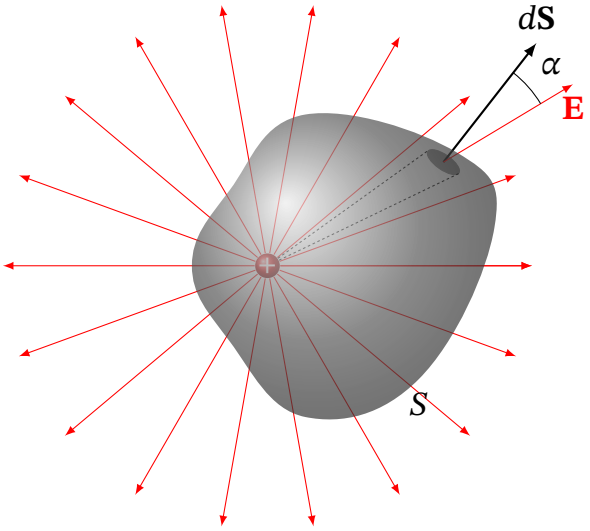


Рис. 2.9. Ілюстрація до доведення теореми Гаусса. На рисунку показано заряд усередині замкненої поверхні S. На поверхні показано довільний елемент $d\mathbf{S}$ і кут між ним та напрямом вектора $\mathbf{E}$.

Доведемо теорему. Спочатку розглянемо поле одного точкового заряду q. Оточимо цей заряд довільною замкненою поверхнею S (рис. 2.9) і знайдемо потік вектора $\mathbf{E}$ крізь елемент $d\mathbf{S}$:

$$d\Phi = \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = E dS\cos\alpha = \frac{q}{r^2}dS\cos\alpha = q d\Omega,$$

де $d\Omega = dS\cos\alpha/r^2$ — тілесний кут, під яким елемент поверхні dS видно з точки розташування заряду q. Інтегрування цього виразу по всій поверхні S еквівалентне інтегруванню по повному тілесному куту 4π: $\Phi = \int q\, d\Omega = 4\pi q$, як і вимагає (2.16а). Цей результат не залежить ні від форми поверхні, ні від положення заряду всередині неї.

Якщо ж заряд q лежить *поза* поверхнею S, то кожен вузький конус із вершиною в заряді перетинає поверхню парну кількість разів (рис. 2.10). Там, де лінії поля входять в об'єм (площадка $d\mathbf{S}_1$), $\cos\alpha_1 < 0$ і $d\Phi_1 = -q\, d\Omega$, а там, де виходять (площадка $d\mathbf{S}_2$), $\cos\alpha_2 > 0$ і $d\Phi_2 = +q\, d\Omega$: обидві площадки видно із заряду під тим самим тілесним кутом $d\Omega$. Внески цих перетинів однакові за модулем і протилежні за знаком, тому повний потік поля зовнішнього заряду дорівнює нулю: скільки силових ліній входить в об'єм, стільки й виходить.

Нарешті, для системи зарядів поле за принципом суперпозиції є сумою полів окремих зарядів, тож і потік є сумою потоків. Внутрішні заряди дають $4\pi q_i$ кожен, зовнішні — нуль, що й доводить (2.16а).

Коли заряди розподілені неперервно з об'ємною густиною $\rho(x,y,z)$, що залежить від координат, можна вважати, що кожен елементарний об'єм dV містить «точковий» заряд ρdV. Тоді в правій частині (2.16а):

$$q_V = \int\limits_V \rho dV,$$

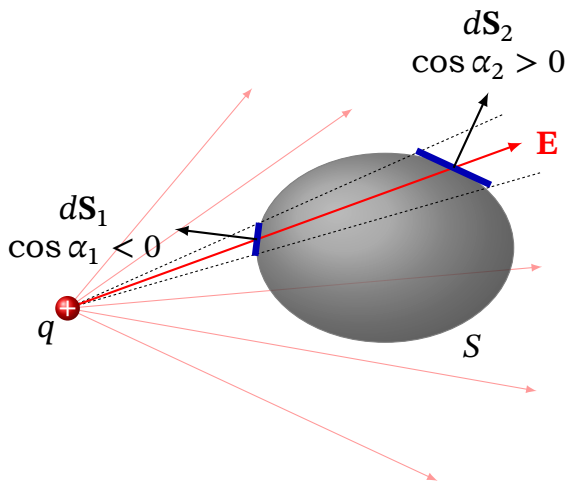


Рис. 2.10. Заряд поза замкненою поверхнею S. Вузький конус із вершиною в заряді вирізає на поверхні дві площадки: на вході ($d\mathbf{S}_1$) потік від'ємний, на виході ($d\mathbf{S}_2$) — додатний і такий самий за модулем.

де інтегрування проводиться тільки за об'ємом, який оточується замкненою поверхнею S, тоді

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi \int_V \rho dV. \qquad (2.16б)$$

Стрілка в цій формулі нагадує, що об'єм V охоплюється замкненою поверхнею S.[1]

! *Для розрахунку електричних полів системи зарядів теореми Гаусса недостатньо, бо вона є скалярним співвідношенням, чого замало для визначення трьох невідомих — складових E_x, E_y, E_z вектора* **E**. Необхідна відома симетрія задачі, *щоб остання звелася до розв'язання одного скалярного рівняння.*

Теорема Ерншоу. Нехай у вакуумі є система нерухомих точкових зарядів, що перебувають у рівновазі. Розглянемо один із цих зарядів — заряд q. Чи може стан його рівноваги бути стійким?

Оточимо заряд q невеликою замкненою поверхнею S (рис. 2.11). Нехай, для визначеності, $q > 0$. Для того щоб рівновага заряду q була

[1] У математиці межу об'єму V позначають ∂V (тобто $S = \partial V$). Межа об'єму завжди замкнена, тому кружечок на інтегралі стає зайвим, і пишуть просто $\int_{\partial V}$; саме таке позначення використано в «Інтегральні характеристики та теореми».

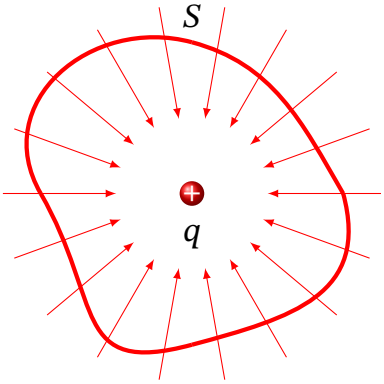


Рис. 2.11. До теореми Ерншоу

стійкою, необхідно, щоб у всіх точках поверхні S поле $\mathbf{E}$, утворене всіма іншими зарядами системи, було спрямоване до заряду q: тільки в цьому разі за будь-якого малого зсуву заряду q з положення рівноваги на нього діятиме сила, яка повертатиме його назад, і положення рівноваги справді буде стійким. Але така конфігурація поля $\mathbf{E}$ навколо заряду q суперечить теоремі Гаусса: потік вектора $\mathbf{E}$ крізь поверхню S є від'ємним, згідно ж з теоремою Гаусса він має дорівнювати нулю, оскільки цей потік створюється зарядами, розташованими поза поверхнею S. А рівність потоку вектора $\mathbf{E}$ нулю означає, що в якихось точках поверхні S вектор $\mathbf{E}$ спрямований усередину, а в якихось обов'язково назовні. Звідси випливає, що *стійка рівновага заряду в будь-якому електростатичному полі неможлива*. Це твердження має назву *теореми Ерншоу*. Вона, як видно з вищесказаного, є наслідком теореми Гаусса. Теорему можна сформулювати й інакше: *будь-яка рівноважна конфігурація точкових зарядів нестійка, якщо на них, окрім кулонівських сил, не діють інші сили.*

Важливий висновок із теореми Ерншоу: жодна нерухома конфігурація електронів і ядер не може бути стійкою, тому речовина не може складатися зі зарядів, що перебувають у спокої. Електрони мають рухатися. Проте й рух не рятує класичну модель: електрон, що обертається навколо ядра, рухається з прискоренням і мусить випромінювати електромагнітні хвилі, втрачаючи енергію (див. розділ 17). Стійкість атомів пояснює лише квантова механіка.

Зміна поля при малому зміщенні (математична довідка). Часто треба знати, як змінюється значення поля в околі певної точки. Для малих зсувів досить лінійного наближення. Для функції однієї змінної воно дається першими двома членами ряду Тейлора:

$$f(x+\varepsilon) \approx f(x) + \frac{df}{dx}\varepsilon, \quad \varepsilon \to 0.$$

Це співвідношення легко узагальнюється для випадку скалярної функції кількох просторових змінних:

$$f(x+\varepsilon_x, y+\varepsilon_y, z+\varepsilon_z) = f(x,y,z) + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\varepsilon_x + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\varepsilon_y + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\varepsilon_z,$$
$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z \to 0.$$

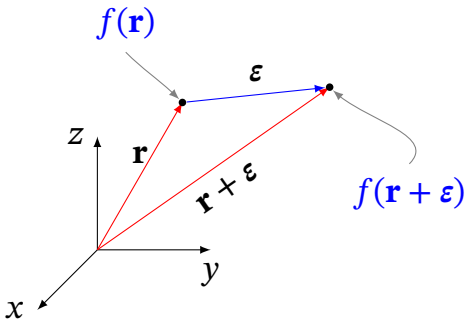


Рис. 2.12. Значення поля $f(\mathbf{r})$ у двох близьких точках простору.

Для скалярної функції $f(\mathbf{r})$ останнє співвідношення можна записати в більш лаконічному вигляді:

$$\boxed{f(\mathbf{r}+\boldsymbol{\varepsilon}) = f(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}).} \tag{2.17}$$

Для векторної функції $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ формула буде виглядати як:

$$\mathbf{f}(x+\varepsilon_x, y+\varepsilon_y, z+\varepsilon_z) = \mathbf{f}(x,y,z) + \left(\varepsilon_x\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon_y\frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{f}(x,y,z),$$

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z \to 0,$$

або в більш лаконічному вигляді:

$$\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{r}+\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}) + (\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{f}(\mathbf{r}).} \tag{2.18}$$

! *У цих формулах використано векторний оператор* набла, *який в декартових координатах має вигляд:*

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Теорема Гаусса в диференціальній формі. Виділимо в просторі нескінченно малий прямокутний паралелепіпед зі сторонами dx, dy, dz, що паралельні до координатних осей (рис. 2.13).

На грані 1 зовнішня нормаль спрямована у від'ємний бік осі y. Тому потік вектора $\mathbf{E}$ через цю грань буде $-E_y(y)dxdz$. На протилежній грані 2, навпаки, напрямок зовнішньої нормалі збігається з позитивним напрямком осі y, і для потоку через цю грань слід писати $E_y(y+dy)dxdz$. Сума обох потоків буде:

$$\left[E_y(y+dy) - E_y(y)\right]dxdz = \left(\frac{\partial E_y}{\partial y}dy\right)dxdz = \frac{\partial E_y}{\partial y}dV.$$

Тут використано формулу (2.17), де $f(y) = E_y(y)$, а $\varepsilon_y = dy$.

Аналогічно знайдуться потоки через дві пари інших граней. Повний потік через усю поверхню паралелепіпеда:

$$d\Phi = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dV = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}\;dV.$$

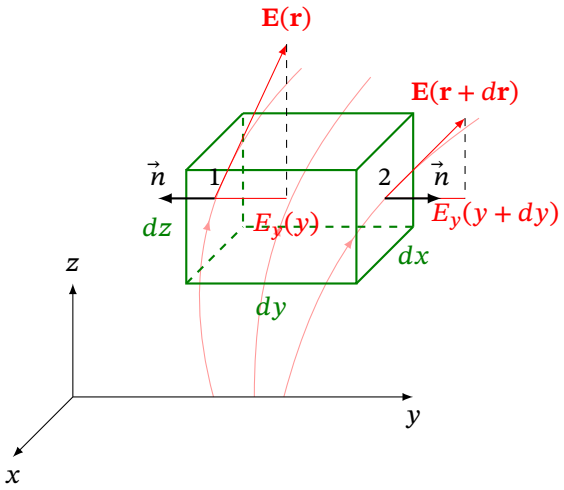


Рис. 2.13. До виведення диференціальної форми теореми Гаусса

За теоремою Гаусса той самий потік дорівнює $4\pi\rho dV$. Прирівнюючи обидва вирази, отримаємо

$$\operatorname{div}\mathbf{E} \equiv \boxed{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho.} \tag{2.19}$$

Цей вираз є *теоремою Гаусса в диференціальній формі.*

Величина $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}$ (її позначають також $\operatorname{div}\mathbf{E}$) називається дивергенцією вектора $\mathbf{E}$:

$$(\operatorname{div}\mathbf{E} \equiv)\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \tag{2.20}$$

! *Дивергенція вектора — скалярна величина!*

У диференціальній формі теорема Гаусса є *локальною теоремою*: дивергенція поля $\mathbf{E}$ у даній точці залежить тільки від густини електричного заряду ρ у тій самій точці і більше ні від чого (рис. 2.14).

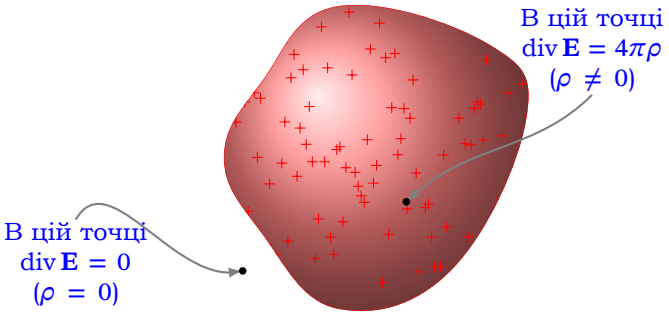


Рис. 2.14. Дивергенція поля $\mathbf{E}$ у даній точці залежить тільки від густини електричного заряду ρ у тій самій точці і більше ні від чого.

! *Ми розглянули перехід від теореми Гаусса в інтегральній формі до її диференціальної форми, аналізуючи малий паралелепіпед у просторі. У математиці існує узагальнення цього принципу, яке охоплює не лише електричні поля, але й будь-які довільні векторні поля* $\mathbf{A}$. *Ця загальна теорема, відома як* теорема Остроградського–Гаусса *(або* теорема про дивергенцію*), дозволяє пов'язати потік векторного поля через замкнену*

поверхню S з об'ємним інтегралом від його дивергенції:

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A}\, dV, \tag{2.21}$$

де S — замкнена поверхня, V — об'єм, обмежений цією поверхнею, а $\mathbf{A}$ — довільне векторне поле. Формула дозволяє переходити від інтегральних форм до диференціальних.

2.5. Зауваження щодо інтегральної та диференціальної форм теореми Гаусса

Теорема Гаусса в диференціальній формі є наслідком теореми в інтегральній формі. Обидві форми математично еквівалентні. Але диференціальна форма має сенс лише в тому випадку, коли заряд розподілений у просторі зі скінченною густиною ρ. Якщо ρ обертається на нескінченність в окремих точках, на лініях або поверхнях (точкові заряди, заряджені нитки й поверхні), то диференціальна форма стає незастосовною, тоді як інтегральну форму можна застосовувати і в таких випадках.[1] У цьому сенсі інтегральна форма має більшу математичну загальність, ніж диференціальна. Однак розподіли заряду з нескінченно великими значеннями ρ є математичними абстракціями й у фізиці повинні розглядатися як граничні випадки неперервних розподілів з усюди скінченними значеннями ρ. Якщо це мати на увазі, то можна стверджувати, що інтегральна і диференціальна форми теореми Гаусса повністю еквівалентні.

2.6. Потенціальність електростатичного поля

Робота сил поля, що виконується при переміщенні заряду q шляхом L в полі $\mathbf{E}$, дорівнює

$$A = \int_L q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r},$$

де знак L біля інтеграла означає, що необхідно обчислити суму значень підінтегрального виразу для всіх елементів кривої L (рис. 2.15). Ця операція називається інтегруванням вздовж довільної кривої L, а інтеграл називається *криволінійним*.

Розглянемо поле точкового заряду Q (2.3). Для зручності помістимо його у початок координат $\mathbf{r}' = 0$, тоді $\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{r}}{r^3}$ і робота при

[1] З використанням так званих узагальнених функцій диференціальну форму теореми Гаусса можна поширити й на ці випадки.

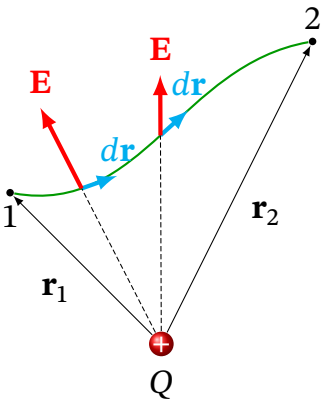


Рис. 2.15. До обчислення роботи сил поля з переміщення пробного заряду.

переміщенні пробного заряду в полі точкового заряду Q дорівнює (рис. 2.15):

$$A = q\int\limits_L \frac{Q}{r^3}\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = q\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{Q}{r^2}dr = q\left(\frac{Q}{r_1}-\frac{Q}{r_2}\right), \tag{2.22}$$

де враховано, що $\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = r\,dr$, у чому легко переконатися, диференціюючи тотожність $\mathbf{r}^2 = r^2$. Підінтегральний вираз залежить лише від r, тому ця *робота не залежить від траєкторії*, що з'єднує початкову і кінцеву точки, а лише від відстаней r_1 і r_2. Силові поля, що задовольняють таку умову, називаються *потенціальними* або *консервативними*. Отже, поле точкового заряду — *потенціальне*. За принципом суперпозиції поле будь-якої системи нерухомих зарядів є сумою полів точкових зарядів, а робота — сумою робіт, кожна з яких не залежить від траєкторії; отже, будь-яке електростатичне поле також потенціальне.

У потенціальному полі робота дорівнює зміні потенціальної енергії з протилежним знаком:

$$A = \int\limits_L q\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = U_1 - U_2 = -\Delta U. \tag{2.23}$$

Потенціальна енергія пробного заряду пропорційна q, тому відношення U/q від пробного заряду не залежить і характеризує саме поле. Його називають *потенціалом*:

$$\boxed{\varphi = \frac{U}{q},} \tag{2.24}$$

і формула (2.23) тоді прийме вигляд

$$\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}.} \tag{2.25}$$

Величину $\varphi_1 - \varphi_2$ називають різницею потенціалів між точками 1 та 2, а робота сил електростатичного поля при переміщенні пробного заряду q довільним шляхом з початкової точки 1 у кінцеву точку 2 дорівнює

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{2.26}$$

Потенціалу будь-якої довільної точки $\mathbf{r}_0$ поля можна умовно приписати будь-яке значення φ_0. Тоді потенціали всіх інших точок поля визначаються згідно з (2.25) однозначно. Якщо змінити φ_0 на деяку величину C, то на таку саму величину зміняться і потенціали в усіх інших точках поля. Таким чином, потенціал φ визначається з точністю до довільної адитивної сталої. Значення цієї сталої не відіграє ролі, оскільки всі електричні явища залежать від різниці потенціалів.

Оскільки електростатичне поле консервативне, то при русі пробного заряду q масою m зі швидкістю $\mathbf{v}$ у такому полі його повна енергія W зберігається:

$$W = T + U = \frac{mv^2}{2} + q\varphi = \text{const}, \tag{2.27}$$

де $T = \frac{mv^2}{2}$ — кінетична енергія пробного заряду, а $U = q\varphi$ його потенціальна енергія.

У випадку точкового заряду, або просторово обмеженої системи зарядів за початок відліку потенціалу зручно вибрати нескінченно віддалену точку, вважаючи $\varphi(\mathbf{r}_0 \to \infty) = 0$. Як видно з (2.22), потенціал поля точкового заряду Q можна записати як $\varphi = \frac{Q}{r}$, або для довільного положення заряду, яке задається радіус-вектором $\mathbf{r}'$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{2.28}$$

З принципу суперпозиції напруженості поля і формули (2.25) випливає принцип суперпозиції для потенціалу:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \tag{2.29}$$

У випадку неперервного розподілу заряду потенціал можна знайти як

$$\varphi = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{2.30}$$

Зв'язок напруженості та потенціалу. Формула (2.25) справедлива не тільки для скінченних переміщень, а й для елементарних $d\mathbf{r}$. Тоді

згідно з цією формулою елементарний спад потенціалу на цьому переміщенні дорівнює

$$-d\varphi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \tag{2.31}$$

З іншого боку, за формулою (2.17) зміна потенціалу при зміщенні $d\mathbf{r}$ дорівнює $d\varphi = \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r}$. Порівнюючи ці вирази для довільного $d\mathbf{r}$, отримаємо зв'язок між векторною та скалярною характеристиками поля:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla\varphi} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_z\right). \tag{2.32}$$

Еквіпотенціальні поверхні. *Еквіпотенціальною поверхнею* називають поверхню, в усіх точках якої потенціал φ має одне й те саме значення.

Силові лінії перпендикулярні до еквіпотенціальних поверхонь. Справді, для будь-якого зміщення $d\mathbf{r}$ уздовж еквіпотенціальної поверхні, за формулою (2.31),

$$\varphi = \text{const} \Rightarrow -d\varphi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} \perp d\mathbf{r}.$$

Оскільки це справджується для будь-якого дотичного до поверхні зміщення, вектор $\mathbf{E}$ напрямлений по нормалі до поверхні.

Якщо ж переміщуватися по нормалі до еквіпотенціальної поверхні в бік зменшення φ, то $d\varphi < 0$ і, згідно з (2.31), $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} > 0$. Отже, вектор $\mathbf{E}$ у кожній точці напрямлений по нормалі до еквіпотенціальної поверхні саме в бік зменшення потенціалу φ (рис. 2.16, де $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \varphi_4 < \varphi_5$).

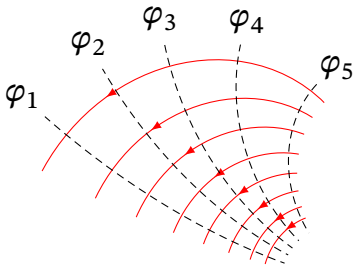
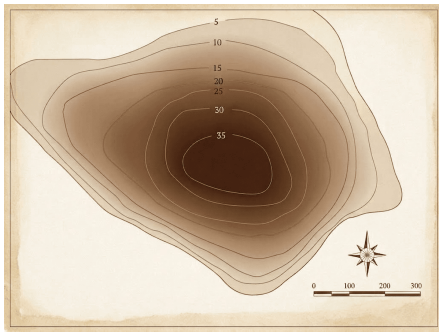


Рис. 2.16. Силові лінії та еквіпотенціальні поверхні

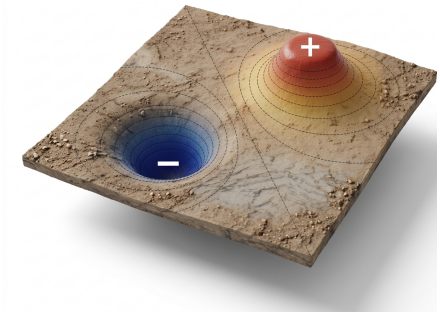
Еквіпотенціальні поверхні проводять так, щоб різниця потенціалів для двох сусідніх поверхонь була однаковою. Тоді за густотою еквіпотенціальних поверхонь можна наочно судити про значення напруженості поля в різних точках: там, де ці поверхні розташовані густіше, напруженість поля більша.

Картина еквіпотенціальних поверхонь в електростатичному полі є аналогом рельєфу на поверхні землі (рис. 2.17). Подібно до ліній рівня висоти на топографічній карті (рис. 2.17а), еквіпотенціальні поверхні в електростатичному полі відображають місця з однаковим

значенням потенціалу φ (рис. 2.17б). Напрямок електричного поля **E** у цьому порівнянні відповідає найкрутішому спуску зі схилу, а його величина визначає крутизну цього спуску. Наприклад, у місцевості зі стрімкими горами лінії висоти розташовані щільніше, що вказує на крутий схил; аналогічно в електростатичному полі, щільність еквіпотенціальних поверхонь вказує на більшу напруженість поля. Така аналогія не дивна, адже потенціал гравітаційного поля безпосередньо пов'язаний із висотою: для однорідного гравітаційного поля потенціал пропорційний висоті точки над рівнем моря, $\varphi_g = gh$. Еквіпотенціальні поверхні у цьому випадку — горизонтальні площини, а їхні перетини з рельєфом — лінії рівня (горизонталі) на карті.



(а) Карта висот на ландшафті.



(б) Еквіпотенціальні поверхні — карта висот в електростатичному полі.

Рис. 2.17. Ландшафти в гравітаційному та електричному полях

Потенціал електричного поля є *неперервною функцією простору*. Якби потенціал мав розрив у якій-небудь точці, то градієнт потенціалу, а отже, згідно з (2.32), і напруженість поля в цій точці були б нескінченно великими. Нескінченно велике поле в реальних умовах неможливе, тому потенціал змінюється неперервно. Винятками є лише ідеалізації: у точці розташування точкового заряду $\varphi \to \infty$, а стрибок потенціалу дає так званий подвійний електричний шар (дві близькі протилежно заряджені поверхні). Зауважимо, що звичайна заряджена поверхня спричиняє стрибок напруженості **E** (див. § «Граничні умови»), але не потенціалу.

2.7. Циркуляція вектора E

Оскільки робота поля над зарядом не залежить від форми траєкторії, то для *довільної замкненої траєкторії* L (рис. 2.18) маємо

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 \tag{2.33}$$

Цей інтеграл називається *циркуляцією вектора* **E** *по контуру* L, а рівність називається *теоремою про циркуляцію в інтегральній формі*.

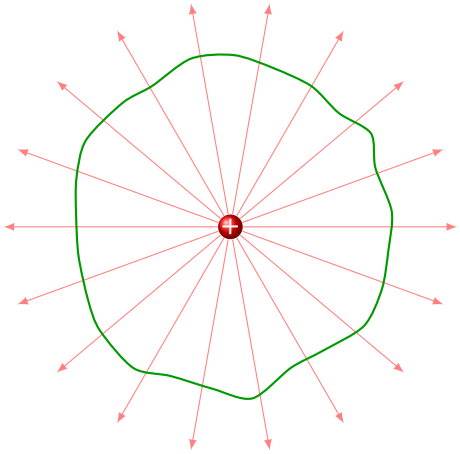


Рис. 2.18. До поняття циркуляції вектора **E**. На рисунку показано довільний контур L, вздовж якого переноситься пробний заряд.

Теорема про циркуляцію в диференціальній формі. Нехай замкнений контур $L(S)$ охоплює малу поверхню площею S. Вектор **S** спрямований за нормаллю до розглянутої площадки і за величиною дорівнює площі цієї площадки: $\mathbf{S} = \mathbf{n}S$, $|\mathbf{n}| = 1$. Напрямок вектора **S** задається позитивним напрямком обходу контуру L і визначається правилом гвинта.

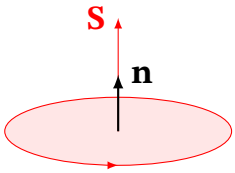


Рис. 2.19. Орієнтована площадка

Виділимо в площині xy нескінченно малий прямокутний контур зі сторонами dx, dy, що паралельні до координатних осей (рис. 2.20).

Обчислимо циркуляцію вектора **E** вздовж контуру $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ проти годинникової стрілки.

На стороні 1–2 (нижня, обхід у позитивному напрямку осі x) дотична складова поля дає внесок $E_x(x, y)\,dx$. На протилежній стороні 3–4 (верхня) обхід іде у від'ємному напрямку осі x, тому внесок дорівнює

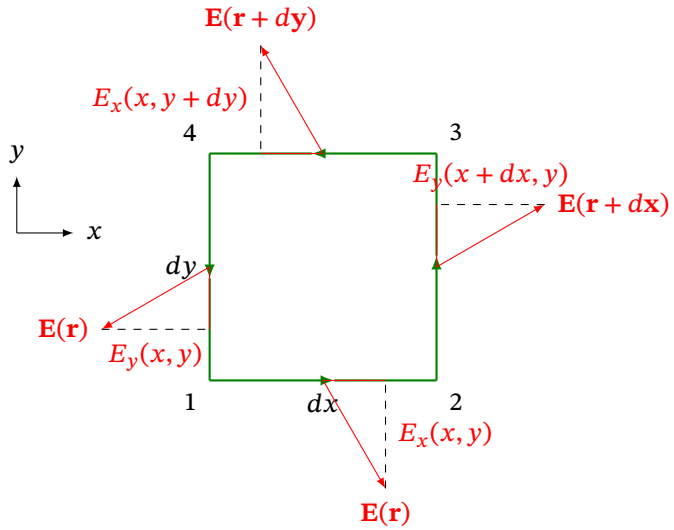


Рис. 2.20. До введення ротора через циркуляцію

$-E_x(x, y+dy)\,dx$. Сума цих двох внесків:

$$-\left[E_x(x, y+dy) - E_x(x, y)\right] dx = -\left(\frac{\partial E_x}{\partial y} dy\right) dx = -\frac{\partial E_x}{\partial y} dS.$$

Тут використано формулу (2.17), де $f(y) = E_x(x, y)$ і $\varepsilon_y = dy$, а $dS = dx\,dy$ — площа контуру.

Аналогічно, на стороні 2–3 (права, обхід у позитивному напрямку осі y) внесок дорівнює $E_y(x + dx, y)\,dy$, а на стороні 4–1 (ліва, обхід у від'ємному напрямку осі y) внесок дорівнює $-E_y(x, y)\,dy$. Сума:

$$\left[E_y(x + dx, y) - E_y(x, y)\right] dy = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} dx\right) dy = \frac{\partial E_y}{\partial x} dS.$$

Повна циркуляція вздовж усього контуру:

$$d\Gamma = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) dS = (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E})_z\, dS.$$

Величину $(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E})_z$ можна розглядати як z-компоненту вектора $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}$ (ротора вектора $\mathbf{E}$), який визначається як границя відношення циркуляції вектора вздовж малого замкненого контуру до площі цього контуру, коли нормаль до контуру $\mathbf{n}$ напрямлена вздовж відповідної осі (тут — вздовж осі z, за правилом правого гвинта відносно напрямку обходу):

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E})_n = \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

Проводячи аналогічні міркування для контурів у площинах yz та zx, отримаємо решту компонент, і в результаті повний вираз для ротора у декартових координатах:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \mathbf{e}_z. \qquad (2.34)$$

! *Ротор вектора — це вектор!*

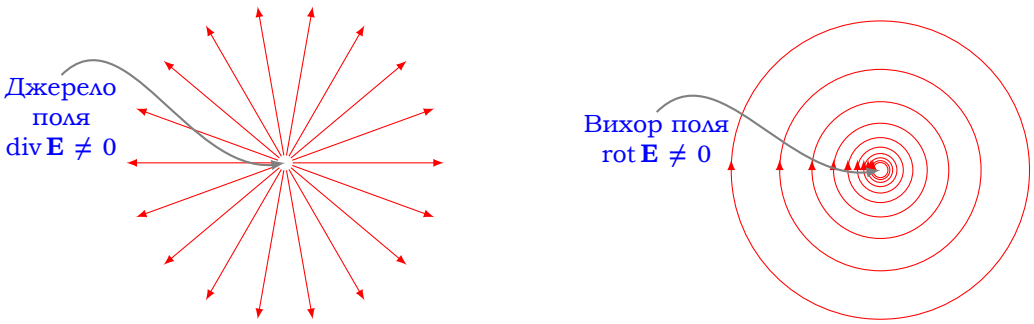
Для електростатичного поля циркуляція по будь-якому замкненому контуру дорівнює нулю, тому й границя в означенні ротора дорівнює нулю: $(\nabla \times \mathbf{E})_n = 0$. Контур, а отже, і напрямок нормалі $\mathbf{n}$ можна обрати довільно, тому всі проєкції ротора дорівнюють нулю, тобто

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} \equiv \boxed{\nabla \times \mathbf{E} = 0.}$$

! *Ми розглянули перехід від циркуляції векторного поля по замкненому контуру до його ротора через граничний перехід при стягуванні контуру в точку. У математиці існує узагальнення цього принципу для довільного векторного поля* $\mathbf{A}$. *Ця загальна теорема, відома як* теорема Стокса, *дозволяє пов'язати циркуляцію векторного поля вздовж замкненого контуру* L *з поверхневим інтегралом від його ротора:*

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}, \tag{2.35}$$

де L *— замкнений контур,* S *— орієнтована поверхня, обмежена цим контуром, а* $\mathbf{A}$ *— довільне векторне поле. Формула дозволяє переходити від інтегральних форм до диференціальних.*



(а) Потенціальне поле (б) Вихрове поле

Рис. 2.21. Приклад силових ліній потенціального та вихрового полів

Потенціальні та вихрові поля. Лінії поля або десь починаються і десь закінчуються, або є замкненими. Так, наприклад, заряди створюють електричне поле, лінії якого починаються або закінчуються на цих зарядах (або в нескінченності). Далі в курсі ми познайомимося з магнітним полем і навіть з електричним полем, яке не створюється зарядами. Лінії таких полів замкнені. Точки, у яких лінії поля починаються (або закінчуються), називають *джерелами (або стоками) поля*; у них $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$. Лінії, що замикаються самі на себе, утворюють *вихори поля*; там, де є вихори, $\nabla \times \neq 0$. Поле, яке не має вихорів ($\nabla \times \mathbf{E} = 0$),

називають *потенціальним*: його лінії не можуть бути замкненими, вони починаються на джерелах і закінчуються на стоках (або в нескінченності). Поле, яке не має джерел ($\nabla\cdot = 0$) і лінії якого замкнені, називають *вихровим* (рис. 2.21). У загальному випадку поле може мати і джерела, і вихори.

! *Зверніть увагу: умова* $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ *виражає ту саму потенціальність поля, яку ми вже встановили в §* 2.6 *через незалежність роботи від траєкторії. Справді, там було доведено існування потенціалу* φ *такого, що* $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$*, а тоді рівність* $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ *випливає з тотожності* $\nabla \times (\nabla\varphi) \equiv 0$*, справедливої для довільної двічі диференційованої функції* φ*. І навпаки, якщо* $\nabla \times \mathbf{E} = 0$*, то за теоремою Стокса циркуляція по будь-якому контуру дорівнює нулю, а отже, робота не залежить від траєкторії.*[a] *Таким чином, незалежність роботи від траєкторії,* $\oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = 0$*,* $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ *та існування потенціалу* $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ *— це чотири еквівалентні означення потенціальності поля.*

[a] Це міркування потребує, щоб на будь-який контур можна було «натягнути» поверхню, яка цілком лежить в області, де $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ (так звана однозв'язна область). Для електростатичного поля у всьому просторі ця умова виконується.

2.8. Граничні умови

На зарядженій поверхні (а надалі — і на межі розділу двох середовищ) електричне поле може змінюватися стрибком, але цей стрибок скінченний. Такі *стрибки називаються розривами першого роду*: значення поля з одного боку поверхні відрізняється від значення з іншого боку, але по обидва боки поле залишається скінченним. З'ясуємо, які саме складові поля зазнають стрибка і наскільки. Позначимо через $\mathbf{n}$ одиничну нормаль до поверхні, напрямлену від області 1 до області 2.

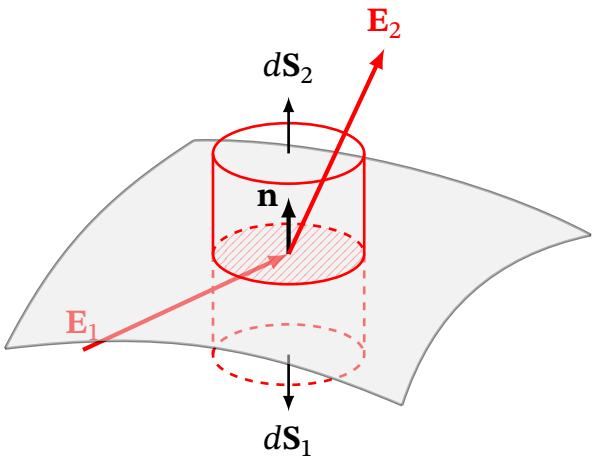


Рис. 2.22. До виведення першої граничної умови

Застосуємо теорему Гаусса до поверхні S нескінченно малого циліндра, що охоплює частину поверхні (рис. 2.22). Висоту циліндра спрямуємо до нуля, тоді потоком через його бічну поверхню можна знехтувати, і залишаються лише потоки через основи площею dS. Оскільки $d\mathbf{S}_2 = \mathbf{n}\,dS$, $d\mathbf{S}_1 = -d\mathbf{S}_2$, а заряд усередині циліндра $q = \sigma dS$, маємо

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi\sigma dS \;\Rightarrow \mathbf{E}_1\cdot d\mathbf{S}_1 + \mathbf{E}_2\cdot d\mathbf{S}_2 \equiv (\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)\cdot\mathbf{n}\,dS = 4\pi\sigma dS.$$

Звідси випливає перша гранична умова:

$$\boxed{E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma.} \tag{2.36}$$

Нормальна складова вектора $\mathbf{E}$ зазнає стрибка при переході через заряджену границю розділу. Однак якщо заряди на межі розділу відсутні ($\sigma = 0$), то $E_{1n} = E_{2n}$ і стрибка не буде.

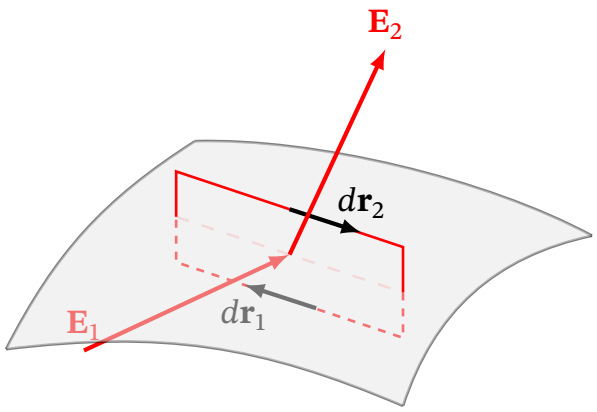


Рис. 2.23. До виведення другої граничної умови

Застосуємо теорему про циркуляцію до нескінченно малого прямокутного контуру L, довгі сторони якого проходять на нескінченно малій відстані над і під поверхнею (рис. 2.23). Внеском коротких сторін, довжина яких прямує до нуля, можна знехтувати. Оскільки $d\mathbf{r}_2 = -d\mathbf{r}_1$, позначимо $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_2 = \tau d\ell$ і отримаємо

$$\oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = 0 \Rightarrow \mathbf{E}_1\cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{E}_2\cdot d\mathbf{r}_2 \equiv (\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)\cdot d\mathbf{r} \equiv (\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)\cdot\tau d\ell = 0,$$

де $\boldsymbol{\tau}$ — це одиничний вектор, дотичний до поверхні розділу, $d\ell$ — елемент контуру.

Звідси випливає друга гранична умова $(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)\cdot\boldsymbol{\tau} = 0$, або еквівалентна форма:

$$\boxed{E_{1\tau} = E_{2\tau}.} \tag{2.37}$$

Тангенціальна складова $\mathbf{E}$ виявляється однаковою по обидва боки границі розділу (не зазнає стрибка).

2.9. Рівняння Пуассона та Лапласа

Підставимо $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$ у теорему Гаусса $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho$: $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi = -\nabla^2\varphi$. Звідси випливає *рівняння Пуассона для потенціалу поля*:

$$\boxed{\nabla^2\varphi = -4\pi\rho.} \tag{2.38}$$

! *Тут введено оператор Лапласа (лапласіан)*

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

У області простору, вільній від зарядів ($\rho = 0$), рівняння Пуассона зводиться до *рівняння Лапласа*

$$\boxed{\nabla^2\varphi = 0.} \tag{2.39}$$

Рівняння Лапласа має безліч розв'язків (наприклад, $\varphi = \text{const}$, $\varphi = ax$, $\varphi = Q/r$ поза точкою $r = 0$), і рівняння Пуассона з тією самою правою частиною теж. Щоб із цієї множини вибрати один розв'язок, у конкретній фізичній задачі задають *граничні умови* на поверхні, що обмежує область: на кожній ділянці цієї поверхні задають *або* значення потенціалу φ, *або* нормальну складову напруженості $E_n = -\partial\varphi/\partial n$. Виявляється, що цього досить: розв'язок рівняння Пуассона (Лапласа), який задовольняє граничні умови, *єдиний*.[1] Це твердження називають *теоремою єдиності*.

Теорема єдиності має велике практичне значення. Якщо якимось способом — з міркувань симетрії, за аналогією чи просто здогадавшись — ми знайшли функцію, яка задовольняє рівняння Пуассона (або Лапласа) і граничні умови, то вона і є *правильним розв'язком*, і шукати інші не потрібно. Саме на цьому ґрунтуються метод зображень (розділ 4) та більшість «вгаданих» розв'язків задач електростатики.

* **Чому розв'язок єдиний**. Розглянемо випадок, коли на межі задано потенціал. Нехай φ_1 і φ_2 — два розв'язки з однаковими ρ і граничними умовами. Їхня різниця $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ задовольняє рівняння Лапласа $\nabla^2\psi = 0$, а на межі області $\psi = 0$. Розв'язки рівняння Лапласа не мають максимумів і мінімумів усередині області (потенціал у точці дорівнює середньому значенню на малій сфері навколо неї), тому найбільше й найменше значення ψ досягаються на межі, де $\psi = 0$. Отже, $\psi \equiv 0$ усюди, тобто $\varphi_1 = \varphi_2$. (Ця властивість розв'язків рівняння Лапласа — ще

[1] Якщо всюди на межі задано лише E_n, потенціал визначається з точністю до сталої, що не впливає на поле.

* одна форма теореми Ерншоу: у вільній від зарядів області потенціальна енергія заряду $q\varphi$ не має мінімуму.)

2.10. Повна система рівнянь електростатичного поля у вакуумі

Електростатика досліджує взаємодію нерухомих зарядів та полів, які вони створюють. Основою цього розділу є система рівнянь, що описує властивості електростатичного поля у вакуумі. Ці рівняння формулюються в інтегральній та диференціальній формах.

Інтегральна форма рівнянь. Інтегральні рівняння визначають такі характеристики поля, як потік і циркуляція. У випадку електростатичного поля вони формулюються так:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \int_V \rho dV, \tag{2.40}$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0. \tag{2.41}$$

Перше рівняння — це теорема Гаусса, яка пов'язує потік напруженості через замкнену поверхню S із загальним зарядом в об'ємі V. Друге рівняння стверджує, що циркуляція електростатичного поля по довільному замкненому контуру L дорівнює нулю.

Диференціальна форма рівнянь. Диференціальні рівняння визначають такі характеристики поля, як дивергенція і ротор, які є локальними характеристиками:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{2.42}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \tag{2.43}$$

Перше рівняння відображає зв'язок густини заряду ρ з дивергенцією напруженості в даній точці простору, тоді як друге стверджує, що електростатичне поле в жодній точці не має вихорів.

Граничні умови. Для повного визначення задачі диференціальні рівняння мають бути доповнені граничними умовами на заряджених поверхнях (і поверхнях розділу середовищ):

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma, \tag{2.44}$$

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}. \tag{2.45}$$

Тут E_{1n} та E_{2n} — нормальні компоненти напруженості по обидва боки поверхні, σ — поверхнева густина заряду, а $E_{1\tau}$ та $E_{2\tau}$ — тангенціальні компоненти.

Потенціал і рівняння Пуассона. Умова $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ рівносильна існуванню скалярного потенціалу φ, зв'язаного з напруженістю поля співвідношенням $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Підстановка його в теорему Гаусса дає замість двох рівнянь для вектора $\mathbf{E}$ одне рівняння для скалярної функції φ — рівняння Пуассона (2.38), яке в області без зарядів переходить у рівняння Лапласа (2.39). Разом із граничними умовами воно, за теоремою єдиності, повністю визначає електростатичне поле.

Підсумки

Взаємодія зарядів передається *електричним полем* — фізичним об'єктом, що існує в кожній точці простору. Кількісно його задає *напруженість* $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$ (2.1), тобто сила, що діє на одиничний пробний заряд. Для напруженості справджується *принцип суперпозиції*: поле системи зарядів дорівнює векторній сумі полів окремих зарядів. Наочне уявлення про поле дають *силові лінії*, що починаються на додатних зарядах і закінчуються на від'ємних (або йдуть у нескінченність).

Джерелами електростатичного поля є заряди, і цей зв'язок виражає *теорема Гаусса*: потік $\mathbf{E}$ крізь довільну замкнену поверхню дорівнює 4π, помноженому на повний заряд усередині неї. У диференціальній формі вона має вигляд $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ (2.42) і зв'язує поле із густиною заряду в кожній точці. Інтегральна форма має більшу математичну загальність (вона застосовна й до точкових зарядів, заряджених ниток і поверхонь), але для фізичних розподілів обидві форми еквівалентні. Із самої теореми Гаусса випливає *теорема Ерншоу*: стійка рівновага заряду під дією лише електростатичних сил неможлива, тому, зокрема, речовина не може складатися з нерухомих зарядів.

Друга фундаментальна властивість поля — його *потенціальність*. Робота сил електростатичного поля не залежить від траєкторії, а це рівносильне трьом іншим твердженням: $\oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = 0$, $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ (2.43) та існування потенціалу, $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Потенціал визначено з точністю до адитивної сталої, а еквіпотенціальні поверхні скрізь перпендикулярні до силових ліній. Безвихровий характер поля означає, що його лінії не можуть бути замкненими, на відміну від ліній вихрових полів.

Для повного опису поля на заряджених поверхнях (і на межі двох середовищ) рівняння доповнюють *граничними умовами*: стрибок нормальної складової $E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$ (наслідок теореми Гаусса)

і неперервність тангенціальної, $E_{2\tau} = E_{1\tau}$ (наслідок теореми про циркуляцію). Підстановка $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ в теорему Гаусса дає *рівняння Пуассона* $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$ (2.38), а в області без зарядів — *рівняння Лапласа* (2.39). За *теоремою єдиності* розв'язок, що задовольняє рівняння й граничні умови (задані на межі значення φ або E_n), єдиний, тому його можна знаходити довільним способом, зокрема вгадуванням.

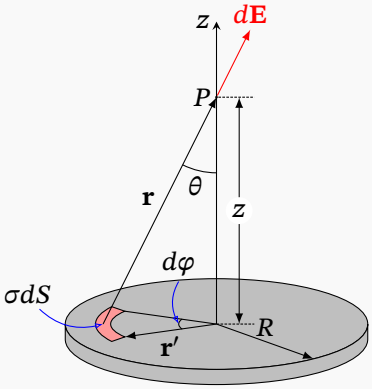
Система рівнянь електростатики є окремим випадком більш загальної системи рівнянь Максвелла для електромагнітного поля, коли часові похідні полів дорівнюють нулю. У цьому випадку електричне поле описується лише розподілом зарядів. В електростатиці принцип близькодії неочевидний, бо закон Кулона має вигляд далекодії. Повною мірою він проявляється в нестаціонарних процесах, де змінне поле поширюється зі скінченною швидкістю у вигляді електромагнітних хвиль.

Задачі

2.1. Використовуючи теорему Гаусса в диференціальній формі, знайдіть напруженість та потенціал електричного поля всередині та зовні однорідно зарядженої кулі. Заряд кулі дорівнює Q, радіус кулі R. Майте на увазі, що поле в центрі кулі не може бути нескінченним.

2.2. Тонкий напівнескінченний стрижень рівномірно заряджений з лінійною густиною λ. На продовженні осі стрижня на відстані l від його кінця знаходиться точковий заряд q. Знайдіть силу взаємодії зарядженого стрижня і точкового заряду. Обчисліть її для $\lambda = 10$ мкКл/м, $l = 20$ см, $q = 10$ нКл (у СІ закон Кулона містить множник $1/4\pi\varepsilon_0 \approx 9 \cdot 10^9$ Н·м^2/Кл^2).

2.3. Нехай є тонкий диск радіуса R, поверхнею якого рівномірно розподілено заряд Q. Знайдіть електричне поле на осі диска на відстані z від його площини.



2.4. Заряд q знаходиться на осі кільця радіусом R. Відстань від заряду до центра кільця дорівнює z. Знайдіть потік електричного поля через плоску поверхню, обмежену кільцем.

2.5. Заряд q знаходиться в центрі циліндра висотою h. Радіус основи циліндра R. Знайдіть потік вектора напруженості через бічну поверхню циліндра.

Вказівка: скористайтеся розв'язком задачі 2.4.

2.6. За допомогою теореми Гаусса в інтегральній формі знайдіть напруженість поля $\mathbf{E}$ усередині та поза межами кулі радіуса R, зарядженої рівномірно з об'ємною густиною ρ. Порівняйте з результатом задачі 2.1: який спосіб простіший?

2.7. Обчисліть дивергенцію радіус-вектора.

2.8. Знайдіть дивергенцію вектора напруженості поля точкового заряду $\mathbf{E} = \frac{q}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$ в області $r > 0$ шляхом взяття часткових похідних. Яке значення дивергенції при $r \to 0$?

2.9. Яку мінімальну швидкість повинен мати електрон, що перебуває на відстані $4R$ від центра металевої сфери радіуса R, щоб він міг досягти її поверхні? Сфера заряджена до потенціалу -400 В (потенціал на нескінченності вважайте нульовим).

2.10. Яка прискорювальна різниця потенціалів потрібна для того, щоб надати електрону, що спочатку перебував у спокої, швидкість 10^8 см/с?

2.11. Помістимо точковий заряд Q у початок координат. Потенціал поля цього заряду $\varphi = \frac{Q}{r}$. Використовуючи формулу зв'язку напруженості та потенціалу, знайдіть напруженість поля точкового заряду.

2.12. Обчисліть ротор радіус-вектора.

Контрольні питання

1. Дайте означення напруженості електричного поля через силу, що діє на пробний заряд. Чому пробний заряд має бути малим, щоб не спотворювати поле, яке він досліджує?

2. Виведіть напруженість поля точкового заряду із закону Кулона. Сформулюйте принцип суперпозиції для дискретної та неперервної системи зарядів.

3. Що таке силові лінії електричного поля? Як пов'язана густота силових ліній з величиною напруженості, і як записати диференціальне рівняння силових ліній $dx/E_x = dy/E_y = dz/E_z$?

4. Що таке потік вектора поля? Виведіть означення потоку швидкості рідини через поверхню й перенесіть його на потік вектора напруженості $\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$.

5. Доведіть теорему Гаусса $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \sum q_i$, розглядаючи потік поля точкового заряду через тілесний кут. Чому потік поля зовнішнього заряду дорівнює нулю? Чому теореми Гаусса недостатньо для знаходження поля без додаткової симетрії задачі?

6. Сформулюйте теорему Ерншоу: чому стійка рівновага заряду в електростатичному полі неможлива? Чому з неї випливає, що речовина не може складатися з нерухомих зарядів, і чому класична фізика не може пояснити стійкість атома?

7. Виведіть диференціальну форму теореми Гаусса $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$, розглядаючи потік через нескінченно малий паралелепіпед. Що означає локальність цієї форми теореми?

8. Сформулюйте теорему Остроградського–Гаусса для довільного векторного поля. Чому інтегральна форма теореми Гаусса має більшу математичну загальність, ніж диференціальна, у випадку розривних розподілів заряду?

9. Доведіть, що робота сил електростатичного поля при переміщенні заряду не залежить від траєкторії, — тобто що поле точкового заряду потенціальне. Як з принципу суперпозиції випливає потенціальність будь-якого електростатичного поля?

10. Дайте означення потенціалу як потенціальної енергії одиничного заряду, $\varphi = U/q$. Чому потенціал визначається лише з точністю до довільної адитивної сталої, і як зазвичай обирають початок відліку?

11. Виведіть закон збереження повної енергії зарядженої частинки в електростатичному полі, $W = mv^2/2 + q\varphi = \text{const}$.

12. Запишіть принцип суперпозиції для потенціалу дискретної та неперервної системи зарядів.

13. Виведіть зв'язок напруженості й потенціалу $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$. Чому потенціал — неперервна функція простору, за винятком точок розташування точкових зарядів?

14. Що таке еквіпотенціальні поверхні? Доведіть, що силові лінії зав-

жди перпендикулярні до них і напрямлені в бік спадання потенціалу.

15 У чому полягає аналогія між картиною еквіпотенціальних поверхонь в електростатиці та рельєфом місцевості (лініями рівня висоти)?

16 Виведіть теорему про циркуляцію електростатичного поля в інтегральній формі $\oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = 0$ з незалежності роботи поля від траєкторії.

17 Виведіть диференціальну форму теореми про циркуляцію $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = 0$, стягуючи контур циркуляції в точку. Сформулюйте теорему Стокса для довільного векторного поля.

18 Чим потенціальні поля відрізняються від вихрових за характером ліній поля (джерела й стоки проти замкнених ліній)? Яка з умов $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 0$, $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = 0$ відповідає кожному з них?

19 Виведіть першу граничну умову $E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$ для нормальної складової поля на межі розділу середовищ, застосовуючи теорему Гаусса до нескінченно малого циліндра.

20 Виведіть другу граничну умову $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ для тангенціальної складової поля, застосовуючи теорему про циркуляцію до нескінченно малого прямокутного контуру.

21 Виведіть рівняння Пуассона $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$ і рівняння Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$ з теореми Гаусса та зв'язку $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$.

22 Сформулюйте теорему єдиності розв'язку рівняння Пуассона (Лапласа) з граничними умовами. Які граничні умови потрібно задати? Чому можна «вгадати» розв'язок і бути впевненим у його правильності, якщо він задовольняє рівняння та граничні умови?

23 Запишіть повну систему рівнянь електростатичного поля у вакуумі — інтегральну й диференціальну форми, граничні умови та рівняння для потенціалу.

3 Електричне поле статичної системи зарядів

Природа використовує лише найдовші нитки, щоб ткати свої візерунки, тож кожен маленький клаптик її тканини розкриває будову всього гобелена.

Річард Фейнман, «Характер фізичних законів»

3.1. Дипольний момент системи зарядів

Будь-яка матерія складається із заряджених частинок — електронів і атомних ядер, — тому кожне тіло певною мірою і створює електричне поле, і реагує на зовнішнє. Щоб описати цю взаємодію, часто недостатньо знати лише сумарний заряд системи $q = \sum_i q_i$; важливу роль відіграє й те, як заряди розташовані один відносно одного. На додаток, можливий і крайній випадок: сумарний заряд може дорівнювати нулю ($q = 0$), і все ж система зарядів не буде «невидимою» для зовнішнього спостерігача — вона однаково створює поле в просторі й реагує на зовнішнє поле, просто ця взаємодія визначається вже не сумарним зарядом, а саме взаємним розташуванням зарядів. Найпростішою кількісною мірою такого взаємного розташування зарядів слугує *дипольний момент* — векторна сума добутків зарядів на їхні радіус-вектори:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} q_i \mathbf{r}_i, \tag{3.1}$$

де $\mathbf{r}_i$ — радіус-вектор i-го заряду.

Дипольний момент — перша (після сумарного заряду) характеристика в такому описі; якщо і сумарний заряд, і дипольний момент виявляються нульовими, слід звернутися до наступного члена розкладу — квадрупольного моменту (3.7).

Загалом дипольний момент залежить від вибору початку відліку: якщо перенести початок координат на вектор $\mathbf{a}$, то $\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_i - \mathbf{a}$ і $\mathbf{p} \to$

$\mathbf{p} - q\mathbf{a}$, де $q = \sum_i q_i$. Отже, якщо система в цілому електронейтральна ($q = 0$), то дипольний момент $\mathbf{p}$ визначений однозначно.

Найпростішою й водночас найважливішою системою з ненульовим дипольним моментом є *диполь* — система, що складається з двох точкових зарядів q, однакових за величиною і протилежних за знаком (рис. 3.1).

Плече диполя — вектор ($\boldsymbol{\ell}$), що йде від «−» заряду до «+», довжина якого дорівнює відстані між зарядами.

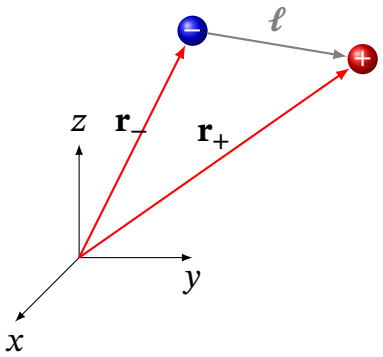


Рис. 3.1. Електричний диполь

Дипольним моментом диполя називається вектор

$$\mathbf{p} = q\boldsymbol{\ell}. \tag{3.2}$$

Жорсткий диполь — диполь із фіксованою відстанню між зарядами, що не змінюється під зовнішніми впливами.

Пружний диполь — диполь, де відстань між зарядами змінюється під зовнішніми впливами, і дипольний момент може змінюватися.

Якщо необхідно визначити поле диполя на далеких відстанях, то зручно користуватись концепцією елементарного, або точкового диполя. *Елементарним, або точковим диполем* називають граничну систему з $\ell \to 0$, $|q| \to \infty$ за скінченної величини p.

3.2. Поле точкового диполя

Знайдемо поле диполя на далеких відстанях r, тобто за умови $\ell \ll r$. У такому разі диполь можна вважати точковим. Для зручності розрахунків розташуємо диполь на осі Oy, симетрично відносно початку координат (рис. 3.2).

Поле точкового диполя можна знайти за допомогою принципу суперпозиції та з урахуванням нерівності $\ell \ll r$:

$$\mathbf{E} = \frac{(-q)\mathbf{r}_-}{r_-^3} + \frac{(+q)\mathbf{r}_+}{r_+^3},$$

де $\mathbf{r}_\pm$ — радіус-вектори, проведені від зарядів $\pm q$ до точки спостереження P. Виразимо їх через плече диполя $\boldsymbol{\ell}$ (воно напрямлене від $-q$

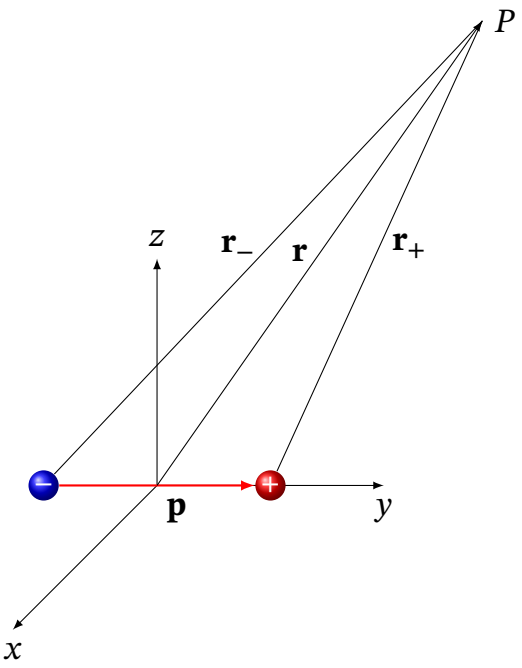


Рис. 3.2. До виведення напруженості та потенціалу поля диполя

до $+q$): $\mathbf{r}_\pm = \mathbf{r} \mp \boldsymbol{\ell}/2$. Оскільки $\ell \ll r$, ці вектори лише трохи відрізняються від $\mathbf{r}$, тому знаменники $r_\pm^3$ зручно розкласти за малим зсувом. Для довільного вектора $\mathbf{a}$ з $|\mathbf{a}| \ll r$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^2 = r^2 - 2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} + a^2 \approx r^2\left(1 - \frac{2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}}{r^2}\right)$$

(доданок a^2 має другий порядок малості за a/r і відкидається). Скориставшись наближенням $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ при $|x| \ll 1$, одержуємо

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^n} \approx \frac{1}{r^n}\left(1 + n\,\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}}{r^2}\right). \tag{3.3}$$

Для поля диполя потрібне $n = 3$ (для потенціалу в § 3.3 буде $n = 1$). Для $r_+ = |\mathbf{r} - \boldsymbol{\ell}/2|$ беремо $\mathbf{a} = \boldsymbol{\ell}/2$, для $r_- = |\mathbf{r} + \boldsymbol{\ell}/2|$ — $\mathbf{a} = -\boldsymbol{\ell}/2$, і суперпозицію записуємо як $\mathbf{E} = q\left(\mathbf{r}_+/r_+^3 - \mathbf{r}_-/r_-^3\right)$:

$$\mathbf{E} \approx \frac{q}{r^3}\left[\left(\mathbf{r} - \frac{\boldsymbol{\ell}}{2}\right)\left(1 + \frac{3\,\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\ell}}{2r^2}\right) - \left(\mathbf{r} + \frac{\boldsymbol{\ell}}{2}\right)\left(1 - \frac{3\,\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\ell}}{2r^2}\right)\right].$$

Розкриваючи дужки, зберігаємо лише члени першого порядку за ℓ: добутки виду $\boldsymbol{\ell}\,(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\ell})$ мають другий порядок і відкидаються. Доданки з $\mathbf{r}$ — це поля двох зарядів, взятих окремо, — взаємно скорочуються, тож головний внесок дає саме перший порядок:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^3}\left[\frac{3\,(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\ell})\,\mathbf{r}}{r^2} - \boldsymbol{\ell}\right].$$

Множник 3 походить від показника степеня в $r_\pm^{-3}$. У границі точкового диполя ($\ell \to 0$, $\mathbf{p} = q\boldsymbol{\ell}$ фіксований) відкинуті члени зникають, і наближена рівність стає точною. Підставляючи $\mathbf{p} = q\boldsymbol{\ell}$, одержуємо:

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}.} \tag{3.4}$$

Таким чином, напруженість поля точкового диполя зменшується з відстанню за законом

$$E \sim 1/r^3.$$

3.3. Потенціал поля точкового диполя

Потенціал поля точкового диполя можна знайти за допомогою принципу суперпозиції та з урахуванням нерівності $\ell \ll r$ (позначення ті самі, що й у § 3.2, рис. 3.2):

$$\varphi = \frac{(-q)}{r_-} + \frac{(+q)}{r_+}, \qquad r_\pm = |\mathbf{r} \mp \boldsymbol{\ell}/2|.$$

Скористаємося розкладом (3.3) при $n = 1$, узявши $\mathbf{a} = \pm\boldsymbol{\ell}/2$ для $r_\pm = |\mathbf{r} \mp \boldsymbol{\ell}/2|$:

$$\varphi = q\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) \approx \frac{q}{r}\left[\left(1 + \frac{\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\ell}}{2r^2}\right) - \left(1 - \frac{\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\ell}}{2r^2}\right)\right] = \frac{q\,\boldsymbol{\ell}\cdot\mathbf{r}}{r^3}.$$

Доданки $1/r$ (кулонівські потенціали двох зарядів окремо) скорочуються через протилежні знаки зарядів, тому потенціал диполя спадає швидше за кулонівський. Врахувавши $\mathbf{p} = q\boldsymbol{\ell}$, маємо:

$$\boxed{\varphi = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}.} \tag{3.5}$$

Таким чином, потенціал поля точкового диполя зменшується з відстанню за законом

$$\varphi \sim 1/r^2.$$

Знаючи вираз для потенціалу точкового диполя (3.5), можна отримати вираз для поля (3.4), використовуючи формулу зв'язку потенціалу і напруженості $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$.

Поле диполя через потенціал. Запишемо $\varphi = (\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\,r^{-3}$ і застосуємо правило диференціювання добутку:

$$\nabla\varphi = r^{-3}\,\nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) + (\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\,\nabla r^{-3}.$$

Знайдемо обидва градієнти. Оскільки $\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} = p_x x + p_y y + p_z z$, де $\mathbf{p}$ — сталий вектор, то частинні похідні за x, y, z дорівнюють p_x, p_y, p_z, тобто $\nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{p}$. Далі, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, тому $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r}$, і аналогічно для y та z; отже, $\nabla r = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$. За правилом диференціювання складної функції

$$\nabla r^{-3} = -3r^{-4}\,\nabla r = -\frac{3\mathbf{r}}{r^5}.$$

Підставляючи, одержуємо

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = \frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3},$$

що збігається з (3.4).

3.4. Потенціал системи зарядів на далеких відстанях

Ми знайшли поле й потенціал диполя — системи з двох зарядів. Узагальнимо цей результат на довільну систему зарядів $\{q_i\}$, що займає певну скінченну область у просторі (рис. 3.3).

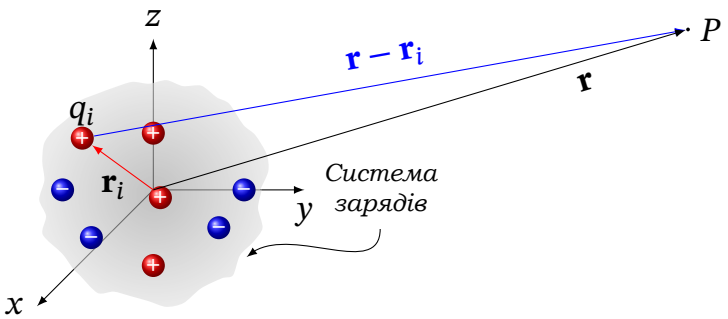


Рис. 3.3. До визначення потенціалу на далеких відстанях

Потенціал поля в точці спостереження P дорівнює сумі потенціалів, створюваних усіма зарядами:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}.$$

Виберемо початок системи координат усередині системи зарядів і знайдемо потенціал на відстанях, набагато більших за розмір області, в якій локалізовані заряди ($r_i \ll r$). У § 3.3 ми зберігали в розкладі

$1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|$ лише члени першого порядку малості за r_i/r (3.3) — для диполя цього досить. Але якщо $q=0$ і $\mathbf{p}=0$, ці члени нічого не дають, тому потрібне наступне наближення. Отримаємо його тим самим прийомом, не відкидаючи тепер квадратичних доданків:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}=\frac{1}{r}\,(1+\varepsilon)^{-1/2},\qquad \varepsilon=-\frac{2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i}{r^2}+\frac{r_i^2}{r^2}\ll 1.$$

Розкладаємо за малим ε: $(1+\varepsilon)^{-1/2}\approx 1-\frac{\varepsilon}{2}+\frac{3\varepsilon^2}{8}$. Доданок $-2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i/r^2$ у ε має перший порядок за r_i/r, а r_i^2/r^2 — другий, тому в ε^2 залишаємо лише $4(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i)^2/r^4$:

$$(1+\varepsilon)^{-1/2}\approx 1+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i}{r^2}-\frac{r_i^2}{2r^2}+\frac{3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i)^2}{2r^4}.$$

Доданок $-r_i^2/(2r^2)$ породжує $-r^2r_i^2$ у чисельнику третього члена; саме він у підсумку робить тензор квадрупольного моменту безслідовим (див. нижче). Помноживши на $1/r$, маємо розклад до другого порядку за r_i/r включно:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\approx\frac{1}{r}+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i}{r^3}+\frac{3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i)^2-r^2r_i^2}{2r^5}. \tag{3.6}$$

Підставляючи (3.6) у $\varphi(\mathbf{r})=\sum_i q_i/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|$, одержуємо

$$\varphi(\mathbf{r})\approx\frac{1}{r}\sum_i q_i+\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\sum_i q_i\mathbf{r}_i+\frac{1}{2r^5}\sum_i q_i\left[3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i)^2-r^2r_i^2\right].$$

Перші дві суми — це вже знайомі нам повний заряд і дипольний момент системи:

$$q=\sum_i q_i,\quad \mathbf{p}=\sum_i q_i\mathbf{r}_i.$$

Третю суму розпишемо покомпонентно, позначаючи декартові компоненти індексами $\alpha,\beta=x,y,z$ (за індексами, що повторюються, мається на увазі підсумовування):

$$(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i)^2=r_\alpha r_\beta\, r_{i\alpha}r_{i\beta},\qquad r^2r_i^2=r_\alpha r_\beta\,\delta_{\alpha\beta}\,r_i^2,$$

де $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера. Тоді

$$\frac{1}{2r^5}\sum_i q_i\left[3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i)^2-r^2r_i^2\right]=\frac{1}{2r^5}\,r_\alpha r_\beta\sum_i q_i\left(3r_{i\alpha}r_{i\beta}-r_i^2\delta_{\alpha\beta}\right).$$

Суму за i в правій частині називають *тензором квадрупольного моменту* системи зарядів:

$$\boxed{D_{\alpha\beta}=\sum_i q_i\left(3r_{i\alpha}r_{i\beta}-r_i^2\delta_{\alpha\beta}\right).} \tag{3.7}$$

Це симетричний тензор другого рангу ($D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}$), причому сума його діагональних елементів (слід) дорівнює нулю:

$$\sum_{\alpha} D_{\alpha\alpha} = \sum_{i} q_i \left(3r_i^2 - 3r_i^2\right) = 0,$$

тому серед дев'яти компонент $D_{\alpha\beta}$ лише п'ять незалежних. Якщо перейти у власну систему координат тензора (в якій він діагональний), то залишаються дві незалежні діагональні компоненти; решту інформації несуть три кути, що задають орієнтацію власних осей.

Отже, повний розклад потенціалу системи зарядів на далеких відстанях набуває вигляду

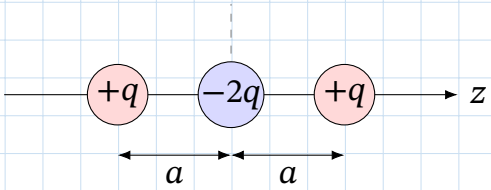
$$\varphi(\mathbf{r}) = \underbrace{\frac{q}{r}}_{\text{монополь}} + \underbrace{\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}}_{\text{диполь}} + \underbrace{\frac{1}{2r^5}\sum_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta}\, r_\alpha r_\beta}_{\text{квадруполь}} + \ldots \qquad (3.8)$$

Проаналізуємо цей розклад. Кожен наступний доданок спадає з відстанню швидше за попередній: $\varphi \sim 1/r$ для монополя, $\varphi \sim 1/r^2$ для диполя і $\varphi \sim 1/r^3$ для квадруполя (відповідно й напруженість поля $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi \sim 1/r^4$ спадає швидше, ніж дипольна $\sim 1/r^3$). Тому внесок у поле на далеких відстанях фактично дає лише перший доданок розкладу, що не занулюється: при $q \neq 0$ домінує монополь; при $q = 0$, $\mathbf{p} \neq 0$ — диполь; при $q = 0$ і $\mathbf{p} = 0$ — квадруполь.

! *Систему зарядів, у якої* $q = 0$, $\mathbf{p} = 0$, *а* $D_{\alpha\beta} \neq 0$, *називають* квадруполем.

Молекули здебільшого електронейтральні, а деякі з них (наприклад, H_2O, HCl) мають ненульовий дипольний момент. Інші, такі як лінійна симетрична молекула CO_2, дипольного моменту не мають ($\mathbf{p} = 0$) через симетрію розташування атомів кисню відносно атома вуглецю, проте мають ненульовий квадрупольний момент. Тому далекодійна електростатична взаємодія таких молекул між собою і з іншими зарядами визначається саме квадруполь-квадрупольною або квадруполь-дипольною взаємодією і є значно слабшою, ніж диполь-дипольна.

Лінійний квадруполь. Розглянемо три заряди, розташовані на осі Oz: заряди $+q$ у точках $z = \pm a$ та заряд $-2q$ у початку координат $z = 0$ — грубу модель лінійної неполярної молекули на кшталт CO_2. (У реальній молекулі CO_2 знаки протилежні: атоми кисню заряджені від'ємно, а атом вуглецю — додатно; це змінює лише знак $D_{\alpha\beta}$.)



Сумарний заряд системи дорівнює нулю:

$$q_\Sigma = q + (-2q) + q = 0.$$

Дипольний момент також дорівнює нулю через симетрію розташування зарядів відносно початку координат:

$$\mathbf{p} = q\,a\mathbf{e}_z + (-2q)\cdot 0 + q\,(-a)\mathbf{e}_z = 0.$$

Отже, поле на далеких відстанях визначається квадрупольним моментом. Обчислимо компоненти тензора $D_{\alpha\beta}$. Оскільки всі заряди лежать на осі z, для кожного заряду $r_{ix} = r_{iy} = 0$, $r_{iz} = z_i$, $r_i^2 = z_i^2$. Тому всі недіагональні компоненти дорівнюють нулю, а

$$D_{zz} = \sum_i q_i\left(3z_i^2 - z_i^2\right) = 2\sum_i q_i z_i^2 = 2\left[q\,a^2 + (-2q)\cdot 0 + q\,a^2\right] = 4qa^2,$$

$$D_{xx} = \sum_i q_i\left(3\cdot 0 - z_i^2\right) = -\sum_i q_i z_i^2 = -\left(qa^2 + qa^2\right) = -2qa^2,$$

$$D_{yy} = D_{xx} = -2qa^2$$

(перевірка сліду: $D_{xx}+D_{yy}+D_{zz} = -2qa^2 - 2qa^2 + 4qa^2 = 0$ — узгоджується із загальною властивістю). Оскільки тензор уже діагональний, для точки спостереження на осі z (де $\mathbf{r} = z\mathbf{e}_z$) залишається лише доданок з D_{zz}:

$$\varphi_{\text{кв}}(z) = \frac{D_{zz}}{2z^3} = \frac{2qa^2}{z^3}.$$

3.5. Диполь в електричному полі

Досі ми цікавились полем, яке диполь *створює*. Тепер розглянемо обернену задачу: як диполь поводиться, потрапивши у *зовнішнє* електричне поле — яка сила й момент сил на нього діють і яку енергію він при цьому має.

Момент сил, що діє на диполь в однорідному полі. Розглянемо диполь в однорідному електричному полі (рис. 3.4). Результуюча сила, що діє на цей диполь, дорівнює нулю: $\mathbf{F} = (+q)\mathbf{E} + (-q)\mathbf{E} = 0$.

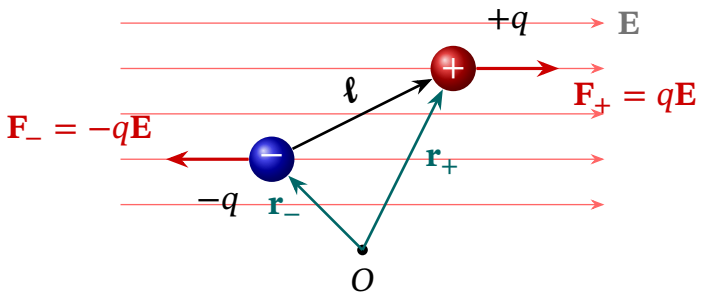


Рис. 3.4. До виведення моменту сил, що діє на диполь в однорідному електричному полі

Однак цей диполь може орієнтуватися у такому полі, оскільки на нього може діяти обертовий момент сил. Розрахуємо його, використовуючи означення, відоме з курсу механіки:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_+ \times \mathbf{F}_+ + \mathbf{r}_- \times \mathbf{F}_- = \mathbf{r}_+ \times (+q)\mathbf{E} + \mathbf{r}_- \times (-q)\mathbf{E} = q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) \times \mathbf{E}.$$

Оскільки $q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = \mathbf{p}$, то остаточно маємо:

$$\boxed{\mathbf{M} = [\mathbf{p} \times \mathbf{E}]\,.}$$

Бачимо, що момент сил (пари сил) не залежить від вибору точки O: так і має бути, адже результуюча сила дорівнює нулю. За модулем $M = pE\sin\theta$, де θ — кут між $\mathbf{p}$ і $\mathbf{E}$. Цей момент повертає диполь так, щоб $\mathbf{p}$ став паралельним полю.

Сила, що діє на диполь у неоднорідному полі. Розрахуємо силу, що діє на диполь у неоднорідному полі (рис. 3.5).

$$\mathbf{F} = (+q)\mathbf{E}_+ + (-q)\mathbf{E}_- = q(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = q\Delta\mathbf{E}.$$

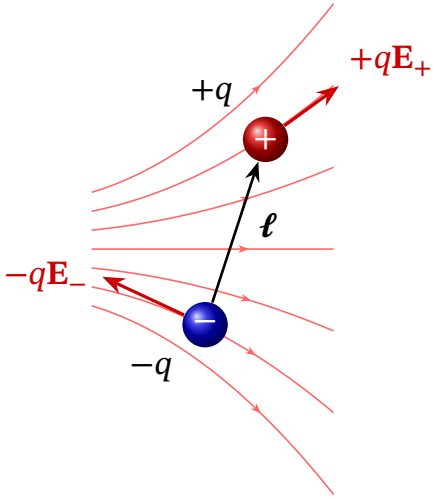


Рис. 3.5. Диполь у неоднорідному полі

Для точкового диполя різницю $\Delta\mathbf{E}$ можна записати, використовуючи формулу (2.18) у вигляді:

$$\Delta\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}+\boldsymbol{\ell}) - \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \ell_x\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial x} + \ell_y\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial y} + \ell_z\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial z}.$$

$$\boxed{\mathbf{F} = p_x\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial x} + p_y\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial y} + p_z\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial z} = (\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{E}.} \tag{3.9}$$

Отже, якщо *диполь перебуває в неоднорідному полі*, на нього як ціле діє *результуюча сила*. Її напрямок залежить від орієнтації диполя. Для жорсткого диполя ($\mathbf{p} = \text{const}$) в електростатичному полі ($\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = 0$) справджується тотожність $(\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{E} = \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{E})$, тому

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}) = -\boldsymbol{\nabla}U, \qquad U = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E},$$

де U — енергія диполя в полі, яку ми знайдемо нижче. Диполь, орієнтований уздовж поля (саме таку орієнтацію він набуває під дією моменту $\mathbf{M}$), має $\mathbf{p}\cdot\mathbf{E} = pE$, і сила $\mathbf{F} = p\,\boldsymbol{\nabla}E$ *втягує його в область сильнішого поля*. Диполь, орієнтований проти поля, навпаки, виштовхується з неї. Саме тому дрібні шматочки паперу, поляризовані полем натертого бурштину, притягуються до нього.

Енергія жорсткого диполя в електричному полі. Енергія точкового заряду q у зовнішньому полі дорівнює $U = q\varphi$, де φ — потенціал поля в точці, де перебуває заряд q. Диполь — це система з двох зарядів, тому його енергія в зовнішньому полі $U = q\varphi_+ + (-q)\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-)$. Для різниці можна використати формулу (2.17):

$$U = q\varphi_+ + (-q)\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-) = q\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi.$$

Оскільки $-\boldsymbol{\nabla}\varphi = \mathbf{E}$, а $\mathbf{p} = q\boldsymbol{\ell}$:

$$\boxed{U = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}.}$$

Енергія $U = -pE\cos\theta$ мінімальна в положенні $\mathbf{p}\uparrow\uparrow\mathbf{E}$ (положення стійкої рівноваги). У разі відхилення з цього положення виникає момент сил, що повертає диполь до положення рівноваги (рис. 3.6б). Положення $\mathbf{p}\uparrow\downarrow\mathbf{E}$ теж є положенням рівноваги ($\mathbf{M} = 0$), але нестійкої: енергія в ньому максимальна, і найменше відхилення призводить до повороту диполя.



(а) (б)

Рис. 3.6. Диполь в однорідному електричному полі. Ліворуч (а) — положення стійкої рівноваги з мінімальною енергією. Праворуч (б) — диполь під кутом до поля: момент сил повертає його до положення (а).

Енергія пружного диполя в електричному полі. У пружному диполі (моделі атома чи неполярної молекули) за відсутності поля заряди збігаються, і дипольного моменту немає. Під дією електричного поля заряди зміщуються один відносно одного на таку відстань ℓ, що сила з боку поля врівноважується силою пружності $k\ell = qE$. Звідси знаходимо, що дипольний момент $p = q\ell$ залежить від прикладеного поля за законом:

$$p = \frac{q^2 E}{k} = \alpha E.$$

Коефіцієнт α називається *поляризовністю молекули*.

На відміну від жорсткого диполя, тут недостатньо врахувати лише енергію пружної деформації — потрібна ще й енергія взаємодії заряду з полем. Повна енергія системи як функція зміщення x складається з цих двох внесків:

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} - qxE.$$

Мінімізуючи за x ($dU/dx = kx - qE = 0$), знаходимо те саме рівноважне зміщення $x = \ell = qE/k$, що й з умови рівноваги сил. Підставляючи його назад, одержуємо повну енергію в рівновазі:

$$U = \frac{k\ell^2}{2} - qE\ell = \frac{qE\ell}{2} - qE\ell = -\frac{qE\ell}{2} = -\frac{pE}{2}.$$

Тут вектор дипольного моменту, індукований зовнішнім полем, паралельний електричному полю $\mathbf{p} \uparrow\uparrow \mathbf{E}$. Тому останню формулу можна переписати у векторній формі:

$$\boxed{U = -\frac{1}{2}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}.} \qquad (3.10)$$

Знак «мінус» тут той самий, що й для жорсткого диполя (вирівнювання вздовж поля знижує енергію), але вдвічі менший за модулем: половину «виграшу» від взаємодії з полем «з'їдає» енергія пружної деформації, необхідної для створення самого диполя.

3.6. Енергія довільної системи зарядів у зовнішньому полі

Розглянемо систему зарядів $\{q_i\}$, локалізовану в деякій обмеженій області простору, яку внесено у *зовнішнє* електричне поле з потенціалом $\varphi(\mathbf{r})$ і напруженістю $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\varphi(\mathbf{r})$. Слово «зовнішнє» тут ключове: це поле створене *іншими* зарядами, розташованими *поза* системою $\{q_i\}$ — система $\{q_i\}$ лише перебуває в цьому вже заданому полі, не будучи його джерелом. Знайдемо енергію взаємодії системи $\{q_i\}$ із цим зовнішнім полем.

Результат $U = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}$, отриманий вище для жорсткого диполя (двох зарядів) у першому порядку за ℓ, виявиться першим наближенням загальнішого розкладу, застосовного до довільної системи $\{q_i\}$ у довільному (не обов'язково однорідному) зовнішньому полі. Енергія системи дорівнює сумі енергій окремих зарядів у цьому полі:

$$U = \sum_i q_i\,\varphi(\mathbf{r}_i).$$

Виберемо початок координат O десь усередині системи й розкладемо $\varphi(\mathbf{r}_i)$ у ряд Тейлора за $\mathbf{r}_i$, аналогічно до того, як це робилося для потенціалу самої системи (пор. (3.6)):

$$\varphi(\mathbf{r}_i) \approx \varphi(0) + \mathbf{r}_i\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi(0) + \frac{1}{2}\,r_{i\alpha}r_{i\beta}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(0).$$

Підсумовуючи із вагами q_i й використовуючи $\boldsymbol{\nabla}\varphi = -\mathbf{E}$:

$$U \approx \varphi(0)\underbrace{\sum_i q_i}_{q} - \mathbf{E}(0)\cdot\underbrace{\sum_i q_i\mathbf{r}_i}_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\left[\sum_i q_i\,r_{i\alpha}r_{i\beta}\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}(0).$$

Останній доданок хочеться виразити через уже введений тензор $D_{\alpha\beta}$, а не через $\sum_i q_i r_{i\alpha}r_{i\beta}$ напряму. Оскільки в точці O немає зарядів, що створюють зовнішнє поле (його потенціал там задовольняє рівняння Лапласа), маємо $\nabla^2\varphi(0) = \sum_\alpha \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha^2}(0) = 0$, тобто тензор других похідних $\partial^2\varphi/\partial x_\alpha\partial x_\beta$ безслідовий — так само як і $D_{\alpha\beta}$. Це дає змогу показати (додавши й віднявши слідову частину), що

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\left[\sum_i q_i\,r_{i\alpha}r_{i\beta}\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}(0) = \frac{1}{6}\sum_{\alpha\beta}D_{\alpha\beta}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}(0) = \\ = -\frac{1}{6}\sum_{\alpha\beta}D_{\alpha\beta}\,\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}(0),$$

адже доданок, пропорційний $\delta_{\alpha\beta}$, містить $\nabla^2\varphi(0) = 0$ і зникає. Остаточно енергія довільної системи зарядів у зовнішньому полі — це ряд за мультипольними моментами системи:

$$U = \underbrace{q\,\varphi(0)}_{\text{монополь}} - \underbrace{\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}(0)}_{\text{диполь}} - \underbrace{\frac{1}{6}\sum_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta}\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}(0)}_{\text{квадруполь}} + \ldots \tag{3.11}$$

! *Умова $\nabla^2\varphi(0) = 0$ — це не тотожність, а суттєве припущення: вона виконується лише тому, що φ тут — потенціал* зовнішнього *поля, створеного зарядами* поза *системою $\{q_i\}$. Якби φ включало власне поле системи (наприклад, при обчисленні енергії взаємодії зарядів системи одне з одним), у точці O були б заряди, і за рівнянням Пуассона $\nabla^2\varphi(0) = -4\pi\rho(0) \neq 0$. Тоді слідовий доданок не скорочувався б і формула вище набула б додаткового внеску.*

Кожен доданок відповідає за взаємодію відповідного мультипольного моменту системи з полем (або його похідними) у точці O: заряд взаємодіє з потенціалом, диполь — із самим полем, квадруполь — з градієнтом поля (неоднорідністю), і так далі. Для диполя $q = 0$. Його квадрупольний момент відносно середини відрізка, що з'єднує заряди, дорівнює нулю, а вищі моменти (октупольний тощо) пропорційні $q\ell^3$ і вищим степеням ℓ й зникають у границі точкового диполя ($\ell \to 0$, $p = q\ell$ фіксований). Тому для точкового диполя в розкладі залишається лише $U = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}$ — результат, отриманий вище елементарним способом.

Підсумки

Щоб описати взаємодію системи зарядів з полем, недостатньо знати лише її сумарний заряд: при $q = 0$ усе визначає взаємне розташування зарядів. Першою (після заряду) його характеристикою є *дипольний момент* $\mathbf{p} = \sum_i q_i\mathbf{r}_i$ (3.1), який для електронейтральної системи не залежить від вибору початку відліку. Найпростіша система з ненульовим $\mathbf{p}$ — *диполь*, тобто пара рівних за величиною й протилежних за знаком зарядів, $\mathbf{p} = q\boldsymbol{\ell}$. У границі точкового диполя його поле $\mathbf{E} = \dfrac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \dfrac{\mathbf{p}}{r^3}$ (3.4) спадає як $1/r^3$, а потенціал $\varphi = \dfrac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$ (3.5) — як $1/r^2$, тобто швидше, ніж кулонівські.

Узагальнення цього результату — розклад потенціалу довільної системи зарядів на великих відстанях за мультипольними моментами (3.8): *монополь* q/r, *диполь* і *квадруполь*, який задається симетричним безслідовим тензором $D_{\alpha\beta}$ (3.7) з п'ятьма незалежними компонентами. Кожен наступний доданок спадає швидше за попередній, тому на далеких відстанях поле визначає перший з ненульових

моментів. Так, у молекули CO_2 немає дипольного моменту, і її електростатична взаємодія визначається квадрупольним моментом.

Ті самі моменти визначають і поведінку системи в *зовнішньому* полі. В однорідному полі на диполь діє нульова сила, але ненульовий момент $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$, що орієнтує його вздовж поля. У неоднорідному полі виникає ще й сила $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{E}$ (3.9), що втягує диполь в область сильнішого поля. Енергія жорсткого диполя дорівнює $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$, а пружного, у якого $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}$ (α — поляризовність), — $U = -\frac{1}{2}\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}$: половину виграшу поглинає енергія деформації. Для довільної системи енергія у зовнішньому полі також є рядом за мультипольними моментами: заряд взаємодіє з потенціалом, диполь — з полем, квадруполь — з градієнтом поля.

Задачі

3.1. *Полярні компоненти.* Точковий диполь $\mathbf{p}$ напрямлений уздовж осі Oz; θ — кут між $\mathbf{r}$ і $\mathbf{p}$. Виходячи з $\varphi = p\cos\theta/r^2$, знайдіть компоненти E_r і E_θ поля диполя. Який вигляд має поле на осі диполя ($\theta = 0$) і на його серединному перпендикулярі ($\theta = \pi/2$)?

3.2. *Особливий кут.* Під яким кутом θ до дипольного моменту $\mathbf{p}$ вектор напруженості поля диполя перпендикулярний до $\mathbf{p}$?

3.3. *Плоский квадруполь.* У площині Oxy у вершинах квадрата зі стороною a розташовано заряди: $+q$ у точці $(0,0)$, $-q$ у $(a,0)$, $+q$ у (a,a), $-q$ у $(0,a)$. Знайдіть сумарний заряд, дипольний момент і компоненти тензора $D_{\alpha\beta}$.

3.4. *Точність наближення.* Для лінійного квадруполя з прикладу ($+q$, $-2q$, $+q$ на осі Oz у точках $z = a, 0, -a$): (а) знайдіть $E_z(z)$ на осі в квадрупольному наближенні; (б) обчисліть точне значення потенціалу в точці $z = 5a$ і порівняйте його з $\varphi_{\text{кв}} = 2qa^2/z^3$. Яка відносна похибка?

3.5. *Коливання диполя.* Жорсткий диполь з моментом p і моментом інерції I (відносно осі, перпендикулярної до $\mathbf{p}$) може вільно обертатися в однорідному полі $\mathbf{E}$. Знайдіть період малих коливань біля положення стійкої рівноваги.

3.6. *Робота повороту.* Яку роботу треба виконати, щоб повернути жорсткий диполь в однорідному полі з положення $\mathbf{p} \uparrow\uparrow \mathbf{E}$ у положення $\mathbf{p} \uparrow\downarrow \mathbf{E}$? А в положення $\mathbf{p} \perp \mathbf{E}$?

3.7. *Диполь і точковий заряд.* Точковий заряд Q створює поле $\mathbf{E} = Q\mathbf{r}/r^3$. На відстані r від нього розташований жорсткий диполь $\mathbf{p}$, напрямлений уздовж радіуса від заряду. Знайдіть силу, що діє на диполь, і перевірте відповідь за допомогою третього закону Ньютона й поля диполя.

3.8. *Взаємодія двох диполів.* Два однакових жорстких диполі p з паралельними моментами розташовані на відстані r один від одного. Знайдіть енергію їхньої взаємодії, якщо (а) $\mathbf{r} \parallel \mathbf{p}$ (на одній прямій); (б) $\mathbf{r} \perp \mathbf{p}$ (поруч). Яке розташування вигідніше?

3.9. *Поляризовність.* Молекулу змодельовано зарядом e і масою m на пружині з власною круговою частотою $\omega_0 = 10^{16}$ с$^{-1}$. Виразіть поляризовність α через e, m, ω_0 та оцініть її в см^3.

Контрольні питання

1. Чому для опису системи зарядів недостатньо знати лише сумарний заряд? Запишіть означення дипольного моменту системи зарядів. За якої умови він не залежить від вибору початку відліку?
2. Що таке електричний диполь і плече диполя? Куди напрямлений вектор $\mathbf{p} = q\boldsymbol{\ell}$ відносно зарядів диполя?
3. Чим відрізняються жорсткий і пружний диполі? Що таке елементарний (точковий) диполь і в якій границі його вводять?
4. Запишіть формулу для напруженості поля точкового диполя. Як вона залежить від відстані і чому поле диполя спадає швидше, ніж поле точкового заряду?
5. Запишіть потенціал поля точкового диполя. За яким законом він зменшується з відстанню? Чому в його виведенні вважають $\ell \ll r$ (рис. 3.2)?
6. З яких доданків складається розклад потенціалу довільної системи зарядів на великих відстанях? Який із них є домінуючим при $q \neq 0$, а коли суттєвим стає внесок диполя чи квадруполя?
7. За яких умов поле системи зарядів на далеких відстанях визначається саме квадрупольним моментом? Запишіть означення тензора квадрупольного моменту $D_{\alpha\beta}$ і виведіть його з розкладу $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$ до другого порядку.
8. Доведіть, що тензор квадрупольного моменту симетричний і безслідовий. Скільки незалежних компонент він має і скільки — у власній системі координат?

9 Запишіть формулу для потенціалу квадрупольного доданка $\varphi_{\text{кв}}(\mathbf{r})$ через $D_{\alpha\beta}$. Як він і відповідна напруженість поля спадають з відстанню порівняно з дипольним і монопольним доданками?

10 Чому молекула CO_2 не має дипольного моменту, але має ненульовий квадрупольний момент? Які знаки мають заряди атомів у реальній молекулі? Обчисліть D_{zz} для моделі лінійного квадруполя — зарядів $+q, -2q, +q$ на осі, симетрично розташованих на відстані a від центру.

11 Чому результуюча сила, що діє на диполь в однорідному електричному полі, дорівнює нулю, а обертовий момент — ні? Запишіть формулу для $\mathbf{M}$ і поясніть, чому він не залежить від вибору точки O.

12 Як буде орієнтуватися диполь в однорідному полі? Чому положення $\mathbf{p} \uparrow\uparrow \mathbf{E}$ є стійким, а $\mathbf{p} \uparrow\downarrow \mathbf{E}$ — нестійким?

13 Що відбувається з диполем у неоднорідному електричному полі? Запишіть формулу для сили $\mathbf{F}$. За якої орієнтації диполь втягується в область сильного поля, а за якої — виштовхується?

14 Виведіть та поясніть формулу для енергії жорсткого диполя в зовнішньому полі $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$. Як залежить енергія від кута між $\mathbf{p}$ і $\mathbf{E}$ і в яких положеннях вона мінімальна та максимальна?

15 Що таке поляризовність молекули α? Як вона пов'язана з жорсткістю «пружини» k і зарядом q у моделі пружного диполя?

16 Чому енергія пружного диполя дорівнює $U = -\frac{1}{2}\,\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$, тоді як для жорсткого диполя $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$? Звідки береться множник $\frac{1}{2}$?

4 Електричне поле у провідниках

Я зайшов у куб і жив у ньому, і, користуючись запаленими свічками, електрометрами та всіма іншими засобами виявлення електричних станів, не зміг виявити жодного впливу на них... хоча весь цей час зовнішня поверхня куба була сильно заряджена, і великі іскри та китиці зривалися з усіх її частин.

Майкл Фарадей, «Експериментальні дослідження з електрики», § 1174

4.1. Структура провідників

Провідниками називають речовини, в структурі яких є вільні заряди (електрони в металах, наприклад), які можуть переміщуватися під дією як завгодно слабких полів (рис. 4.1).

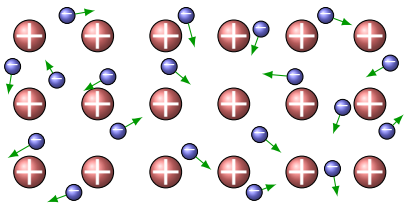


Рис. 4.1. Модель будови металу (електронний газ у кристалічній решітці)

Електронні оболонки атомів, що складають кристалічну решітку металів, сильно перекриваються, внаслідок чого не можна вказати, біля якого іона локалізовано той чи інший *електрон валентної оболонки*, — вони легко перетікають від одного іона до іншого, і в цьому разі кажуть, що *електрони колективізовані*. Іони — це ядра й електрони внутрішніх оболонок, які сильно локалізовані. Електрони, які делокалізовані, вільно переміщаються по кристалу. Саме вільні електрони відповідають за багато фізичних і, особливо, транспортних властивостей металів.

Досліди Толмена та Стюарта. У 1916 р. американські фізики Р. Толмен (1881–1948) і Т. Д. Стюарт виконали кількісні виміри, які неспростовно довели, що струм у металевих провідниках зумовлений рухом вільних електронів (рис. 4.2).

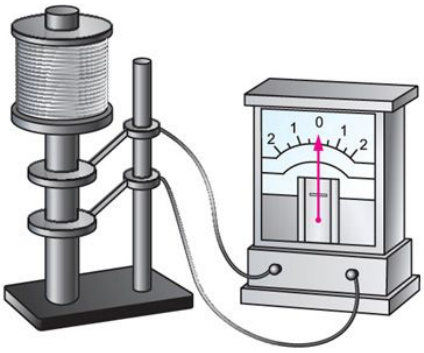


Рис. 4.2. Принципова ідея дослідної установки Толмена і Стюарта

У цих дослідах котушку з великим числом витків тонкого дроту підключали до гальванометра і приводили в швидке обертання навколо своєї осі. Під час різкого гальмування котушки в колі виникав короткочасний струм, зумовлений інерцією носіїв заряду. За напрямком відхилення стрілки гальванометра було встановлено, що *електричний струм створюють негативно заряджені частинки*. При цьому експериментально був отриманий питомий заряд носіїв q/m, близький до питомого заряду електрона, отриманого з інших дослідів. Так було експериментально доведено, що носіями вільних зарядів у металах є електрони.

4.2. Провідник у полі

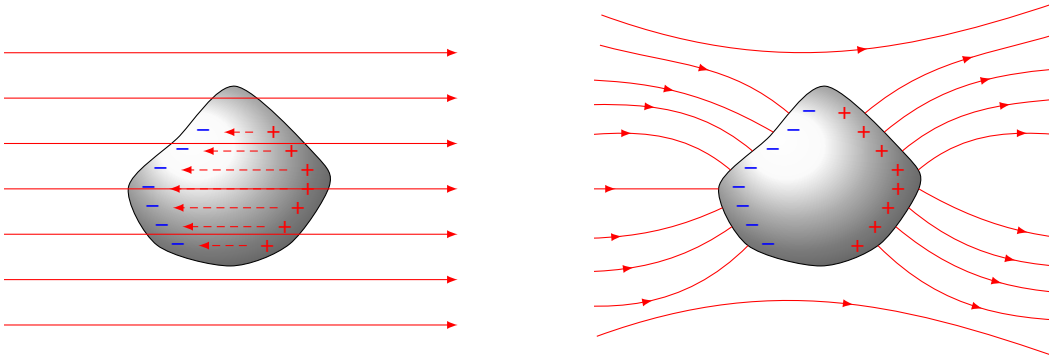
Якщо провідник потрапляє в поле, електрони в ньому починають рухатися проти поля. На одній частині поверхні провідника виступає негативний заряд — ця поверхня стає збагаченою електронами. На протилежній частині поверхні електронів виявляється дещо менше, ніж потрібно для нейтралізації позитивного іонного заряду кристалічної решітки, і ця частина поверхні виявляється зарядженою позитивно. Позитивна і негативна частини поверхні створюють своє власне поле, за напрямком протилежне зовнішньому. Обидва поля — зовнішнє $\mathbf{E}_{ex}$ і поле власних поверхневих зарядів провідника ($\mathbf{E}_{in}$) точно компенсують одне одного в усіх точках усередині провідника. Біля поверхні зовні лишається лише нормальна складова повного поля, $E_n = 4\pi\sigma$ (див. нижче). Схема перерозподілу зарядів у провіднику, внесеному в зовнішнє електричне поле, показана на рис. 4.3.

Якби в якій-небудь ділянці провідника поля $\mathbf{E}_{ex}$ і $\mathbf{E}_{in}$ не компенсували одне одного, то в цій ділянці на електрони діяла б сила і йшов би струм. Відсутність струму означає повну компенсацію полів.

У стаціонарному стані, коли немає струмів, *в об'ємі провідника результуюче електричне поле*:

$$\mathbf{E} = 0 \qquad (4.1)$$

Струм буде текти доти, доки заряди не розташуються так, щоб поле було відсутнє усюди в об'ємі провідника.



(а) Перерозподіл зарядів до встановлення рівноваги

(б) Розподіл заряду після встановлення рівноваги

Рис. 4.3. Провідник в електричному полі

З теореми Гаусса

$$\mathbf{E} = 0 \Rightarrow \rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E} \Rightarrow \rho = 0,$$

об'ємна густина зарядів у провіднику дорівнює нулю, *нескомпенсовані (надлишкові) заряди можуть розташовуватися тільки на поверхні*.

Граничні умови

$$E_n = 4\pi\sigma,$$
$$E_\tau = 0$$

показують, що *силові лінії підходять до поверхні провідника перпендикулярно* і закінчуються (або починаються) на поверхневих зарядах: усередині провідника поля немає.

! *Поверхня провідника є еквіпотенціальною поверхнею! Потенціал в об'ємі провідника сталий і дорівнює потенціалу на його поверхні:*

$$\varphi_S = \varphi_V = \text{const}.$$

Електрофорна машина (машина Вімсхерста). Явище перерозподілу вільних зарядів у провіднику під дією зовнішнього поля (розглянуте вище, у §«Провідник у полі») лежить в основі *електрофорної машини Вімсхерста* — індукційного генератора, який, обертаючись, сам нарощує заряд до високих напруг завдяки позитивному зворотному зв'язку, без потреби заряджати щось ззовні тертям (рис. 4.4).

Машина складається з двох дисків із діелектрика (скла чи ебоніту), закріплених на спільній осі, які обертаються в протилежних напрямках; на зовнішньому боці кожного диска симетрично наклеєні радіальні металеві сектори. Біля кожного диска розташований

нейтралізатор — діагональний металевий стрижень зі щітками на обох кінцях, які торкаються двох діаметрально протилежних секторів цього диска; нейтралізатори двох дисків повернуті один відносно одного (зазвичай на кут близько 90°).

Заряд наростає завдяки індукції. Нехай сектор диска А має невеликий випадковий додатний заряд. Коли він проходить навпроти сектора диска Б, що саме торкається щітки нейтралізатора Б, його поле притягує на цей сектор від'ємний заряд, а на з'єднаний із ним через нейтралізатор протилежний сектор — додатний. Обертаючись, заряджені сектори диска Б проходять навпроти секторів диска А біля нейтралізатора А й так само індукують на них заряди, вже більші за величиною. Так з кожним обертом заряд наростає лавиноподібно (позитивний зворотний зв'язок), аж поки не встановиться рівновага між його приростом і втратами (іонізацією повітря, коронним розрядом тощо).

Накопичений заряд знімають гребінчасті збирачі біля країв дисків, розташовані там, де сектори проходять із найбільшим потенціалом, — і подають на дві лейденські банки (конденсатори, видно збоку на рис. 4.4) та на вихідні електроди з кульками на кінцях довгих стрижнів. Коли різниця потенціалів між кульками перевищує напругу пробою повітряного проміжку, відбувається іскровий розряд.

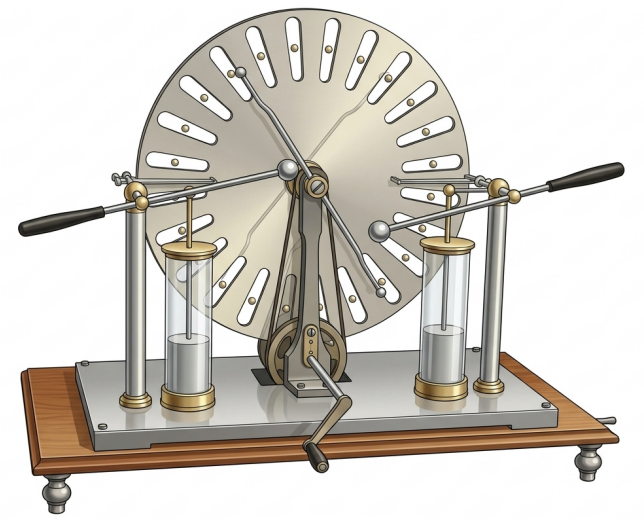


Рис. 4.4. Електрофорна машина Вімсхерста: два зустрічно обертові диски з металевими секторами, схрещені нейтралізуючі стрижні, лейденські банки-конденсатори та вихідні електроди для іскрового розряду.

Поле в порожнині провідника. Сумарне поле зовнішніх зарядів і зарядів на поверхні провідника в товщі провідника дорівнює нулю. *Чи будуть з'являтись заряди на внутрішній поверхні провідника, в якому є порожнина?*

Нехай у *порожнині незарядженого провідника є заряд* q (рис. 4.5). Проведемо замкнену поверхню в товщі металу навколо порожнини. На ній $\mathbf{E} = 0$, тому за теоремою Гаусса повний заряд усередині неї дорівнює нулю: на внутрішній поверхні оболонки індукується заряд

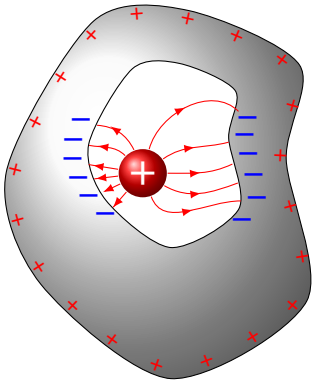


Рис. 4.5. Заряд у порожнині

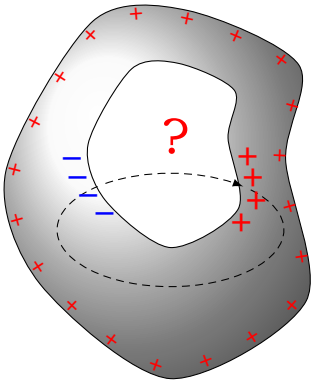


Рис. 4.6. Чи будуть заряди на внутрішній поверхні провідника?

$-q$. Оскільки оболонка в цілому нейтральна, на її зовнішній поверхні з'являється заряд $+q$. Розподіл цього заряду по зовнішній поверхні визначається лише формою провідника й зовнішніми зарядами і не залежить від того, де саме в порожнині розташований заряд q: поле цього заряду й індукованого заряду $-q$ поза внутрішньою поверхнею взаємно компенсується.

Якщо в *порожнині зарядженого провідника немає зарядів*, то чи будуть заряди на внутрішній поверхні оболонки (рис. 4.6)? За теоремою Гаусса (та сама поверхня в товщі металу) їхній *сумарний* заряд дорівнює нулю. Але, можливо, на одних ділянках внутрішньої поверхні є додатний заряд, а на інших — від'ємний? Тоді в порожнині була б силова лінія, що йде від «+» до «−». Замкнімо контур уздовж цієї лінії через порожнину й назад через метал: на першій ділянці $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} > 0$, а в металі $\mathbf{E} = 0$, тож $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} > 0$, що суперечить теоремі про циркуляцію. Отже, зарядів на внутрішній поверхні немає, і поля в порожнині теж немає.

! *Поле в порожнині замкненої провідної оболонки* не залежить *від зарядів зовні оболонки: зовнішні поля в порожнину не проникають. Навпаки, заряди в порожнині не впливають на* розподіл *заряду на зовнішній поверхні, але від них залежить* повний *заряд, що там з'являється. Якщо оболонку заземлити, цей заряд стікає в землю, і внутрішня та зовнішня частини простору стають електрично повністю незалежними.*

Електростатичний захист. Електростатичний захист — це явище, яке дає змогу екранувати електричне поле, створюючи зону безпеки всередині замкненої металевої оболонки. На практиці для цього часто використовують металеві сітки: для статичних і повільно змінних полів сітка з комірками, малими порівняно з розмірами захищеної області, діє майже так само, як суцільна оболонка.



Рис. 4.7. Людина в клітці Фарадея повністю захищена від впливу зовнішніх електричних полів.

Явище було відкрито Майклом Фарадеєм 1836 року. Він звернув увагу, що зовнішнє електричне поле не може потрапити всередину металевої клітки. Електростатичний захист потрібен там, де необхідно екранувати електроприлади від зовнішніх електричних полів (наприклад, чутливі вимірювальні прилади, лабораторне обладнання, екрановані кабелі). Ці прилади поміщають у металевий корпус, який захищає їх від зовнішніх електричних перешкод (рис. 4.7). Для швидкозмінних полів екранування теж працює, якщо товщина стінок більша за так звану глибину скін-шару; про це йтиметься в розділах про змінні поля.

Той самий ефект пояснює, чому *автомобіль і літак є відносно безпечним місцем під час грози*: металевий кузов чи фюзеляж діє як клітка Фарадея, і при ударі блискавки струм тече по зовнішній провідній обшивці, не проникаючи всередину салону, де електричне поле залишається практично нульовим. З цієї ж причини кабіни літаків, корпуси суден і навіть металізовані намети для чутливого обладнання захищають вміст від зовнішніх електромагнітних полів і розрядів.

Електростатичний генератор Ван де Граафа. Генератор Ван де Граафа — електростатичний генератор, в якому використовуються властивості циліндра Фарадея для створення високої напруги. Таким методом можна досягнути напруги до кількох мегавольт (рис. 4.8).

Простий генератор Ван де Граафа складається з діелектричної (шовкової або гумової) стрічки (4 і 5 на малюнку), що обертається на роликах 3 і 6, причому верхній ролик діелектричний, а нижній металевий і з'єднаний із землею. Верхній ролик 3 разом із верхньою частиною стрічки розміщений усередині порожнистої металевої сфери 1. Два електроди 2 і 7 у формі щіток розташовані на невеликій відстані від стрічки зверху і знизу, причому електрод 2 з'єднаний з внутрішньою поверхнею сфери 1. Поблизу нижнього електрода повітря іонізується, утворюються позитивні іони, які під дією сили Кулона рухаються до заземленого ролика 6 й осідають на стрічці, завдяки чому частина стрічки, що рухається вгору, заряджається. Стрічка доставляє заряд усередину сфери 1, де його знімає щітка 2. Тут і полягає головна ідея: заряд самої сфери розташований на її зовнішній поверхні і всередині поля не створює, тому заряд переходить зі стрічки на сферу й одразу йде на її зовнішню поверхню, *хоч яким великим уже є потенціал сфери*. Таким чином на зовнішній поверхні сфери накопичується дедалі більший заряд. Можливість отримання високої напруги обмежена коронним розрядом, що виникає при іонізації повітря навколо сфери.

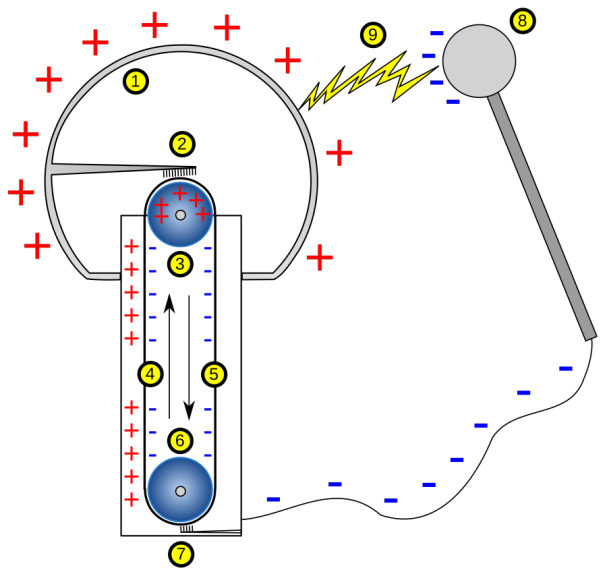


Рис. 4.8. Генератор Ван де Граафа

> ! *Основний принцип роботи генератора базується на властивості заряду концентруватися на зовнішній поверхні провідника, тоді як усередині сфери поля немає. Це дає змогу передавати заряд зі стрічки на сферу, де він накопичується.*

Сучасні генератори Ван де Граафа замість стрічок використовують ланцюги, що складаються з металевих і пластикових ланок, що чергуються між собою.

4.3. Електричне поле біля вістря

Електричні заряди завжди розподіляються тільки на поверхні провідника. Однак цей розподіл різний залежно від форми провідника: *напруженість електричного поля і поверхнева густина заряду мають найбільші значення біля загострення провідника*. Покажемо

це на найпростішій моделі.

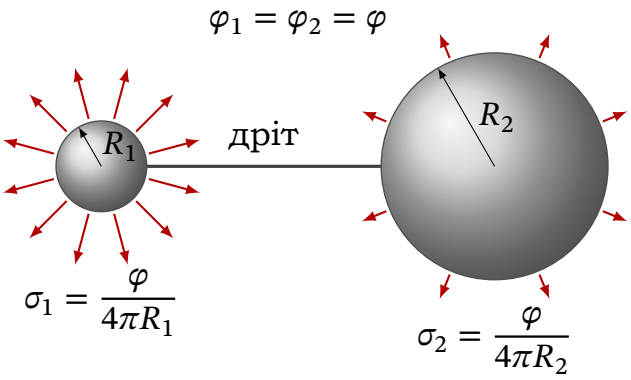


Рис. 4.9. Дві провідні кулі різних радіусів, з'єднані тонким дротом: обидві мають однаковий потенціал φ, проте на меншій кулі густина заряду й поле біля поверхні більші.

Розглянемо дві провідні кулі різних радіусів R_1 і R_2 ($R_1 < R_2$), з'єднані тонким провідним дротом і розташовані далеко одна від одної — настільки, що взаємним впливом їхніх полів одна на одну (а також зарядом самого дроту) можна знехтувати (рис. 4.9). Тоді заряд кожної кулі можна вважати розподіленим по її поверхні рівномірно, як у відокремленої кулі.

Оскільки кулі з'єднані провідником, увесь цей провідник (обидві кулі й дріт) є єдиним провідником у стані рівноваги, а отже, еквіпотенціальним:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi.$$

Потенціал відокремленої зарядженої кулі радіуса R із зарядом Q дорівнює $\varphi = Q/R$. Виразимо звідси заряд через потенціал і радіус, а тоді знайдемо поверхневу густину заряду:

$$Q = \varphi R, \qquad \sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{\varphi}{4\pi R}.$$

Отже, для обох куль

$$\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2 = \frac{\varphi}{4\pi} = \text{const},$$

тобто поверхнева густина заряду обернено пропорційна радіусу кулі: $\sigma \sim 1/R$. Оскільки напруженість поля біля поверхні провідника $E = 4\pi\sigma$, вона також обернено пропорційна радіусу:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} > 1,$$

тобто на кулі меншого радіуса і густина заряду, і поле сильніші.

! *Результат отримано для двох далеких куль (їхньою взаємодією знехтувано), тому для провідника довільної форми він дає лише* якісне *правило: густина заряду зростає зі збільшенням кривизни поверхні, тобто обернено залежить від* локального радіуса кривизни, *але точної пропорційності* $\sigma \sim 1/R$ *у кожній точці немає. Саме тому там, де провідник загострюється (радіус кривизни малий), густина заряду і поле різко зростають, а на плоских чи слабо викривлених ділянках (великий радіус кривизни) — значно менші (рис. 4.10).*

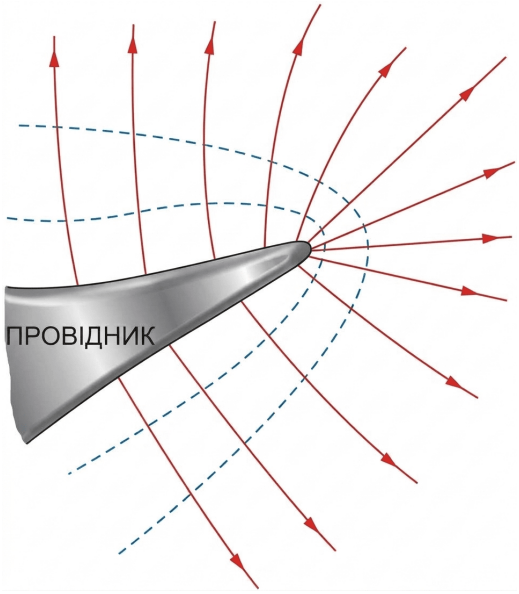


Рис. 4.10. Поле біля вістря

Іонний вітер. «Іонний вітер» — явище, за якого рух повітря створюється за допомогою електричного поля.

Наявні в повітрі в невеликій кількості вільні заряди (іони обох знаків і електрони) поблизу вістря розганяються сильним полем і, вдаряючись об молекули газу, іонізують їх. Створюється область просторового заряду, звідки іони того ж знака, що й вістря, виштовхуються полем, захоплюючи за собою молекули газу. Потік молекул та іонів, спрямований від вістря, створює враження «стікання зарядів». При цьому вістря розряджається (іонами протилежного знака, що потрапляють на нього) і одночасно отримує імпульс, спрямований проти стікання (рис. 4.11).

Отже, загострений провідник у сильному полі не просто «притягує» розряд — він активно *змінює* повітря навколо себе: іонізує його й жене іони разом із молекулами газу від вістря. Це явище саме собою цікаве, але воно має й цілком практичне застосування: якщо підняти загострений заземлений металевий стрижень над будівлею, ми отримаємо пристрій, відомий під назвою *громовідвід*.

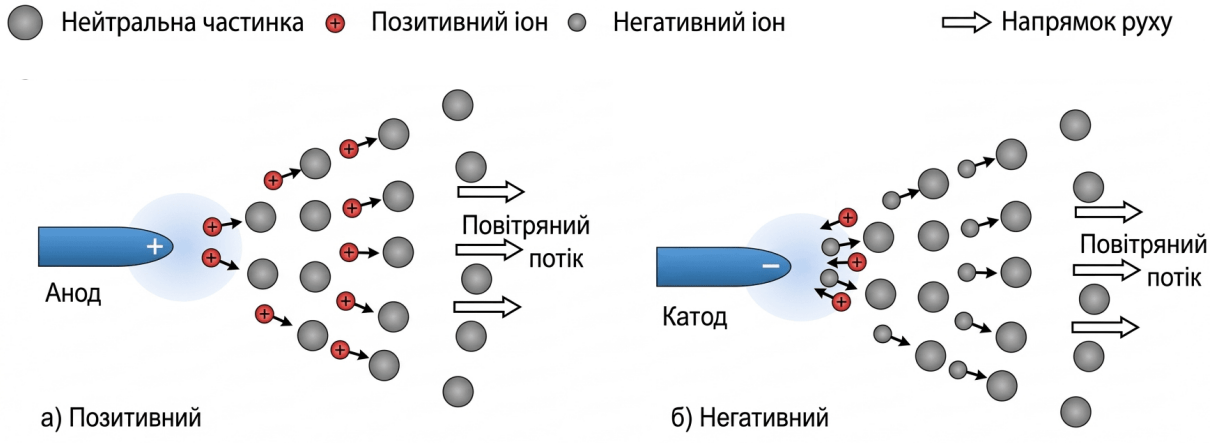


Рис. 4.11. Ілюстрація іонного вітру

Громовідвід (блискавковідвід). Концентрація поля біля загострень і пов'язаний з нею іонний вітер (див. попередній підрозділ) лежать в основі *громовідводу*, винайденого Б. Франкліном 1752 року. Пристрій складається з металевого стрижня, піднятого над найвищою точкою будівлі, товстого провідника (*струмовідводу*), що з'єднує стрижень із землею вздовж стіни споруди, і заземлювача — металевого електрода, закопаного в ґрунт (рис. 4.12).



Рис. 4.12. Громовідвід: стрижень на даху будівлі, струмовідвід уздовж стіни та заземлювач.

Громовідвід захищає будівлю двома способами. Перший — *послаблення заряду хмари заздалегідь*. Біля вістря стрижня поле грозової хмари стає набагато сильнішим, ніж навколо, і повітря починає іонізуватися — виникає той самий іонний вітер, який ми щойно розглянули. Частина заряду хмари над будівлею поступово нейтралізується, і поле не встигає (або майже не встигає) досягти тієї величини, за якої повітря пробивається і виникає блискавка над самою спорудою.

Другий — *перехоплення розряду*. Якщо блискавка все ж починає розвиватися, то найімовірніше вона «вибере» саме вістря стрижня, бо там поле найсильніше. Від вістря назустріч розряду піднімається зустрічний канал іонізованого повітря; з'єднавшись, вони утворюють шлях блискавки, який веде до громовідводу, а не до будівлі. Далі струм по струмовідводу й заземлювачу йде прямо в землю, і конструкція та все, що в ній, не нагріваються й не займаються.

Історично Франклін вважав головним саме перший механізм — поступове «розряджання» хмари. Сучасні дослідження показують, що на практиці основний захист дає саме *перехоплення розряду*: внесок превентивного ефекту в реальне зниження ймовірності удару блискавки значно менший, ніж думали раніше, і це досі є предметом наукової дискусії.

Область простору навколо громовідводу, куди практично не влучає блискавка (оскільки розряд «обирає» ближчий і сильніший осередок поля — сам стрижень), називають *зоною захисту*; її розміри й форма залежать від висоти стрижня і використовуються під час проєктування блискавкозахисту будівель.

4.4. Єдиність розв'язку електростатичної задачі

Задача електростатики зводиться до *знаходження розв'язку* рівняння Пуассона (2.38) (або Лапласа (2.39)). Нагадаємо (§ 2.9), що за *теоремою єдиності* розв'язок, який задовольняє рівняння й граничні умови, єдиний. Тому розв'язок задачі можна *вгадати*: якщо вгадана функція в деякій області задовольняє рівняння Лапласа (або Пуассона) і *умови на границі області*, то вона і є правильним розв'язком.

Для задач із провідниками граничні умови мають простий вигляд: на поверхні кожного провідника потенціал сталий, і задано *або* сам цей потенціал (зокрема, $\varphi = 0$ для заземленого провідника), *або* повний заряд ізольованого провідника. В обох випадках розв'язок єдиний.

Доведення через тотожність Гріна. Це доведення доповнює наведене в § 2.9 і придатне як для заданого на межі потенціалу, так і для заданої нормальної складової поля.

Нехай φ_1 і φ_2 — два розв'язки рівняння Пуассона з однією й тією ж густиною заряду ρ в об'ємі V, що задовольняють однакові умови на межі S цього об'єму. Розглянемо їхню різницю $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$. Вона задовольняє рівняння Лапласа $\nabla^2\psi = 0$ в V, а на S або $\psi = 0$ (задано потенціал), або $\partial\psi/\partial n = 0$ (задано E_n).

Скориставшись першою тотожністю Гріна (B.54) (теоремою про дивергенцію, застосованою до $\psi \operatorname{grad}\psi$):

$$\int_V (\operatorname{grad}\psi)^2\, dV = \oint_S \psi \operatorname{grad}\psi \cdot d\mathbf{S} - \int_V \psi\nabla^2\psi\, dV,$$

бачимо, що обидва доданки праворуч зникають: другий — бо $\nabla^2\psi = 0$ в V, перший — бо на S дорівнює нулю ψ або $\operatorname{grad}\psi \cdot d\mathbf{S} = (\partial\psi/\partial n)\, dS$. Отже,

$$\int_V (\operatorname{grad}\psi)^2\, dV = 0.$$

Підінтегральна функція невід'ємна, тому рівність нулю інтеграла можлива лише за умови $\operatorname{grad}\psi = 0$ в усьому об'ємі V, тобто $\psi = \text{const}$: поля $\mathbf{E}_1$ і $\mathbf{E}_2$ збігаються. Якщо на межі задано потенціал, то $\psi = 0$ на S, і ця стала дорівнює нулю: $\varphi_1 \equiv \varphi_2$. Розв'язок єдиний.

Використання теореми єдиності дуже *спрощує* розв'язання деяких електростатичних задач.

Метод електричних зображень. Метод *ґрунтується на теоремі єдиності* і *полягає у вгадуванні конфігурації зарядів*, у якій поле в цікавій для нас частині простору було б тим же самим, що й у розглядуваній задачі.

Розглянемо ідею цього методу на прикладі, коли точковий заряд q знаходиться біля нескінченної заземленої провідної площини (рис. 4.13).

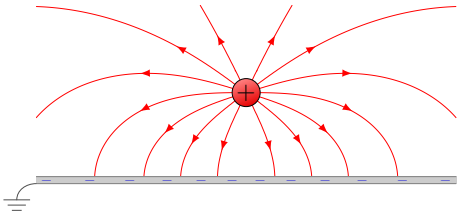


Рис. 4.13. Точковий заряд q поблизу нескінченної заземленої провідної площини.

Як знайти поле у верхній частині простору? Як знайти розподіл заряду на площині?

Можна вгадати таку конфігурацію зарядів, у якої є еквіпотенціальна поверхня з $\varphi = 0$, що збігається з площиною.

Для обчислення поля достатньо ввести *фіктивний заряд-зображення* $q' = -q$, помістивши його по інший бік площини на такій самій відстані від неї, що й заряд q. Дійсно, для будь-якої точки на самій площині відстані до заряду q і до заряду-зображення q' однакові (позначимо цю спільну відстань r) — через дзеркальну симетрію їхнього розташування відносно площини. Тому внески зарядів у потенціал скорочуються:

$$\varphi = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r} = \frac{q}{r} - \frac{q}{r} = 0,$$

і площина справді виявляється еквіпотенціальною поверхнею з $\varphi = 0$ — саме такою, якою має бути заземлена провідна площина.

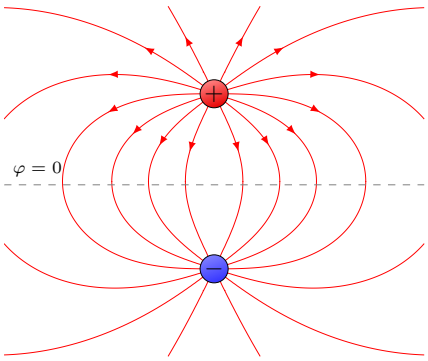
Фіктивний заряд q' створює у верхньому півпросторі точно таке саме поле, як і індуковані заряди на площині (див. рис. 4.14). Зокрема, якщо заряд q перебуває на відстані d від площини, то він притягується до неї з силою, що дорівнює силі притягання до заряду-зображення: $F = q^2/(2d)^2$.

> **!** *Заряд-зображення відтворює правильне поле* лише в тій половині простору, де знаходиться реальний заряд q *(тобто там, де немає провідника). У другій половині — усередині провідника — реальне поле, як показано раніше, дорівнює нулю; поле, яке ніби створює там заряд-зображення, — суто математична фікція, потрібна лише для підбору правильного розв'язку в фізичній області, і жодного стосунку до дійсного поля всередині провідника не має.*

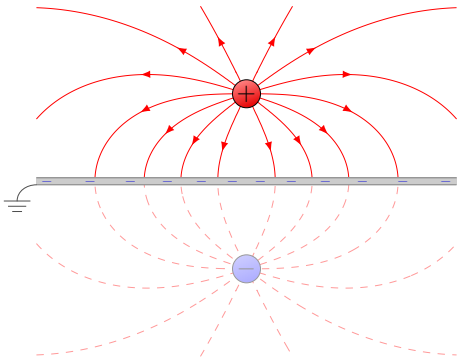
Ідея заряду-зображення лежить в основі опису взаємодії зонда з провідною поверхнею в *електростатичній силовій мікроскопії*: заряджений металевий зонд-вістря, піднесений близько до провідного зразка, індукує на поверхні заряд-зображення, і сила його притягання до поверхні (яку можна оцінити саме методом зображень) використовується для побудови зображення поверхні з нанометровою роздільною здатністю.

Заряд поблизу сферичної поверхні. Розглянемо систему двох різнойменних точкових зарядів, *різних за модулем*. Можна показати, що її еквіпотенціальна поверхня $\varphi = 0$ є сферою (для рівних за модулем зарядів вона вироджується в площину). Це дає змогу застосувати метод зображень до задачі про заряд поблизу провідної сфери (рис. 4.15).

Нехай точковий заряд q розташований на відстані b від центра *заземленої* провідної сфери радіуса R (рис. 4.15а). Поле поза сферою можна знайти, якщо підібрати такий фіктивний заряд-зображення

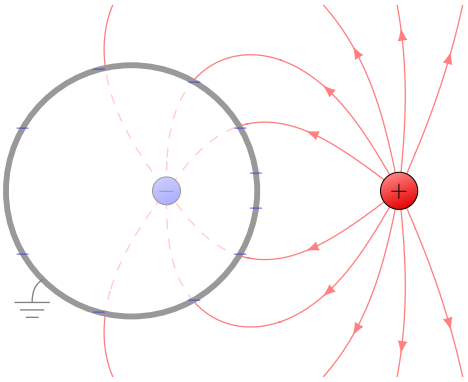


(а) Конфігурація поля двох різнойменних зарядів.

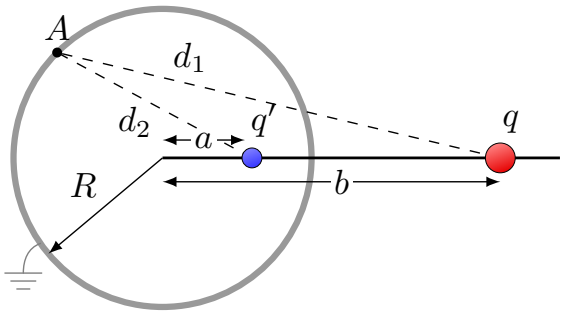


(б) Заряд над площиною та його зображення.

Рис. 4.14. Над площиною картини поля на обох рисунках однакові.



(а) Конфігурація силових ліній.



(б) До розрахунку положення і величини заряду-зображення.

Рис. 4.15. Заряд поблизу заземленої сфери: а — конфігурація силових ліній; б — геометрія для розрахунку положення і величини заряду-зображення.

q', щоб поверхня сфери була еквіпотенціальною з $\varphi = 0$. За теоремою єдиності знайдений так розв'язок і є правильним.

З міркувань симетрії заряд q' лежить на прямій, що з'єднує центр сфери із зарядом q, на відстані a від центра. Вимагаючи $\varphi = 0$ у найближчій і найвіддаленішій від q точках сфери, маємо

$$\frac{q}{b-R} + \frac{q'}{R-a} = 0, \qquad \frac{q}{b+R} + \frac{q'}{R+a} = 0.$$

Розв'язуючи цю систему, отримаємо

$$a = \frac{R^2}{b}, \qquad q' = -\frac{R}{b}\,q. \tag{4.2}$$

Можна перевірити, що за цих значень $\varphi = 0$ не лише у двох вибраних точках, а й на всій сфері. Повний індукований на сфері заряд дорівнює q' (за теоремою Гаусса), а сила притягання заряду q до сфери дорівнює силі його взаємодії із зарядом-зображенням: $F = qq'/(b-a)^2$.

Заряд-зображення лежить на тій самій прямій, що й реальний заряд q, але з протилежного боку від центра сфери, всередині неї. Знак мінус означає, що індукований на сфері заряд має протилежний знак до q.

Якщо сфера *ізольована* й *несе повний заряд* q_0, то одного заряду-зображення вже недостатньо: потенціал ізольованої сфери вже не дорівнює нулю, а її повний заряд має дорівнювати q_0. Тому до заряду q' треба додати другий заряд-зображення q'', розміщений у центрі сфери. Заряд, поміщений точно в центр сфери, створює на її поверхні сталий потенціал q''/R, тож поверхня залишається еквіпотенціальною. Величина q'' визначається з умови, що повний заряд сфери (а за теоремою Гаусса він дорівнює сумі зарядів-зображень усередині неї) дорівнює q_0:

$$q' + q'' = q_0.$$

Отже, поле поза ізольованою зарядженою сферою еквівалентне полю двох фіктивних зарядів: q' на відстані a від центра (рис. 4.15б) і q'' у центрі сфери. Поле всередині провідної сфери при цьому дорівнює нулю, а поле заряду-зображення q' у тій області є суто математичною фікцією, яка не має фізичного змісту.

4.5. Металева куля в однорідному полі

Постановка задачі. Металеву кулю радіуса R вміщено в однорідне зовнішнє електричне поле $\mathbf{E}_0$. Метал — провідник, тому в стані рівноваги вільні заряди в ньому нерухомі, а отже, поле всередині дорівнює нулю:

$$\mathbf{E} = 0, \qquad r < R.$$

Індуковані заряди розташовуються на поверхні кулі (у цілому куля нейтральна). Потрібно знайти поле зовні, розподіл заряду на поверхні та наведений дипольний момент.

Задача має аксіальну симетрію навколо напрямку $\mathbf{E}_0$, тому природно вибрати сферичні координати з полярною віссю вздовж $\mathbf{E}_0$, а початок координат сумістити з центром кулі (рис. 4.16).

Граничні умови на поле. На поверхні металу $r = R$ мають виконуватися дві умови для поля.

Перша: тангенціальна складова неперервна. Це загальна умова для будь-якої межі розділу, і вона випливає з $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$:

$$E_\tau(R + 0) = E_\tau(R - 0).$$

Оскільки всередині поля немає, $E_\tau(R - 0) = 0$, а отже,

$$E_\tau(R + 0) = 0.$$

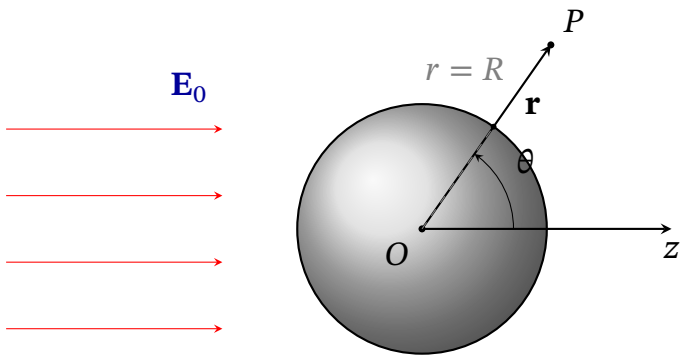


Рис. 4.16. Металева куля радіуса R в однорідному зовнішньому полі $\mathbf{E}_0$. Початок координат O суміщено з центром кулі, полярну вісь напрямлено вздовж $\mathbf{E}_0$. Положення точки P задається радіус-вектором $\mathbf{r}$ та кутом θ між $\mathbf{r}$ і полярною віссю.

Це означає, що зовні поле підходить до поверхні кулі строго перпендикулярно до неї.

Друга: стрибок нормальної складової. Він визначається поверхневим зарядом і випливає з теореми Гаусса:

$$E_r(R+0) - E_r(R-0) = 4\pi\sigma.$$

Оскільки $E_r(R-0) = 0$, маємо

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} E_r(R+0).$$

Зауважимо, що друга умова не обмежує поле: густина σ заздалегідь невідома і просто визначається вже знайденим полем. Отже, задача зводиться до такого: знайти поле зовні кулі, яке на її поверхні не має дотичної складової ($E_\theta(R) = 0$), а на великих відстанях переходить в однорідне поле $\mathbf{E}_0$. Коли таке поле знайдено, друга умова дає розподіл заряду.

Поле зовні кулі. Зовні кулі поле складається із зовнішнього однорідного поля $\mathbf{E}_0$ та поля наведених зарядів на поверхні. Наведений заряд в цілому нейтральний, тому його поле на великих відстанях зменшується як поле диполя. Тому спробуємо («вгадаємо») розв'язок у вигляді

$$\mathbf{E}(r,\theta) = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{\text{дип}},$$

де $\mathbf{E}_{\text{дип}}$ — поле точкового диполя, розташованого в центрі кулі й орієнтованого вздовж $\mathbf{E}_0$, з невідомим поки що моментом $\mathbf{p}$. Якщо вдасться підібрати $\mathbf{p}$ так, щоб виконувалися граничні умови, то за теоремою єдиності цей розв'язок буде *точним* у всьому просторі поза кулею, а не лише на великих відстанях.

У сферичних координатах зручно працювати з компонентами. Для однорідного поля, напрямленого вздовж осі z,

$$E_{0,r} = E_0 \cos\theta, \qquad E_{0,\theta} = -E_0 \sin\theta.$$

Для диполя з моментом $\mathbf{p} = p\,\mathbf{e}_z$ (задача 3.1):

$$E_{\text{дип},r} = \frac{2p\cos\theta}{r^3}, \qquad E_{\text{дип},\theta} = \frac{p\sin\theta}{r^3}.$$

Повне поле зовні:

$$E_r = E_0\cos\theta + \frac{2p\cos\theta}{r^3}, \qquad E_\theta = -E_0\sin\theta + \frac{p\sin\theta}{r^3}.$$

Застосування граничних умов. Підставляємо $r = R$.

З умови $E_\theta(R) = 0$:

$$-E_0\sin\theta + \frac{p\sin\theta}{R^3} = 0 \quad\Longrightarrow\quad p = E_0 R^3.$$

З умови $\sigma = E_r(R)/4\pi$:

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4\pi}\left(E_0\cos\theta + \frac{2p\cos\theta}{R^3}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(E_0\cos\theta + 2E_0\cos\theta\right) = \frac{3}{4\pi}E_0\cos\theta.$$

Отже, умова $E_\theta(R) = 0$ визначила наведений дипольний момент, а поле на поверхні — розподіл поверхневого заряду. Поле біля поверхні $E_r(R) = 3E_0\cos\theta$ найбільше на полюсах кулі ($\theta = 0,\ \pi$), де воно втричі перевищує зовнішнє: саме там у сильних полях насамперед починається пробій повітря.

Остаточні результати. Дипольний момент кулі:

$$\mathbf{p} = R^3\mathbf{E}_0.$$

Поле зовні та всередині кулі:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0, & r \le R, \\ \mathbf{E}_0 - \dfrac{\mathbf{p}}{r^3} + \dfrac{3\,(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^5}, & r > R. \end{cases}$$

Заряди на поверхні:

$$\sigma = \frac{3}{4\pi}E_0\cos\theta = \frac{3}{4\pi}\,\frac{\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{r}}{R} \quad \text{(у гауссовій системі)}.$$

Потенціал поля (для повноти; його легко відновити інтегруванням поля, а сталу вибрано так, щоб потенціал кулі дорівнював нулю):

$$\varphi = \begin{cases} 0, & r \le R, \\ -(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}) + \dfrac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, & r > R. \end{cases}$$

Отже, всередині металевої кулі поле відсутнє, а зовні воно є суперпозицією зовнішнього однорідного поля $\mathbf{E}_0$ і поля індукованого диполя $\mathbf{p}$ (рис. 4.17).

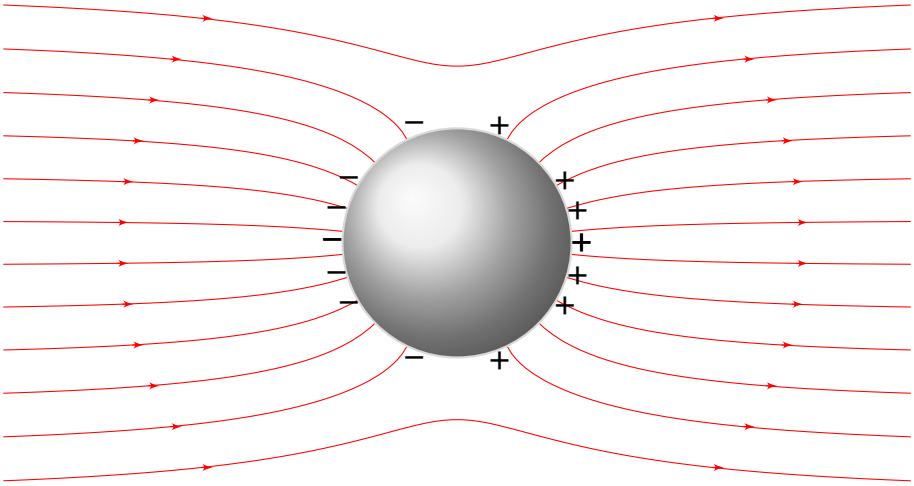


Рис. 4.17. Конфігурація поля навколо металевої кулі, вміщеної в однорідне електричне поле.

4.6. Сили, що діють на поверхню провідника в полі

На малий елемент dS поверхні провідника діє сила:

$$dF = dq\,E' = \sigma dS \cdot E',$$

з боку *поля E' інших зарядів* у місці, де перебуває заряд $dq = \sigma dS$ (власне поле площадки на неї саму не діє). Але прилад може виміряти лише *сумарне поле E*, тобто поле *інших зарядів E'* плюс *власне поле площадки E_σ*, і розрізнити їх не може!

Задача полягає в тому, щоб виразити силу саме через сумарне поле.

Мала площадка поблизу себе діє як нескінченна заряджена площина: її власне поле дорівнює $E_\sigma = 2\pi\sigma$ і напрямлене від площадки в обидва боки (для $\sigma > 0$) — назовні з одного боку і вглиб провідника з іншого. Поле E' інших зарядів у цьому місці однакове з обох боків площадки. Усередині провідника сумарне поле дорівнює нулю:

$$E' - E_\sigma = 0 \quad \Longrightarrow \quad E' = E_\sigma = 2\pi\sigma,$$

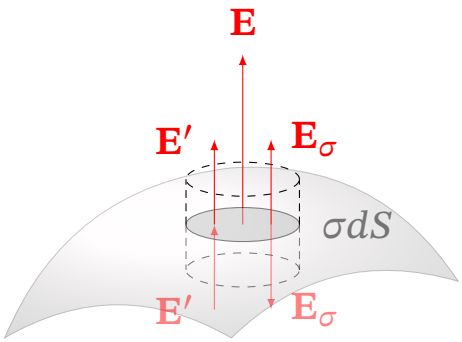


Рис. 4.18. До виведення сили, що діє на поверхню провідника

тобто *густина заряду підлаштовується під поле інших зарядів*! Зовні поля додаються, і гранична умова дає поле у вакуумі біля поверхні:

$$E = E' + E_\sigma = 2E' = 4\pi\sigma.$$

Отже, сила, що діє на одиницю поверхні провідника, дорівнює

$$\frac{dF}{dS} = f = \sigma E' = \frac{1}{2}\sigma E = \frac{E^2}{8\pi}.$$

Вона залежить лише від сумарного поля біля поверхні й завжди напрямлена *назовні* від провідника, незалежно від знака σ: поле ніби «розтягує» поверхню провідника.

Підсумки

Провідник — це речовина з вільними зарядами; в металах ними є *колективізовані* валентні електрони, що підтверджують досліди Толмена та Стюарта. У стані рівноваги поле в об'ємі провідника дорівнює нулю, $\mathbf{E} = 0$, тому об'ємна густина заряду також нульова: надлишковий заряд розташовується лише на поверхні. Поверхня провідника є *еквіпотенціальною*, а на ній виконуються граничні умови $E_n = 4\pi\sigma$, $E_\tau = 0$, тобто силові лінії підходять до неї перпендикулярно. Замкнена провідна оболонка електрично розділяє внутрішній і зовнішній простір: у порожнині без зарядів поля немає (це випливає з теореми про циркуляцію), а заряд усередині порожнини наводить на зовнішній поверхні такий самий заряд. На цьому ґрунтуються електростатичний захист (клітка Фарадея) і генератор Ван де Граафа, а перерозподіл зарядів у зовнішньому полі лежить в основі машини Вімсхерста.

Густина заряду й поле біля поверхні зростають зі збільшенням кривизни ($\sigma \sim 1/R$, $E = 4\pi\sigma$), звідки іонний вітер біля вістря й дія громовідводу. Розв'язок рівнянь Пуассона й Лапласа з заданими граничними умовами *єдиний*; цей факт дає змогу розв'язок *вгадувати*, що й робить метод електричних зображень. Для заземленої площини заряд-зображення $q' = -q$ стоїть дзеркально, а для заземленої сфери

$a = R^2/b$, $q' = -Rq/b$; для ізольованої зарядженої сфери додається другий заряд-зображення q'' у центрі, причому $q' + q'' = q_0$. Металева куля в однорідному полі набуває дипольного моменту $\mathbf{p} = R^3\mathbf{E}_0$; поле всередині неї нульове, а поверхневий заряд $\sigma = \frac{3}{4\pi}E_0\cos\theta$. На поверхню провідника діє напрямлена назовні сила з густиною $f = \frac{1}{2}\sigma E = E^2/8\pi$, яка залежить лише від сумарного поля.

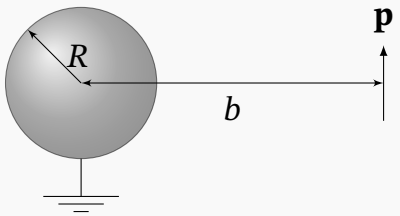
У провіднику заряди рухаються вільно й повністю екранують внутрішнє поле. Більшість речовин, однак, — діелектрики, у яких заряди зв'язані й можуть лише незначно зміщуватися під дією поля. Як таке зміщення (*поляризація*) змінює поле всередині речовини, розглянемо в наступному розділі (розділ 5).

Задачі

4.1. Точковий заряд q розташований на відстані d від нескінченної заземленої металевої площини. Знайдіть густину $\sigma(x)$ індукованого заряду на площині, де x — відстань уздовж площини від точки, що лежить навпроти заряду. Чому дорівнює повний індукований заряд?

4.2. Знайдіть потенціал *незарядженої* і *незаземленої* металевої сфери радіуса R, що перебуває в полі заряду q, розташованого на відстані b ($b > R$) від центра сфери.

4.3. На відстані $b = 10R$ від заземленої незарядженої металевої сфери радіусом R розташований точковий електричний диполь з моментом p, причому вісь диполя перпендикулярна прямій, що сполучає центр сфери з серединою осі диполя (див. рисунок). Знайдіть силу взаємодії між диполем і сферою.



4.4. Знайдіть силу взаємодії двох різнойменно заряджених металевих пластин, що розташовані на малій відстані одна від одної. Поверхнева густина заряду пластин $\pm\sigma$, площа пластин S.

Якщо пластини мають форму дисків радіуса R, чому буде дорівнювати сила взаємодії між ними на відстані $\ell \gg R$?

4.5. Металева сфера радіуса R складена з двох півсфер. Знайдіть силу F, з якою відштовхуються ці півсфери, якщо повний заряд сфери дорівнює Q.

Контрольні питання

1. Що таке провідник з мікроскопічної точки зору? Чому в металах кажуть про «колективізовані» електрони і чим вони відрізняються від електронів, локалізованих на іонах?
2. У чому полягала ідея дослідів Толмена і Стюарта? Як за напрямком відхилення стрілки гальванометра й виміряним питомим зарядом q/m довели, що носіями струму в металах є саме електрони?
3. Чому в стаціонарному стані поле всередині провідника дорівнює нулю? Як з теореми Гаусса випливає, що об'ємна густина заряду в провіднику також дорівнює нулю і всі вільні заряди розташовуються лише на поверхні?
4. Виведіть граничні умови $E_n = 4\pi\sigma$, $E_\tau = 0$ на поверхні провідника. Що вони означають для напрямку силових ліній поля біля поверхні і де ці лінії закінчуються?
5. Чому поверхня провідника є еквіпотенціальною, а потенціал в усьому його об'ємі сталий?
6. Як влаштована електрофорна машина Вімсхерста і на якому фізичному принципі (перерозподіл зарядів під дією поля, позитивний зворотний зв'язок) ґрунтується наростання заряду з кожним обертом?
7. Чи з'являються індуковані заряди на внутрішній поверхні провідника, якщо в порожнині всередині нього немає зарядів? Доведіть це, спираючись на теорему про циркуляцію поля.
8. Чому поле в порожнині замкненої провідної оболонки не залежить від зовнішніх зарядів? Що змінюється, якщо в порожнині є заряд, і навіщо оболонку заземлюють? У чому суть електростатичного захисту (клітки Фарадея) і чому автомобіль чи літак відносно безпечні під час грози?
9. Опишіть принцип роботи електростатичного генератора Ван де Граафа. Чому заряд, занесений стрічкою всередину сфери, повністю переходить на її зовнішню поверхню?
10. Виведіть співвідношення $\sigma \sim 1/R$ і $E \sim 1/R$ для двох з'єднаних провідним дротом куль різного радіуса за однакового потенціалу. Чому цей результат узагальнюється на залежність густини заряду від локального радіуса кривизни поверхні провідника довільної форми?

11 Сформулюйте теорему єдиності розв'язку електростатичної задачі (рівняння Пуассона чи Лапласа з граничними умовами). Які граничні умови задають на поверхнях провідників?

12 У чому полягає метод електричних зображень і на якому факті (теоремі єдиності) він ґрунтується?

13 Виведіть конфігурацію заряду-зображення $q' = -q$ для точкового заряду поблизу нескінченної заземленої провідної площини. Чому ця конфігурація відтворює правильне поле лише в тій половині простору, де знаходиться реальний заряд?

14 Як метод зображень застосовується для заряду поблизу заземленої провідної сфери? Запишіть формули для величини q' і положення a заряду-зображення через R, b і q.

15 Чим відрізняється задача про заряд поблизу ізольованої зарядженої сфери від задачі із заземленою сферою? Скільки зарядів-зображень потрібно в цьому випадку і яка умова на їхню суму?

16 Сформулюйте задачу про металеву кулю в однорідному зовнішньому полі $\mathbf{E}_0$. Які умови визначають розв'язок і яку роль відіграє стрибок нормальної складової поля?

17 Як шукають поле зовні кулі у вигляді суми однорідного поля та поля точкового диполя? Виведіть наведений дипольний момент $\mathbf{p} = R^3\mathbf{E}_0$ із граничної умови $E_\theta(R) = 0$.

18 Виведіть розподіл поверхневого заряду $\sigma(\theta) = \dfrac{3}{4\pi} E_0 \cos\theta$ на металевій кулі в однорідному полі. Де поле біля поверхні кулі найбільше і в скільки разів воно перевищує E_0?

19 Виведіть формулу тиску електричного поля на поверхню провідника $f = E^2/(8\pi)$. Чому сила дорівнює $\frac{1}{2}\sigma E$, а не σE? Куди напрямлена ця сила?

5 Основи електростатики діелектриків

Словом «діелектрик» я позначаю речовину, крізь яку або через яку діють електричні сили.

Майкл Фарадей, «Експериментальні дослідження з електрики», § 1168

У попередніх розділах ми вивчали електричне поле у вакуумі та поведінку в ньому провідників. Тепер розглянемо третій, найпоширеніший клас середовищ — діелектрики: з'ясуємо, яка мікроскопічна природа поляризації речовини, як описати її макроскопічно і як це змінює закони електростатики порівняно з вакуумом.

5.1. Основні поняття

Досі ми розглядали електричне поле у вакуумі та у провідниках. У провідниках, як ми з'ясували, вільні заряди — електрони — під дією як завгодно слабкого поля переміщуються на макроскопічні відстані, аж доки поле всередині провідника не звернеться в нуль. Проте більшість речовин, що оточують нас, — скло, вода, повітря, пластмаси, — поводяться зовсім інакше: внесені в електричне поле, вони не гасять його всередині себе, а лише *послаблюють*. Такі речовини називають *діелектриками*.

Відмінність діелектрика від провідника пов'язана з тим, які заряди є в його структурі. Домовимось умовно розділяти всі заряди речовини на два типи.

1. *Вільні заряди* — це заряди, які можуть переміщатися на великі відстані в речовині (набагато більші за міжатомні відстані). Саме вільні заряди відповідають за струм і за повну компенсацію зовнішнього поля всередині провідника. У діелектриках вільних зарядів, як правило, дуже мало, або немає зовсім.
2. *Зв'язані (поляризаційні) заряди* — це заряди, які під дією зовнішніх полів або сил лише незначно *зміщуються* відносно свого

положення рівноваги (електрон у атомі, іон у вузлі кристалічної ґратки) і повертаються назад, у положення рівноваги, одразу після зняття зовнішнього впливу.

! Діелектриками *називають речовини, в структурі яких є зв'язані заряди, а вільних зарядів дуже мало або зовсім немає. На відміну від провідників, у діелектриках немає носіїв заряду, здатних переміщатися по всьому об'єму тіла: усі заряджені частинки — електрони та ядра — міцно утримуються в межах свого атома чи молекули.*

Мікроскопічне та макроскопічне поле. Щоб коректно описати поведінку речовини в полі, потрібно спершу з'ясувати, про яке саме поле йдеться. Якщо подивитись на речовину на атомному масштабі, електричне поле виявляється надзвичайно нерівномірним: всередині атома чи молекули воно на багато порядків сильніше, ніж у проміжку між молекулами, і різко змінюється від точки до точки та в часі — адже електрони рухаються, атоми коливаються. Таке істинне, швидкозмінне поле називають *мікрополем* $\mathbf{E}_{\text{micro}}$.

Усі макроскопічні прилади — вольтметри, зонди, наші вимірювання — фізично не здатні відстежити настільки швидкі та дрібномасштабні варіації поля. Те, що вони фіксують, — це поле, усереднене по деякому *фізично нескінченно малому* об'єму ΔV: досить малому порівняно з розмірами тіла, щоб вважатися «точкою» в макроскопічному сенсі, але водночас достатньо великому, щоб містити величезну кількість атомів і молекул. Таке *середнє (макроскопічне) поле* визначається як

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int\limits_{\Delta V} \mathbf{E}_{\text{micro}}\, dV.$$

Це поле змінюється в просторі істотно повільніше, ніж мікрополе, і саме його ми надалі й називатимемо просто $\mathbf{E}$, коли говоритимемо про поле всередині речовини.

5.2. Структура діелектриків

Дипольні моменти молекул. За відсутності зовнішнього поля позитивний заряд ядер атомів, що утворюють молекулу, і негативний заряд електронної оболонки в сумі дають нуль, тобто молекула електронейтральна. Проте розподіл цих зарядів у просторі не завжди симетричний. Якщо «центр ваги» позитивного заряду молекули не збігається з «центром ваги» негативного, молекула має власний, сталий

дипольний момент $\mathbf{p}_0$. Причиною такої асиметрії є *різна електронегативність* атомів, що входять до складу молекули: атом з більшою електронегативністю сильніше «притягує» до себе спільну електронну хмару, і на ньому виникає надлишок негативного заряду, тоді як на іншому атомі — надлишок позитивного.

Молекули з ненульовим власним дипольним моментом називають *полярними*. Класичний приклад — молекула води H_2O: через кутову форму молекули (кут між зв'язками O–H становить приблизно 105°) дипольні моменти окремих зв'язків O–H не компенсують одне одного, і молекула в цілому має досить великий дипольний момент (рис. 5.1).



Рис. 5.1. Власні дипольні моменти молекул води та аміаку

Для вимірювання дипольних моментів молекул зручно користуватись позасистемною одиницею — *дебаєм* (позначається *Д* або *D*), названою на честь фізика П. Дебая:

$$1\ \text{Д} = 10^{-18}\ \text{Фр}\cdot\text{см} \approx 3{,}34\cdot 10^{-30}\ \text{Кл}\cdot\text{м}.$$

Таблиця 5.1. Дипольні моменти деяких полярних молекул

Молекула	Дипольний момент (Дебай)
Вуглекислий газ (CO_2)	0
Хлороводень (HCl)	1,08
Аміак (NH_3)	1,46
Вода (H_2O)	1,84

Більшість полярних молекул має дипольний момент порядку 1 Д. Це легко зрозуміти: елементарний заряд, зміщений на типову атомну відстань 1 Å, дає $4{,}8\cdot 10^{-10}\cdot 10^{-8} \approx 4{,}8$ Д, а в молекулі зміщується лише частина заряду. Одиниця широко застосовується у фізичній хімії, атомній і молекулярній фізиці. Дипольні моменти деяких відомих полярних молекул наведено в таблиці 5.1.

Показовим є приклад вуглекислого газу CO_2: попри те, що кожен зв'язок C=O є полярним, молекула лінійна і симетрична, тому дипольні моменти окремих зв'язків повністю компенсують одне одного, і сумарний дипольний момент молекули дорівнює нулю.

Неполярні молекули та наведений дипольний момент. *Неполярні молекули* — це молекули, в яких електричні заряди розподілені симетрично, і власний дипольний момент відсутній ($p_0 = 0$). У таких молекулах атоми зазвичай мають однакову або близьку електронегативність, тому спільна електронна хмара розподілена рівномірно між атомами, або ж молекула має достатньо високу симетрію (як у випадку CO_2). Прикладами неполярних молекул є кисень O_2, азот N_2, метан CH_4, а також окремі атоми інертних газів.

Важливо розуміти, що відсутність *власного* дипольного моменту не означає, що неполярна молекула взагалі не може мати дипольного моменту. У зовнішньому електричному полі позитивно заряджене ядро і негативно заряджена електронна хмара зміщуються в протилежні боки: ядро — за полем, електрони — проти поля (рис. 5.2). В результаті «центри ваги» позитивного та негативного зарядів розходяться, і в молекулі виникає *наведений (індукований) дипольний момент*, пропорційний прикладеному полю:

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}, \tag{5.1}$$

де коефіцієнт α називають *поляризовністю молекули*.



(а) без поля: $p = 0$ (б) у зовнішньому полі $\mathbf{E}$: $p \neq 0$

Рис. 5.2. Неполярна молекула без зовнішнього поля та в зовнішньому полі

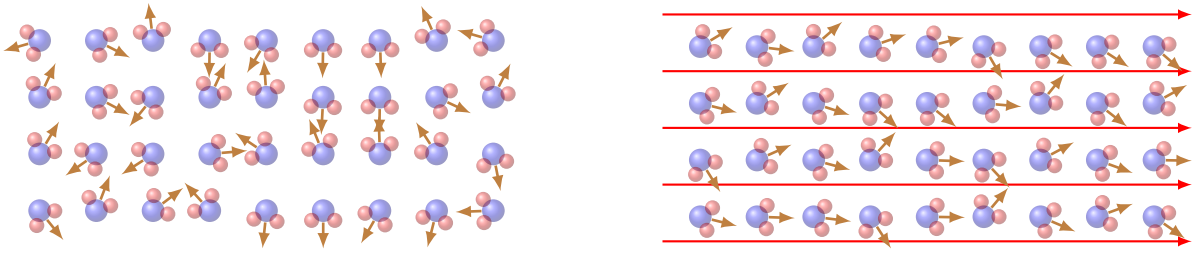
Цей механізм появи дипольного моменту називають *електронною (деформаційною) поляризацією*. Наведений момент визначається *відносним* зміщенням електронної хмари та ядра; оскільки електрони дуже легкі, цей механізм встигає за полем навіть на оптичних частотах. На відміну від орієнтаційного механізму, який ми розглянемо в § 5.7, електронна поляризовність практично не залежить від температури.

5.3. Поляризація діелектриків

! Поляризація — *це просторовий* перерозподіл зв'язаних зарядів, *що призводить до виникнення об'ємного дипольного моменту середовища. Поляризація може виникати як під дією зовнішнього електричного поля, так і під впливом інших зовнішніх чинників — механічної деформації, зміни температури тощо.*

Розглянемо, як відбувається поляризація в двох основних класах діелектриків.

- *Полярні діелектрики* складаються з полярних молекул, кожна з яких уже має власний дипольний момент $\mathbf{p}_0 \neq 0$. За відсутності зовнішнього поля теплове (хаотичне) обертання молекул орієнтує їхні дипольні моменти цілком випадково в усіх напрямках, тому в будь-якому фізично малому об'ємі дипольні моменти в середньому взаємно компенсуються, і сумарний дипольний момент речовини дорівнює нулю. Коли ж прикладене зовнішнє поле, воно створює момент сил, що прагне розвернути кожен диполь уздовж поля (див. формулу $\mathbf{M} = [\mathbf{p} \times \mathbf{E}]$, отриману в розділі 3). Тепловий рух заважає ідеальному впорядкуванню, проте певна переважна орієнтація вздовж поля все ж встановлюється — виникає так звана *орієнтаційна поляризація* (рис. 5.3).



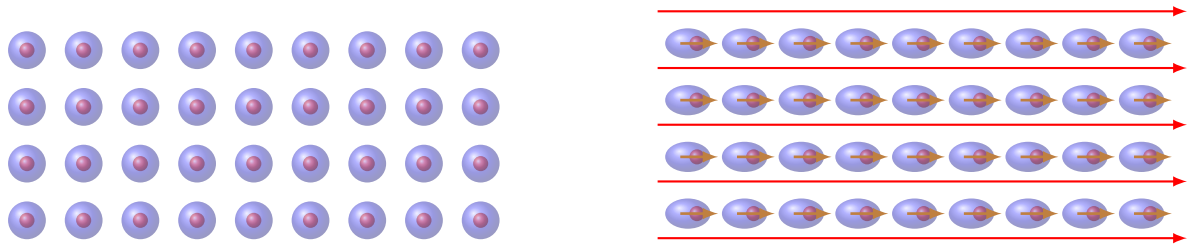
(а) Без поля (б) У полі

Рис. 5.3. Поляризація полярних молекул: (а) — без поля; (б) — у зовнішньому електричному полі, диполі орієнтуються вздовж поля.

- *Неполярні діелектрики* складаються з неполярних молекул, у яких за відсутності поля центри позитивного й негативного зарядів збігаються. Зовнішнє поле зміщує електронні хмари відносно ядер (5.1), і в кожній молекулі виникає наведений дипольний момент, зорієнтований уздовж поля, — *електронна поляризація* (рис. 5.4).

У випадку іонних кристалів (наприклад, NaCl) існує ще один механізм — *іонна поляризація*: позитивні та негативні іони кристалічної ґратки під дією поля зміщуються один відносно одного як цілі підґратки, що також створює об'ємний дипольний момент. Детальніше про всі три механізми (електронний, іонний, орієнтаційний) і про те, як кожен із них залежить від частоти поля й температури, йтиметься в § 5.7.

В обох випадках — полярних і неполярних діелектриків — результат один: на межах виділеного в речовині об'єму з'являються надлишкові (некомпенсовані) зв'язані заряди, тоді як в основному об'ємі речовини позитивні та негативні заряди сусідніх диполів



(а) Без поля (б) У полі

Рис. 5.4. Поляризація неполярних молекул: (а) — без поля; (б) — у зовнішньому електричному полі молекули деформуються, утворюючи індукований дипольний момент.

взаємно компенсують одне одного. Саме ці надлишкові поверхневі заряди і створюють власне поле речовини $\mathbf{E}'$, яке, за принципом суперпозиції, додається до зовнішнього поля $\mathbf{E}_{\text{ex}}$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{ex}} + \mathbf{E}'.$$

Оскільки диполі орієнтуються так, що їхні позитивні полюси «дивляться» за полем, а негативні — проти поля, власне поле $\mathbf{E}'$ усередині діелектрика, як правило, спрямоване *назустріч* зовнішньому, і сумарне поле *послаблюється*. Наскільки саме — залежить від форми тіла та його орієнтації. У пластині, перпендикулярній до поля, поле слабшає в ε разів, у кулі — в $(\varepsilon + 2)/3$ раза, а в пластині, паралельній полю, не змінюється взагалі: зв'язані заряди виступають лише на її вузьких торцях і всередині пластини поля майже не створюють (задача 5.3).

На рисунку 5.5 схематично показано поляризований діелектрик у зовнішньому електричному полі: на протилежних поверхнях виділеного об'єму виникають некомпенсовані зв'язані заряди $-Q$ та $+Q$, власне поле яких спрямоване назустріч зовнішньому.



Рис. 5.5. Поляризований діелектрик у зовнішньому електричному полі: на поверхнях виникають зв'язані заряди $-Q$ та $+Q$. Стрілки означають: → — зовнішнє поле $\mathbf{E}_{\text{ex}}$; ⇠ — поле зв'язаних зарядів $\mathbf{E}'$; → — вектор поляризації $\mathbf{P}$ (збігається за напрямком із результуючим полем $\mathbf{E}$).

Електрострикція. Уміщення діелектрика в електричне поле призводить не лише до поляризації, а й до *зміни розмірів тіла* — явища, яке називають *електрострикцією*. Електрострикція спостерігається в усіх без винятку діелектриках, проте в переважній більшості матеріалів виражена слабко: деформація пропорційна *квадрату* поля, $\Delta\ell \sim E^2$, тому не залежить від напрямку поля (зміна знака поля не змінює знака деформації) і стає помітною лише в дуже сильних полях. У техніці електрострикцію (у кристалах без центра симетрії) «перекриває» значно сильніший і лінійний за полем *п'єзоефект* (§ 5.8), тому як самостійне явище електрострикція застосовується рідше.

5.4. Вектор поляризації

Для кількісного опису стану поляризованого діелектрика вводять *макроскопічну* характеристику — *вектор поляризації* (або *поляризованість*), який дорівнює дипольному моменту одиниці об'єму речовини:

$$\boxed{\mathbf{P} = \frac{1}{V}\sum_i \mathbf{p}_i,} \tag{5.2}$$

де підсумовування проводиться за всіма молекулярними диполями $\mathbf{p}_i$, що потрапляють у фізично малий об'єм V.

Для великого класу ізотропних діелектриків (гази, більшість рідин та аморфних твердих тіл) у не надто сильних полях експериментально встановлено, що поляризованість лінійно залежить від напруженості поля *в самому діелектрику*:

$$\boxed{\mathbf{P} = \chi\mathbf{E},} \tag{5.3}$$

де безрозмірна величина $\chi > 0$ називається *діелектричною сприйнятливістю* речовини. Сприйнятливість — макроскопічний аналог *поляризовності* окремої молекули α (формула (5.1)): α описує відгук однієї молекули, χ — одиниці об'єму речовини, а нетривіальний зв'язок між ними — предмет § 5.7. (Термін «поляризовність» ми надалі вживаємо лише для атомів і молекул.) Сприйнятливість χ не залежить від $\mathbf{E}$ і характеризує властивості самого діелектрика (тип молекул, їхню концентрацію, температуру тощо). Такі діелектрики називають *лінійними*.

! *Не всі діелектрики є лінійними. Існують діелектрики, для яких просте співвідношення* $\mathbf{P} = \chi\mathbf{E}$ *не виконується. По-перше, в анізотропних кристалах (із симетрією, нижчою за кубічну) сприйнятливість, взагалі кажучи, є не скаляром, а* тензором*:* $P_i = \sum_j \chi_{ij} E_j$ *— поле вздовж однієї кристалографічної осі породжує складові поляризації й уздовж інших осей. По-друге, у досить сильних полях (наприклад, лазерних)* $\mathbf{P}$ *перестає бути лінійною функцією поля:* $P_i = \sum_j \chi^{(1)}_{ij} E_j + \sum_{jk} \chi^{(2)}_{ijk} E_j E_k + \ldots$ *— саме на цьому ґрунтується нелінійна оптика. По-третє, у* сегнетоелектриках *зв'язок між* $\mathbf{P}$ *і* $\mathbf{E}$ *нелінійний і до того ж неоднозначний (гістерезис), а в* електретах *поляризація існує й без поля взагалі (§ 5.8).*

Однорідна та неоднорідна поляризація. Поляризацію називають *однорідною*, якщо вектор $\mathbf{P}$ є сталим у всьому об'ємі речовини, $\mathbf{P} = \text{const}$, і *неоднорідною*, якщо $\mathbf{P}$ змінюється від точки до точки.

Однорідна поляризація. Нехай поляризація однорідна. Розглянемо косокутний паралелепіпед, вирізаний із поляризованої речовини так, що його бічне ребро паралельне вектору поляризації $\mathbf{P}$ (рис. 5.6). Якщо S — площа основи (торцевої грані), а ℓ — довжина бічного ребра паралелепіпеда, то його об'єм дорівнює $V = S\ell\cos\theta$, де θ — кут між ребром ℓ і нормаллю до основи.

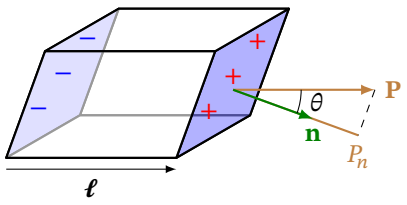


Рис. 5.6. Косокутний паралелепіпед, вирізаний з однорідно поляризованого діелектрика уздовж вектора поляризації $\mathbf{P}$

Диполі всередині такого паралелепіпеда шикуються «голова до хвоста»: позитивний заряд одного диполя сусідить з негативним зарядом наступного, і в об'ємі речовини ці заряди взаємно компенсуються. Некомпенсованими лишаються тільки заряди на двох торцевих гранях: на одній виступає надлишковий позитивний заряд, на іншій — негативний. Тому весь паралелепіпед еквівалентний одному великому диполю з дипольним моментом $\mathbf{p} = \sigma' S\ell$, де σ' — поверхнева густина *зв'язаного (поляризаційного)* заряду на торцевій грані. З іншого боку, за означенням (5.2), дипольний момент паралелепіпеда дорівнює $\mathbf{p} = \mathbf{P}\cdot V = \mathbf{P}\, S\ell\cos\theta$. Прирівнюючи обидва вирази і враховуючи, що $\mathbf{P}\cdot\mathbf{n} = P\cos\theta$ (де $\mathbf{n}$ — зовнішня нормаль до грані), отримуємо просту й важливу формулу:

$$\boxed{\mathbf{P}\cdot\mathbf{n} = P_n = \sigma'.} \qquad (5.4)$$

! *Нормальна складова вектора поляризації на поверхні діелектрика чисельно дорівнює поверхневій густині зв'язаного заряду, що виступає на цій поверхні. Там, де вектор* **P** *спрямований* із *речовини (нормальна складова додатна), на поверхні виступає позитивний зв'язаний заряд; там, де* **P** *спрямований* у *речовину, — негативний.*

Неоднорідна поляризація. Нехай тепер поляризація неоднорідна, і в товщі речовини виділено об'єм V довільної форми, обмежений замкненою поверхнею S. Кожен малий елемент поверхні dS можна, як і вище, вважати гранню елементарного косокутного паралелепіпеда, тому на ньому виступає поверхневий зв'язаний заряд $dq' = \sigma' dS = P_n\, dS$.

Підсумовуючи (інтегруючи) цей вираз за всією замкненою поверхнею, знаходимо повний заряд, що вийшов на зовнішню поверхню виділеного об'єму:

$$q'_{\text{пов}} = \oint\limits_S P_n\, dS.$$

Але сама речовина, з якої вирізано цей об'єм, електронейтральна: поляризація лише *перерозподіляє* наявні заряди, не створюючи нових. Тому якщо на зовнішню поверхню вийшов заряд $q'_{\text{пов}}$, то всередині об'єму мусив залишитися зв'язаний заряд протилежного знака, розподілений з об'ємною густиною ρ':

$$\oint\limits_S \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S} = \oint\limits_S P_n\, dS = -\int\limits_V \rho'\, dV. \tag{5.5}$$

Це співвідношення називають *теоремою Гаусса для вектора поляризації*: воно за формою повністю аналогічне теоремі Гаусса для поля **E** (§ 2.4), проте зв'язує потік вектора **P** не з повним, а лише зі *зв'язаним* зарядом, узятим із протилежним знаком.

Так само як ми переходили від інтегральної форми теореми Гаусса для **E** до диференціальної, стягуючи об'єм V у точку, з формули (5.5) отримуємо *диференціальну форму теореми Гаусса для вектора поляризації*:

$$\nabla\cdot\mathbf{P} = -\rho'. \tag{5.6}$$

Дивергенція вектора поляризації в даній точці дорівнює об'ємній густині зв'язаного заряду в цій точці, узятій зі знаком мінус. У окремому випадку однорідної поляризації, коли $\mathbf{P} = \text{const}$, маємо $\nabla\cdot\mathbf{P} \equiv 0$, а отже, і $\rho' = 0$: об'ємний зв'язаний заряд в однорідно поляризованому діелектрику відсутній, увесь надлишковий заряд зосереджений на

поверхні, що узгоджується з розглянутим вище прикладом паралелепіпеда.

5.5. Вектор електричної індукції

Електричне поле всередині речовини створюється не лише вільними, а й зв'язаними (поляризаційними) зарядами. Тому в теоремі Гаусса для поля $\mathbf{E}$ (яка, нагадаємо, є універсальним законом і виконується для будь-яких зарядів) слід урахувати обидва типи зарядів — і вільні ρ, і зв'язані ρ':

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 4\pi(\rho + \rho').$$

Скориставшись знайденим щойно співвідношенням (5.6), а саме $\rho' = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{P}$, отримуємо:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho - 4\pi\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{P} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = 4\pi\rho.$$

Вираз у дужках зручно позначити окремим символом і назвати *вектором електричної індукції*:

$$\boxed{\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}.} \tag{5.7}$$

Тоді теорема Гаусса для електричного поля *в речовині* набуває вигляду:

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho,} \tag{5.8}$$

а в інтегральній формі — відповідно

$$\boxed{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \int_V \rho \, dV.} \tag{5.9}$$

! *У формулювання теореми Гаусса для поля в речовині входять* тільки вільні заряди ρ. *Внесок зв'язаних (поляризаційних) зарядів уже враховано — він «захований» усередині означення вектора індукції* $\mathbf{D}$. *Саме тому вектор* $\mathbf{D}$ *є надзвичайно зручним інструментом: для обчислення його потоку крізь довільну поверхню достатньо знати лише розподіл* вільних *зарядів, які, на відміну від зв'язаних, як правило, відомі заздалегідь (наприклад, задані зарядом на обкладках конденсатора).*

Підкреслимо: на відміну від $\mathbf{E}$, вектор $\mathbf{D}$ *не* є силовим полем — він не діє безпосередньо на пробний заряд. Це допоміжна, розрахункова величина. Те, що *джерелами* $\mathbf{D}$ є лише вільні заряди, треба розуміти саме в сенсі дивергенції: від вільних зарядів залежить потік

D крізь замкнену поверхню. Саме ж поле **D** залежить і від форми діелектрика: оскільки $\nabla\times\mathbf{D} = 4\pi\nabla\times\mathbf{P}$, на межах діелектрика **D**, узагалі кажучи, має «вихори» і не є потенціальним. Тому знайти **D** лише за вільними зарядами можна тільки в задачах із високою симетрією (сферичною, циліндричною, плоскою), коли для цього досить теореми Гаусса. Приклад протилежної ситуації — електрет (§ 5.8): вільних зарядів немає зовсім, а поле **D** є.

Діелектрична проникність. Для лінійних діелектриків, у яких справедливе співвідношення (5.3), вектор індукції теж виявляється пропорційним **E**:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \mathbf{E} + 4\pi\chi\mathbf{E} = (1 + 4\pi\chi)\mathbf{E}.$$

Позначаючи

$$\boxed{\varepsilon = 1 + 4\pi\chi,} \tag{5.10}$$

отримуємо просте й дуже часто використовуване співвідношення

$$\boxed{\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}.} \tag{5.11}$$

Величину ε називають *діелектричною проникністю* середовища. Для звичайних (не сегнетоелектричних) речовин у постійних полях $\chi > 0$, тому $\varepsilon > 1$: діелектрична проникність будь-якого «нормального» діелектрика перевищує одиницю. Для вакууму, в якому поляризація відсутня ($\chi = 0$), маємо $\varepsilon = 1$, і вектори **D** та **E** збігаються.

Для порівняння наведемо порядки величин ε для кількох типових речовин (постійне поле, кімнатна температура):

Речовина	ε
Повітря (сухе)	1,0006
Вода	81
Скло	5–7
Титанат барію ($BaTiO_3$)	10^3–10^4

Бачимо, що для газів ε дуже близька до одиниці (молекули далеко одна від одної), для рідин і твердих тіл — суттєво більша, а для сегнетоелектриків (§ 5.8) сягає аномально великих значень.

Приклад. Розглянемо точковий заряд Q, вміщений у нескінченний однорідний діелектрик з проникністю ε (рис. 5.7). Через сферичну симетрію задачі, за теоремою Гаусса для вектора **D**, як і у випадку поля у вакуумі,

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r},$$

а звідси, користуючись (5.11), знаходимо напруженість поля безпосередньо в діелектрику:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Оскільки $\varepsilon > 1$, поле точкового заряду в діелектрику всюди *слабкіше*, ніж таке саме поле у вакуумі. Наприклад, у воді ($\varepsilon \approx 81$) поле на тій самій відстані від заряду слабкіше у 81 раз, а у склі ($\varepsilon \approx 5$) — у 5 разів. Це прямий кількісний прояв уже відомого нам якісного результату: *поляризаційні заряди, що виникають навколо заряду Q, послаблюють його поле*. Справді, біля самого заряду Q зосереджується зв'язаний заряд протилежного знака $-Q(\varepsilon-1)/\varepsilon$ (задача 5.4), тож здалеку заряд «виглядає» як Q/ε.

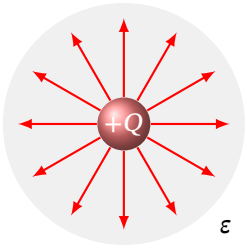


Рис. 5.7. Точковий заряд у нескінченному однорідному діелектрику

5.6. Граничні умови в присутності діелектриків

Як і у випадку поля у вакуумі (§ 2.8), на межі розділу двох середовищ (двох діелектриків, або діелектрика й вакууму) поле може змінюватись стрибком. Знайдемо, як пов'язані значення полів по обидва боки межі.

Перша гранична умова (для нормальної складової D). Застосуємо теорему Гаусса для вектора **D** до нескінченно малого циліндра, що охоплює невелику ділянку межі розділу середовищ 1 та 2, так само, як ми робили це для поля **E** на поверхні провідника (рис. 5.8). Нехай σ — поверхнева густина *вільного* заряду на межі розділу (якщо він там є). Потоком через бічну поверхню циліндра, висота якого прямує до нуля, нехтуємо. Враховуючи, що $d\mathbf{S}_2 = -d\mathbf{S}_1 = \mathbf{n}\,dS$, де **n** — нормаль, спрямована з середовища 1 у середовище 2, маємо

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi\sigma\,dS \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{D}_2\cdot d\mathbf{S}_2 + \mathbf{D}_1\cdot d\mathbf{S}_1 \equiv (D_{2n} - D_{1n})\,dS = 4\pi\sigma\,dS,$$

звідки

$$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma.} \qquad (5.12)$$

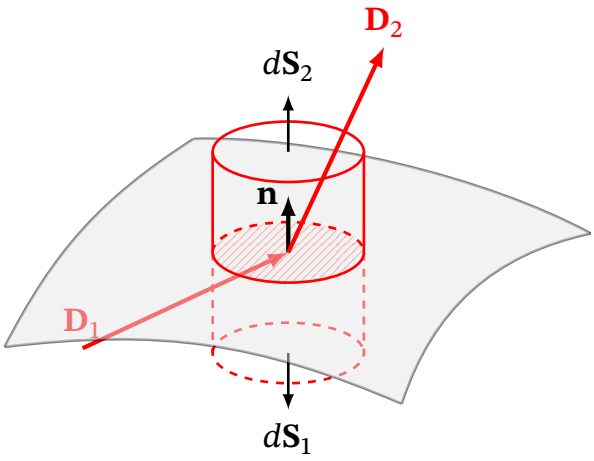


Рис. 5.8. Циліндр Гаусса на межі розділу двох середовищ для виведення граничної умови на нормальну складову **D**

> ! *Нормальна складова вектора* **D** *зазнає стрибка при переході через границю розділу середовищ* лише за наявності на ній вільних зарядів. *Якщо вільних зарядів на межі розділу немає* ($\sigma = 0$), *то* $D_{1n} = D_{2n}$, *і стрибка немає — на відміну від нормальної складової* **E**, *яка, узагалі кажучи, все одно змінюється стрибком через наявність зв'язаних поверхневих зарядів!*

Друга гранична умова (для тангенціальної складової E). Ця умова не пов'язана з наявністю діелектрика і виводиться так само, як і раніше (§ 2.8), із теореми про циркуляцію вектора **E** уздовж нескінченно малого прямокутного контуру L, що проходить по обидва боки межі розділу (рис. 5.9); ця теорема залишається справедливою в будь-якому середовищі — адже електростатичне поле завжди потенціальне, незалежно від того, вакуум це чи діелектрик:

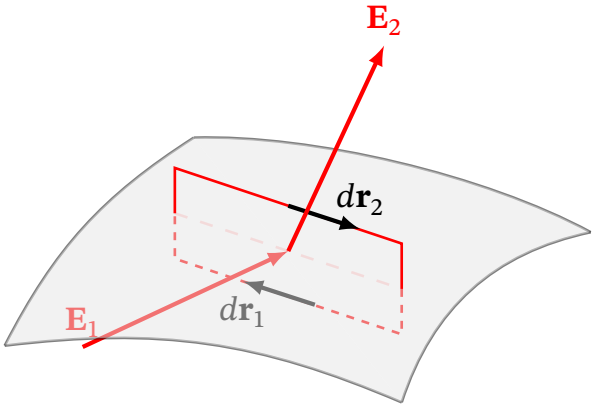


Рис. 5.9. Контур циркуляції на межі розділу двох середовищ для виведення граничної умови на тангенціальну складову **E**

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \qquad (5.13)$$

Тангенціальна складова **E** однакова по обидва боки межі розділу і не зазнає стрибка.

Заломлення силових ліній на границі діелектрика. Розглянемо межу розділу двох однорідних лінійних діелектриків із проникностями ε_1 та ε_2, на якій вільні заряди відсутні. Нехай силова лінія поля $\mathbf{E}_1$ (а отже, і $\mathbf{D}_1$) у середовищі 1 утворює кут α_1 з нормаллю до межі, а в середовищі 2 — кут α_2 (рис. 5.10). Граничні умови (5.12) (без вільних зарядів) та (5.13) дають:

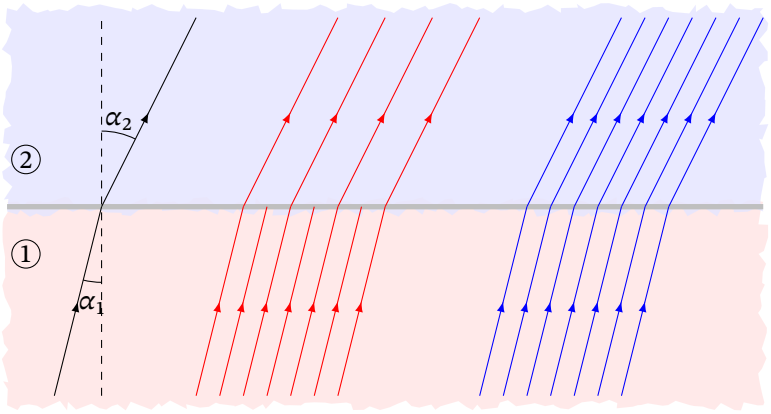


Рис. 5.10. Заломлення силових ліній **E** і **D** на межі розділу двох діелектриків

$$\begin{cases} E_{1\tau} = E_{2\tau} & \Longrightarrow \quad E_1 \sin\alpha_1 = E_2 \sin\alpha_2, \\ D_{1n} = D_{2n} & \Longrightarrow \quad \varepsilon_1 E_1 \cos\alpha_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\alpha_2. \end{cases}$$

Поділивши перше рівняння на друге, отримуємо *закон заломлення силових ліній*:

$$\boxed{\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.} \qquad (5.14)$$

! *Лінії векторів* **E** *і* **D** *заломлюються на межі двох діелектриків за однаковим законом* (5.14). *У середовищі з* більшим *значенням діелектричної проникності лінії поля утворюють* більший *кут із нормаллю до межі розділу — тобто «притискаються» до поверхні. Зовні це нагадує заломлення світлового променя на межі двох оптичних середовищ, але аналогія лише візуальна: тут закон зв'язує тангенси кутів, а не синуси, і діє у протилежний бік — в оптично густішому середовищі промінь, навпаки, наближається до нормалі.*

5.7. Мікроскопічна теорія діелектричної проникності

Ми ввели діелектричну проникність ε як *феноменологічну* величину: ми знаємо, як її виміряти (через ємність конденсатора) і як нею користуватися в розрахунках. З'ясуємо тепер, як ε пов'язана з властивостями окремих молекул.

Механізми поляризовності молекули. У зовнішньому полі $\mathbf{E}$ молекула набуває наведеного дипольного моменту $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}$ (формула (5.1)). Але *звідки* береться цей момент — питання не одне, а фізично різне залежно від будови молекули:

- α_e — *електронна*: поле зміщує легку електронну хмару відносно ядра. Є *в усіх* атомах і молекулах без винятку, встигає за полем аж до оптичних частот ($\sim 10^{15}$ Гц);
- α_i — *іонна*: у іонних кристалах поле зміщує одні іони відносно інших (маса набагато більша за електронну) — «вимикається» вже в ІЧ-діапазоні;
- $\alpha_{\text{ор}}$ — *орієнтаційна*: якщо молекула *вже має* власний дипольний момент p_0 (полярна молекула), поле не наводить, а *розвертає* його. Найповільніший і найчутливіший до T механізм — «вимикається» вже у НВЧ-діапазоні.

Повна поляризовність на даній частоті — сума тих внесків, які встигають за полем. У статичному полі діють усі три: $\alpha = \alpha_e + \alpha_i + \alpha_{\text{ор}}$.

Орієнтаційна поляризація полярних діелектриків. Полярна молекула ($p_0 \neq 0$) в полі $\mathbf{E}$ має потенціальну енергію

$$U(\theta) = -\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E} = -p_0 E \cos\theta$$

(§ 3.5), де θ — кут між диполем і полем; енергія мінімальна ($U = -p_0E$) при орієнтації вздовж поля, максимальна ($U = +p_0E$) — проти поля. За відсутності поля тепловий рух орієнтує диполі цілком хаотично; у полі ж число молекул, орієнтованих в одиничний тілесний кут навколо напрямку θ, підкоряється *розподілу Больцмана* (n_0 — стала нормування, $n_0 = n/4\pi$ за відсутності поля):

$$n(\theta) = n_0\, e^{-U/kT} = n_0\, e^{+p_0 E\cos\theta/kT}. \tag{5.15}$$

Це й означає порушення хаосу: молекул, орієнтованих вздовж поля ($\cos\theta = 1$, менша енергія), *експоненційно більше*, ніж орієнтованих проти поля ($\cos\theta = -1$).

У практично важливому випадку — не надто сильне поле й не надто низька температура, $p_0E \ll kT$ — показник експоненти малий,

тож розподіл (5.15) можна розкласти в ряд і обмежитись лінійним членом:

$$n(\theta) \approx n_0 \left(1 + \frac{p_0 E \cos\theta}{kT}\right). \tag{5.16}$$

Фізично: за кімнатної температури $kT \approx 4\cdot 10^{-14}$ ерг, а для $p_0 = 1$ Д у полі $E = 10^5$ В/см (≈ 330 од. СГС) енергія орієнтації $p_0 E \approx 3\cdot 10^{-16}$ ерг — приблизно на два порядки менша. Тому переважна орієнтація — *слабка* поправка до майже хаотичного розподілу, а не повне вишикування диполів вздовж поля.

Поляризація P — це дипольний момент одиниці об'єму. У напрямку, перпендикулярному полю, внески різних диполів у середньому компенсуються (за симетрією $\theta \to \pi - \theta$); вздовж поля — ні. Тому P напрямлена вздовж поля і дорівнює добутку концентрації молекул n на середню проєкцію дипольного моменту:

$$P = n\, p_0 \overline{\cos\theta} = n p_0 \cdot \frac{\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\theta\, n(\theta)\, 2\pi \sin\theta\, d\theta}{\displaystyle\int_0^{\pi} n(\theta)\, 2\pi \sin\theta\, d\theta}.$$

Підставляючи сюди лінеаризований розподіл (5.16) і виконуючи інтегрування за кутом (у знаменнику лишається n_0, у чисельнику — лише доданок з $\cos\theta$, оскільки $\int \cos\theta\, d\Omega = 0$, а $\int \cos^2\theta\, d\Omega = 4\pi/3$), одержуємо

$$\boxed{P = \frac{n p_0^2}{3kT} E.} \tag{5.17}$$

Це і є *закон Ланжевена–Дебая*: поляризація речовини лінійна за полем, а коефіцієнт пропорційності явно виражений через мікроскопічні характеристики молекули (p_0) і речовини (n, T).

Оскільки за означенням $P = \chi E$, порівняння з (5.17) одразу дає сприйнятливість речовини (а заразом і орієнтаційну поляризовність *однієї* молекули, $\chi = n\alpha_{\text{ор}}$):

$$\chi = \frac{n p_0^2}{3kT} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_{\text{ор}} = \frac{p_0^2}{3kT}.$$

Підставляючи χ в означення проникності $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$, знаходимо макроскопічний результат:

$$\boxed{\varepsilon = 1 + \frac{4\pi n p_0^2}{3kT}.} \tag{5.18}$$

Тут ми врахували лише орієнтаційний внесок і знехтували електронним: для сильно полярних молекул α_e значно менше за $p_0^2/3kT$ (задача 5.6). З його урахуванням $\varepsilon = 1 + 4\pi n\left(\alpha_e + p_0^2/3kT\right)$. Обидві формули

справедливі для газів, де поле, що діє на молекулу, практично збігається із середнім (§ 5.7).

! *$\alpha_{ор} \sim 1/T$ — закон Кюрі: чим вища температура, тим інтенсивніший тепловий рух, який руйнує впорядкування диполів. Якщо є речовини помітно спадає з ростом T — пряма ознака, що діелектрик полярний (електронна й іонна поляризовність від T практично не залежать, § 5.7).*

Неполярні діелектрики. Формула Клаузіуса–Моссотті. Для розріджених середовищ справджується просте співвідношення $\chi = n\alpha$: кожна молекула відчуває лише зовнішнє (середнє) поле $\mathbf{E}$, бо наведений момент окремої молекули за означенням α (формула (5.1)) визначається саме тим полем, яке *реально діє* на неї, $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}_{\text{лок}}$, а не середнім полем $\mathbf{E}$ у речовині. У розрідженому газі відстані між молекулами великі, тож поле, яке створюють на місці обраної молекули всі *інші*, вже поляризовані нею молекули, — нехтовно мале порівняно із зовнішнім: $\mathbf{E}_{\text{лок}} \approx \mathbf{E}$. Тому поляризація речовини (дипольний момент одиниці об'єму з концентрацією n) — це просто

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p} = n\alpha\mathbf{E}_{\text{лок}} \approx n\alpha\mathbf{E},$$

звідки, порівнюючи з означенням $\mathbf{P} = \chi\mathbf{E}$, і виходить $\chi \approx n\alpha$.

У густому ж середовищі кожна молекула занурена в поле *вже поляризованих* сусідів, тож реальне (локальне) поле $\mathbf{E}_{\text{лок}}$, що на неї діє, — не $\mathbf{E}$, а деяка відмінна від нього величина, яку й належить знайти.

Оточимо обрану молекулу уявною сферою Лоренца (яка мала порівняно з тілом, однак велика порівняно з міжмолекулярними відстанями). Поле, що діє на молекулу, — це сума трьох внесків (рис. 5.11): середнє поле $\mathbf{E}$; мінус поле кулі-вирізу, $+\frac{4\pi}{3}\mathbf{P}$ (див. задачу 5.2); і поле дискретних сусідів усередині сфери. Для кубічних кристалів, газів і слабополярних рідин останній внесок за симетрією дорівнює нулю, звідки

$$\boxed{\mathbf{E}_{\text{лок}} = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P}.} \qquad (5.19)$$

! *Наближення: працює для кубічних кристалів і більшості неполярних/слабополярних речовин. Для сильно полярних рідин з водневими зв'язками (вода) — потребує уточнення (теорія Онзагера).*

Маючи локальне поле (5.19), запишемо наведений момент молекули саме через нього: $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}_{\text{лок}}$. Тоді для поляризації (дипольного

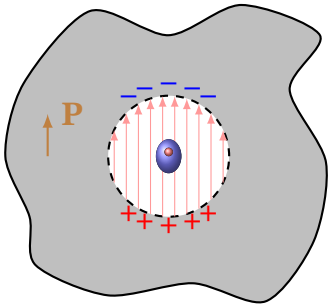


Рис. 5.11. Сферична порожнина Лоренца в поляризованому діелектрику

моменту одиниці об'єму з концентрацією молекул n) маємо

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p} = n\alpha\mathbf{E}_{\text{лок}} = n\alpha\left(\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P}\right).$$

Це — рівняння відносно самої $\mathbf{P}$: вона входить і в ліву, і в праву частину, бо локальне поле саме поляризацією середовища й визначається (задача самоузгоджена — поляризація створює поле, яке, своєю чергою, впливає на поляризацію). Розкриваючи дужки та групуючи доданки з $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P}\left(1 - \frac{4\pi n\alpha}{3}\right) = n\alpha\,\mathbf{E} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{P} = \frac{n\alpha}{1 - \dfrac{4\pi n\alpha}{3}}\,\mathbf{E}.$$

Порівнюючи це з означенням сприйнятливості речовини $\mathbf{P} = \chi\mathbf{E}$, знаходимо мікроскопічний вираз для χ, що вже враховує локальне поле:

$$\chi = \frac{n\alpha}{1 - \dfrac{4\pi n\alpha}{3}}. \tag{5.20}$$

Знайдемо діелектричну проникність $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$. З (5.20)

$$\varepsilon - 1 = 4\pi\chi = \frac{4\pi n\alpha}{1 - \dfrac{4\pi n\alpha}{3}}, \qquad \varepsilon + 2 = (\varepsilon - 1) + 3 = \frac{3}{1 - \dfrac{4\pi n\alpha}{3}}.$$

Поділивши перший вираз на другий, отримаємо:

$$\boxed{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3}\,n\alpha.} \tag{5.21}$$

Цей вираз називається *формулою Клаузіуса–Моссотті*. Її головна цінність — вона *напряму* зв'язує макроскопічно вимірювану величину (ε) з мікроскопічною молекулярною характеристикою (α) і концентрацією n, причому враховує (на відміну від наївної $\chi = n\alpha$) ефекти взаємної поляризації сусідніх молекул. Використовують її в обидва боки: за відомим α обчислюють ε, або, навпаки, за виміряним ε й відомою концентрацією n знаходять α — один з небагатьох прямих

макроскопічних методів вимірювання мікроскопічної характеристики речовини.

Для розрідженого газу ($\frac{4\pi}{3}n\alpha \ll 1$) знаменник у (5.20) можна замінити одиницею, і формула зводиться до $\chi \approx n\alpha$, з якого ми й почали; поправка на локальне поле стає суттєвою вже в густій рідині чи твердому тілі.

! Оцінка. $\alpha \sim 10^{-24}$ *см*^{3} *(атомний об'єм). Газ (*$n \sim 2{,}7 \times 10^{19}$ *см*$^{-3}$*): поправка* $\sim 10^{-4}$ *— нехтовна. Рідина (*$n \sim 3 \times 10^{22}$ *см*$^{-3}$*): поправка* $\sim 10\%$ *— нехтувати не можна.*

5.8. Типи діелектриків та їх застосування

Електрети. *Електрети* — це діелектрики, здатні тривалий час зберігати поляризацію *після зняття* зовнішнього поля, яке цю поляризацію створило. Електрет часто називають «*електричним аналогом постійного магніту*»: подібно до того, як постійний магніт створює магнітне поле без зовнішнього джерела струму, заряджений електрет створює електричне поле **E** і поле індукції **D** поза своєю поверхнею навіть за відсутності будь-якого зовнішнього поля (рис. 5.12).



(а) Поле вектора електричної індукції **D**

(б) Поле вектора напруженості електричного поля **E**

Рис. 5.12. Поля зарядженого електрета

! *В ідеальному електреті вільних зарядів немає* взагалі, *тож* $\rho_{\text{вільні}} \equiv 0$ *і рівняння* $\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{вільні}}$ *перетворюється на тотожність* $\nabla \cdot \mathbf{D} \equiv 0$ всюди в просторі. *Це* не *означає, що джерелом поля* $\mathbf{D}$ *є вільні заряди — таких зарядів у електреті просто немає! Це означає лише, що* $\mathbf{D}$ *не має джерел у сенсі дивергенції — точно так само, як завжди* $\nabla \cdot \mathbf{B} \equiv 0$*, хоча ніхто не стверджує, ніби через це поля* $\mathbf{B}$ *не існує. Фізичною причиною самого поля* $\mathbf{D}$ *(як і* $\mathbf{E}$*) у просторі є* зв'язані *заряди електрета; просто конкретна комбінація* $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ *виявляється тотожно безджерельною за дивергенцією, а її «вихори»* ($\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{D} = 4\pi\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{P}$) *зосереджені на поверхні електрета.*

Один з поширених способів виготовлення електретів полягає в тому, що діелектрик нагрівають і одночасно поміщають у сильне електричне поле, так щоб полярні молекули встигли переорієнтуватись і вишикуватись уздовж поля. Якщо потім діелектрик охолодити (не знімаючи поля), теплова рухливість молекул різко падає, повернення диполів у хаотичний стан ускладнюється, і після зняття зовнішнього поля поляризація зберігається протягом місяців, років, а іноді й десятиліть. Такий стан називають «*замороженою* поляризацією».

Перші електрети виготовив японський фізик М. Егучі (1919) із суміші карнаубського воску й каніфолі. У сучасній техніці більшість електретів виготовляють із синтетичних полімерів — фторопластів, поліпропілену, поліетилентерефталату (ПЕТ) тощо. Електрети широко застосовуються в електретних мікрофонах, дозиметрах, датчиках тиску та інших пристроях, де потрібне джерело сталого електричного поля без витрат енергії на його підтримку.

Сегнетоелектрики. *Сегнетоелектрик* — це кристалічний діелектрик, який має *спонтанну поляризацію всередині окремих доменів*, що виникає *без* будь-якого зовнішнього електричного поля. *Домен* — це локальна область усередині сегнетоелектрика (типового розміру від кількох до сотень мікрометрів), у межах якої дипольні моменти всіх елементарних комірок кристала мимовільно вишикувані в одному напрямку, тобто поляризація в домені стала (рис. 5.13). Однак у різних доменах напрямки поляризації, як правило, різні, тому сумарна поляризація незбудженого зразка в цілому близька до нуля.

Під впливом зовнішнього поля межі доменів (доменні стінки) зміщуються, а самі домени переорієнтовуються так, щоб їхня поляризація узгоджувалася з напрямком зовнішнього поля; домени, поляризація яких збігається з полем, ростуть за рахунок сусідніх доменів. У результаті сумарна поляризація зразка зростає значно швидше й до значно більших значень, ніж у звичайних лінійних

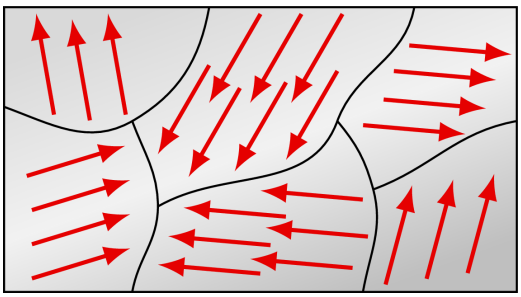


Рис. 5.13. Доменна структура сегнетоелектрика

діелектриках.

Ця перебудова доменної структури має важливу особливість: вона *неоднозначна* і зберігає «пам'ять» про попередню історію зразка. Залежність поляризації P від поля E при циклічній зміні останнього утворює характерну петлю, яку називають *петлею гістерезису* (рис. 5.14):

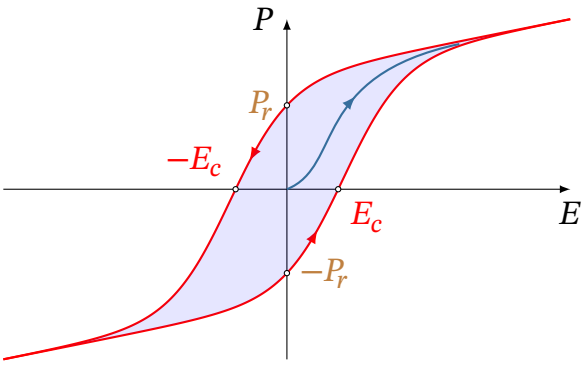


Рис. 5.14. Петля гістерезису сегнетоелектрика: P_r — залишкова поляризація, E_c — коерцитивне поле

1. за досить сильного поля E поляризація виходить на насичення — усі домени вже переорієнтовані, і подальше зростання P з полем відбувається практично лінійно, як у звичайного діелектрика;
2. якщо тепер зменшувати поле до нуля, поляризація *не* повертається в нуль, а залишається на певному рівні P_r, який називають *залишковою поляризацією*;
3. щоб звести поляризацію до нуля, потрібно прикласти поле протилежного знака — $-E_c$; величину E_c називають *коерцитивним полем* (за аналогією з магнетиками — також коерцитивною силою);
4. при подальшому зростанні поля протилежного знака поляризація знову виходить на насичення у протилежний бік, а при поверненні поля до нуля залишається на рівні $-P_r$, — і цикл замикається.

Ці властивості спостерігаються лише в певному діапазоні температур, нижчих за характерну для кожного сегнетоелектрика *температуру Кюрі*: вище цієї температури тепловий рух руйнує спонтанну доменну структуру, і речовина переходить у звичайний (параелектричний) стан.

Найвідоміші сегнетоелектрики — титанат барію $BaTiO_3$ і сегнетова сіль $KNaC_4H_4O_6 \cdot 4\,H_2O$ (саме на честь останньої й названо весь цей клас речовин). Завдяки аномально великим значенням діелектричної проникності ε (яка для сегнетоелектриків може сягати $\sim 10^3$–10^4) сегнетоелектрики застосовують у мініатюрних конденсаторах великої ємності та варикондах (нелінійних конденсаторах зі змінною ємністю), а завдяки сильному зв'язку між поляризацією й механічною деформацією — у широкому спектрі електромеханічних і механоелектричних перетворювачів: датчиках мікропереміщень, гідрофонах, акселерометрах, стабілізаторах частоти тощо.

Інші типи діелектриків. Окрім електретів і сегнетоелектриків, до *активних* діелектриків — тобто таких, чиї властивості (спонтанна поляризація, гістерезис, зв'язок поляризації з механічною дією чи температурою) самі по собі є функціональними — відносять ще кілька класів речовин. Розглянемо їх коротко.

П'єзоелектрики — кристали без центра симетрії, в яких деформація й поляризація пов'язані лінійно (прямий і зворотний ефекти); приклад — кварц; застосування — резонатори, п'єзодатчики, ультразвукові перетворювачі. *Піроелектрики* — кристали зі спонтанною поляризацією, що змінюється з температурою (звідси заряд на поверхні); усі піроелектрики — п'єзоелектрики (не навпаки), а всі сегнетоелектрики — піроелектрики; застосовуються в ІЧ-детекторах і тепловізорах.

Антисегнетоелектрики (напр., $PbZrO_3$) мають антипаралельну поляризацію сусідніх комірок (сумарно — нуль), але полем стрибком переводяться у сегнетоелектричний стан без залишку — застосовуються в імпульсних накопичувачах енергії.

Рідкі кристали — органічні речовини зі стрижнеподібними молекулами, що утворюють мезоморфну фазу: плинні, як рідина, орієнтаційно впорядковані, як кристал; анізотропна сприйнятливість ($\chi_\parallel \neq \chi_\perp$) дає змогу полю переорієнтовувати молекули — на цьому ґрунтується робота LCD-дисплеїв.

Натомість у переважній більшості технічних застосувань діелектрик відіграє *пасивну* роль ізолятора або середовища конденсатора, і його властивості цінують не за нелінійністю чи керованістю, а за високою електричною міцністю та малими втратами. До поширених пасивних діелектриків належать: тверді — слюда, кераміка, фторопласт, поліпропілен; рідкі — трансформаторне мастило; газоподібні — елегаз SF_6.

Підсумки

На відміну від провідників, у діелектриках майже немає вільних зарядів: усі заряди *зв'язані* й у полі лише незначно зміщуються. Такий перерозподіл зв'язаних зарядів називають *поляризацією*. Вона має три мікроскопічні механізми: *електронний* (зміщення електронної хмари, наведений момент $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}$, є в усіх речовинах), *іонний* (зміщення підґраток у іонних кристалах) та *орієнтаційний* (розворот власних дипольних моментів $\mathbf{p}_0$ полярних молекул проти теплового хаосу). Надлишкові зв'язані заряди створюють власне поле $\mathbf{E}'$, яке всередині діелектрика, як правило, напрямлене назустріч зовнішньому, тому поле в діелектрику *послаблюється* (наскільки — залежить від форми тіла). Макроскопічним полем в речовині називають поле, усереднене по фізично нескінченно малому об'єму.

Кількісно поляризацію описує *вектор поляризації* $\mathbf{P}$ — дипольний момент одиниці об'єму; для лінійних діелектриків $\mathbf{P} = \chi\mathbf{E}$, де χ — *діелектрична сприйнятливість* (макроскопічний аналог поляризовності молекули α). Нормальна складова $\mathbf{P}$ на поверхні дорівнює густині зв'язаного заряду, $P_n = \sigma'$, а в об'ємі $\nabla\cdot\mathbf{P} = -\rho'$. Введення вектора індукції $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ дає змогу записати теорему Гаусса в речовині через *лише вільні заряди*: $\nabla\cdot\mathbf{D} = 4\pi\rho$, а для лінійного діелектрика $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, де $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi > 1$. Зокрема, поле точкового заряду в однорідному діелектрику слабкіше, ніж у вакуумі, в ε разів. На межі розділу двох середовищ виконуються граничні умови $D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma$ (де σ — густина вільного заряду) та $E_{1\tau} = E_{2\tau}$, звідки випливає закон заломлення силових ліній $\operatorname{tg}\alpha_2/\operatorname{tg}\alpha_1 = \varepsilon_2/\varepsilon_1$.

Мікроскопічна теорія пов'язує ε з властивостями молекул. Для полярних діелектриків розподіл Больцмана дає закон Ланжевена–Дебая $P = np_0^2E/(3kT)$ і, як наслідок, для полярних газів $\varepsilon \approx 1 + 4\pi np_0^2/(3kT)$: проникність спадає з температурою (закон Кюрі). У густому середовищі на молекулу діє не середнє, а *локальне* поле $\mathbf{E}_{\text{лок}} = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P}$, і замість наївного $\chi = n\alpha$ справджується формула Клаузіуса–Моссотті $(\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 2) = 4\pi n\alpha/3$. Окремі класи діелектриків мають особливі властивості: *електрети* зберігають поляризацію після зняття поля, *сегнетоелектрики* мають доменну структуру, гістерезис і аномально велике ε нижче температури Кюрі, а п'єзо- та піроелектрики пов'язують поляризацію з деформацією й температурою. Ми навчилися описувати поле в речовині; наступний розділ присвячено енергії електростатичного поля (розділ 6).

Задачі

5.1. Куля має однорідну поляризацію **P**. Знайдіть напруженість електричного поля **E**, створеного поляризаційними зарядами кулі у довільній точці всередині неї.

5.2. У діелектричному середовищі з діелектричною проникністю ε існує однорідне поле з напруженістю **E**. Усередині середовища є сферична порожнина. Знайдіть у центрі сфери напруженість $\mathbf{E}'$ поля, створеного поляризаційними зарядами, індукованими на поверхні сфери, вважаючи, що вектор поляризації **P** всюди (за винятком порожнини) має стале значення.

5.3. Велику плоску пластину з діелектрика з проникністю ε вміщено в однорідне зовнішнє поле $\mathbf{E}_0$: (а) перпендикулярно до поля; (б) паралельно полю. Знайдіть **E**, **D** і **P** усередині пластини та густину зв'язаних зарядів на її великих гранях.

5.4. Точковий заряд Q розташований у нескінченному однорідному діелектрику з проникністю ε. Знайдіть зв'язаний заряд на поверхні малої сфери, яка оточує заряд (тобто зв'язаний заряд, що «прилипає» до заряду Q). Чи є в діелектрику об'ємний зв'язаний заряд?

5.5. Силова лінія поля виходить зі скла ($\varepsilon = 6$) у повітря, утворюючи в склі кут 30° з нормаллю до поверхні. Під яким кутом до нормалі вона йде в повітрі? Вільних зарядів на поверхні немає.

5.6. Оцініть діелектричну проникність водяної пари за температури 100°C і тиску 1 атм, якщо дипольний момент молекули H_2O $p_0 = 1{,}84$ Д, а її електронна поляризовність $\alpha_e \approx 1{,}5\cdot10^{-24}$ см^3. Порівняйте орієнтаційний та електронний внески. (Виміряне значення $\varepsilon \approx 1{,}0059$.)

Контрольні питання

1. Чим діелектрик принципово відрізняється від провідника з погляду наявних у ньому зарядів? Дайте означення вільних та зв'язаних (поляризаційних) зарядів.
2. Чому мікрополе $\mathbf{E}_{\text{micro}}$ у речовині неможливо виміряти макроскопічними приладами? Дайте означення макроскопічного (усередненого) поля через фізично нескінченно малий об'єм ΔV.

3. Що таке власний дипольний момент молекули і чому не всі молекули його мають? Поясніть на прикладі H_2O (полярна) і CO_2 (неполярна), чому симетрія молекули визначає наявність дипольного моменту.

4. Що таке наведений (індукований) дипольний момент неполярної молекули? Запишіть формулу $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}$. Чому електронна поляризація встигає за полем навіть на оптичних частотах?

5. Чим орієнтаційна поляризація полярних діелектриків відрізняється від електронної поляризації неполярних? Чому тепловий рух заважає повній орієнтації диполів уздовж поля?

6. Чому власне поле зв'язаних зарядів $\mathbf{E}'$ у поляризованому діелектрику, як правило, послаблює зовнішнє поле? Чому в пластині, паралельній полю, поле не змінюється?

7. Що таке електрострикція? Чому вона майже не застосовується як самостійне явище в техніці?

8. Дайте означення вектора поляризації $\mathbf{P}$ як дипольного моменту одиниці об'єму. Що означає лінійне співвідношення $\mathbf{P} = \chi\mathbf{E}$ і які діелектрики називають лінійними?

9. Які діелектрики є нелінійними? Наведіть приклади (кристали без сферичної симетрії, сильні поля, сегнетоелектрики) і поясніть, чому для них проста формула $\mathbf{P} = \chi\mathbf{E}$ не працює.

10. Виведіть формулу $P_n = \sigma'$ для однорідно поляризованого діелектрика, розглядаючи косокутний паралелепіпед, вирізаний уздовж вектора поляризації.

11. Виведіть теорему Гаусса для вектора поляризації в інтегральній $\oint P_n\,dS = -\int \rho'\,dV$ та диференціальній $\nabla\cdot\mathbf{P} = -\rho'$ формах. Чому в однорідно поляризованому діелектрику об'ємний зв'язаний заряд відсутній?

12. Виведіть означення вектора електричної індукції $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ з теореми Гаусса для $\mathbf{E}$, що враховує і вільні, і зв'язані заряди. Запишіть теорему Гаусса для $\mathbf{D}$ в інтегральній та диференціальній формах.

13. Чому вектор $\mathbf{D}$ не є силовим полем? У якому сенсі його джерелами є лише вільні заряди і коли $\mathbf{D}$ можна знайти лише за ними?

14. Виведіть співвідношення $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ та $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$ для лінійного діелектрика. Чому $\varepsilon > 1$ для звичайних діелектриків і чому $\varepsilon = 1$ у вакуумі?

15. Розв'яжіть задачу про точковий заряд Q у нескінченному однорідному діелектрику: чому поле в діелектрику слабкіше, ніж у вакуумі, рівно в ε разів?

16. Виведіть першу граничну умову $D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma$ для нормальної

складової $\mathbf{D}$ на межі розділу середовищ. Чому ця складова не зазнає стрибка за відсутності вільних зарядів на межі, на відміну від E_n?

17 Виведіть другу граничну умову $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ для тангенціальної складової $\mathbf{E}$. Чому ця умова не пов'язана з наявністю діелектрика?

18 Виведіть закон заломлення силових ліній $\operatorname{tg}\alpha_2 / \operatorname{tg}\alpha_1 = \varepsilon_2/\varepsilon_1$ на межі двох діелектриків. Чому лінії поля притискаються до поверхні середовища з більшим ε?

19 Які три мікроскопічні механізми поляризовності молекули існують (електронна, іонна, орієнтаційна)? Чим вони відрізняються за швидкодією та залежністю від частоти й температури?

20 Виведіть закон Ланжевена–Дебая $P = np_0^2 E/(3kT)$ для орієнтаційної поляризації полярного діелектрика, використовуючи розподіл Больцмана для кутів орієнтації диполів. За якої умови справедливе лінійне наближення $p_0 E \ll kT$?

21 Виведіть формулу $\varepsilon = 1 + 4\pi n p_0^2/(3kT)$ для полярного газу. Яким внеском у ній знехтувано? Поясніть, чому спадання ε з ростом температури є ознакою полярного діелектрика.

22 Що таке локальне поле $\mathbf{E}_{\text{лок}}$ і чим воно відрізняється від середнього поля $\mathbf{E}$ у густому середовищі? Виведіть формулу Лоренца $\mathbf{E}_{\text{лок}} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}/3$ для сфери Лоренца.

23 Виведіть формулу Клаузіуса–Моссотті $(\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 2) = 4\pi n\alpha/3$. У чому її головна цінність порівняно з наївним співвідношенням $\chi = n\alpha$? При якій умові вона зводиться до останнього?

24 Що таке електрет і чому в ньому $\nabla \cdot \mathbf{D} \equiv 0$ всюди, попри те що поле $\mathbf{D}$ поза його поверхнею не дорівнює нулю? Як виготовляють електрети і де вони застосовуються?

25 Що таке сегнетоелектрик і доменна структура? Опишіть петлю гістерезису: що таке залишкова поляризація P_r та коерцитивне поле E_c? Що відбувається при температурі Кюрі?

26 Що таке п'єзоелектрики та піроелектрики? Чим відрізняються прямий і зворотний п'єзоефекти, і чому всі піроелектрики є п'єзоелектриками, а не навпаки?

27 Що таке антисегнетоелектрики та рідкі кристали? На якому фізичному принципі ґрунтується робота LCD-дисплеїв?

6 Енергія електричного поля

Говорячи про енергію поля, я хочу, щоб мене розуміли буквально.

Джеймс Клерк Максвелл, «Динамічна теорія електромагнітного поля» (1865)

У попередніх розділах ми розібрали, як поводиться електричне поле у вакуумі, у провідниках і в діелектриках. Ми знаємо, як обчислити поле за заданим розподілом зарядів (теорема Гаусса, принцип суперпозиції), і як поводиться поле на межі розділу середовищ. Тепер настав час поставити наступне природне запитання: *скільки енергії зберігає електричне поле* і *як цю енергію використати для обчислення сил*, що діють на заряджені тіла?

Цей розділ складається з трьох частин. Спершу ми введемо *електричну ємність* — величину, яка описує, скільки заряду (а отже, і поля) здатна накопичити система провідників при заданій різниці потенціалів. Далі ми покажемо, що енергія заряджених тіл — це насправді енергія *поля*, розподілена в просторі з густиною $w = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/8\pi$. Нарешті, ми навчимось обчислювати *пондеромоторні сили* — сили, що діють на заряджені провідники й діелектрики в електричному полі, — за допомогою методу віртуальних переміщень.

6.1. Електрична ємність

Ємність відокремленого провідника. Нехай відокремлений (далекий від інших тіл) провідник несе заряд q; тоді, як ми знаємо, весь цей заряд розподіляється по його поверхні, а сам провідник — еквіпотенціальне тіло з деяким потенціалом φ. Якщо заряд збільшити в n разів, то, за принципом суперпозиції, поле в кожній точці простору також зросте в n разів, а отже, в n разів зросте й робота з переміщення пробного заряду з поверхні провідника на нескінченність, тобто

й сам потенціал φ. Це означає, що відношення

$$C = \frac{q}{\varphi} \tag{6.1}$$

не залежить від заряду провідника і визначається лише його формою, розмірами та властивостями середовища, що його оточує. Цю величину називають *електричною ємністю провідника*.

! *Ємність провідника — суто геометрична характеристика: вона залежить від форми й розмірів тіла, а також від діелектричної проникності середовища, але* не залежить *ні від заряду, ні від матеріалу самого провідника. Означення* (6.1) *коректне лише для* відокремленого *провідника, тобто коли поблизу немає інших заряджених тіл, здатних істотно змінити його потенціал.*

Коефіцієнти ємності. Для відокремленого провідника заряд і потенціал пропорційні: $q = C\varphi$. Якщо провідників кілька, потенціал кожного залежить від зарядів усіх сусідів (принцип суперпозиції), тому

$$q_i = \sum_j C_{ij}\,\varphi_j. \tag{6.2}$$

Коефіцієнти C_{ij} залежать лише від форми, розмірів і взаємного розташування провідників (і від проникності середовища), але не від самих зарядів чи потенціалів.

Діагональні C_{ii} — *власні ємності*: заряд провідника i при одиничному власному потенціалі й заземлених сусідах. Недіагональні C_{ij} ($i \neq j$) — *коефіцієнти взаємного впливу*: заряд, наведений на заземленому провіднику i, коли сусід j піднято до одиничного потенціалу.

! Знаки. *$C_{ii} > 0$, а $C_{ij} \le 0$ при $i \neq j$: піднімаючи потенціал одного провідника, ми завжди наводимо на сусідніх заряд* протилежного *знака.*

Симетрія. *$C_{ij} = C_{ji}$ — наслідок глибшого факту електростатики, теореми взаємності; її доведення виходить за межі цього курсу. Фізично симетрія означає, що байдуже,* який *із двох провідників підняти до потенціалу, а який заземлити, — наведений на сусідові заряд буде той самий. Переконатися в цьому можна на прикладі нижче: там $C_{12} \approx -C_1C_2/b$ виходить* однаковим *незалежно від того, кулю 1 чи кулю 2 обрати «джерелом» потенціалу, — ця незалежність від вибору і є симетрією $C_{ij} = C_{ji}$.*

Оцінка зверху для C_{12}. Розглянемо пару провідників з однаковою власною ємністю $C_{11} = C_{22} \equiv C_0$ (наприклад, дві однакові кулі).

Піднімемо потенціал провідника 1 до одиниці, а провідник 2 заземлимо ($\varphi_2 = 0$). Тоді, згідно з (6.2), заряд першого провідника дорівнює $q_1 = C_{11} = C_0$, а на другому наводиться заряд $q_2 = C_{12}$ (від'ємний, за щойно сформульованим правилом знаків).

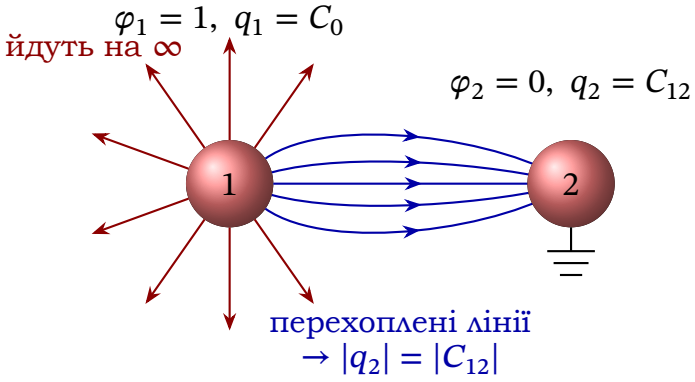


Рис. 6.1. Частина силових ліній провідника 1 замикається на заземленому провіднику 2, решта йде на нескінченність

Фізично q_2 — це заряд, «перехоплений» тими силовими лініями поля провідника 1, що замикаються саме на заземленому сусідові (рис. 6.1); решта ліній іде на нескінченність (або на інші тіла). Оскільки сусід не може перехопити більше силових ліній, ніж їх випустив сам провідник 1, наведений заряд не може за модулем перевищити початковий:

$$|C_{12}| \le C_0. \tag{6.3}$$

Рівність $C_{12} \to -C_0$ означає, що *всі* силові лінії від провідника 1 замикаються на провіднику 2 — жодна не йде на нескінченність, тобто екранування повне. Саме до цієї межі прямує тісно зближена пара провідників — *конденсатор*, з яким ми детальніше познайомимось нижче.

Два провідники: взаємна ємність. Найпоширеніший спосіб зарядити провідник — перенести частину заряду з другого: тоді на одному з'являється заряд $+q$, на іншому $-q$. Для такого стану зручно ввести окрему характеристику пари замість громіздкої матриці C_{ij}:

$$C = \frac{q}{\varphi_+ - \varphi_-} \tag{6.4}$$

де $\varphi_\pm$ — потенціали провідників із зарядами $\pm q$. Величину (6.4) називають *взаємною ємністю* пари.

Щоб виразити C через коефіцієнти C_{ij}, підставимо $q_1 = +q$, $q_2 = -q$ у систему (6.2) (з урахуванням симетрії $C_{21} = C_{12}$):

$$q = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2, \qquad -q = C_{12}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2.$$

Розв'язавши цю лінійну систему відносно φ_1, φ_2 (звичайним оберненням 2×2-матриці), знаходимо, що різниця потенціалів пропорційна заряду:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q\,(C_{11} + C_{22} + 2C_{12})}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2},$$

звідки за означенням (6.4)

$$\boxed{C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}}.} \tag{6.5}$$

Для *симетричної пари* $C_{11} = C_{22} \equiv C_0$ чисельник розкладається як різниця квадратів, $C_0^2 - C_{12}^2 = (C_0 - C_{12})(C_0 + C_{12})$, а знаменник дорівнює $2(C_0 + C_{12})$; після скорочення спільного множника $(C_0 + C_{12})$:

$$\boxed{C = \frac{C_0 - C_{12}}{2}.} \tag{6.6}$$

Ця формула добре узгоджується з оцінкою (6.3) і показує, як взаємна ємність зростає в міру екранування: якщо взаємний вплив зникає ($C_{12} \to 0$, провідники далеко один від одного), то $C \to C_0/2$ — це просто послідовне з'єднання двох однакових ємностей C_0; якщо ж екранування майже повне ($C_{12} \to -C_0$, гранично допустиме за (6.3)), то $C \to C_0$ — поле майже все замкнене між обкладками. Саме другий режим реалізується в конденсаторі.

Приклад: дві далекі кулі. Дві кулі на відстані b, значно більшій за їхні розміри (рис. 6.2). Нехай C_1, C_2 — ємності куль поодинці ($C_{11} \to C_1$, $C_{22} \to C_2$ при $b \to \infty$).

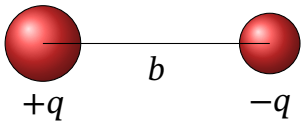


Рис. 6.2. Дві далекі одна від одної заряджені кулі

Зарядимо кулі $\pm q$ і врахуємо вплив сусідньої кулі як точкового заряду на відстані b:

$$\varphi_+ = \frac{q}{C_1} - \frac{q}{b}, \qquad \varphi_- = -\frac{q}{C_2} + \frac{q}{b}.$$

Звідси $\varphi_+ - \varphi_- = q\left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} - \dfrac{2}{b}\right)$, тому в цьому наближенні (вплив сусідньої кулі враховано як поле точкового заряду, а її поляризацією, яка дає поправки порядку $1/b^2$, знехтувано) взаємна ємність

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 - \dfrac{2C_1C_2}{b}}.$$

Оскільки b набагато перевищує розміри куль (а отже, і C_1, C_2), параметр $\eta = \dfrac{2C_1C_2}{(C_1+C_2)b}$ малий, $\eta \ll 1$ (тут η — допоміжне позначення малого параметра, не діелектрична проникність, якої в цьому прикладі немає). Винісши $C_1 + C_2$ у знаменнику й скориставшись $(1-\eta)^{-1} \approx 1+\eta$, отримуємо

$$\boxed{C \approx \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\left(1 + \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\frac{2}{b}\right).} \tag{6.7}$$

У головному наближенні ($b \to \infty$) взаємна ємність дорівнює ємності послідовного з'єднання; поправка описує слабкий взаємний вплив куль.

Той самий результат випливає й з коефіцієнтів C_{ij}: якщо провідник 2 заземлити, для утримання $\varphi_2 = 0$ на ньому має навестись заряд $q_2 \approx -C_2 q_1/b$ (компенсація поля точкового заряду q_1 на відстані b), звідки $C_{12} \approx -C_1C_2/b$ — від'ємний, як і належить за загальним правилом знаків. Підставляючи $C_{11} \approx C_1$, $C_{22} \approx C_2$, $C_{12} \approx -C_1C_2/b$ у загальну формулу (6.5), маємо

$$C \approx \frac{C_1C_2 - C_1^2C_2^2/b^2}{C_1 + C_2 - 2C_1C_2/b}.$$

У чисельнику поправка — порядку $1/b^2$, тому в головному наближенні чисельник $\approx C_1C_2$; знаменник же дає саме ту поправку порядку $1/b$, яку ми вже врахували вище. Отже, розклад відтворює (6.7): обидва підходи узгоджені, і саме знак C_{12} тут принциповий — зворотний знак дав би суперечливу відповідь.

Конденсатор. *Конденсатор* — система з двох провідників (*обкладок*), розташованих так близько (зазвичай через тонкий шар діелектрика), що майже все поле зосереджене у проміжку між ними. Завдяки такому *екрануванню* взаємна ємність конденсатора, на відміну від ємності відокремленого провідника чи пари віддалених провідників, практично не залежить від інших тіл поблизу — саме тому вона є зручною й відтворюваною характеристикою. Формула (6.4) лишається тією самою; конденсатор — окремий випадок пари провідників з екранованим полем.

Наскільки повним може бути це екранування, видно з (6.6): коли обкладки зближуються, коефіцієнт взаємного впливу прямує до своєї межі $C_{12} \to -C_0$ (оцінка (6.3)), а отже,

$$C \to C_0,$$

тобто взаємна ємність прямує до власної. Не слід розуміти це так, ніби ємність конденсатора дорівнює ємності однієї відокремленої

пластини: $C_0 = C_{11}$ — це ємність пластини *поряд із заземленою сусідньою*, і при зближенні пластин вона сама зростає (для плоского конденсатора — до $\varepsilon S/4\pi d$, див. нижче). У цій границі поле майже все замкнене між обкладками, і C перестає залежати від того, що відбувається далеко.

* **Обкладки з різними зарядами**. Нехай на обкладках плоского вакуумного конденсатора (площею S кожна) — не протилежні, а *довільні* заряди q_1 і q_2 (наприклад, пластини зарядили окремо, а потім розташували паралельно на малій відстані одна від одної).

Розкладемо їх на *антисиметричну* і *симетричну* частини:

$$q_a = \frac{q_1 - q_2}{2}, \qquad q_s = \frac{q_1 + q_2}{2}, \qquad q_1 = q_a + q_s, \quad q_2 = -q_a + q_s.$$

Заряд q_a поводиться як звичайний заряд конденсатора — сідає на *внутрішні* (обернені одна до одної) поверхні обкладок і створює однорідне поле лише в проміжку між ними, $E_{\text{між}} = 4\pi q_a/S$. Заряд q_s, навпаки, розподіляється порівну на *зовнішніх* поверхнях: поле від двох однаково заряджених паралельних площин між ними взаємно компенсується (теорема Гаусса), тому в проміжку q_s поля не дає, а весь цей заряд виявляється *назовні*, створюючи там поле $E_{\text{зовні}} = 4\pi q_s/S$ — так само, як біля поверхні звичайного зарядженого провідника. Підставляючи означення q_a, q_s:

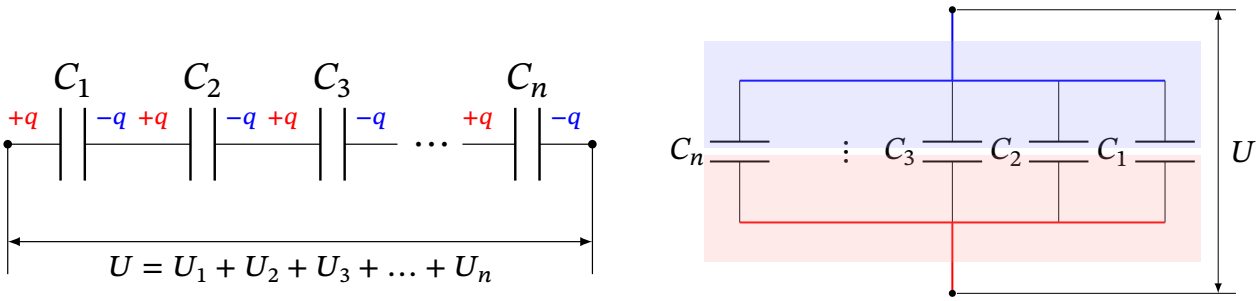
$$E_{\text{між}} = \frac{2\pi(q_1 - q_2)}{S}, \qquad E_{\text{зовні}} = \frac{2\pi(q_1 + q_2)}{S}. \tag{6.8}$$

Якщо $q_1 = -q_2 = q$ (звичайний конденсатор), то $E_{\text{зовні}} = 0$ — поле повністю екрановане, як і слід з означення конденсатора. Якщо ж, навпаки, $q_1 = q_2$ (обкладки заряджені однаково), то $E_{\text{між}} = 0$, а весь заряд «виходить» назовні — пара обкладок при цьому поводиться просто як два майже злиті окремі провідники.

! Складний конденсатор. *Описане вище екранування — ідеалізація: реальні обкладки ніколи не ізольовані від решти світу повністю, і частина силових ліній завжди йде на треті тіла поблизу (землю, корпус приладу, сусідні провідники). Тоді заряд обкладки залежить не лише від різниці потенціалів між обкладками, а й від потенціалів усіх сусідів — це якраз загальний випадок* (6.2), *а не окрема нова формула.*

З'єднання конденсаторів. На практиці конденсатори часто з'єднують у батареї — послідовно або паралельно, — щоб отримати потрібну сумарну ємність.

Послідовне з'єднання. Нехай n конденсаторів з'єднано послідовно (рис. 6.3а). Оскільки обкладки сусідніх конденсаторів, з'єднані між



(а) Послідовне з’єднання (б) Паралельне з’єднання

Рис. 6.3. З’єднання конденсаторів: (а) послідовне — заряд на всіх обкладках однаковий, напруги додаються; (б) паралельне — напруга на всіх конденсаторах однакова, заряди додаються

собою провідником, електрично ізольовані від решти кола, повний заряд кожної внутрішньої пари обкладок мусить залишатися таким, яким був спочатку, тобто нульовим (конденсатори до з’єднання не заряджені): якщо на крайню ліву обкладку батареї нанести заряд $+q$, то шляхом електростатичної індукції той самий за модулем заряд q з’явиться на *кожному* конденсаторі батареї. Загальна різниця потенціалів (напруга) на батареї дорівнює сумі напруг на окремих конденсаторах:

$$U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \ldots + \frac{q}{C_n}.$$

Оскільки ємність батареї за означенням $C = q/U$, маємо

$$\boxed{\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}.} \tag{6.9}$$

Паралельне з’єднання. Нехай тепер n конденсаторів з’єднано паралельно (рис. 6.3б): усі ліві обкладки з’єднані між собою і мають спільний потенціал, так само як і всі праві. Тому напруга на кожному конденсаторі однакова і дорівнює загальній напрузі батареї U, а заряди на окремих конденсаторах додаються:

$$q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n = C_1 U + C_2 U + \ldots + C_n U.$$

Звідси

$$\boxed{C = \sum_{i=1}^{n} C_i.} \tag{6.10}$$

! *Послідовне з'єднання завжди* зменшує *сумарну ємність (вона менша за найменшу з ємностей C_i), а паралельне — завжди* збільшує. *Формули для ємностей мають той самий вигляд, що й для опорів, але «навпаки»: послідовні конденсатори додаються, як паралельні резистори, і навпаки. Це тому, що роль «опору» тут відіграє не C, а $1/C$ (напруга на конденсаторі $U = q/C$).*

Обчислення ємності найпростіших конденсаторів. Усі задачі на обчислення ємності розв'язуються за *єдиним алгоритмом*:

1. Задати заряд q на обкладках і знайти розподіл поля $\mathbf{E}$ між ними (за теоремою Гаусса, з урахуванням діелектрика, якщо він є).
2. Обчислити різницю потенціалів $\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$ уздовж силової лінії.
3. За означенням (6.4) знайти $C = q/\Delta\varphi$.

Продемонструємо цей алгоритм на кількох типових прикладах. Скрізь вважатимемо, що простір між обкладками заповнений однорідним діелектриком із проникністю ε (результати про поле в діелектрику — з розділу 5).

Ємність відокремленої кулі. Провідна куля радіусом R, що несе заряд Q, створює поза собою поле точкового заряду, а її власний потенціал дорівнює потенціалу на поверхні, $\varphi = Q/(\varepsilon R)$. Звідси відразу

$$\boxed{C = \varepsilon R.} \qquad (6.11)$$

Цей простий результат корисно пам'ятати як орієнтир: ємність провідного тіла має порядок величини його лінійних розмірів (помножених на ε).

Плоский конденсатор. Нехай обкладки — дві паралельні пластини площею S кожна, розташовані на відстані $d \ll \sqrt{S}$ одна від одної (щоб знехтувати крайовими ефектами), а простір між ними заповнений діелектриком з проникністю ε. Поле між обкладками однорідне, $E = 4\pi\sigma/\varepsilon = 4\pi q/(\varepsilon S)$, тому різниця потенціалів $\Delta\varphi = Ed = 4\pi qd/(\varepsilon S)$, і

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}.} \qquad (6.12)$$

Сферичний конденсатор. Обкладки — дві концентричні сфери радіусів $R_1 < R_2$, простір між якими заповнений діелектриком з проникністю ε. За теоремою Гаусса поле між обкладками таке саме, як і поле точкового заряду q у діелектрику, $E = q/(\varepsilon r^2)$. Різниця потенціалів

$$\Delta\varphi = \int_{R_1}^{R_2} E\,dr = \frac{q}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{q}{\varepsilon}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2},$$

звідки

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}.} \tag{6.13}$$

Легко переконатись, що при $R_2 \to \infty$ (друга обкладка йде на нескінченність) формула (6.13) переходить у формулу (6.11) для відокремленої кулі, як і повинно бути.

Циліндричний конденсатор. Обкладки — дві коаксіальні циліндричні поверхні радіусів $R_1 < R_2$ і довжини $\ell \gg R_2$ (щоб знехтувати крайовими ефектами), простір між ними заповнений діелектриком з проникністю ε. За теоремою Гаусса поле між обкладками $E = \dfrac{2q}{\varepsilon \ell r}$ (поле нескінченної зарядженої нитки в діелектрику), тому

$$\Delta\varphi = \int_{R_1}^{R_2} E\,dr = \frac{2q}{\varepsilon\ell} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

звідки

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon\ell}{2\ln(R_2/R_1)}.} \tag{6.14}$$

! *Зверніть увагу, як* однаково *влаштовані всі чотири формули: кожна має вигляд* $C = \varepsilon\Lambda$, *де* Λ — *величина розмірності* довжини, *що залежить лише від геометрії провідників* (R; $S/4\pi d$; $R_1R_2/(R_2-R_1)$; $\ell/2\ln(R_2/R_1)$). *Саме тому в гауссовій системі ємність вимірюється в сантиметрах* (1 *см* $\approx$ 1,11 *пФ*). *Запам'ятовувати окремо кожну формулу не потрібно — достатньо вміти вивести її за алгоритмом вище.*

Суперконденсатори *(ультраконденсатори) мають ємність у тисячі фарад — у мільйони разів більшу за ємність Землі (≈ 710 мкФ як відокремленого провідника). Такої ємності досягають завдяки двом факторам:*

- надрозвинена поверхня *пористих вуглецевих електродів (*1000–2600 $м^2/г$*);*
- подвійний електричний шар — *іони електроліту розділені відстанню менше* 1 *нм.*

Але навіть така ємність не робить їх універсальним накопичувачем. Порівняймо питому енергію:

- звичайний конденсатор*:* ∼ 0,01–0,1 *Вт·год/кг;*
- суперконденсатор*:* ∼ 5–10 *Вт·год/кг (до* 30 *у лабораторних зразках);*
- літій-іонний акумулятор*:* ∼ 100–250 *Вт·год/кг — енергія запасається в хімічних зв'язках, а не в полі;*
- бензин*:* ≈ 12 000 *Вт·год/кг.*

Тому суперконденсатори не витісняють *акумулятори, а доповнюють їх там, де важлива питома* потужність*, а не сумарна запасена енергія: регенеративне гальмування, стабілізація напруги, пікові навантаження.*

6.2. Енергія електричного поля

Взаємна енергія системи точкових зарядів. Щоб зблизити два точкових заряди q_1 і q_2 з нескінченності до відстані r_{12} один від одного, потрібно виконати проти сил поля роботу $A = q_1 q_2 / r_{12}$. Цю роботу і ототожнюють з *взаємною енергією* пари зарядів: $U_{12} = q_1 q_2 / r_{12}$. Для системи з n точкових зарядів (рис. 6.4) сумарна взаємна енергія набирається з енергій усіх можливих пар:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}, \tag{6.15}$$

де множник 1/2 компенсує подвійний перелік кожної пари (доданок з індексами i, j і доданок з індексами j, i описують одну й ту саму пару).

Формулу (6.15) зручно переписати через потенціал. Потенціал поля в точці розташування i-го заряду, створюваний *усіма іншими* зарядами (крім самого i-го, поле якого в точці свого ж розташування

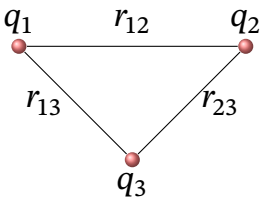


Рис. 6.4. Система трьох точкових зарядів: взаємна енергія набирається із внесків усіх пар

не визначене),

$$\varphi_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{q_j}{r_{ij}},$$

тому

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_i q_i \varphi_i.} \tag{6.16}$$

! *Формула* (6.15) *описує* лише взаємну *енергію — роботу, потрібну для зближення* вже готових *точкових зарядів з нескінченності. Вона* не враховує *власну енергію кожного точкового заряду окремо (див. «Власна та взаємна енергія зарядів» нижче). Для системи зарядів, що мають скінченні розміри, формула* (6.15) *— наближена, і тим точніша, чим менші розміри заряджених тіл порівняно з відстанями між ними.*

Електростатична енергія тіла з неперервним розподілом заряду. Для тіл з неперервним розподілом заряду — об'ємною густиною $\rho(\mathbf{r})$ та (якщо є) поверхневою густиною $\sigma(\mathbf{r})$ — формулу (6.16) узагальнюють природним чином, замінюючи суму на інтеграл, а q_i — на елемент заряду $\rho\, dV$ або $\sigma\, dS$:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int_V \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})\, dV + \frac{1}{2}\int_S \sigma(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})\, dS.} \tag{6.17}$$

Приклад 1. Нехай куля радіуса R несе повний заряд Q, рівномірно розподілений по *поверхні*. Потенціал усюди на поверхні однаковий і дорівнює $\varphi = Q/R$, тому

$$W = \frac{1}{2}\int_S \sigma\varphi\, dS = \frac{1}{2}\sigma\frac{Q}{R}\cdot 4\pi R^2 = \frac{Q^2}{2R}. \tag{6.18}$$

Приклад 2. Нехай тепер той самий заряд Q розподілений рівномірно по *об'єму* кулі. Обчислення (з урахуванням того, що потенціал всередині рівномірно зарядженої кулі залежить від r) дає інший результат:

$$W = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{R}. \tag{6.19}$$

! *Той самий сумарний заряд Q на тілі того самого радіуса R дає* різну *енергію залежно від того, як саме заряд розподілений усередині тіла (формули* (6.18) *і* (6.19) *відрізняються множником* 6/5*). Це наштовхує на природне запитання: чи можна вважати енергію* властивістю самих зарядів*, чи, може, правильніше говорити про енергію,* розподілену в просторі *— там, де існує поле? Відповідь на це запитання ми отримаємо, коли перейдемо до об'ємної густини енергії поля.*

! Класичний радіус електрона. *Цікаво застосувати ці оцінки до електрона. Якщо уявити його як кульку радіуса r_e, заряджену рівномірно по поверхні, то вся його енергія спокою $m_e c^2$ мала б бути енергією електричного поля:*

$$\frac{e^2}{2r_e} = m_e c^2 \quad \Longrightarrow \quad r_e = \frac{e^2}{2m_e c^2}.$$

Чисельно це дає $r_e \approx 1{,}4\times10^{-13}$ см (з точністю до множника порядку одиниці, який залежить від припущення про розподіл заряду — по поверхні чи по об'єму). Цю величину називають класичним радіусом електрона*. (У літературі під ним зазвичай розуміють $e^2/m_e c^2 \approx 2{,}8\times10^{-13}$ см, тобто вдвічі більше — це якраз і є згаданий множник порядку одиниці.)*

Але тут і криється пастка: якщо електрон справді має такий скінченний розмір, то чому *він не розлітається від власного електричного відштовхування? І чому досліди з розсіяння на високих енергіях не бачать у нього ніякого розміру аж до $\sim 10^{-16}$ см? Відповідь — електрон не є класичною зарядженою кулькою. Класичний радіус — це не «справжній розмір» електрона, а лише характерний масштаб, на якому електрична енергія поля зарядженої частинки стає порівнянною з її енергією спокою. Саме на таких відстанях класична електродинаміка остаточно ламається, і на зміну їй приходить квантова теорія поля.*

Енергія зарядженого конденсатора. Розглянемо процес зарядки конденсатора як послідовне перенесення малих порцій заряду dq з однієї обкладки на іншу (рис. 6.5). Коли на обкладках уже є заряд q (а різниця потенціалів дорівнює $\Delta\varphi = q/C$), перенесення чергової порції dq вимагає роботи $dW = \Delta\varphi\, dq = \dfrac{q\,dq}{C}$. Інтегруючи від нульового заряду до кінцевого значення q, знаходимо енергію зарядженого

конденсатора:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\Delta\varphi^2}{2}. \tag{6.20}$$

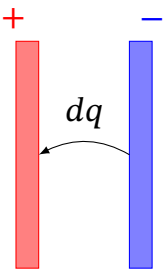


Рис. 6.5. Перенесення заряду dq під час зарядки конденсатора

* **Числовий приклад**. Конденсатор ємністю $C = 1$ мкФ, заряджений до напруги $U = 100$ В, зберігає заряд $q = CU = 10^{-4}$ Кл і енергію $W = CU^2/2 = 5$ мДж — зовсім небагато: стільки ж енергії потрібно, щоб підняти тіло масою 0,5 кг на 1 мм. Цінність конденсатора в іншому: цю енергію він здатен віддати *дуже швидко*. Якщо розрядити його за 1 мкс, середня потужність сягне ~ 5 кВт. Тому конденсатори використовують там, де потрібен короткий потужний імпульс: спалахи фотоапаратів, імпульсні джерела живлення, дефібрилятори (у дефібриляторі $C \sim 100$ мкФ заряджають до $U \sim 2$ кВ, і $W = CU^2/2 \sim 200$ Дж віддаються пацієнтові за кілька мілісекунд).

Густина енергії електричного поля. Застосуємо результат (6.20) до плоского конденсатора. Оскільки поле в ньому однорідне, $\Delta\varphi = Ed$, а ємність дається формулою (6.12), маємо

$$W = \frac{1}{2}C\Delta\varphi^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon S}{4\pi d}\,(Ed)^2 = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}\,V,$$

де $V = Sd$ — об'єм простору між обкладками, тобто об'єм, що його займає поле. Звідси природно ввести *об'ємну густину енергії поля*

$$w = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{ED}{8\pi} \tag{6.21}$$

(останню рівність отримано підстановкою $D = \varepsilon E$; див. розділ 5).

! *Формула (6.21) виражає енергію конденсатора* не *через заряди на обкладках, а через характеристики поля* **E** *і* **D** *у тій області простору, де це поле існує. Це дає підставу для важливої фізичної інтерпретації: саме* електричне поле *є носієм взаємодії між зарядами і, водночас, носієм енергії — енергія* локалізована *в тих областях простору, де є поле (у плоскому конденсаторі — виключно в проміжку між обкладками), а не «приписана» безпосередньо зарядам.*

Густина енергії електричного поля (строге виведення). Формулу (6.21) отримано для окремого випадку однорідного поля, локалізованого в проміжку між обкладками плоского конденсатора. Виникає природне запитання: чи має вона більш загальний характер, чи є наслідком саме цієї спрощеної геометрії? Покажемо, що вираз для густини енергії електричного поля залишається справедливим для *довільного* електростатичного поля — однорідного чи ні, локалізованого в скінченній області чи створеного як завгодно розподіленими зарядами, — і виведемо його строго, виходячи з енергії взаємодії зарядів.

Нехай заряд системи змінюється на нескінченно малу величину $\delta\rho(\mathbf{r})$. Оскільки енергія $W = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dV$ квадратична за ρ (адже сам потенціал φ лінійно виражається через ρ), пряме варіювання дає внесок не лише від зміни ρ при фіксованому φ, а й від відповідної зміни самого потенціалу. Записуючи $\varphi \to \varphi + \delta\varphi$, де $\delta\varphi(\mathbf{r}) = \int \delta\rho(\mathbf{r}')/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\, dV'$ — потенціал, створений приростом заряду, — та користуючись симетрією потенціалу точкового заряду,

$$\int \rho\,\delta\varphi\, dV = \iint \frac{\rho(\mathbf{r})\,\delta\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV\, dV' = \int \delta\rho\,\varphi\, dV,$$

бо відстань між точками не залежить від порядку, $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = |\mathbf{r}'-\mathbf{r}|$. Отже,

$$\boxed{\delta W = \int_V \delta\rho(\mathbf{r})\,\varphi(\mathbf{r})\, dV.} \tag{6.22}$$

За теоремою Гаусса для вектора $\mathbf{D}$ у диференціальній формі, $\delta\rho = \dfrac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\cdot\delta\mathbf{D}$, тому

$$\delta W = \frac{1}{4\pi}\int_V (\boldsymbol{\nabla}\cdot\delta\mathbf{D})\,\varphi\, dV.$$

Скористаємось векторною тотожністю $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\varphi\,\delta\mathbf{D}) = \varphi\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\delta\mathbf{D} + \delta\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi$, звідки

$$\delta W = \frac{1}{4\pi}\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(\varphi\,\delta\mathbf{D})\, dV - \frac{1}{4\pi}\int_V \delta\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi\, dV.$$

Поширимо інтегрування на весь (нескінченний) простір, обравши V як велику кулю радіуса R із центром десь усередині системи зарядів, і розглянемо границю $R\to\infty$. Перший доданок за теоремою Остроградського–Гаусса перетворюється на потік крізь сферу S_R:

$$\oint_{S_R} \varphi\,\delta\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_R} \varphi\,\delta D_r\, dS.$$

Для обмеженої системи зарядів на великих відстанях $\varphi \sim q/R$, а $\delta D_r \sim 1/R^2$, тому підінтегральний вираз спадає як $1/R^3$, тоді як площа сфери зростає як R^2. Отже, весь поверхневий інтеграл спадає як $1/R$ і прямує до нуля при $R \to \infty$:

$$\oint_{S_R} \varphi\, \delta D_r\, dS \;\sim\; \frac{1}{R} \;\xrightarrow[R\to\infty]{}\; 0.$$

Тому перший доданок зникає, і залишається лише

$$\delta W = -\frac{1}{4\pi} \int_V \delta\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi\, dV = \int_V \frac{\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D}}{4\pi}\, dV,$$

де ми скористались зв'язком $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$.

Для лінійного діелектрика ($\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$) це співвідношення інтегрується елементарно ($\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D} = \frac{1}{2}\delta(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})$), і ми приходимо до загального результату:

$$\boxed{W = \int_V \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{8\pi}\, dV, \qquad w = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{8\pi} = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}.} \tag{6.23}$$

Формула (6.23) *спирається на лінійний зв'язок* $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ *з* $\varepsilon = \text{const}$. *Саме на кроці* $\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D} = \frac{1}{2}\delta(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})$ *ми цим скористалися. Проміжний результат* $\delta w = \mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}/4\pi$ *є при цьому набагато загальнішим: він справедливий для* довільного *середовища — лінійного чи нелінійного, ізотропного чи ні. Формулу* (6.22) *тоді слід розуміти як* роботу *перенесення додаткового заряду* $\delta\rho$ *з нескінченності в точки з потенціалом* φ *(вище ми дійшли до неї через* $W = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dV$*, що коректно для лінійного середовища, але сама ця робота від лінійності не залежить). Далі використано лише скінченність повного заряду системи (яка забезпечила зникнення поверхневого інтеграла на нескінченності) та зв'язок* $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$*, а не конкретний вигляд зв'язку між* $\mathbf{E}$ *і* $\mathbf{D}$.

Тому в загальному (нелінійному) випадку густину енергії слід обчислювати як роботу, виконану джерелами поля при поступовому наростанні поля від нуля до заданого значення:

$$w = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\mathbf{D}} \mathbf{E}(\mathbf{D}')\cdot d\mathbf{D}',$$

що для ізотропного середовища ($\mathbf{D} \parallel \mathbf{E}$*) зводиться до звичайного інтеграла* $w = \frac{1}{4\pi}\int_0^D E(D')\,dD'$ *— площі під кривою* $E(D)$*. Для термодинамічно оборотного (без гістерезису) середовища цей інтеграл не залежить від шляху в просторі* $\mathbf{D}$*, і* $w(\mathbf{D})$ *є справжньою функцією стану поля. Легко переконатись, що при* $\varepsilon = \text{const}$ *цей вираз відтворює* (6.23)*:*

$$w = \frac{1}{4\pi}\int_0^D \frac{D'}{\varepsilon}\,dD' = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon} = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}{8\pi}.$$

* **Енергія поля точкового заряду**. Оцінімо енергію поля точкового заряду q у вакуумі. Густина енергії $w = E^2/(8\pi) = q^2/(8\pi r^4)$. Інтегруючи по сферичних оболонках $dV = 4\pi r^2\,dr$ від деякого малого радіуса r_0 до нескінченності:

$$W = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{q^2}{8\pi r^4} \cdot 4\pi r^2\,dr = \frac{q^2}{2}\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{2r_0}.$$

При $r_0 \to 0$ цей інтеграл *розбігається* — власна енергія точкового заряду нескінченна. Це — не фізична катастрофа, а сигнал, що «точковий заряд» — ідеалізація, яка ламається на дуже малих відстанях (там потрібна квантова теорія поля). Для реальних заряджених тіл скінченних розмірів (як куля в прикладах вище) власна енергія залишається скінченною.

Власна та взаємна енергія зарядів. Порівняємо два, на перший погляд, різні вирази для енергії системи зарядів: «дискретну» формулу (6.15), $W = \frac{1}{2}\sum q_i q_j/r_{ij}$, і «польову» формулу (6.23), $W = \int E^2/(8\pi)\,dV$. Перша з них, узагалі кажучи, може набувати як додатних, так і від'ємних значень (притягання різнойменних зарядів дає від'ємний внесок); друга ж, як інтеграл від невід'ємної величини E^2, — *завжди* невід'ємна. Це здається суперечністю, проте насправді обидві формули описують не зовсім те саме.

Розглянемо поле системи двох зарядів, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. Тоді

$$W = \int\limits_V \frac{E^2}{8\pi}\,dV = \int\limits_V \frac{E_1^2}{8\pi}\,dV + \int\limits_V \frac{E_2^2}{8\pi}\,dV + \int\limits_V \frac{\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2}{4\pi}\,dV.$$

Перші два доданки — це *власна енергія* кожного із зарядів окремо; вони завжди додатні,

$$\int\limits_V \frac{E_1^2}{8\pi}\,dV > 0, \qquad \int\limits_V \frac{E_2^2}{8\pi}\,dV > 0,$$

і не залежать від взаємного розташування зарядів. Третій доданок — це *взаємна (інтерференційна) енергія*

$$W_{\text{вз}} = \int\limits_V \frac{\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2}{4\pi}\,dV, \tag{6.24}$$

яка може мати будь-який знак залежно від взаємного розташування й знаків зарядів, і саме вона точно відповідає «дискретній» формулі q_1q_2/r_{12} з попереднього пункту.

! *Тепер зрозуміло, чому формула* (6.15) *свідомо* не враховує *власну енергію кожного точкового заряду: поле точкового заряду* $E \sim 1/r^2$ *поблизу нього необмежено зростає, а його власна енергія* $\int E^2/(8\pi)\,dV$ *— розбігається (звертається в нескінченність) при* $r \to 0$. *Саме тому «дискретна» енергія системи точкових зарядів може бути від'ємною — вона є лише частиною (взаємною частиною) від справді повної, завжди додатної, енергії поля, яка додатково містить (нескінченно великі) власні енергії кожного точкового заряду. Для тіл скінченних розмірів (як у прикладах з кулею вище) власна енергія, звісно, залишається скінченною.*

6.3. Пондеромоторні сили

Термін *пондеромоторні сили* походить від латинських слів *pondus* (вага, тягар) та *motor* (той, що рухає). Він виник в електродинаміці XIX ст.: так називали сили, що діють з боку поля на «вагомі» (ponderable) тіла — провідники, діелектрики, магнетики, — на відміну від *електрорушійних* сил, що діють на самі заряди (див. історичну довідку в розділі 7). Сьогодні *пондеромоторними* називають механічні сили, з якими електромагнітне поле діє на макроскопічні тіла.

Метод віртуальних переміщень. Одним з найефективніших способів обчислення сил, що діють на заряджені провідники й діелектрики, є *метод віртуальних переміщень*. Його ідея полягає в тому, щоб обчислити роботу сил поля $\delta A = F_x\,dx$ при уявному (*віртуальному*) нескінченно малому зміщенні тіла на dx у напрямку, що нас цікавить, після чого шукана сила знаходиться просто як

$$F_x = \frac{\delta A}{dx}.$$

! *Метод віртуальних переміщень — універсальний: він не вимагає з'ясування фізичної природи сили (електричної чи механічної) і автоматично враховує* всі *силові взаємодії в системі, оскільки спирається лише на закон збереження енергії.*

! Теорема Томсона. *У методі віртуальних переміщень ми неявно спираємось на глибший факт: рівноважний розподіл заряду на провідниках за заданих повних зарядів q_i — єдиний, що мінімізує електростатичну енергію системи серед усіх уявних розподілів заряду, сумісних з накладеними умовами (за заданих потенціалів φ_i мінімізується не сама енергія W, а величина $W - \sum_i q_i\varphi_i$). Інтуїція проста: якби якийсь інший розподіл давав меншу енергію, заряд самочинно перерозподілився б, і рівновага була б неможливою. Це — своєрідний варіаційний принцип електростатики, тісно пов'язаний з теоремою єдиності розв'язку рівняння Пуассона з попередніх розділів.*

Сила при сталому заряді провідників. Нехай на провідниках підтримується сталий заряд, $q = \text{const}$, тобто в системі немає зовнішніх джерел енергії (батарей тощо). За таких умов уся робота δA внутрішніх сил системи при віртуальному переміщенні відбувається виключно за рахунок *зменшення* власної електричної енергії системи W:

$$\delta A = -(dW)_{q=\text{const}}.$$

Якщо шукана сила F_x здійснює роботу $\delta A = F_x\,dx$ при зміщенні тіла на dx, то

$$\boxed{F_x = -\left.\frac{dW}{dx}\right|_{q=\text{const}}}. \tag{6.25}$$

! *Формула (6.25) — це суто математичний прийом: для її застосування не обов'язково, щоб заряди провідників у* реальному *процесі залишалися незмінними. Достатньо знайти приріст енергії dW, уявляючи, що заряд саме такий, яким він є в даний момент, і* умовно *вважаючи його фіксованим при обчисленні похідної.*

Сила при сталій різниці потенціалів. Нехай тепер, навпаки, на провідниках підтримуються сталими потенціали, $\Delta\varphi = \text{const}$ (наприклад, провідники приєднані до батареї, яка підживлює заряди в міру переміщення тіл і виконує при цьому роботу). За законом збереження енергії, робота джерела $\delta A_{\text{дж}}$ витрачається одночасно на виконання механічної роботи $F_x\,dx$ і на зміну енергії поля dW:

$$\delta A_{\text{дж}} = F_x\,dx + dW.$$

З іншого боку, робота джерела з перенесення заряду δq через різницю потенціалів $\Delta\varphi$ дорівнює $\delta A_{\text{дж}} = \delta q\,\Delta\varphi$; оскільки $q = C\Delta\varphi$, а $\Delta\varphi = \text{const}$, маємо $\delta q = \Delta\varphi\,\delta C$, тобто $\delta A_{\text{дж}} = \Delta\varphi^2\,\delta C$. Водночас, за формулою (6.20),

$dW = \frac{1}{2}\Delta\varphi^2\,\delta C$ (енергія при сталому $\Delta\varphi$ зростає разом із ємністю). Підставляючи, знаходимо

$$F_x\,dx = \Delta\varphi^2\,\delta C - \frac{1}{2}\Delta\varphi^2\,\delta C = \frac{1}{2}\Delta\varphi^2\,\delta C = dW,$$

звідки

$$\boxed{F_x = +\left.\frac{dW}{dx}\right|_{\Delta\varphi=\text{const}}}. \qquad (6.26)$$

! *Формули* (6.25) *і* (6.26) *відрізняються* знаком, *проте описують* одну й ту саму *фізичну силу: сама сила, що діє на нерухоме (у момент обчислення) тіло, не може залежати від того, який уявний спосіб зміни системи ми обираємо для її обчислення — метод сталого заряду чи метод сталого потенціалу. Різниця знаків пояснюється тим, що при сталому* $\Delta\varphi$ *енергію в систему додатково вкладає джерело, і саме цей додатковий внесок «перевертає» знак похідної.*

Мнемонічне правило: *якщо система «віддана сама собі»* ($q = \text{const}$) *— вона «прагне» зменшити свою енергію; якщо система підживлюється джерелом* ($\Delta\varphi = \text{const}$) *— джерело «допомагає» силі, і знак стає додатним. Але фізична сила — однакова в обох випадках.*

Притягування обкладок зарядженого конденсатора.

Знайдемо силу взаємного притягання обкладок плоского конденсатора, уявивши, що одна з обкладок зазнає віртуального зміщення dx вздовж напрямку, що з'єднує обкладки (рис. 6.6).

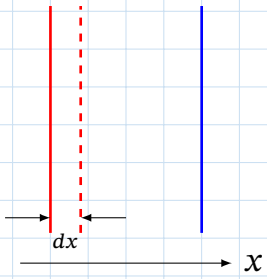


Рис. 6.6. Віртуальне зміщення dx обкладки конденсатора

Спосіб 1: $q = \text{const}$. Зміна енергії поля при зміні відстані між обкладками:

$$dW = d\left(\frac{q^2}{2C}\right) = -\frac{q^2}{2C^2}\,dC, \qquad C = \frac{\varepsilon S}{4\pi x}, \qquad dC = -\frac{C}{x}\,dx,$$

звідки $dW = \dfrac{q^2}{2Cx}\,dx$. Виражаючи через напруженість поля ($q = CEd = CEx$, де x тут відіграє роль відстані між обкладками),

$$dW = \frac{E^2x^2\,\varepsilon S}{2\cdot 4\pi x\cdot x}\,dx = \frac{\varepsilon E^2 S}{8\pi}\,dx,$$

і за формулою (6.25)

$$F_x = -\frac{dW}{dx} = -\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}\,S. \qquad (6.27)$$

Спосіб 2: $\Delta\varphi = \text{const}$. Аналогічно,

$$dW = d\left(\frac{C\Delta\varphi^2}{2}\right) = \frac{\Delta\varphi^2}{2}\,dC = -\frac{\Delta\varphi^2 C}{2x}\,dx = -\frac{\varepsilon E^2 S}{8\pi}\,dx$$

(тут підставлено $\Delta\varphi = Ex$), і за формулою (6.26) знову отримуємо той самий результат (6.27).

Знак «мінус» у формулі (6.27) свідчить про те, що сила спрямована на *зменшення* відстані між обкладками, тобто обкладки *притягуються* одна до одної — незалежно від знаків зарядів на них, оскільки сила пропорційна E^2.

! *Результат (6.27) має набагато загальніший характер, ніж просто «сила між обкладками конденсатора». Тиск поля на одиницю площі будь-якої зарядженої поверхні провідника у вакуумі*

дорівнює (пор. виведення через поле площадки в розділі 4)

$$p = \frac{E^2}{8\pi} = 2\pi\sigma^2,$$

! *де E — напруженість поля безпосередньо біля поверхні (зовні провідника), а σ — поверхнева густина заряду в цій точці (тут використано $E = 4\pi\sigma$ біля поверхні провідника). Це — електростатичний тиск, що намагається «розірвати» будь-яке заряджене тіло; він діє в кожній точці поверхні незалежно від її форми і завжди спрямований* назовні *провідника. У випадку плоского вакуумного конденсатора ($\varepsilon = 1$) цей тиск, помножений на площу обкладки S, і дає силу* (6.27).

Сила втягування діелектрика в конденсатор. Розглянемо плоский конденсатор, у який частково (на глибину x) всунуто пластину діелектрика з проникністю ε, і знайдемо силу, що діє на цю пластину. Зручно замінити реальну систему еквівалентною — двома паралельно з'єднаними конденсаторами: один, площею S_1, — вакуумний, а інший, площею S_2, — повністю заповнений діелектриком.

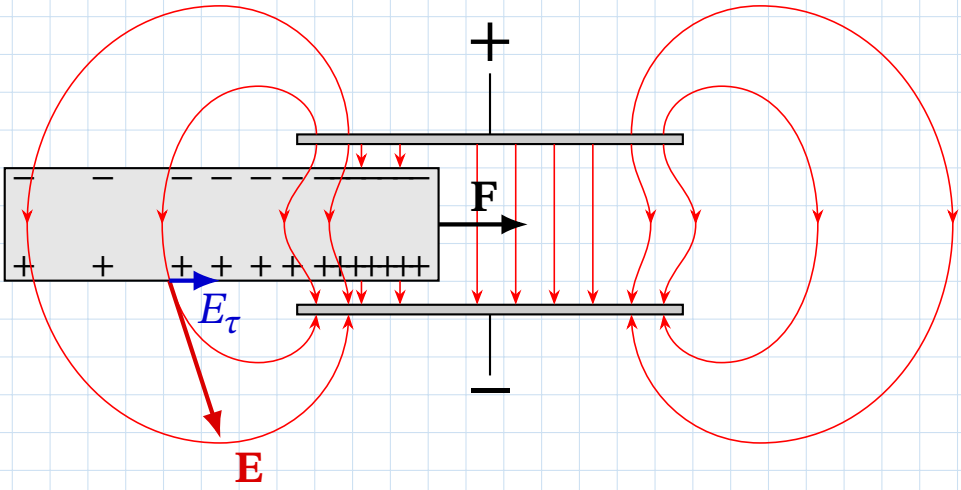


Рис. 6.7. Модель конденсатора з частково всунутою пластиною діелектрика: паралельне з'єднання вакуумного та заповненого діелектриком конденсаторів

За формулою для паралельного з'єднання (6.10),

$$C = C_1 + C_2 = \frac{S_1}{4\pi d} + \frac{\varepsilon S_2}{4\pi d}.$$

Нехай повна довжина конденсатора (у напрямку висування) дорівнює L, ширина обкладок — h, тоді повна площа $S = Lh$ стала, а $S_1 = \left(1 - \frac{x}{L}\right)S$, $S_2 = \frac{x}{L}S$ (тут x — глибина занурення пластини діелектрика). Підставля-

ючи, знаходимо ємність як функцію x:

$$C(x) = \frac{S}{4\pi d}\left(1 + (\varepsilon - 1)\frac{x}{L}\right).$$

Обчислимо силу при сталому заряді $q = \text{const}$ за формулою (6.25):

$$F_x = -\frac{dW}{dx} = -\frac{dW}{dC}\frac{dC}{dx}, \qquad \frac{dW}{dC} = -\frac{q^2}{2C^2}, \qquad \frac{dC}{dx} = \frac{S}{4\pi d}\,\frac{\varepsilon - 1}{L},$$

звідки

$$F_x = \frac{q^2}{2C^2}\cdot\frac{S}{4\pi d}\cdot\frac{\varepsilon - 1}{L} \overset{q=CEd}{=} \frac{(\varepsilon - 1)E^2}{8\pi}\,hd,$$

де ми скористались тим, що в кожен момент $q = CEd$, а $S/L = h$. Остаточно,

$$F_x = \frac{(\varepsilon - 1)E^2}{8\pi}\,S_{\text{торця}}, \tag{6.28}$$

де $S_{\text{торця}} = hd$ — площа торцевого перерізу пластини діелектрика (перерізу, яким вона «входить» у конденсатор). Оскільки $\varepsilon > 1$, сила F_x додатна — вона спрямована в бік *втягування* діелектрика всередину конденсатора.

На рисунку 6.7 вектор **F** *зображено в зоні, де поле виглядає однорідним, і складається враження, ніби сила діє на поверхню діелектрика в області однорідного поля. Метод віртуальних переміщень дає правильний кількісний результат, але приховує справжній механізм явища. Насправді ж на диполь діє сила з боку* неоднорідного *поля* (3.9)*. Саме неоднорідність поля на краю конденсатора створює результуючу силу, що діє на диполі всередині діелектрика, а отже, втягує діелектрик усередину.*

Цей механізм підтверджується і формально. У формулі (6.28) *сила пропорційна* $(\varepsilon - 1)$*, тобто* дорівнює нулю *за* $\varepsilon = 1$ *і зростає з діелектричною сприйнятливістю середовища* $\chi = (\varepsilon - 1)/4\pi$*. Це природно: втягування — прямий прояв* поляризації *діелектрика в неоднорідному полі (розділ 5). Чим сильніше середовище поляризується, тим сильніше воно «притягується» до області сильного поля. Так само рідкий діелектрик піднімається між частково зануреними в нього обкладками зарядженого конденсатора (задача 6.7).*

Підсумки

Усі результати цього розділу спираються на одну спільну ідею: електричне поле — не допоміжна розрахункова абстракція, а фізичний об'єкт, який *сам є носієм енергії*. Ємність описує, скільки заряду

(а отже, і поля) система здатна накопичити при заданій різниці потенціалів; енергія поля визначається інтегралом густини $w = \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}/8\pi$ за областю, де це поле існує; а пондеромоторні сили, що діють на провідники й діелектрики, знаходять з енергії поля методом віртуальних переміщень. Якщо система ізольована ($q = \text{const}$), сили зменшують її енергію; якщо ж потенціали підтримує джерело, енергія поля під дією тих самих сил *зростає* — за рахунок роботи джерела.

Практично з цього розділу варто винести три речі. По-перше, ємність будь-якої системи провідників обчислюється за єдиним алгоритмом: задати заряд, знайти поле, проінтегрувати різницю потенціалів, поділити. По-друге, густина енергії поля $w = \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}/8\pi$ — формула загальна, а не лише для плоского конденсатора: вона справедлива для довільного електростатичного поля. По-третє, сили, що діють на провідники й діелектрики, найпростіше знаходити методом віртуальних переміщень — через похідну енергії за координатою, з урахуванням того, яка величина (заряд чи потенціал) підтримується сталою.

Задачі

6.1. *Матриця ємностей.* Для двох куль із попереднього прикладу покладіть $R_1 = 1$ см, $R_2 = 2$ см, $b = 50$ см і обчисліть C_{11}, C_{22}, C_{12} чисельно.

6.2. *Ємність батареї.* Три конденсатори ємностями $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ, $C_3 = 3$ мкФ з'єднано спочатку послідовно, потім паралельно. Обчисліть сумарну ємність у кожному випадку.

6.3. *Заряд однієї обкладки подвоєно.* Плоский конденсатор заряджений звичайним чином: $q_1 = q$, $q_2 = -q$. Заряд однієї з обкладок збільшили вдвічі, не чіпаючи другої (стало $q_1' = 2q$, $q_2 = -q$). У скільки разів зміниться напруженість поля *між* обкладками? Чи лишається конденсатор при цьому ідеально екранованим? *Вказівка:* скористайтеся розкладом (6.8).

6.4. *Енергія поля зарядженої кулі.* Обчисліть енергію електричного поля рівномірно зарядженої по об'єму кулі радіуса R із повним зарядом Q двома способами: (а) через формулу (6.17), знайшовши потенціал усередині кулі; (б) через інтеграл $\int E^2/(8\pi)\,dV$ за всім простором. Переконайтесь, що результати збігаються. *Вказівка:* поле всередині кулі $E = Qr/R^3$, зовні — $E = Q/r^2$.

6.5. *Сила при сталій напрузі.* Плоский конденсатор із площею обкладок $S = 20$ см^2 приєднано до батареї, що підтримує напругу $U = 300$ В; відстань між обкладками $d = 0{,}5$ мм. Обчисліть силу притягання обкладок безпосередньо за формулою (6.26) (через залежність $C(x)$), не користуючись готовим результатом (6.27), і переконайтесь, що відповідь збігається. *Вказівка:* у СІ $C = \varepsilon_0 S/x$.

6.6. *Сила, що діє на діелектрик.* У плоский конденсатор з обкладками шириною $h = 5$ см і відстанню між ними $d = 2$ мм частково всунуто пластину діелектрика з $\varepsilon = 4$. Поле в конденсаторі $E = 5 \times 10^4$ В/м. Обчисліть силу, що втягує пластину всередину конденсатора. *Вказівка:* у СІ формула (6.28) має вигляд $F = \dfrac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E^2}{2} hd$.

6.7. *Втягування рідкого діелектрика.* Плоский конденсатор із вертикально розташованими обкладками (площа кожної $S = l \cdot h_0$, відстань між обкладками d) з'єднано з джерелом постійної напруги U. Нижні кінці обкладок занурено в рідину з діелектричною проникністю ε і густиною $\rho_р$, яка не проводить струм. Рідина втягується в проміжок між обкладками і встановлюється на деякій висоті h (відносно рівня рідини поза конденсатором; $h < h_0$, крайовими ефектами й капілярністю знехтуйте).

Знайдіть:

1. висоту підйому рідини h;
2. кількість теплоти Q, що виділилася при встановленні рівноваги.

Вказівка: скористайтесь тим, що при сталій напрузі втягувальна сила $F_{ел} = \dfrac{(\varepsilon - 1)l}{4\pi d}\dfrac{U^2}{2}$ (це формула (6.28) при $E = U/d$, $S_{торця} = ld$) не залежить від глибини занурення, а зміна енергії конденсатора ΔW і робота джерела $A_{дж}$ пов'язані співвідношенням $A_{дж} = 2\Delta W$. При рівновазі втягувальна сила зрівноважується вагою піднятого стовпа рідини. Теплоту знайдіть із закону збереження енергії $A_{дж} = \Delta W + \frac{1}{2}mgh + Q$, де $\frac{1}{2}mgh$ — приріст потенціальної енергії піднятої рідини.

Контрольні питання

1. Що називають ємністю відокремленого провідника? Чому відношення $C = q/\varphi$ не залежить від заряду і від чого воно залежить насправді?

2. Чому означення $C = q/\varphi$ втрачає сенс, якщо поблизу є інші провідники? Як тоді визначається взаємна ємність пари провідників?

3. Що таке конденсатор і чому його взаємна ємність майже не залежить від навколишніх тіл?

4. Чому дорівнює ємність двох далеких одна від одної куль (рис. 6.2) у головному наближенні? Що описує поправка, пропорційна $1/b$?

5. Виведіть формули для ємності батареї при послідовному та паралельному з'єднанні конденсаторів (рис. 6.3). Що залишається однаковим у кожному з випадків: заряд чи напруга?

6. Чому послідовне з'єднання завжди зменшує сумарну ємність, а паралельне збільшує? Яка величина для конденсатора відіграє роль опору?

7. Сформулюйте триетапний алгоритм обчислення ємності. Застосуйте його для плоского конденсатора та запишіть результат.

8. Виведіть ємність сферичного конденсатора. Що станеться з формулою при $R_2 \to \infty$ і чому цей результат очікуваний?

9. Яка загальна структура формул для ємності плоского, сферичного та циліндричного конденсаторів? Що в них відіграє роль «геометричного розміру»?

10. Чому дорівнює взаємна енергія системи точкових зарядів? Навіщо в формулі $W = \frac{1}{2}\sum\sum q_i q_j / r_{ij}$ множник $\frac{1}{2}$ і чому вона не враховує власну енергію зарядів?

11. Запишіть енергію системи зарядів через потенціали. Чому енергія кулі, зарядженої по поверхні, відрізняється від енергії кулі того ж заряду й радіуса, зарядженої по об'єму? Яке запитання це ставить про локалізацію енергії?

12. Виведіть енергію зарядженого конденсатора $W = q^2/2C = C\Delta\varphi^2/2$ через роботу перенесення заряду dq.

13. Як з енергії плоского конденсатора отримують густину енергії поля $w = \varepsilon E^2/8\pi = ED/8\pi$? Чому цю формулу можна вважати загальною, а не лише для однорідного поля?

14. Яку роль відіграє те, що потік вектора $\varphi\,\delta\mathbf{D}$ крізь нескінченно віддалену поверхню дорівнює нулю, у виведенні загального виразу для густини енергії?

15. Чому енергія «дискретної» формули для точкових зарядів може бути від'ємною, а енергія, обчислена як інтеграл від $E^2/8\pi$, завжди додатна? Що таке власна та взаємна (інтерференційна) енергія?

16. Чому власна енергія точкового заряду нескінченна? Що це означає

для моделі «точковий заряд»?

17. Що таке пондеромоторні сили та звідки походить термін? У чому полягає метод віртуальних переміщень?

18. Виведіть формули для сили при $q = \text{const}$ та при $\Delta\varphi = \text{const}$. Чому вони відрізняються знаком, хоча описують одну й ту саму фізичну силу?

19. Знайдіть силу притягання обкладок плоского конденсатора. Чому вона напрямлена на зменшення відстані між обкладками незалежно від знаків зарядів?

20. Чому діелектрик втягується в область сильного поля конденсатора? Як у формулі для сили з'являється множник $(\varepsilon - 1)$ і що з цього випливає для вакууму?

Частина II

Постійний електричний струм

Усі факти показують нам, що [...] електричний струм є лише іншою формою сил хімічної спорідненості [...], інакше кажучи, що сили, які називають хімічною спорідненістю та електрикою, є одними й тими самими.

Майкл Фарадей, «Експериментальні дослідження з електрики», §918 (1834)

7 Постійний електричний струм

Сила струму в гальванічному колі прямо пропорційна сумі всіх напруг і обернено пропорційна повній зведеній довжині кола.

Георг Ом, «Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet» (1827)

Досі ми вивчали провідники в *електростатичній рівновазі*: заряди на них розподілялися так, щоб поле всередині провідника зникло, а сама поверхня стала еквіпотенціальною. Тепер розглянемо принципово інший, хоч і споріднений, стан провідника — коли поле всередині *не* зникає, а, навпаки, підтримує неперервний, впорядкований рух зарядів. Такий рух і називають *електричним струмом*. Побачимо, що майже вся математична техніка, розвинена для електростатики (потік вектора поля, теорема Гаусса–Остроградського, граничні умови на межі середовищ), переноситься сюди практично без змін: роль заряду переймає сила струму, роль проникності ε — провідність λ, а роль ємності, як ми переконаємось у § 7.6, — обернений опір $1/R$.

7.1. Основні поняття

Сила струму та вектор густини струму. *Електричним струмом* називають будь-який упорядкований (спрямований) рух електричних зарядів. *Силою струму* I називають заряд, що переноситься через переріз провідника за одиницю часу:

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt}}. \tag{7.1}$$

Струм може бути нерівномірно розподілений по поверхні, крізь яку він протікає (рис. 7.1). Щоб описати цей розподіл *локально*, у кожній точці простору вводять *вектор густини струму* **j**: за напрямом він збігається з напрямом руху носіїв *позитивного* заряду в даній

точці, а за модулем чисельно дорівнює відношенню сили струму через елементарну площадку, розташовану перпендикулярно до руху носіїв, до площі цієї площадки:

$$j = \frac{dI}{dS_\perp}. \tag{7.2}$$

! *Напрям вектора* **j** *за означенням — це напрям руху* позитивних *носіїв заряду. Якщо реальними носіями струму є від'ємно заряджені частинки (наприклад, електрони в металі), то вони рухаються* проти *напряму* **j**. *Це не є якоюсь фізичною неоднозначністю: напрям* **j** *— узгоджена історична домовленість (він збігається з «класичним» напрямом струму, введеним задовго до відкриття електрона), а не твердження про природу носіїв.*

Знаючи вектор густини струму в кожній точці довільної (не обов'язково перпендикулярної до **j**) поверхні S, силу струму через цю поверхню знаходять як потік вектора **j**:

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \tag{7.3}$$

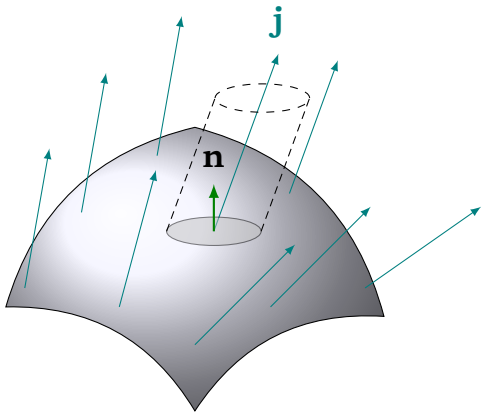


Рис. 7.1. Вектор густини струму **j** у різних точках поверхні S

Густина струму, густина заряду і дрейфова швидкість. Під дією електричного поля вільні носії заряду в провіднику здійснюють впорядкований рух, який накладається на їхній хаотичний тепловий рух. Середню швидкість цього впорядкованого руху називають *дрейфовою швидкістю* **u**.

Нехай концентрація носіїв заряду дорівнює n, а заряд кожного носія — e. Візьмемо площадку dS, перпендикулярну до дрейфової швидкості (рис. 7.2). За час dt цю площадку перетнуть усі носії, що на початку проміжку часу перебували в циліндрі об'ємом $dV = u\,dt\,dS$:

таких носіїв $dN = n\,dV$, і разом вони перенесуть заряд $dq = e\,dN = enu\,dt\,dS$. Отже, густина струму

$$j = \frac{dq}{dt}\frac{1}{dS} = enu = \rho u,$$

де $\rho = en$ — об'ємна густина заряду носіїв. У векторному вигляді

$$\boxed{\mathbf{j} = \rho\mathbf{u}.} \tag{7.4}$$

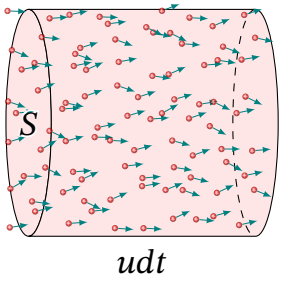


Рис. 7.2. До виведення зв'язку густини струму з дрейфовою швидкістю носіїв

! *Якщо в провіднику одночасно є носії кількох сортів (наприклад, позитивні й негативні іони в електроліті, або електрони і дірки в напівпровіднику), кожен сорт носіїв дає свій внесок у струм, і повна густина струму дорівнює векторній сумі* $\mathbf{j} = \sum_k \rho_k \mathbf{u}_k$, *причому доданки від носіїв протилежних знаків, які рухаються в протилежних напрямках,* додаються, *а не віднімаються (адже* $\rho_k\mathbf{u}_k$ *не змінює знака при одночасній зміні знаків* ρ_k *і* $\mathbf{u}_k$*).*

7.2. Природа носіїв заряду

Досліди Толмена і Стюарта. Той факт, що струм у металах зумовлений рухом *вільних електронів*, а не, скажімо, іонів кристалічної ґратки, не є очевидним апріорі і потребував експериментального доведення. Його дали досліди Толмена і Стюарта (1916), описані в розділі 4: під час різкого гальмування котушки вільні носії за інерцією продовжували рух відносно ґратки, і за напрямом та величиною короткочасного струму визначили знак і питомий заряд носіїв — це виявилися електрони.

Ідея досліду проста: носії заряду поводяться, як пасажири в автобусі, що різко гальмує, — за інерцією вони продовжують рухатися вперед відносно «корпусу» (ґратки провідника). Це той самий другий закон Ньютона, застосований не до макроскопічного тіла, а до *мікроскопічних* носіїв заряду всередині нього. Такий підхід, коли макроскопічно вимірювана величина (тут — імпульсний струм) дає інформацію про мікроскопічну характеристику речовини (тут — питомий заряд носіїв), типовий для фізики початку XX століття.

Дрейфова та теплова швидкість електронів. Порівняємо на конкретному прикладі дрейфову швидкість електронів (швидкість їхнього впорядкованого руху під дією поля) з їхньою тепловою швидкістю (швидкістю хаотичного теплового руху) — порівняння, яке добре ілюструє, наскільки «повільним» насправді є струм на мікроскопічному рівні.

Нехай срібним дротом перерізом $S = 1$ мм^2 тече струм силою $I = 1$ А; вважатимемо, що кожен атом срібла віддає один вільний електрон. Струм $I = jS = enuS$, а концентрацію електронів знаходимо через густину срібла ρ_m, його молярну масу μ і сталу Авогадро N_A:

$$n = \frac{\rho_m}{m_{\mathrm{Ag}}} = \rho_m \frac{N_A}{\mu}.$$

Звідси дрейфова швидкість

$$u = \frac{I}{enS} = \frac{I\mu}{e\rho_m N_A S} \approx 0{,}1 \text{ мм/с}$$

($n \approx 5{,}9 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}$). Теплову ж швидкість електронів оцінимо класично, як середню квадратичну швидкість молекул ідеального газу при кімнатній температурі $T = 300$ К:

$$v_T = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} \approx 1{,}2 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

Насправді електрони в металі утворюють вироджений (квантовий) газ, і типова швидкість їхнього хаотичного руху — так звана фермієвська швидкість $\sim 1{,}4 \cdot 10^6$ м/с — ще на порядок більша й від температури майже не залежить. Розрив між дрейфовою та хаотичною швидкістю від цього лише зростає.

Дрейфова швидкість електронів у типовому провіднику — частки міліметра за секунду, тобто на дев'ять–десять порядків *менша за швидкість їхнього хаотичного руху! Струм у колі «вмикається» практично миттєво (з електромагнітною хвилею, зі швидкістю порядку швидкості світла) не тому, що електрони «біжать» зі старту до навантаження, а тому, що електричне поле, яке приводить в рух* усі *вільні електрони провідника* одночасно *(а не послідовно, один за одним), встановлюється в колі майже миттєво.*

7.3. Закон збереження заряду

Ми з'ясували, *що* саме рухається (вільні електрони) і *наскільки повільно* відбувається це впорядковане перенесення заряду. Постає

природне запитання: чи може заряд у довільному об'ємі змінюватися довільним чином, чи існує тут якийсь закон, що обмежує можливі струми? Такий закон — це закон збереження електричного заряду, записаний мовою вектора густини струму.

Нехай у деякому провідному середовищі виділено об'єм V, обмежений замкненою поверхнею S. Повний струм, що витікає крізь цю поверхню, $I = \oint_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}$; оскільки струм — це рух заряду, то заряд, який лишається всередині об'єму V, з часом *зменшується* рівно на ту величину заряду, яка витекла (рис. 7.3). Тут і далі в цьому розділі ρ у рівнянні неперервності та в $\mathbf{j} = \rho\mathbf{u}$ — об'ємна густина заряду; не плутати з питомим опором ρ у законі Ома нижче (зміст символу щоразу зрозумілий з контексту):

$$\oint_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV. \tag{7.5}$$

Це співвідношення називають *рівнянням неперервності*: воно є математичним виразом закону збереження електричного заряду (заряд не з'являється й не зникає — він лише переноситься з місця на місце). У диференціальній формі (за теоремою Остроградського–Гаусса)

$$\boxed{\nabla\cdot\mathbf{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}.} \tag{7.6}$$

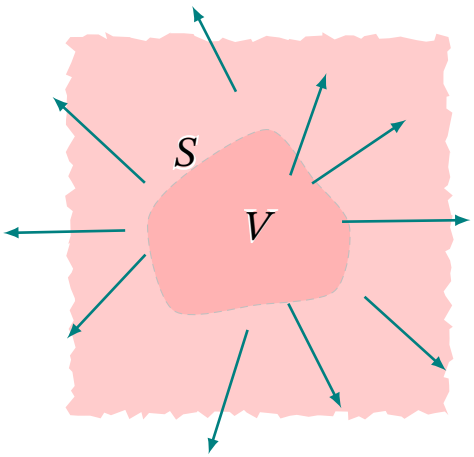


Рис. 7.3. Струм, що витікає крізь замкнену поверхню S, зменшує заряд в об'ємі V

У *стаціонарному* випадку, тобто коли розподіл заряду в просторі не змінюється з часом ($\partial\rho/\partial t = 0$), рівняння неперервності спрощується:

$$\oint_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S} = 0, \qquad \text{або} \qquad \nabla\cdot\mathbf{j} = 0. \tag{7.7}$$

Це означає, що з будь-якого об'єму, обмеженого замкненою поверхнею, витікає рівно стільки ж заряду, скільки в нього і втікає (рис. 7.4):

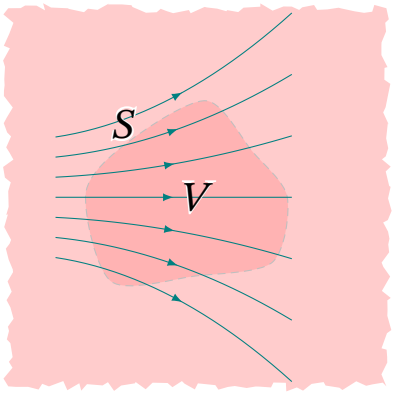


Рис. 7.4. З будь-якого об'єму, обмеженого замкненою поверхнею, витікає рівно стільки ж заряду, скільки в нього і втікає — лінії струму в стаціонарному випадку не мають ні витоків, ні стоків.

лінії струму в стаціонарному випадку не мають ні витоків, ні стоків (окрім хіба що точок, де є зовнішні джерела чи стоки заряду).

! *Саме умова* $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ *— це те, що математично означає слова «*постійний *(стаціонарний) струм»: лінії струму в такому режимі замкнені (або йдуть з нескінченності в нескінченність), і сила струму однакова в будь-якому перерізі* послідовно *з'єднаного провідника — саме тому має сенс говорити про «силу струму в колі», не уточнюючи, в якому саме місці кола вона виміряна.*

7.4. Закон Ома

Рівняння неперервності (7.6)–(7.7) — умова суто *кінематична*: вона обмежує можливі конфігурації $\mathbf{j}$, але нічого не каже про те, який саме струм насправді виникне в даному провіднику під дією даного поля $\mathbf{E}$. Щоб замкнути опис, потрібне ще одне, *матеріальне* рівняння, яке пов'язує $\mathbf{j}$ з $\mathbf{E}$ і залежить від конкретних властивостей середовища (так само як у діелектриках матеріальне рівняння $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ доповнює рівняння електростатики). Таким матеріальним рівнянням для провідників і є закон Ома.

Інтегральна форма. Г. Ом 1827 року експериментально встановив, що сила струму I, який тече однорідним металевим провідником, за відсутності в ньому сторонніх сил, пропорційна різниці потенціалів (напрузі) U на його кінцях:

$$I = \frac{U}{R}. \tag{7.8}$$

Коефіцієнт пропорційності R називають *електричним опором* провідника; він залежить від форми й розмірів провідника, від матеріалу, з якого він виготовлений, від температури, а також, узагалі кажучи, від розподілу струму по провіднику. У найпростішому випадку

однорідного циліндричного провідника довжиною ℓ і перерізом S

$$R = \rho \frac{\ell}{S}, \tag{7.9}$$

де ρ — *питомий опір* матеріалу (величина, обернена до питомої електропровідності $\lambda = 1/\rho$, яку ми означимо нижче).

Про одиниці вимірювання. У гауссовій системі одиниць $[I]$ = Фр/с, а $[U]$ = Фр/см, тому

$$[R] = \frac{[U]}{[I]} = \frac{\text{с}}{\text{см}},$$

тобто опір у СГС має розмірність *оберненої швидкості*. Відповідно, для питомого опору

$$[\rho] = [R]\frac{[S]}{[\ell]} = \frac{\text{с}}{\text{см}} \cdot \frac{\text{см}^2}{\text{см}} = \text{с},$$

тобто в гауссовій системі питомий опір вимірюється просто в *секундах*, а питома провідність λ — в обернених секундах.

! *Незвична на перший погляд розмірність опору й питомого опору в гауссовій системі одиниць — не якийсь дефект цієї системи, а наслідок того, що в СГС немає окремої «електричної» основної одиниці (на відміну від ампера в СІ): усі електричні величини виражаються через звичні механічні одиниці — сантиметри, грами, секунди. У Міжнародній системі одиниць (СІ) опір, звісно, вимірюють в омах, а питомий опір — в Ом·м.*

Диференціальна форма. Виведемо *локальний* (диференціальний) варіант закону Ома, який пов'язує густину струму **j** з напруженістю поля **E** *в кожній точці* провідника, а не інтегрально — на його кінцях. Виділимо в околі довільної точки провідного середовища нескінченно малий циліндричний об'єм із твірними, паралельними вектору **j** (рис. 7.5).

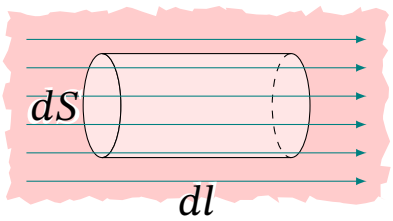


Рис. 7.5. Елементарний циліндр струму до виведення диференціальної форми закону Ома

Якщо переріз циліндра дорівнює dS, а довжина — dl, то, застосовуючи до нього закон Ома (7.8)–(7.9) ($I \to j\,dS$, $U \to E\,dl$, $R \to \rho\,dl/dS$), маємо

$$j\,dS = \frac{E\,dl}{\rho\,dl/dS} = \frac{1}{\rho}E\,dS,$$

звідки, після скорочень, у векторному вигляді:

$$\boxed{\mathbf{j} = \frac{1}{\rho}\mathbf{E} = \lambda \mathbf{E},} \tag{7.10}$$

де $\lambda = 1/\rho$ — питома електропровідність середовища.

Розподіл зарядів у провіднику, яким тече струм. З'ясуємо, де саме розташовані заряди, які створюють електричне поле всередині провідника зі струмом. Якщо провідник *однорідний* ($\lambda = \text{const}$) і по ньому тече стаціонарний струм, то $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ за формулою (7.7). Але, за диференціальним законом Ома (7.10) і теоремою Гаусса,

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{E} = \lambda \cdot 4\pi\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = 0. \tag{7.11}$$

Отже, в однорідному провіднику зі стаціонарним струмом *об'ємна* густина заряду в усіх внутрішніх точках дорівнює нулю.

Водночас, на *поверхні* провідника зі струмом заряди, взагалі кажучи, є (рис. 7.6). Саме ці поверхневі заряди і є джерелами поля $\mathbf{E}$, яке існує всередині провідника і забезпечує протікання постійного струму. Порівняймо два стани провідника, які легко сплутати:

- *провідник без струму* (електростатична рівновага): поле всередині дорівнює нулю, поверхня еквіпотенціальна, поверхневі заряди розташовані так, щоб *повністю* скомпенсувати поле всередині;
- *провідник зі струмом*: поле всередині *не* дорівнює нулю, але дорівнює $\mathbf{E} = \mathbf{j}/\lambda$ у кожній точці; поверхневі заряди перерозподіляються так, щоб *підтримувати* саме таке поле, а не знищувати його.

Зв'язок поверхневих зарядів із полем дають граничні умови для електростатичного поля. Тангенціальна складова напруженості електричного поля $\mathbf{E}_\tau$ є неперервною при переході через поверхню розділу середовищ. Позначимо поле зовні провідника $\mathbf{E}$, а поле всередині, яке забезпечує протікання струму, — $\mathbf{E}'$. Тангенціальна складова внутрішнього поля дорівнює тангенціальній складовій поля зовні:

$$E_\tau = E'_\tau. \tag{7.12}$$

Нормальна ж складова зазнає стрибка, який визначається поверхневою густиною заряду σ:

$$E_n^{\text{зовн}} - E_n^{\text{внутр}} = 4\pi\sigma. \tag{7.13}$$

Саме ця умова і пов'язує *кількісно* розподіл поверхневих зарядів із конфігурацією поля на поверхні провідника.

Із неперервності $\mathbf{E}_\tau$ випливає, що в провіднику зі струмом тангенціальна складова поля на поверхні відмінна від нуля. А це означає, що вздовж поверхні є спад напруги:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_\tau \, dl \neq 0. \tag{7.14}$$

Тому поверхня провідника зі струмом, на відміну від провідника в електростатичній рівновазі, *не* є еквіпотенціальною. Практичний наслідок: вольтметр, приєднаний до двох точок на поверхні одного й того самого однорідного провідника зі струмом, реєструє ненульову напругу — результат, неможливий для провідника в електростатичній рівновазі. Саме умова неперервності $\mathbf{E}_\tau$ і зумовлює ту конфігурацію силових ліній, яка зображена на рисунку, де вектор поля зовні $\mathbf{E}$ має як нормальну, так і тангенціальну складові (рис. 7.6).

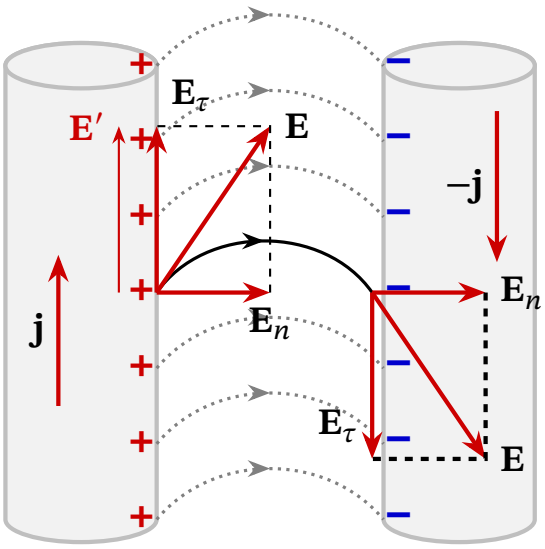


Рис. 7.6. Поверхневі заряди на провіднику зі струмом створюють як тангенціальну, так і нормальну складову поля

Пряме спостереження поверхневих зарядів *ускладнене*, проте створюване ними поле надійно реєструється експериментально (рис. 7.7). Один із класичних методів — *візуалізація силових ліній за допомогою дрібнодисперсного порошку* (або завислих частинок у в'язкому середовищі). Частинки, потрапляючи в електричне поле,

поляризуються: їхній дипольний момент орієнтується вздовж поля, а в неоднорідному полі на них діє сила, що втягує їх у ділянки сильнішого поля. У результаті частинки шикуються вздовж силових ліній. Якщо провідник зі струмом занурити в таку суспензію або нанести порошок на його поверхню, картина ліній поля стає безпосередньо видимою. Ключове спостереження: силові лінії виходять із поверхні провідника *під кутом*, відмінним від прямого, а не перпендикулярно до неї, як було б у випадку електростатичної рівноваги. Саме цей нахил і є прямим візуальним свідченням наявності тангенціальної складової поля $\mathbf{E}_\tau$, створеної поверхневими зарядами. (Зауважимо: порошок реєструє саме *поле*, а не самі заряди — поверхневі заряди є лише його джерелом.)

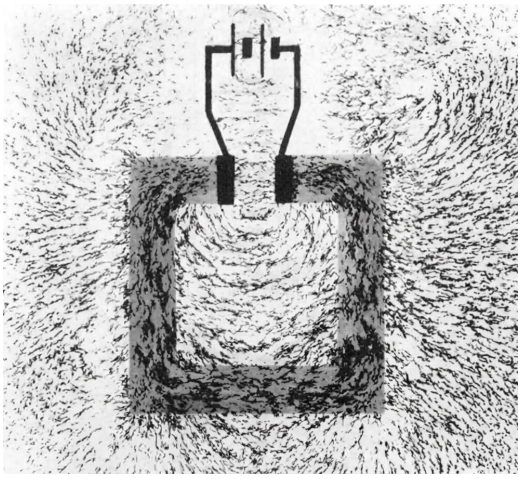


Рис. 7.7. Дослід із дрібнодисперсним порошком (фотографія з *Jefimenko O. D.* Demonstration of the Electric Fields of Current-Carrying Conductors // American Journal of Physics. 1962. Vol. 30, no. 1. P. 19–21).

! *Часто виникає спокуса уявити, що струм у дроті «жене» поле самого джерела: мовляв, джерело створило поле, і воно штовхає електрони вздовж усього дроту. Насправді це не так. Поле джерела — дипольне за своєю природою (надлишковий плюс на одній клемі, мінус на іншій), а дипольне поле спадає з відстанню дуже швидко, як* $1/r^3$*. Уже на відстані кількох розмірів джерела воно практично не відчутне — тож безпосередньо «дотягнутися» до далекої ділянки дроту воно не може.*

Поле на далекій ділянці створюють поверхневі заряди на самій цій ділянці. *Механізм такий: поле джерела поляризує прилеглу ділянку дроту, на ній з'являються поверхневі заряди; їхнє поле поляризує наступну ділянку — і так уздовж усього провідника. Поле ніби* передається естафетою *від ділянки до ділянки, а джерело лише запускає цей ланцюжок. Саме тому поверхневі заряди — не другорядна деталь, а необхідна умова існування струму: без них поле джерела зосередилося б лише поблизу клем, і струм не тік би уздовж усього дроту.*

У стаціонарному стані цей розподіл самоузгоджений: поверхневі заряди розташовуються так, щоб у кожній внутрішній точці провідника сумарне поле дорівнювало $\mathbf{E} = \mathbf{j}/\lambda$*. Але* встановлюється *він саме через послідовну поляризацію ділянок — від клем джерела до найдальших кінців кола.*

Сторонні сили. Електрорушійна сила. У замкненому колі позитивні носії заряду рухаються під дією електричного поля від вищого потенціалу до нижчого — тобто в бік *спадання* потенціалу. Якби це був єдиний механізм, коло дуже швидко прийшло б до рівноваги: усі точки провідників набули б однакового потенціалу, поле всередині зникло б, і струм припинився б. Щоб струм *не* припинявся, потрібно повертати носіїв назад — на ділянки з вищим потенціалом, тобто *проти* сил електростатичного поля (рис. 7.8). Перенесення носіїв на таких ділянках можливе лише за допомогою сил *неелектростатичного* походження, які називають *сторонніми силами*.

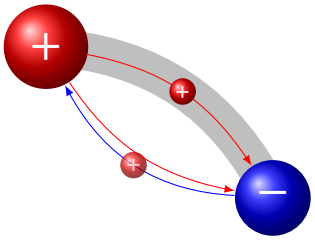


Рис. 7.8. У замкненому колі частина носіїв мусить рухатися проти сил електростатичного поля — це можливо лише завдяки стороннім силам

Фізична природа сторонніх сил може бути дуже різною. У *гальванічному елементі* (батарейці, акумуляторі) хімічна реакція розділяє заряди на електродах: на одному накопичується надлишок позитивного заряду, на іншому — негативного; виникає поле сторонніх сил, яке «заганяє» іони всередину джерела проти поля. У *термоелементі* різниця температур на спаях двох різних металів викликає дифузію носіїв, що створює сторонню ЕРС. У *фотоелементі* енергія світла вивільняє носії, розділяючи їх по різні боки переходу. У *електрогенераторі* механічне обертання рамки в магнітному полі породжує силу Лоренца, яка відіграє роль сторонньої сили. Попри різну природу, всі ці механізми можна описати єдиним чином — через поле сторонніх сил.

Незалежно від конкретної природи, для кількісного опису вводять *поле сторонніх сил* $\mathbf{E}^*$ — сторонню силу, що діє на одиничний позитивний заряд:

$$\mathbf{E}^* = \frac{\mathbf{F}^*}{q}. \tag{7.15}$$

Роботу сторонніх сил з переміщення одиничного позитивного заряду з точки 1 у точку 2 (в межах ділянки, де діють сторонні сили) називають *електрорушійною силою* (ЕРС):

$$\mathscr{E} = \frac{A^*}{q} = \int\limits_{(1)}^{(2)} \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{r}. \tag{7.16}$$

Для *замкненого* кола цей інтеграл перетворюється на циркуляцію

поля сторонніх сил по всьому контуру:

$$\mathscr{E} = \oint \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{r}. \tag{7.17}$$

Саме ця циркуляція і відрізняє поле сторонніх сил від електростатичного: електростатичне поле *потенціальне*, його циркуляція по будь-якому замкненому контуру дорівнює нулю, тоді як циркуляція поля сторонніх сил по замкненому контуру *не* дорівнює нулю — і саме вона дорівнює ЕРС.

! *Попри назву, ЕРС — це не сила, а робота (точніше, робота на одиницю заряду), тобто величина з розмірністю потенціалу (напруги), а не сили. Історична назва — данина часів, коли поняття енергії й роботи в електриці ще не було чітко відокремлено від поняття сили.*

Назву «електрорушійна сила» (італ. *forza elettromotrice*) пов'язують з А. Вольтою. Пояснюючи дію свого стовпа (1800 р.), Вольта вважав, що в місці контакту двох різних металів діє особлива сила, яка «рухає» електрику з одного металу в інший і підтримує струм (*контактна теорія*). Електрику тоді уявляли невагомою рідиною, а поняття енергії ще не існувало — закон її збереження сформулювали лише в 1840-х роках (Ю. Маєр, Дж. Джоуль, Г. Гельмгольц), тож усе, що приводило електрику в рух, називали силою. Згодом, насамперед завдяки дослідам М. Фарадея, стало зрозуміло, що енергію стовпа дають хімічні реакції, а не сам контакт металів. Назва ж лишилася, хоча ЕРС — це робота на одиницю заряду і вимірюють її у вольтах.

У XIX ст. *електрорушійним* силам, що рухають «невагому» електрику в провідниках, протиставляли *пондеромоторні* (лат. *pondus* — вага): ті, що діють на «вагомі» тіла, — притягують заряджені провідники, повертають магнітну стрілку, зрушують провідник зі струмом. У німецькій літературі того часу, зокрема в Г. Герца, обидва терміни стоять поруч. Ми зустрінемо пондеромоторні сили в розділі 6 і в розділі 13.

Якщо на провідник одночасно діють і електростатичне поле $\mathbf{E}$, і поле сторонніх сил $\mathbf{E}^*$, то на кожен носій заряду діє сумарна сила $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)$, і диференціальний закон Ома (7.10) узагальнюється:

$$\mathbf{j} = \lambda(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*). \tag{7.18}$$

Закон Ома в інтегральній формі для неоднорідної ділянки та замкненого кола. *Неоднорідною* називають ділянку кола, на якій, окрім електростатичного поля, діють ще й сторонні сили (рис. 7.9). Розглянемо таку ділянку між точками 1 і 2 і проінтегруємо узагальнений закон Ома (7.18), скалярно помножений на елемент довжини $d\mathbf{r}$

уздовж ділянки, від точки 1 до точки 2:

$$\int\limits_{(1)}^{(2)} \frac{\mathbf{j}\cdot d\mathbf{r}}{\lambda} = \int\limits_{(1)}^{(2)} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} + \int\limits_{(1)}^{(2)} \mathbf{E}^*\cdot d\mathbf{r}.$$

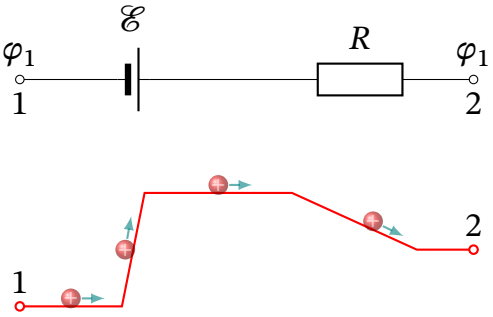


Рис. 7.9. Неоднорідна ділянка кола (згори — електрична схема; знизу — та сама ділянка у вигляді «потенціальних гірок», що показує зміну потенціалу вздовж шляху заряду) між точками 1 (потенціал φ_1) і 2 (потенціал φ_2), де на заряд діють і опір, і сторонні сили

Ліва частина рівняння, з огляду на сталість сили струму I уздовж послідовно з'єднаної ділянки (стаціонарність!) і означення опору, дорівнює IR, де $R = \int \rho\, dl/S$ — опір усієї ділянки; перший доданок справа, за означенням потенціалу, дорівнює $\varphi_1 - \varphi_2$; другий, за означенням (7.16), — це ЕРС $\mathscr{E}$, що діє на ділянці. Отримуємо *закон Ома для неоднорідної ділянки кола*:

$$\boxed{IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}.} \qquad (7.19)$$

! *Знак ЕРС у формулі* (7.19) — алгебраїчний*: якщо джерело ЕРС на цій ділянці сприяє руху позитивних носіїв в обраному напрямку (від* 1 *до* 2*), то* $\mathscr{E} > 0$*; якщо перешкоджає —* $\mathscr{E} < 0$*. Практичне правило: обходячи ділянку від* 1 *до* 2*, ЕРС беруть зі знаком «плюс», якщо цей обхід усередині джерела відбувається від мінуса до плюса (тобто в напрямку дії сторонніх сил), і зі знаком «мінус» — у протилежному випадку.*

Для *замкненого* кола точки 1 і 2 збігаються, тому $\varphi_1 = \varphi_2$, і закон (7.19) набуває найпростішого вигляду:

$$\boxed{IR = \mathscr{E},} \qquad (7.20)$$

де тепер R — повний опір усього замкненого кола, а $\mathscr{E}$ — алгебраїчна сума всіх ЕРС, що діють у цьому колі.

Внутрішній опір джерела. ККД джерела. Реальне джерело ЕРС (гальванічний елемент, акумулятор, генератор) завжди має власний, *внутрішній* опір r — адже сторонні сили діють не в математичній

точці, а в певному матеріальному об'ємі джерела, який чинить такий самий опір проходженню струму, як і решта кола. Якщо джерело з ЕРС $\mathscr{E}$ і внутрішнім опором r замкнене на зовнішнє навантаження опором R, закон Ома для замкненого кола (7.20) набуває вигляду

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + r}. \tag{7.21}$$

Звідси видно два граничні випадки: при розімкненому колі ($R \to \infty$) струм відсутній, а напруга на затискачах джерела дорівнює якраз ЕРС $\mathscr{E}$ (це і є практичний спосіб виміряти ЕРС — вольтметром з дуже великим внутрішнім опором, коли струм у колі нехтовно малий); при *короткому замиканні* ($R = 0$) струм досягає максимального значення $I_{\text{к.з.}} = \mathscr{E}/r$, обмеженого вже тільки внутрішнім опором самого джерела.

Потужність, яку джерело віддає у зовнішнє коло, дорівнює $\mathcal{P}_{\text{зовн}} = I^2R$, тоді як повна потужність, яку розвивають сторонні сили, — $\mathcal{P}_{\text{повн}} = \mathscr{E}I = I^2(R + r)$; різниця I^2r виділяється у вигляді тепла всередині самого джерела. Відношення цих потужностей називають *коефіцієнтом корисної дії* джерела:

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_{\text{зовн}}}{\mathcal{P}_{\text{повн}}} = \frac{R}{R + r}. \tag{7.22}$$

! *ККД джерела зростає з R монотонно, прямуючи до одиниці при $R \to \infty$ — але саме тоді струм, а отже й* корисна потужність *$\mathcal{P}_{\text{зовн}} = I^2R = \mathscr{E}^2R/(R + r)^2$, прямує до нуля. Максимум корисної потужності (а не ККД!) досягається при* узгодженому навантаженні *$R = r$, і дорівнює $\mathcal{P}_{\max} = \mathscr{E}^2/(4r)$; при цьому ККД становить лише* 50%.

Розгалужені кола. Правила Кірхгофа. Закони (7.19)–(7.20) безпосередньо дозволяють розрахувати нерозгалужене коло, де по всьому колу тече той самий струм. У розгалуженому колі (тобто в колі з кількома контурами, що мають спільні ділянки) струми на різних ділянках різні, і їх усі треба знайти. Для цього закон Ома для неоднорідної ділянки (7.19) доповнюють умовою стаціонарності (7.7); разом вони записуються у формі двох правил Кірхгофа.

Перше правило Кірхгофа стосується *вузлів* кола — точок, де сходяться три й більше провідники (рис. 7.10). Його фізична причина — збереження електричного заряду разом зі стаціонарністю струму. Вузол не може накопичувати заряд: якби сумарний струм, що втікає у вузол, перевищував сумарний струм, що витікає з нього, то заряд поблизу вузла зростав би зі швидкістю $dq/dt = \sum I_{\text{вх}} - \sum I_{\text{вих}} \neq 0$, разом із ним змінювалися б потенціал вузла й створене ним поле, а отже, і

струми в провідниках — усе це суперечить стаціонарності. Насправді навіть мізерний надлишок заряду створює поле, яке відразу перерозподіляє струми так, що баланс відновлюється; тому в стаціонарному режимі заряд вузла не змінюється.

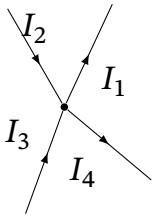


Рис. 7.10. Вузол розгалуженого кола: $I_1 + I_4 = I_2 + I_3$

Кількісно це наслідок рівняння (7.7), застосованого до замкненої поверхні S, що охоплює вузол і перетинає лише підвідні провідники. Поза провідниками $\mathbf{j} = 0$, а потік вектора $\mathbf{j}$ крізь переріз k-го провідника дорівнює $\pm I_k$ (знак «плюс», якщо струм витікає з об'єму, «мінус» — якщо втікає). Тому $\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0$ перетворюється на твердження: алгебраїчна сума струмів, що сходяться у вузлі, дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^{K} I_k = 0. \tag{7.23}$$

Струми, що втікають у вузол, і струми, що витікають з нього, при цьому слід вважати величинами *різних знаків* (наприклад, «втікає» — зі знаком «плюс», «витікає» — зі знаком «мінус», або навпаки, аби послідовно дотримуватись однієї домовленості).

Друге правило Кірхгофа стосується довільного *контуру* (замкненої частини розгалуженого кола, рис. 7.11). Закон Ома для замкненого кола (7.20) тут безпосередньо застосувати не можна: він записаний для єдиного струму I, тоді як на різних ділянках контуру розгалуженого кола струми різні. Тому виходимо із закону Ома для *неоднорідної ділянки* (7.19), який справедливий для кожної ділянки окремо.

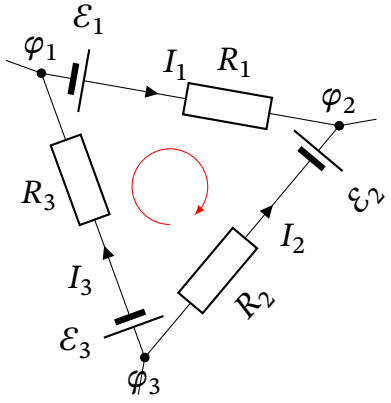


Рис. 7.11. Контур розгалуженого кола з трьома ЕРС і трьома резисторами

Оберемо напрям обходу контуру (рис. 7.11) й розіб'ємо контур на M послідовних ділянок так, щоб на кожній ділянці струм був сталим

(за першим правилом він може змінитися лише у вузлах). Точки, що розділяють ділянки, пронумеруємо за ходом обходу: ділянка m іде від точки m до точки $m+1$, а після останньої ділянки повертаємося в точку 1 (тобто $M+1 \equiv 1$). Нехай I_m — сила струму на ділянці m (додатна, якщо струм іде за напрямом обходу), R_m — її опір, $\mathscr{E}_m$ — ЕРС на ній (додатна, якщо сторонні сили діють за напрямом обходу; якщо джерела на ділянці немає, $\mathscr{E}_m = 0$). Закон (7.19) для ділянки m дає

$$I_m R_m = \varphi_m - \varphi_{m+1} + \mathscr{E}_m, \qquad m = 1, \dots, M.$$

Додамо ці M рівностей:

$$\sum_{m=1}^{M} I_m R_m = \sum_{m=1}^{M} (\varphi_m - \varphi_{m+1}) + \sum_{m=1}^{M} \mathscr{E}_m.$$

Перша сума справа — «телескопічна»: $(\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + \dots + (\varphi_M - \varphi_1) = 0$, бо потенціали проміжних точок скорочуються, а потенціал у початковій точці входить двічі з протилежними знаками. Фізично це означає, що електростатичне поле потенціальне: циркуляція $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ по замкненому контуру дорівнює нулю, і в кожній точці потенціал має єдине значення. Отже, електростатичні потенціали з рівняння зникають, і лишається *друге правило Кірхгофа*: алгебраїчна сума добутків сил струмів на опори ділянок контуру дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС, що діють у цьому контурі:

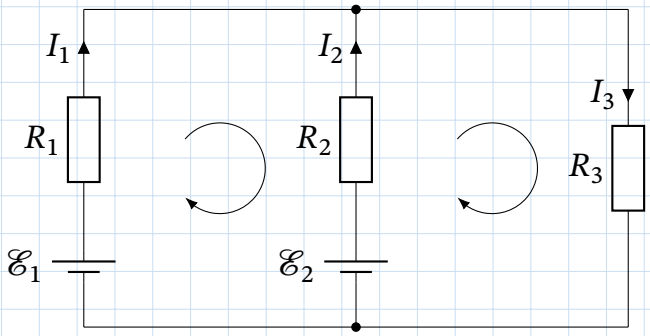
$$\sum_{m=1}^{M} I_m R_m = \sum_{n=1}^{N} \mathscr{E}_n. \tag{7.24}$$

Тут N — кількість джерел у контурі (ЕРС відмінні від нуля лише на ділянках із джерелами). Отже, друге правило — це закон Ома для неоднорідної ділянки, записаний для всіх ділянок контуру й підсумований так, що потенціали скоротилися. Якщо коло нерозгалужене, усі I_m однакові, і (7.24) зводиться до закону Ома для замкненого кола (7.20).

! *Щоб послідовно застосувати друге правило Кірхгофа, потрібно: (1) довільно обрати напрям обходу контуру (за годинниковою стрілкою чи проти); (2) довільно обрати (і позначити на схемі) напрями невідомих струмів I_m на кожній ділянці; (3) доданок $I_m R_m$ брати зі знаком «плюс», якщо обраний напрям струму на цій ділянці збігається з напрямом обходу, і зі знаком «мінус» — якщо ні; (4) ЕРС $\mathscr{E}_n$ брати зі знаком «плюс», якщо напрям обходу контуру всередині джерела йде від мінуса до плюса, і зі знаком «мінус» — у протилежному випадку. Якщо в результаті розв'язання системи*

! *рівнянь якийсь зі струмів I_m виявиться від'ємним, це означає лише, що його реальний напрям — протилежний до обраного на кроці (2), а не помилку в розрахунку.*

* **Приклад: розрахунок розгалуженого кола**. Розглянемо коло з двома вузлами й трьома паралельними гілками: у першій діють ЕРС $\mathscr{E}_1 = 6$ В і опір $R_1 = 1$ Ом, у другій — $\mathscr{E}_2 = 3$ В і опір $R_2 = 2$ Ом, третя гілка містить лише опір $R_3 = 3$ Ом (без ЕРС). Позначимо струми у гілках I_1, I_2, I_3; струми I_1 і I_2 спрямуємо до «верхнього» вузла, а I_3 — від нього (як на схемі).



За першим правилом Кірхгофа (7.23) для цього вузла:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

(струм I_3 узято зі знаком «мінус», оскільки за обраним напрямом він, на відміну від I_1 та I_2, витікає з вузла). За другим правилом (7.24), обходячи почергово контур «гілка 1 — гілка 3» і контур «гілка 2 — гілка 3» за годинниковою стрілкою:

$$I_1 R_1 + I_3 R_3 = \mathscr{E}_1,$$
$$I_2 R_2 + I_3 R_3 = \mathscr{E}_2.$$

Підставляючи числові значення й розв'язуючи систему трьох рівнянь відносно I_1, I_2, I_3, знаходимо

$$I_1 \approx 1{,}91 \text{ А}, \qquad I_2 \approx -0{,}55 \text{ А}, \qquad I_3 \approx 1{,}36 \text{ А}.$$

! *Від'ємне значення $I_2 \approx -0{,}55$ А не є помилкою: воно означає, що реальний напрям струму в другій гілці протилежний до довільно обраного на початку розрахунку — тобто джерело $\mathscr{E}_2$ насправді не віддає струм у коло, а, навпаки, підзаряджається струмом, що тече від потужнішого джерела $\mathscr{E}_1$. Такий результат типовий для кіл із кількома джерелами різної ЕРС, увімкненими паралельно.*

7.5. Закон Джоуля–Ленца

Оскільки провідник зі струмом чинить опір рухові носіїв заряду (розсіюючи їхню впорядковану кінетичну енергію на теплові коливання ґратки при зіткненнях), проходження струму неминуче супроводжується виділенням тепла.

Робота поля з перенесення заряду dq через різницю потенціалів U дорівнює $dA = U\,dq = UI\,dt$; уся ця робота, за відсутності інших змін в системі (наприклад, накопичення енергії в конденсаторі), переходить у теплоту, тому потужність тепловиділення на ділянці кола $\mathcal{P} = dA/dt = UI$, а за законом Ома $U = IR$:

$$\mathcal{P} = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

Записуючи це для нескінченно малого циліндричного елемента провідника ($U \to E\,dl$, $I \to j\,dS$) і ділячи на його об'єм $dV = dl\,dS$, отримуємо формулу для *об'ємної густини потужності тепловиділення*:

$$\boxed{w = \lambda E^2 = \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}.} \tag{7.25}$$

Інтегруючи по всьому об'єму провідника, знаходимо *закон Джоуля–Ленца в інтегральній формі*:

$$\boxed{\mathcal{P} = \int\limits_V w\,dV = \int\limits_V \rho j^2\,dV = I^2 \int\limits_V \rho\,\frac{dl}{S} = I^2 R.} \tag{7.26}$$

7.6. Струми в необмежених середовищах

Досі опір провідника обчислювався за готовою формулою (7.9) для найпростішої, циліндричної геометрії, у якій струм тече строго вздовж однієї осі. Але як бути, коли струм *розтікається* в просторі довільної форми — наприклад, від електрода чи заземлювача в необмежене провідне середовище? Виявляється, для цього не потрібна принципово нова теорія: досить згадати вже відому з електростатики аналогію між рівнянням Лапласа для потенціалу й тим самим рівнянням, що керує розподілом струму.

Розглянемо задачу, яка, на перший погляд, не стосується «кіл» у звичному розумінні: у провідне середовище з питомою провідністю λ і діелектричною проникністю ε занурено два електроди, і потрібно знайти повний опір середовища між ними (рис. 7.12). Ця задача важлива, наприклад, для розрахунку опору заземлення.

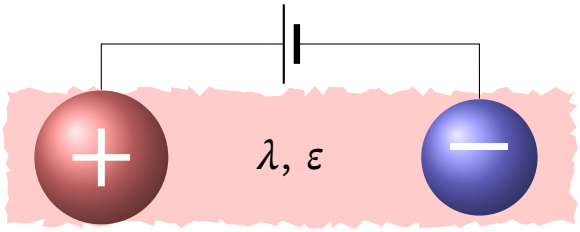


Рис. 7.12. Два електроди в необмеженому провідному середовищі з провідністю λ і проникністю ε

Нехай на електроди нанесено заряди $+q$ і $-q$. З теореми Гаусса для електростатичного поля в діелектрику, застосованої до поверхні, що охоплює позитивний електрод,

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\,q = \frac{4\pi}{\varepsilon}\,C(\varphi_+ - \varphi_-),$$

де C — взаємна ємність електродів (у середовищі з проникністю ε), а $q = C(\varphi_+ - \varphi_-)$. Але та сама поверхня охоплює й струм, що стікає з електрода: за диференціальним законом Ома, $\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}$ поблизу поверхні електрода, тому повний струм, що стікає з нього,

$$I = \oint_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S} = \lambda \oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon}\,C(\varphi_+ - \varphi_-).$$

Звідси опір середовища між електродами:

$$\boxed{R = \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{I} = \frac{\varepsilon}{4\pi\lambda C}.} \qquad (7.27)$$

! *Формула* (7.27) *виражає чудову й зовсім не очевидну* аналогію *між електростатичною задачею про ємність і задачею про опір провідного середовища: обидві задачі зводяться до розв'язання* однакового *рівняння (рівняння Лапласа для потенціалу) з однаковими граничними умовами на поверхнях електродів — відрізняється лише те, яку саме величину ми обчислюємо через потенціал (q чи I). Тому* якщо відома ємність *якоїсь конфігурації електродів, опір середовища між ними отримують одразу, без жодних додаткових обчислень, за формулою* (7.27).

Скориставшись цією аналогією, відразу випишемо два важливі окремі випадки.

Дві далекі кулі-електроди. Якщо електроди — провідні кулі з власними ємностями $C_1 = \varepsilon r_1$ і $C_2 = \varepsilon r_2$, віддалені одна від одної на велику відстань, то, за формулою для взаємної ємності далеких провідників

(розділ 6), $1/C = 1/C_1 + 1/C_2 = (1/\varepsilon)(1/r_1 + 1/r_2)$, тому

$$R = \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \tag{7.28}$$

— тобто опір заземлення практично *не залежить* від відстані між кулями (вона взагалі не входить у формулу), а визначається лише розмірами самих електродів.

Плоскі електроди. Якщо електроди — обкладки плоского конденсатора площею S на відстані d одна від одної, то $C = \varepsilon S/(4\pi d)$, та

$$R = \frac{d}{\lambda S}, \tag{7.29}$$

що просто збігається з відомою формулою (7.9) для опору однорідного провідника довжиною d, перерізом S і питомим опором $1/\lambda$ — як, зрештою, і мало бути.

Приклад: опір заземлення і крокова напруга. Нехай фундамент металевої опори лінії електропередач має вигляд півсфери діаметром $D = 2$ м, а ґрунт навколо неї має провідність $\lambda = 2 \cdot 10^{-4}$ См/см і слугує заземленням (рис. 7.13). Знайдемо опір заземлення та *крокову напругу* на відстані $r = 5$ м від центру опори в разі замикання проводу високої напруги $\varphi_0 = 10$ кВ на опору, якщо довжина кроку людини $\ell = 0{,}7$ м.

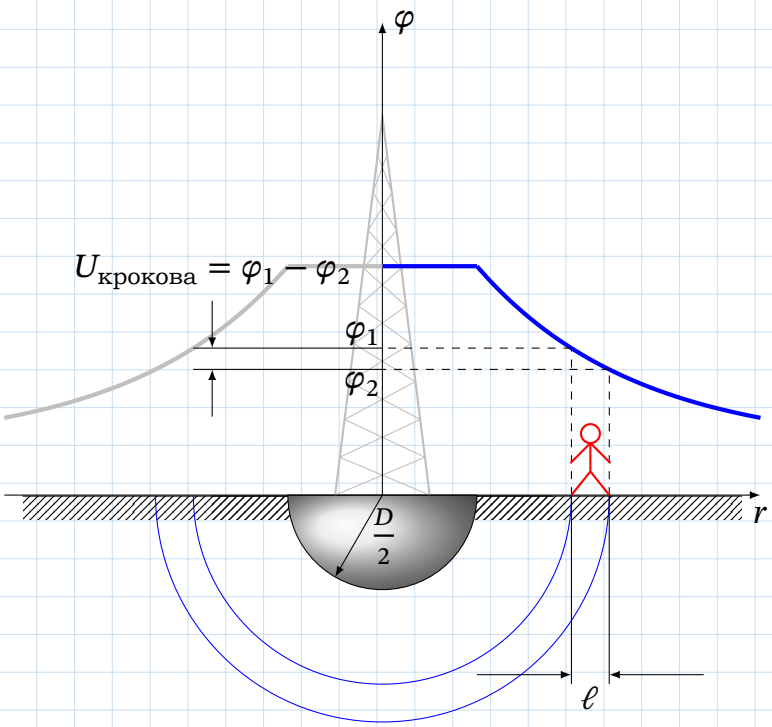


Рис. 7.13. Розтікання струму від напівсферичного заземлювача та крокова напруга

Ємність напівсфери радіуса $D/2$, що межує із землею, вдвічі *менша* за ємність повної кулі того самого радіуса $C_{\text{кулі}} = \varepsilon D/2$ в необмеженому

середовищі (поле існує лише в півпросторі, тож при тому самому потенціалі заряд на електроді вдвічі менший), тому $C = \varepsilon D/4$ (проникність ґрунту ε в остаточну відповідь не входить: вона скорочується у формулі (7.27)), і за формулою (7.27) з одним електродом на нескінченності ($C_2 \to \infty$, тобто $1/C \to 1/C_1$)

$$R = \frac{1}{\pi\lambda D} \approx 8 \text{ Ом}.$$

* Потенціал напівсферичного заземлювача спадає обернено пропорційно відстані від його центру (як у точкового заряду):

$$\varphi(r) = \frac{\varphi_0 D}{2} \cdot \frac{1}{r}.$$

Крокова напруга — це різниця потенціалів між точками, де стоять дві ноги людини, на відстанях r і $r + \ell$ від центру:

$$U_{\text{крокова}} = \varphi(r) - \varphi(r+\ell) = \frac{\varphi_0 D}{2} \cdot \frac{\ell}{r\,(r+\ell)} \approx 246 \text{ В}.$$

! Крокова напруга — *важливе поняття техніки безпеки: людина, яка опинилась поблизу місця замикання проводу високої напруги на землю, не торкаючись самого проводу, все одно може отримати небезпечний удар струмом просто через різницю потенціалів між ступнями під час ходьби. Оскільки $U_{\text{крокова}} \propto 1/r^2$ спадає значно швидше, ніж сам потенціал $\varphi \propto 1/r$, найнебезпечніша зона — це ділянка* біля самого заземлювача, *а рекомендована поведінка — віддалятися від місця замикання дрібними кроками (або стрибками, тримаючи ноги разом), щоб звести різницю потенціалів між ступнями до мінімуму.*

7.7. Перехідні процеси в колі з конденсатором

Усе, що обговорювалося дотепер, стосувалося *стаціонарних* струмів, які не змінюються з часом, а отже задовольняють спрощену умову $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ (7.7). Тепер розглянемо найважливіший для кіл випадок нестаціонарного процесу: коли заряд накопичується або вивільняється в деякому об'ємі (наприклад, на обкладці конденсатора), тобто $\partial\rho/\partial t \neq 0$, і працює повне рівняння неперервності (7.6). *Перехідними процесами* називають процеси переходу від одного стаціонарного (чи взагалі відсутнього) режиму до іншого; найважливіший приклад у колах — заряджання та розряджання конденсатора.

Чи можна до струмів, що змінюються з часом, застосовувати закони Ома й Кірхгофа, виведені для постійного струму? Можна, якщо струм змінюється досить повільно: за час, потрібний електро-

магнітному збуренню, щоб пробігти все коло ($\sim \ell/c$, де ℓ — розмір кола), струм майже не встигає змінитися, тобто $\ell/c \ll \tau$, де τ — характерний час процесу. Тоді в кожен момент сила струму однакова в усіх перерізах нерозгалуженого кола, і миттєві значення струмів і напруг пов'язані тими самими співвідношеннями, що й для постійного струму. Такі струми називають *квазістаціонарними*. Для кола розміром 1 м $\ell/c \approx 3$ нс, тож для всіх розглянутих нижче процесів (з τ від мікросекунд і більше) ця умова виконується з великим запасом.

Розрядка конденсатора. Розглянемо коло з конденсатора C, попередньо зарядженого до заряду q_0, резистора R і ключа S, з'єднаних послідовно (рис. 7.14). Після замикання ключа, за законом Ома для кола, $RI = U$, де $U = q/C$ — напруга на конденсаторі, а $I = -dq/dt$ (струм тече в напрямку *зменшення* заряду конденсатора). Отримуємо диференціальне рівняння

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0, \tag{7.30}$$

розв'язком якого (з початковою умовою $q(0) = q_0$) є експоненційне спадання заряду:

$$\boxed{q = q_0\, e^{-t/RC} = q_0\, e^{-t/\tau},} \tag{7.31}$$

де величину $\tau = RC$ називають *часом релаксації* — часом, за який заряд (а разом з ним струм і напруга) зменшується в $e \approx 2{,}72$ раза.

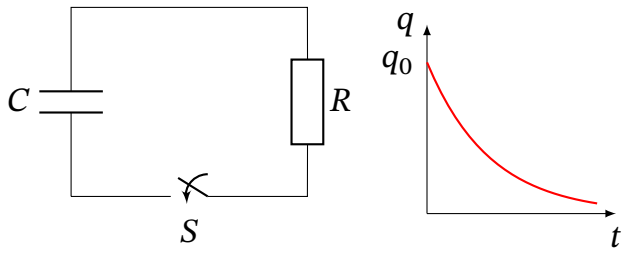


Рис. 7.14. Розрядка конденсатора через резистор: коло та графік $q(t)$

Зарядка конденсатора. Аналогічно розглянемо зарядку конденсатора від джерела з ЕРС $\mathscr{E}$ через резистор R (рис. 7.15). Закон Ома для кола тепер $RI + U = \mathscr{E}$, причому $I = +dq/dt$ (струм тече в напрямку *зростання* заряду), звідки

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\mathscr{E}}{R}. \tag{7.32}$$

З початковою умовою $q(0) = 0$ розв'язок цього рівняння — заряд, що монотонно й асимптотично наближається до граничного значення:

$$\boxed{q = q_{\max}\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \qquad q_{\max} = \mathscr{E}C,} \tag{7.33}$$

причому $q_{\max} = \mathscr{E}C$ — це якраз рівноважний заряд конденсатора при $t \to \infty$ (коли струм у колі припиняється, а вся ЕРС падає на конденсаторі), а стала часу $\tau = RC$ — та сама, що й при розрядці.

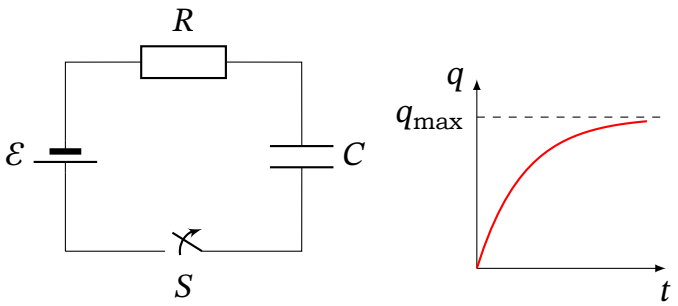


Рис. 7.15. Зарядка конденсатора від джерела ЕРС через резистор: коло та графік $q(t)$

Порівняймо енергетичний баланс зарядки. Повна робота джерела ЕРС дорівнює $A = \mathscr{E}q_{\max} = \mathscr{E}^2C$; енергія, що врешті-решт запасається в конденсаторі, — $W_C = q_{\max}^2/2C = \mathscr{E}^2C/2$. Отже, *рівно половина* роботи джерела перетворюється в тепло на резисторі, а друга половина — в енергію поля конденсатора, причому це співвідношення *не залежить* від значення R: збільшуючи R, ми лише сповільнюємо процес (зростає τ), але не змінюємо частку втраченої енергії. Це неочевидний і дещо парадоксальний результат: здавалося б, при малому опорі струм швидший і більший, отже й втрати мали б бути іншими — але вони компенсуються коротшим часом протікання, і в результаті втрачається завжди рівно половина.

7.8. Максвеллівський час релаксації заряду

Вивчаючи перехідні процеси у зосереджених колах, ми бачили, що заряджений конденсатор ємністю C розряджається через зовнішній резистор R за характерний час $\tau = RC$. Виникає природне запитання: а що станеться, якщо розрядка відбуватиметься не через зовнішній елемент, а безпосередньо через слабко провідне середовище між обкладками? Або якщо в товщу суцільного провідного середовища якимось чином внести надлишковий об'ємний заряд?

Відповідь дає фундаментальний локальний аналіз. Нехай в однорідному середовищі з діелектричною проникністю ε та питомою провідністю λ існує деяка початкова об'ємна густина заряду $\rho(\mathbf{r}, t)$. Під

дією власного електричного поля цього заряду в середовищі виникає струм провідності, який прагне винести заряд на периферію. Об'єднаємо диференціальне рівняння неперервності (7.6), диференціальний закон Ома $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$ та теорему Гаусса $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho/\varepsilon$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j} = -\lambda \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon}\rho.$$

Це просте диференціальне рівняння першого порядку, розв'язком якого є універсальний закон експоненційного згасання об'ємного заряду:

$$\rho(t) = \rho(0)\, e^{-t/\tau_M}, \qquad \tau_M = \frac{\varepsilon}{4\pi\lambda}. \tag{7.34}$$

Характерну сталу τ_M називають *максвеллівським часом релаксації заряду*.

Отриманий результат розкриває дві важливі фізичні закономірності:

1. *Перерозподіл заряду замість його знищення.* Звичайно, закон збереження заряду виконується строго: об'ємний заряд не анігілює, а виноситься струмом на зовнішні межі середовища або межі розділу з діелектриком. Саме тому в будь-якому однорідному провіднику в стаціонарному режимі об'ємна густина заряду строго дорівнює нулю ($\rho = 0$, див. (7.11)), а весь надлишковий заряд завжди зосереджений на поверхні.
2. *Зв'язок з RC-колом.* Згадаймо виведену в § 7.6 формулу (7.27) для опору середовища, $R = \varepsilon/(4\pi\lambda C)$. Якщо обчислити час розрядки такого «конденсатора з витоком» через формулу RC-кола, дістанемо:
$$\tau = RC = \left(\frac{\varepsilon}{4\pi\lambda C}\right) \cdot C = \frac{\varepsilon}{4\pi\lambda} = \tau_M.$$
Геометричні чинники (розміри, форма електродів, ємність C) повністю скоротилися! Це доводить, що максвеллівський час релаксації є *чистою характеристикою речовини*, яка пов'язує її електростатичні (ε) та кінетичні (λ) властивості незалежно від конфігурації поля.

Таблиця 7.1. Максвеллівський час релаксації заряду τ_M для різних середовищ. λ — у См/м (СІ); $\tau_M = \varepsilon\varepsilon_0/\lambda$. Перерахунок у СГС: $\lambda_{\text{СГС}} = \lambda_{\text{СІ}}/(4\pi\varepsilon_0) \approx 8{,}99 \cdot 10^9\, \lambda_{\text{СІ}}$ (у с^{-1})

Середовище	λ, См/м	ε	τ_M, с
Мідь	$6 \cdot 10^{7}$	≈ 1	10^{-19}
Кремній власний	$4 \cdot 10^{-4}$	11,7	$3 \cdot 10^{-7}$
Скло	$\sim 10^{-12}$	~ 7	$\sim 10^{2}$

Чисельні значення τ_M для різних матеріалів охоплюють величезний діапазон (табл. 7.1).

- У *металах* через гігантську провідність ($\lambda \sim 10^7$ См/м) формула дає мізерний час $\tau_M \sim 10^{-19}$ с. Цю оцінку не слід розуміти буквально: вона коротша за час між зіткненнями електронів ($\sim 10^{-14}$ с), на якому закон Ома вже не працює, і реально об'ємний заряд розсмоктується за $\sim 10^{-16}$–10^{-14} с (через плазмові коливання електронів). Але й це практично миттєво, що й робить електростатичне наближення для провідників ідеально точним на практиці.
- У *напівпровідниках* τ_M лежить у діапазоні від пікосекунд до мікросекунд, що визначає швидкість спрацьовування напівпровідникових приладів.
- У *діелектриках* (скло, бурштин, фторопласт) провідність λ прямує до нуля, тому τ_M може сягати годин, днів і більше. Заряд, внесений у товщу діелектрика, залишається там «законсервованим» на тривалий час (явище електретного стану).

Задачі

7.1. *Повільний дрейф.* Мідним дротом перерізом $S = 1$ мм^2 тече струм $I = 1$ А. Концентрація вільних електронів у міді $n \approx 8{,}5 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}$. Знайдіть дрейфову швидкість електронів і час, за який електрон проходить 1 м дроту.

7.2. *Густина струму в неоднорідному перерізі.* По циліндричному провіднику радіуса R тече струм I, розподілений по перерізу нерівномірно: густина струму залежить від відстані до осі як $j(r) = j_0\,(1 - r/R)$ (такий розподіл відповідає концентрації струму біля осі провідника). Знайдіть j_0 через повний струм I і середню густину струму $\langle j\rangle = I/(\pi R^2)$.

7.3. *Узгоджене навантаження.* Джерело з ЕРС $\mathscr{E} = 12$ В і внутрішнім опором $r = 0{,}5$ Ом замкнули на резистор R. Знайдіть струм короткого замикання, а також значення R, за якого корисна потужність максимальна, саму цю потужність і ККД джерела в цьому режимі.

7.4. *Неоднорідна ділянка.* На ділянці кола між точками 1 і 2 з потенціалами $\varphi_1 = 10$ В і $\varphi_2 = 4$ В послідовно ввімкнено резистор $R = 2$ Ом і джерело з ЕРС $\mathscr{E} = 3$ В, що діє в напрямку від 1 до 2. Знайдіть струм на ділянці.

7.5. *Два джерела назустріч.* Коло складається з двох послідовно з'єднаних джерел $\mathscr{E}_1 = 10$ В, $\mathscr{E}_2 = 4$ В (увімкнених назустріч, тобто їхні ЕРС віднімаються) і резисторів $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 3$ Ом. Знайдіть струм у колі та спад напруги на кожному резисторі.

7.6. *Тепло в провіднику.* По ніхромовому дроту опором $R = 20$ Ом тече струм $I = 2$ А протягом $t = 5$ хв. Яка кількість теплоти виділиться? Якою буде об'ємна густина потужності тепловиділення, якщо дріт має переріз $S = 0{,}5$ мм^2 і питомий опір $\rho = 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ Ом·м?

7.7. *Опір заземлення.* Металева куля радіуса $r_0 = 0{,}5$ м занурена в ґрунт з провідністю $\lambda = 10^{-2}$ См/м так, що над поверхнею землі залишається лише її півсфера. Знайдіть опір розтікання струму від кулі (другий електрод — на нескінченності). Як зміниться опір, якщо радіус кулі збільшити вдвічі? *Вказівка:* оскільки струм розтікається лише в півпростір (у тілесний кут 2π замість 4π), опір розтікання такої півкулі вдвічі більший за опір кулі в безмежному середовищі, тож за формулою (7.27) маємо $R = \dfrac{1}{2\pi\lambda r_0}$.

7.8. *Скільки тепла?* Конденсатор ємністю $C = 10$ мкФ заряджають від джерела з ЕРС $\mathscr{E} = 100$ В через резистор $R = 100$ кОм. Через який час заряд досягне 90% від максимального? Яка кількість теплоти виділиться на резисторі за весь процес? Як зміняться відповіді, якщо $R = 1$ кОм?

7.9. *Розрядка навпіл.* Конденсатор ємністю $C = 100$ мкФ, заряджений до $U_0 = 200$ В, розряджається через резистор $R = 50$ кОм. За який час напруга на конденсаторі зменшиться вдвічі? Якою буде напруга через час $t = 2\tau$?

Контрольні питання

1. Дайте означення сили струму $I = dq/dt$ і вектора густини струму $\mathbf{j}$. Чому напрям $\mathbf{j}$ визначають за рухом позитивних носіїв, навіть коли реальні носії заряду — від'ємні?
2. Виведіть формулу для сили струму через потік вектора густини струму, $I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$.
3. Виведіть зв'язок густини струму з концентрацією носіїв та дрейфовою швидкістю, $\mathbf{j} = \rho\mathbf{u}$. Чому внески носіїв протилежних знаків, що рухаються в протилежних напрямках, додаються, а не відніма-

ються?

4. У чому полягав дослід Толмена і Стюарта? Як за напрямком відхилення гальванометра та виміряним питомим зарядом довели, що носіями струму в металах є електрони?

5. Порівняйте дрейфову й теплову швидкості електронів у типовому металевому провіднику. Чому струм у колі «вмикається» практично миттєво, попри мізерно малу дрейфову швидкість?

6. Виведіть рівняння неперервності $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial\rho/\partial t$ як математичний вираз закону збереження заряду. Що означає умова $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ для стаціонарного струму?

7. Сформулюйте закон Ома в інтегральній формі $I = U/R$ та вираз опору однорідного циліндричного провідника через питомий опір.

8. Виведіть диференціальну форму закону Ома $\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}$, розглядаючи елементарний циліндр струму.

9. Доведіть, що в однорідному провіднику зі стаціонарним струмом об'ємна густина заряду всередині дорівнює нулю, а заряди, що створюють поле, розташовані лише на поверхні.

10. Чому поверхня провідника зі струмом, на відміну від провідника в електростатичній рівновазі, не є еквіпотенціальною? Як це проявляється в неперервності тангенціальної складової поля на межі?

11. Що таке сторонні сили і чим вони принципово відрізняються від електростатичних? Дайте означення ЕРС через роботу сторонніх сил.

12. Виведіть узагальнений закон Ома $\mathbf{j} = \lambda(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)$ та закон Ома для неоднорідної ділянки кола $IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}$.

13. Сформулюйте перше й друге правила Кірхгофа. Як перше випливає зі стаціонарності струму, а друге — із закону Ома для замкненого контуру?

14. Виведіть закон Джоуля–Ленца в диференціальній та інтегральній формах.

15. Виведіть формулу опору необмеженого провідного середовища між двома електродами через їхню взаємну ємність, $R = \varepsilon/(4\pi\lambda C)$. У чому полягає ця аналогія між задачами про ємність і про опір?

16. Розгляньте приклад опору заземлення й крокової напруги для напівсферичного заземлювача. Чому крокова напруга найнебезпечніша поблизу самого заземлювача, і яка рекомендована поведінка при віддаленні від нього?

17. Що таке квазістаціонарні струми і за якої умови до них можна

застосовувати всі співвідношення для постійного струму?

18 Виведіть диференціальне рівняння й розв'язок для розрядки конденсатора через резистор, $q = q_0 e^{-t/\tau}$. Що таке стала часу $\tau = RC$?

19 Виведіть розв'язок для зарядки конденсатора від джерела EPC через резистор, $q = q_{\max}(1 - e^{-t/\tau})$. Чому стала часу однакова для зарядки й розрядки?

8 Електричний струм у різних середовищах

Отже, ртуть при 4,2 K перейшла в новий стан, який, з огляду на його особливі електричні властивості, можна назвати станом надпровідності.

Гейке Камерлінг-Оннес, Нобелівська лекція (1913)

Диференціальний закон Ома $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$ (7.10) є лише *загальним макроскопічним описом* провідності. Питома електропровідність λ визначається мікроскопічною будовою середовища: концентрацією носіїв заряду, їхнім зарядом, рухливістю та механізмом взаємодії з речовиною. Тому одна й та сама напруженість електричного поля може спричиняти зовсім різні струми в металі, електроліті, газі чи напівпровіднику.

Найважливіша відмінність між різними середовищами полягає в *природі носіїв струму*. У металах струм створюють вільні електрони; в електролітах — позитивні та негативні іони; у газах — електрони та іони, що виникають у процесах іонізації; у вакуумі струм створюється зарядженими частинками, емітованими електродами; у напівпровідниках перенос заряду здійснюють електрони та дірки.

У найзагальнішому випадку, якщо в середовищі є кілька сортів носіїв, густина струму дорівнює сумі внесків усіх сортів (це узагальнення формули (7.4); див. також відповідне зауваження в розділі 7: внески носіїв протилежних знаків, що рухаються в протилежних напрямках, *додаються*):

$$\mathbf{j} = \sum_k \rho_k \mathbf{u}_k. \tag{8.1}$$

Тут $\rho_k = n_k q_k$ — об'ємна густина заряду носіїв k-го сорту (не плутати з питомим опором $\rho = 1/\lambda$).

Якщо для кожного сорту носіїв виконується *лінійний закон*

$$\mathbf{u}_k = \pm \mu_k \mathbf{E}, \tag{8.2}$$

де $\mu_k > 0$ — *рухливість носіїв*, тобто модуль дрейфової швидкості в одиничному полі (знак «+» — для позитивних носіїв, що дрейфують

за полем, «−» — для негативних), то, підставивши (8.2) у (8.1), дістаємо

$$\mathbf{j} = \sum_k n_k |q_k| \mu_k \, \mathbf{E}, \tag{8.3}$$

а питома електропровідність

$$\lambda = \sum_k n_k |q_k| \mu_k. \tag{8.4}$$

! *Співвідношення* (8.2) *— не тотожність, а* наближення слабкого поля. *Воно справедливе, доки дрейфова швидкість мала порівняно з тепловою, $u_k \ll v_T$, і час вільного пробігу τ можна вважати сталим. У сильних полях τ починає залежати від енергії носія, і залежність $u_k(E)$ стає нелінійною: у напівпровідниках дрейфова швидкість насичується, у газах виникає ударна іонізація. (У металах локальний закон Ома виконується з великою точністю; нелінійною вольт-амперну характеристику дроту робить лише нагрівання, яке змінює λ.) Саме тому закон Ома $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$ — це* граничний *закон, а не універсальний; у цьому розділі ми побачимо середовища (газовий розряд, вакуумний діод, p–n-перехід), де він незастосовний.*

Отже, макроскопічно різні провідники підкоряються одній і тій самій схемі: *поле приводить у впорядкований рух носіїв заряду, а властивості середовища визначають, наскільки легко цей рух виникає.*

! Зауваження про одиниці. *Більшість співвідношень цього розділу має однаковий вигляд у гауссовій системі та в СІ; там, де вигляд формули залежить від системи одиниць, наведено обидва варіанти. Числові значення (сталу Фарадея, число Лоренца, рухливості, питомі опори) подано в СІ. Про розмірності електричних величин у гауссовій системі — див. підрозділ «Про одиниці вимірювання» в §* 7.4 *розділу* 7.

8.1. Електричний струм у металах

У металах частина валентних електронів слабко пов'язана з окремими атомами й утворює колективний електронний газ. Позитивні іони утворюють кристалічну ґратку, відносно якої електрони можуть переміщуватися.

За відсутності зовнішнього поля електрони перебувають у стані хаотичного руху. Середня швидкість цього руху дорівнює нулю, тому макроскопічний струм відсутній:

$$\langle \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Під дією електричного поля виникає мала добавка до хаотичного руху — дрейфова швидкість $\mathbf{u}$, і

$$\mathbf{j} = -en\mathbf{u}_e,$$

де n — концентрація вільних електронів, а $\mathbf{u}_e$ — їхня дрейфова швидкість.

Це окремий випадок формули (7.4) з $\rho = -en$. Що саме електрони, а не іони ґратки, є носіями струму в металах, довели досліди Толмена і Стюарта (розділ 4). У розділі 7 на прикладі срібного дроту показано, що дрейфова швидкість (частки міліметра за секунду) на дев'ять–десять порядків менша за швидкість хаотичного руху електронів.

Оскільки електрон має від'ємний заряд, його дрейф відбувається проти напрямку електричного поля, але густина струму $\mathbf{j}$ спрямована за полем.

Думка, що струм у металі — це рух «електронного газу», з'явилася майже одразу після відкриття електрона Дж. Дж. Томсоном (1897): у 1898 р. Е. Рікке висунув гіпотезу вільних електронів у металі, а в 1900 р. П. Друде побудував на її основі кількісну теорію. У 1905 р. Г. Лоренц застосував до електронів газу статистику Максвелла–Больцмана й кінетичне рівняння Больцмана (звідси назва «модель Друде–Лоренца»).

Теорія провідності металів Друде. У 1900 р. П. Друде запропонував просту класичну модель, що якісно (а часто й кількісно правильно за порядком величини) пояснює електропровідність металів. У цій моделі вільні електрони металу розглядають як класичний «газ», що рухається в полі $\mathbf{E}$ і час від часу зазнає зіткнень з іонами кристалічної ґратки, розсіюючись на них.

Між зіткненнями електрон прискорюється полем, а зіткнення з іонами ґратки «гасять» набуту впорядковану швидкість. Усереднений вплив зіткнень зручно описати ефективною силою «тертя» $-m_e\mathbf{u}/\tau$, де τ — *середній час вільного пробігу*. Для модуля дрейфової швидкості ($e > 0$ — елементарний заряд)

$$m_e\frac{du}{dt} = eE - \frac{m_e u}{\tau}.$$

У стаціонарному режимі $du/dt = 0$, тому $u = eE\tau/m_e$, а $j = enu = \dfrac{ne^2\tau}{m_e}E$, тобто питома провідність

$$\boxed{\lambda = \frac{ne^2\tau}{m_e}.} \qquad (8.5)$$

(Якщо спрощено вважати, що кожен електрон пролітає між зіткненнями рівно час τ і після зіткнення втрачає всю впорядковану швидкість, то середня швидкість виходить удвічі меншою, $u = eE\tau/2m_e$, і з'являється зайвий множник $\frac{1}{2}$; коректне усереднення за (приблизно експоненційним) розподілом часів пробігу його прибирає. Сама модель Друде — грубе класичне наближення, тому множники порядку одиниці тут не принципові.)

Звідси видно, що провідність визначається двома мікроскопічними факторами: $\lambda \sim n\tau$. Велика концентрація вільних електронів забезпечує металам високу провідність, а зіткнення електронів з ґраткою та її дефектами обмежують її.

Рухливість електронів у металі, за означенням $\mathbf{u} = \mu\mathbf{E}$, у моделі Друде–Лоренца дорівнює $\mu = e\tau/m_e$, так що $\lambda = ne\mu$ узгоджується із загальною формулою (8.4).

Тепловиділення: мікроскопічне виведення закону Джоуля–Ленца. У моделі Друде впорядкована кінетична енергія, яку електрон набуває від поля між зіткненнями, при зіткненні повністю передається ґратці у вигляді тепла. Якщо від попереднього зіткнення минув час t, то швидкість електрона (відносно початку пробігу) $v = eEt/m_e$, і при зіткненні він віддає ґратці енергію $\frac{1}{2}m_e v^2 = e^2E^2t^2/(2m_e)$. Час вільного пробігу — випадкова величина з (приблизно) експоненційним розподілом і середнім τ; для такого розподілу $\langle t^2\rangle = 2\tau^2$, тому в середньому за одне зіткнення ґратці передається $e^2E^2\tau^2/m_e$. Число зіткнень в одиниці об'єму за одиницю часу дорівнює n/τ, отже, кількість теплоти, що виділяється в одиниці об'єму за одиницю часу,

$$w = \frac{n}{\tau}\cdot\frac{e^2E^2\tau^2}{m_e} = \frac{ne^2\tau}{m_e}E^2 = \lambda E^2 = \mathbf{j}\cdot\mathbf{E},$$

що збігається з формулою (7.25). Це те саме усереднення, яке прибирає множник $\frac{1}{2}$ у λ: у спрощеній моделі з однаковим для всіх електронів часом τ множник $\frac{1}{2}$ з'явився б і в λ, і в w, а співвідношення $w = \lambda E^2$ лишилося б тим самим. Збіг з макроскопічним виведенням із закону збереження енергії (розділ 7, «Закон Джоуля–Ленца») не випадковий: закон Джоуля–Ленца не залежить від механізму розсіювання, а модель Друде лише показує, куди саме йде енергія поля — у теплові коливання ґратки.

Час вільного пробігу τ, а отже, і провідність λ, залежать від температури, оскільки з підвищенням температури зростає інтенсивність теплових коливань іонів ґратки, на яких розсіюються електрони. Дійсно, час вільного пробігу $\tau = \ell/\bar{v}$, де ℓ — довжина вільного пробігу (відстань між сусідніми зіткненнями), а $\bar{v}$ — швидкість електрона *між* зіткненнями; оскільки дрейфова швидкість мізерна порівняно

з тепловою (розділ 7), $\bar{v} \approx v_T$. Найпростіший варіант теорії Друде припускає, що концентрація носіїв n і довжина вільного пробігу ℓ від температури не залежать, а сам електронний газ підпорядковується розподілу Максвелла, тобто $\frac{1}{2}m_e v_T^2 \sim \frac{3}{2}k_B T$, звідки $v_T \propto \sqrt{T}$. Тоді

$$\tau = \frac{\ell}{v_T} \propto \frac{1}{\sqrt{T}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{ne^2\tau}{m_e} \propto \frac{1}{\sqrt{T}},$$

а отже, згідно з (8.5), для опору — оберненої до провідності величини:

$$\rho = \frac{1}{\lambda} \propto \sqrt{T}$$

(рис. 8.1). Реальна залежність питомого опору чистих металів від температури для не надто низьких температур — майже *лінійна*:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t) \tag{8.6}$$

де t — температура за шкалою Цельсія, а ρ_0 — питомий опір при 0 °C, або, якщо відлічувати температуру від зручного початку відліку 20 °C,

$$\rho = \rho_{20} [1 + \alpha(t - 20)]. \tag{8.7}$$

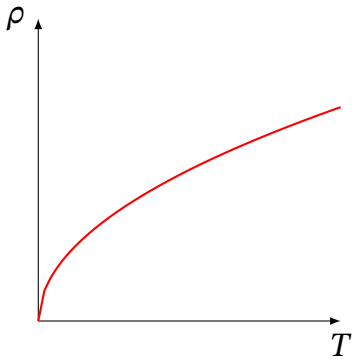


Рис. 8.1. Передбачення найпростішої теорії Друде: $\rho \propto \sqrt{T}$

Для чистих металів $\rho_{20} \sim 10^{-8}$ Ом·м (мідь — $1{,}7 \cdot 10^{-8}$, залізо — $9{,}7 \cdot 10^{-8}$), а $\alpha \approx (4 - 6) \cdot 10^{-3}\,°\text{C}^{-1}$.

Оскільки опір R у законі Ома (7.8) залежить від температури, а провідник зі струмом нагрівається (закон Джоуля–Ленца (7.26)), при великих струмах вольт-амперна характеристика металу стає нелінійною. Так, опір вольфрамової спіралі лампи розжарювання в розжареному стані (~ 3000 K) у 10–15 разів більший, ніж у холодному, тому при вмиканні лампи струм короткочасно у багато разів перевищує усталений.

! *Лінійне зростання опору з температурою характерне саме для* металів, *у яких концентрація вільних носіїв n практично не залежить від температури, а опір визначається тільки частотою зіткнень. У* напівпровідниках *залежність протилежна (§ 8.5). Ще одне яскраве явище —* надпровідність *(див. далі).*

Що спостерігається насправді. Модель Друде передбачає $\rho \propto \sqrt{T}$, але дослід показує інше. Якщо охолоджувати чистий метал, то:

- при не надто низьких температурах опір зростає з температурою *лінійно* (8.6), а не як $\sqrt{T}$;
- при подальшому охолодженні опір спадає, але *не до нуля*: він виходить на сталу величину $\rho_{зал}$, яку називають *залишковим опором*. Ця величина залежить не від температури, а від чистоти й досконалості кристала: у зразків одного й того самого металу з різним вмістом домішок і дефектів $\rho_{зал}$ різна, а температурні криві лише зсунуті одна відносно одної (рис. 8.2);
- в одних металах (ртуть, свинець, ніобій) нижче певної температури опір стрибком падає до нуля — це *надпровідність* (див. далі); в інших (мідь, срібло, золото) цього не відбувається;
- довжина вільного пробігу, знайдена з провідності, в чистих металах значно більша, ніж дає класична оцінка (задача 8.1): у міді при 300 К вона ~ 40 нм (на два порядки більша за міжатомну відстань), а при гелієвих температурах у чистих зразках може сягати міліметрів.

Ці факти класична теорія пояснити не може.

Квантова природа провідності металів. Щоб пояснити ці особливості, потрібна квантова теорія; для нашого викладу достатньо двох її ідей.

Перша ідея: принцип Паулі. Два електрони не можуть перебувати в одному квантовому стані, тому електрони заповнюють рівні знизу вгору. Енергію найвищого заповненого рівня називають *енергією Фермі* ε_F (для міді ≈ 7 еВ, що в сотні разів більше за k_BT при 300 К). Змінити стан (розсіятися) можуть лише електрони поблизу ε_F, і рухаються вони зі швидкістю Фермі

$$v_F = \sqrt{\frac{2\varepsilon_F}{m_e}} \approx 1{,}6 \cdot 10^6 \text{ м/с} \tag{8.8}$$

яка не залежить від температури. (Поле при цьому зсуває весь розподіл електронів як ціле, тому у формулі (8.5) лишається *повна* концентрація n; від квантової теорії змінюється лише зміст τ.) Тому час пробігу $\tau = \ell/v_F$ визначається лише довжиною пробігу ℓ, а оскільки розсіяння на теплових коливаннях дає $\ell \propto 1/T$, дістаємо $\rho \propto T$ — саме лінійну залежність, яку спостерігають на досліді.

Друга ідея: хвильова природа електрона. Електрон поширюється в кристалі як хвиля і проходить крізь *ідеально* періодичну ґратку без розсіяння, тому опір такого кристала при $T = 0$ дорівнює нулю. Опір виникає лише там, де періодичність порушена: на теплових

зміщеннях іонів та на домішках і дефектах (саме вони дають залишковий опір). Оскільки ці два механізми діють незалежно, їхні внески додаються (*правило Маттіссена*):

$$\rho(T) = \rho_{\text{зал}} + \rho_{\text{фон}}(T), \tag{8.9}$$

де $\rho_{\text{зал}}$ — залишковий опір (внесок домішок і дефектів), а $\rho_{\text{фон}}(T)$ — внесок теплових коливань ґратки (*фононів* — квантів цих коливань). Другий доданок прямує до нуля при $T \to 0$, а при не надто низьких температурах зростає лінійно, тому опір чистого металу при охолодженні виходить на плато $\rho_{\text{зал}}$ (рис. 8.2).

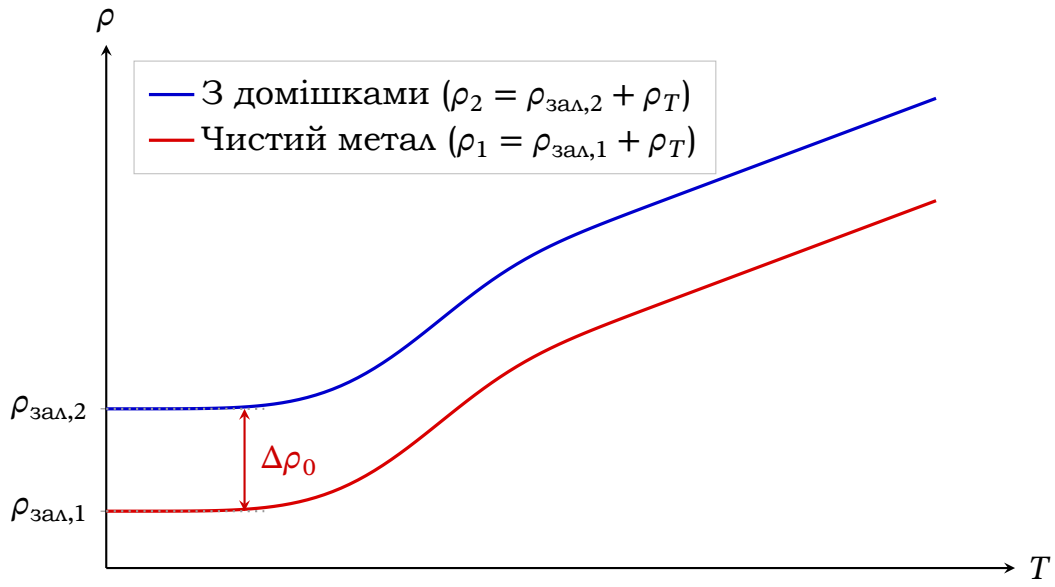


Рис. 8.2. Правило Маттіссена: домішки додають до опору сталу $\rho_{\text{зал}}$, не змінюючи температурної частини

Класичну модель вдалося виправити після появи квантової механіки: В. Паулі (1925) сформулював принцип заборони, А. Зоммерфельд (1927–1928) застосував його до електронів у металі, а Ф. Блох (1928) показав, що електронні хвилі вільно поширюються в ідеально періодичній ґратці. Адитивність опорів від різних причин розсіяння емпірично встановив А. Маттіссен ще в 1860-х роках.

Закон Відемана–Франца. Електрони в металі переносять не лише заряд, а й тепло, тому теплопровідність κ і електропровідність λ мають бути пов'язані. Справді, за теорією Друде–Лоренца обидві величини виражаються через ті самі n, τ і v_T: $\lambda = ne^2\tau/m_e$, $\kappa = \frac{1}{3}nc_V v_T^2\tau$, де $c_V = \frac{3}{2}k_B$. Час τ скорочується, і залишається

$$\frac{\kappa}{\lambda} = LT. \tag{8.10}$$

Величину L називають *числом Лоренца* (на честь Л. Лоренца, який у 1872 р. виявив, що $\kappa/\lambda \propto T$; не плутати з Г. А. Лоренцем, автором моделі Друде–Лоренца). Класична теорія дає $L_{\text{кл}} = \frac{3}{2}(k_B/e)^2 \approx 1{,}1 \cdot 10^{-8}$ Вт·Ом/К^2, а квантова — $L = \frac{\pi^2}{3}(k_B/e)^2 \approx 2{,}44 \cdot 10^{-8}$ Вт·Ом/К^2, що добре узгоджується з експериментом ($2{,}2$–$2{,}6 \cdot 10^{-8}$).

! *Успіх моделі Друде в поясненні закону Відемана–Франца випадковий: класична теорія завищує теплоємність електронного газу (тепло переносять лише електрони поблизу ε_F) і водночас занижує квадрат швидкості (v_T замість v_F (8.8)), і ці дві помилки майже взаємно компенсуються. Збіг з дослідом ще не доводить правильності теорії.*

Надпровідність. У 1911 р. Г. Камерлінг-Оннес виявив, що опір ртуті, охолодженої нижче критичної температури $T_c \approx 4{,}15$ К, стрибкоподібно (а не поступово) звертається в точний нуль (рис. 8.3) — явище назвали *надпровідністю*. Це не просто «дуже мала» провідність: струм, одного разу збуджений у надпровідному кільці, циркулює без джерела ЕРС практично необмежено довго. Друга, не менш важлива ознака надпровідника — *ефект Мейснера* (1933): надпровідник виштовхує зі свого об'єму магнітне поле; цей ефект і поведінку надпровідників у магнітному полі розглянуто в розділі 12.

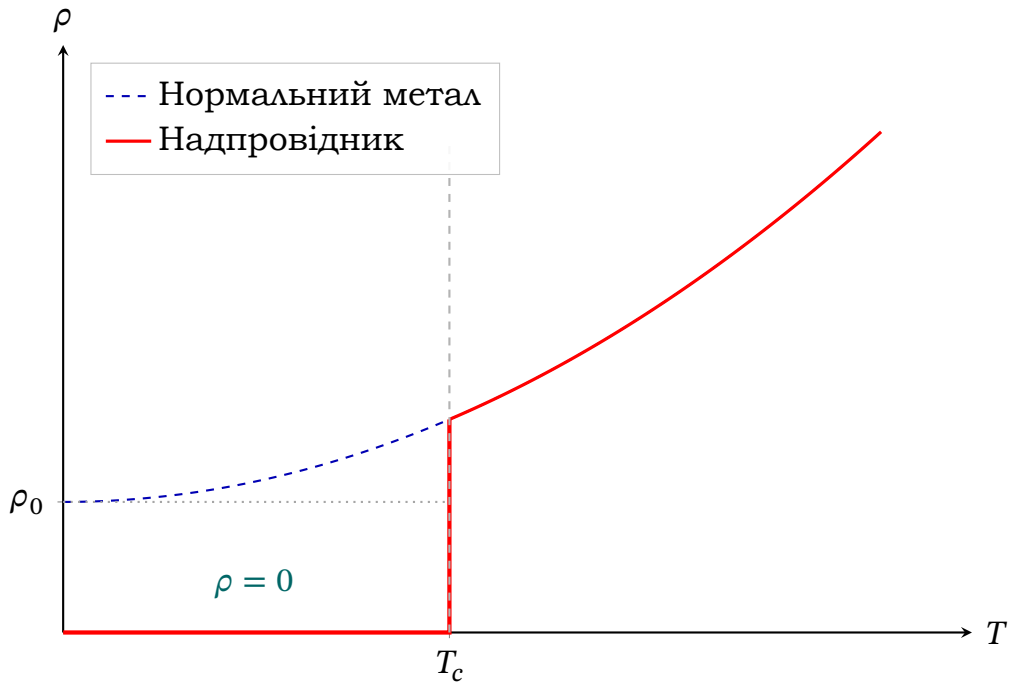


Рис. 8.3. Характерна залежність питомого опору від температури металу, який переходить в надпровідний: при високих T — майже лінійне зростання, $T < T_c$ опір стрибкоподібно падає до нуля

Нульовий опір змінює й енергетику постійного струму. У нормальному провіднику струм підтримується лише джерелом сторонніх сил, яке компенсує тепловтрати $\mathcal{P} = I^2R$ (7.26) (розділ 7). У надпровідному кільці $R = 0$, тепло не виділяється ($w = \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} = 0$, пор. (7.25)), і збуджений струм тече без джерела ЕРС. Диференціальний закон Ома $\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}$ тут непридатний: $\lambda \to \infty$, $\mathbf{E} \to 0$, а густина струму залишається скінченною.

Мікроскопічний механізм надпровідності пояснює теорія Бардіна–Купера–Шріффера (БКШ, 1957). У кристалі між електронами виникає слабке *притягання*, яке передає ґратка: електрон деформує її, і до цієї деформації притягується інший електрон (рис. 8.4). За низьких температур електрони об'єднуються в *куперівські пари* й утворюють єдиний колективний квантовий стан; щоб розсіяти електрон у ньому, пару треба зруйнувати, а для цього потрібна енергія не менша за *енергетичну щілину*, якої ґратка за низьких температур не має, тому опір дорівнює нулю. (Мідь і золото надпровідними не стають: електрони в них слабко взаємодіють з ґраткою, тому рідко розсіюються на її коливаннях, і метали добре проводять струм, але така слабка взаємодія не здатна зв'язати електрони в пари.)

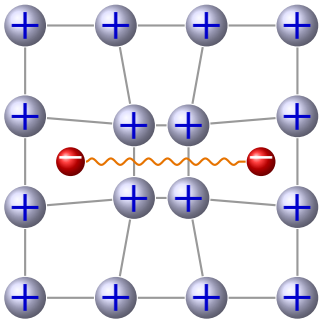


Рис. 8.4. Утворення куперівської пари через обмін фононами

У 1986 р. Й. Беднорц і К. Мюллер відкрили *високотемпературну надпровідність* у купратній кераміці з T_c, що згодом перевищила температуру кипіння рідкого азоту (77 К) — це відкрило шлях до значно дешевшого азотного, а не гелієвого, охолодження. Механізм високотемпературної надпровідності досі остаточно не з'ясований: стандартна фононна теорія БКШ, найімовірніше, його не пояснює.

У табл. 8.1 наведено T_c кількох характерних надпровідників. Два орієнтири: *температура кипіння рідкого гелію* (4,2 К) — межа, нижче якої працюють усі звичайні надпровідники, і *температура кипіння рідкого азоту* (77 К): купрати з $T_c > 77$ К (першим був YBCO) можна охолоджувати дешевим азотом замість гелію.

Надпровідники застосовують там, де потрібні сильні магнітні поля або відсутні теплові втрати: у магнітах томографів (МРТ) і прискорювачів (наприклад, диполі з NbTi у Великому адронному колайдері) та в надпровідних кубітах квантових комп'ютерів.

Таблиця 8.1. Критична температура переходу деяких надпровідників

Матеріал	T_c, К	Тип
Ртуть (Hg)	4,15	звичайний (БКШ)
Ніобій (Nb)	9,25	звичайний (БКШ)
Nb_3Sn	18,3	звичайний, технічний
$YBa_2Cu_3O_7$ (YBCO)	93	високотемпературний (купрат)
H_3S (під тиском ~ 150 ГПа)	203	гідрид під високим тиском

8.2. Електричний струм в електролітах

Електролітами називають речовини, водні або інші розчини яких проводять електричний струм завдяки наявності рухливих іонів. До електролітів належать розчини кислот, лугів і солей, а також розплави багатьох іонних сполук.

На відміну від металів, у електроліті струм переносять частинки *двох знаків*:

- позитивні іони — *катіони*, які рухаються до катода;
- негативні іони — *аніони*, які рухаються до анода.

Нехай концентрація катіонів дорівнює n_+, їхній заряд $q_+ > 0$, а середня дрейфова швидкість — $\mathbf{u}_+$. Для аніонів відповідні величини позначимо n_-, $q_- < 0$ та $\mathbf{u}_-$. Тоді

$$\mathbf{j} = n_+ q_+ \mathbf{u}_+ + n_- q_- \mathbf{u}_-. \tag{8.11}$$

Це окремий випадок формули (8.1) для двох сортів носіїв протилежних знаків. Оскільки катіони рухаються за напрямом поля, а аніони — проти нього, внески обох сортів у густину струму мають один і той самий напрямок.

Для слабких полів дрейфову швидкість іонів можна записати у вигляді

$$\mathbf{u}_\pm = \mu_\pm \mathbf{E},$$

де $\mu_\pm$ — рухливості відповідних іонів. Тоді

$$\lambda = n_+ q_+ \mu_+ + n_- |q_-| \mu_-. \tag{8.12}$$

Рухливість іонів визначається в'язким тертям розчинника: за формулою Стокса, сила опору руху іона радіуса a зі швидкістю u дорівнює $6\pi\eta a u$ (η — в'язкість), тому усталений дрейф настає при $|q|E = 6\pi\eta a u$, звідки $\mu = |q|/(6\pi\eta a)$. Типові рухливості іонів у воді — порядку 10^{-8}–10^{-7} м^2/(В·с). З підвищенням температури в'язкість води

спадає, тому провідність електролітів, на відміну від металів, *зростає* з температурою (приблизно на 2% на кельвін). Від концентрації розчину λ залежить немонотонно: спочатку зростає (більше іонів), а в концентрованих розчинах спадає (міжіонна взаємодія, неповна дисоціація).

На відміну від металів, проходження струму через електроліт супроводжується *перенесенням речовини*. Іони, рухаючись до електродів, можуть брати участь у хімічних реакціях. Це явище називають *електролізом* (рис. 8.5).

Струм у колі неперервний: $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ (7.7). Це означає, що через будь-який переріз кола за одиницю часу проходить однаковий заряд. Але *носії* цього заряду в різних ділянках різні: у металевому електроді — електрони, в електроліті — іони. На межі електрод–електроліт одні носії перетворюються на інші в електродних реакціях: на катоді електрон з металу приєднується до катіона, на аноді аніон віддає електрон металу. Саме тому сила струму однакова в усіх перерізах кола, хоча природа носіїв уздовж кола змінюється.

Закони електролізу встановив М. Фарадей (1833–1834); тоді ж він ввів терміни *електрод, анод, катод, електроліт, іон*. С. Арреніус (1884–1887) показав, що електроліт розпадається на іони вже при розчиненні (Нобелівська премія з хімії 1903 р.). Закони електролізу дозволили Дж. Стоні (1874) оцінити елементарний заряд $e = F/N_A$; він же запропонував назву «електрон» (1891).

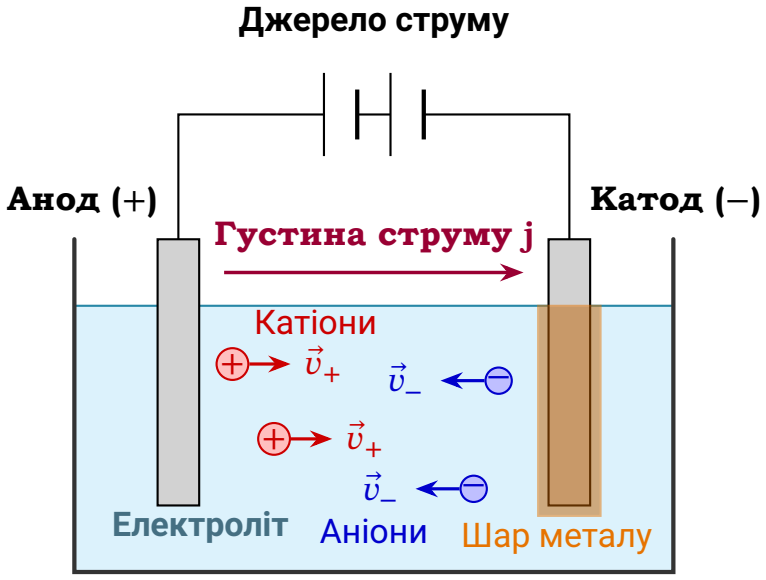


Рис. 8.5. Електроліз: рух іонів у розчині й осадження речовини на катоді

Закони Фарадея для електролізу. Нехай через електроліт за час t пройшов заряд

$$q = It.$$

Експериментально М. Фарадей встановив, що маса речовини, виділена на електроді, пропорційна заряду, який пройшов через електроліт:

$$m = kq = kIt, \tag{8.13}$$

де k — *електрохімічний еквівалент* речовини.

Другий закон Фарадея: електрохімічний еквівалент пропорційний хімічному еквіваленту речовини, $k = \frac{1}{F} \cdot \frac{\mu}{z}$, де μ/z — маса одного моля еквівалентів, а F — універсальна стала.

Для одновалентних іонів маса одного моля речовини μ відповідає заряду F, який називають *сталою Фарадея*:

$$F = N_A e \approx 9{,}65 \cdot 10^4 \text{ Кл/моль}. \tag{8.14}$$

Для іона з валентністю z заряд одного моля дорівнює zF. Тому другий закон Фарадея можна записати:

$$\frac{m}{q} = \frac{\mu}{zF}, \tag{8.15}$$

а загальна формула для маси виділеної речовини набуває вигляду

$$\boxed{m = \frac{\mu}{zF} It.} \tag{8.16}$$

> ! *За виміряним зарядом q та масою виділеної речовини m можна визначити хімічний еквівалент речовини і, зрештою, кількість елементарних зарядів, що припадає на один іон.*

На електродах можуть відбуватися складні хімічні реакції. Тому електроліз не слід розуміти просто як механічне «осадження іонів»: електродні реакції визначають, яка саме речовина фактично утворюється на електроді.

Електролітична комірка як неоднорідна ділянка кола. Розчин з електродами — це ділянка кола, на якій, окрім омічного спаду напруги, діє ще й ЕРС хімічного походження. Якщо через комірку пропускають струм I від зовнішнього джерела, то на межах електрод–розчин виникає *ЕРС поляризації* $\mathscr{E}_{\text{пол}}$ (зворотна ЕРС: продукти електролізу

самі утворюють гальванічний елемент, ЕРС якого напрямлена проти струму). Застосуємо закон Ома для неоднорідної ділянки (7.19) з $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ і $\mathscr{E} = -\mathscr{E}_{\text{пол}}$:

$$IR = U - \mathscr{E}_{\text{пол}}, \qquad I = \frac{U - \mathscr{E}_{\text{пол}}}{R}, \tag{8.17}$$

де R — опір розчину. Струм з'являється лише при $U > \mathscr{E}_{\text{пол}}$ («напруга розкладання»), а потужність джерела UI ділиться на джоулеве тепло в розчині I^2R (закон Джоуля–Ленца $w = \lambda E^2$ справедливий і для іонної провідності, див. (7.25)) та корисну хімічну роботу $\mathscr{E}_{\text{пол}} I$.

Обернений процес — *гальванічний елемент* та акумулятор: хімічні реакції на електродах відіграють роль *сторонніх сил* (див. розділ 7), які розділяють заряди й створюють ЕРС $\mathscr{E}$.

8.3. Електричний струм у газах

У звичайному стані гази є дуже слабкими провідниками: більшість їхніх молекул та атомів електрично нейтральні, а концентрація вільних заряджених частинок дуже мала. Однак під дією зовнішнього чинника частина атомів або молекул може іонізуватися:

$$\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}^+ + e^-.$$

Внаслідок цього в газі з'являються електрони та позитивні іони. За певних умов виникають також негативні іони.

Іонізацією називають процес утворення позитивних і негативних заряджених частинок із нейтральних атомів або молекул. Іонізацію газу можуть спричиняти нагрівання, ультрафіолетове та рентгенівське випромінювання, швидкі заряджені частинки, радіоактивне випромінювання та сильне електричне поле.

Одночасно з іонізацією відбувається зворотний процес — *рекомбінація*: позитивні та негативні носії зустрічаються й утворюють нейтральні частинки.

Отже, провідність газу визначається конкуренцією двох процесів:

$$\text{іонізація} \quad \rightleftarrows \quad \text{рекомбінація}.$$

Щоб рекомбінувати, позитивний і негативний носії мають зустрітися. Чим більше тих і інших в одиниці об'єму, тим частіше вони зустрічаються, тому швидкість рекомбінації пропорційна добутку їхніх концентрацій, $\beta n_+ n_-$. Це кінетична форма *закону діючих мас*: швидкість процесу, що потребує зустрічі двох сортів частинок, пропорційна добутку їхніх концентрацій. Носії народжуються парами,

тому $n_+ = n_- = n$ і швидкість рекомбінації дорівнює βn^2. Нехай іонізатор створює в одиниці об'єму за одиницю часу N пар (N вимірюється в $\text{м}^{-3}\cdot\text{с}^{-1}$). Тоді за відсутності поля, що виносить носії на електроди, баланс носіїв описує рівняння:

$$\frac{dn}{dt} = N - \beta n^2, \tag{8.18}$$

де β — коефіцієнт рекомбінації ($\beta \approx 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ м^3/с для іонів у повітрі). У стаціонарному стані $dn/dt = 0$, тобто генерація N дорівнює рекомбінації βn_0^2, звідки $n_0 = \sqrt{N/\beta}$ (добуток концентрацій $n_+ n_- = N/\beta$ при цьому сталий — так само, як у напівпровідниках, див. § 8.5); після вимкнення іонізатора концентрація спадає за законом $n = n_0/(1+\beta n_0 t)$ — не експоненційно. Рівняння (8.18) — це рівняння неперервності (7.6) для носіїв одного сорту.

Несамостійний газовий розряд. Якщо зовнішній іонізатор постійно створює заряджені частинки, а між електродами прикладено електричне поле, електрони та іони починають рухатися впорядковано. Виникає *несамостійний газовий розряд*.

Без поля концентрація носіїв визначається балансом (8.18). При збільшенні напруженості поля струм спочатку зростає, оскільки все більша частина створених заряджених частинок досягає електродів.

При достатньо великому полі практично всі створені іонізатором носії доходять до електродів. Подальше збільшення поля вже майже не змінює струм: настає *струм насичення*.

Густину струму насичення знаходимо з умови, що в стаціонарному режимі кожна створена пара має дійти до електродів: у плоскому конденсаторі з відстанню d між електродами

$$j_{\text{нас}} = eNd, \qquad I_{\text{нас}} = eNSd = eNV, \tag{8.19}$$

тобто струм насичення визначається *лише потужністю іонізатора* й не залежить від напруги. При малих напругах, навпаки, носії встигають рекомбінувати раніше, ніж дійдуть до електродів, і виконується закон Ома (7.10) з $\lambda = en_0(\mu_+ + \mu_-) = e(\mu_+ + \mu_-)\sqrt{N/\beta}$, де $\mu_\pm$ — рухливості іонів. Ділянка закону Ома закінчується приблизно там, де омічна густина струму λE зрівнюється з $j_{\text{нас}}$ (рис. 8.6).

На рис. 8.6 ділянки *1* і *3* — це розглянуті вище омічна ділянка та струм насичення. На ділянці *2* зростання струму сповільнюється, бо частина носіїв ще встигає рекомбінувати. Ділянка *4* — лавинне зростання, де поле вже достатнє для ударної іонізації, і розряд переходить у самостійний (пробій, точка e); про нього йдеться далі.

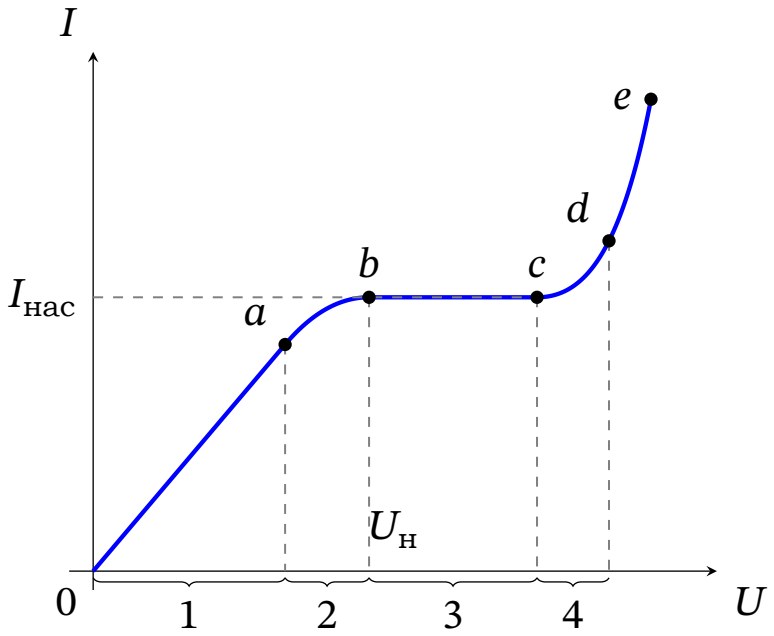


Рис. 8.6. Схематична вольт-амперна характеристика розряду в газі: омічна ділянка (1), перехідна ділянка (2), струм насичення (3), лавинне зростання й пробій (4); точки *a*–*e* — характерні режими

Самостійний газовий розряд. За достатньо сильного електричного поля газ починає підтримувати свою іонізацію сам, без зовнішнього іонізатора. Такий розряд називають *самостійним*. Розберемо, як це відбувається.

Ударна іонізація. Між двома зіткненнями з молекулами електрон прискорюється полем і набуває енергії порядку $eE\ell$, де ℓ — довжина вільного пробігу. Якщо ця енергія не менша за енергію іонізації молекули W_i (зазвичай 10–15 еВ), то при наступному зіткненні електрон вибиває з молекули ще один електрон:

$$e^- + \mathrm{A} \longrightarrow 2e^- + \mathrm{A}^+.$$

Звідси оцінка необхідного поля: $E \gtrsim W_i/(e\ell)$ (задача 8.10).

Електронна лавина. Після такого акту електронів уже два; обидва прискорюються полем і іонізують нові молекули, потім їх стає чотири, вісім і так далі. Число електронів лавинно (експоненційно) зростає в міру руху до анода, тому й говорять про *електронну лавину* (рис. 8.7). Позитивні іони, що при цьому утворюються, важкі й повільні: вони дрейфують до катода.

Чому лавини ще не досить? Лавина закінчується, коли електрони досягають анода. Якщо початкові електрони постачав зовнішній іонізатор, то без нього нова лавина не почнеться, і розряд згасне: він несамостійний. Щоб розряд існував сам, він має *сам* постачати початкові електрони для наступних лавин. Це роблять позитивні іони: потрапляючи на катод, вони вибивають з нього електрони (*вторинна*

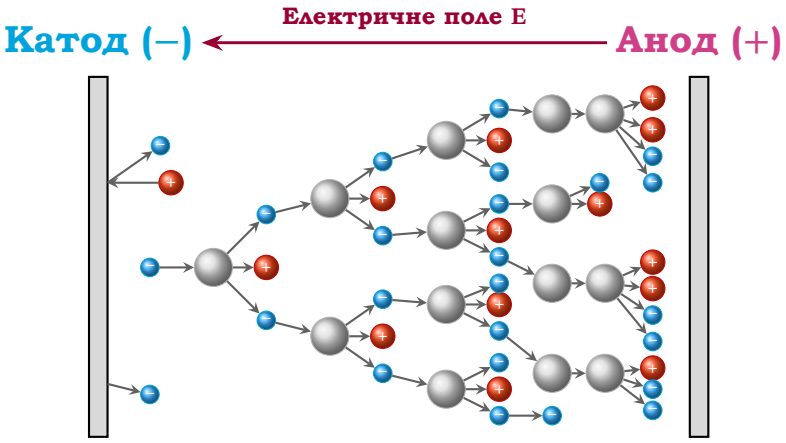


Рис. 8.7. Електронна лавина та вторинна емісія з катода

емісія). Якщо кожна лавина породжує стільки іонів, що на катоді з'являється принаймні один новий електрон, то він запускає наступну лавину, і процес відтворює сам себе. Це й є умова самопідтримання розряду (*умова Таунсенда*), а перехід від несамостійного розряду до самостійного називають *пробоєм*; напругу між електродами, за якої він настає, називають *напругою запалювання*.

Електрична міцність. Напруженість поля, за якої настає пробій газу, називають його *електричною міцністю* $E_{\text{пр}}$. Для повітря при нормальному тиску $E_{\text{пр}} \approx 3 \cdot 10^6$ В/м (3 кВ на міліметр): щоб пробити сантиметровий повітряний проміжок, потрібно близько 30 кВ.

Вплив тиску. Напруга запалювання залежить не лише від відстані між електродами, а й від тиску газу (Пашен, 1889). У розрідженому газі довжина пробігу ℓ велика й електрон легко набирає енергію, але молекул так мало, що лавина майже не розвивається. У щільному газі молекул багато, але між зіткненнями електрон проходить малий шлях і не встигає набрати енергію, потрібну для іонізації. Тому напруга запалювання найменша при деякому «проміжному» тиску (для повітря ~ 300 В) і зростає як при його зниженні, так і при підвищенні.

Різні режими самостійного газового розряду відрізняються умовами протікання, механізмом підтримання та характерним світінням (рис. 8.8, табл. 8.2).

Дугу вперше спостерігав В. Петров (1802). Теорію лавинного пробою розвинув Дж. Таунсенд на початку XX ст. В Україні промислове дугове зварювання пов'язане з Інститутом електрозварювання імені Є. О. Патона (Київ, 1934).

Таблиця 8.2. Основні види самостійного газового розряду

Вид	Умови	Особливості та приклади
Тліючий	$p \sim 10^{-1}$–10 Торр, $U \sim 10^2$ В, $I \sim$ мА	майже вся напруга падає біля катода, далі — слабко іонізований «позитивний стовп»; неонові трубки, люмінесцентні лампи
Іскровий	атмосферний тиск, $E \gtrsim E_{\text{пр}}$	короткочасний пробій вузькими каналами; блискавка (I до $\sim 10^5$ А)
Коронний	сильно неоднорідне поле біля вістер і тонких проводів	світиться лише тонка «корона», де $E > E_{\text{пр}}$; «вогні святого Ельма»; втрати на ЛЕП
Дуговий	$I \gtrsim 1$ А, $U \sim$ 10–50 В	розжарений катод (емісія, див. § 8.4), $T \sim$ 5000–10000 К; ВАХ спадна; зварювання, дугові печі



Рис. 8.8. Види самостійного газового розряду

! *Газовий розряд принципово відрізняється від струму в металі. У металі кількість вільних носіїв приблизно задана будовою речовини, тоді як у газі концентрація носіїв може радикально змінюватися під час самого проходження струму. Тому в газі електричне поле може не просто переміщувати носії, а й змінювати їх кількість.*

8.4. Електричний струм у вакуумі

У ідеальному вакуумі немає речовини, а отже, немає і готових носіїв струму. Проте струм у вакуумі можливий, якщо джерело заряджених частинок розміщене безпосередньо в області вакууму.

Найважливішим механізмом є *електронна емісія* — вихід електронів із поверхні твердого тіла.

Залежно від механізму розрізняють:

- *термоелектронну емісію* — вихід електронів при нагріванні;
- *фотоелектронну емісію* — вихід електронів під дією світла;
- *автоелектронну емісію* — вихід електронів під дією дуже сильного електричного поля;
- *вторинну емісію* — вибивання електронів із поверхні при бомбардуванні її швидкими частинками.

Усі ці механізми об'єднує одне: електрон не може вільно покинути метал, бо на його поверхні діє потенціальний бар'єр (рис. 8.9). Мінімальну енергію, яку треба передати електрону для виходу, називають *роботою виходу* $A_{\text{вих}}$. Механізми емісії відрізняються лише тим, звідки електрон її отримує. При нагріванні — з теплового руху. Під дією світла — з енергії фотона: $h\nu = A_{\text{вих}} + \frac{1}{2}m_e v^2$ (формула Ейнштейна, 1905; ефект спостерігав Г. Герц у 1887 р.). У дуже сильному полі ($\sim 10^9$ В/м) бар'єр стає настільки тонким, що електрони «просочуються» крізь нього (тунельний ефект), навіть без нагріву. При вторинній емісії енергію передає швидка частинка. Типові значення $A_{\text{вих}}$: вольфрам — 4,5 еВ, цезій — 2,1 еВ, оксидні катоди (BaO) — близько 1–1,5 еВ; саме тому оксидні катоди працюють при значно нижчих температурах.

У найпростішому наближенні густина термоелектронного струму описується законом Річардсона–Дешмана:

$$j = A_R T^2 \exp\left(-\frac{A_{\text{вих}}}{k_B T}\right), \tag{8.20}$$

де $A_R \sim 10^6$ А/(м^2·К^2) — стала Річардсона (для різних металів того ж порядку). Експоненціальний множник показує, що струм дуже чутливий до температури: його визначає частка електронів, чия енергія перевищує $A_{\text{вих}}$ (задача 8.12).

> **!** *У вакуумі струм не є «струмом вакууму» як властивістю самого простору. Вакуум лише не перешкоджає руху заряджених частинок. Провідність вакуумного проміжку визначається тим, скільки носіїв у нього введено та як вони рухаються в електричному полі.*

Класичним прикладом вакуумного струму є електронна лампа (рис. 8.10). У найпростішому вакуумному діоді нагрітий катод емітує електрони, а позитивно заряджений анод притягує їх. За відповідної полярності анода струм проходить, тоді як при зміні полярності електрони не можуть потрапити на анод. Таким чином, вакуумний діод має властивість односторонньої провідності.

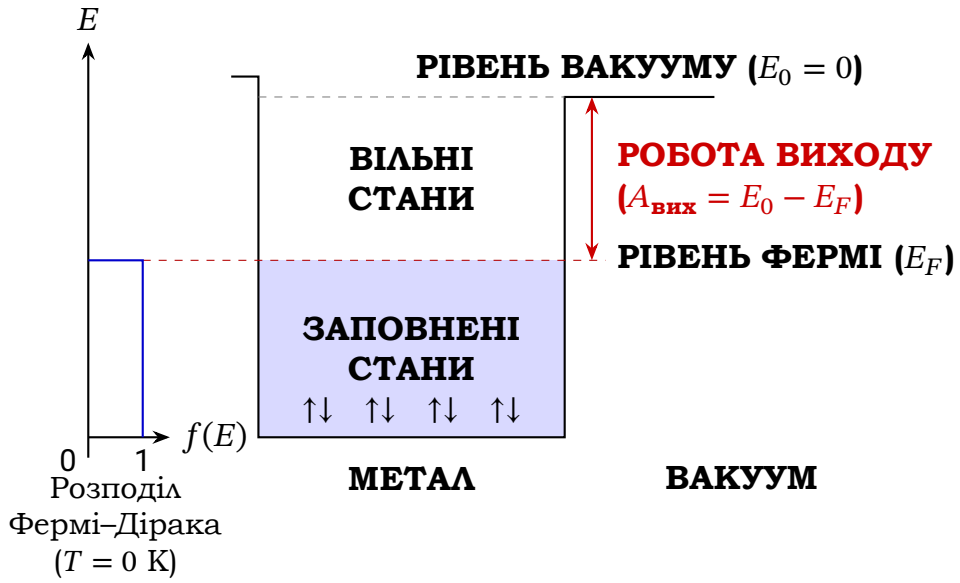


Рис. 8.9. Потенціальна яма електрона в металі: рівень Фермі, рівень вакууму, робота виходу $A_{вих}$; заповнені стани електронів

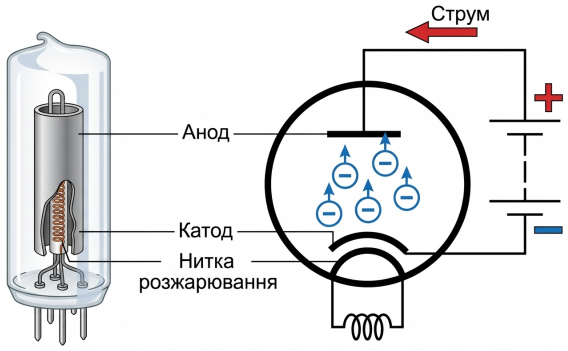


Рис. 8.10. Вигляд вакуумного діода: нагрітий катод емітує електрони, які прискорюються до анода під дією електричного поля. При зміні полярності анода струм не проходить.

Струм, обмежений просторовим зарядом. У вакуумі носії рухаються без зіткнень, тому густина струму задається формулою (7.4): $j = \rho u$, де ρ — густина заряду електронів, а u — їхня швидкість (тепер не повільний дрейф у речовині, а швидкість вільного прискорення полем). У стаціонарному режимі $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ (7.7), тож у плоскому діоді $j = \rho(x)v(x) = \text{const}$.

Якщо катод емітує багато електронів, біля нього утворюється хмара просторового заряду, яка повністю екранує поле катода ($E(0) = -\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=0} = 0$) й обмежує струм. Швидкість електрона на відстані x від катода визначається потенціалом $\varphi(x)$ у цій точці: $v = \sqrt{2e\varphi/m_e}$ (із закону збереження енергії), тому модуль густини заряду $|\rho| = j/v = j\sqrt{m_e/(2e)}\,\varphi^{-1/2}$ (рис. 8.11).

Підставимо $|\rho|$ в одновимірне рівняння Пуассона:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 4\pi|\rho| = 4\pi j\sqrt{\frac{m_e}{2e}}\,\varphi^{-1/2}.$$

Помноживши на $2\,d\varphi/dx$ й проінтегрувавши з урахуванням умов

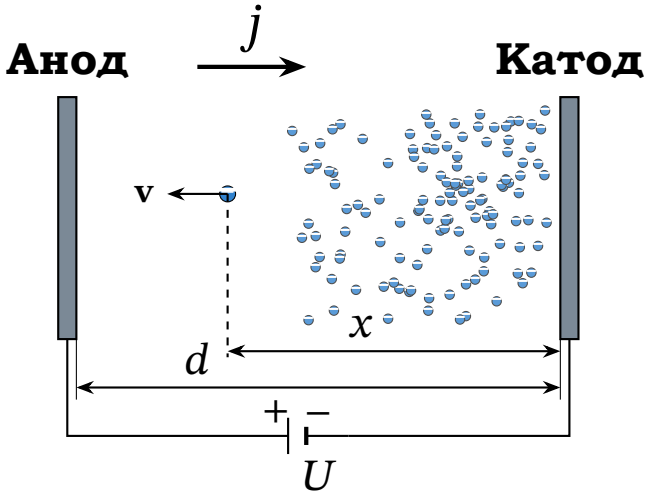


Рис. 8.11. Розподіл просторового заряду та електронів у плоскому вакуумному діоді.

на катоді ($\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$), дістаємо $(d\varphi/dx)^2 = 16\pi j\sqrt{m_e/2e}\,\varphi^{1/2}$. Розділивши змінні й проінтегрувавши ще раз, маємо

$$\frac{1}{3}\varphi^{3/4}(x) = \sqrt{\pi j}\left(\frac{m_e}{2e}\right)^{1/4} x, \qquad \text{тобто} \quad \varphi(x) \propto x^{4/3}.$$

На аноді ($x = d$, $\varphi = U$) звідси $\frac{1}{9}U^{3/2} = \pi j\sqrt{m_e/2e}\,d^2$, що й дає *закон трьох других* (закон Чайльда–Ленгмюра):

$$j = \frac{\sqrt{2}}{9\pi}\sqrt{\frac{e}{m_e}}\,\frac{U^{3/2}}{d^2}. \tag{8.21}$$

Струм росте не лінійно з напругою, а як $U^{3/2}$, тому закон Ома для вакуумного діода не виконується. Лише коли напруга така, що всі емітовані електрони відразу йдуть на анод, струм виходить на насичення, яке за законом Річардсона–Дешмана (8.20) визначається температурою катода (рис. 8.12). Електричний струм гріє не простір між електродами, а сам анод, у який на повній швидкості врізаються розігнані електрони, виділяючи потужність $\mathcal{P} = IU$.

Термоелектронну емісію вперше помітив Т. Едісон (1880-ті, *ефект Едісона*). Дж. Флемінг (1904) створив на цій основі вакуумний діод, а Лі де Форест (1906) додав керівну сітку й отримав тріод. Теорію термоемісії розвинув О. Річардсон (Нобелівська премія 1928 р.).

8.5. Електричний струм у напівпровідниках

Напівпровідники займають проміжне положення між металами та діелектриками за величиною електропровідності. До них належать,

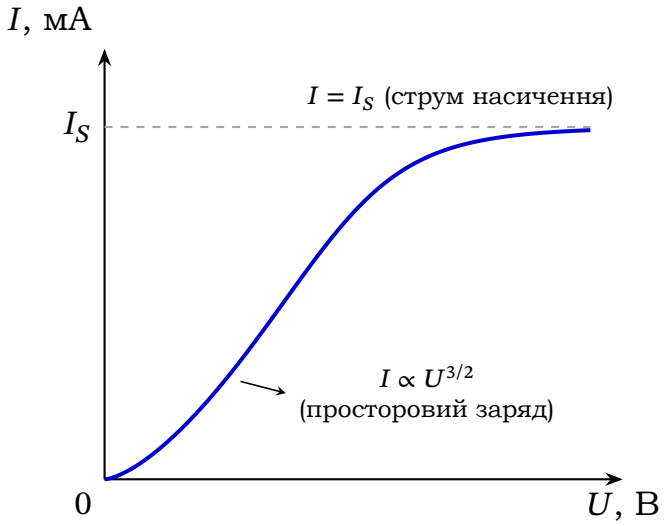


Рис. 8.12. Вольт-амперна характеристика вакуумного діода

зокрема, кремній, германій та багато складних напівпровідникових сполук.

Головна особливість напівпровідників полягає в тому, що концентрація носіїв струму дуже чутлива до температури, домішок, освітлення та інших зовнішніх чинників.

Причину такої поведінки пояснює *зонна теорія*. Енергії, які може мати електрон у кристалі, утворюють смуги — *зони*, розділені забороненими інтервалами (рис. 8.13).

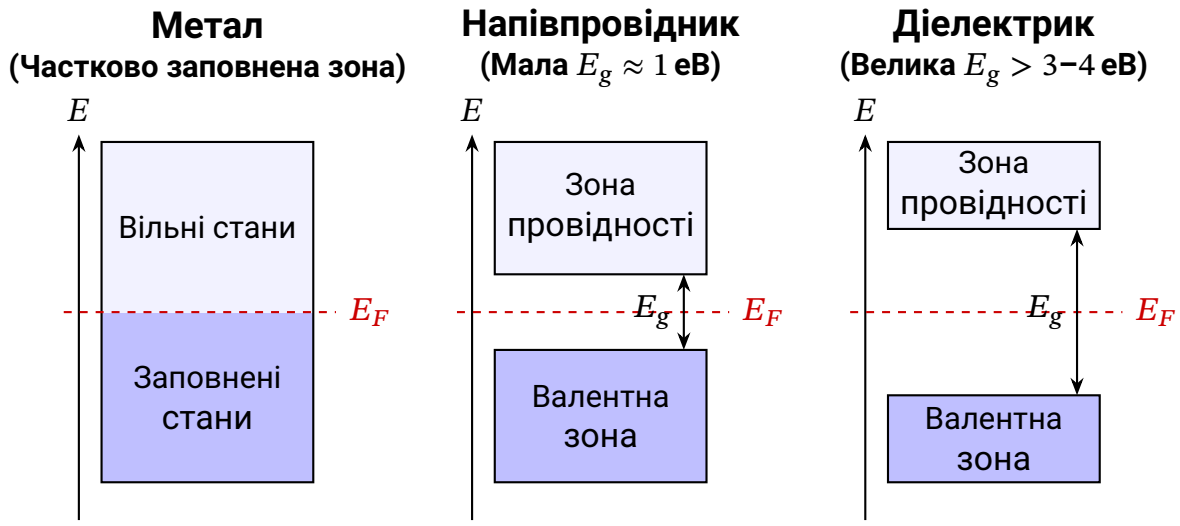


Рис. 8.13. Зонна структура металу, напівпровідника й діелектрика

Струм можливий лише тоді, коли електрон може змінити стан, тобто поруч є вільні стани (як і для металів, див. принцип Паулі в § 8.1). У металі верхня зона заповнена частково, тож вільні стани є завжди. У діелектрику й напівпровіднику при $T = 0$ нижня (*валентна*) зона заповнена повністю, а вища (*зона провідності*) порожня, тому струму

немає. Різниця між ними лише в ширині забороненої зони E_g. У напівпровідників вона порівняно мала (кремній — 1,12 еВ, германій — 0,66 еВ, GaAs — 1,42 еВ), тому вже тепловий рух ($k_BT \approx 0{,}026$ еВ при 300 К) закидає в зону провідності помітну кількість електронів, і ця кількість швидко росте з температурою. У діелектрика ($E_g \gtrsim 5$ еВ, алмаз — 5,5 еВ) цього не відбувається.

За абсолютного нуля ($T = 0$ К) власний напівпровідник є діелектриком: усі електрони задіяні в ковалентних зв'язках. З підвищенням температури тепловий рух розриває окремі зв'язки, одночасно створюючи вільний електрон і порожнє місце з-під нього.

Таким чином, у напівпровіднику носіями струму є:

- *електрони* — частинки з зарядом $-e$, що перебувають у зоні провідності;
- *дірки* — ефективні позитивні носії заряду, пов'язані з відсутністю електрона у валентній зоні.

Дірка не є самостійною елементарною частинкою. Це зручний спосіб опису колективного руху електронів у майже заповненій валентній зоні. Якщо сусідній електрон переходить на місце вакансії, сама вакансія переміщується в протилежному напрямку, ніби позитивно заряджена частинка (рис. 8.14). Тому густина струму в напівпровіднику має два внески:

$$\mathbf{j} = -en\,\mathbf{u}_n + ep\,\mathbf{u}_p, \tag{8.22}$$

де n і p — концентрації електронів та дірок, а $\mathbf{u}_n$ і $\mathbf{u}_p$ — їхні дрейфові швидкості.

У лінійному режимі

$$\mathbf{u}_n = -\mu_n\mathbf{E}, \qquad \mathbf{u}_p = \mu_p\mathbf{E},$$

тому

$$\boxed{\lambda = e(n\mu_n + p\mu_p).} \tag{8.23}$$

Власна та домішкова провідність. У чистому напівпровіднику електрони та дірки виникають парами. Якщо концентрація власних носіїв дорівнює n_i, то

$$n = p = n_i.$$

За підвищення температури частина електронів отримує достатню енергію для переходу через заборонену енергетичну зону, і концентрація носіїв швидко зростає.

У наближенні невиродженого напівпровідника

$$n_i \propto T^{3/2} \exp\left(-\frac{E_g}{2k_BT}\right), \tag{8.24}$$

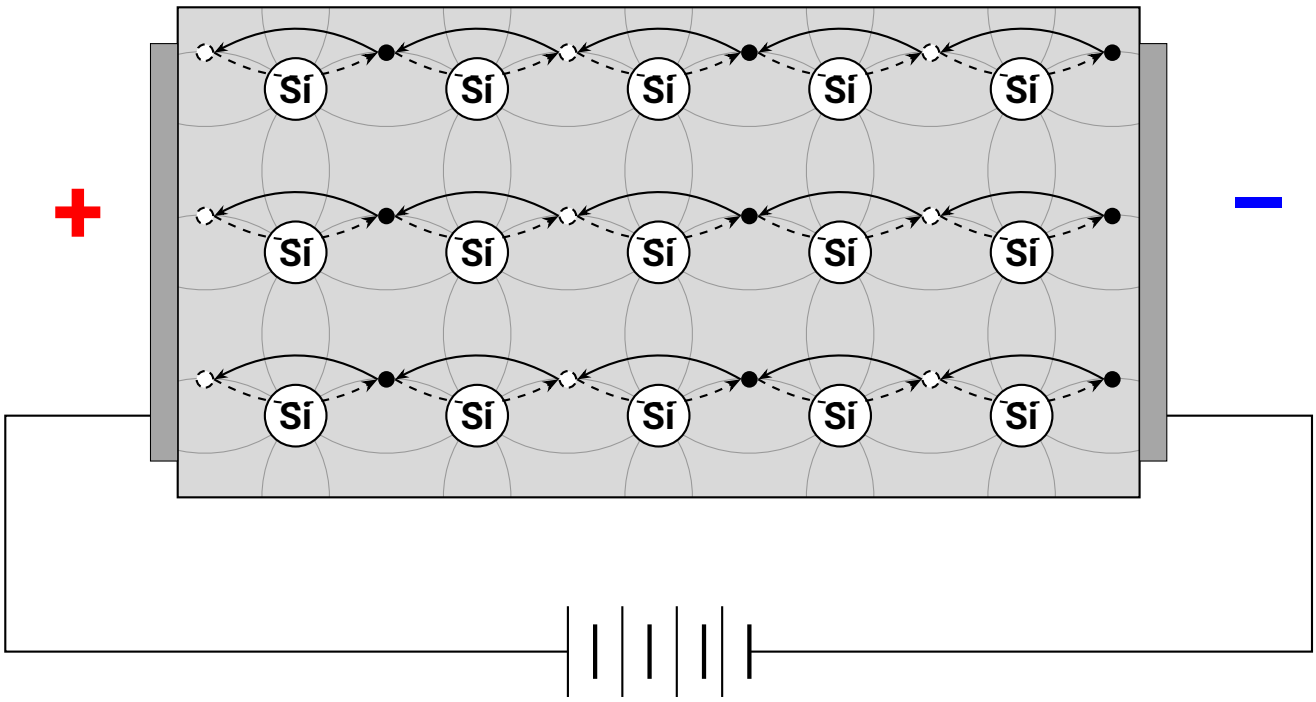


Рис. 8.14. Рух дірки як естафета електронів на сусідні вакансії. Електрони позначені чорними кружками, дірки — білими. Дірки рухаються праворуч, електрони — ліворуч.

де E_g — ширина забороненої зони.

Саме експоненційний множник є принципово важливим: навіть невелике підвищення температури може суттєво збільшити концентрацію носіїв.

> ! *Протилежні температурні залежності металів і напівпровідників мають різне походження. У металі температура головним чином змінює* рухливість *уже наявних носіїв: τ зменшується, тому ρ зростає. У напівпровіднику температура насамперед змінює* концентрацію *носіїв: n та p швидко зростають, тому ρ спадає.*

Ключова властивість напівпровідників, завдяки якій існує сучасна мікроелектроніка, — це можливість істотно змінювати їхню електричну провідність шляхом введення невеликої кількості атомів інших елементів (*домішок*). Залежно від наявності домішок напівпровідники поділяють на *власні* (чисті) та *домішкові*.

За характером дії на провідність матеріалу домішки поділяють на дві групи:

- *донорні* (донори) — віддають («дарують») додаткові електрони в зону провідності, утворюючи *напівпровідник n-типу*;
- *акцепторні* (акцептори) — захоплюють («приймають») електрони з валентної зони, створюючи дірки й утворюючи *напівпровідник p-типу*.

Механізм дії домішок визначається відношенням їхньої валентності до валентності атомів основного кристала. Для найпоширенішого 4-валентного напівпровідника — кремнію (Si):

- *Типові донори* — елементи V групи (фосфор, миш'як, сурма). Чотири їхні валентні електрони утворюють зв'язки з атомами кремнію, а п'ятий електрон виявляється слабко зв'язаним із ядром. Тому вже за кімнатної температури практично всі донори іонізовані (віддають електрон у зону провідності).
- *Типові акцептори* — елементи III групи (бор, алюміній, галій). Вони мають лише три валентні електрони, тому для формування чотирьох зв'язків захоплюють електрон із валентної зони кремнію, утворюючи рухливу дірку.

Кількість введених домішок характеризують їхньою концентрацією — N_d (для донорів) та N_a (для акцепторів).

Оскільки за кімнатної температури практично всі атоми домішки іонізовані, кожен донор віддає в зону провідності один електрон. Якщо концентрація донорів значно перевищує власну концентрацію ($N_d \gg n_i$), то кількість електронів у напівпровіднику визначається майже виключно домішкою:

$$n \approx N_d. \tag{8.25}$$

У такому напівпровіднику n-типу:

- *електрони* — це *основні носії* (їх більшість і їх кількість задає домішка);
- *дірки* — це *неосновні носії* (їх утворюється дуже мало внаслідок теплового руху).

Попри те що домішки кардинально змінюють концентрації n та p окремо, за термодинамічної рівноваги добуток їхніх концентрацій залишається сталою величиною. Цю залежність називають *законом діючих мас*:

$$np = n_i^2. \tag{8.26}$$

Походження цього закону те саме, що й у газі (§ 8.3, формула (8.18)): теплове збудження породжує пари електрон–дірка зі швидкістю $G(T)$, а рекомбінація (зустріч електрона з діркою) відбувається зі швидкістю βnp. У рівновазі $G = \beta np$, тому добуток $np = G/\beta \equiv n_i^2$ визначається лише температурою та шириною забороненої зони. Домішки змінюють n і p окремо, але не їхній добуток.

Звідси концентрація неосновних носіїв (дірок) у напівпровіднику n-типу становить $p = n_i^2/N_d$. Вона є мізерно малою, оскільки надлишок електронів прискорює їхню рекомбінацію з дірками.

Попри це, загальна провідність зростає на багато порядків: навіть одна домішкова заміна на кілька мільйонів атомів кремнію збільшує провідність у 10^5–10^6 разів (задача 8.16).

У домішковому напівпровіднику температурна залежність складніша, ніж у власному. За кімнатних температур домішки зазвичай повністю іонізовані, тому концентрація основних носіїв залишається майже сталою ($n \approx N_d$), а зміна провідності визначається переважно температурною залежністю рухливості носіїв.

За високих температур починає переважати власна провідність ($n_i \gg N_d$), і кристал втрачає свій n- або p-тип. Оскільки робота електронних компонентів базується саме на поєднанні n- та p-областей, така втрата специфіки робить функціонування кремнієвих структур неможливим за температур понад ~ 150–$200\,^\circ$C.

Контакт двох напівпровідників. Якщо привести в контакт напівпровідники p- та n-типів, виникає *p–n-перехід*. Електрони з області n-типу дифундують у напрямку області p-типу, а дірки — у протилежному напрямку.

Поблизу межі контакту носії рекомбінують, і утворюється *збіднений шар*, у якому залишаються нерухомі заряджені іони домішок (рис. 8.15): у n-області — додатні донори, у p-області — від'ємні акцептори. Ці заряди створюють внутрішнє електричне поле, яке перешкоджає подальшій дифузії основних носіїв.

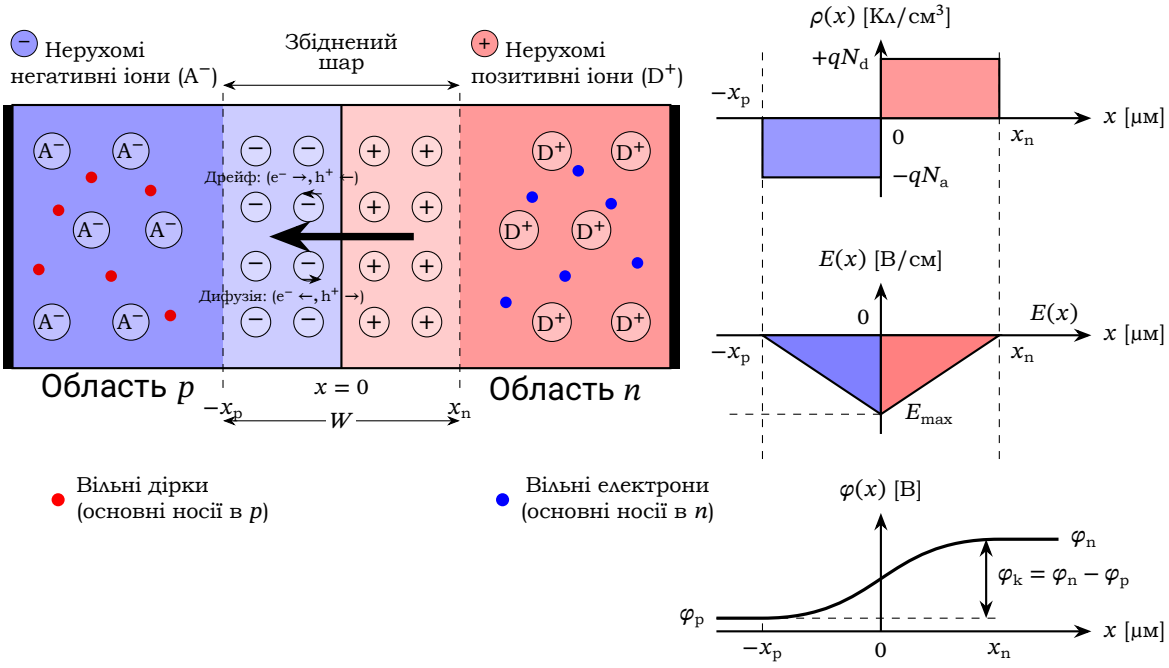


Рис. 8.15. Рівноважний p–n-перехід

Рівновага настає, коли дифузійний струм основних носіїв (вони прагнуть перейти з області, де їх багато, в область, де їх мало) зрівноважується дрейфовим струмом у полі збідненого шару. Це поле

створює на межі *контактну різницю потенціалів*

$$\varphi_k = \frac{k_B T}{e} \ln \frac{N_d N_a}{n_i^2}, \tag{8.27}$$

де N_d і N_a — концентрації донорів і акцепторів (формулу наводимо без виведення). Для кремнію $\varphi_k \approx 0{,}6$–$0{,}8$ В.

Зовнішня напруга може послаблювати або посилювати внутрішнє поле. Якщо вона зменшує потенціальний бар'єр, через перехід проходить значний струм — це *пряме зміщення*. При протилежній полярності бар'єр збільшується, і струм основних носіїв різко зменшується — *зворотне зміщення*. Саме ця асиметрія лежить в основі роботи напівпровідникового *діода*.

Прикладена напруга U (додатна при прямому зміщенні) змінює висоту бар'єра до $e(\varphi_k - U)$. Струм основних носіїв, що долають бар'єр, зростає як e^{eU/k_BT}, тоді як струм неосновних носіїв від U практично не залежить. Результат описує формула Шоклі

$$I = I_s \left(e^{eU/k_B T} - 1 \right), \tag{8.28}$$

де I_s — зворотний струм насичення (сильно, експоненційно залежить від температури). При прямому зміщенні $U \gg k_B T/e \approx 26$ мВ струм зростає експоненційно, а при зворотному $I \to -I_s$ (рис. 8.16). Вольт-амперна характеристика p–n-переходу нелінійна, отже закон Ома для нього непридатний.

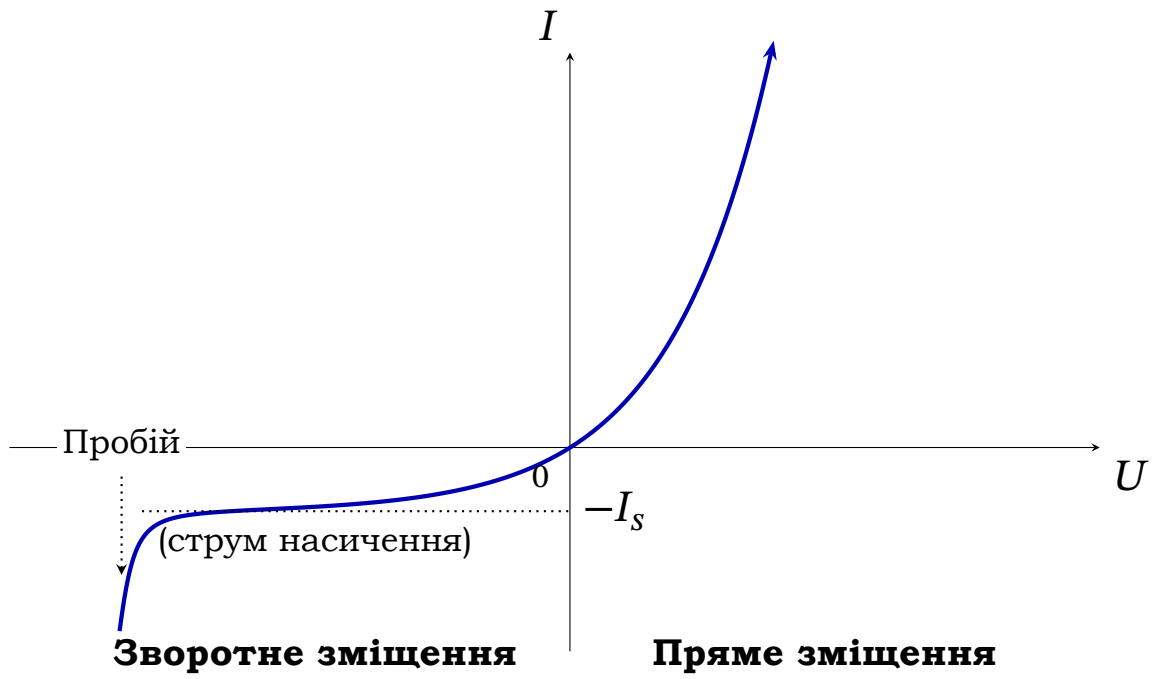


Рис. 8.16. Вольт-амперна характеристика p–n-переходу

Унікальні властивості p–n-переходу лежать в основі роботи більшості напівпровідникових приладів:

- *Випрямні діоди* — використовують однобічну провідність переходу для перетворення змінного струму на постійний.
- *Світлодіоди* — випромінюють світло при прямому зміщенні внаслідок рекомбінації електронів і дірок.
- *Сонячні елементи та фотодіоди* — перетворюють світло на електричний струм шляхом фотогенерації пар носіїв у збідненому шарі.
- *Транзистори* — містять два p–n-переходи й слугують базовими елементами сучасних інтегральних схем.

Опір сульфіду срібла Ag_2S спадає при нагріванні — це помітив ще М. Фарадей (1833). Зонну теорію напівпровідників розвинув А. Вільсон (1931). У Києві В. Є. Лашкарьов (1941) виявив p–n-перехід у закису міді Cu_2O. Транзистор створили Дж. Бардін і В. Браттейн (1947), теорію переходу дав В. Шоклі (1949); усі троє — лауреати Нобелівської премії 1956 р.

Підсумки

Підсумуємо відмінності між середовищами (табл. 8.3): макроскопічна природа струму спільна, а мікроскопічна реалізація різна.

Попри ці відмінності, для всіх середовищ залишається справедливим фундаментальний зв'язок (8.1), тобто мікроскопічна основа поняття густини струму. Усі відмінності між провідниками зводяться до відповіді на три запитання:

1. *Які частинки є носіями заряду?*
2. *Скільки їх у одиниці об'єму?*
3. *Як електричне поле змінює їхній рух?*

У цьому розділі закон Ома, що в розділі 7 постулювався як властивість середовища, набув мікроскопічного змісту: провідність λ визначається тим, які носії є в середовищі, скільки їх і наскільки легко поле їх рухає (8.4).

За цією ознакою середовища природно діляться на дві групи. У металах і електролітах кількість носіїв задана самою речовиною, тому все визначає їхня рухливість, а закон Ома виконується. У газах і вакуумі кількість носіїв визначають зовнішні умови (іонізація, емісія) і саме поле, тому струм нелінійно залежить від напруги. У напівпровідниках кількість носіїв дуже чутлива до температури й домішок; в однорідному зразку закон Ома виконується, але на p–n-переході — ні. Надпровідність є граничним випадком, де закон Ома втрачає зміст, бо $\rho = 0$.

Усі середовища підкоряються загальним законам розділу 7: збереженню заряду, закону Джоуля–Ленца, узагальненому закону Ома зі сторонніми силами. Нові тут лише мікроскопічні причини, які ви-

Таблиця 8.3. Особливості електричного струму в різних середовищах

Середовище	Характерна особливість	Закон Ома і залежність $\lambda(T)$
Метали	перенесення заряду без перенесення речовини	виконується; λ спадає з T (менший τ)
Електроліти	струм супроводжується хімічними перетвореннями	виконується; λ зростає з T (менша в'язкість)
Гази	концентрація носіїв залежить від іонізації та рекомбінації	лише в слабких полях; далі насичення та пробій
Вакуум	струм можливий лише за наявності джерела носіїв	не виконується (закон $U^{3/2}$, насичення); $j \propto T^2 e^{-A_{\text{вих}}/k_B T}$
Напівпровідники	провідність сильно залежить від температури та домішок	у однорідному зразку виконується, λ експоненційно зростає з T; для p–n-переходу — ні

значають λ. Крім того, на прикладі металів видно межі класичної моделі: щоб правильно описати температурну залежність опору й закон Відемана–Франца, довелося залучити принцип Паулі.

Задачі

8.1. *Час вільного пробігу за Друде.* Питома провідність міді $\lambda = 5{,}9 \cdot 10^7$ См/м, концентрація електронів $n = 8{,}5 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}$. Оцініть середній час вільного пробігу τ за формулою Друде та *класичну* довжину вільного пробігу $\ell = v_T \tau$ при $T = 300$ К ($v_T \approx 1{,}2 \cdot 10^5$ м/с). Порівняйте одержане ℓ з відстанню між іонами ґратки ($\sim 0{,}3$ нм), а також із реальною довжиною вільного пробігу в міді при кімнатній температурі (~ 40 нм).

8.2. *Рухливість електронів у міді.* Для міді ($\lambda = 5{,}9 \cdot 10^7$ См/м, $n = 8{,}5 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}$) знайдіть рухливість μ, напруженість поля, потрібну для густини струму $j = 10^6$ А/м^2 (1 А через переріз 1 мм^2), і дрейфову швидкість $u = \mu E$. Порівняйте з результатом задачі 7.1 розділу 7 і виразіть μ через τ із задачі 8.1.

8.3. *Температурний коефіцієнт опору.* При 20 °C опір вольфрамового дроту $R_{20} = 10$ Ом, а $\alpha = 5{,}0 \cdot 10^{-3}\,°\text{C}^{-1}$. Яким буде опір при $t = 1000$ °C, якщо вважати лінійну залежність (8.7) справедливою? На скільки відсотків він зросте?

8.4. *Число Лоренца.* Для міді при $T = 300$ К питома електропровідність $\lambda = 5{,}9 \cdot 10^7$ См/м, а теплопровідність $\kappa = 4{,}0 \cdot 10^2$ Вт/(м·К). Знайдіть відношення κ/λ і порівняйте його з добутком LT для класичного й квантового значень числа Лоренца (секція 8.1). Яка з двох теорій узгоджується з дослідом? Візьміть $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Кл.

8.5. *Надпровідний дріт.* Волокна NbTi у дроті мають сумарний переріз $S = 0{,}5$ мм^2 і критичну густину струму $j_c = 2 \cdot 10^9$ А/м^2. (а) Який максимальний струм може нести дріт без переходу в нормальний стан? (б) Яка потужність виділялась би на 1 м довжини в мідному дроті того самого перерізу при цьому струмі ($\rho = 1{,}68 \cdot 10^{-8}$ Ом·м)? (в) Які матеріали із секції про надпровідність можна охолоджувати рідким азотом (77 К)?

8.6. *Мідне покриття.* Крізь розчин мідного купоросу $CuSO_4$ з мідними електродами пропускають струм $I = 2$ А протягом $t = 30$ хв. Яка маса міді виділиться на катоді? Молярна маса міді $\mu = 63{,}5$ г/моль, валентність $z = 2$, стала Фарадея $F = 9{,}65 \cdot 10^4$ Кл/моль.

8.7. *Розчин кухонної солі.* У розчині NaCl концентрація іонів кожного знака $n_\pm = 6{,}0 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$ (дисоціацію вважайте повною), рухливості $\mu_+ = 5{,}2 \cdot 10^{-8}$ м^2/(В·с) для Na^+ і $\mu_- = 7{,}9 \cdot 10^{-8}$ м^2/(В·с) для Cl^-. Знайдіть питому провідність розчину та частку струму, яку переносять катіони.

8.8. *Електроліз води.* На електроди ванни подано $U = 2{,}0$ В, ЕРС поляризації $\mathscr{E}_{\text{пол}} = 1{,}5$ В, опір розчину $R = 0{,}05$ Ом. Знайдіть струм, масу водню за $t = 1$ год ($\mu = 2{,}016$ г/моль, $z = 2$ для молекули H_2), потужність тепловиділення в розчині та частку потужності джерела, що йде на хімічну реакцію.

8.9. *Іонізоване повітря.* Іонізатор створює в повітрі $N = 10^{13}$ м$^{-3}$·с$^{-1}$ пар іонів; коефіцієнт рекомбінації $\beta = 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ м^3/с, рухливості іонів $\mu_+ = 1{,}4 \cdot 10^{-4}$ та $\mu_- = 1{,}9 \cdot 10^{-4}$ м^2/(В·с). Знайдіть рівноважну концентрацію іонів і питому провідність. Оцініть напругу на електродах, розташованих на відстані $d = 2$ см, до якої виконується закон Ома.

8.10. *Ударна іонізація.* Енергія іонізації атома аргону $W_i = 15{,}8$ еВ. Яка мінімальна напруженість однорідного поля потрібна, щоб електрон, який пролітає без зіткнень відстань $\ell = 0{,}1$ мм, набув на ній енергії, достатньої для іонізації? Втратами енергії на цьому шляху знехтуйте.

8.11. *Початок корони.* Електрична міцність повітря $E_{\text{пр}} = 3 \cdot 10^6$ В/м. Знайдіть потенціал ізольованої провідної кулі, при якому біля її поверхні починається коронний розряд, для $r = 1$ см та $r = 0{,}1$ мм (поле біля поверхні $E = \varphi/r$). Чому корона виникає біля вістер?

8.12. *Нагрів катода.* Робота виходу вольфраму $A_{\text{вих}} = 4{,}5$ еВ. У скільки разів зросте густина термоелектронного струму при нагріванні катода від $T_1 = 2000$ К до $T_2 = 2500$ К? Скористайтеся законом Річардсона–Дешмана (8.20); стала Больцмана $k_B = 8{,}62 \cdot 10^{-5}$ еВ/К.

8.13. *Струм, обмежений просторовим зарядом.* Плоский вакуумний діод має відстань між електродами $d = 5$ мм, напругу $U = 200$ В, площу електродів $S = 1$ см^2; катод емітує необмежену кількість електронів. Знайдіть густину і силу струму за законом 3/2 (8.21). Як зміняться j при подвоєнні U та при подвоєнні d? Яка потужність виділяється на аноді? *Вказівка:* у СІ закон трьох других має вигляд $j = \dfrac{4\varepsilon_0}{9}\sqrt{\dfrac{2e}{m_e}}\dfrac{U^{3/2}}{d^2}$.

8.14. *Власний кремній.* При $T = 300$ К концентрація власних носіїв у кремнії $n_i = 1{,}5 \cdot 10^{16}$ м$^{-3}$, а рухливості електронів і дірок $\mu_n = 0{,}135$ м^2/(В·с) та $\mu_p = 0{,}048$ м^2/(В·с). Знайдіть питому провідність і питомий опір власного кремнію.

8.15. *Нагрів напівпровідника.* У скільки разів зросте концентрація власних носіїв у кремнії ($E_g = 1{,}12$ еВ) при нагріванні від $T_1 = 300$ К до $T_2 = 330$ К? Порівняйте із зміною питомого опору міді ($\alpha = 4{,}3 \cdot 10^{-3}\,°\text{C}^{-1}$) за тієї самої зміни температури. Зміною рухливостей знехтуйте.

8.16. *Легований кремній.* У кремній ввели донорну домішку з концентрацією $N_d = 10^{22}$ м$^{-3}$. При $T = 300$ К вважайте всі донори іонізованими, тож $n \approx N_d$. Знайдіть питому провідність, концентрацію дірок (закон діючих мас $np = n_i^2$) і в скільки разів провідність перевищує провідність власного кремнію (значення n_i, μ_n, μ_p візьміть з задачі 8.14).

8.17. *p–n-перехід у кремнії.* Для кремнію ($n_i = 1{,}5 \cdot 10^{16}$ м$^{-3}$) при $T = 300$ К ($k_B T/e \approx 25{,}9$ мВ) з $N_a = 10^{23}$ м$^{-3}$ та $N_d = 10^{22}$ м$^{-3}$ знайдіть контактну різницю потенціалів (8.27). У скільки разів прямий струм при $U = +0{,}5$ В перевищує модуль зворотного при $U = -0{,}5$ В (формула Шоклі (8.28))?

Контрольні питання

1. Запишіть загальний вираз густини струму через сорти носіїв, $\mathbf{j} = \sum_k n_k q_k \mathbf{u}_k$, і виведіть питому провідність $\lambda = \sum_k n_k |q_k| \mu_k$. Що називають рухливістю носіїв?
2. Опишіть модель Друде: як з рівняння руху електрона із силою «тертя» $-m_e\mathbf{u}/\tau$ отримують $\lambda = ne^2\tau/m_e$ і рухливість $\mu = e\tau/m_e$?
3. Як залежить опір металів від температури та чим це відрізняється від поведінки напівпровідників? Чому в одних змінюється τ, а в інших — n?
4. Чому класична теорія не пояснює лінійну залежність $\rho \propto T$ і залишковий опір $\rho_{зал}$? Сформулюйте правило Маттіссена.
5. Що таке енергія Фермі? Чому в перенесенні заряду беруть участь лише електрони поблизу рівня Фермі?
6. Сформулюйте закон Відемана–Франца. Які значення числа Лоренца дають класична й квантова теорії?
7. Що таке надпровідність і критична температура? Чому струм у надпровідному кільці тече без джерела ЕРС і як це узгоджується із законом Джоуля–Ленца? Що таке ефект Мейснера?
8. Які носії струму в електроліті? Чому внески катіонів і аніонів у густину струму додаються, хоча рухаються вони в протилежних напрямках?
9. Сформулюйте закони Фарадея для електролізу й виведіть формулу $m = \mu I t/(zF)$. Що таке стала Фарадея?
10. Запишіть закон Ома для електролітичної комірки. Що таке ЕРС поляризації й чим електроліз відрізняється від роботи гальванічного

елемента?

11. Що таке іонізація й рекомбінація? Чому концентрація носіїв у газі, на відміну від металу, не є сталою? Виведіть струм насичення $j_{\text{нас}} = eNd$.

12. Опишіть хід залежності струму від напруги при несамостійному газовому розряді.

13. Що таке ударна іонізація й електронна лавина? Чому лавини недостатньо для самостійного розряду і яку роль відіграє вторинна емісія з катода? Що таке пробій і електрична міцність? Назвіть основні види самостійного розряду.

14. Які види електронної емісії ви знаєте? Що таке робота виходу і як густина термоелектронного струму залежить від температури?

15. Чому вакуумний діод має властивість односторонньої провідності? Запишіть закон трьох других і поясніть, чому тут закон Ома не виконується.

16. Що таке дірка? Чому її не можна вважати самостійною елементарною частинкою?

17. Чим відрізняються напівпровідники *n*- і *p*-типу? Сформулюйте закон діючих мас. Які носії є основними, а які неосновними?

18. Як виникає *p*–*n*-перехід і чому він проводить струм лише в одному напрямку? Що таке контактна різниця потенціалів, пряме й зворотне зміщення? Запишіть формулу Шоклі.

19. На які три запитання зводяться всі відмінності між провідними середовищами? Дайте відповіді для металу, електроліту, газу, вакууму й напівпровідника.

Частина III

Постійне магнітне поле

Із наведених фактів досить очевидно, що електричний конфлікт не обмежується провідником, а поширюється досить далеко в навколишньому просторі. [...] Можна також зробити висновок, що цей конфлікт описує кола.

Ганс Крістіан Ерстед, «Досліди щодо дії електричного конфлікту на магнітну стрілку» (1820)

9 Магнітне поле у вакуумі

Уся ця теорія разом з експериментом ніби вийшла, цілком сформована й озброєна, з голови «Ньютона електрики».

Джеймс Клерк Максвелл про Ампера, «Трактат про електрику і магнетизм», § 528

9.1. Означення

У 1820 р. датський фізик Г. Х. Ерстед виявив, що магнітна стрілка компаса, розташована поблизу провідника, відхиляється, щойно по провіднику пускають електричний струм (рис. 9.1). Цей дослід став першим експериментальним доказом того, що електричний струм впливає на магніт, тобто що рухомі заряди й магнетизм — взаємопов'язані явища.

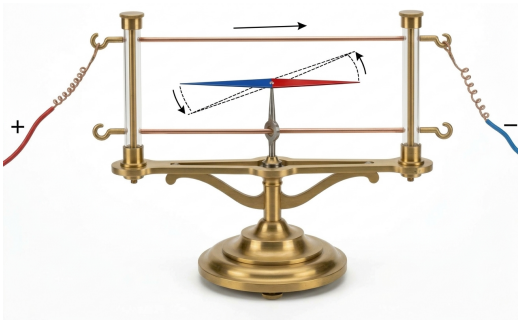


Рис. 9.1. Установка Ерстеда

До досліду Ерстеда електрику й магнетизм вважали двома окремими, ніяк не пов'язаними розділами фізики. Відкриття Ерстеда — відправна точка об'єднання цих двох явищ в єдину теорію електромагнетизму, вершиною якого стануть згодом рівняння Максвелла.

Магнітним полем називають силове поле, що діє на *рухомі* заряди (а отже, і на електричні струми, і на тіла, які мають магнітний момент). Ключова відмінність від електричного поля — магнітне поле не діє на *нерухомі* заряди: сила, з якою воно діє на заряд, з'являється лише тоді, коли заряд рухається (рис. 9.2).

Магнітне поле створюється рухомими зарядами, тобто електричним струмом. Те, що поле породжує саме *рух* заряду, а не наявність провідника, показують досліди Роуленда й Ейхенвальда (с. 213). Якщо струми не змінюються в часі, вони створюють *постійне* (стале)

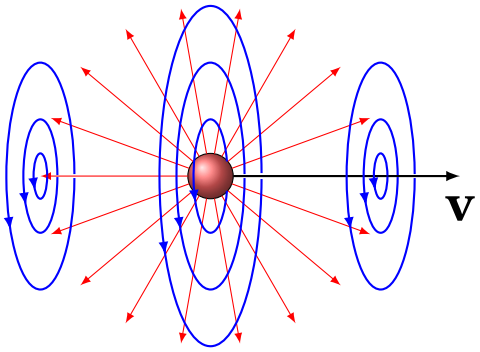


Рис. 9.2. Заряд, що рухається зі швидкістю **v**, є джерелом як електричного, так і магнітного поля

магнітне поле — саме такі поля ми і вивчатимемо в цьому розділі, залишаючи змінні в часі поля для подальших розділів курсу.

9.2. Характеристика магнітного поля

На відміну від електростатики, де характеристику поля — напруженість **E** — зручно ввести через силу, що діє на *пробний заряд* ($\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$), для магнітного поля такий підхід не спрацьовує безпосередньо: магнітних зарядів (*магнітних монополів*) у природі досі не виявлено, хоча їх шукають.

Натомість у природі існують *магнітні диполі* — магнітна стрілка, коловий виток зі струмом тощо. Скориставшись аналогією з моментом сил, що діє на електричний диполь в електричному полі, $\mathbf{M} = [\mathbf{p}_e \times \mathbf{E}]$, вводять характеристику магнітного поля — вектор **B** — через момент сил, що діє на магнітний диполь із моментом $\mathbf{p}_m$:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \times \mathbf{B}], \qquad M_{\max} = p_m B. \tag{9.1}$$

Отже,

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m} :$$

величина вектора індукції чисельно дорівнює максимальному обертальному моменту, що діє на одиничний магнітний момент, вміщений у це поле. Напрям **B** збігається з напрямом, уздовж якого встановлюється магнітний момент у положенні стійкої рівноваги (див. (9.35)).

Точне означення вектора $\mathbf{p}_m$ дамо нижче (§ 9.7); поки що досить сприймати його як міру «інтенсивності» магнітного диполя — так само як електричний дипольний момент $\mathbf{p}_e = \sum_i q_i \mathbf{r}_i$ (3.1) характеризує систему зарядів, не будучи при цьому їхнім сумарним зарядом.

Вектор **B** називають не *напруженістю*, а *індукцією* магнітного поля — на відміну від **E**. Причина — історична. Напруженістю магнітного поля спершу називали вектор **H**, який вводили через силу, що діє на магнітний полюс (за аналогією з **E** і законом Кулона для полюсів). Термін «індукція» закріпився за вектором **B**, бо в речовині це поле *індукується* намагнічуванням: **B** відрізняється від **H** на внесок намагніченості (розділ 10). У вакуумі в гауссовій системі **B** і **H** збігаються, але саме **B** входить у силу Лоренца, тому саме він є фундаментальною характеристикою поля.

У гауссовій системі одиниць величину магнітного поля вимірюють у *гаусах* (Гс), а в СІ — у *теслах* (Тл):

$$1\ \text{Тл} = 10^4\ \text{Гс}.$$

Для орієнтира: магнітне поле Землі на поверхні — близько 0,5 Гс, поле звичайного постійного магніту — сотні Гс, поле надпровідного магніту в томографі — одиниці Тл.

9.3. Дія магнітного поля на заряджені частинки та струми

Сила Лоренца та сила Ампера. *Магнітною складовою сили Лоренца* називають силу, що діє на рухомий заряд q з боку магнітного поля:

$$\mathbf{F} = q\left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right]. \tag{9.2}$$

Повна сила, що діє на заряд у присутності як електричного, так і магнітного поля (власне і є *сила Лоренца*), — це сума електричної та магнітної складових:

$$\boxed{\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right]\right).}$$

Силою Ампера називають силу, що діє з боку магнітного поля не на окремий заряд, а на струм. Якщо в елементі об'єму dV провідника густина струму дорівнює $\mathbf{j}$, то, підсумовуючи внесок (9.2) від усіх носіїв заряду в цьому об'ємі ($dq\,\mathbf{v} \to \mathbf{j}\,dV$, див. нижче), маємо

$$\boxed{d\mathbf{F} = \frac{1}{c}\left[\mathbf{j}\,dV \times \mathbf{B}\right],} \tag{9.3}$$

де величину $\mathbf{j}\,dV$ називають *елементом об'ємного струму*.

Зв'язок сили Лоренца та сили Ампера. Покажемо явно, що формула (9.3) — прямий наслідок магнітної сили Лоренца (9.2). Сила Лоренца, що діє на заряд dq, який рухається зі швидкістю $\mathbf{v}$, дорівнює $d\mathbf{F} = [dq\,\mathbf{v}/c \times \mathbf{B}]$. Оскільки $dq\,\mathbf{v} = \rho\mathbf{v}\,dV = \mathbf{j}\,dV$ (розділ 7; тут ρ — густина заряду саме *рухомих* носіїв: у нейтральному провіднику повна густина заряду дорівнює нулю, а струм є), звідси одразу отримуємо формулу (9.3). Для *окремого* рухомого заряду q роль «елемента струму» відіграє добуток $q\mathbf{v}$.

Елемент струму. Якщо в задачі не цікавляться внутрішньою будовою провідника й розподілом струму в його товщі, елемент об'ємного струму зручно спростити до *елемента лінійного струму*. Нехай струм тече тонким провідником із площею поперечного перерізу S (рис. 9.3). Уведемо вектор ділянки провідника завдовжки $d\ell$ за формулою $d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{n}\,d\ell$, де $\mathbf{n}$ — одиничний вектор уздовж осі провідника. Тоді $\mathbf{j} = j\mathbf{n}$, а $I = jS$, тому

$$\mathbf{j}\,dV = j\mathbf{n}\,S\,d\ell = I\,d\boldsymbol{\ell}, \tag{9.4}$$

і сила Ампера для елемента лінійного струму

$$\boxed{d\mathbf{F} = \frac{1}{c}\,[I\,d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}]\,.} \tag{9.5}$$

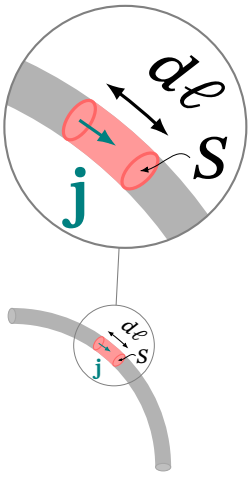
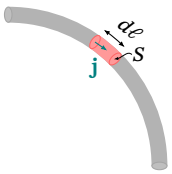
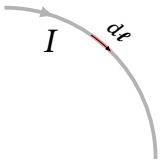


Рис. 9.3. Елемент лінійного струму $I\,d\boldsymbol{\ell}$: збільшений фрагмент показує напрям $\mathbf{j}$ уздовж осі провідника перерізу S

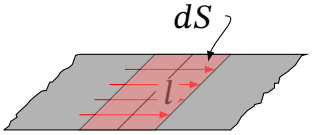
Залежно від того, як саме розподілений струм, зручно користуватись однією з трьох еквівалентних форм елемента струму (рис. 9.4): *об'ємним* струмом $\mathbf{j}\,dV$ (коли важливий розподіл струму по товщі провідника), *лінійним* струмом $I\,d\boldsymbol{\ell}$ (коли провідник тонкий, і досить знати лише повний струм у ньому) або *поверхневим* струмом $\mathbf{i}\,dS$ (коли струм тече тонким шаром по поверхні — наприклад, струми в надпровідниках чи високочастотні струми в провідниках); тут $i = I/\ell_\perp$ — поверхнева густина струму (сила струму, що припадає на одиницю довжини лінії, перпендикулярної до напряму струму).



Об'ємний струм $\mathbf{j}\,dV$



Лінійний струм $I\,d\boldsymbol{\ell}$



Поверхневий струм $\mathbf{i}\,dS$

Рис. 9.4. Три еквівалентні форми запису елемента струму

Робота магнітного поля. Обчислимо роботу магнітної складової сили Лоренца над рухомим зарядом:

$$\delta A = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\,dt = \left[\frac{q\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right]\cdot\mathbf{v}\,dt.$$

Скориставшись властивістю мішаного добутку, $\mathbf{a}\cdot[\mathbf{b}\times\mathbf{w}] = \mathbf{w}\cdot[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$, маємо $\mathbf{v}\cdot[\mathbf{v}\times\mathbf{B}] = \mathbf{B}\cdot[\mathbf{v}\times\mathbf{v}] = 0$ (оскільки $[\mathbf{v}\times\mathbf{v}]\equiv 0$), тому

$$\boxed{\delta A = 0.} \tag{9.6}$$

За теоремою про зміну кінетичної енергії, $A = \Delta\left(mv^2/2\right) = 0$, тобто *кінетична енергія зарядженої частинки в магнітному полі не змінюється*: магнітне поле не виконує роботи над частинкою (рис. 9.5 — траєкторія зарядженої частинки в однорідному магнітному полі: сила $\mathbf{F}$ завжди перпендикулярна до швидкості $\mathbf{v}$ і лише викривляє траєкторію, не змінюючи модуля швидкості).

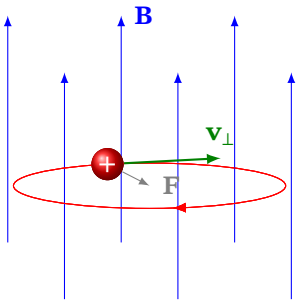


Рис. 9.5. Кругова траєкторія зарядженої частинки в однорідному магнітному полі: сила завжди перпендикулярна до швидкості

9.4. Закон Біо–Савара–Лапласа

Формулювання закону. У 1820 р. Ж.-Б. Біо та Ф. Савар на основі експериментів встановили закон, який визначає величину й напрямок магнітного поля елемента струму, а П.-С. Лаплас надалі його математично узагальнив. Тепер цей закон називається законом Біо–Савара–Лапласа. Якщо радіус-вектор точки спостереження P відносно розглянутого елемента струму дорівнює r (рис. 9.6), то поле, створюване елементом об'ємного струму $\mathbf{j}\,dV'$, дорівнює

$$\boxed{d\mathbf{B} = \frac{1}{c}\,\frac{[\mathbf{j}\,dV'\times r]}{r^3}.} \tag{9.7}$$

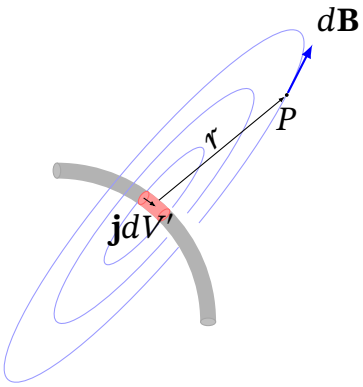


Рис. 9.6. Поле $d\mathbf{B}$, створюване елементом струму $\mathbf{j}\,dV'$, за законом Біо–Савара–Лапласа

Множник $1/c$ у формулі (9.7) — це електродинамічна константа, яка в гауссовій системі одиниць виникає внаслідок того, що струм визначається через електростатичні одиниці заряду. Її експериментально виміряли В. Вебер і Р. Кольрауш (1856) як відношення електростатичної та електромагнітної одиниць заряду. У їхніх дослідах лейденську банку заряджали від електростатичної машини й вимірювали заряд синус-електрометром (електростатичні одиниці), а потім розряджали її через балістичний гальванометр (електромагнітні одиниці). Відношення цих двох числових значень дало константу, що, як виявилось згодом, збіглася зі швидкістю світла. Дж. К. Максвелл згодом показав, що це не випадковий збіг: з його рівнянь випливало, що електромагнітні хвилі поширюються зі швидкістю c, і що світло є електромагнітною хвилею.

Як і електричне поле, магнітне поле підкоряється *принципу суперпозиції*: поле довільної системи струмів — це векторна сума (інтеграл) внесків від усіх елементів струму:

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B}. \tag{9.8}$$

Закон Біо–Савара–Лапласа — це магнітний аналог закону Кулона: обидва є емпіричними законами, обидва підкоряються принципу суперпозиції, і в обох поле спадає з відстанню як $1/r^2$. Головна відмінність — геометрична: поле точкового заряду напрямлене вздовж r (радіально), тоді як поле елемента струму, через векторний добуток, перпендикулярне і до струму, і до r (тобто «закручується» навколо провідника). Є й фізична відмінність: точковий заряд існує сам по собі, а ізольований елемент струму — ні (стаціонарні струми замкнені, $\nabla\cdot\mathbf{j} = 0$), тому закон (9.7) можна перевірити на досліді лише для замкнених контурів.

Відносність величини магнітного поля. Розглянемо один і той самий рухомий заряд з погляду двох різних спостерігачів: спостерігача K', що рухається *разом* із зарядом, і спостерігача K, відносно якого

заряд рухається зі швидкістю $\mathbf{v}$. Відносно спостерігача K' заряд нерухомий, тому магнітного поля навколо нього немає (є лише електричне поле $\mathbf{E}$). Відносно ж спостерігача K, за законом Біо–Савара–Лапласа для точкового заряду ($\mathbf{j}\,dV \to q\mathbf{v}$),

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{q\mathbf{v}\times r}{r^3} = \frac{\mathbf{v}}{c}\times\frac{qr}{r^3} = \frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{E}. \qquad (9.9)$$

! *Той самий заряд для одного спостерігача створює* лише *електричне поле, а для іншого —* і *електричне,* і *магнітне. Оскільки саме поле — фізично реальний об'єкт, а не розрахункова абстракція, цей результат означає, що поділ електромагнітного поля на «електричну» і «магнітну» складові* залежить від системи відліку*: електричне й магнітне поля — не два окремі поля, а дві грані одного й того самого* електромагнітного поля*. Строге і повне розкриття цього факту дає спеціальна теорія відносності, де* $\mathbf{E}$ *і* $\mathbf{B}$ *об'єднуються в єдиний тензор електромагнітного поля; формула* (9.9) *— це лише перше (нерелятивістське, $v \ll c$) наближення до точного релятивістського закону перетворення полів (див. розділ «Відносність електричного і магнітного полів»).*

Досліди Роуленда й Ейхенвальда. Чи створює магнітне поле сам рух зарядженого тіла, а не лише струм у провіднику? Від відповіді залежить справедливість формули (9.9). Її дали досліди Г. Роуленда (1876 р., у лабораторії Г. Гельмгольца в Берліні) та О. Ейхенвальда (1901–1903 рр.), в яких спостерігали магнітну дію *конвекційного струму*, тобто заряджених тіл, що рухаються: заряджений диск, який швидко обертається, діє на магнітну стрілку так само як і колові струми.

Оцінимо ефект. Нехай диск радіуса R має поверхневу густину заряду σ і обертається з кутовою швидкістю ω. Кільце радіуса r і завширшки dr дає струм $dI = \sigma\omega r\,dr$, а його поле в центрі, за законом Біо–Савара–Лапласа, дорівнює $dB = 2\pi\,dI/(cr)$. Звідси

$$B = \frac{2\pi\sigma\omega R}{c} = \frac{2Q\omega}{cR}.$$

Для реальних параметрів це поле надзвичайно мале (задача 9.5), тому потрібні були чутливі астатичні магнітометри й ретельне екранування від земного поля. Дослід стояв на межі чутливості приладів і не раз піддавався сумніву (на початку XX ст. В. Кремьє спершу не зміг його відтворити), проте Ейхенвальд суттєво підвищив точність і підтвердив, що магнітна дія конвекційного струму збігається з дією рівного йому струму провідності.

* **Поле нескінченного прямого провідника.**. Знайдемо магнітне поле на відстані r від нескінченно довгого прямолінійного провідника зі струмом I, виконавши пряме інтегрування закону Біо–Савара–Лапласа

вздовж провідника (інтеграл того самого типу, що й для поля нескінченної зарядженої нитки).

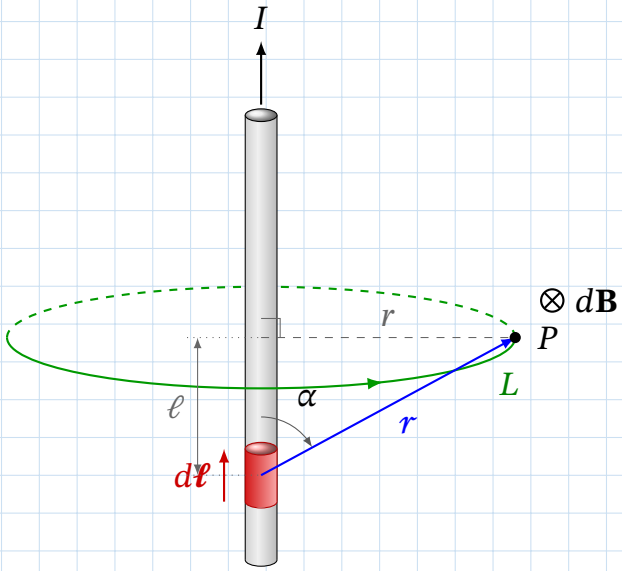


Рис. 9.7. До обчислення магнітного поля нескінченного провідника зі струмом.

Нехай точка спостереження перебуває на відстані r від провідника; параметризуємо елемент струму кутом α між напрямком струму (елементом $d\boldsymbol{\ell}$) і вектором r, проведеним від елемента струму до точки спостереження. Тоді $d\ell = r\,d\alpha/\sin^2\alpha$, $r = r/\sin\alpha$; кожен елемент дає внесок, напрямлений однаково (перпендикулярно до площини, що містить провідник і точку спостереження), тому поля просто додаються:

$$B = \int_0^{\pi} \frac{I\,d\ell\,\sin\alpha}{c\,r^2} = \frac{I}{cr}\int_0^{\pi} \sin\alpha\,d\alpha = \frac{I}{cr}\Big[-\cos\alpha\Big]_0^{\pi} = \frac{2I}{cr}.$$

Отже,

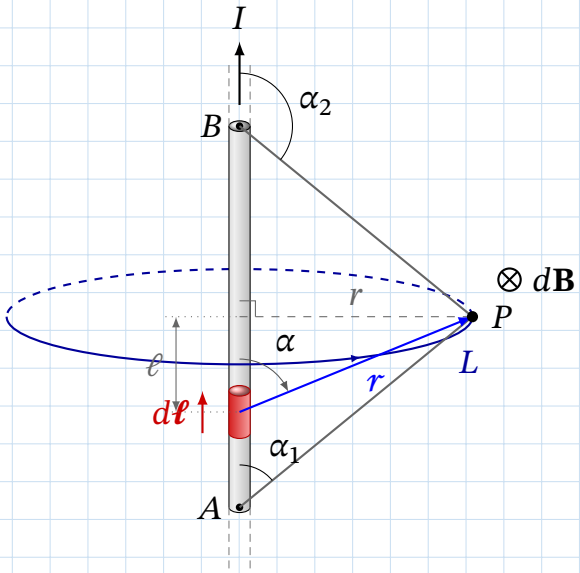
$$B = \frac{2I}{cr}. \qquad (9.10)$$

Поле відрізка провідника. Визначимо магнітне поле в точці P на відстані r від *скінченного* відрізка провідника зі струмом; положення точки визначається кутами α_1 і α_2 між напрямком струму (елементом $d\boldsymbol{\ell}$) і векторами r_1, r_2, проведеними з кінців відрізка до точки P. Обчислення повторює попередній приклад, тільки тепер межі інтегрування скінченні:

$$B = \frac{I}{cr}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha\,d\alpha = \frac{I}{cr}\Big[-\cos\alpha\Big]_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{I}{cr}\,(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\,.$$

*

При $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to \pi$ (провідник стає нескінченним в обидва боки) ця формула, як і мало бути, переходить у результат (9.10): $\cos 0 - \cos \pi = 1 - (-1) = 2$.



Досліди Ампера. Взаємодія струмів. У 1820–1826 рр. А. Ампер вивчав силову взаємодію струмів і сформулював закон взаємодії елементів струму, з якого випливає й вираз для сили, що діє на елемент струму в магнітному полі. Оскільки відокремлений елемент струму експериментально створити не можна, Ампер вивчав вплив паралельних провідників один на одного та поведінку замкнених контурів різної форми в магнітному полі. Він встановив дослідним шляхом, що паралельні провідники зі струмами, що течуть в *одному* напрямку, *притягуються*, а в *протилежних* напрямках — *відштовхуються*.

Скориставшись результатом (9.10) і законом Ампера (9.5), легко отримати кількісний вираз для сили взаємодії двох нескінченних паралельних провідників зі струмами I_1 і I_2 на відстані d один від одного, у розрахунку на одиницю довжини:

$$\frac{F}{\ell} = \frac{2I_1 I_2}{c^2 d}. \qquad (9.11)$$

Закон взаємодії паралельних струмів відіграв важливу роль у становленні систем електромагнітних одиниць. В електромагнітній системі СГС на його основі визначали одиницю струму, а в СІ до 2019 р. він лежав в основі означення ампера: два нескінченно довгі паралельні провідники у вакуумі, розташовані на відстані 1 м один від одного й по яких течуть однакові струми силою 1 А, взаємодіють із силою $2 \cdot 10^{-7}$ Н на метр довжини. Тепер ампер означено через зафіксоване значення елементарного заряду e.

9.5. Вектор-потенціал магнітного поля

Запишемо закон Біо–Савара–Лапласа (9.7)–(9.8) для довільного розподілу струму $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ (рис. 9.8), користуючись позначенням $r = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int\limits_{V'} \frac{1}{c} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\, dV' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

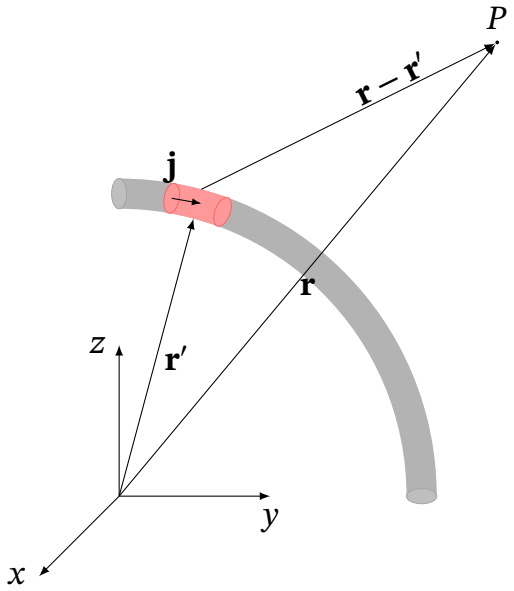


Рис. 9.8. Позначення для точки спостереження $\mathbf{r}$ і точки джерела $\mathbf{r}'$

Скористаємось тотожністю $\dfrac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla_{\mathbf{r}} \dfrac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ (тут ∇ діє на координати точки спостереження $\mathbf{r}$), а також тотожністю $\nabla \times (\varphi \mathbf{C}) = \varphi \nabla \times \mathbf{C} + [\nabla \varphi \times \mathbf{C}]$. Оскільки $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ не залежить від $\mathbf{r}$, $\nabla \times_{\mathbf{r}} \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$, і

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int\limits_{V'} \frac{1}{c} \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')\, dV' = \nabla \times \frac{1}{c} \int\limits_{V'} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\, dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Отже, магнітне поле можна подати у вигляді ротора деякого допоміжного векторного поля:

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},} \tag{9.12}$$

де $\mathbf{A}$ називають *вектор-потенціалом* магнітного поля:

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int\limits_{V'} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\, dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \sum_i \frac{q_i \mathbf{v}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}} \tag{9.13}$$

(друга формула — для системи точкових зарядів).

! *Вектор-потенціал* **A** *відіграє в магнітостатиці ту саму роль, що й скалярний потенціал* φ *в електростатиці: обидва — допоміжні величини, через які поле виражається простіше, ніж напряму. Принципова відмінність —* **A** *векторний, а* φ *скалярний, що відображає вихровий характер магнітного поля на противагу потенціальному характеру електростатичного.*

Калібрування вектор-потенціалу. Вектор-потенціал вводиться *неоднозначно*: два вектор-потенціали $\mathbf{A}$ і $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f(\mathbf{r})$ (де f — будь-яка скалярна функція) призводять до *одного й того самого* магнітного поля $\mathbf{B}$, оскільки $\nabla \times (\nabla f) \equiv 0$ для будь-якої функції f. Цю свободу вибору (*калібрувальну свободу*) можна використати, щоб накласти на $\mathbf{A}$ якесь додаткове зручне обмеження. Найзручніше в магнітостатиці — накласти умову

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = 0} \tag{9.14}$$

— її називають *кулонівським калібруванням*. Саме таке калібрування задовольняє вираз (9.13), отриманий напряму із закону Біо–Савара–Лапласа (у цьому неважко переконатись, узявши дивергенцію і скориставшись рівнянням неперервності для стаціонарного струму, $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$; струми вважаємо локалізованими в скінченній області).

9.6. Теореми магнітостатики

Теорема Гаусса для магнітного поля. Маючи на увазі тотожність $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \equiv 0$ (дивергенція будь-якого ротора тотожно дорівнює нулю) і формулу $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, відразу отримуємо *теорему Гаусса для магнітного поля в диференціальній формі*:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.} \tag{9.15}$$

Застосовуючи теорему Остроградського–Гаусса, отримуємо інтегральну форму:

$$\boxed{\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.}$$

! *Теорема Гаусса для* **B** *— це математичний вираз того самого факту, з якого ми почали розділ:* вільних магнітних зарядів немає *(у жодному досліді їх досі не виявлено). Силові лінії індукції магнітного поля не мають ні витоків, ні стоків — вони або замкнені самі на себе, або йдуть з нескінченності в нескінченність, але ніколи не починаються й не закінчуються в певній точці простору (на відміну від ліній* **E***, які починаються й закінчуються на електричних зарядах).*

Теорема про циркуляцію: диференціальна форма. Знайдемо ротор вектора **B**, скориставшись відомою тотожністю $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ і кулонівським калібруванням (9.14) ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$):

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A}. \tag{9.16}$$

З іншого боку, можна показати (за прямою аналогією з електростатикою), що кожна декартова компонента вектора **A** (9.13) задовольняє рівняння Пуассона з джерелом $\mathbf{j}/c$:

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho, \quad \varphi = \int\limits_{V'} \frac{\rho\, dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c}\int\limits_{V'} \frac{\mathbf{j}\, dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

! Однакові за формою рівняння за однакових граничних умов мають однакові розв'язки — *це загальний і дуже потужний принцип математичної фізики: рівняння Пуассона для кожної компоненти* **A** *математично* тотожне *рівнянню Пуассона для потенціалу* φ*, з тією лише заміною* $\rho \to j_x/c,\ j_y/c,\ j_z/c$*. Тому математичний апарат, розвинений для електростатики (методи розв'язання рівняння Пуассона тощо), переноситься на задачі магнітостатики — варто лише правильно «перекласти» одну задачу в термінах іншої і врахувати, що граничні умови для* **A** *на межах середовищ інші, ніж для* φ*.*

Підставляючи $\nabla^2 \mathbf{A} = -4\pi\mathbf{j}/c$ у (9.16), отримуємо *теорему про циркуляцію магнітного поля в диференціальній формі*:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}.} \tag{9.17}$$

Зауважимо, що цю теорему виведено для *стаціонарних* струмів ($\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$). Для змінних у часі полів її доведеться доповнити *струмом зміщення* (розділ 14).

Теорема про циркуляцію: інтегральна форма. Застосовуючи до (9.17) теорему Стокса, отримуємо інтегральну форму: циркуляція вектора **B** по довільному замкненому контуру L пропорційна повному струму, що протікає крізь будь-яку поверхню S, натягнуту на цей контур (рис. 9.9):

$$\oint_L \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c}\int_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}.$$

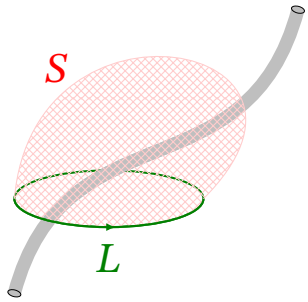


Рис. 9.9. Контур L і натягнута на нього поверхня S, крізь яку протікає струм

У випадку дискретних (лінійних) струмів це співвідношення набуває найпростішого вигляду: циркуляція **B** по контуру L пропорційна *алгебраїчній* сумі струмів, що охоплюються цим контуром (рис. 9.10):

$$\oint_L \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c}\sum_i I_i. \qquad (9.18)$$

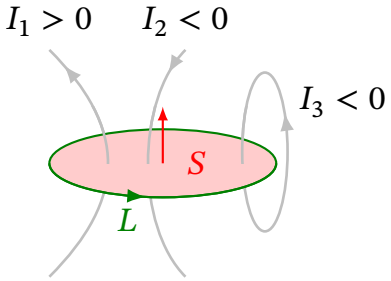


Рис. 9.10. Струм враховують зі знаком «плюс», якщо його напрям узгоджений із напрямом обходу контуру L за правилом правого гвинта, і зі знаком «мінус» — у протилежному випадку

! *Знак кожного струму I_i у сумі (9.18) визначають за правилом правого гвинта (правилом буравчика): якщо чотири пальці правої руки вказують напрям обходу контуру L, то великий палець вказує напрям, у якому струм слід вважати* додатним. *Провідник, що не проходить крізь поверхню, натягнуту на контур (або проходить крізь неї двічі, в обидва боки, як у підковоподібному контурі), не робить внеску в циркуляцію: його поле в точках контуру не дорівнює нулю, але циркуляція цього поля по контуру дорівнює нулю.*

Приклади на теорему про циркуляцію. Теорема про циркуляцію, так само як і теорема Гаусса в електростатиці, дає змогу без громіздкого інтегрування знайти поле в задачах з високою симетрією — достатньо обрати контур L так, щоб на ньому $B = \text{const}$, а $\mathbf{B} \parallel d\mathbf{r}$.

Поле нескінченного прямого провідника. Розглянемо рис. 9.7. Обираємо контур L — коло радіуса r у площині, перпендикулярній до провідника, з центром на провіднику. З міркувань симетрії $\mathbf{B}$ напрямлене по дотичній до цього кола й однакове за модулем усюди на ньому, тому $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = B \cdot 2\pi r$, а циркуляція охоплює струм I; звідси одразу $B = 2I/(cr)$ — той самий результат, що ми вже отримали прямим інтегруванням закону Біо–Савара–Лапласа, формула (9.10), але тепер — значно простіше.

Поле нескінченного соленоїда. Обираємо прямокутний контур L (A, B, C, D), одна сторона якого проходить усередині соленоїда паралельно його осі (AB), а протилежна — зовні (CD), де поле відсутнє (рис. 9.11); на поперечних сторонах внесок дорівнює нулю (усередині $\mathbf{B} \perp d\mathbf{r}$, зовні $\mathbf{B} = 0$). Циркуляція набирається лише з внутрішньої сторони довжиною ℓ, $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = B\ell$, а контур охоплює N витків із струмом I кожен, тобто повний струм NI:

$$B = \frac{4\pi}{c}\frac{N}{\ell} I = \frac{4\pi}{c} nI,$$

де $n = N/\ell$ — число витків на одиницю довжини соленоїда. Поле всередині нескінченного соленоїда *однорідне*, зовні — дорівнює нулю.

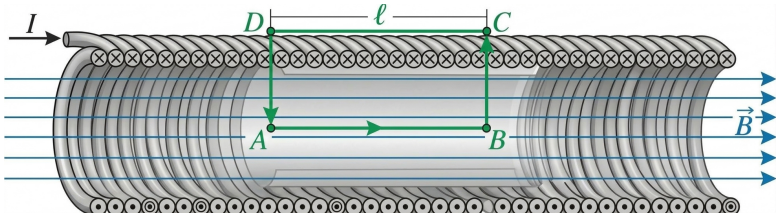


Рис. 9.11. До розрахунку магнітного поля нескінченно довгого соленоїда.

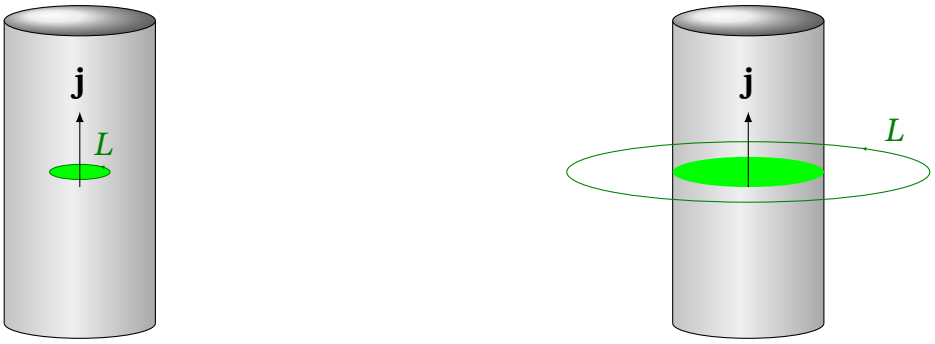
Поле всередині й поза нескінченним циліндричним провідником (рис. 9.12), по якому тече струм зі сталою по перерізу густиною j. Усередині (на відстані r від осі, $r < R$) контур L охоплює лише частину струму (рис. 9.12а), $I(r) = j\pi r^2$, тому

$$B \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} j\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{2\pi}{c} jr \qquad (r < R);$$

поле всередині зростає *лінійно* з відстанню від осі. Зовні ($r > R$) контур охоплює весь струм $I = j\pi R^2$ (рис. 9.12б), тому

$$B = \frac{2I}{cr} \qquad (r > R)$$

— поле спадає так само, як і поле нескінченно тонкого провідника з тим самим повним струмом I (порівняйте з формулою (9.10)).



(а) Всередині: $B = \frac{2\pi}{c} jr$ (б) Зовні: $B = \frac{2I}{cr}$

Рис. 9.12. Поле нескінченного циліндричного провідника зі струмом: усередині й поза провідником

Порівняння законів електро- та магнітостатики у вакуумі. Корисно звести головні результати цього й попередніх розділів у порівняльну таблицю: математична структура електро- і магнітостатики у вакуумі паралельна, хоча фізичний зміст — принципово різний (табл. 9.1).

! *Джерелом електростатичного поля є заряди — це поле* потенціальне *(має витоки й стоки, циркуляція завжди нульова). Джерелом магнітного поля є струми — це поле* вихрове *(не має витоків і стоків, зате має ненульову циркуляцію там, де є струм). Ця структурна відмінність — не випадковість, а наслідок відсутності магнітних зарядів: там, де в електростатиці стояв би заряд ρ, у магнітостатиці стоїть* нуль *(теорема Гаусса), а там, де в електростатиці стояв би нуль (потенціальність поля), у магнітостатиці стоїть струм* $\mathbf{j}$ *(вихровість поля).*

9.7. Магнітний момент

Означення. В електростатиці роль «нульового наближення» відігравав сумарний заряд $q = \sum_i q_i$, а дипольний момент (3.1) з'являвся вже як поправка — головна характеристика лише тоді, коли $q = 0$. У магнетизмі ситуація радикальніша: магнітних зарядів не існує взагалі, тож природного аналога величини q немає навіть формально. Найпростіша величина, яка могла б претендувати на цю роль — сумарна «кількість руху заряду» $\sum_i q_i \mathbf{v}_i$ — виявляється (як буде показано

Таблиця 9.1. Порівняння теорем електро- та магнітостатики у вакуумі

	Електростатика	**Магнітостатика**
Потенціал	$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ (потенціальне поле)	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ (вихрове поле)
Теорема Гаусса (диф.)	$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Теорема Гаусса (інт.)	$\oint\limits_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \int\limits_V \rho\, dV$	$\oint\limits_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$
Теорема про циркуляцію (диф.)	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$
Теорема про циркуляцію (інт.)	$\oint\limits_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$	$\oint\limits_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c}\int\limits_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$

нижче, при виведенні (9.26)–(9.29)) похідною за часом від електричного дипольного моменту системи (3.1) і тому в усередненому за часом полі тотожно зникає для будь-якого фінітного руху. Отже, для струмів немає навіть «нульового» члена розкладу — і першою характеристикою, що реально визначає створюване поле, одразу виявляється *магнітний момент*: міра того, як заряди рухаються один відносно одного, — цілком аналогічно до того, як для електричного поля системи з $q = 0$ головну роль відігравало взаємне *розташування* зарядів (3.1).

Означають його за прямою аналогією з моментом імпульсу $\mathbf{L} = \int_V \mathbf{r} \times \rho_m \mathbf{v}\, dV$ для розподіленої маси, що рухається: якщо момент імпульсу — це «момент кількості руху», то магнітний момент — «момент кількості струму»:

$$\mathbf{L} = \int\limits_V \mathbf{r} \times \rho_m \mathbf{v}\, dV, \qquad \mathbf{p}_m = \frac{1}{2c}\int\limits_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}\, dV,$$

де ρ_m — густина маси, а ρ — густина заряду.

Оскільки густина струму $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$, магнітний момент найпростіше записати через об'ємний елемент струму:

$$\boxed{\mathbf{p}_m = \frac{1}{2c}\int\limits_V \mathbf{r} \times \mathbf{j}\, dV.} \tag{9.19}$$

Але залежно від того, яким елементом струму (див. (9.4)) зручніше описати розподіл струму в конкретній задачі, ця сама величина набуває різного вигляду:

$$\mathbf{p}_m = \frac{I}{2c}\oint\limits_L \mathbf{r} \times d\boldsymbol{\ell} \qquad \text{(лінійний замкнений струм)}, \tag{9.20}$$

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2c}\sum_i q_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) \quad \text{(система дискретних точкових зарядів).} \quad (9.21)$$

Магнітний момент колового витка. Обчислимо за формулою (9.20) магнітний момент плоского колового витка радіуса R зі струмом I (рис. 9.13). Оскільки $\mathbf{r} \perp d\boldsymbol{\ell}$ у кожній точці кола, а $|\mathbf{r} \times d\boldsymbol{\ell}| = R\,d\ell$, і напрям цього добутку той самий у кожній точці (по нормалі $\mathbf{n}$ до площини витка), маємо

$$\boxed{\mathbf{p}_m = \frac{I}{2c}\oint_L \mathbf{r} \times d\boldsymbol{\ell} = \frac{1}{c} I\pi R^2 \mathbf{n} = \frac{1}{c} IS\mathbf{n},} \quad (9.22)$$

де $S = \pi R^2$ — площа витка.

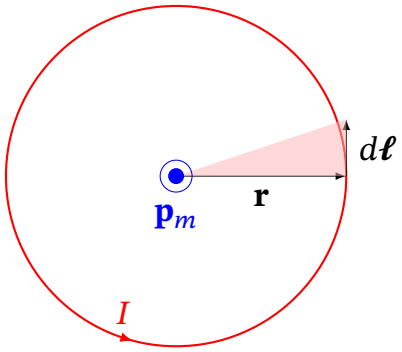


Рис. 9.13. До обчислення магнітного моменту колового витка зі струмом

! *Формула (9.22) застосовна до витка довільної форми: магнітний момент* будь-якого *плоского замкненого витка (не обов'язково колового) зі струмом I дорівнює $\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n}/c$, де S — площа, обмежена контуром витка, а напрям нормалі $\mathbf{n}$ пов'язаний із напрямом обходу контуру струмом за правилом правого гвинта.*

Гіромагнітне відношення. Відношення магнітного моменту зарядженого тіла до його моменту імпульсу називають *гіромагнітним відношенням*:

$$\boxed{\mathbf{p}_m = \gamma \mathbf{L}.}$$

Для будь-якого *класичного* тіла, у якого відношення заряду до маси однакове в кожному елементі об'єму, гіромагнітне відношення не залежить від закону руху й дорівнює

$$\gamma = \frac{Q}{2Mc}, \quad (9.23)$$

де Q і M — повний заряд і маса тіла. Справді, якщо $\rho/\rho_m = Q/M$ у кожній точці, а заряд рухається разом із масою, то

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2c}\int_V \mathbf{r} \times \rho\mathbf{v}\,dV = \frac{Q}{2Mc}\int_V \mathbf{r} \times \rho_m\mathbf{v}\,dV = \frac{Q}{2Mc}\mathbf{L}.$$

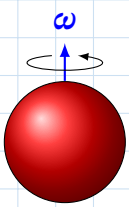
Класичний результат (9.23) чудово підтверджується для макроскопічних тіл, але *порушується* для електрона: його експериментальне гіромагнітне відношення виявляється майже рівно *вдвічі* більшим за класичне значення $-e/(2m_e c)$, тобто $\gamma_e \approx -e/(m_e c)$. Причина — власний (спіновий) момент імпульсу електрона не пов'язаний із класичним обертанням якогось зарядженого тіла навколо осі, а є суто квантовою величиною, для якої «аномальний» множник 2 (g-фактор $g = 2$) є наслідком релятивістського квантового рівняння Дірака, а мала поправка ($g = 2{,}0023\ldots$) — результатом квантової електродинаміки. Цікаво, що в досліді Ейнштейна–де Гааза (1915 р.) з феромагнетиком автори отримали саме *класичне* значення — те, якого очікували; відмінність удвічі показали досліди Барнетта та пізніші, точніші вимірювання того самого ефекту (магнетизм феромагнетика зумовлений спінами електронів). Це один із перших історичних натяків на те, що електрон не можна уявляти як маленьку заряджену кульку, що обертається.

Обчислення магнітного моменту через момент інерції. Зв'язок $\mathbf{p}_m = \gamma \mathbf{L}$ дає зручний практичний спосіб обчислювати магнітний момент тіл, що обертаються, не вдаючись щоразу до прямого інтегрування $\mathbf{p}_m = \frac{1}{2c}\int_V \mathbf{r}\times\mathbf{j}\,dV$: досить знайти момент імпульсу $\mathbf{L}$ тіла засобами звичайної механіки твердого тіла. Нагадаємо: для твердого тіла, що обертається з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}$ навколо нерухомої осі, момент імпульсу відносно цієї осі дорівнює $\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega}$, де J — момент інерції тіла відносно осі обертання. Якщо, як і при виведенні формули (9.23), відношення заряду до маси однакове в кожному елементі об'єму тіла, підставляючи $\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega}$ у $\mathbf{p}_m = \gamma\mathbf{L}$, отримуємо

$$\mathbf{p}_m = \frac{Q}{2Mc} J\boldsymbol{\omega}. \tag{9.24}$$

Отже, для однорідно (за відношенням Q/M) зарядженого тіла, що обертається, обчислення магнітного моменту зводиться до звичної задачі механіки — знаходження моменту інерції J відносно осі обертання за відомими формулами (куля, диск, обруч тощо), а не до нового інтегрування за струмами.

* **Магнітний момент зарядженої кулі, що обертається.**. Знайдемо магнітний момент однорідно зарядженої кулі масою M, зарядом Q і радіусом R, що обертається з кутовою швидкістю ω навколо свого діаметра.



Момент інерції однорідної кулі відносно осі, що проходить через центр, — відома з механіки величина $J = \frac{2}{5}MR^2$. За формулою (9.24)

$$p_m = \frac{Q}{2Mc}\cdot\frac{2}{5}MR^2\omega = \frac{QR^2\omega}{5c}.$$

* Той самий результат можна отримати прямим інтегруванням $\mathbf{p}_m = \frac{1}{2c}\int_V \mathbf{r}\times\mathbf{j}\,dV$ по об'єму кулі, але шлях через момент інерції — значно коротший.

Вектор-потенціал на далеких відстанях. Поле магнітного диполя. Знайдемо вектор-потенціал системи струмів, зосереджених у малій області простору, на великій відстані від неї ($r \gg r_i$, де r_i — характерний розмір системи). Розкладаючи $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|$ у формулі (9.13) в ряд за малим параметром r_i/r і усереднюючи за часом (для стаціонарного, тобто періодичного або усталеного, руху усереднена похідна будь-якої обмеженої величини дорівнює нулю), після певних (дещо громіздких, але прямолінійних) векторних перетворень отримуємо головний, дипольний член розкладу.

Нехай вектор-потенціал системи точкових зарядів q_i визначається формулою (9.13):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\sum_i \frac{q_i\mathbf{v}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}.$$

Оскільки заряди рухаються, ця формула дає *миттєвий* вектор-потенціал, який явно залежить від часу через $\mathbf{r}_i(t)$ і $\mathbf{v}_i(t)$. Нас, однак, цікавить не миттєве, а усереднене за часом поле системи — те, що спостерігається макроскопічно, коли рух зарядів фінітний (обмежений у просторі) і періодичний або усталений (наприклад, електрони в атомі чи струм у витку). Сенс усереднення в тому, що для будь-якої *обмеженої* (фінітної) величини $Q(t)$ її похідна за часом усереднюється до нуля:

$$\overline{\frac{dQ}{dt}} \equiv \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dQ}{dt}\,dt = \frac{Q(T)-Q(0)}{T} \to 0, \tag{9.25}$$

оскільки чисельник обмежений, а знаменник T зростає (або, для точно періодичного руху, $Q(T) = Q(0)$ й чисельник дорівнює нулю точно). Саме ця властивість і дозволяє прибрати нижче доданки, які самі є повними похідними за часом.

Розкладаючи знаменник за малим параметром r_i/r,

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i}{r^3},$$

отримуємо

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{cr}\sum_i q_i\mathbf{v}_i + \frac{1}{cr^3}\sum_i q_i\mathbf{v}_i(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i). \tag{9.26}$$

Перший доданок є повною похідною за часом:

$$\sum_i q_i\mathbf{v}_i = \frac{d}{dt}\sum_i q_i\mathbf{r}_i,$$

причому $\sum_i q_i \mathbf{r}_i$ — це електричний дипольний момент системи (3.1), обмежена величина. Тож, згідно з (9.25), цей член зникає після усереднення за часом — саме той факт, який був анонсований на початку цього параграфа: аналога електричного заряду для струмів не існує навіть формально, оскільки єдиний природний кандидат на цю роль тотожно зводиться до похідної дипольного моменту.

Для другого доданка позначимо $S \equiv \sum_i q_i \mathbf{v}_i (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i)$ і розглянемо допоміжну повну похідну

$$\frac{d}{dt}\sum_i q_i \mathbf{r}_i (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i) + \sum_i q_i \mathbf{r}_i (\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}_i) = S + \sum_i q_i \mathbf{r}_i (\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}_i),$$

середнє від якої також дорівнює нулю (сума $\sum_i q_i \mathbf{r}_i(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i)$ обмежена), отже

$$\sum_i q_i \mathbf{r}_i (\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}_i) = -S. \tag{9.27}$$

Скориставшись тотожністю подвійного векторного добутку $\mathbf{r}\times(\mathbf{v}_i\times\mathbf{r}_i) = \mathbf{v}_i(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i) - \mathbf{r}_i(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}_i)$, підсумовуємо з вагами q_i і враховуємо (9.27):

$$\sum_i q_i\bigl[\mathbf{r}\times(\mathbf{v}_i\times\mathbf{r}_i)\bigr] = S - (-S) = 2S \Longrightarrow$$

$$S = \frac{1}{2}\,\mathbf{r}\times\sum_i q_i(\mathbf{v}_i\times\mathbf{r}_i) = -\mathbf{r}\times\left(\frac{1}{2}\sum_i q_i(\mathbf{r}_i\times\mathbf{v}_i)\right). \tag{9.28}$$

Сума в дужках тут — це магнітний момент системи точкових зарядів (9.21), тому $S = -c\,(\mathbf{r}\times\mathbf{p}_m) = c\,(\mathbf{p}_m\times\mathbf{r})$, і підстановка в (9.26) одразу дає:

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}_m\times\mathbf{r}}{r^3}.} \tag{9.29}$$

Магнітне поле далекої системи струмів знаходимо за формулою $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$, підставляючи (9.29). Скористаємось тотожністю ротора векторного добутку

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{w}) = \mathbf{a}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{w}) - \mathbf{w}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}) + (\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{w},$$

застосованою до $\mathbf{a} = \mathbf{p}_m = \text{const}$ і $\mathbf{w} = \mathbf{r}/r^3$. Оскільки $\mathbf{p}_m$ стала, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{p}_m = 0$ і $(\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{p}_m = 0$, тож

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = \mathbf{p}_m\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) - (\mathbf{p}_m\cdot\nabla)\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Перший доданок зникає, бо $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{r}/r^3) = 0$ при $r\neq 0$. У другому обчислюємо похідну по компонентах:

$$(\mathbf{p}_m\cdot\nabla)\frac{r_l}{r^3} = p_{m,k}\partial_k\left(\frac{r_l}{r^3}\right) = p_{m,k}\left(\frac{\delta_{kl}}{r^3} - \frac{3r_l r_k}{r^5}\right) = \frac{p_{m,l}}{r^3} - \frac{3r_l(\mathbf{p}_m\cdot\mathbf{r})}{r^5},$$

тобто

$$(\mathbf{p}_m \cdot \nabla)\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}.$$

Підставляючи назад, отримуємо шуканий результат:

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{3(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3}.} \qquad (9.30)$$

! *Формула* (9.30) за виглядом повністю збігається *з формулою для поля точкового електричного диполя,* $\mathbf{E} = 3(\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}/r^5 - \mathbf{p}_e/r^3$ *(формула* (3.4) *розділу 3): достатньо замінити* $\mathbf{p}_e \to \mathbf{p}_m$ *і* $\mathbf{E} \to \mathbf{B}$. *Це означає, що на достатньо великій відстані поле* будь-якої *системи струмів (колового витка, стрижневого магніту, навіть атома) виглядає так само, як поле точкового* магнітного диполя *— незалежно від конкретного мікроскопічного розподілу цих струмів.*

Магнітний диполь і ефективні магнітні заряди. Оскільки формально поле магнітного диполя збігається з полем електричного, точковий магнітний момент можна (лише *формально*, поза областю, зайнятою реальними струмами) розглядати як диполь, складений з *ефективних магнітних зарядів* — північного (N) і південного (S), рис. 9.14:

$$\mathbf{p}_m = q_m \boldsymbol{\ell},$$

де q_m — величина ефективного магнітного заряду, а $\boldsymbol{\ell}$ — «плече» диполя.

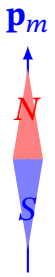


Рис. 9.14. Формальна модель магнітного диполя як пари ефективних магнітних зарядів N і S

! *Ця модель — зручна* розрахункова фікція, *а не фізична реальність: реальних магнітних зарядів немає (теорема Гаусса для* **B**, *формула* (9.15)*). Модель ефективних зарядів коректно відтворює поле* зовні *області, зайнятої струмами, але дає хибну картину всередині цієї області: лінії* **B** *реального витка зі струмом —* замкнені *і всередині витка напрямлені* в той самий бік, *що й зовні на осі; натомість лінії поля формальної моделі «стрижня» з ефективними зарядами на кінцях —* розімкнені *і всередині йдуть від* N *до* S, *тобто* назустріч *справжньому полю витка.*

Таблиця 9.2. Порівняння електричного і магнітного точкових диполів

	Електричний диполь	**Магнітний диполь**
Потенціал	$\varphi = \dfrac{\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r}}{r^3}$	$\mathbf{A} = \dfrac{\mathbf{p}_m \times \mathbf{r}}{r^3}$
Поле	$\mathbf{E} = \dfrac{3(\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \dfrac{\mathbf{p}_e}{r^3}$	$\mathbf{B} = \dfrac{3(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \dfrac{\mathbf{p}_m}{r^3}$

9.8. Потенціальна енергія диполя та сила, що діє на диполь у магнітному полі

Момент сили, що діє на контур у магнітному полі. Розглянемо плоский виток зі струмом I в *однорідному* зовнішньому полі $\mathbf{B}$ (рис. 9.15). За означенням моменту сили і формулою для сили Ампера на елементі витка (9.5),

$$\mathbf{M} = \frac{1}{c}\oint_L \mathbf{r} \times (I\, d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B})\,.$$

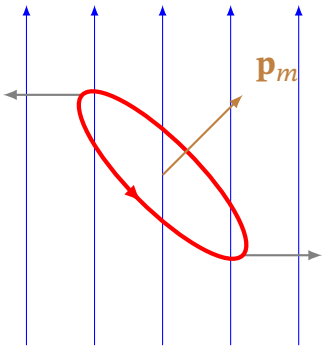


Рис. 9.15. Виток зі струмом, довільно орієнтований в однорідному полі

Розкриваємо подвійний векторний добуток за формулою «БАЦ мінус ЦАБ»:

$$\mathbf{r} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = d\mathbf{r}\,(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}\,(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}),$$

звідки

$$\mathbf{M} = \frac{I}{c}\oint_L d\mathbf{r}\,(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) - \frac{I}{c}\mathbf{B}\oint_L (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}). \tag{9.31}$$

Другий доданок зникає одразу: підінтегральний вираз $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = d(r^2/2)$ — повний диференціал, а інтеграл повного диференціала по замкненому контуру дорівнює нулю:

$$\oint_L \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \oint_L d\left(\frac{r^2}{2}\right) = 0. \tag{9.32}$$

Залишається обчислити перший доданок, $\oint_L d\mathbf{r}\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{B})$. Розкладемо діадний вираз $dr_i\,r_j$ на симетричну й антисиметричну за індексами i, j частини:

$$dr_i\,r_j = \underbrace{\tfrac{1}{2}(dr_i\,r_j + r_i\,dr_j)}_{\text{симетрична частина}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(dr_i\,r_j - r_i\,dr_j)}_{\text{антисиметрична частина}}\,.$$

Симетрична частина є повним диференціалом добутку координат, $\frac{1}{2}(dr_i r_j + r_i dr_j) = \frac{1}{2}\,d(r_i r_j)$, і тому інтегрується в нуль по замкненому контуру — так само, як і в (9.32):

$$\oint_L \frac{1}{2}\,d(r_i r_j)\,B_j = 0.$$

Антисиметрична частина виражається через векторний добуток: використовуючи тотожність $r_i\,dr_j - r_j\,dr_i = \varepsilon_{ijk}(\mathbf{r}\times d\mathbf{r})_k$, отримуємо

$$\tfrac{1}{2}(dr_i r_j - r_i dr_j)\,B_j = \tfrac{1}{2}\big[(\mathbf{r}\times d\mathbf{r})\times\mathbf{B}\big]_i,$$

тож

$$\oint_L d\mathbf{r}\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}) = \frac{1}{2}\left(\oint_L \mathbf{r}\times d\mathbf{r}\right)\times\mathbf{B}. \tag{9.33}$$

Підставляючи (9.32) і (9.33) у (9.31), отримуємо:

$$\boxed{\mathbf{M} = \left(\frac{I}{2c}\oint_L \mathbf{r}\times d\mathbf{r}\right)\times\mathbf{B} = \mathbf{p}_m\times\mathbf{B},} \tag{9.34}$$

— той самий результат, що й був покладений в означення вектора $\mathbf{B}$ на початку розділу (формула (9.1)), але тепер уже *виведений*, а не постульований, для довільного замкненого витка. Тут $\mathbf{p}_m = \frac{I}{2c}\oint_L \mathbf{r}\times d\mathbf{r} = \frac{I}{c}\mathbf{S}$, де $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\oint_L \mathbf{r}\times d\mathbf{r}$ — векторна площа контуру: це саме та формула магнітного моменту лінійного струму (9.20), яку ми означили ще на початку цього розділу (тут просто $d\mathbf{r}$ відіграє роль елемента контуру $d\boldsymbol{\ell}$).

Потенціальна енергія диполя в магнітному полі. Момент сил $\mathbf{M} = \mathbf{p}_m\times\mathbf{B}$ прагне зорієнтувати магнітний момент витка вздовж поля. Якщо кут θ між $\mathbf{p}_m$ і $\mathbf{B}$ збільшується на $d\theta$, момент сил виконує роботу $\delta A = -p_m B\sin\theta\,d\theta$, що дорівнює зменшенню потенціальної енергії, $\delta A = -dU$. Звідси $U = -p_m B\cos\theta$ (з точністю до сталої), тобто

$$\boxed{U = -\mathbf{p}_m\cdot\mathbf{B}.} \tag{9.35}$$

Мінімум цієї енергії досягається при $\mathbf{p}_m \uparrow\uparrow \mathbf{B}$ — саме тому магнітний момент, якщо йому не заважають інші сили, прагне орієнтуватись вздовж зовнішнього поля.

! *Формула* (9.35)*, разом із твердженням про нульову роботу магнітного поля* (9.6)*, породжує позірний парадокс: якщо магнітний момент витка — це реальний виток зі струмом, а магнітне поле, орієнтуючи цей виток, змінює його потенціальну енергію, — то* за рахунок чого *відбувається ця зміна енергії, якщо магнітне поле принципово не може виконувати роботу? Відповідь — зміна енергії витка при його повороті відбувається* за рахунок джерела струму*, яке підтримує в контурі струм I незмінним, долаючи ЕРС індукції, що виникає під час повороту витка. Саме на цьому принципі — перетворенні енергії джерела в механічну роботу обертання рамки за участі магнітного поля — і ґрунтується принцип роботи* електричного двигуна*: ротор (рамка зі струмом), поміщений між полюсами магніту, під дією моменту сил $\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}$ намагається зорієнтуватися вздовж поля, а комутатор своєчасно змінює напрям струму в обмотці, щоб забезпечити неперервне обертання в одному напрямку.*

Сила, що діє на диполь у неоднорідному магнітному полі. У *однорідному* полі, як бачимо з формули (9.34), на диполь діє лише момент сил, що обертає його, але не діє сумарна сила (сили Ампера, що діють на протилежні елементи витка, компенсують одна одну). У *неоднорідному* полі ця компенсація неповна, і на диполь діє сумарна сила (рис. 9.16):

$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} U = \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{B}).$$

Скориставшись векторною тотожністю $\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{b}\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{b}+(\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{a}+(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{b}$ і врахувавши, що магнітний момент $\mathbf{p}_m$ — стала величина (тому $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{p}_m \equiv 0$ і $(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{p}_m = 0$), а в області, де перебуває диполь, немає струмів провідності ($\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = 0$, оскільки $\mathbf{j} = 0$), отримуємо остаточно

$$\boxed{\mathbf{F} = (\mathbf{p}_m \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}.} \qquad (9.36)$$

! *Формула* (9.36) *означає, що магнітний диполь, зорієнтований уздовж поля, завжди* втягується *в область, де поле* сильніше *(там, де B зростає), — точнісінько так само, як електричний диполь у неоднорідному електричному полі. Саме на цьому принципі ґрунтується, наприклад, дія магніту на феромагнітні матеріали (цвяхи, залізні ошурки тощо): зовнішнє поле магніту наводить у них магнітний момент, зорієнтований уздовж поля, і цей момент після цього втягується в область найсильнішого поля —*

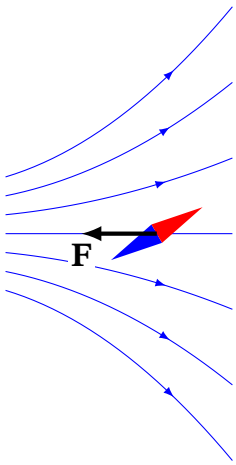


Рис. 9.16. Магнітний диполь у неоднорідному полі втягується в область сильнішого поля

! *впритул до полюса магніту.*

Підсумки

Магнітне поле створюється *рухом* зарядів — електричними струмами — і діє лише на *рухомі* заряди. Це підтверджують і досліди Ерстеда, і досліди Роуленда та Ейхенвальда: заряджене тіло, що рухається, створює поле так само, як провідник зі струмом. Водночас поділ електромагнітного поля на електричну й магнітну складові залежить від системи відліку: заряд, що для одного спостерігача створює лише електричне поле, для іншого створює й магнітне. Тому $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$ — це дві грані єдиного електромагнітного поля; повністю цей факт розкриває спеціальна теорія відносності (розділ 15).

Магнітних зарядів у природі не виявлено, тому вектор $\mathbf{B}$ вводять через момент сил, що діє на магнітний диполь. Дію поля на заряди й струми описують силою Лоренца та силою Ампера. Принципово важливо, що магнітна складова сили Лоренца завжди перпендикулярна до швидкості й тому не виконує роботи: магнітне поле змінює напрям швидкості частинки, але не її кінетичну енергію.

Поле заданого розподілу струмів можна знайти двома шляхами: інтегруванням закону Біо–Савара–Лапласа з урахуванням принципу суперпозиції (зручно також користуватися вектор-потенціалом $\mathbf{A}$) або, для симетричних розподілів (прямий провідник, соленоїд, циліндр), за теоремою про циркуляцію. Диференціальні теореми $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ і $\nabla\times\mathbf{B}=4\pi\mathbf{j}/c$ визначають структуру магнітостатики: силові лінії поля замкнені, а саме поле є вихровим і породжується струмами. Порівняння з електростатикою (табл. 9.1) показує, що ця відмінність — прямий наслідок відсутності магнітних зарядів.

На великій відстані від системи струмів поле визначається *магнітним моментом*: аналога електричного заряду для струмів не існує, тому дипольний член розкладу є головним. За виглядом поле магнітного диполя збігається з полем електричного. У зовнішньому

полі на диполь діють момент сил, що прагне орієнтувати його вздовж поля, і, якщо поле неоднорідне, сила, що втягує диполь в область сильнішого поля. Цим пояснюють орієнтацію магнітної стрілки, дію магніту на залізні предмети й роботу електродвигуна.

Позірний парадокс — поле не виконує роботи, а рамка в двигуні й феромагнетик поблизу магніту рухаються — розв'язується так: механічна робота виконується за рахунок енергії джерела струму (або зовнішньої сили), а магнітне поле лише «передає» цю енергію рамці, визначаючи напрям і величину сил, що діють на струми. (Магнітне поле, як і електричне, саме має енергію — про це в розділі 13.) У наступних розділах ми вивчимо магнітне поле в речовині (розділ 10), явище електромагнітної індукції, де змінне магнітне поле породжує електричне (розділ 12), і зведемо всі закони в систему рівнянь Максвелла (розділ 14).

Задачі

? **9.1.** *Поле колового витка.* За законом Біо–Савара–Лапласа знайдіть індукцію магнітного поля на осі колового витка радіуса R зі струмом I на відстані z від його центру. Чому дорівнює поле в центрі витка? Покажіть, що при $z \gg R$ результат збігається з полем точкового магнітного диполя (9.30) з моментом $p_m = \pi R^2 I/c$.

? **9.2.** *Циліндр із порожниною.* Нескінченний циліндричний провідник радіуса R зі сталою густиною струму j (уздовж осі) має циліндричну порожнину, вісь якої паралельна осі провідника й зсунута відносно неї на відстань d (порожнина повністю лежить усередині провідника). Знайдіть магнітне поле в порожнині. Підказка: подайте порожнину як накладання струмів $+\mathbf{j}$ і $-\mathbf{j}$.

? **9.3.** *Магнітний момент і момент імпульсу.* (а) Тонкий диск радіуса R і маси M рівномірно заряджений по поверхні зарядом Q і обертається з кутовою швидкістю ω навколо осі, перпендикулярної до диска й проведеної через його центр. Знайдіть магнітний момент p_m, розбивши диск на кільця, і перевірте результат за формулою (9.24). (б) Електрон рухається по коловій орбіті з моментом імпульсу $L = \hbar$. Знайдіть його магнітний момент і взаємну орієнтацію $\mathbf{p}_m$ та $\mathbf{L}$ ($\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-27}$ ерг·с).

9.4. *Магнітний диполь біля струму.* Малий виток з магнітним моментом $\mathbf{p}_m$ розташований на відстані r від нескінченного прямого провідника зі струмом I; вектор $\mathbf{p}_m$ напрямлений уздовж поля $\mathbf{B}$ провідника (по дотичній до кола навколо нього). Знайдіть силу, що діє на виток. Що зміниться, якщо $\mathbf{p}_m$ напрямити протилежно? Перевірте результат, розглянувши виток як квадрат зі стороною $a \ll r$ і струмом I', у площині якого лежить провідник, і підрахувавши сили Ампера на його сторони, паралельні провіднику.

9.5. *Дослід Роуленда–Ейхенвальда.* Тонкий диск радіуса $R = 10$ см рівномірно заряджений по поверхні зарядом $Q = 3 \cdot 10^3$ СГСЕ (≈ 1 мкКл) і обертається з частотою 100 об/с. Знайдіть магнітне поле в центрі диска та порівняйте його з полем Землі ($\approx 0{,}5$ Гс). Як зміниться поле при зміні напряму обертання?

Контрольні питання

1. У чому полягав дослід Ерстеда 1820 р.? Чому це відкриття стало відправною точкою об'єднання електрики й магнетизму в єдину теорію?
2. Чим магнітне поле принципово відрізняється від електричного щодо дії на нерухомі заряди? Чому підхід до означення поля через силу на пробний заряд, застосовний для $\mathbf{E}$, не працює безпосередньо для магнітного поля?
3. Виведіть означення вектора магнітної індукції $\mathbf{B}$ через момент сил, що діє на магнітний диполь, $\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}$. Чому $\mathbf{B}$ називають індукцією, а не напруженістю, — у чому історична причина цієї термінологічної асиметрії?
4. Запишіть магнітну складову сили Лоренца та повну силу Лоренца. Виведіть з неї силу Ампера для елемента об'ємного $\mathbf{j}\,dV$ та лінійного $I\,d\boldsymbol{\ell}$ струму.
5. Доведіть, що магнітна складова сили Лоренца не виконує роботи над зарядженою частинкою, $\delta A = 0$. Як цей факт узгоджується з тим, що електродвигун виконує реальну механічну роботу внаслідок дії магнітного поля на рамку зі струмом?
6. Сформулюйте закон Біо–Савара–Лапласа для елемента струму. У чому полягає аналогія й відмінність цього закону від закону Кулона?
7. Покажіть, що той самий рухомий заряд для одного спостерігача створює лише електричне поле, а для іншого — і електричне, і магнітне. Що це означає для розуміння $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$ як граней єдиного

електромагнітного поля?

8. Що показали досліди Роуленда й Ейхенвальда? Виведіть поле в центрі зарядженого диска, що обертається, і поясніть, чому воно таке мале.

9. Виведіть за законом Біо–Савара–Лапласа поле нескінченного прямого провідника $B = 2I/(cr)$ та поле скінченного відрізка провідника через кути α_1, α_2.

10. Що встановили досліди Ампера про взаємодію паралельних провідників зі струмом? Виведіть формулу сили взаємодії на одиницю довжини $F/\ell = 2I_1I_2/(c^2d)$ і поясніть, як вона історично визначала одиницю ампера.

11. Виведіть вираз для вектор-потенціалу $\mathbf{A}$ магнітного поля з закону Біо–Савара–Лапласа, показавши, що $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$. У чому калібрувальна свобода вибору $\mathbf{A}$ і що таке кулонівське калібрування $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$?

12. Виведіть теорему Гаусса для магнітного поля $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$ з тотожності $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \equiv 0$. Що це означає для силових ліній $\mathbf{B}$ порівняно з лініями $\mathbf{E}$?

13. Виведіть теорему про циркуляцію магнітного поля $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = (4\pi/c)\mathbf{j}$ в диференціальній та $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = (4\pi/c) \sum I_i$ в інтегральній формах. Як визначають знак струму за правилом правого гвинта?

14. Застосовуючи теорему про циркуляцію, знайдіть поле нескінченного прямого провідника, поле нескінченного соленоїда та поле всередині й поза нескінченним циліндричним провідником зі струмом.

15. Порівняйте математичну структуру електро- і магнітостатики у вакуумі (потенціал, теорема Гаусса, теорема про циркуляцію). Чому магнітне поле вихрове, а електростатичне — потенціальне, і як це пов’язано з відсутністю магнітних зарядів?

16. Дайте означення магнітного моменту системи струмів через об’ємну та лінійну густину струму. Виведіть магнітний момент плоского колового витка $\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n}/c$.

17. Що таке гіромагнітне відношення? Виведіть його класичне значення $\gamma = Q/(2Mc)$ і поясніть, чому воно вдвічі порушується для електрона (аномальний g-фактор).

18. Виведіть вираз для вектор-потенціалу та поля далекого магнітного диполя $\mathbf{B} = 3(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}/r^5 - \mathbf{p}_m/r^3$. Чому на великій відстані поле будь-якої системи струмів виглядає як поле точкового магнітного диполя?

19. У чому полягає модель ефективних магнітних зарядів для опису поля диполя? Чому вона є лише зручною розрахунковою фікцією,

коректною тільки поза областю реальних струмів?

20 Виведіть момент сили $\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}$, що діє на плоский виток зі струмом у однорідному полі, через силу Ампера на елементах контуру.

21 Виведіть потенціальну енергію магнітного диполя в полі $U = -\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{B}$. Внаслідок чого насправді відбувається зміна цієї енергії, якщо магнітне поле принципово не виконує роботи?

22 Виведіть формулу сили, що діє на магнітний диполь у неоднорідному полі, $\mathbf{F} = (\mathbf{p}_m \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}$. Чому диполь, зорієнтований уздовж поля, завжди втягується в область сильнішого поля, і як це пояснює притягання феромагнітних матеріалів до магніту?

10 Магнітне поле в речовині

Сама Земля — великий магніт.

Вільям Гільберт, «Про магніт» (De Magnete, 1600)

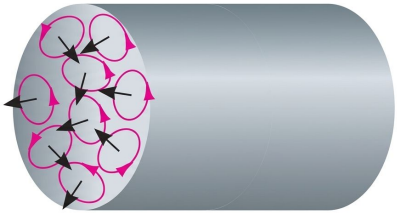
Гіпотеза Ампера

Ми вже знаємо, що магнітне поле діє на рухомі заряджені частинки та на рамки зі струмом. Але *чому воно діє також і на шматок звичайного заліза* — скажімо, на цвях, який сам по собі не є магнітом? Відповідь на це запитання дав ще А. Ампер: він припустив, що *всередині магніту теж течуть струми*.

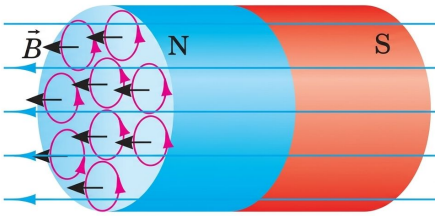
Якщо взяти магнітну стрілку чи магніт у руки, жодних струмів ми, звісно, не відчуваємо: отже, ці струми циркулюють *усередині* речовини і ніколи не виходять назовні. Що це за струми, Ампер, звісно, не знав — адже про будову атома тоді не було відомо нічого. Сучасній науці вже відомо, що звичайна речовина складається з атомів: усередині атомів є позитивно заряджені ядра, навколо яких рухаються негативно заряджені електрони, причому самі електрони, до того ж — маленькі магнітні «стрілочки» (мають власний магнітний момент, спін). Отже, рух електронів усередині атомів — це і є ті самі *струми*, про існування яких здогадався Ампер; магнітне поле діє на ці струми, а отже — і на речовину загалом (рис. 10.1).

10.1. Основні поняття

Мікрополе та середнє поле. У речовині магнітне поле формується як зовнішнім полем, так і струмами, що циркулюють у самій речовині. На мікрорівні (тобто на відстанях порядку розміру атома й менше) це поле різко змінюється в часі й просторі — таке поле називають *мікрополем* $\mathbf{B}_{\text{micro}}$. Однак якщо провести усереднення за *фізично нескінченно малим* об'ємом ΔV (малим порівняно з масштабом, на



(а) Ненамагнічена речовина (хаотичний розподіл молекулярних струмів).



(б) Намагнічена речовина (впорядкований розподіл молекулярних струмів).

Рис. 10.1. Гіпотеза Ампера: магнетизм речовини зумовлений мікроскопічними (молекулярними) струмами всередині неї: а — ненамагнічена речовина; б — намагнічена речовина.

якому поле помітно змінюється макроскопічно, але великим порівняно з розмірами й відстанями між окремими атомами — тобто таким, що вміщує величезну кількість атомів), отримаємо *середнє поле*:

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int\limits_{\Delta V} \mathbf{B}_{\text{micro}}\, dV.$$

Середнє поле змінюється значно повільніше за мікрополе, оскільки усереднення за ΔV згладжує швидкі просторові й часові коливання мікрополя. Надалі, як і раніше з полем **E** в діелектрику, під **B** ми завжди розумітимемо саме це *середнє поле*.

! *Ця конструкція — точна аналогія переходу від мікрополя до макроскопічного поля* **E**, *яку ми обговорювали в розділі про поле в діелектриках (розділ 5): у макроскопічній електродинаміці ми принципово ніколи не працюємо з полем окремого атома, а лише з полем, усередненим за фізично нескінченно малим об'ємом. Цей самий прийом — спільна методологічна основа всієї макроскопічної теорії поля в речовині, як електричній, так і магнітній.*

Струми провідності та молекулярні струми. Усі струми, створювані рухомими зарядами в речовині, поділяють на дві принципово різні групи:

1. *Струми провідності* — пов'язані з переміщенням *вільних* носіїв заряду (тих самих, що ми вивчали в розділ 7); це *макроскопічні* струми, зовнішні щодо самої речовини й підтримувані стороннім джерелом (ЕРС).
2. *Молекулярні струми* — зумовлені орбітальним рухом електронів в атомах (молекулах) та їхнім спіном (власним моментом імпульсу), а також, значно меншою мірою, магнітними моментами ядер. Це *внутрішні*, властиві самій речовині струми.

10.2. Намагнічування

Вектор намагніченості. *Вектором намагніченості* (*намагніченістю*) називають величину, що характеризує сумарний магнітний момент одиниці об'єму речовини:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} \mathbf{p}_i, \qquad \mathbf{p}_i \text{ — магнітний момент } i\text{-ї частинки}, \tag{10.1}$$

де ΔV — той самий *фізично нескінченно малий* об'єм. Намагніченість називають *однорідною*, якщо вектор $\mathbf{J}$ не залежить від точки в речовині; якщо $\mathbf{J} \neq \text{const}$ — *неоднорідною*.

! *Вектор намагніченості* $\mathbf{J}$ *— точний магнітний аналог вектора поляризації* $\mathbf{P}$ *в діелектриках (розділ 5): там* $\mathbf{P}$ *— густина електричних дипольних моментів, тут* $\mathbf{J}$ *— густина магнітних дипольних моментів. Уся подальша логіка цього розділу (виведення зв'язаних струмів, введення допоміжного вектора* $\mathbf{H}$*, граничні умови) дослівно повторює логіку розділу про діелектрики — з тією різницею, що диполі там* електричні*, а тут* — магнітні.

Основна задача теорії магнітостатики в речовині. Пряме обчислення поля в намагніченій речовині вимагало б підсумовування магнітних полів від колосальної кількості (порядку числа Авогадро) молекулярних струмів — завдання абсолютно нездійсненне практично. Основна ідея теорії магнітостатики в речовині — *вилучити* молекулярні струми з рівнянь, замінивши їх іншою, макроскопічно *вимірюваною* величиною — вектором намагніченості $\mathbf{J}$. Це, за аналогією з тим, що ми вже робили для зв'язаних зарядів у діелектриках, істотно спрощує розрахунок полів у магнетиках.

Зв'язок намагніченості з молекулярними струмами. Виділимо в намагніченій речовині косокутний циліндр таких малих розмірів, що намагніченість $\mathbf{J}$ у ньому можна вважати однорідною, і орієнтуємо його так, щоб $\mathbf{J}$ була напрямлена по нормалі $\mathbf{n}$ до торців (рис. 10.2); тобто молекулярні струми течуть у площинах, паралельних торцям. У товщі циліндра кільцеві молекулярні струми сусідніх атомів течуть у протилежних напрямках і взаємно компенсуються — в усіх точках, *окрім* точок бічної поверхні (рис. 10.3, вигляд торця): там компенсація неповна, і залишається нескомпенсований поверхневий струм, що тече бічною поверхнею циліндра.

Магнітний момент такого циліндрика, з одного боку, дорівнює $\mathbf{p}_m = \mathbf{J}V$ (за означенням намагніченості), а з іншого — визначається

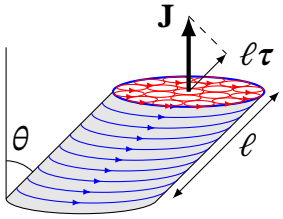


Рис. 10.2. Косокутний циліндр у намагніченій речовині

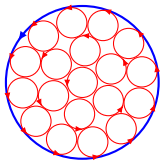


Рис. 10.3. Вигляд торця циліндра: кільцеві струми компенсуються всюди, крім бічної поверхні

нескомпенсованим поверхневим струмом I_m, що тече по бічній поверхні, за формулою для магнітного моменту витка (9.22) (розділ 9), $\mathbf{p}_m = \frac{1}{c} I_m S\mathbf{n}$, де S — площа торця циліндра, $\mathbf{n}$ — нормаль до торця, а θ — кут між твірною $\boldsymbol{\tau}$ циліндра і цією нормаллю. Об'єм косокутного циліндра дорівнює $V = S\,\ell\cos\theta$, де ℓ — довжина твірної. Прирівнюючи обидва вирази й проєктуючи рівність на напрям твірної:

$$\mathbf{J}\,V = \frac{1}{c} I_m S\mathbf{n} \quad\Rightarrow\quad (\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\tau})\,S\,\ell\cos\theta = \frac{1}{c} I_m\,S\,(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}), \qquad \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau} = \cos\theta.$$

Скорочуючи на $S\cos\theta$ і ділячи на ℓ, знаходимо *поверхневу густину молекулярного струму* $i_m = I_m/\ell$ (струм на одиницю довжини твірної):

$$\boxed{i_m = c\,\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\tau}.} \qquad (10.2)$$

! *Формула (10.2) — скалярний запис векторного співвідношення* $\mathbf{i}_m = c\,[\mathbf{J}\times\boldsymbol{\nu}]$, *де* $\boldsymbol{\nu}$ *— зовнішня нормаль до поверхні речовини, з якого видно, що* поверхневий *молекулярний струм перпендикулярний до намагніченості:* $\mathbf{i}_m \perp \mathbf{J}$. *Це разюче відрізняється від електричного аналога: там зв'язаний поверхневий заряд* $\sigma' = P_n$ *визначався* нормальною *складовою* $\mathbf{P}$ *(розділ 5), тут же зв'язаний струм визначається* тангенціальною *складовою* $\mathbf{J}$. *Причина — принципова:* $\mathbf{P}$ *і заряд пов'язані через дивергенцію (скалярне джерело), тоді як* $\mathbf{J}$ *і струм — через ротор (векторний, вихровий об'єкт); цю відмінність ми зараз узагальнимо на довільний контур.*

10.3. Теорема про циркуляцію в речовині

Циркуляція вектора намагніченості. Виберемо тепер у речовині *довільний* замкнений контур L (рис. 10.4). За формулою (10.2) на елемент довжини контуру $d\boldsymbol{\ell}$ припадає молекулярний струм $dI_m = i_m\,d\ell = c\,\mathbf{J}\cdot d\boldsymbol{\ell}$, тому повний молекулярний струм, що перетинає (пронизує)

контур,

$$I_m = c \oint_L \mathbf{J} \cdot d\boldsymbol{\ell}. \tag{10.3}$$

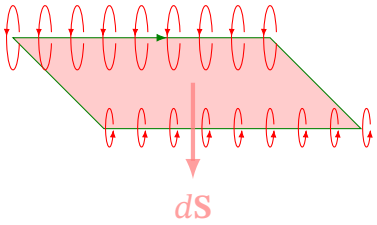


Рис. 10.4. Довільний замкнений контур L у намагніченій речовині

За теоремою Стокса цей вираз перетворюється так:

$$I_m = c \oint_L \mathbf{J} \cdot d\boldsymbol{\ell} = c \int_S \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S},$$

де S — будь-яка поверхня, натягнута на контур L. З іншого боку, той самий струм I_m можна виразити через його *об'ємну* густину $\mathbf{j}_m$: $I_m = \int_S \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S}$. Порівнюючи два вирази, отримуємо *зв'язок молекулярного струму з вектором намагніченості в диференціальній формі*:

$$\boxed{\mathbf{j}_m = c\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{J}.} \tag{10.4}$$

Вектор напруженості магнітного поля. Циркуляцію повного магнітного поля $\mathbf{B}$ у речовині породжують *усі* струми — і струми провідності I, і молекулярні струми I_m:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c}(I + I_m) = \frac{4\pi}{c}\left(I + c\int_S \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}\right).$$

Щоб *вилучити* невимірюваний молекулярний струм I_m з цього рівняння, введемо допоміжну величину — *напруженість магнітного поля*:

$$\boxed{\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{J}.} \tag{10.5}$$

Підставляючи це означення в попереднє рівняння, молекулярний струм скорочується, і *теорема про циркуляцію в речовині* набуває вигляду

$$\boxed{\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} I.} \tag{10.6}$$

Еквівалентна диференціальна форма цієї теореми:

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}.} \tag{10.7}$$

! *Вектор* **H** — допоміжна *(не фундаментальна) величина, що слугує лише для спрощення вигляду рівнянь; принципово важливо, що* його циркуляція визначається тільки струмами провідності *— тими, які ми задаємо чи вимірюємо ззовні, а не невідомими молекулярними струмами. Це прямий магнітний аналог того, як вектор* $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ *в електростатиці дав змогу виключити невідомі зв'язані заряди й записати теорему Гаусса лише через вільні заряди (розділ 5). Аналогія майже дослівна — лише* **D** *виникає з* теореми Гаусса *(через дивергенцію* **P***), а* **H** *— із теореми про* циркуляцію *(через ротор* **J***), що знову відображає різну (потенціальну проти вихрової) природу цих двох полів.*

10.4. Магнітна сприйнятливість речовини

Лінійні ізотропні середовища. Розглянемо *лінійні ізотропні* середовища — ті, в яких намагніченість пропорційна полю, а магнітні властивості однакові в усіх напрямках. Середовище (речовина), що реагує на зовнішнє магнітне поле, називатимемо *магнетиком*. Якщо поле не надто сильне, а в середовищі немає початкової (залишкової) намагніченості, намагніченість, як показує дослід, прямо пропорційна полю:

$$\mathbf{J} = \chi_m \mathbf{H}, \tag{10.8}$$

де χ_m — *магнітна сприйнятливість* середовища (безрозмірна величина). Підставляючи це в означення (10.5), $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{J} = (1 + 4\pi\chi_m)\mathbf{H}$, тобто

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \qquad \mu = 1 + 4\pi\chi_m,} \tag{10.9}$$

де величину μ називають *магнітною проникністю середовища*.

Класифікація магнетиків. Магнетиком є *будь-яка* речовина. Термін «діелектрик» виділяє лише частину речовин і протиставляється провіднику; термін «магнетик» не протиставляється нічому — магнітно інертних речовин не існує. Причина проста: рух електронів в атомах не припиняється ніколи, тож молекулярні струми є в кожному без винятку атомі.

Наявність мікрострумів, однак, ще не означає наявності *магнітного моменту*: у більшості атомів орбітальні й спінові моменти електронів в основному стані взаємно компенсуються, і сумарний момент атома дорівнює нулю — точний аналог неполярних молекул у діелектриках. Тому речовини відрізняються не наявністю мікрострумів, а тим, чи скомпенсовані їхні моменти за відсутності поля і як ці струми відгукуються на його ввімкнення.

Залежно від знака й величини магнітної сприйнятливості виділяють такі основні класи лінійних магнетиків:

1. Якщо $\chi_m > 0$ (а отже, $\mu > 1$), магнетик називають *парамагнетиком*. Парамагнітні властивості мають, наприклад, Al, Pt, $FeCl_2$, O_2, лужні й лужноземельні метали. (У металах парамагнетизм здебільшого зумовлений електронами провідності — це так званий парамагнетизм Паулі, слабкий і майже незалежний від температури; закон Кюрі, виведений нижче, описує речовини з власними магнітними моментами атомів чи молекул, як O_2 чи солі заліза.)
2. Якщо $\chi_m < 0$ (а отже, $\mu < 1$), магнетик називають *діамагнетиком*. Діамагнетиками є Bi, Sb, Si, H_2O, H_2, N_2 тощо.

За порядком величини магнітна сприйнятливість пара- і діамагнетиків мала: $|\chi_m| \sim 10^{-6}$–10^{-3}, тобто μ відрізняється від одиниці лише на частки відсотка й менше — зовсім інший масштаб, ніж $\mu \gg 1$ у феромагнетиків, про які йдеться нижче.

І парамагнетики, і діамагнетики належать до класу лінійних ізотропних середовищ, розглянутих вище.

Деякі речовини здатні зберігати намагніченість $\mathbf{J}$ навіть за *відсутності* зовнішнього поля — для них лінійне співвідношення (10.8) узагалі не виконується. Такі речовини називають *феромагнетиками* (Fe, Co, Ni та багато їхніх сплавів). У тому діапазоні полів, де лінійне наближення все ж формально можна застосувати, магнітна проникність феромагнетиків сягає величезних значень, $\mu \gg 1$ (тисячі й навіть десятки тисяч) — детальніше про них ми поговоримо наприкінці цього розділу.

10.5. Граничні умови

Перша гранична умова (для нормальної складової B). Застосуємо теорему Гаусса для вектора $\mathbf{B}$ (яка, нагадаємо, залишається справедливою в будь-якому середовищі, оскільки джерел магнітного поля, на відміну від електричного, — магнітних зарядів — не існує) до нескінченно малого циліндра, що охоплює невелику ділянку межі розділу двох магнетиків (рис. 10.5). Вважаючи $d\mathbf{S}_2 = -d\mathbf{S}_1 = \mathbf{n}\,dS$ ($\mathbf{n}$ — нормаль від середовища 1 до середовища 2, як на рисунку):

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}_1\cdot d\mathbf{S}_1 + \mathbf{B}_2\cdot d\mathbf{S}_2 = 0.$$

Звідси перша гранична умова:

$$\boxed{B_{1n} = B_{2n}} \tag{10.10}$$

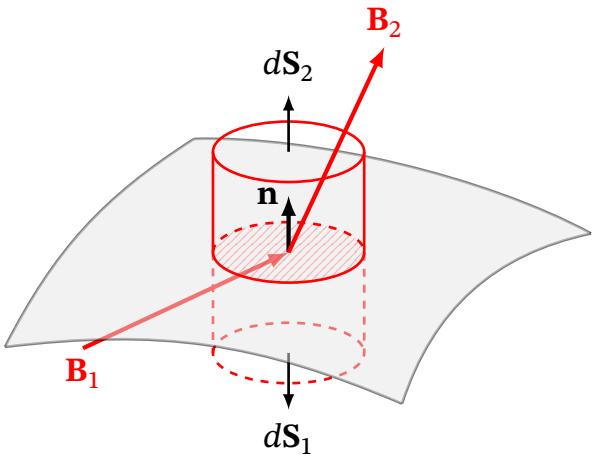


Рис. 10.5. Циліндр Гаусса на межі розділу двох магнетиків

— *нормальна складова вектора* $\mathbf{B}$ *не зазнає стрибка* при переході через межу розділу середовищ (дослівний магнітний аналог неперервності D_n за відсутності вільного заряду на межі, розділ 5).

Друга гранична умова (для тангенціальної складової H). Застосуємо теорему про циркуляцію (10.6) до нескінченно малого прямокутного контуру $ABCD$, довгі сторони якого проходять на нескінченно малій відстані по обидва боки від межі розділу (рис. 10.6). Поверхневий струм провідності (якщо він там є) характеризуємо одиничним вектором $\mathbf{b}$ уздовж напряму струму й лінійною густиною i_b; контур орієнтуємо *впоперек* струму, так щоб струм пронизував його, тобто вздовж орта $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{b} \times \mathbf{n}$. Обходячи контур так, що $d\mathbf{r}_2 = \boldsymbol{\tau}\, d\ell$ (сторона в середовищі 2) і $d\mathbf{r}_1 = -d\mathbf{r}_2$:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} I \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = \frac{4\pi}{c}\, i_b\, d\ell.$$

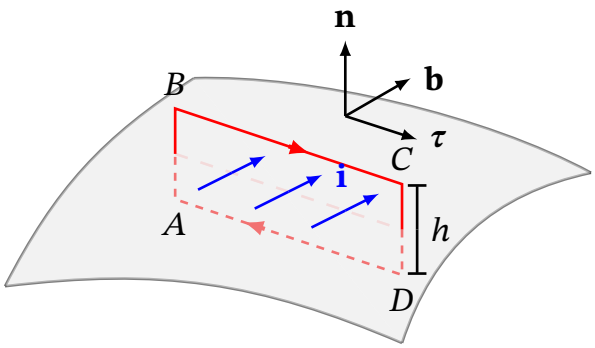


Рис. 10.6. Контур циркуляції на межі розділу двох магнетиків

Звідси друга гранична умова:

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_b. \tag{10.11}$$

У векторному вигляді, циклічно переставивши співмножники в мішаному добутку, цю умову записують як

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}_b. \tag{10.12}$$

! *Тангенціальна складова* **H** *зазнає стрибка* тільки *там, де по поверхні розділу середовищ течуть* струми провідності i_b *(наприклад, обмотка, намотана безпосередньо на межі двох магнетиків); якщо на межі струмів провідності немає,* $H_{1\tau} = H_{2\tau}$ *— тангенціальна складова* **H** *неперервна, а от тангенціальна складова* $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$*, узагалі кажучи,* стрибає *(оскільки* $\mu_1 \neq \mu_2$*) — цілком аналогічно до того, як на межі діелектриків без вільного заряду неперервна* D_n*, а не* E_n *(розділ 5).*

Заломлення силових ліній на межі магнетиків. Розглянемо межу розділу двох магнетиків з проникностями μ_1 і μ_2, на якій немає струмів провідності (рис. 10.7). Нехай силова лінія утворює кут α_1 з нормаллю в середовищі 1 і кут α_2 — в середовищі 2. Граничні умови дають:

$$\begin{cases} H_{1\tau} = H_{2\tau} \;\Rightarrow\; H_1 \sin\alpha_1 = H_2 \sin\alpha_2, \\ B_{1n} = B_{2n} \;\Rightarrow\; \mu_1 H_1 \cos\alpha_1 = \mu_2 H_2 \cos\alpha_2. \end{cases}$$

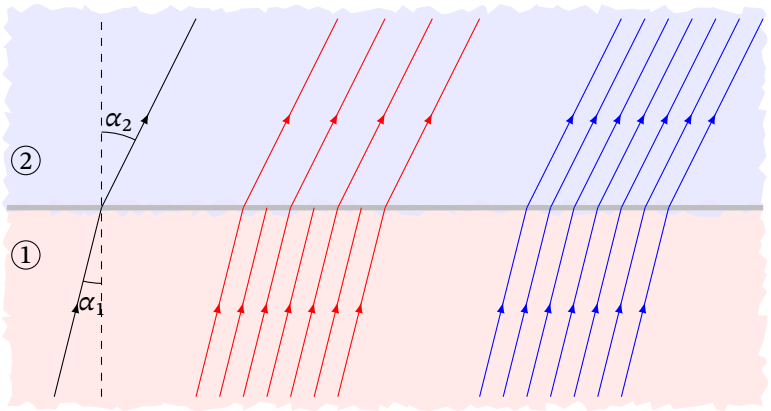


Рис. 10.7. Заломлення силових ліній **H** і **B** на межі розділу двох магнетиків

Ділячи ці рівняння одне на одне, отримуємо *закон заломлення* силових ліній, однаковий і для **B**, і для **H**:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \qquad (10.13)$$

У середовищі з більшим значенням μ силові лінії відхиляються на більший кут від нормалі до межі розділу.

Магнітне екранування. На заломленні силових ліній ґрунтується явище *магнітного захисту (екранування)*. Якщо замкнену оболонку з феромагнетика (наприклад, залізну) внести в зовнішнє магнітне поле, то, оскільки $\mu_{\text{залізо}} \gg \mu_{\text{повітря}} \approx 1$, за законом заломлення (10.13) силові лінії всередині оболонки відхиляються майже до дотичної площини до її поверхні — тобто *«втягуються» в товщу оболонки* і концентруються переважно в ній самій, майже не проникаючи у внутрішню порожнину (рис. 10.8). У результаті поле всередині порожнини виявляється істотно ослабленим порівняно із зовнішнім — але не нульовим: на відміну від електростатичного захисту, магнітна оболонка лише *послаблює* поле, тим сильніше, чим більші μ і товщина стінки (за порядком величини — у $\sim \mu d/R$ разів, де d — товщина, R — радіус оболонки).

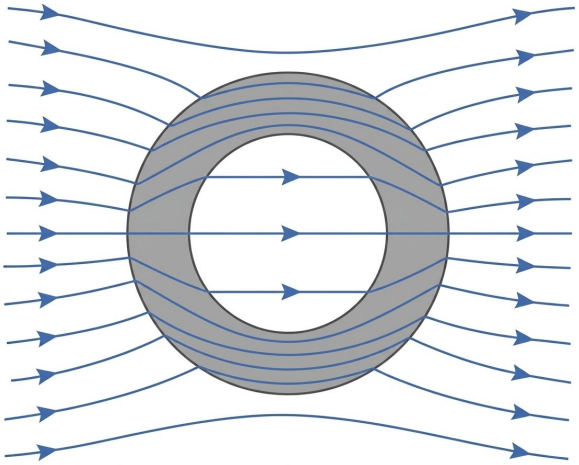


Рис. 10.8. Магнітне екранування: силові лінії концентруються в товщі феромагнітної оболонки

! *Магнітне екранування — принципово* інше *явище, ніж електростатичне: провідник у електростатиці* вишовхує *поле зі свого об'єму, тоді як феромагнітна оболонка, навпаки,* затягує *лінії поля в себе, немов пропонуючи їм «шлях найменшого опору». Тому магнітний захист вимагає* суцільної замкненої *оболонки з високопроникного матеріалу — на відміну від електростатичного, для якого досить навіть тонкої провідної сітки. Цей принцип застосовують для захисту чутливих приладів (магнітометрів, детекторів) від зовнішніх завад.*

10.6. Мікроскопічна природа діа-, пара- і феромагнетизму

Усе, що було в цій главі до цього моменту, — феноменологія: $\mathbf{J}$, $\mathbf{H}$, χ_m введені через дослідні факти й формальні означення, без жодного припущення про будову атома. Тепер з'ясуємо, звідки вона береться — тобто розкриємо мікроскопічну природу діа- і парамагнетизму, а наостанок з'ясуємо, звідки береться значно сильніше й принципово інше явище — спонтанне впорядкування у феромагнетиках.

Природа діамагнетизму: прецесія Лармора. Скористаємося класичною (борівською) моделлю атома, де електрон рухається коловою орбітою навколо ядра — саме в цій моделі діамагнетизм найпростіше побачити кількісно.[1] За формулою (9.23) (розділ 9) його орбітальний магнітний момент пов'язаний з орбітальним моментом імпульсу $\mathbf{L}$ гіромагнітним відношенням $\mathbf{p} = \gamma\mathbf{L}$, $\gamma = -e/(2m_e c)$. У зовнішньому полі $\mathbf{B}$ на цей момент діє момент сили (9.1), який змінює $\mathbf{L}$ за рівнянням

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{p}\times\mathbf{B} = \gamma\,(\mathbf{L}\times\mathbf{B}) = \boldsymbol{\omega}_L\times\mathbf{L}, \qquad \boldsymbol{\omega}_L \equiv -\gamma\mathbf{B}.$$

Це — рівняння рівномірної *прецесії* вектора $\mathbf{L}$ (а разом з ним — і всієї площини орбіти) навколо напрямку $\mathbf{B}$ з кутовою швидкістю

$$\boxed{\omega_L = |\gamma|B = \frac{eB}{2m_e c}} \tag{10.14}$$

— *ларморовою частотою*, однаковою для будь-якого електрона незалежно від радіуса й швидкості його орбіти (*теорема Лармора*).

До ввімкнення поля електрон рухався по коловій орбіті; щойно поле накладено, ця орбіта починає прецесувати (рис. 10.9). Прецесія орбіти — це додатковий круговий рух заряду $-e$ з частотою ω_L навколо осі, паралельної $\mathbf{B}$, тобто додатковий коловий струм $I = -e\omega_L/(2\pi)$ на відстані ρ від цієї осі. За формулою для моменту колового витка (9.22) цей струм створює додатковий (*індукований*) магнітний момент

$$\Delta\mathbf{p}_m = \frac{I\pi\rho^2}{c}\,\frac{\mathbf{B}}{B} = -\frac{e\omega_L\rho^2}{2c}\,\frac{\mathbf{B}}{B} = -\frac{e^2\rho^2}{4m_e c^2}\,\mathbf{B}, \tag{10.15}$$

напрямлений, зверніть увагу, *проти* поля $\mathbf{B}$ — незалежно від того, у який бік електрон обертався початково: це і є мікроскопічний прояв правила Ленца.

[1] Це лише наочна оцінка. Строго кажучи, класична статистична фізика дає для системи зарядів у магнітному полі *нульову* намагніченість (теорема Бора–ван Левен): діамагнетизм, як і парамагнетизм та феромагнетизм, — квантове явище. Модель зі «збереженою» орбітою неявно спирається на квантову стійкість атома й дає правильний за порядком і знаком результат.

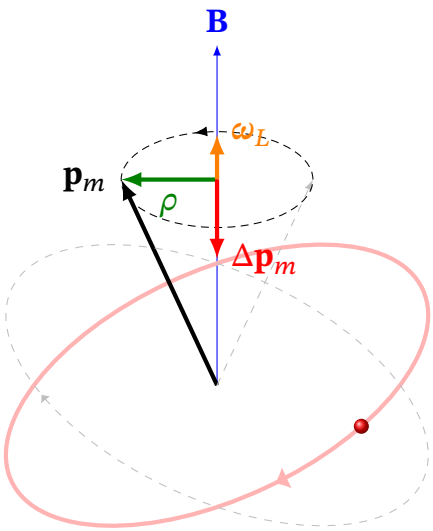


Рис. 10.9. Прецесія орбіти електрона в зовнішньому полі **B**: магнітний момент $\mathbf{p}_m$ (а разом з ним і площина орбіти) обертається навколо **B** з ларморовою частотою ω_L. Ця прецесія еквівалентна додатковому коловому струму $I = -e\omega_L/(2\pi)$, який створює індукований магнітний момент $\Delta\mathbf{p}$, напрямлений проти **B**.

! *Той самий результат* (10.15) *випливає із закону електромагнітної індукції. При вмиканні поля потік крізь орбіту* $\Phi = \pi r^2 B$ *змінюється, і виникає ЕРС* $\mathcal{E} = -(1/c)\,d\Phi/dt$. *Вона створює дотичне поле* $E_{\text{ін}} = r\dot{B}/(2c)$, *яке за час* dt *змінює швидкість електрона на*

$$dv = \frac{eE_{\text{ін}}}{m_e}\,dt = \frac{er}{2m_e c}\,dB.$$

Відповідна зміна струму $dI = -e\,dv/(2\pi r)$ *дає*

$$d\Delta p = \frac{\pi r^2}{c}\,dI = -\frac{e^2 r^2}{4m_e c^2}\,dB \quad\Longrightarrow\quad \Delta p = -\frac{e^2 r^2}{4m_e c^2}\,B.$$

Знак мінус — це правило Ленца: індукований момент напрямлений проти поля, яке його викликало.

Формула (10.15) виведена для однієї класичної орбіти. У квантовій механіці електрон не має траєкторії: його стан описується хвильовою функцією, а заряд розподілений у просторі з густиною $-e|\psi|^2$. Тому замість фіксованого ρ слід підставити середнє $\langle\rho^2\rangle$ за цією електронною хмарою. Електронна хмара сферично симетрична, тож

$$\langle\rho^2\rangle = \tfrac{2}{3}\langle r^2\rangle.$$

Підсумовуючи внесок усіх Z електронів, отримуємо індукований момент атома, а тоді й магнітну сприйнятливість речовини з концен-

трацією атомів n (*формула Ланжевена для діамагнетизму*):

$$\boxed{\chi_m^{\text{діа}} = -\frac{nZe^2\langle r^2\rangle}{6m_e c^2} < 0.} \tag{10.16}$$

Ця величина не залежить від температури (розмір атома $\langle r^2\rangle$ від неї практично не залежить) і за порядком величини становить 10^{-7}–10^{-6} (у гауссовій системі; у СІ відповідні значення в 4π разів більші) — слабкий, але *універсальний* ефект, наявний в атомах будь-якої речовини, включно з пара- і феромагнетиками.

Природа парамагнетизму: закон Кюрі. Якщо атом має власний (нескомпенсований) магнітний момент $p_0 \neq 0$, до щойно знайденого діамагнітного внеску додається значно потужніший ефект — часткова *орієнтація* вже наявних моментів уздовж поля. Це — дослівний магнітний аналог орієнтаційної поляризації полярних діелектриків (розділ 5, § 5.7): енергія моменту в полі дорівнює $U = -p_0 B\cos\theta$ (формула (9.35), розділ 9), а рівноважний розподіл орієнтацій підпорядковується розподілу Больцмана. У практично важливій межі слабкого поля й не надто низької температури ($p_0 B \ll kT$) середня проекція моменту на напрямок поля лінійна за полем, за тією самою викладкою, що й для електричного диполя (5.17):

$$\langle p_z\rangle = \frac{p_0^2 B}{3kT}. \tag{10.17}$$

Звідси намагніченість n атомів в одиниці об'єму дорівнює $J = n\langle p_z\rangle$. Оскільки $\chi_m \ll 1$, у самій речовині $B \approx H$, тож $\chi_m = J/H \approx J/B$, а сприйнятливість спадає обернено пропорційно температурі — *закон Кюрі* (пряма аналогія закону (5.18) для полярних діелектриків):

$$\boxed{\chi_m^{\text{пара}} = \frac{np_0^2}{3kT} \equiv \frac{C}{T} > 0,} \tag{10.18}$$

де $C = np_0^2/3k$ — *стала Кюрі*. Оскільки за кімнатної температури $\chi_m^{\text{пара}}$, як правило, на один-два порядки перевищує $|\chi_m^{\text{діа}}|$, саме вона визначає знак і величину сумарної сприйнятливості речовини, щойно в її атомах з'являється власний момент, — а слабший діамагнітний внесок (10.16) лишається практично непомітним на його тлі. (Квантова теорія, де проєкції магнітного моменту атома набувають лише дискретних значень, змінює класичний множник $p_0^2/3$ лише на величину порядку одиниці; закон $\chi \propto 1/T$ при цьому зберігається.)

Природа феромагнетизму: обмінна взаємодія і поле Вейса. Закон Кюрі (10.18) описує *незалежні* атомні моменти, що орієнтуються лише під дією зовнішнього поля й теплового хаосу. Але у феромагнетику є локальні області — *домени* — типовим розміром від часток до сотень мікрометрів. У межах кожного домену магнітні моменти всіх атомів спонтанно вишикувані в одному напрямку (рис. 10.10) — без жодного зовнішнього поля. У різних доменах напрями намагніченості, як правило, різні, тому сумарна намагніченість ненамагніченого зразка загалом близька до нуля. Доменна структура цілком аналогічна до доменної структури сегнетоелектриків (розділ 5).

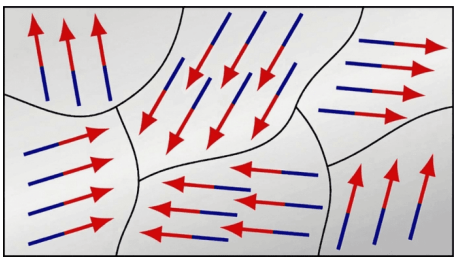


Рис. 10.10. Доменна структура феромагнетика.

Формальне пояснення спонтанної орієнтації магнітних моментів у межах домену запропонував П. Вейс: припустимо, що на кожен атомний момент, окрім зовнішнього поля $\mathbf{H}$, діє ще й *молекулярне поле* $\mathbf{H}_{\text{мол}} = \lambda\mathbf{J}$, пропорційне намагніченості *сусідніх* атомів (тут λ — стала Вейса). Підставивши це ефективне поле $\mathbf{H} + \lambda\mathbf{J}$ у закон Кюрі (10.18) замість $\mathbf{H}$ (для слабких полів, коли $B \approx H$), дістаємо самоузгоджене рівняння для намагніченості:

$$J = \frac{C}{T}(H + \lambda J) \quad \Longrightarrow \quad \chi_m = \frac{J}{H} = \frac{C}{T - C\lambda}.$$

Позначивши $T_C \equiv C\lambda$ — *температуру Кюрі* (для заліза $T_C \approx 770\,^\circ\text{C}$), отримуємо *закон Кюрі–Вейса*:

$$\boxed{\chi_m = \frac{C}{T - T_C}.} \tag{10.19}$$

Вище T_C речовина парамагнітна: власні моменти атомів орієнтовані хаотично, і без зовнішнього поля намагніченість дорівнює нулю. Коли $T \to T_C^+$, сприйнятливість (10.19) прямує до нескінченності — парамагнітний стан втрачає стійкість. Щойно T опускається нижче T_C, будь-яке мале відхилення $\mathbf{J}$ від нуля підсилюється молекулярним полем швидше, ніж його руйнує тепловий рух, — і в системі самочинно встановлюється ненульова намагніченість навіть без зовнішнього поля. Це — феромагнітний стан.

Залишається питання: чим фізично зумовлене поле Вейса $\mathbf{H}_{\text{мол}}$? Щоб упорядкування витримувало тепловий рух аж до кімнатної тем-

ператури, потрібне поле порядку 10^6–10^7 Гс (з умови $p_0 B \sim kT$). Натомість поле, яке реально створює сусідній атомний диполь на міжатомній відстані, становить лише $\sim 10^3$ Гс — на три-чотири порядки менше. Отже, *справжня* причина — не магнітна взаємодія диполів, а *обмінна взаємодія*. Це — суто квантовий ефект, що не має класичного аналога: енергія системи двох електронів залежить не лише від їхніх зарядів і відстані, а й від взаємної орієнтації їхніх спінів, причому ця залежність не зводиться до магнітної. Причина — у принципі Паулі: повна хвильова функція двох електронів мусить бути антисиметричною, тому за *паралельних* спінів антисиметричною мусить бути її координатна частина. Це автоматично *розводить* такі електрони в просторі й тим самим *зменшує* енергію їхнього кулонівського відштовхування порівняно з випадком антипаралельних спінів.

! *Обмінна взаємодія* — короткодійна *(діє практично лише між найближчими сусідами в ґратці) і в різних речовинах може сприяти як* паралельній, *так і* антипаралельній *орієнтації сусідніх моментів. Якщо вона вирівнює сусідні моменти паралельно — маємо* феромагнетик*; якщо антипаралельно, причому моменти рівні за величиною, — сумарна намагніченість зникає, і речовину називають* антиферомагнетиком*; якщо ж антипаралельно, але моменти різні за величиною (наприклад, належать різним типам вузлів ґратки), — повної компенсації не відбувається, і виникає* феримагнетик *(класичний приклад — магнетит Fe_3O_4, магнітний залізняк, з якого складалися перші відомі людству природні магніти). У всіх трьох випадках — та сама квантова природа взаємодії, лише різний* знак і геометрія *її прояву.*

Гістерезис у феромагнетиках. *Гістерезисом* називають неоднозначну петлеподібну залежність намагніченості J феромагнетика від зовнішнього поля H за його циклічної зміни (рис. 10.11).

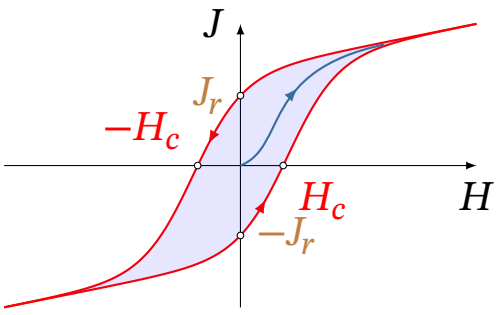


Рис. 10.11. Петля гістерезису феромагнетика: J_r — залишкова намагніченість, H_c — коерцитивна сила

Проходження петлі відбувається за такими стадіями:

1. За достатньо великого поля H намагніченість досягає *насичення*: усі домени вже зорієнтовані вздовж поля, і зростання J практично припиняється, $J \to J_s = \text{const}$. Індукція $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{J}$ при цьому й

далі зростає — але вже лише за рахунок самого **H**, з таким самим нахилом, як у вакуумі.

2. Коли поле зменшують до нуля ($H = 0$), намагніченість *не* повертається до нуля, а залишається на рівні залишкової намагніченості J_r — саме тому постійні магніти взагалі можуть існувати.
3. Щоб звести намагніченість до нуля, потрібно прикласти поле протилежного напрямку — *коерцитивну силу* $-H_c$.
4. З подальшим зростанням поля в тому самому (від'ємному) напрямку намагніченість знову зростає за модулем до насичення $-J_s$.
5. Коли від'ємне поле зменшують за модулем до нуля, намагніченість знову залишається ненульовою, на рівні $-J_r$, — і цикл, після проходження додатної коерцитивної сили $+H_c$, замикається.

! *Площа петлі гістерезису має пряму фізичну інтерпретацію: енергія, що незворотно розсіюється у вигляді тепла в одиниці об'єму за один повний цикл перемагнічування, дорівнює* $w = \frac{1}{4\pi}\oint H\,dB = \oint H\,dJ$, *тобто саме площі петлі* $J(H)$. *Тому вузька петля означає малі втрати, а широка — великі.*

Залежно від ширини петлі гістерезису феромагнетики поділяють на дві категорії. *Магнітом'які* матеріали (рис. 10.12), які застосовують як осердя в трансформаторах, електромагнітах та інших приладах, мають дуже *вузьку* петлю гістерезису. Вузькість петлі (мала коерцитивна сила H_c) означає малі втрати на перемагнічування — важливо, наприклад, для трансформаторів, які перемагнічуються десятки чи сотні разів за секунду.

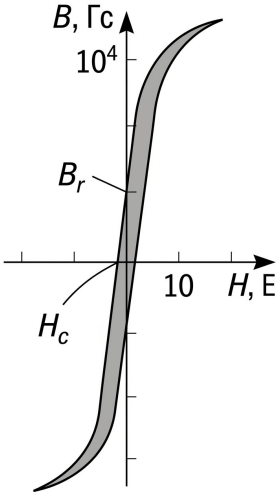


Рис. 10.12. Вузька петля гістерезису магнітом'якого матеріалу

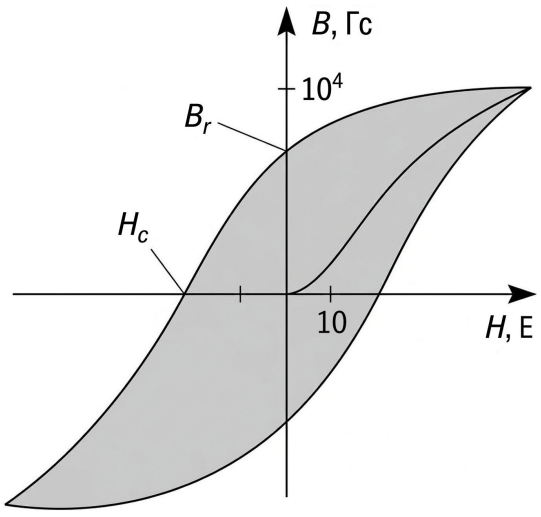


Рис. 10.13. Широка петля гістерезису магнітотвердого матеріалу

Постійні ж магніти, навпаки, виготовляють із *магнітотвердих* матеріалів (рис. 10.13), наприклад із загартованої сталі, з широкою петлею гістерезису й великою коерцитивною силою H_c — саме це забезпечує збереження намагніченості магніту з часом і під дією випадкових зовнішніх завад.

Підсумки

Уся теорія магнітного поля в речовині побудована за єдиним лекалом, яке ми вже бачили в теорії діелектриків: (1) ввести густину мікроскопічних джерел поля (там — $\mathbf{P}$, тут — $\mathbf{J}$); (2) виразити через неї зв'язані (молекулярні) джерела — там через дивергенцію ($\rho' = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P}$), тут через ротор ($\mathbf{j}_m = c\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{J}$) — відмінність, що відображає потенціальну природу $\mathbf{E}$ проти вихрової природи $\mathbf{B}$; (3) ввести допоміжний вектор ($\mathbf{D}$ або $\mathbf{H}$), теорема для якого містить *лише* вільні (вимірювані) джерела; (4) для лінійних середовищ пов'язати допоміжний і основний вектори простим коефіцієнтом (ε або μ). Розуміння цієї спільної структури — найкращий спосіб не заплутатися в позначеннях і знаках обох розділів курсу.

Мікроскопічно магнітні властивості речовини визначаються тим, чи мають її атоми власний магнітний момент. *Діамагнетизм* — універсальний слабкий ефект: зовнішнє поле спричиняє ларморову прецесію електронних орбіт і наводить момент, напрямлений проти поля ($\chi_m < 0$, не залежить від температури). *Парамагнетизм* виникає, коли атоми мають власні моменти, які поле частково орієнтує всупереч тепловому руху (закон Кюрі, $\chi_m = C/T > 0$). У *феромагнетиках* обмінна взаємодія — квантовий ефект, у тисячі разів сильніший за магнітну взаємодію диполів, — вишиковує моменти в доменах самочинно; вище температури Кюрі речовина стає парамагнітною (закон Кюрі–Вейса). Феромагнетики нелінійні й мають гістерезис: площа петлі визначає втрати на перемагнічування, ширина — поділ на магнітом'які й магнітотверді матеріали. На межі магнетиків неперервні B_n і H_τ (без струмів провідності), а на цьому ґрунтується, зокрема, магнітне екранування феромагнітними оболонками.

Задачі

? **10.1.** *Соленоїд з магнетиком.* Знайдіть індукцію магнітного поля всередині нескінченного соленоїда з густиною намотки n витків на одиницю довжини, по витках якого тече струм I, якщо об'єм усередині соленоїда заповнено магнетиком із проникністю μ. Яка частина поля створена молекулярними струмами?

10.2. *Молекулярні струми в парамагнітному провіднику.* Постійний струм I тече вздовж довгого циліндричного провідника круглого перерізу радіуса R, виготовленого з парамагнетика зі сприйнятливістю χ_m; струм розподілений по перерізу рівномірно. Знайдіть об'ємний і поверхневий молекулярні струми та з'ясуйте, як вони напрямлені один відносно одного й відносно I.

10.3. *Однорідно намагнічене тіло.* (а) Довгий тонкий стрижень (довжина $\gg$ діаметра) однорідно намагнічений вздовж осі з намагніченістю J. Знайдіть поверхневий молекулярний струм і поля $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ усередині стрижня далеко від торців. (б) Те саме для тонкої необмеженої пластини, однорідно намагніченої перпендикулярно до її площини. Підказка: скористайтеся неперервністю H_τ і B_n на поверхні та тим, що поза тілом зовнішнього поля немає (у (а) — з точністю до малого поля торців).

10.4. *Магнітопровід із зазором.* Замкнений магнітопровід із магнетика з проникністю μ (довжина середньої лінії в магнетику l) має вузький повітряний зазор $\delta \ll l$; розсіянням поля й крайовими ефектами знехтуйте. На магнітопровід рівномірно намотано N витків зі струмом I. Знайдіть $\mathbf{B}$ і $\mathbf{H}$ у магнетику та в зазорі. У скільки разів зменшується B через зазор при $\mu = 10^3$, $l = 50$ см, $\delta = 1$ мм?

10.5. *Пара- чи діамагнетизм?* Речовина складається з атомів із концентрацією $n = 5 \cdot 10^{22}$ см$^{-3}$, кожен з яких має один власний магнітний момент $p_0 = \mu_B = 9{,}3 \cdot 10^{-21}$ ерг/Гс і одному електрону відповідає $\langle r^2 \rangle = 10^{-16}$ см^2. Оцініть при $T = 300$ К: (а) парамагнітну сприйнятливість за законом Кюрі; (б) діамагнітну сприйнятливість ($Z = 1$); (в) порівняйте їх; (г) перевірте, що при $B = 10^4$ Гс виконується $p_0 B \ll kT$. ($k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ ерг/К, $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ СГСЕ, $m_e c^2 = 8{,}2 \cdot 10^{-7}$ ерг.)

10.6. *Молекулярне поле Вейса.* Вважаючи, що феромагнітне впорядкування руйнується, коли $p_0 H_{\text{мол}} \sim kT_C$, оцініть поле Вейса для заліза ($T_C = 1043$ К, $p_0 \approx 2{,}2\mu_B$, $\mu_B = 9{,}3 \cdot 10^{-21}$ ерг/Гс) і порівняйте його з полем сусіднього атомного диполя на відстані $a = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$ см (за порядком величини p_0/a^3). Який висновок випливає щодо природи молекулярного поля?

? Контрольні питання

1. У чому полягала гіпотеза Ампера про природу магнетизму речовини? Як сучасна атомна фізика (рух електронів, їхній спін) пояснює, звідки в речовині беруться струми, про які здогадався Ампер?
2. Що таке мікрополе $\mathbf{B}_{\text{micro}}$ і середнє (макроскопічне) поле $\langle \mathbf{B} \rangle$ у речовині? У чому полягає аналогія цієї конструкції з переходом від мікро- до макрополя в діелектриках?
3. Чим струми провідності принципово відрізняються від молекулярних струмів?
4. Дайте означення вектора намагніченості $\mathbf{J}$ як густини магнітних дипольних моментів. У чому полягає точна аналогія між $\mathbf{J}$ і вектором поляризації $\mathbf{P}$ в діелектриках?
5. Чому пряме обчислення поля намагніченої речовини через підсумовування всіх молекулярних струмів практично нездійсненне, і яку ідею пропонує теорія магнетизму для розв'язання цієї проблеми?
6. Виведіть формулу поверхневої густини молекулярного струму $i_m = c\,\mathbf{J} \cdot \tau$, розглядаючи косокутний циліндр у намагніченій речовині. Чому молекулярний поверхневий струм визначається саме тангенціальною складовою $\mathbf{J}$, на відміну від зв'язаного заряду, що визначається нормальною складовою $\mathbf{P}$?
7. Виведіть зв'язок об'ємної густини молекулярного струму з намагніченістю в диференціальній формі $\mathbf{j}_m = c\nabla \times \mathbf{J}$, застосувавши теорему Стокса до циркуляції $\mathbf{J}$ по довільному контуру.
8. Виведіть означення вектора напруженості магнітного поля $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{J}$ з теореми про циркуляцію $\mathbf{B}$, що враховує і струми провідності, і молекулярні струми. Запишіть теорему про циркуляцію в речовині в інтегральній та диференціальній формах.
9. Чому вектор $\mathbf{H}$ вважають допоміжною, а не фундаментальною величиною? У чому полягає аналогія між парою $(\mathbf{D}, \mathbf{E})$ в електростатиці та парою $(\mathbf{H}, \mathbf{B})$ у магнетизмі, і чим пояснюється відмінність — дивергенція проти ротора?
10. Запишіть лінійне співвідношення $\mathbf{J} = \chi_m \mathbf{H}$ для лінійних ізотропних магнетиків та виведіть зв'язок $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, $\mu = 1 + 4\pi\chi_m$.
11. Чому термін «магнетик» не протиставляється нічому, на відміну від терміна «діелектрик»? Чим відрізняється наявність мікрострумів від наявності магнітного моменту атома?
12. Дайте класифікацію лінійних магнетиків за знаком χ_m: чим парамагнетики відрізняються від діамагнетиків за порядком величини сприйнятливості? Чим феромагнетики принципово відрізняються

від обох цих класів?

13. Виведіть першу граничну умову $B_{1n} = B_{2n}$ для нормальної складової **B** на межі двох магнетиків із теореми Гаусса для **B**.

14. Виведіть другу граничну умову $H_{2\tau} - H_{1\tau} = (4\pi/c)\, i_b$ для тангенціальної складової **H** з теореми про циркуляцію. За яких умов H_τ неперервна, а B_τ — ні?

15. Виведіть закон заломлення силових ліній $\operatorname{tg}\alpha_2 / \operatorname{tg}\alpha_1 = \mu_2/\mu_1$ на межі двох магнетиків.

16. Що таке магнітне екранування і чим воно принципово відрізняється від електростатичного захисту? Чому феромагнітна оболонка «затягує» силові лінії в себе, а не виштовхує поле зі свого об'єму?

17. Виведіть формулу ларморової частоти $\omega_L = eB/(2m_e c)$, розглядаючи прецесію орбітального моменту імпульсу електрона в зовнішньому полі. Чому ця частота однакова для будь-якого електрона незалежно від параметрів орбіти?

18. Виведіть формулу індукованого магнітного моменту $\Delta p_m = -e^2\rho^2 B/(4m_e c^2)$, зумовленого прецесією Лармора. Чому цей момент завжди напрямлений проти поля, незалежно від початкового напрямку обертання електрона?

19. Виведіть формулу Ланжевена для діамагнітної сприйнятливості $\chi_m^{\text{діа}} = -nZe^2\langle r^2\rangle/(6m_e c^2)$. Чому діамагнетизм — універсальний ефект, присутній в атомах будь-якої речовини, і чому він не залежить від температури?

20. Виведіть закон Кюрі для парамагнітної сприйнятливості $\chi_m^{\text{пара}} = C/T$, використовуючи розподіл Больцмана для орієнтації власних магнітних моментів атомів. Чому парамагнітний внесок, коли він є, зазвичай на порядки перевищує діамагнітний?

21. У чому полягає гіпотеза Вейса про молекулярне поле $\mathbf{H}_{\text{мол}} = \lambda \mathbf{J}$? Виведіть закон Кюрі–Вейса $\chi_m = C/(T - T_C)$ і поясніть, чому при $T \to T_C^+$ парамагнітний стан втрачає стійкість.

22. Чому справжньою причиною феромагнітного впорядкування є обмінна, а не пряма магнітна взаємодія диполів? Як принцип Паулі пояснює залежність енергії електронів від взаємної орієнтації їхніх спінів?

23. Чим відрізняються феро-, антифero- та феримагнетики за характером обмінної взаємодії між сусідніми моментами?

24. Опишіть петлю гістерезису феромагнетика: що таке намагніченість насичення J_s, залишкова намагніченість J_r та коерцитивна сила H_c?

25. Яким чином площа петлі гістерезису пов'язана з енергетичними

втратами при перемагнічуванні? Чим магнітом'які матеріали відрізняються від магнітотвердих і де застосовується кожен з цих класів?

26 Опишіть спільну логічну схему побудови теорії поля в речовині — діелектриків і магнетиків: як вона проходить від густини мікроскопічних джерел до допоміжного вектора й лінійного співвідношення в обох випадках?

Частина IV

Рух частинок в електричному та магнітному полях

Це була найнеймовірніша подія в моєму житті. Це було майже так само неймовірно, як якби ви вистрілили 15-дюймовим снарядом у цигарковий папір, а він відскочив назад і влучив у вас.

Ернест Резерфорд про розсіяння α-частинок, лекція «Розвиток теорії будови атома» (1936)

11 Рух заряджених частинок в електричних і магнітних полях

Я не бачу способу уникнути висновку, що це — заряди негативної електрики, які переносяться частинками речовини. Постає питання: що це за частинки — атоми, молекули чи матерія в ще тоншому стані поділу?

Дж. Дж. Томсон, «Катодні промені» (Cathode Rays, 1897)

У цьому розділі розглядаємо рух зарядженої частинки в заданих зовнішніх полях $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$ під дією сили Лоренца

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}.$$

Вважаємо, що швидкість частинки мала порівняно зі швидкістю світла ($v \ll c$), а власним полем частинки та її випромінюванням нехтуємо. Рух зі швидкостями, близькими до c, потребує релятивістських рівнянь (розділ 15).

11.1. Рух частинок в однорідних полях

Рух в однорідному електричному полі. Якщо напруженість поля $\mathbf{E} = \text{const}$, то з рівняння руху

$$m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{E} \tag{11.1}$$

випливає

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{q\mathbf{E}}{m}t, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{q\mathbf{E}}{2m}t^2, \tag{11.2}$$

тобто маємо рівноприскорений рух, де прискорення напрямлене уздовж вектора напруженості поля.

Рух в однорідному магнітному полі. На частинку діє сила Лоренца, так що рівняння руху має вигляд

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}. \tag{11.3}$$

Очевидно, що $\dot{\mathbf{v}} \perp \mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{v}} \perp \mathbf{B}$. Перша рівність означає, що сила Лоренца не виконує роботи: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{mv^2}{2}\right) = m\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} = 0$, тобто $|\mathbf{v}| = \text{const}$ — магнітне поле змінює лише напрямок швидкості. Розкладемо вектор швидкості на складові, паралельну і перпендикулярну полю: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$. Для цих складових маємо рівняння

$$m\dot{\mathbf{v}}_{\parallel} = 0. \tag{11.4}$$

$$m\dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \frac{q}{c}\mathbf{v}_{\perp}\times\mathbf{B}. \tag{11.5}$$

З рівняння (11.4) випливає $\mathbf{v}_{\parallel} = \text{const}$.

Друге рівняння перепишемо у вигляді

$$\dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{\perp}, \qquad \boldsymbol{\omega} = -\omega_c\hat{\mathbf{b}}, \qquad \omega_c = \frac{qB}{mc}, \quad \hat{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{B}}{B}. \tag{11.6}$$

Воно описує обертання навколо напрямку магнітного поля з кутовою швидкістю $|\omega_c| = |q|B/mc$, яка називається *циклотронною частотою*, — рис. 11.1. Величина ω_c є знаковою: для $q < 0$ вона від'ємна, і тоді напрямок обертання змінюється на протилежний.

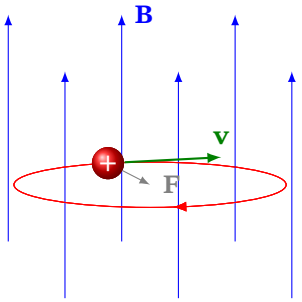


Рис. 11.1. Обертальний рух частинки із зарядом $q > 0$ навколо напрямку магнітного поля.

Якщо в момент потрапляння в область дії поля складова швидкості частинки $\mathbf{v}_{\perp}$ дорівнювала (за величиною) $v_{\perp}$, то радіус кола дорівнює

$$R = \frac{v_{\perp}}{|\omega_c|} = \frac{mcv_{\perp}}{|q|B}. \tag{11.7}$$

Величину R називають *ларморівським радіусом*. Якщо R набагато менший за характерний розмір області, де діє поле, то частинка встигає багато разів обернутися навколо силової лінії, і її рух упоперек поля сильно обмежений; такі частинки називають *замагніченими*.

Рух в однорідних паралельних електричному та магнітному полях (E ∥ B). У рівнянні руху

$$m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} \tag{11.8}$$

покладемо $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp$, де компоненти швидкості відповідно $\mathbf{v}_\parallel \parallel \mathbf{B}$ і $\mathbf{v}_\perp \perp \mathbf{B}$. Для цих компонент отримуємо рівняння

$$m\dot{\mathbf{v}}_\parallel = q\mathbf{E}, \tag{11.9}$$

$$m\dot{\mathbf{v}}_\perp = \frac{q}{c}\mathbf{v}_\perp\times\mathbf{B}. \tag{11.10}$$

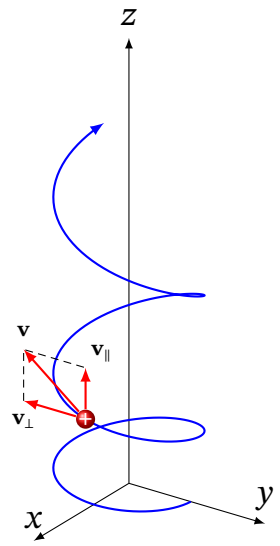


Рис. 11.2. Траєкторія частинки в паралельних електричному і магнітному полях.

Перше з них описує рівноприскорений рух уздовж напрямку електричного поля, а друге рівняння — обертальний рух навколо напрямку магнітного поля з циклотронною частотою $|\omega_c| = |q|B/mc$. Траєкторія частинки являє собою спіраль зі зростаючим кроком і з віссю, паралельною силовій лінії магнітного поля (рис. 11.2).

Рух у схрещених полях (E ⊥ B). Як і вище, виділимо компоненти швидкості, паралельну та перпендикулярну вектору магнітного поля: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp$ (рис. 11.3). Для цих компонент маємо рівняння

$$m\dot{\mathbf{v}}_\parallel = 0, \tag{11.11}$$

$$m\dot{\mathbf{v}}_\perp = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}_\perp\times\mathbf{B}\right). \tag{11.12}$$

Рівняння (11.11) дає $\mathbf{v}_\parallel = \text{const}$, що означає рух зі сталою швидкістю вздовж вектора $\mathbf{B}$, яка визначається початковими умовами.

Для знаходження компоненти $\mathbf{v}_\perp$ покладемо $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{u} + \mathbf{v}'$ і підберемо вектор $\mathbf{u}$ так, щоб виключити електричне поле:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{u}\times\mathbf{B} = 0. \tag{11.13}$$

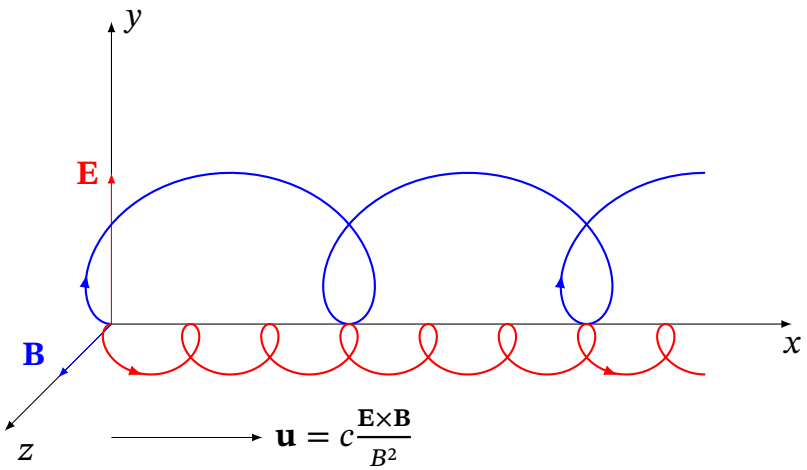


Рис. 11.3. Електричний дрейф додатно (синя крива) та від'ємно (червона крива) заряджених частинок.

Оскільки $\mathbf{u}\times\mathbf{B}\perp\mathbf{B}$, це рівняння має розв'язок лише за умови $\mathbf{E}\perp\mathbf{B}$ (саме такий випадок розглядаємо). Складова $\mathbf{u}$, паралельна $\mathbf{B}$, ні на що не впливає (її можна віднести до $\mathbf{v}_{\parallel}$), тому вважаємо $\mathbf{u}\perp\mathbf{B}$, тобто $\mathbf{u}\cdot\mathbf{B}=0$. Для знаходження вектора $\mathbf{u}$ помножимо почленно рівняння (11.13) векторно зліва на $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{B}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{B})=0. \tag{11.14}$$

Перетворимо подвійний векторний добуток з урахуванням взаємної ортогональності векторів $\mathbf{B}$ і $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{B}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{B})=\mathbf{u}B^2-\mathbf{B}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{B})=\mathbf{u}B^2. \tag{11.15}$$

У результаті отримаємо

$$\boxed{\mathbf{u}=c\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B^2}.} \tag{11.16}$$

Цей рух являє собою дрейф (зі сталою швидкістю) в напрямку, перпендикулярному обом полям ($\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$) (рис. 11.3). Відповідно для компоненти $\mathbf{v}'$ отримаємо рівняння

$$m\dot{\mathbf{v}}'=\frac{q}{c}\mathbf{v}'\times\mathbf{B}, \tag{11.17}$$

яке, як і рівняння (11.6), описує обертальний рух навколо напрямку магнітного поля з циклотронною частотою $|\omega_c|=|q|B/mc$.

Фізичний зміст дрейфу наочний. Умова (11.13) означає, що в системі відліку, яка рухається зі швидкістю $\mathbf{u}$, електричне поле зникає: $\mathbf{E}'=\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{u}\times\mathbf{B}=0$ (нерелятивістське перетворення полів, розділ 15),

і там частинка просто обертається по колу. З погляду нерухомого спостерігача: на тій половині оберту, де частинка рухається в напрямку сили $q\mathbf{E}$, вона розганяється й радіус кривини зростає, а на другій половині сповільнюється й радіус зменшується; тому орбіта не замикається і щооберту зміщується вбік (рис. 11.3). Для заряду протилежного знака змінюються на протилежні і напрямок обертання, і сила $q\mathbf{E}$, тож зміщення відбувається в той самий бік.

Сумарний рух являє собою накладення:

1. рівномірного руху вздовж вектора $\mathbf{B}$ зі швидкістю $(\mathbf{v}_\parallel)_0$, яка дорівнює компоненті швидкості $\mathbf{v}_\parallel$ в початковий момент,
2. дрейфового руху зі швидкістю $\mathbf{u}$,
3. обертання навколо напрямку $\mathbf{B}$.

Дрейфова швидкість $u = cE/B$ можлива лише при $E < B$ (тоді $u < c$). При $E > B$ системи відліку, в якій електричне поле зникає, не існує, і частинка необмежено прискорюється. Викладений нерелятивістський розв'язок справедливий при $E \ll B$ (і $|\mathbf{v}| \ll c$). Якщо ж E порівнянне з B, слід розв'язувати релятивістські рівняння руху (розділ 15): швидкість дрейфу cE/B при $E < B$ зберігається, але рух у системі відліку, що дрейфує, вже не є простим обертанням з частотою ω_c.

Знайдемо траєкторію шляхом прямого розв'язання рівнянь (11.12). Для цього запишемо ці рівняння в системі координат, показаній на рис. 11.3. Введемо орти $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ відповідно вздовж координатних осей $\{x,y,z\}$. Оскільки в розглянутому випадку $\mathbf{v}\times\mathbf{B} = \mathbf{i}B_z v_y - \mathbf{j}B_z v_x$, то, позначаючи для стислості $E_y = E$, $B_z = B$, маємо:

$$\text{(а) } \dot v_z = 0; \qquad \text{(б) } \dot v_x = \frac{qB}{mc}v_y; \qquad \text{(в) } \dot v_y = \frac{q}{m}E - \frac{qB}{mc}v_x. \tag{11.18}$$

Рівняння (11.18)а описує рівномірний рух уздовж вектора магнітного поля:

$$v_z = v_\parallel = \text{const}, \qquad z = z_0 + v_\parallel t. \tag{11.19}$$

Далі вважаємо $v_\parallel = 0$. Для розв'язання рівнянь (11.18)б і (11.18)в покладемо

$$V_x = v_x - u, \qquad u = cE/B. \tag{11.20}$$

Після цього рівняння (11.18)б, в набирають вигляду

$$\dot V_x = \omega_c v_y, \qquad \dot v_y = -\omega_c V_x, \tag{11.21}$$

де $\omega_c = qB/mc$ — циклотронна частота (для $q<0$ вона від'ємна). Виключаючи звідси змінну V_x, зведемо цю систему до рівняння гармонічного осцилятора:

$$\ddot v_y = -\omega_c^2 v_y, \tag{11.22}$$

звідки знаходимо:

$$v_y = v_0 \cos(\omega_c t + \varphi_0), \qquad y = y_0 + \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t + \varphi_0). \tag{11.23}$$

За допомогою другого рівняння системи (11.21) і підстановки (11.20) знаходимо $v_x(t)$ і $x(t)$:

$$\begin{gathered} v_x = u - \frac{1}{\omega_c}\dot{v}_y = u + v_0 \sin(\omega_c t + \varphi_0), \\ x = x_0 + ut - \frac{v_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t + \varphi_0). \end{gathered} \tag{11.24}$$

Формули (11.23), (11.24) визначають траєкторію частинки за будь-яких початкових умов. Виберемо початок координат так, що $x(0) = 0$, $y(0) = 0$. Тоді

$$\begin{cases} x = ut + \frac{v_0}{\omega_c}[\cos\varphi_0 - \cos(\omega_c t + \varphi_0)], \\ y = \frac{v_0}{\omega_c}[\sin(\omega_c t + \varphi_0) - \sin\varphi_0], \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = u + v_0 \sin(\omega_c t + \varphi_0), \\ v_y = v_0 \cos(\omega_c t + \varphi_0). \end{cases} \tag{11.25}$$

Крива, що задається рівняннями (11.25), називається *трохоїдою*. Її вигляд залежить від відношення $|v_0|/|u|$, яке визначається початковими умовами: при $|v_0| < |u|$ це хвиляста крива без петель, при $|v_0| > |u|$ — крива з петлями, а при $|v_0| = |u|$ — циклоїда з вістрями, в яких швидкість частинки перетворюється на нуль. Розглянемо частинний випадок, коли початкова швидкість частинки дорівнює нулю:

$$v_x(0) = v_y(0) = 0. \tag{11.26}$$

Тоді $\varphi_0 = \pi/2$, $v_0 = -u$ (тут v_0 — алгебраїчна амплітуда, яка може бути від'ємною), і з (11.25) знаходимо:

$$\begin{gathered} v_x = u(1 - \cos\omega_c t), \qquad v_y = u \sin\omega_c t; \\ x(t) = ut - \frac{u}{\omega_c} \sin\omega_c t, \qquad y(t) = \frac{u}{\omega_c}(1 - \cos\omega_c t). \end{gathered} \tag{11.27}$$

Ця траєкторія являє собою *циклоїду* (рис. 11.4). Таку траєкторію описує точка на ободі колеса радіуса $|u/\omega_c|$, що котиться без проковзування по площині зі швидкістю u. Відповідно до сказаного траєкторія являє собою суперпозицію дрейфу вздовж осі x і обертання навколо осі z з циклотронною частотою $\omega_c = qB/mc$.

Загальний випадок: довільно напрямлені однорідні поля. У загальному випадку є складова вектора електричного поля, паралельна

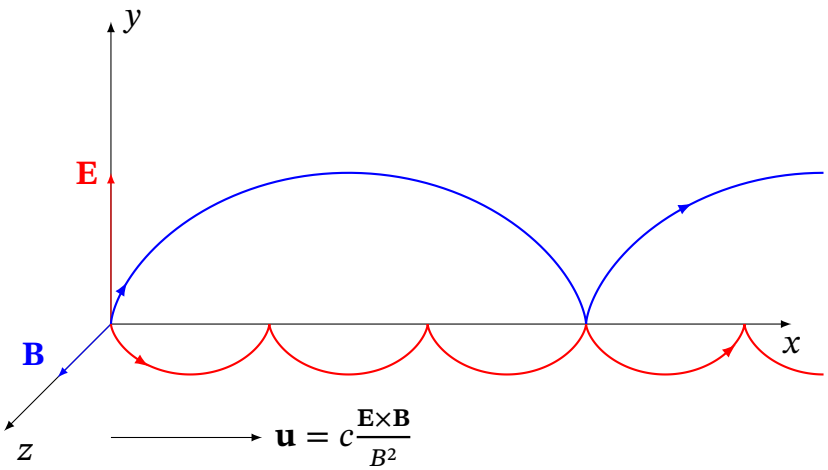


Рис. 11.4. Траєкторія частинки у взаємно перпендикулярних полях **B** і **E** за умови, що початкова швидкість дорівнює нулю.

магнітному полю: $\mathbf{E}_\parallel \neq 0$. Тоді для компоненти швидкості $\mathbf{v}_\parallel$ маємо рівняння

$$m\dot{\mathbf{v}}_\parallel = q\mathbf{E}_\parallel. \tag{11.28}$$

Це означає, що на рух, описаний вище, накладається прискорений рух у напрямку $\mathbf{E}_\parallel \parallel \mathbf{B}$. Дрейф зі швидкістю $\mathbf{u} = c\mathbf{E}\times\mathbf{B}/B^2$ зберігається, так само як і обертання з циклотронною частотою $\omega_c = qB/mc$. Уздовж поля частинка прискорюється необмежено, тож з часом її швидкість стає порівнянною з c і нерелятивістський розгляд перестає бути придатним.

11.2. Мас-спектрометр і циклотрон

Дві властивості руху в однорідному магнітному полі мають прямі технічні застосування: радіус кола (11.7) залежить від швидкості й питомого заряду частинки, а циклотронна частота від швидкості не залежить.

Мас-спектрометр. Схему найпростішого *мас-спектрометра* запропонував А. Демпстер (1918 р.): іони, прискорені напругою U, крізь щілину S потрапляють в однорідне магнітне поле, перпендикулярне до їхньої швидкості, і, описавши півколо, падають на фотопластинку чи детектор P (рис. 11.5). З $mv^2/2 = qU$ і (11.7) маємо

$$R = \frac{mcv}{qB} = \frac{c}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}, \tag{11.29}$$

тобто відстань $2R$ від щілини до місця падіння пропорційна $\sqrt{m/q}$: іони з різними питомими зарядами потрапляють у різні місця пластинки

й утворюють «спектр мас». Поворот на 180° має ще й фокусувальну властивість: іони, що входять у поле під малим кутом δ до осі пучка, падають на пластинку на відстані $2R\cos\delta \approx 2R(1-\delta^2/2)$ від щілини, тобто розмиття лінії лише другого порядку за δ.

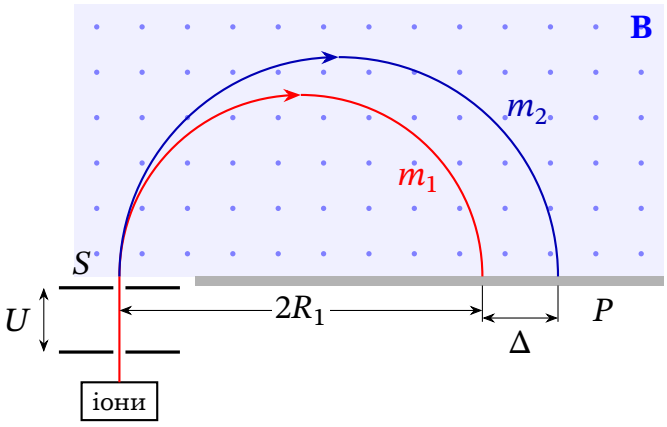


Рис. 11.5. Мас-спектрометр: іони з масами $m_1 < m_2$ (і однаковим зарядом) після повороту на 180° у полі **B**, напрямленому до читача, падають на пластинку P у різних місцях.

Саме мас-спектрометри виявили *ізотопи* стабільних елементів: Дж. Дж. Томсон у 1913 р. побачив дві лінії неону з масами 20 і 22, а Ф. Астон із 1919 р. виміряв маси ізотопів більшості елементів. Нині мас-спектрометрія — основний метод аналізу хімічного та ізотопного складу речовини (зокрема, ізотопного датування в геології й археології).

Циклотрон. Незалежність циклотронної частоти $\omega_c = qB/mc$ від швидкості використано в *циклотроні* — прискорювачі, який запропонував Е. Лоуренс (перший циклотрон Лоуренс і М. Лівінгстон побудували 1931 р.). Два порожнисті металеві півциліндри — *дуанти* $Д_1$ і $Д_2$ — розміщено у вакуумній камері між полюсами електромагніту (рис. 11.6). Усередині дуантів електричного поля немає, і частинка рухається по півколу; у зазорі між ними діє змінна напруга $U\cos\omega_c t$. Оскільки півперіод обертання $\pi/|\omega_c|$ від швидкості не залежить, частинка, яку прискорило поле в зазорі, через пів оберту знову підходить до зазору саме тоді, коли поле змінило знак, і знову прискорюється. За кожен оберт її енергія зростає на $2qU$, радіус зростає разом зі швидкістю, і траєкторія розкручується в спіраль. На краю дуантів (радіус R) кінетична енергія дорівнює

$$W = \frac{mv^2}{2} = \frac{q^2B^2R^2}{2mc^2} \qquad (11.30)$$

і від напруги U не залежить: вона визначає лише кількість обертів. Наприклад, для протонів за $B = 15$ кГс і $R = 50$ см маємо $W \approx 27$ МеВ, а частота генератора $\omega_c/2\pi \approx 23$ МГц.

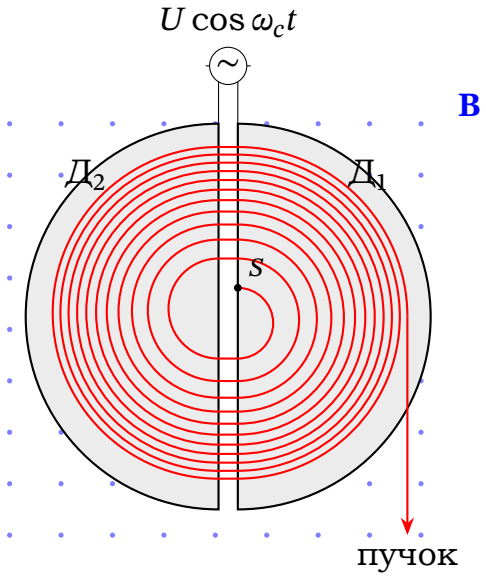


Рис. 11.6. Циклотрон (вигляд згори): дуанти $Д_1$, $Д_2$ у полі **B**, напрямленому до читача; частинки з джерела S прискорюються в зазорі напругою з циклотронною частотою.

Межу класичному циклотрону ставить теорія відносності: частота обертання релятивістської частинки $\omega = qB/(\gamma mc)$, де $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (розділ 15), зменшується зі зростанням енергії, частинка відстає від фази напруги, і прискорення зривається. Тому протони в циклотроні прискорюють лише до енергій порядку 20 МеВ; далі застосовують синхроциклотрони (частоту напруги зменшують у міру прискорення) і синхротрони.

11.3. Застосування схрещених полів

Рух у схрещених полях має два важливі застосування: ефект Холла в твердому тілі та холлівські двигуни в космічній техніці.

Ефект Холла. Класичний приклад руху заряджених частинок у схрещених полях реалізується у твердому провіднику чи напівпровіднику, по якому тече електричний струм і який знаходиться в магнітному полі, — це *ефект Холла*, відкритий Е. Холлом у 1879 р.

Розглянемо провідну пластинку завтовшки d і завширшки w, вздовж якої (вісь y) тече струм густиною **j**, а перпендикулярно площині пластинки (вісь z) прикладене магнітне поле **B** (рис. 11.7). Носії

заряду — концентрацією n і зарядом q — рухаються вздовж провідника з усередненою (дрейфовою) швидкістю $\mathbf{v}_d$, яку підтримує поздовжнє електричне поле $\mathbf{E}_x$ (у провіднику носії зазнають зіткнень), так що

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{v}_d. \tag{11.31}$$

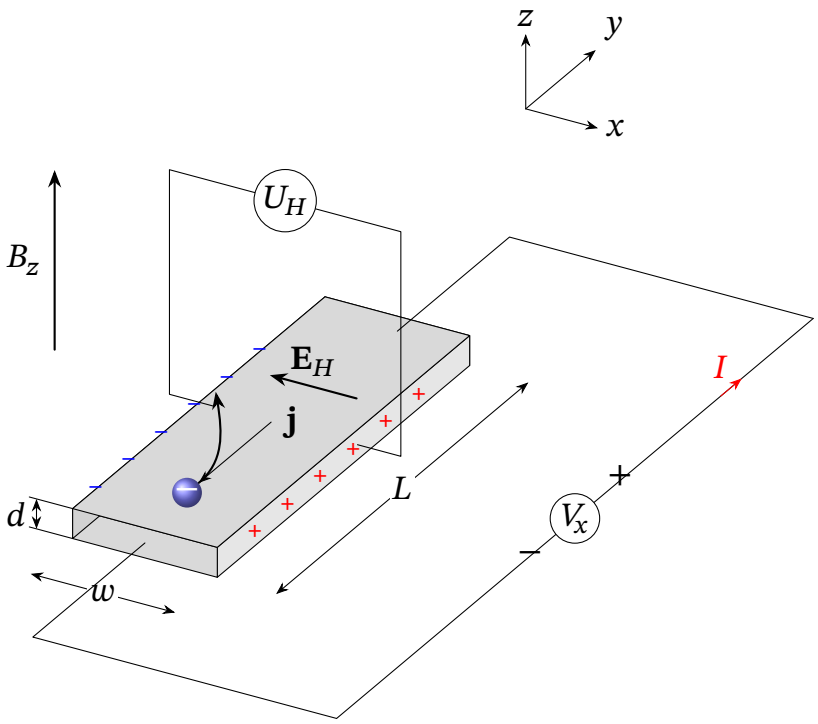


Рис. 11.7. Ефект Холла: струм $\mathbf{j}$ уздовж пластинки, магнітне поле $\mathbf{B}$ перпендикулярно їй; сила Лоренца відхиляє носії заряду до одного з країв, у результаті чого встановлюється поперечне холлівське поле $\mathbf{E}_H$.

На кожен носій заряду, що рухається з дрейфовою швидкістю $\mathbf{v}_d$ в магнітному полі, діє сила Лоренца $\frac{q}{c}\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$, яка відхиляє носії до одного з бічних країв пластинки. Внаслідок цього на протилежних гранях накопичується нескомпенсований заряд, що створює поперечне (холлівське) електричне поле $\mathbf{E}_H$. У стаціонарному режимі результуюча поперечна сила, що діє на носії, дорівнює нулю, тобто виконується та сама умова (11.13), яку ми використали для знаходження дрейфової швидкості:

$$q\mathbf{E}_H + \frac{q}{c}\mathbf{v}_d \times \mathbf{B} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{E}_H = -\frac{1}{c}\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}. \tag{11.32}$$

Отже, поперечне поле $\mathbf{E}_H$ визначається тією самою умовою нульової результуючої сили, що й дрейф у схрещених полях (11.16). Різниця в тому, що поздовжній рух носіїв тут підтримується поздовжнім полем $\mathbf{E}_x$ (зі зіткненнями), а поперечне поле виникає самоузгоджено.

У сильних полях ($\omega_c\tau \gg 1$, де τ — час між зіткненнями) аналогія з $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$-дрейфом буквальна; у слабких ($\omega_c\tau \ll 1$) рівність (11.32) виражає баланс усереднених сил.

Виразивши дрейфову швидкість через густину струму за формулою (11.31), $v_d = j/(nq)$, знаходимо величину холлівського поля (тут $j = |\mathbf{j}|$, $B = B_z$; знак q визначає, до якої грані відхиляються носії, а отже, і напрямок $\mathbf{E}_H$):

$$E_H = \frac{1}{nqc}\, jB. \tag{11.33}$$

Різниця потенціалів між бічними гранями пластинки (холлівська напруга) дорівнює $U_H = E_H w$, а оскільки повний струм $I = jwd$, отримуємо

$$\boxed{U_H = \frac{1}{nqc}\,\frac{IB}{d}.} \tag{11.34}$$

Коефіцієнт

$$R_H = \frac{1}{nqc} \tag{11.35}$$

називається *сталою Холла*; вона знакова: $R_H < 0$ для електронів і $R_H > 0$ для дірок. Ця формула справедлива для одного типу носіїв заряду; якщо час між зіткненнями залежить від енергії носіїв, у ній з'являється ще множник порядку одиниці (холл-фактор), що залежить від механізму розсіяння. Для напівпровідників з електронами й дірками вираз для R_H складніший.

Знак холлівської напруги визначається знаком носіїв заряду: він протилежний для провідників з електронною ($q < 0$) і дірковою ($q > 0$) провідністю, що дає змогу експериментально встановити тип основних носіїв у зразку. За відомими I, B, d і виміряним U_H формула (11.34) дає змогу визначити концентрацію носіїв заряду n. Вимірювання ефекту Холла широко використовують для характеризації напівпровідників, а також у датчиках магнітного поля (датчиках Холла).

Дрейф у плазмі та плазмові двигуни. Розглянутий електричний дрейф має фундаментальне значення для фізики плазми: оскільки швидкість дрейфу не залежить від знака заряду й маси частинки, замагнічені електрони та іони в схрещених полях дрейфують *в один і той самий бік* з однаковою швидкістю. Це принципово відрізняє $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$-дрейф від руху частинки під дією самого лише електричного поля, який розділяє заряди різного знака і породжує струм.

Схрещені поля лежать в основі роботи *холлівських двигунів*, одного з найпоширеніших типів електричних ракетних двигунів для космічних апаратів. Проте тут істотною є не однаковість дрейфу еле-

ктронів та іонів, а, навпаки, різниця в ступені їхнього замагнічення: електрони замагнічені, а іони — ні.

Принцип дії холлівського двигуна. У кільцевому каналі двигуна створюється радіальне магнітне поле **B** та осьове електричне поле **E**, причому **E** ⊥ **B**. Електрони, інжектовані з катода, потрапляючи в область сильного радіального поля, замагнічуються (їхній ларморівський радіус R, див. (11.7), значно менший за розміри каналу) і, згідно з формулою (11.16), здійснюють азимутальний дрейф — це і є «*холлівський струм*», що дав назву двигуну.

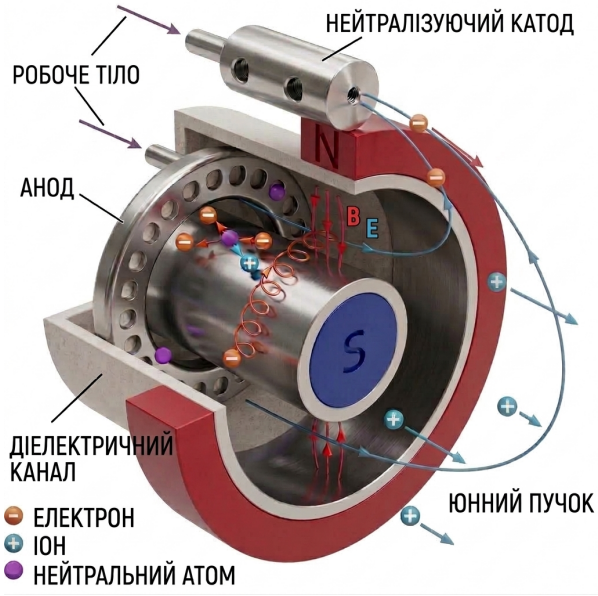


Рис. 11.8. Схема холлівського двигуна.

Іони ж, маючи значно більший ларморівський радіус (через велику масу), практично не замагнічуються в тому самому полі й вільно прискорюються електричним полем уздовж осі каналу, створюючи тягу. Радіальне магнітне поле, замагнічуючи електрони, різко обмежує їхню рухливість упоперек силових ліній, тобто вздовж осі до анода: замагнічений електрон обертається навколо силової лінії і зміщується впоперек неї лише внаслідок зіткнень. Тому основне падіння потенціалу зосереджується в зоні прискорення поблизу виходу каналу. Електрони, що дрейфують, одночасно іонізують ударами робочу речовину (зазвичай ксенон), а плазма в каналі в цілому залишається квазінейтральною.

11.4. Методи вимірювання питомого заряду електрона

Питомим зарядом називається відношення q/m, де m — маса частинки.

Рух частинки за наявності тільки електричних і магнітних полів

описується рівнянням

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right). \tag{11.36}$$

Звідси видно, що воно повністю визначається питомим зарядом q/m, а не зарядом і масою окремо.

Вимірювання q/m за відхиленням траєкторії в електричному полі. У цьому методі пучок частинок пропускається між обкладками зарядженого конденсатора, і за виміряним відхиленням траєкторії визначають відношення q/m. Нехай l — довжина конденсатора вздовж початкової швидкості частинок $\mathbf{v}_0$, а L — відстань від краю конденсатора до екрана; швидкість v_0 вважаємо відомою. Схема досліду показана на рис. 11.9.

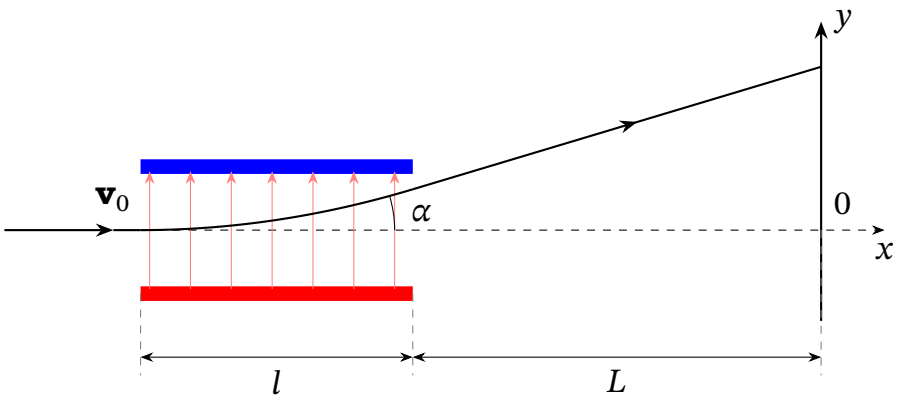


Рис. 11.9. Відхилення зарядженої частинки електричним полем конденсатора.

У конденсаторі є однорідне електричне поле з напруженістю $\mathbf{E}$, напрямлене перпендикулярно початковій швидкості частинки $\mathbf{v}_0$. Це поле викликає рух з прискоренням

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m}\mathbf{E}, \qquad \mathbf{a}\perp\mathbf{v}_0. \tag{11.37}$$

Якби поле було відсутнє, то частинки потрапляли б у точку «0» екрана (рис. 11.9). Під дією поля відхилення частинки в конденсаторі у вертикальному напрямку становить

$$y_1 = \frac{at^2}{2} = \frac{qE}{2m}t^2 = \frac{q}{2m}E\frac{l^2}{v_0^2}, \tag{11.38}$$

де $t = l/v_0$ — час прольоту конденсатора. Оскільки поле $\mathbf{E}$ напрямлене вздовж осі y, компонента швидкості $v_x = \text{const} = v_0$.

На виході з конденсатора швидкість v_y становитиме

$$v_y = at = \frac{qE}{m}\frac{l}{v_0}. \tag{11.39}$$

Далі частинка летить прямолінійно, причому траєкторія утворює кут α з віссю x такий, що

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{qE}{m}\frac{l}{v_0^2}; \qquad y_1 = \frac{l}{2}\operatorname{tg}\alpha. \tag{11.40}$$

Долітаючи до екрана, вона набуває додаткового відхилення

$$y_2 = L\operatorname{tg}\alpha. \tag{11.41}$$

Повне зміщення частинки в результаті становитиме

$$\boxed{y = y_1 + y_2 = \left(\frac{1}{2}l + L\right)\operatorname{tg}\alpha = \frac{qE}{mv_0^2}l\left(\frac{1}{2}l + L\right).} \tag{11.42}$$

Таким чином, за виміряним відхиленням частинки y за допомогою формули (11.42) визначається питомий заряд частинки q/m.

Швидкість v_0 тут має бути відома окремо. Якщо, наприклад, частинки прискорено напругою U ($mv_0^2/2 = qU$), то q/m у формулі (11.42) скорочується: $y = \dfrac{El(l/2 + L)}{2U}$, тобто відхилення в електричному полі від питомого заряду не залежить.

Вимірювання q/m за відхиленням траєкторії в магнітному полі. Для вимірювання питомого заряду можна замість електричного поля використати магнітне, також напрямлене перпендикулярно траєкторії частинки (рис. 11.10). На частинку діє сила Лоренца $\mathbf{F} = \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}$, створюючи прискорення

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{q}{mc}\mathbf{v}\times\mathbf{B}. \tag{11.43}$$

Нехай швидкість частинки достатньо велика, так що радіус кривини траєкторії $R = mcv_0/(|q|B)$ набагато більший за довжину l області поля, а відхилення за час прольоту мале. Тоді можна прийняти

$$v_x \approx v_0, \qquad \mathbf{a} \approx \frac{q}{mc}\mathbf{v}_0\times\mathbf{B}, \qquad a = |\mathbf{a}| \approx \frac{|q|}{mc}v_0 B. \tag{11.44}$$

Відхилення частинки за час прольоту поля $t = l/v_0$ становитиме

$$y_1 = \frac{1}{2}at^2 = \frac{q}{2m}B\frac{l^2}{v_0 c}. \tag{11.45}$$

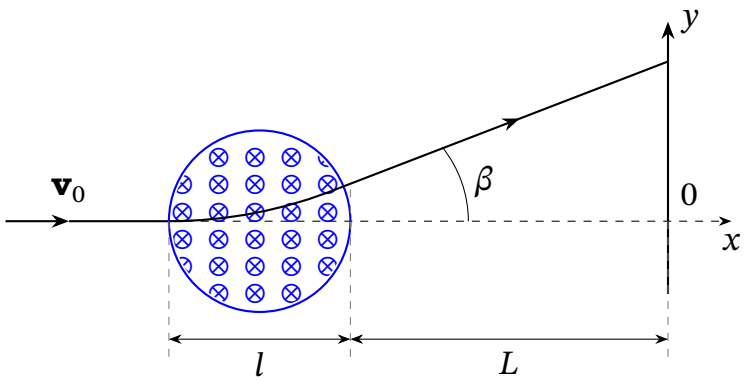


Рис. 11.10. Відхилення зарядженої частинки магнітним полем.

Швидкість v_y частинки на виході з області дії поля дорівнює

$$v_y = at = \frac{ql}{mc}B, \tag{11.46}$$

а кут, який утворює вектор швидкості з віссю x, визначається рівністю

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_y}{v_x} \approx \frac{v_y}{v_0} = \frac{qlB}{mv_0c}, \qquad y_1 = \frac{l}{2}\operatorname{tg}\beta. \tag{11.47}$$

Долітаючи до екрана, частинка отримує додаткове зміщення

$$y_2 = L\operatorname{tg}\beta. \tag{11.48}$$

Повне зміщення частинки становитиме

$$\boxed{y = y_1 + y_2 = \left(\frac{1}{2}l + L\right)\operatorname{tg}\beta = \frac{qB}{mv_0c}l\left(\frac{1}{2}l + L\right).} \tag{11.49}$$

Вимірюючи це зміщення, можна знайти питомий заряд q/m частинки.

Тут теж потрібна відома швидкість v_0. Якщо частинки прискорено напругою U, то $v_0 = \sqrt{2qU/m}$ і $y = \sqrt{q/m}\,\dfrac{Bl}{c\sqrt{2U}}\left(\dfrac{l}{2} + L\right)$, тобто магнітне відхилення, на відміну від електричного, залежить від q/m.

Метод Томсона. Дж. Дж. Томсон використав компенсаційну схему, в якій рух частинки визначався як електричним, так і магнітним полем. Ця схема давала змогу не вимірювати попередньо швидкість частинок v_0. Суть методу полягає в такому: спочатку вмикають тільки магнітне поле (як описано вище) і вимірюють відхилення пучка заряджених частинок:

$$y = \frac{qB}{mv_0c}l\left(\frac{1}{2}l + L\right). \tag{11.50}$$

Потім додатково вмикають електричне поле, перпендикулярне як до магнітного поля ($\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$), так і до швидкості пучка, і підбирають його величину таким чином, щоб повністю компенсувати відхилення пучка і повернути його в точку $y = 0$. Умовою компенсації є рівність

$$qE = \frac{q}{c} v_0 B, \qquad \text{або} \qquad v_0 = c\frac{E}{B}. \tag{11.51}$$

Тому наведений вище вираз для зміщення пучка в магнітному полі переписується у вигляді

$$y = \frac{q}{m}\frac{B^2}{c^2 E} l\left(\frac{1}{2}l + L\right). \tag{11.52}$$

Звідси за відомими значеннями зміщення y і полів B та E визначається питомий заряд q/m.

Умова (11.51) збігається з умовою (11.13): частинки, що не відхиляються, рухаються з дрейфовою швидкістю (11.16), тобто $v_0 = u$. Схрещені поля відбирають частинки за швидкістю, тому таку конфігурацію називають *фільтром швидкостей*.

Описаним методом Дж. Дж. Томсон у 1897 р. при вивченні катодних променів вперше виміряв питомий заряд електрона (сам Томсон вимірював відхилення в електричному полі, а компенсував його магнітним; це рівноцінно). Сучасне значення питомого заряду електрона (Томсон отримав величину того ж порядку; тут $e < 0$ — заряд електрона) становить

$$e/m = -5{,}273 \cdot 10^{17} \text{ од. СГСЕ} \cdot \text{г}^{-1} = -1{,}759 \cdot 10^{11} \text{ Кл} \cdot \text{кг}^{-1}. \tag{11.53}$$

11.5. Досліди Міллікена

У попередніх дослідах вимірювався питомий заряд частинок. Р. Міллікен у 1909 р. запропонував спосіб безпосереднього вимірювання заряду. Схема його установки показана на рис. 11.11.

У простір між пластинами конденсатора Міллікен вводив за допомогою розпилювача найдрібніші крапельки олії. Краплі електризувалися при розпиленні, а їхній заряд можна було змінювати, опромінюючи повітря в камері рентгенівськими променями: утворені іони захоплювалися краплями. Рухом крапель керували, змінюючи величину і знак напруги на пластинах конденсатора.

Розглянемо метод докладніше. Будемо для визначеності вважати, що заряд краплі від'ємний, $q < 0$. У формулах нижче, де йдеться про величини сил і швидкостей, під q розуміємо $|q|$.

На краплю діють такі сили:

1. сила з боку електричного поля $q\mathbf{E}$;

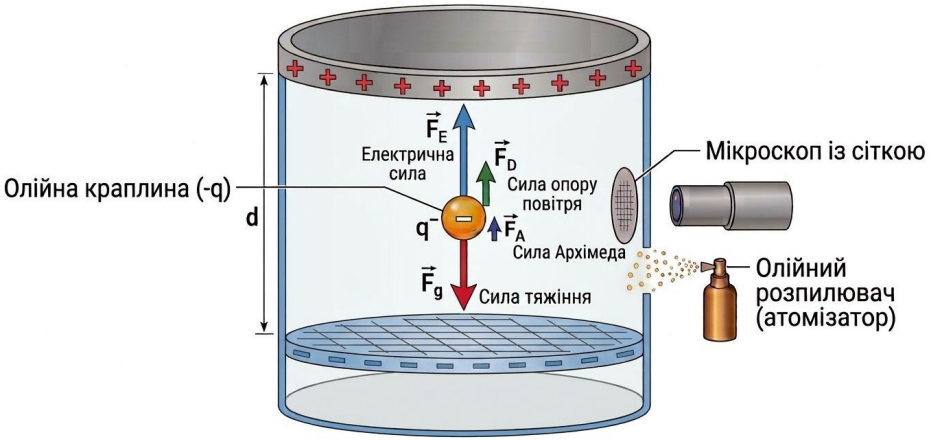


Рис. 11.11. Схема установки Міллікена для вимірювання заряду електрона (сила $q\mathbf{E}$ вказана для випадку $q < 0$).

2. рівнодійна сили тяжіння і архімедової сили

$$\mathbf{F}_g = \frac{4\pi}{3} r^3 (\rho - \rho_0)\mathbf{g}, \tag{11.54}$$

де r — радіус краплі, ρ і ρ_0 — густини краплі і повітря відповідно;

3. сила в'язкого тертя

$$\mathbf{F}_\eta = -6\pi\eta r\mathbf{v}. \tag{11.55}$$

За відсутності електричного поля крапля падає зі сталою швидкістю v_0, яка визначається з умови $F_g = F_\eta$, або

$$\frac{4\pi}{3} r^3 (\rho - \rho_0) g = 6\pi\eta r v_0. \tag{11.56}$$

Увімкнувши електричне поле, змушують краплю підніматися з невеликою швидкістю v_E, яку можна знайти з рівняння

$$\frac{4\pi}{3} r^3 (\rho - \rho_0) g + 6\pi\eta r v_E = qE. \tag{11.57}$$

З урахуванням рівності (11.56) перепишемо це співвідношення у вигляді

$$6\pi\eta r(v_0 + v_E) = qE, \tag{11.58}$$

звідки можна знайти заряд краплі:

$$q = 6\pi\eta r \frac{v_0 + v_E}{E}. \tag{11.59}$$

Практично вимірювання здійснювалося таким способом. За відсутності електричного поля вимірювалася швидкість вільного падіння краплі v_0. Потім із співвідношення (11.56) визначався радіус краплі:

$$r = \sqrt{\frac{9\eta v_0}{2g(\rho - \rho_0)}}. \tag{11.60}$$

Увімкнувши електричне поле і вимірявши швидкість підйому краплі v_E, за формулами (11.59)–(11.60) або

$$q = 6\pi\eta\sqrt{\frac{9\eta v_0}{2g(\rho-\rho_0)}}\frac{v_0+v_E}{E} = 9\pi\sqrt{\frac{2\eta^3 v_0}{g(\rho-\rho_0)}}\frac{v_0+v_E}{E} \tag{11.61}$$

можна знайти заряд q. Слід мати на увазі, що для крапель мікронних розмірів закон Стокса потребує поправки (Каннінгема) на проковзування газу, оскільки радіус краплі порівнянний з довжиною вільного пробігу молекул повітря; Міллікен враховував таку поправку під час обробки результатів.

Заряд краплі змінювався при захопленні іона, і при цьому стрибком змінювалася швидкість підйому v_E. Згідно з (11.59) стрибку Δv_E відповідає зміна заряду $\Delta q = 6\pi\eta r\,\Delta v_E/E$. Аналізуючи результати численних вимірювань, Міллікен встановив, що зміни заряду крапель Δq і сам заряд q були завжди цілими кратними одній і тій же мінімальній величині:

$$|e| \approx 4{,}80\cdot 10^{-10}\ \text{Фр} = 1{,}602\cdot 10^{-19}\ \text{Кл}. \tag{11.62}$$

За відомими значеннями питомого заряду e/m і заряду e електрона можна знайти масу:

$$m = \frac{|e|}{|e/m|} \approx 9{,}11\cdot 10^{-28}\ \text{г}. \tag{11.63}$$

Значення досліду Міллікена полягає в тому, що була експериментально доведена дискретність електричного заряду.

Дослід виконано Р. Міллікеном разом із Г. Флетчером у 1909–1913 рр. Спершу використовували краплі води, але вони швидко випаровувалися, тому перейшли до олії, краплі якої тривалий час зберігають розмір. Значення заряду, отримане Міллікеном у 1913 р. ($4{,}774\cdot 10^{-10}$ од. СГСЕ), було занижене приблизно на 0,6 % через неточне значення в'язкості повітря. Результати Міллікена оскаржував Ф. Еренгафт, який стверджував, що спостерігав «субелектрони» з меншим зарядом; подальші вимірювання цього не підтвердили. У 1923 р. Міллікен отримав Нобелівську премію з фізики.

Підсумки

Рух зарядженої частинки в електричному й магнітному полях визначається її питомим зарядом q/m та початковими умовами: саме ця комбінація, а не заряд і маса окремо, входить у рівняння руху. Основні результати:

- однорідне **E** — рівноприскорений рух (11.2);

- однорідне $\mathbf{B}$ — рівномірний рух уздовж поля й обертання з циклотронною частотою $|\omega_c| = |q|B/mc$ по колу ларморівського радіуса $R = mc\upsilon_\perp/(|q|B)$, тобто гвинтова лінія; сила Лоренца не виконує роботи;
- $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$ — спіраль зі зростаючим кроком;
- $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$, $E < B$ — до обертання додається дрейф $\mathbf{u} = c\,\mathbf{E}\times\mathbf{B}/B^2$, що не залежить ні від знака заряду, ні від маси; траєкторія — трохоїда, а за $|\upsilon_0| = |u|$ (зокрема з нульовою початковою швидкістю) — циклоїда;
- мас-спектрометр: $2R = \dfrac{2c}{B}\sqrt{\dfrac{2mU}{q}} \propto \sqrt{m/q}$; циклотрон: частинка прискорюється в зазорі між дуантами з частотою ω_c, яка не залежить від швидкості, до енергії $W = \dfrac{q^2B^2R^2}{2mc^2}$;
- ефект Холла: $U_H = \dfrac{1}{nqc}\dfrac{IB}{d}$, $R_H = \dfrac{1}{nqc}$; знак U_H визначає тип носіїв заряду;
- метод Томсона: компенсація відхилення дає $\upsilon_0 = cE/B$ (фільтр швидкостей) і питомий заряд q/m; дослід Міллікена: $q = 6\pi\eta r\,(\upsilon_0 + \upsilon_E)/E$, заряд краплі кратний e.

Ці два вимірювання дають змогу знайти й саму масу електрона: $m = |e|/|e/m| \approx 9{,}11\cdot10^{-28}$ г.

Задачі

11.1. *Електрон в однорідному полі.* Електрон влітає зі швидкістю $\upsilon = 10^9$ см/с в однорідне магнітне поле $B = 100$ Гс перпендикулярно до ліній індукції. (а) Покажіть, що траєкторія — коло, і знайдіть його радіус R та циклотронну частоту ω_c; чи залежить ω_c від υ? (б) Обчисліть R і ω_c ($e = 4{,}8\cdot10^{-10}$ СГСЕ, $m = 9{,}1\cdot10^{-28}$ г, $c = 3\cdot10^{10}$ см/с). (в) Яким буде рух, якщо $\mathbf{v}$ утворює з $\mathbf{B}$ кут α?

11.2. *Спіраль у паралельних полях.* Частинка із зарядом q і масою m починає рух зі швидкістю υ_0, перпендикулярною до однорідних паралельних полів $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$. Знайдіть її траєкторію та зміщення Δz_n вздовж поля за n-й оберт.

11.3. *Електрон у схрещених полях.* Електрон стартує зі стану спокою в схрещених полях $E = 0{,}1$ СГСЕ (30 В/см) і $B = 100$ Гс. Знайдіть (а) швидкість і напрямок дрейфу; (б) максимальну швидкість електрона; (в) максимальне відхилення від осі дрейфу; (г) зсув вздовж осі дрейфу за один період обертання. В який бік спершу відхиляється електрон?

11.4. *Ізотопи неону.* У мас-спектрометрі (рис. 11.5) однократно іонізовані атоми неону прискорено напругою $U = 1$ кВ, поле $B = 1000$ Гс. На якій відстані від щілини потраплять на пластинку іони $^{20}Ne^+$ і $^{22}Ne^+$? Якою має бути ширина щілини, щоб їхні лінії не перекривалися? (1 а.о.м. $= 1{,}66 \cdot 10^{-24}$ г, 1 кВ $= 10/3$ СГСЕ.)

11.5. *Циклотрон.* Протони прискорюються в циклотроні з полем $B = 15$ кГс і радіусом дуантів $R = 50$ см; амплітуда напруги між дуантами $U = 30$ кВ. Знайдіть (а) частоту генератора; (б) кінетичну енергію протонів на виході; (в) кількість обертів, якщо частинка щоразу проходить зазор у максимумі напруги; (г) на скільки відсотків зменшиться наприкінці частота обертання через релятивістський ефект ($m_pc^2 = 938$ МеВ).

11.6. *Датчик Холла.* Напівпровідникова пластинка з електронною провідністю має концентрацію носіїв $n = 10^{16}$ см$^{-3}$ і товщину $d = 0{,}5$ мм. Крізь неї тече струм $I = 1$ мА, а перпендикулярно до пластинки прикладено поле $B = 1000$ Гс. (а) Обчисліть холлівську напругу. (б) Як змінить знак U_H, якщо замінити пластинку діркового типу з тією самою концентрацією? (в) Як за виміряною U_H знайти n? (Використайте 1 мА $= 3 \cdot 10^6$ СГСЕ, 1 СГСЕ потенціалу $= 300$ В.)

11.7. *Замагніченість у холлівському двигуні.* У каналі двигуна радіальне поле $B = 200$ Гс, осьове електричне поле $E = 200$ В/см. Оцініть (а) ларморівський радіус електрона з енергією 10 еВ і іона ксенону ($M \approx 131$ а.о.м.) з енергією 300 еВ; (б) швидкість азимутального дрейфу електронів. Чи можна вважати іони замагніченими, якщо розмір каналу становить кілька сантиметрів?

11.8. *Відхилення після прискорення.* Електрони і протони прискорено однаковою напругою U і пропущено крізь відхиляючий конденсатор, а в другому досліді — крізь область магнітного поля (довжини l, відстань до екрана L, відхилення мале). Покажіть, що (а) в електричному полі відхилення y не залежить від q/m, і знайдіть y; (б) у магнітному полі $|y_e|/|y_p| = \sqrt{m_p/m_e}$.

11.9. *Метод Томсона.* У схемі Томсона довжина області полів $l = 2$ см, відстань до екрана $L = 20$ см. При $B = 3$ Гс пляма на екрані зміщується на $y = 2{,}2$ см, а електричне поле $E = 0{,}1$ СГСЕ повертає її в початкове положення. Знайдіть швидкість електронів і питомий заряд.

? **11.10.** *Краплина Міллікена.* Крапля олії ($\rho = 0{,}9$ г/см^3) у повітрі ($\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ г·см$^{-1}$·с$^{-1}$, густиною повітря знехтуйте) падає зі швидкістю $v_0 = 0{,}02$ см/с. У полі $E = 10$ СГСЕ вона піднімається зі швидкістю $v_E = 0{,}011$ см/с, а після захоплення іона — зі швидкістю $v'_E = 0{,}0214$ см/с. Знайдіть радіус краплі, її заряд у першому випадку та зміну заряду. Поправкою Каннінгема знехтуйте.

? Контрольні питання

1. Запишіть рівняння руху зарядженої частинки в однорідному електричному полі та його розв'язок. Яким буде рух і куди напрямлене прискорення?
2. Чому сила Лоренца не виконує роботи і не змінює модуль швидкості частинки? Як розкладають швидкість на складові $\mathbf{v}_\parallel$ і $\mathbf{v}_\perp$ в магнітному полі та який рух відповідає кожній із них?
3. Що таке циклотронна частота? Від яких величин вона залежить, а від яких (наприклад, від швидкості частинки) — ні? Запишіть формулу для радіуса кола R.
4. Якою є траєкторія частинки в однорідних паралельних полях $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$ (рис. 11.2)? Чому крок спіралі зростає?
5. У схрещених полях $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ введено швидкість $\mathbf{u}$ (рис. 11.3). З якої умови її знаходять, і чому їй відповідає формула $\mathbf{u} = c\,\mathbf{E}\times\mathbf{B}/B^2$? Куди напрямлений дрейф відносно $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$?
6. Чому швидкість електричного дрейфу не залежить від знака заряду й маси частинки? Чому при цьому вона все ж не поділяє заряди різного знака, на відміну від руху під дією самого лише електричного поля?
7. З яких трьох рухів складається рух у схрещених полях? За якої умови існує дрейфова швидкість, що відбувається при $E > B$ і коли потрібні релятивістські рівняння?
8. Що таке трохоїда та циклоїда? За якої початкової умови траєкторія в схрещених полях є циклоїдою (рис. 11.4) і з чим її можна порівняти механічно?
9. Як працює мас-спектрометр (рис. 11.5)? Чому в циклотроні частота прискорювальної напруги може бути сталою, від чого залежить кінцева енергія частинок і що обмежує її зростання?
10. У чому полягає ефект Холла (рис. 11.7)? Чому в стаціонарному режимі результуюча поперечна сила на носії дорівнює нулю?
11. Виведіть формулу для холлівської напруги U_H і сталої Холла R_H. Які величини можна визначити за виміряною U_H і як за знаком

холлівської напруги визначити тип носіїв?

12. Поясніть принцип дії холлівського двигуна. Чому електрони в каналі замагнічені, а іони — ні, і як це забезпечує тягу?

13. Що таке питомий заряд? Чому рух частинки в полях визначається саме відношенням q/m, а не зарядом і масою окремо?

14. Опишіть метод вимірювання q/m за відхиленням в електричному полі конденсатора (рис. 11.9). З яких двох частин складається повне зміщення $y = y_1 + y_2$?

15. У чому перевага методу Томсона порівняно з вимірюванням окремо в електричному та магнітному полі? Яка умова компенсації відхилення, що з неї випливає для швидкості v_0 і чому таку конфігурацію полів називають фільтром швидкостей?

16. Опишіть установку Міллікена (рис. 11.11). Які сили діють на краплю і як за швидкостями v_0 та v_E визначають її радіус і заряд?

17. Що довели досліди Міллікена і чому саме зміни заряду крапель були кратні одній і тій же величині? За відомими e та e/m як знайти масу електрона?

Частина V

Електродинаміка

Неможливо позбутися відчуття, що ці математичні формули існують незалежно від нас і володіють власним розумом, що вони мудріші за нас, мудріші навіть за тих, хто їх відкрив, і що ми дістаємо з них більше, ніж спочатку було закладено...

Генріх Герц (за Е. Т. Беллом, «Творці математики»)

12 Явище електромагнітної індукції

Перетворити магнетизм на електрику.

М. Фарадей, запис у робочому щоденнику, 1822

12.1. Явище електромагнітної індукції

У 1831 р. М. Фарадей відкрив *явище електромагнітної індукції*: воно полягає в тому, що в замкненому провідному контурі при зміні магнітного потоку, охопленого цим контуром, виникає електричний струм, який називають *індукційним*.

У низці дослідів Фарадей встановив, що індукційний струм виникає щоразу, коли змінюється магнітний потік крізь контур — незалежно від *причини* цієї зміни: чи то рухається магніт відносно нерухомого контуру, чи рухається сам контур відносно нерухомого магніту, чи змінюється сила струму в сусідньому контурі (рис. 12.1).

Розглянемо докладніше ці три групи дослідів.

Дослід 1. Рух магніту відносно нерухомої котушки. Котушку, з'єднану з гальванометром, закріплюють нерухомо. До неї наближають або віддаляють постійний магніт. Поки магніт нерухомий, стрілка гальванометра стоїть на нулі. Щойно магніт починає рухатися, стрілка відхиляється — у котушці виникає індукційний струм. Під час наближення магніту струм має один напрям, під час віддалення — протилежний. Коли рух припиняється, струм зникає.

Дослід 2. Рух котушки відносно нерухомого магніту. Магніт залишають нерухомим, а рухають котушку, з'єднану з гальванометром. Спостерігається той самий ефект: під час руху виникає індукційний струм, напрям якого залежить від напряму руху котушки. Отже, важливою є не абсолютна швидкість магніту чи котушки, а їхня *від-*

носна швидкість: саме від неї залежить швидкість зміни магнітного потоку крізь контур.

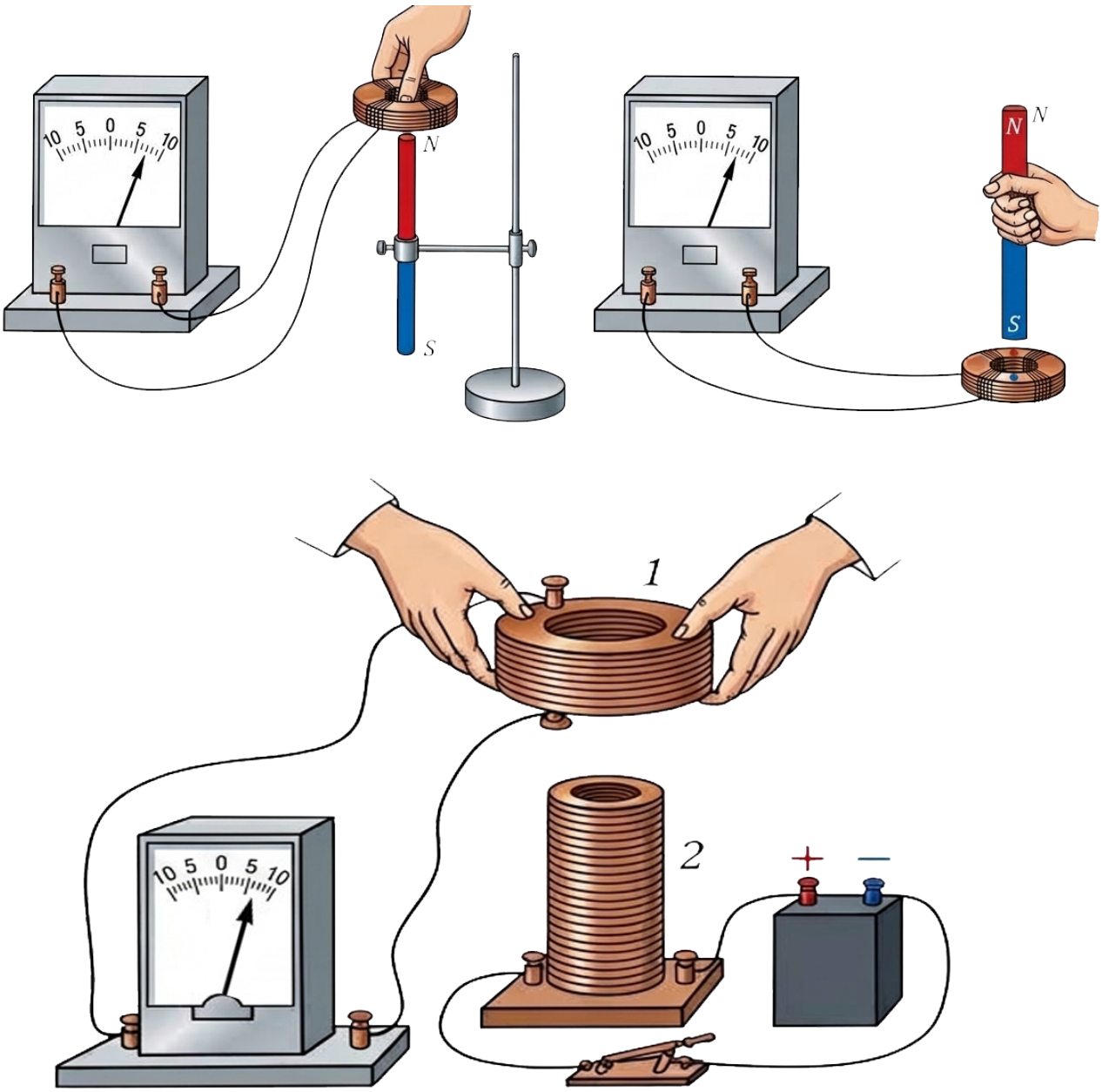


Рис. 12.1. Схема класичних дослідів Фарадея з електромагнітної індукції: виникнення індукційного струму при русі магніту відносно котушки (верхній лівий та верхній правий), при взаємному переміщенні двох котушок (нижній лівий) та при русі провідника в магнітному полі (нижній правий)

Дослід 3. Зміна струму в сусідній котушці. Дві котушки розміщують поряд: одну (1) приєднують до гальванометра, другу (2) — через ключ до джерела струму. Коли ключ замикають або розмикають, у першій котушці виникає короткочасний індукційний струм.

Струм спостерігається лише в моменти *зміни* струму в другій котушці; коли струм сталий, гальванометр нічого не показує. Це явище називають *взаємоіндукцією*.

Узагальнюючи результати всіх цих дослідів, Фарадей дійшов висновку (у сучасному формулюванні): *індукційний струм у замкненому контурі виникає тоді й лише тоді, коли змінюється магнітний потік, охоплений цим контуром.* Сама ж причина зміни магнітного потоку — рух магніту, рух контуру чи зміна струму в сусідньому контурі — на існування та напрям індукційного струму принципово не впливає.

12.2. Закон електромагнітної індукції

На основі дослідів Фарадея було сформульовано *закон електромагнітної індукції*: електрорушійна сила (ЕРС), що виникає в контурі, пропорційна швидкості зміни магнітного потоку, який пронизує площу, охоплену цим контуром:

$$\mathscr{E}_{\text{інд}} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\limits_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}. \tag{12.1}$$

Знак «мінус» у цьому законі — не формальність, а прояв *правила Ленца*, з яким ми детальніше познайомимось нижче. ЕРС $\mathscr{E}_{\text{інд}}$ відраховується в напрямку обходу контуру, пов'язаному з напрямком нормалі $d\mathbf{S}$ правилом правого гвинта.

Магнітний потік Ф, а отже, і ЕРС індукції, можуть змінюватися трьома способами:

- через зміну *площі* контуру, що пронизується незмінним магнітним полем;
- через зміну *орієнтації* контуру відносно поля (наприклад, при обертанні рамки);
- через зміну самого *магнітного поля*, що пронизує нерухомий контур.

У перших двох випадках контур рухається, у третьому — нерухомий; ці випадки мають різну фізичну природу, і ми розглянемо їх окремо.

12.3. Робота, що виконується при переміщенні провідника зі струмом у магнітному полі

Візьмемо рамку, по якій може вільно ковзати перемичка, що замикає верхній і нижній проводи (рис. 12.2). Помістимо цю систему в магнітне поле. Будемо вважати спочатку, що поле перпендикулярне до площини рамки.

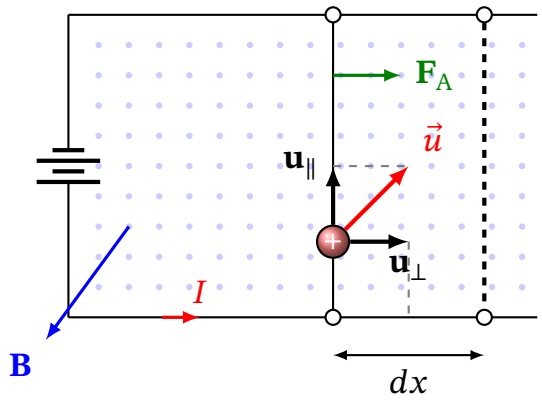


Рис. 12.2. Рамка з рухомою перемичкою в магнітному полі: показано силу Ампера $\mathbf{F}_\mathrm{A}$, що діє на перемичку зі струмом I, зміщення dx та розклад повної швидкості $\mathbf{u}$ носія заряду на складові $\mathbf{u}_\perp$ (рух разом із перемичкою) і $\mathbf{u}_\parallel$ (рух уздовж провідника)

Якщо по рамці через перемичку тече струм I (як показано на рис. 12.2), то на перемичку діє сила Ампера:

$$F_\mathrm{A} = \frac{I}{c}\ell B, \tag{12.2}$$

де ℓ — довжина перемички. При зазначених на рис. 12.2 напрямках струму I і зовнішнього магнітного поля $\mathbf{B}$ сила $\mathbf{F}_\mathrm{A}$ напрямлена вправо і при зміщенні перемички на dx виконує роботу

$$dA = F_\mathrm{A}dx = \frac{I}{c}B\ell dx = \frac{I}{c}d\Phi. \tag{12.3}$$

Площа контуру зі струмом змінюється на $dS = \ell\, dx$, а магнітний потік — на $d\Phi = B\, dS$. При зміщенні перемички на кінцеву відстань (за незмінних I і $\mathbf{B}$)

$$A_{12} = \frac{I}{c}(\Phi_2 - \Phi_1).$$

Нехай поле напрямлене під довільним кутом до площини контуру (рамки). Покладемо $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_\parallel$, де $\mathbf{B}_\perp$ — складова, напрямлена за нормаллю до площі, а $\mathbf{B}_\parallel$ — що лежить у площині контуру. Складова $\mathbf{B}_\parallel$ створює силу, перпендикулярну до площини і, отже, перпендикулярну до зміщення перемички, і тому таку, що не виконує роботи. З урахуванням цього магнітний потік, що призводить до виконання роботи, визначається тільки компонентою поля $\mathbf{B}_\perp$:

$$\Phi = B_\perp S = \mathbf{B}\cdot\mathbf{S}.$$

У випадку довільно деформованого витка і поля, що змінюється від точки до точки, весь замкнений контур потрібно подумки розбити на нескінченно малі замкнені елементи струму. Оскільки струми на спільних ділянках сусідніх витків рівні за величиною і протилежні за напрямком, то струми по всій площі вихідного контуру компенсують один одного, і залишається тільки струм I у вихідному контурі.

Вважаючи поле в межах одного елемента однорідним, отримуємо

$$dA = \frac{I}{c}d\Phi,$$

де магнітний потік тепер визначається формулою

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \tag{12.4}$$

в якій інтегрування ведеться по площі, що обмежується контуром зі струмом.

Зауважимо, що в цьому процесі виконується робота, тоді як саме магнітне поле роботу не може виконувати (сила Лоренца завжди перпендикулярна швидкості руху зарядів). Для розв'язання цієї суперечності врахуємо, що заряди в перемичці рухаються не тільки вздовж провідника ($\mathbf{u}_\parallel$), а й разом із перемичкою ($\mathbf{u}_\perp$): $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\perp + \mathbf{u}_\parallel$. Складова $\mathbf{u}_\parallel$ породжує силу Лоренца, напрямлену вздовж руху перемички, — це і є сила Ампера $\mathbf{F}_\text{A}$, що виконує додатну роботу над перемичкою. Складова $\mathbf{u}_\perp$ породжує силу $\mathbf{F}_\Lambda = q\mathbf{u}_\perp \times \mathbf{B}/c$, що діє проти напрямку струму I і виконує рівну за модулем від'ємну роботу, так що сумарна робота сили Лоренца дорівнює нулю. Тому для підтримання незмінного струму в коло мають бути включені сторонні ЕРС: саме завдяки зовнішнім джерелам енергії виконується робота з переміщення перемички.

12.4. Електромагнітна індукція в рухомих провідниках

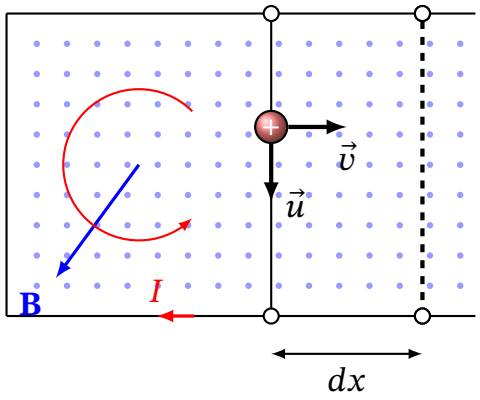


Рис. 12.3. Виникнення ЕРС індукції в рухомій перемичці: на позитивний заряд + у провіднику, що рухається зі швидкістю $\mathbf{v}$, діє сила Лоренца $\mathbf{F}_\Lambda$, спрямована вздовж провідника (швидкість $\mathbf{u}$). Ця сила викликає індукційний струм I у контурі

ЕРС індукції. У попередньому параграфі ми розглянули роботу сили Ампера й з'ясували, що рух перемички зі струмом підтримується сторонніми джерелами. Знайдемо тепер саму ЕРС індукції *безпосередньо*, обчисливши силу, що діє на носії заряду: це та сама сила Лоренца $\mathbf{F}_\Lambda = q\mathbf{u}_\perp \times \mathbf{B}/c$, на яку ми вже звертали увагу вище.

Розглянемо провідну рамку, замкнену рухомою перемичкою (див. рис. 12.3). Нехай рамка поміщена в магнітне поле з індукцією $\mathbf{B}$, напрямленою перпендикулярно до площини. Якщо перемичка рухається зі швидкістю $\mathbf{v}$ (у попередніх позначеннях $\mathbf{v} = \mathbf{u}_\perp$), то на заряди

в перемичці діє сила Лоренца:

$$\mathbf{F}_\Lambda = \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}.$$

Як видно з рис. 12.3, ця сила приводить заряди в рух, викликаючи індукційний струм у від'ємному напрямку обходу контуру. Вона еквівалентна силі, що створюється стороннім електричним полем

$$\mathbf{E}^* = \frac{\mathbf{F}^*}{q} = \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

і викликає в перемичці довжиною ℓ ЕРС індукції, рівну

$$\mathscr{E}_{\text{інд}} = \oint \mathbf{E}^*\cdot d\boldsymbol{\ell} = -E^*\ell = -\frac{1}{c}B\ell v.$$

Знак «–» тут пов'язаний з тим, що $\mathcal{E}_{\text{інд}}$ створює струм у від'ємному напрямку (додатний напрямок задається вектором $\mathbf{B}$).

Оскільки $\ell v = dS/dt$, де S — площа контуру, то

$$\mathscr{E}_{\text{інд}} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}, \tag{12.5}$$

де $\Phi = BS$ — магнітний потік через контур.

Якщо є складова магнітного поля $\mathbf{B}_\parallel$, паралельна площині контуру, то вона не призводить до появи індукційного струму вздовж контуру, оскільки відповідна складова сили Лоренца $\mathbf{F}^{(1)} = \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}_\parallel$ перпендикулярна до площини контуру, тобто напрямлена перпендикулярно до провідника. Це означає, що у виразі для потоку Φ потрібно врахувати тільки складову $\mathbf{B}_\perp$, тобто покласти $\Phi = B_\perp S = \mathbf{B}\cdot\mathbf{S}$.

Для контуру довільної форми, що рухається й деформується в стаціонарному, але неоднорідному полі, ЕРС руху знаходимо, підсумовуючи по контуру сторонню силу $[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]/c$, де $\mathbf{v}$ — швидкість елемента $d\boldsymbol{\ell}$:

$$\mathscr{E}_{\text{інд}} = \frac{1}{c}\oint[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]\cdot d\boldsymbol{\ell}.$$

За час dt елемент $d\boldsymbol{\ell}$ замітає площу $d\mathbf{S} = [\mathbf{v}\,dt\times d\boldsymbol{\ell}]$, тому зміна потоку дорівнює $d\Phi = \oint \mathbf{B}\cdot[\mathbf{v}\times d\boldsymbol{\ell}]\,dt = -dt\oint[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]\cdot d\boldsymbol{\ell}$, і знову $\mathscr{E}_{\text{інд}} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$, де магнітний потік визначається інтегралом (12.4) по площі, що обмежується контуром.

! *Отже, у розглянутому випадку* безпосередньою фізичною причиною виникнення ЕРС індукції є сила Лоренца, *що діє на вільні носії заряду в рухомій перемичці. Саме вона «штовхає» електрони вздовж провідника, створюючи індукційний струм.*

Однак тут виникає природне запитання: що буде, якщо перейти в систему відліку, пов'язану з самою перемичкою? Відносно неї провідник нерухомий, і магнітна складова сили Лоренца, яка залежить від швидкості, дорівнює нулю. Якщо причина зникла, то чому тоді в контурі все одно тече струм?

! *Відповідь вимагає перегляду наших уявлень про електричне та магнітне поля: те, що ми називаємо «причиною» ЕРС, залежить від вибору системи відліку. У системі, де перемичка нерухома, на її заряди діє вже* електричне *поле* $\mathbf{E}' = [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]/c$ *(для* $v \ll c$*), яке з'являється при переході в рухому систему відліку. Так само й у досліді 1: коли магніт рухається відносно нерухомого контуру, то в системі контуру магнітне поле змінюється, і причиною є* вихрове електричне поле*, яке ми розглянемо в наступному параграфі. Чому обидва описи дають однаковий результат — питання принципу відносності (розділ 15): електричне й магнітне поля не є незалежними, а їхній поділ залежить від системи відліку.*

Принцип роботи генераторів змінного струму. Явище електромагнітної індукції в рухомих провідниках лежить в основі роботи *генераторів електричного струму* — пристроїв, без яких неможливо уявити сучасну електроенергетику: у них механічна енергія обертання перетворюється на електричну.

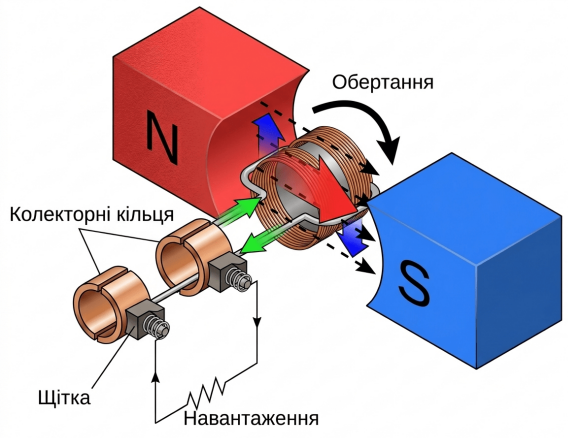


Рис. 12.4. Схема найпростішого генератора змінного струму

Найпростіший генератор складається з рамки, кінці якої закріплені на кільцях, що обертаються разом з нею; до кілець щільно прилягають нерухомі щітки-контакти (рис. 12.4). Якщо рамку площею S обертати в однорідному полі $\mathbf{B}$ з кутовою швидкістю ω, то

потік крізь неї

$$\Phi(t) = BS\cos(\omega t), \qquad \frac{d\Phi}{dt} = -BS\omega\sin(\omega t),$$

тому в рамці виникає ЕРС індукції

$$\mathscr{E}_{\text{інд}} = \frac{BS\omega}{c}\sin(\omega t), \tag{12.6}$$

а якщо на щітки підключити навантаження опором R, у колі потече *змінний* індукційний струм

$$I(t) = \frac{\mathscr{E}_{\text{інд}}}{R} = \frac{BS\omega}{cR}\sin(\omega t), \tag{12.7}$$

що змінюється за законом синуса з кутовою частотою ω, яка дорівнює кутовій швидкості обертання рамки. Якщо рамка має N витків, ЕРС збільшується в N разів. Саме такий принцип лежить в основі роботи практично всіх електростанцій, що генерують змінний струм. У потужних генераторах, щоправда, обертається не рамка, а магніт (ротор-електромагніт, струм до обмотки якого підводять кільця), а обмотки, з яких знімають струм, нерухомі (статор). Тоді ЕРС виникає в нерухомих провідниках через зміну поля — це той самий закон індукції, описаний в іншій системі відліку (див. зауваження вище).

12.5. Електромагнітна індукція в нерухомих провідниках

Виникнення ЕРС внаслідок зміни магнітного поля. Розглянемо тепер принципово інший випадок: контур нерухомий і незмінний за формою, а змінюється саме магнітне поле, що його пронизує (рис. 12.5):

$$\mathscr{E}_{\text{інд}} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}. \tag{12.8}$$

Тут виникає принципове запитання: *яка причина виникнення ЕРС*? Носії заряду в нерухомому провіднику мають нульову швидкість, а магнітне поле *не діє на нерухомі заряди* взагалі! То внаслідок чого ж вони прискорюються? Відповідь на це запитання — *вихрове електричне поле* — ми дамо трохи згодом; спершу розглянемо кілька важливих якісних наслідків закону індукції.

Правило Ленца. *Правило Ленца* визначає *напрям* індукційного струму: індукційний струм завжди має такий напрям, щоб своїм власним магнітним полем *протидіяти* зміні магнітного потоку, яка його породжує, тобто щоб послабити причину, яка збуджує цей струм (рис. 12.6).

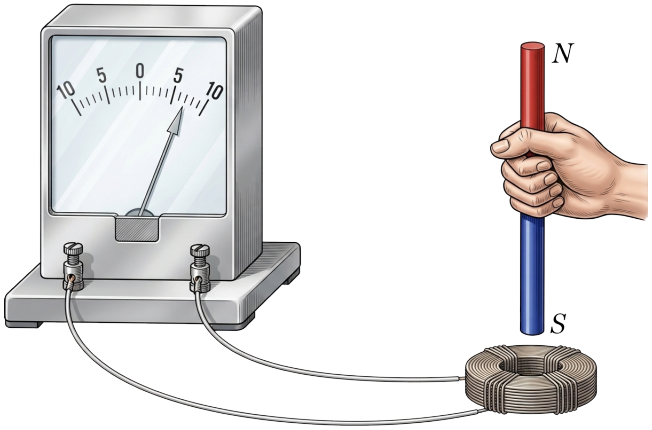


Рис. 12.5. ЕРС індукції в нерухомому контурі за рахунок зміни поля **B**

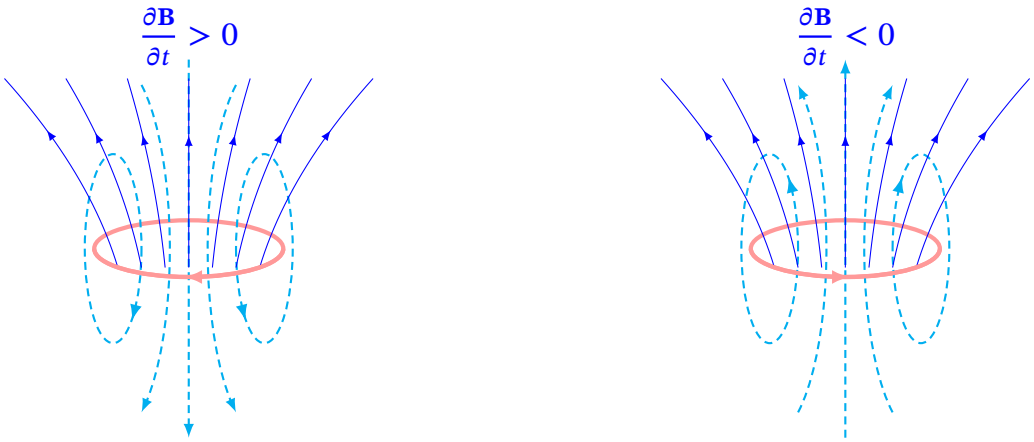


Рис. 12.6. Правило Ленца: напрям індукційного струму залежить від знака $\partial\mathbf{B}/\partial t$

! *Правило Ленца — не окремий незалежний закон природи, а прямий наслідок знака «мінус» у законі індукції* (12.1)*, який, своєю чергою, диктується законом збереження енергії: якби індукційний струм* підсилював *зміну потоку (а не протидіяв їй), процес наростав би лавиноподібно й необмежено, породжуючи енергію з нічого. Це нагадує загальніший* принцип Ле Шательє–Брауна*: будь-який зовнішній вплив, що намагається вивести систему зі стійкої рівноваги, породжує в ній компенсаційні процеси, спрямовані на послаблення цього впливу.*

Правило напряму індукційного струму сформулював у 1833–1834 рр. Е. Х. Ленц, а закон індукції в кількісному вигляді, через зміну магнітного потоку, записав Ф. Нейман (1845 р.). Сам Фарадей користувався картиною «ліній сили», що перетинаються провідником. Незалежно від Фарадея індукцію спостерігав Дж. Генрі (1832 р.), а Г. Гельмгольц (1847 р.) показав, що знак «мінус» у законі індукції випливає із закону збереження енергії.

Вимірювання індукційного заряду. Балістичний гальванометр. Закон електромагнітної індукції дає змогу не лише якісно описати виникнення струму, а й кількісно вимірювати зміну магнітного потоку. Розглянемо котушку опором R, у якій виникає індукційний струм $I(t) = \mathscr{E}_{\text{інд}}/R$. Повний заряд Q, що протікає через поперечний переріз провідника за весь час існування індукційного струму, дорівнює:

$$Q = \int I(t)\,dt = \frac{1}{R}\int \mathscr{E}_{\text{інд}}\,dt = -\frac{1}{cR}\int \frac{d\Phi}{dt}\,dt = -\frac{\Delta\Phi}{cR}. \qquad (12.9)$$

Отже, повний індукований заряд прямо пропорційний *зміні магнітного потоку* $\Delta\Phi$ і не залежить від того, як швидко ця зміна відбувалася. Для вимірювання таких короткочасних імпульсів струму (тривалістю мілісекунди) використовують спеціальний прилад — *балістичний гальванометр* (рис. 12.7).

Як видно з рисунка, чутливий елемент приладу — це легка рамка (котушка), підвішена на пружній нитці в зазорі сильного постійного магніту. На підвісі закріплено маленьке *дзеркало*, на яке спрямовано промінь *лазера*. Відбиваючись, промінь падає на віддалену *вимірювальну шкалу*. Така система називається *оптичним важелем*: вона дозволяє зафіксувати навіть мізерний кут повороту рамки, оскільки зміщення світлового зайчика на шкалі x пов'язане з кутом повороту θ співвідношенням $x = 2L\theta$, де L — відстань від дзеркала до шкали.

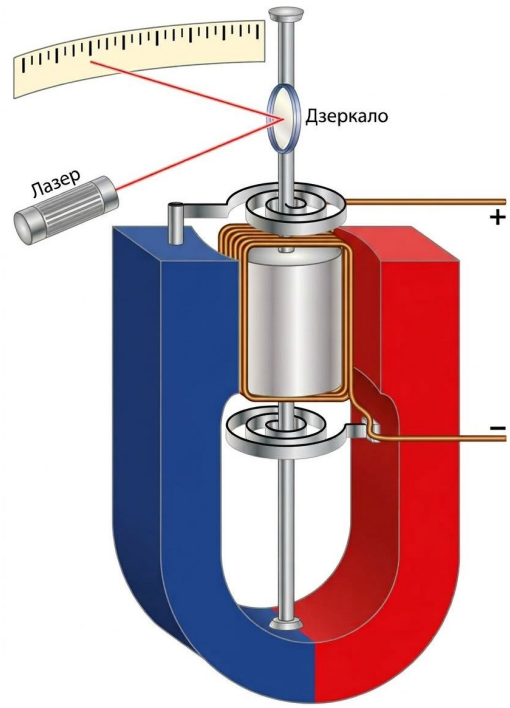


Рис. 12.7. Схема балістичного гальванометра

На відміну від звичайного гальванометра, який показує миттєву силу струму, балістичний гальванометр призначений для вимірювання інтеграла струму за часом, тобто повного заряду. Його конструкція має великий момент інерції J та мале затухання, завдяки чому період власних коливань T_0 становить 10–20 с. Час протікання імпульсу стру-

му $t_{імп}$ у дослідах з індукції є набагато меншим за T_0.

Під час короткого імпульсу на рамку гальванометра діє обертальний момент $M = BSNI/c$, внаслідок чого вона набуває початкової кутової швидкості $\omega_0 = \frac{BSN}{cJ}\int I\,dt = \frac{BSN}{cJ}Q$. Після закінчення імпульсу рамка продовжує рухатися за інерцією, і максимальний кут відхилення θ_{max} (перший «відкид» світлового зайчика на шкалі) визначається із закону збереження енергії $J\omega_0^2/2 = k\theta_{max}^2/2$ (k — жорсткість підвісу на кручення):

$$\theta_{max} = \frac{BSN}{c\sqrt{Jk}}Q = \frac{Q}{C_б},$$

де $C_б = c\sqrt{Jk}/(BSN)$ — *балістична стала гальванометра* (заряд, що відповідає одиничному відхиленню). Таким чином, максимальне відхилення світлового зайчика прямо пропорційне повному заряду Q.

! *Балістичний гальванометр є класичним приладом для вимірювання магнітного потоку та індукції поля. Знаючи балістичну сталу $C_б$ (яку визначають градуюванням, наприклад, розряджаючи еталонний конденсатор: $Q = C_{конд}U$), можна за виміряним зміщенням зайчика θ_{max} знайти зміну магнітного потоку:*

$$|\Delta\Phi| = cRQ = cR\,C_б\theta_{max},$$

де R — повний опір кола (котушки й гальванометра).

Струми Фуко. *Струмами Фуко* (вихровими струмами) називають індукційні струми, що виникають не в тонких лінійних провідниках, а в товщі суцільних масивних провідників при зміні магнітного потоку крізь них (рис. 12.8). Вони підпорядковані тому самому правилу Ленца: їхнє магнітне поле напрямлене так, щоб протидіяти зміні потоку, яка їх породжує.

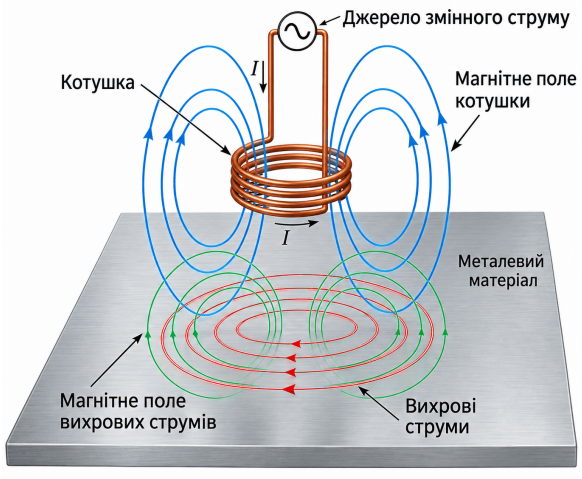


Рис. 12.8. Індукування вихрових струмів Фуко в провідній пластині, яка знаходиться в змінному магнітному полі.

! *Оскільки струми Фуко течуть у товщі провідника, вони можуть спричиняти* значне *тепловиділення (закон Джоуля–Ленца, розділ 7) — саме на цьому явищі, зокрема, ґрунтується* індукційне нагрівання *металів. З іншого боку, ті самі струми, взаємодіючи з магнітним полем (сила Ампера), створюють силу, що* гальмує *рух провідника відносно джерела поля — явище* магнітного демпфування, *яке використовують, наприклад, в електромагнітних гальмах і в заспокоювачах коливань вимірювальних приладів. Щоб зменшити втрати на нагрівання, осердя трансформаторів набирають з тонких ізольованих пластин (ізоляція розриває контури вихрових струмів, і втрати спадають приблизно як квадрат товщини пластини) або виготовляють із фериту — магнетика з дуже малою провідністю. Швидкозмінні струми Фуко, крім того, витісняються до поверхні провідника (скін-ефект, розділ 14).*

Вихрове електричне поле. Повернімося до питання, яке ми залишили відкритим: що саме прискорює нерухомі заряди при зміні **B**? Оскільки $\Phi = \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$, а ЕРС, за означенням (7.16) (розділ 7), дорівнює $\mathscr{E} = \oint_L \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell}$, із закону індукції безпосередньо випливає:

$$\oint_L \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}. \qquad (12.10)$$

Це — *теорема про циркуляцію* електричного поля: циркуляція напруженості електричного поля по довільному контуру дорівнює, взятому з протилежним знаком і поділеному на c, потоку вектора $\partial\mathbf{B}/\partial t$ крізь довільну поверхню, натягнуту на цей контур. За теоремою Стокса, цю теорему можна записати й у диференціальній формі:

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \qquad (12.11)$$

Зауважимо, що теорему (12.10) записано для *нерухомого* контуру. Якщо контур рухається, до **E** у формулі для ЕРС слід додати силу Лоренца, що припадає на одиницю заряду: $\mathscr{E}_{\text{інд}} = \oint\big(\mathbf{E}+[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]/c\big)\cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$. Це — загальний закон індукції (12.1), який охоплює обидва механізми: сила Лоренца відповідає за ЕРС руху (попередній параграф), а вихрове електричне поле — за ЕРС у нерухомому контурі.

За Максвеллом, явище електромагнітної індукції полягає саме в тому, що *будь-яке змінне магнітне поле збуджує в просторі електричне поле*; провідники для цього взагалі не потрібні — вони лише

дають змогу побачити це поле через індукційний струм, який воно викликає в них (рис. 12.9).

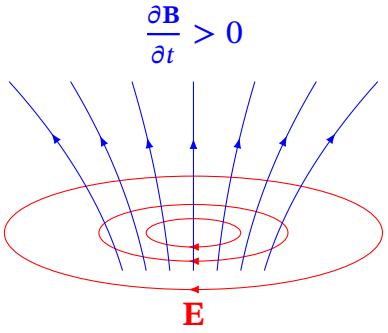


Рис. 12.9. Вихрове електричне поле, породжене зростаючим у часі магнітним полем

! *На відміну від електростатики, де завжди* $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ *(поле потенціальне), у присутності змінного магнітного поля* $\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$. *Це принципово важлива відмінність: індуковане електричне поле не є потенціальним — воно* вихрове*: його силові лінії ніде не починаються й не закінчуються (на відміну від ліній електростатичного поля, які завжди починаються й закінчуються на зарядах), а замкнені самі на себе, подібно до силових ліній магнітного поля. Електричне поле, породжене зміною магнітного поля, має* зовсім іншу структуру*, ніж електростатичне, і не пов'язане безпосередньо з жодними електричними зарядами.*

Чому ж тоді це поле взагалі називають електричним*, якщо воно має інше походження й іншу конфігурацію ліній, ніж звичне статичне поле? Відповідь проста й фундаментальна:* вихрове поле діє на заряд точнісінько так само, як і електростатичне, — *а саме це ми з самого початку курсу вважали* головною визначальною властивістю *електричного поля. Саме на прискоренні заряджених частинок вихровим електричним полем ґрунтується робота* бетатрона *— прискорювача електронів, у якому змінне поле потужного електромагніта породжує вихори електричного поля, здатні розганяти електрони до швидкостей, близьких до швидкості світла, причому розгін відбувається безпосередньо у вакуумній камері, без жодних металевих провідників.*

12.6. Явище самоіндукції

Індуктивність контуру. Зміна струму в довільному контурі змінює й створюване ним магнітне поле, а отже — і власний магнітний потік крізь цей самий контур; за законом індукції це, своєю чергою, породжує в контурі ЕРС. Це явище називають *самоіндукцією* (рис. 12.10). Взаємоіндукцію двох контурів (дослід 3) кількісно описують коефіцієнтами взаємної індуктивності; їх розглянуто в розділі 13.

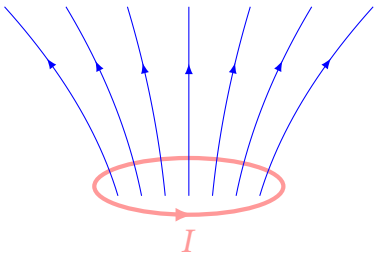


Рис. 12.10. Контур зі струмом I і створюване ним власне магнітне поле

Якщо поблизу контуру немає феромагнетиків, поле **B**, а отже, й повний магнітний потік Ф крізь контур пропорційні силі струму I в ньому:

$$\Phi = \frac{1}{c} LI, \tag{12.12}$$

де коефіцієнт пропорційності L називають *індуктивністю контуру* — суто геометричною характеристикою (залежною від форми, розмірів контуру й від магнітних властивостей середовища навколо нього), яка не залежить від сили струму. При зміні струму в контурі, за законом Фарадея, виникає *ЕРС самоіндукції*:

$$\mathscr{E}_{\text{ci}} = -\frac{L}{c^2}\frac{dI}{dt}. \tag{12.13}$$

! *Знак «мінус» тут — знову прояв правила Ленца: ЕРС самоіндукції завжди напрямлена так, щоб протидіяти зміні сили струму в контурі — вона гальмує зростання струму й* підтримує *його спадання. Через цю властивість контур з великою індуктивністю поводиться подібно до тіла з великою механічною інерцією (масою): він «опирається» будь-якій швидкій зміні струму.*

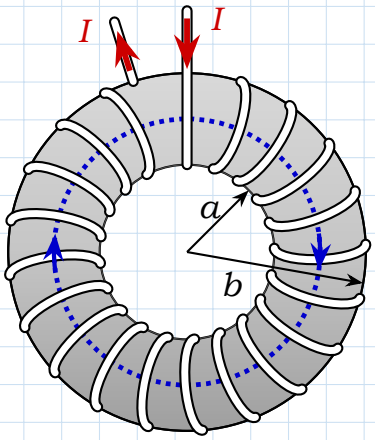
* **Приклади обчислення індуктивності**.

Соленоїд. Магнітне поле всередині довгого соленоїда з магнетиком проникності μ, густиною намотки $n = N/l$ витків на одиницю довжини (розділ 10), дорівнює $B = 4\pi\mu NI/(cl)$. Повний магнітний потік крізь усі N витків соленоїда $\Phi = NBS = \dfrac{4\pi\mu N^2}{cl} IS$; порівнюючи з означенням (12.12), отримуємо індуктивність соленоїда:

$$L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l}. \tag{12.14}$$

* *Тороїд.* Для тороїдальної котушки з N витками, прямокутним перерізом ширини $b-a$ (де a і b — внутрішній і зовнішній радіуси) і висотою d (див. рис.) поле за теоремою про циркуляцію дорівнює $B(r) = 2\mu NI/(cr)$, а потік крізь один виток — $\int_a^b B\,d\,dr$; тому індуктивність дорівнює

$$L = 2\mu N^2 d \ln\left(\frac{b}{a}\right). \qquad (12.15)$$



! *В гауссовій системі одиниць індуктивність, як неважко переконатись з формул* (12.14)–(12.15)*, вимірюється просто в* сантиметрах, $[L] =$ *см — ще одне яскраве підтвердження того, що індуктивність, як і ємність (розділ 6), — суто* геометрична *характеристика контуру (при сталому* μ*). Для переходу до практичних одиниць:* 1 *Гн* $= 10^9$ *см.*

Перехідні процеси в колі з індуктивністю. *Встановлення струму в LR-колі.* Розглянемо коло з послідовно з'єднаних джерела ЕРС $\mathscr{E}$, котушки індуктивності L, резистора R і ключа S (рис. 12.11). Після замикання ключа закон Ома для кола, $\mathscr{E} + \mathscr{E}_{\text{ci}} = IR$, з урахуванням формули (12.13), набуває вигляду

$$\frac{L}{c^2}\frac{dI}{dt} + IR = \mathscr{E}. \qquad (12.16)$$

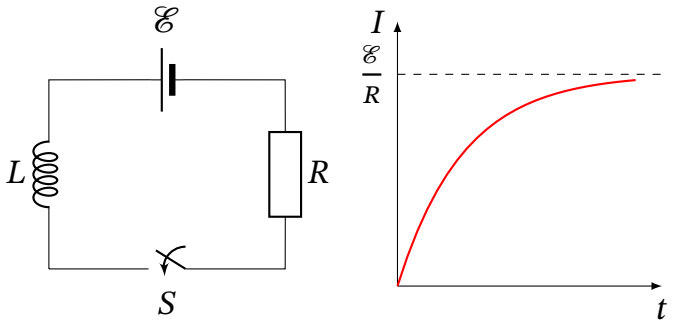


Рис. 12.11. Встановлення струму в колі з індуктивністю після замикання ключа

Це рівняння — повний аналог рівняння зарядки конденсатора (розділ 7), і його розв'язок (з початковою умовою $I(0) = 0$) — струм, що асимптотично наближається до стаціонарного значення $\mathscr{E}/R$:

$$I(t) = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \qquad \tau = \frac{L}{c^2 R} \qquad (12.17)$$

— сталу часу τ називають *часом релаксації* LR-кола.

Екстраструми при розмиканні. Нехай тепер котушка з індуктивністю L і власним (внутрішнім) опором обмотки r спочатку під'єднана до джерела ЕРС $\mathscr{E}$ через ключ S і резистор R, під'єднаний паралельно котушці (рис. 12.12); у сталому режимі через котушку тече струм $I_0 = \mathscr{E}/r$.

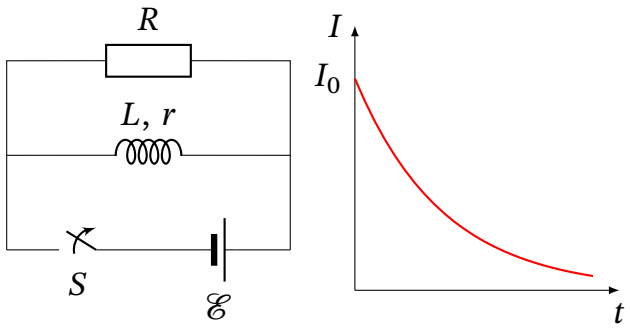


Рис. 12.12. Екстраструм розмикання в колі з індуктивністю

Після розмикання ключа S (відключення джерела) магнітне поле котушки, а отже, і потік крізь неї, починають спадати. Це, за законом Ленца, збуджує ЕРС самоіндукції $\mathscr{E}_{\text{ci}}$ і підтримуваний нею *екстраструм розмикання* — індукційний струм, що тепер тече вже через резистор R (замкнене коло L–r–R без джерела). Закон Ома для цього контуру: $I(R+r) = -\dfrac{L}{c^2}\dfrac{dI}{dt}$, звідки

$$I(t) = I_0\, e^{-t/\tau'}, \qquad \tau' = \frac{L}{c^2(R+r)}. \tag{12.18}$$

! *Якщо $R \gg r$ (типова ситуація, коли навантаження має значно більший опір, ніж провід самої котушки), то в момент розмикання ЕРС самоіндукції досягає значення $\mathscr{E}_{ci} = \dfrac{R+r}{r}\,\mathscr{E}\, e^{-t/\tau'} \approx \dfrac{R}{r}\,\mathscr{E}\, e^{-t/\tau'}$, яке при $R \gg r$ може* значно перевищувати *ЕРС самого джерела $\mathscr{E}$! Саме тому раптове розмикання кола з великою індуктивністю (наприклад, вимкнення потужного електромагніта чи реле) часто супроводжується електричним пробоєм або яскравою іскрою на контактах ключа — індуктивність «чинить опір» різкому зникненню струму настільки завзято, що готова створити на короткий час дуже високу напругу.*

12.7. Індукція в надпровідниках. Ефект Мейснера

В розділі 8 ми вже розглядали явище надпровідності. Для електромагнітної індукції надпровідний стан цікавий тим, що стала часу

кола $\tau = L/(c^2R)$ при $R \to 0$ стає нескінченною, а індукційні струми — незгасаючими.

Замороження потоку. Розглянемо замкнене кільце з індуктивністю L й опором R у зовнішньому полі (рис. 12.13).

Сумарний потік крізь кільце складається із зовнішнього $\Phi_{\text{зовн}}$ і власного LI/c, а повна ЕРС індукції дорівнює IR:

$$-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left(\Phi_{\text{зовн}} + \frac{LI}{c}\right) = IR. \tag{12.19}$$

Якщо $R = 0$ (надпровідне кільце), то

$$\Phi_{\text{зовн}} + \frac{LI}{c} = \text{const} \tag{12.20}$$

— повний магнітний потік крізь кільце *зберігається* (замороження потоку). Будь-яку зміну зовнішнього потоку кільце компенсує струмом $\Delta I = -c\,\Delta\Phi_{\text{зовн}}/L$ (це правило Ленца в найчистішому вигляді), а якщо зовнішнє поле зникає, у кільці лишається *незгасаючий струм* $I = c\Phi/L$, що підтримує колишній потік.

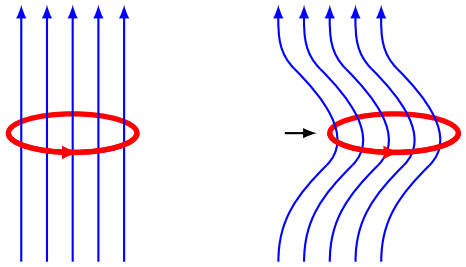


Рис. 12.13. Замороження магнітного потоку в надпровідному кільці при зміні його положення в зовнішньому полі: кільце підтримує колишній потік незгасаючим струмом

У дослідах зі свинцевими кільцями спаду такого струму не вдавалося виявити протягом року, звідки випливає оцінка часу спаду понад 10^5 років; для порівняння, стала часу звичайного LR-кола — частки секунди.

Ідеальний провідник чи надпровідник?. У масивному зразку з нескінченною провідністю закон Ома $\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}$ дає $\mathbf{E} = 0$ (інакше струм був би нескінченним), а тоді з $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\,\partial\mathbf{B}/\partial t$ (12.11) маємо $\partial\mathbf{B}/\partial t = 0$: індукція всередині ідеального провідника *не може змінюватися*, і зразок зберігає те поле, що було в ньому в момент переходу.

Проте в 1933 р. В. Мейснер і Р. Оксенфельд виявили, що для справжніх надпровідників це не так: якщо зразок, що перебуває в слабкому полі, охолодити нижче T_c, поле з нього *виштовхується*, і в товщі зразка $\mathbf{B} = 0$ незалежно від того, чи поле було прикладене до переходу, чи після нього (*ефект Мейснера*). Це не можна пояснити самою лише індукцією при $R \to 0$, яка, навпаки, заморожувала б поле. Отже, надпровідність — не просто $R = 0$, а особливий стан речовини з $\mathbf{B} = 0$ всередині.

Надпровідник як ідеальний діамагнетик. У надпровіднику $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{J} = 0$, тому намагніченість $\mathbf{J} = -\mathbf{H}/4\pi$, тобто $\chi_m = -1/4\pi$ і $\mu = 0$ (розділ 10). Це найсильніший можливий діамагнетизм: у звичайних діамагнетиків $|\chi_m| \sim 10^{-6}$–10^{-5}. Поле виштовхують поверхневі екрануючі струми, які течуть у тонкому шарі, а не строго по поверхні.

Товщину цього шару можна оцінити з рівнянь Ф. і Г. Лондонів (1935 р.). Для носіїв заряду q і маси m з концентрацією n_s без зіткнень $m\,d\mathbf{v}/dt = q\mathbf{E}$, тобто $\partial\mathbf{j}/\partial t = (n_s q^2/m)\mathbf{E}$. Узявши ротор і скориставшись (12.11), знаходимо

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla\times\mathbf{j} + \frac{n_s q^2}{mc}\mathbf{B}\right] = 0.$$

Для ідеального провідника вираз у дужках — стала величина (зберігається початкове поле). Лондони постулювали, що в надпровіднику він дорівнює *нулю*:

$$\nabla\times\mathbf{j} = -\frac{n_s q^2}{mc}\mathbf{B}. \tag{12.21}$$

Разом з $\nabla\times\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j}/c$ (розділ 9) і $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ це дає $\nabla^2\mathbf{B} = \mathbf{B}/\delta_L^2$, де

$$\boxed{\delta_L = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_s q^2}}.} \tag{12.22}$$

Поблизу плоскої поверхні розв'язок має вигляд $B = B_0 e^{-x/\delta_L}$: поле проникає лише на *лондонівську глибину* δ_L. При $n_s \sim 10^{22}$ см$^{-3}$, $q = e$, $m = m_e$ маємо $\delta_L \sim 5\cdot 10^{-6}$ см, тобто десятки нанометрів, що добре узгоджується з дослідами. (Для куперівських пар $q = 2e$, $m \to 2m_e$, $n_s \to n/2$, а комбінація $n_s q^2/m$ та сама.)

Розглянемо тепер надпровідну кулю радіуса a, вміщену в зовнішнє однорідне магнітне поле $\mathbf{B}_0$ (рис. 12.14). Припустимо, що $a \gg \delta_L$, тобто лондонівський шар проникнення дуже тонкий порівняно з розмірами кулі. Тоді в усьому об'ємі надпровідника, за винятком тонкого приповерхневого шару, можна вважати $\mathbf{B} = 0$.

Між поведінкою провідника в електростатичному полі та надпровідника в магнітному полі існує глибока аналогія. В обох випадках матеріал *екранує* зовнішнє поле: провідник перерозподіляє вільні заряди так, щоб усередині нього зникло електричне поле,

$$\mathbf{E}_{\text{in}} = 0, \tag{12.23}$$

а надпровідник створює екрануючі струми, які виштовхують магнітне поле з його об'єму,

$$\mathbf{B}_{\text{in}} \simeq 0, \qquad a \gg \delta_L. \tag{12.24}$$

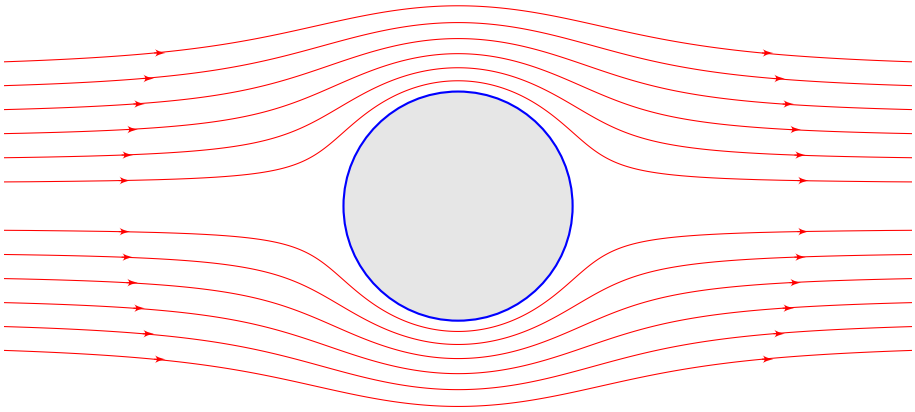


Рис. 12.14. Надпровідна куля в зовнішньому магнітному полі: силові лінії обтікають кулю, не проникаючи всередину — поле виштовхується поверхневими екрануючими струмами

В обох випадках екранування забезпечується перерозподілом заряджених носіїв: у звичайному провіднику виникає поверхнева густина заряду, а в надпровіднику — поверхневий струм у тонкому шарі проникнення. Ці індуковані джерела створюють поле, яке компенсує зовнішнє поле всередині матеріалу. Проте механізми екранування фізично різні: електростатичне екранування є наслідком перерозподілу вільних зарядів до стану рівноваги, тоді як магнітне екранування надпровідника є проявом ефекту Мейснера. Тому надпровідник не слід просто ототожнювати з ідеальним провідником.

Спільним є й математичний апарат. Обидві задачі — про точковий заряд біля провідної поверхні та про магнітний диполь біля надпровідної поверхні — розв'язують *методом зображень*. Підставою для цього є те, що в обох задачах поле поза матеріалом задовольняє рівняння Лапласа, а на поверхні матеріалу задана гранична умова, яку можна відтворити, замінивши матеріал фіктивним джерелом за поверхнею. Для провідника така умова — $\mathbf{E}_\tau = 0$, і її забезпечує фіктивний заряд протилежного знака; для надпровідника — $B_n = 0$, і її забезпечує фіктивний диполь протилежного напрямку.

Левітація. Виштовхування поля означає, що на надпровідник діє сила. Скористаймося методом зображень: магніт над плоскою надпровідною пластиною поводиться так, ніби на такій самій глибині під поверхнею лежить його «дзеркальне відображення» — диполь, спрямований протилежно. Два співвісні антипаралельні диполі на відстані $2h$ відштовхуються з енергією $2p_m^2/(2h)^3$; оскільки відображення уявне, енергія взаємодії вдвічі менша:

$$U = \frac{p_m^2}{8h^3}, \qquad F = -\frac{dU}{dh} = \frac{3p_m^2}{8h^4}, \tag{12.25}$$

де h — висота диполя над поверхнею. Прирівнявши $F = mg$, знаходимо висоту левітації $h = (3p_m^2/8mg)^{1/4}$ (задача 12.14).

За легендою, залізна труна пророка Магомета висить у повітрі без опори між магнітами. Для системи, що складається лише зі звичайних постійних магнітів, стійка статична левітація неможлива внаслідок теореми Ерншоу (див. розділ 2). Надпровідник, однак, дозволяє реалізувати стійку магнітну левітацію: його екрануючі струми не є наперед заданими джерелами, а виникають у відповідь на зовнішнє магнітне поле та забезпечують ефект Мейснера. У результаті взаємодія магніту з цими індукованими струмами може створити стійке положення рівноваги. У 1945 р. В. К. Аркадьєв продемонстрував левітацію постійного магніту над надпровідною свинцевою чашею, перетворивши легенду про «труну Магомета» на лабораторний експеримент.

Квантування потоку. У надпровідному кільці потік не лише зберігається, а й *квантується*:

$$\Phi = n\Phi_0, \qquad \Phi_0 = \frac{\pi\hbar c}{|e|} \approx 2{,}07 \cdot 10^{-7}\ \text{Гс}\cdot\text{см}^2. \tag{12.26}$$

Квант потоку відповідає заряду носіїв $2e$ (куперівські пари). Його експериментально виміряли в 1961 р. (Р. Дівер і У. Фейрбенк; Б. Долл і М. Небауер), а на квантуванні потоку ґрунтуються надчутливі магнітометри SQUID.

Критичні параметри. Надпровідний стан має межі: він існує лише за певних температур, магнітних полів і струмів. Для надпровідників першого роду при $T \to 0$ критичне поле H_c становить сотні гаусів: для свинцю $H_c \approx 800$ Гс, для алюмінію $H_c \approx 100$ Гс.

Надпровідність може бути зруйнована і струмом, якщо його власне магнітне поле біля поверхні досягає критичного значення. Для дроту радіуса r правило Сілсбі дає

$$I_c = \frac{crH_c}{2}. \tag{12.27}$$

Надпровідники другого роду поводяться інакше: між нижнім і верхнім критичними полями H_{c1} та H_{c2} магнітне поле проникає в надпровідник у вигляді *квантованих вихорів*. Закріплення вихорів на дефектах кристалічної структури перешкоджає їхньому руху і тому відіграє важливу роль у стійкості левітації.

Сплав NbTi лишається надпровідним у полях до ~ 10 Тл (10^5 Гс), а Nb_3Sn — понад 20 Тл, тому з них виготовляють обмотки сильних магнітів для магнітно-резонансних томографів і прискорювачів. Високотемпературні керамічні надпровідники, зокрема YBCO з $T_c \approx 93$ К,

дозволяють реалізовувати надпровідний стан при охолодженні рідким азотом.

Підсумки

Явище електромагнітної індукції — виникнення ЕРС у контурі при зміні охоплюваного ним магнітного потоку — остаточно поєднує електрику та магнетизм у єдину теорію. Кількісно воно описується законом $\mathscr{E}_{\text{інд}} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{d\Phi}{dt}$, а знак «мінус» (правило Ленца) є наслідком закону збереження енергії: індукційний струм завжди протидіє зміні потоку, що його породжує. Повний заряд, що протікає в контурі, $Q = -\Delta\Phi/(cR)$ визначається лише зміною потоку; на цьому ґрунтується вимірювання потоку балістичним гальванометром.

Потік може змінюватися внаслідок *руху* контуру (зміна площі чи орієнтації) або внаслідок зміни *поля*. У першому випадку ЕРС створює сила Лоренца, що діє на носії заряду в провіднику, що рухається (ЕРС руху); на цьому ґрунтується робота генераторів. У другому випадку носії заряду нерухомі, і їх прискорює *вихрове електричне поле* $\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$: воно не є потенціальним, але діє на заряд так само як і електростатичне (бетатрон, індукційне нагрівання, струми Фуко). Поділ на ці два механізми залежить від системи відліку, а загальний закон індукції охоплює обидва: $\mathscr{E}_{\text{інд}} = \oint (\mathbf{E} + [\mathbf{v}\times\mathbf{B}]/c)\cdot d\boldsymbol{\ell} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{d\Phi}{dt}$. Сила Лоренца (розділ 9) демонструє фундаментальний зв'язок магнітного поля з рухом зарядів, а вихрове поле — з тим, що змінне магнітне поле саме породжує електричне.

Змінний струм у контурі створює змінний власний потік, і тому в ньому виникає ЕРС самоіндукції $\mathscr{E}_{\text{сі}} = -\dfrac{L}{c^2}\dfrac{dI}{dt}$. Індуктивність L залежить від форми контуру й середовища, а не від сили струму; вона відіграє роль «інерції» кола. Унаслідок цього струм у LR-колі встановлюється за експонентою з часом релаксації $\tau = L/(c^2 R)$, а при розмиканні кола з великою індуктивністю виникають екстраструми та ЕРС, що можуть багаторазово перевищувати ЕРС джерела.

У надпровідників ($R = 0$) сумарний потік крізь замкнене кільце зберігається, $\Phi_{\text{зовн}} + LI/c = \text{const}$, а індукційні струми не згасають. Ефект Мейснера показує, що надпровідник — не просто ідеальний провідник: у товщі зразка $\mathbf{B} = 0$ за будь-якої передісторії, тобто це ідеальний діамагнетик ($\chi_m = -1/4\pi$, $\mu = 0$); поле проникає лише на лондонівську глибину δ_L. Виштовхування поля породжує силу, що робить можливою левітацію магніту над надпровідником.

Задачі

12.1. *Перемичка на рейках.* Перемичка завдовжки $\ell = 20$ см рівномірно ковзає по рейках зі швидкістю $v = 5$ м/с в однорідному полі $B = 500$ Гс, перпендикулярному до площини рейок. Опір замкненого контуру $R = 0{,}1$ Ом. Знайдіть ЕРС індукції, струм, силу Ампера й потужність, яку потрібно витрачати на рух перемички. Покажіть, що ця потужність дорівнює тепловій потужності I^2R. (Використайте 1 СГСЕ потенціалу = 300 В, 1 А = $3 \cdot 10^9$ СГСЕ струму.)

12.2. *Диск Фарадея.* Мідний диск радіуса $a = 10$ см обертається з частотою 50 об/с в однорідному полі $B = 1000$ Гс, перпендикулярному до диска. Знайдіть ЕРС між центром і краєм диска, якщо до цих точок дотикаються ковзні контакти.

12.3. *Генератор.* Рамка з $N = 100$ витків площею $S = 200$ см^2 обертається з частотою 50 об/с в однорідному полі $B = 1000$ Гс. Знайдіть амплітуду ЕРС. Якщо рамка замкнена на опір $R = 10$ Ом, знайдіть амплітуду струму й середню потужність, яку потрібно витрачати на обертання (втрати на тертя не враховуйте).

12.4. *Балістичний гальванометр.* Для градуювання балістичного гальванометра через нього розрядили конденсатор ємністю 0,1 мкФ, заряджений до 1 В; перший відкид зайчика на шкалі становив 10 см. Потім до гальванометра під'єднали вимірювальну котушку з $N = 10$ витків (повний опір кола $R = 200$ Ом) і швидко вийняли з неї постійний магніт; відкид становив 12 см. Знайдіть заряд Q, що пройшов через гальванометр, і магнітний потік магніту крізь один виток котушки.

12.5. *Вихрове поле.* Однорідне магнітне поле $B(t)$, напрямлене вздовж осі, заповнює циліндричну область радіуса a. Знайдіть напруженість вихрового електричного поля на відстані r від осі при $r < a$ та $r > a$. Оцініть її при $r = a = 5$ см і $\dot{B} = 10^3$ Гс/с. Чому поле поза циліндром відмінне від нуля, хоча там $B = 0$?

12.6. *Бетатрон.* Електрон рухається в бетатроні по колу радіуса $R = 30$ см. Потік магнітного поля крізь орбіту зростає зі сталою швидкістю 100 Вб/с (= 10^{10} Гс·см^2/с). Яку енергію набуває електрон за один оберт? Скільки обертів і який шлях потрібні, щоб набрати енергію 10 МеВ (вважайте швидкість електрона близькою до c)?

12.7. *Падаюча перемичка.* Провідна перемичка масою $m = 10$ г і довжиною $\ell = 20$ см ковзає без тертя вертикально вниз по двох вертикальних рейках у горизонтальному однорідному полі $B = 1000$ Гс, перпендикулярному до площини рейок. Рейки замкнено вгорі резистором опором $R = 0{,}01$ Ом (опором іншого не враховуйте). Знайдіть усталену швидкість падіння та покажіть, що потужність сили тяжіння дорівнює теплу, що виділяється в контурі. (1 Ом $\approx 1{,}1 \cdot 10^{-12}$ с/см.)

12.8. *Знак «мінус» у законі Фарадея із закону збереження енергії.* Замкнений контур опором R перебуває в зовнішньому магнітному полі; потік крізь контур $\Phi(t)$ змінюється з часом, і в контурі тече індукційний струм I. Припустимо, що закон індукції має вигляд $\mathscr{E} = s\dfrac{d\Phi}{dt}$, де s — невідомий знак (+1 або −1). Скориставшись законом збереження енергії, знайдіть s. *Вказівка:* порівняйте потужність, яку зовнішнє поле передає струму, із потужністю, що виділяється в контурі як джоулеве тепло. Розгляньте випадок, коли потік зростає.

12.9. *Встановлення струму.* Котушка з індуктивністю $L = 0{,}5$ Гн і опором $R = 50$ Ом підключається до джерела з ЕРС $\mathscr{E} = 100$ В. Знайдіть сталу часу, стаціонарний струм, струм через 5 мс після замикання та час, за який струм досягне 90% стаціонарного. (Розрахунок можна вести в СІ, де $\tau = L/R$.)

12.10. *Екстраструм розмикання.* Котушка з $L = 1$ Гн і опором $r = 1$ Ом підключена через ключ до джерела з $\mathscr{E} = 10$ В; паралельно котушці ввімкнено резистор $R = 1$ кОм. Знайдіть струм у котушці до розмикання, максимальну ЕРС самоіндукції після розмикання ключа та час спаду струму. Порівняйте з $\mathscr{E}$.

12.11. *Поле навколо надпровідної кулі.* Надпровідна куля радіуса a вміщена в однорідне зовнішнє поле $\mathbf{B}_0$. У наближенні ідеального діамагнетика ($\mu = 0$) знайдіть розподіл поля зовні кулі та переконайтеся, що нормальна складова поля на її поверхні дорівнює нулю.

12.12. *Замороження потоку.* Надпровідне кільце радіуса $a = 5$ см з індуктивністю $L = 250$ см помістили в нормальному стані в однорідне поле $B_0 = 100$ Гс, перпендикулярне до площини кільця, охолодили нижче T_c, а потім поле вимкнули. Знайдіть струм у кільці. Скільком квантам потоку $\Phi_0 = \pi\hbar c/|e| \approx 2{,}07 \cdot 10^{-7}$ Гс·см^2 відповідає збережений потік?

12.13. *Критичний струм.* Свинцевий дріт радіуса $r = 1$ мм лишається надпровідним, поки поле на його поверхні не досягне $H_c \approx 800$ Гс (правило Сілсбі). Знайдіть максимальний струм без втрати надпровідності.

12.14. *Левітація магніту.* Малий магніт із магнітним моментом $p_m = 10^3$ Гс·см^3 (приблизно 1 см^3 неодимового магніту) і масою 8 г, зорієнтований вертикально, розташований над плоскою надпровідною пластиною. На якій висоті він левітує? Скористайтеся (12.25) і вважайте дипольне наближення прийнятним.

12.15. *Глибина проникнення.* Оцініть лондонівську глибину проникнення для $n_s = 10^{22}$ см$^{-3}$ (носії — електрони, $q = e$, $m = m_e$). У скільки разів зменшиться поле на відстані $5\delta_L$ від поверхні надпровідника?

Контрольні питання

1. Сформулюйте суть явища електромагнітної індукції. Опишіть три групи дослідів Фарадея (рис. 12.1). Що в них спільного і чому важливою є лише відносна швидкість магніту та котушки?
2. Коли в контурі виникає індукційний струм, а коли ні? Чому сама причина зміни магнітного потоку не впливає на існування струму?
3. Запишіть закон електромагнітної індукції в інтегральній формі. Що означає знак «мінус» і якими трьома способами може змінюватися магнітний потік крізь контур?
4. Виведіть вираз для роботи сили Ампера при зміщенні перемички

на dx (рис. 12.2) і покажіть, що $dA = \frac{I}{c}\,d\Phi$. Яка складова поля $\mathbf{B}$ виконує роботу, а яка ні?

5. Магнітне поле не виконує роботи, але при переміщенні перемички зі струмом робота виконується. Як розв'язується ця суперечність? Що таке складові швидкості $\mathbf{u}_\perp$ та $\mathbf{u}_\parallel$ і яку роль відіграють сторонні ЕРС?

6. Що є безпосередньою причиною ЕРС індукції в рухомій перемичці (рис. 12.3)? Виведіть вираз $\mathscr{E}_{\text{інд}} = -B\ell v/c$ і покажіть, що він дає закон Фарадея.

7. Чому в рухомому провіднику причиною ЕРС є сила Лоренца, а в системі відліку, пов'язаній із самим провідником, — вихрове електричне поле? Про що це свідчить щодо співвідношення електричного й магнітного полів?

8. Поясніть принцип роботи найпростішого генератора змінного струму (рис. 12.4). Виведіть формулу для ЕРС та струму в рамці, що обертається в однорідному полі.

9. Яка причина ЕРС індукції в нерухомому контурі, якщо магнітне поле не діє на нерухомі заряди?

10. Сформулюйте правило Ленца (рис. 12.6). Чому воно є наслідком закону збереження енергії? Що сталося б, якби індукційний струм підсилював зміну потоку?

11. Що таке струми Фуко? Наведіть приклади їх корисного (індукційне нагрівання, магнітне демпфування) та шкідливого прояву.

12. Як записується загальний закон індукції для контуру, що рухається в змінному полі? Який внесок дають сила Лоренца й вихрове електричне поле?

13. Запишіть теорему про циркуляцію електричного поля в інтегральній та диференціальній формі. У чому принципова відмінність вихрового електричного поля від електростатичного? Чому його все ж називають електричним?

14. Що таке самоіндукція та індуктивність контуру? Від чого вона залежить, а від чого ні? Запишіть ЕРС самоіндукції та поясніть її інерційну роль у колі.

15. Виведіть індуктивність довгого соленоїда. У яких одиницях вимірюється індуктивність у гауссовій системі і чому це підтверджує її геометричний характер?

16. Виведіть закон зростання струму в LR-колі після замикання ключа. Що таке час релаксації τ і від чого він залежить?

17. Що таке екстраструм розмикання? Чому при $R \gg r$ ЕРС самоіндукції

в момент розмикання може значно перевищувати ЕРС джерела і до яких наслідків це призводить?

18 Що таке замороження потоку в замкненому надпровідному контурі? Запишіть закон збереження потоку і поясніть, чому індукційний струм у ньому не згасає.

19 Чим надпровідник відрізняється від ідеального провідника? У чому суть ефекту Мейснера?

20 Чому надпровідник називають ідеальним діамагнетиком? Чому дорівнюють χ_m і μ? Що таке лондонівська глибина проникнення?

21 Поясніть левітацію магніту над надпровідником методом зображень. Чому вона можлива, хоча за теоремою Ерншоу постійні магніти не можуть стійко зависати?

13 Енергія магнітного поля

Енергія поля існує у двох різних формах, які можна описати без гіпотез як магнітну поляризацію та електричну поляризацію або, за дуже ймовірною гіпотезою, як рух і напруження одного й того самого середовища.

Джеймс Клерк Максвелл, «Динамічна теорія електромагнітного поля» (1865)

На відміну від енергії електростатичного поля, яку можна ввести відразу після закону Кулона (просто обчисливши роботу перенесення зарядів проти кулонівської сили), з магнітною енергією так просто не вийде: магнітна складова сили Лоренца, з якою поле діє на заряд, роботи не виконує (розділ 9) — за жодних обставин. Виникає природне запитання: якщо магнітне поле роботи не виконує, звідки ж тоді береться енергія, яку воно, як виявиться, запасає?

Відповідь дає ЕРС *самоіндукції* — окремий випадок закону електромагнітної індукції (розділ 12): джерело, що підтримує струм у контурі, витрачає частину роботи не на подолання магнітної сили (вона роботи не виконує), а на подолання самої цієї ЕРС, яку контур наводить сам у собі через власне змінюване поле. Тому послідовно ввести енергію магнітного поля можна лише *після* того, як встановлено закон індукції і поняття самоіндукції; сам механізм — чому саме тут магнітна заборона не діє і хто насправді виконує цю роботу — ми розберемо детальніше в цьому розділі.

13.1. Енергія магнітного поля

Енергія контуру зі струмом. Провідник зі струмом створює магнітне поле, яке з'являється й зникає разом зі струмом; *магнітне поле — носій енергії*, що дорівнює роботі джерела струму на його створення. Розглянемо роботу джерела ЕРС $\mathscr{E}$ під час замикання ключа в колі з котушкою індуктивності L й резистором R, при перенесенні заряду

$dq = I\,dt$:

$$\delta A = \mathscr{E}\,dq = I^2R\,dt - \mathscr{E}_{\text{ci}} I\,dt = \underbrace{I^2R\,dt}_{\text{теплота}} + \underbrace{\frac{1}{c^2} LI\,dI}_{\text{енергія поля}}.$$

Частина роботи джерела йде на теплоту (закон Джоуля–Ленца), а решта — на створення магнітного поля. Інтегруючи другий доданок від нульового струму до кінцевого значення I, отримуємо енергію магнітного поля контуру:

$$W = \frac{1}{c^2}\int_0^I LI\,dI = \frac{LI^2}{2c^2} = \frac{I\Phi}{2c} = \frac{\Phi^2}{2L}. \tag{13.1}$$

Об'ємна густина енергії магнітного поля: соленоїд. Знайдемо енергію магнітного поля, використовуючи характеристики самого поля, на прикладі однорідного поля довгого соленоїда з проникністю μ (рис. 13.1). Індуктивність соленоїда — за формулою (12.14), $L = 4\pi\mu N^2 S/\ell$, а поле всередині — $B = 4\pi\mu NI/(c\ell)$ (розділ 10). Підставляючи в (13.1):

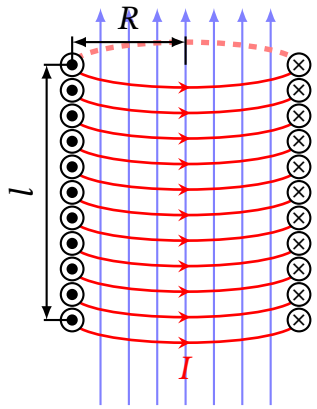


Рис. 13.1. Поздовжній переріз довгого соленоїда: однорідне поле всередині, струм у витках обмотки

$$W = \frac{1}{c^2}\frac{LI^2}{2} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{(4\pi\mu NI)^2 S\ell}{8\pi\mu\ell^2} = \frac{B^2}{8\pi}V = \frac{BH}{8\pi}V,$$

де $V = S\ell$ — об'єм соленоїда (об'єм, зайнятий полем), а в останній рівності використано $H = B/\mu$. Звідси об'ємна густина енергії магнітного поля:

$$\boxed{w = \frac{BH}{8\pi}.} \tag{13.2}$$

! *Так само, як і для електричного поля (розділ 6),* магнітна енергія зосереджена саме в тому об'ємі простору, де присутнє магнітне поле — *у випадку соленоїда це об'єм усередині нього, а не сам дріт обмотки.*

Формула (13.2) справедлива не лише для соленоїда: у квазістаціонарному наближенні її можна вивести із закону індукції для довільного розподілу поля (див. приклад нижче), а строго, з урахуванням струму зміщення, — з теореми Пойнтінга (§ 14.4). Для лінійного середовища ($\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$) маємо:

$$W = \int_V \frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}}{8\pi}\,dV, \qquad w = \frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}}{8\pi} = \frac{\mu H^2}{8\pi}. \tag{13.3}$$

! *Ця формула є точною магнітною паралеллю до густини енергії електричного поля (розділ 6).*

* **Густина енергії в загальному випадку***. Покажемо, що формула (13.2) не обмежується соленоїдом. Обмежимося *квазістаціонарним* наближенням: поля змінюються повільно (розділ 7), тож струмом зміщення нехтуємо, $\nabla\cdot\mathbf{j} = 0$ і $\nabla\times\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$.

Магнітне поле роботи над зарядами не виконує (розділ 9); роботу над носіями струму виконує вихрове електричне поле $\mathbf{E}$, яке виникає, коли магнітне поле змінюється. Потужність, яку поле $\mathbf{E}$ передає струмам в одиниці об'єму, дорівнює $\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}$, тому за час dt

$$\delta A = dt\int_V \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\,dV = \frac{c\,dt}{4\pi}\int_V \mathbf{E}\cdot\nabla\times\mathbf{H}\,dV.$$

За тотожністю $\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \mathbf{H}\cdot\nabla\times\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\nabla\times\mathbf{H}$ і теоремою Остроградського–Гаусса

$$\delta A = \frac{c\,dt}{4\pi}\int_V \mathbf{H}\cdot\nabla\times\mathbf{E}\,dV - \frac{c\,dt}{4\pi}\oint_S(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S}.$$

Для обмеженої системи у квазістаціонарному наближенні поверхневий інтеграл по нескінченно віддаленій поверхні дорівнює нулю (випромінювання немає). У першому доданку $\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\,\partial\mathbf{B}/\partial t$ (12.11):

$$\delta A = -\frac{dt}{4\pi}\int_V \mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\,dV.$$

Це робота вихрового поля над струмами; вона від'ємна: поле *забирає* енергію у струмів (точніше, у джерел, що їх підтримують) і передає її магнітному полю. Тому приріст магнітної енергії $dW = -\delta A$:

$$dW = \frac{1}{4\pi}\int_V \mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}\,dV. \tag{13.4}$$

Цей вираз справедливий і для нелінійних середовищ: для феромагнетика за цикл перемагнічування він дає втрати $\frac{1}{4\pi}\oint H\,dB$ в одиниці об'єму,

* тобто площу петлі гістерезису (розділ 10). Для лінійного середовища ($\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$) $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \frac{1}{2} d(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$, і інтегрування дає (13.3).

Строго, з урахуванням струму зміщення, цей результат разом з енергією електричного поля дає теорема Пойнтінга (розділ 14, § 14.4).

13.2. Взаємна індукція

Коефіцієнти взаємної індуктивності. Нехай два нерухомі контури 1 і 2 розташовані близько один до одного (рис. 13.2). Якщо в контурі 1 тече струм I_1, він створює крізь контур 2 магнітний потік, пропорційний I_1:

$$\Phi_{21} = \frac{1}{c} L_{21} I_1; \tag{13.5}$$

аналогічно, струм I_2 у контурі 2 створює крізь контур 1 потік

$$\Phi_{12} = \frac{1}{c} L_{12} I_2. \tag{13.6}$$

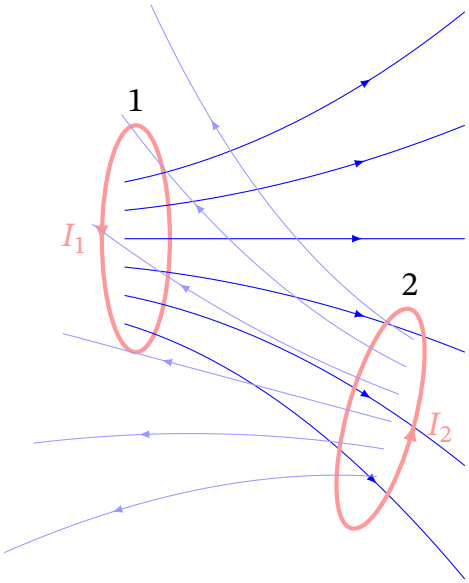


Рис. 13.2. Два нерухомі контури, магнітно пов'язані один з одним

Коефіцієнти пропорційності L_{12} і L_{21} називають *коефіцієнтами взаємної індуктивності* контурів; на відміну від власної індуктивності L, яка завжди додатна (енергія $LI^2/2c^2 > 0$), це *алгебраїчні* величини, які можуть мати будь-який знак (залежно від взаємної орієнтації контурів), а також дорівнювати нулю (якщо контури взаємно перпендикулярні так, що жоден потік іншого через себе не пронизує).

Повний магнітний потік, що пронизує кожен із контурів, складається з власного потоку (самоіндукції) та потоку, створеного струмом

іншого контуру:

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} = \dfrac{1}{c} L_{11} I_1 + \dfrac{1}{c} L_{12} I_2, \\ \Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22} = \dfrac{1}{c} L_{21} I_1 + \dfrac{1}{c} L_{22} I_2, \end{cases} \tag{13.7}$$

де $\Phi_{11} = \dfrac{1}{c} L_{11} I_1$ і $\Phi_{22} = \dfrac{1}{c} L_{22} I_2$ — власні потоки, а Φ_{12} і Φ_{21} задані співвідношеннями (13.6) і (13.5) відповідно.

З урахуванням взаємної індукції закони Ома для двох контурів набувають вигляду

$$\begin{cases} I_1 R_1 = \mathscr{E}_1 - \dfrac{1}{c^2} \dfrac{d}{dt} (L_{11} I_1) - \dfrac{1}{c^2} \dfrac{d}{dt} (L_{12} I_2), \\ I_2 R_2 = \mathscr{E}_2 - \dfrac{1}{c^2} \dfrac{d}{dt} (L_{21} I_1) - \dfrac{1}{c^2} \dfrac{d}{dt} (L_{22} I_2), \end{cases} \tag{13.8}$$

де $L_{11} \equiv L_1$, $L_{22} \equiv L_2$ — власні індуктивності контурів. Той факт, що зміна струму в одному контурі неминуче породжує ЕРС і в іншому, і називають *явищем взаємної індукції*.

У загальному випадку для N нерухомих контурів повний магнітний потік, що пронизує i-й контур, складається з власного потоку та потоків, створених струмами всіх інших контурів, і записується через суму:

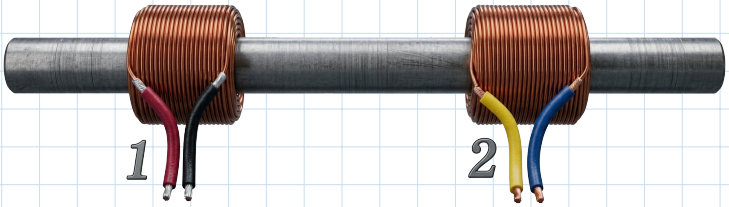
$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{N} \Phi_{ij} = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^{N} L_{ij} I_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{13.9}$$

де діагональні коефіцієнти L_{ii} — власні індуктивності контурів, а недіагональні L_{ij} $(i \neq j)$ — *коефіцієнти взаємної індуктивності* i-го та j-го контурів.

Підставляючи (13.9) у закон електромагнітної індукції $\mathscr{E}_i = -\dfrac{1}{c} \dfrac{d\Phi_i}{dt}$, отримуємо закон Ома для i-го контуру:

$$I_i R_i = \mathscr{E}_i - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{N} L_{ij} I_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{13.10}$$

* **Дві обмотки на спільному осерді**. Довгий парамагнітний циліндр довжиною ℓ і площею перерізу S (проникність μ) несе дві обмотки, намотані одна поверх одної по всій довжині: перша з густиною намотування n_1 витків на одиницю довжини, друга — n_2; знайдемо їхню взаємну індуктивність, нехтуючи крайовими ефектами.



Оскільки $L_{21} = c\Phi_2/I_1$, потрібно створити струм I_1 в обмотці 1 і обчислити повний потік крізь усі $N_2 = n_2\ell$ витків обмотки 2: $\Phi_2 = N_2 B_1 S$, де $B_1 = \dfrac{4\pi}{c}\mu n_1 I_1$ (розділ 10), тому

$$L_{21} = 4\pi\mu\,\frac{N_1 N_2}{\ell} S, \qquad (13.11)$$

і, обчисливши аналогічно L_{12}, отримуємо той самий результат: $L_{12} = L_{21} = 4\pi\mu N_1 N_2 S/\ell$.

! *У цьому прикладі $L_{12} = L_{21} = \sqrt{L_1 L_2}$. Ця гарна рівність — наслідок двох спрощень: (1) ми знехтували розсіюванням магнітного потоку поза осердям, і (2) проникність осердя μ не залежить від величини поля. Для феромагнітного осердя, де $\mu = \mu(H)$, і за умови $N_1 \neq N_2$, обмотки при однакових струмах створюють у осерді* різні *поля, тож вирази для L_{21} і L_{12} міститимуть різні (польозалежні) значення μ, і рівність $L_{21} = L_{12}$, узагалі кажучи, порушиться.*

Теорема взаємності. У щойно розглянутому прикладі коефіцієнти L_{12} і L_{21} обчислювалися двома геометрично різними шляхами, а зійшлися в одному й тому самому значенні. Це не випадковість прикладу з високосиметричним осердям: насправді рівність

$$\boxed{L_{12} = L_{21}.} \qquad (13.12)$$

виконується для *будь-якої* пари контурів довільної форми (за єдиної умови — лінійності середовища, $\mu \neq f(H)$, як і вказано вище). Тобто, результати розрахунку потоку в обох напрямках точно збігаються. Це твердження називається *теоремою взаємності*.

! *Практично корисний наслідок теореми: якщо по обох контурах течуть* однакові *струми I, то потоки, які вони наводять один в одному, теж рівні,* $\Phi_{12} = \Phi_{21}$.

Інакше кажучи: потік, який струм I контуру 1 наводить крізь контур 2, дорівнює потоку, який той самий за величиною струм I, якби він протікав контуром 2, навів би крізь контур 1. Завдяки цій рівності немає потреби розрізняти L_{12} *і* L_{21} *— можна просто говорити про* взаємну індуктивність двох контурів L_{12}. *Диференціюючи рівність потоків за часом, отримуємо еквівалентне ЕРС-формулювання: ЕРС, яку змінний струм* $I(t)$ *контуру 2 наводить у контурі 1, у кожен момент часу дорівнює ЕРС, яку той самий струм* $I(t)$*, якби він протікав контуром 1, навів би в контурі 2,*

$$-\frac{L_{12}}{c^2}\frac{dI}{dt} = -\frac{L_{21}}{c^2}\frac{dI}{dt}.$$

Доведемо цю теорему. Нехай маємо два нерухомі тонкі контури C_1 та C_2. За означенням, струм I_2 у контурі C_2 створює крізь контур C_1 магнітний потік (рис. 13.3)

$$\Phi_{12} = \frac{1}{c}L_{12}I_2. \tag{13.13}$$

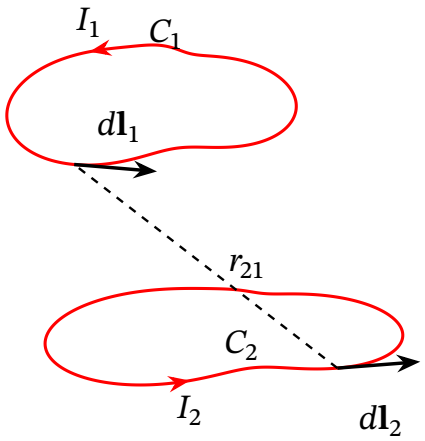


Рис. 13.3. До доведення теореми взаємності. Зображено контури C_1 і C_2, елементи $d\mathbf{l}_1$, $d\mathbf{l}_2$ та радіус-вектор r_{21} між ними, які використовуються при обчисленні потоку Φ_{12}.

Запишемо потік Φ_{12} крізь поверхню S_1, що спирається на контур C_1, від поля $\mathbf{B}^{(2)}$, створюваного струмом I_2. Поклавши $\mathbf{B}^{(2)} = \nabla \times \mathbf{A}^{(2)}$ (див. (9.12)), де $\mathbf{A}^{(2)}$ — векторний потенціал поля другого струму, за теоремою Стокса маємо:

$$\Phi_{12} = \int\limits_{S_1} \nabla \times \mathbf{A}^{(2)} \cdot d\mathbf{S}_1 = \oint\limits_{C_1} \mathbf{A}^{(2)} \cdot d\mathbf{l}_1, \tag{13.14}$$

де $d\mathbf{l}_1$ — орієнтований елемент контуру C_1.

Для тонкого провідника C_2 векторний потенціал $\mathbf{A}^{(2)}$ у точці розташування елемента $d\mathbf{l}_1$ виражається контурним інтегралом (9.13) (для лінійних струмів $\mathbf{j}dV \to Id\mathbf{l}$):

$$\mathbf{A}^{(2)} = \frac{\mu I_2}{c} \oint\limits_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2}{r_{12}}, \tag{13.15}$$

де r_{12} — відстань між елементами $d\mathbf{l}_2$ та $d\mathbf{l}_1$.

Підставляючи вираз (13.15) у формулу (13.14), отримуємо подвійний контурний інтеграл:

$$\Phi_{12} = \frac{\mu I_2}{c} \oint\limits_{C_1} \oint\limits_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{12}}. \tag{13.16}$$

Порівнюючи вираз (13.16) із вихідним означенням потоку (13.13), знаходимо явний вигляд взаємної індуктивності (формулу Неймана):

$$L_{12} = \mu \oint\limits_{C_1} \oint\limits_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{12}}. \tag{13.17}$$

Проводячи повністю симетричні міркування для коефіцієнта L_{21} (обчислюючи потік $\Phi_{21} = \frac{1}{c} L_{21} I_1$ від струму I_1 крізь контур C_2), дістаємо:

$$L_{21} = \mu \oint\limits_{C_2} \oint\limits_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1}{r_{21}}. \tag{13.18}$$

Оскільки скалярний добуток елементів $d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1$ є комутативним, а відстань між ними $r_{12} = r_{21}$ однакова в обох випадках, підінтегральний вираз у формулі Неймана є повністю симетричним відносно перестановки індексів $1 \leftrightarrow 2$. Звідси безпосередньо випливає теорема взаємності: $L_{12} = L_{21}$.

Формула (13.17) прозоро ілюструє суто *геометричний* характер взаємної індуктивності: величина L_{12} залежить лише від форми, розмірів та взаємного розташування двох контурів у просторі, але абсолютно не залежить від величин струму в них.

Два коаксіальні кільця. Два тонкі колові провідники зі спільною віссю лежать в одній площині; радіус зовнішнього — R_1, внутрішнього — R_2, причому $R_2 \ll R_1$ (рис. 13.4). Знайдемо магнітний потік крізь контур зовнішнього провідника, якщо внутрішнім тече струм I.

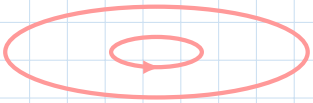


Рис. 13.4. Два коаксіальні колові контури різних радіусів

Пряме обчислення потоку від маленького кільця крізь велике — складна геометрична задача (поле маленького кільця істотно неоднорідне на масштабі великого). Натомість застосуємо *теорему взаємності*: обчислимо потік у *зворотному* напрямку — від великого кільця крізь маленьке, — це набагато простіше, оскільки на масштабі маленького кільця поле великого можна вважати практично однорідним і рівним полю в центрі великого кільця, $B_1 = 2\pi I/(cR_1)$ (розділ 9). Тоді

$$\Phi_{21} = B_1 \cdot \pi R_2^2 = \frac{2\pi^2 I R_2^2}{cR_1},$$

і, за теоремою взаємності, той самий потік (при тому самому струмі I) виникає й у прямій задачі:

$$\Phi_{12} = \Phi_{21} = \frac{2\pi^2 I R_2^2}{cR_1}.$$

Обертовий магнітний диполь. Магнітний диполь з моментом p_m обертається з циклічною частотою ω навколо осі, що проходить через його центр перпендикулярно до $\mathbf{p}_m$. На відстані $\ell \gg a$ від диполя розташоване нерухоме плоске колове кільце радіуса a і опору R, нормаль якого $\mathbf{n}$ перпендикулярна до осі обертання диполя (рис. 13.5); самоіндукцією кільця знехтуємо. Знайдемо струм у кільці.

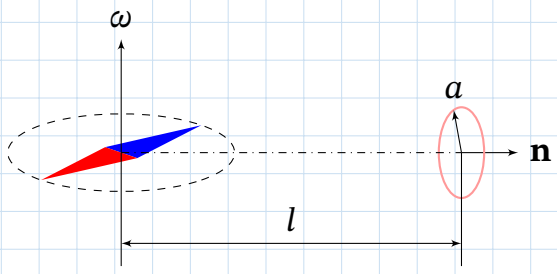


Рис. 13.5. Магнітний диполь, що обертається, і нерухоме кільце на відстані ℓ

За формулою для поля далекого магнітного диполя (9.30) (розділ 9), у площині кільця нормальна складова поля диполя пропорційна проєкції p_m на напрям $\mathbf{n}$, тобто $\propto \sin(\omega t)$ (оскільки диполь обертає-

* ться в площині, що містить **n**); потік крізь кільце виявляється синусоїдальним, $\Phi(t) \propto \sin(\omega t)$ з амплітудою, що спадає як $1/\ell^3$. ЕРС індукції $\mathscr{E} = -\frac{1}{c} d\Phi/dt \propto \omega \cos(\omega t)/\ell^3$, а шуканий струм $I(t) = \mathscr{E}(t)/R$ — гармонічно змінюється з тією самою частотою ω, з якою обертається сам диполь, і амплітудою, пропорційною $p_m \omega a^2/(cR\ell^3)$.

! *Цей приклад — не абстрактна вправа: саме так працюють генератори з обертовим магнітом (розділ 12) і магнітні датчики швидкості обертання (тахометри), у яких частота струму, наведеного в нерухомій котушці, дорівнює частоті обертання магніту.*

13.3. Енергія системи зв'язаних контурів

Формула (13.1) стосується *одного* відокремленого контуру. Виведемо тепер явний вираз для енергії системи довільної кількості N магнітно зв'язаних контурів зі струмами $I_1, \ldots, I_N$, спираючись на щойно доведену теорему взаємності $L_{ik} = L_{ki}$.

Розіб'ємо приростання енергії на дві частини — від самоіндукції кожного контуру окремо та від взаємної індукції кожної пари контурів:

$$dW = dW_{\text{с}} + dW_{\text{в}}, \qquad dW_{\text{с}} = \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{N} L_i I_i \, dI_i, \qquad dW_{\text{в}} = \frac{1}{c^2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{N} L_{ik} I_i \, dI_k. \tag{13.19}$$

Доданок $dW_{\text{с}}$ інтегрується так само, як і для одного контуру у формулі (13.1):

$$W_{\text{с}} = \frac{1}{2c^2} \sum_{i=1}^{N} L_i I_i^2. \tag{13.20}$$

У сумі $dW_{\text{в}}$ згрупуємо доданки попарно: для кожної пари індексів $i < k$ у подвійній сумі за $i \neq k$ трапляються рівно два доданки, $L_{ik} I_i \, dI_k$ і $L_{ki} I_k \, dI_i$:

$$dW_{\text{в}} = \frac{1}{c^2} \sum_{i<k} \left(L_{ik} I_i \, dI_k + L_{ki} I_k \, dI_i \right).$$

Саме тут, і лише тут, потрібна теорема взаємності: підставивши $L_{ki} = L_{ik}$, кожна дужка перетворюється на повний диференціал добутку $I_i I_k$,

$$L_{ik} I_i \, dI_k + L_{ik} I_k \, dI_i = L_{ik} \, d(I_i I_k),$$

звідки

$$dW_{\text{в}} = \frac{1}{c^2}\sum_{i<k} L_{ik}\, d(I_i I_k) = \frac{1}{2c^2}\sum_{\substack{i,k=1\\ i\neq k}}^{N} L_{ik}\, d(I_i I_k),$$

і, інтегруючи від нульових струмів,

$$W_{\text{в}} = \frac{1}{2c^2}\sum_{\substack{i,k=1\\ i\neq k}}^{N} L_{ik} I_i I_k. \tag{13.21}$$

Об'єднуючи (13.20) і (13.21), отримуємо повну енергію системи контурів:

$$\boxed{W = W_{\text{с}} + W_{\text{в}} = \frac{1}{2c^2}\sum_{i,k=1}^{N} L_{ik} I_i I_k = \frac{1}{2c}\sum_{i=1}^{N} I_i \Phi_i,} \tag{13.22}$$

де в останній рівності використано формулу (13.9).

Для системи з двох контурів формула (13.22) набуває вигляду

$$W = \frac{1}{2c^2}\left(L_1 I_1^2 + L_2 I_2^2 + 2L_{12} I_1 I_2\right), \tag{13.23}$$

де $L_1 \equiv L_{11}$, $L_2 \equiv L_{22}$ — власні індуктивності контурів.

Обмеження на взаємну індуктивність. Вираз (13.23) для енергії двох контурів — квадратична форма струмів I_1, I_2. Енергія магнітного поля не може бути від'ємною за жодних значень струмів, $W \geq 0$ (стан зі струмом не може мати меншу енергію, ніж стан без струму, — інакше поле саме собою «постачало» б енергію), тобто ця квадратична форма повинна бути додатно визначеною. Записавши (13.23) у стандартному вигляді $W = aI_1^2 + 2bI_1 I_2 + dI_2^2$ з $a = L_1/2c^2$, $b = L_{12}/2c^2$, $d = L_2/2c^2$, отримуємо звичайну умову додатної визначеності $b^2 \leq ad$, тобто

$$\boxed{L_{12}^2 \leq L_1 L_2.} \tag{13.24}$$

Фізично ця нерівність означає, що магнітний зв'язок між двома контурами не може бути «сильнішим», ніж дозволяють їхні власні індуктивності: частина енергії, яку створює струм одного контуру, завжди залишається в його *власному* магнітному полі, і лише частина — у полі, зчепленому з іншим контуром. Рівність $L_{12}^2 = L_1 L_2$ означає *ідеальний* магнітний зв'язок (весь потік одного контуру повністю зчеплений з іншим, без розсіювання) — граничний, майже не досяжний на практиці випадок, до якого, однак, впритул наближаються добре сконструйовані обмотки трансформатора на замкненому феромагнітному осерді (наступний параграф).

Вираз енергії системи контурів через поля. Той самий результат (13.23) можна отримати зовсім іншим шляхом — не через роботу джерел, а через *локалізацію енергії в полі*, узагальнюючи формулу (13.3) на випадок поля, породженого одразу кількома контурами (у лінійному середовищі з $\mu = \text{const}$, як і в прикладі з двома обмотками). Нехай $\mathbf{B}_1$ — поле струму I_1, а $\mathbf{B}_2$ — поле струму I_2; за принципом суперпозиції $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$, і

$$W = \int_V \frac{B^2}{8\pi\mu}\,dV = \int_V \frac{B_1^2}{8\pi\mu}\,dV + \int_V \frac{B_2^2}{8\pi\mu}\,dV + \int_V \frac{\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{B}_2}{4\pi\mu}\,dV.$$

Перші два інтеграли — це «власні» енергії кожного контуру окремо ($\frac{1}{2}L_1I_1^2/c^2$ і $\frac{1}{2}L_2I_2^2/c^2$), а третій, «перехресний», доданок і дає взаємну енергію $L_{12}I_1I_2/c^2$ з формули (13.23); для довільної кількості контурів міркування те саме, лише з подвійною сумою перехресних доданків замість одного.

Це трактування відразу дає кілька наслідків, не таких очевидних із формули роботи джерел:

1. Енергія W — *завжди додатна* за будь-яких струмів, оскільки під інтегралом стоїть невід'ємна величина B^2.
2. Енергія системи контурів *не адитивна*: через перехресний доданок вона не дорівнює сумі енергій окремих контурів.
3. Коефіцієнт при I_1I_2 у третьому інтегралі — тобто сам інтеграл $\int \mathbf{B}_1\cdot\mathbf{B}_2/4\pi\mu\,dV$ — очевидно *симетричний* щодо перестановки індексів 1 і 2 (скалярний добуток не залежить від порядку множників). Тому рівність $L_{12} = L_{21}$ тут випливає як *пряме геометричне* твердження про симетрію інтеграла — друге, незалежне доведення теореми взаємності.
4. Звідси ж — і друге означення взаємної індуктивності, через розподіл полів у просторі, а не через потік крізь контур:

$$L_{12} = \frac{c^2}{I_1I_2}\int_V \frac{\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{B}_2}{4\pi\mu}\,dV. \tag{13.25}$$

Отже, обидва підходи рівноправні й дають той самий результат, що ще раз підтверджує: магнітна енергія — це справді енергія *поля*, розподілена в просторі, а не якась умовна властивість самих контурів.

! *Та сама картина — додатність повного інтеграла й неадитивність через перехресний доданок — вже траплялась нам для електричного поля (розділ 6): розклад $E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2$ так само давав завжди додатну повну енергію (6.23) проти знакозмінної «дискретної» взаємної енергії (6.24). Різниця лише в тому, що там власна енергія точкового заряду розбігається, тому в «дискретній» формулі (6.15) лишається саме взаємний доданок; тут же власні енергії контурів $L_i I_i^2/2c^2$ скінченні й додатні самі собою, а знак може мати лише перехресний доданок $L_{ik} I_i I_k/c^2$ — і все ж повна енергія додатна завжди, бо додатна сама величина B^2 під інтегралом.*

13.4. Потенціальна енергія струмів

Отриманий вище вираз для енергії системи N магнітно зв'язаних контурів (13.22) підсумовує макроскопічний підхід, базований на струмах I_i та індуктивностях L_{ik}. Її за традицією називають *потенціальною енергією струмів*.

Поряд із виведеною раніше локальною об'ємною густиною $w = \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}/8\pi$, цей результат природно ставить два фундаментальних запитання.

По-перше, яку саме роль величина W відіграє для системи контурів, якщо саме магнітне поле позбавлене скалярного потенціалу? І по-друге, чи можна записати цю енергію безпосередньо через просторовий розподіл струмів $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ та векторний потенціал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ — аналогічно до того, як в електростатиці енергія виражається через густину заряду ρ та скалярний потенціал φ? Магнітне поле *не є потенціальним*: там, де течуть струми, $\nabla\times\mathbf{B}\neq 0$, і його не можна подати як $\mathbf{B} = -\nabla\varphi$ в усьому просторі.

«Потенціальною» енергію W називають не тому, що її можна приписати полю як скалярний потенціал, а тому, що вона відіграє роль *потенціальної функції в механічному сенсі*:

- це функція стану системи контурів, а не процесу;
- як буде показано далі в розділі про пондеромоторні сили, механічні сили та ЕРС отримуються з неї диференціюванням;
- умови рівноваги системи визначаються її екстремумами.

У термінах аналітичної механіки W — це, строго кажучи, «магнітна кінетична енергія» системи, квадратична форма струмів I_i з коефіцієнтами L_{ik} у ролі узагальнених мас, а не потенціал силового поля. Тому й знак сили інший, ніж для механічної потенціальної енергії: за сталих струмів $F_x = +(\partial W/\partial x)_I$, і лише за сталих потоків $F_x = -(\partial W/\partial x)_\Phi$ (§ 13.6).

! *Підсумуємо різницю між двома «потенціальностями», щоб уникнути плутанини:*
- **B** не *є потенціальним полем (*$\nabla \times \mathbf{B} \neq 0$ *там, де течуть струми);*
- $W(I_1, \ldots, I_N)$ поводиться *як потенціальна функція системи контурів.*

Це дві різні речі, і спільне слово «потенціальна» тут — лише данина механічній аналогії.

Вираз через векторний потенціал. Тепер покажемо, як ту саму величину (13.22) виразити безпосередньо через векторний потенціал поля, не вдаючись до обчислення геометричних індуктивностей L_{ik}. Для лінійного середовища ($\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, $\mu = \text{const}$) скористаємось означенням $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ і тим, що для системи лінійних струмів векторний потенціал дорівнює сумі внесків окремих контурів, $\mathbf{A} = \sum_i \mathbf{A}_i$, де

$$\mathbf{A}_i(\mathbf{r}) = \frac{\mu I_i}{c} \oint\limits_{C_i} \frac{d\mathbf{l}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \tag{13.26}$$

Підставляючи $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ у вираз для повної енергії поля і інтегруючи частинами (з урахуванням того, що на нескінченності поля спадають достатньо швидко), отримуємо:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int\limits_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\, dV = \frac{1}{8\pi} \int\limits_V \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}\, dV = \frac{1}{8\pi} \int\limits_V \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H}\, dV = \frac{1}{2c} \int\limits_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}\, dV, \tag{13.27}$$

де на останньому кроці використано рівняння $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$. Для системи тонких контурів $\mathbf{j}\, dV \to I_i\, d\mathbf{l}_i$, і формула (13.27) переходить у

$$W = \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^{N} I_i \oint\limits_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i = \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^{N} I_i \Phi_i, \tag{13.28}$$

що точно збігається з отриманим раніше виразом (13.22). Отже, обидва означення — через контурні індуктивності L_{ik} і через суцільний розподіл векторного потенціалу **A** — описують ту саму фізичну величину.

! *Формула (13.27) показує, що енергію магнітного поля можна обчислити, знаючи лише розподіл струмів* **j** *і створений ними векторний потенціал* **A***, без попереднього знаходження індуктивностей* L_{ik}*. Це особливо зручно для розподілених струмів (об'ємних, поверхневих), де поняття індуктивності окремого контуру втрачає сенс.*

Зіставимо магнітний вираз (13.27) із його електростатичним аналогом, де енергія системи зарядів записується через скалярний потенціал φ:

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \rho\,\varphi\,dV = \frac{1}{8\pi}\int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\,dV.$$

Ми бачимо повну структурну відповідність між обома галузями електродинаміки.

! *Спільним для обох випадків лишається концептуальний принцип: енергія системи джерел виражається як* інтеграл від добутку джерела на його потенціал *($\rho\varphi$ в електриці та $\mathbf{A}\cdot\mathbf{j}$ у магнетизмі). Обидва потенціали визначені з точністю до калібрування, проте самі інтеграли від калібрування не залежать: для $\int \mathbf{j}\cdot\mathbf{A}\,dV$ це випливає з $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{j}=0$.*

* **Енергія соленоїда через векторний потенціал**.

Застосуємо нову формулу (13.27) до довгого соленоїда радіуса R, довжини ℓ з густиною намотування n витків на одиницю довжини, яким тече струм I.

Поле всередині соленоїда однорідне, $B = 4\pi\mu nI/c$. Векторний потенціал у циліндричних координатах, що задовольняє умову $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$, дорівнює:

$$A_\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{Br}{2}, & r < R, \\ \dfrac{BR^2}{2r}, & r > R. \end{cases} \qquad (13.29)$$

Струм намотки зосереджений на поверхні $r = R$, де $\mathbf{j}\,dV = I\,n\,\ell\,d\mathbf{l}$. Підставляючи $A_\varphi(R) = BR/2$ у формулу (13.27):

$$W = \frac{1}{2c}\int_V \mathbf{A}\cdot\mathbf{j}\,dV = \frac{1}{2c}\cdot I\cdot N\cdot A_\varphi(R)\cdot 2\pi R = \frac{1}{2c}\cdot I\cdot N\cdot\frac{BR}{2}\cdot 2\pi R = \frac{\pi NIBR^2}{2c}.$$

Підставляючи $B = 4\pi\mu nI/c$ та $N = n\ell$, маємо:

$$W = \frac{4\pi\mu N^2 S}{\ell}\cdot\frac{I^2}{2c^2} = \frac{LI^2}{2c^2},$$

де $L = 4\pi\mu N^2 S/\ell$ — індуктивність соленоїда (12.14). Результат точно збігається з раніше отриманою формулою, але розрахований безпосередньо з характеристик $\mathbf{A}$ та $\mathbf{j}$.

13.5. Принцип роботи трансформаторів

Явище взаємної індукції лежить в основі роботи *трансформаторів* — пристроїв для підвищення чи зниження напруги змінного

струму (рис. 13.6). Первинна й вторинна обмотки з N_1 і N_2 витками укріплені на спільному замкненому феромагнітному осерді; завдяки великому μ феромагнетика (розділ 10) магнітний потік майже повністю локалізований в осерді й пронизує обидві обмотки однаковим потоком Ф. Це — практична реалізація того самого *ідеального* магнітного зв'язку, граничного випадку $L_{12}^2 = L_1 L_2$ з попереднього параграфа: розсіюванням потоку поза осердям тут свідомо нехтують, а отже, увесь потік, породжений первинною обмоткою, зчеплений і з вторинною. Змінна ЕРС $\mathscr{E}_1$ у первинній обмотці створює струм I_1 і змінний магнітний потік Ф; цей потік пронизує й витки вторинної обмотки, наводячи в ній ЕРС взаємної індукції, а в первинній — ЕРС самоіндукції.

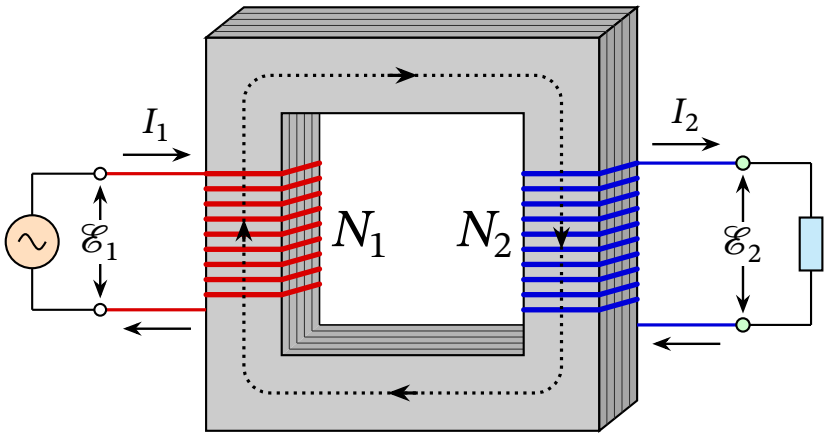


Рис. 13.6. Принципова схема трансформатора

Закон Ома для первинного кола: $\mathscr{E}_1 - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}(N_1\Phi) = I_1 R_1$. У режимі швидкозмінних полів (типовому для трансформаторів) $I_1 R_1 \ll \mathscr{E}_1,\ \frac{d}{dt}(N_1\Phi)$, тому у цьому наближенні

$$\mathscr{E}_1 \approx \frac{N_1}{c}\frac{d\Phi}{dt}, \tag{13.30}$$

а ЕРС у вторинній обмотці, оскільки потік Ф в осерді той самий,

$$\mathscr{E}_2 = -\frac{N_2}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{N_2}{N_1}\mathscr{E}_1 \tag{13.31}$$

(знак «мінус» означає лише, що ЕРС у вторинній обмотці, як і ЕРС самоіндукції первинної, протилежна за знаком ЕРС джерела; знак напруги на виході залежить від напрямку намотування). Відношення

$$\boxed{\eta = \frac{N_2}{N_1}} \tag{13.32}$$

називають *коефіцієнтом трансформації*: якщо $\eta > 1$ — трансформатор *підвищувальний* (збільшує ЕРС), якщо $\eta < 1$ — *знижувальний* (зменшує ЕРС).

А як перетворюється струм? Тут якраз і працює закон збереження енергії. У наближенні ідеального трансформатора — без омічних втрат ($R_1, R_2 \to 0$) і без розсіювання потоку — в обмотках не накопичується енергія понад ту, що в кожен момент проходить крізь них: уся потужність, яку джерело вкладає в первинне коло, миттєво передається через спільне поле в коло навантаження вторинної обмотки, тобто потужність зберігається,

$$I_1\mathscr{E}_1 = -I_2\mathscr{E}_2$$

(знак «мінус» — той самий, що й у формулі (13.31): коли первинна обмотка *споживає* потужність від джерела, вторинна *віддає* її навантаженню). Підставляючи (13.31), знаходимо коефіцієнт трансформації *струмів*:

$$\boxed{\frac{I_2}{I_1} = -\frac{\mathscr{E}_1}{\mathscr{E}_2} = \frac{1}{\eta}.} \tag{13.33}$$

Отже, у скільки разів трансформатор підвищує напругу, у стільки ж разів він знижує струм, — і навпаки: закон збереження енергії не дозволяє одночасно виграти і в напрузі, і в струмі. Саме тому передавати електроенергію на великі відстані вигідно при високій напрузі й, відповідно, малому струмі (а отже, і з малими тепловими втратами I^2R у дротах лінії передачі), а споживачам подавати вже при низькій, безпечній напрузі — і саме взаємна індукція, а не який-небудь прямий електричний контакт, дозволяє так легко узгоджувати ці дві вимоги.

Тут ми розглянули лише ідеалізований трансформатор — без омічних втрат в обмотках і без розсіювання потоку, — щоб якнайпростіше дістати сам факт існування коефіцієнта трансформації з енергетичних міркувань. Реальний трансформатор як коло змінного струму, з вхідним імпедансом, внесеним опором, режимами холостого ходу й короткого замикання, втратами в міді та сталі, ККД, а також практичними застосуваннями (узгодження навантаження, автотрансформатори, трифазні трансформатори, передача електроенергії на великі відстані) детально розглянуто в § 18.5, присвяченому змінному струму.

13.6. Пондеромоторні сили в магнітному полі

Метод віртуальних переміщень для магнітних сил. Повернімося тепер до величини W, яку ми назвали потенціальною енергією

струмів. Так само, як і в електростатиці (розділ 6), силу, що діє на провідник чи магнетик з боку магнітного поля, зручно шукати методом віртуальних переміщень, спираючись на закон збереження енергії. Робота джерел струму $\delta A_{\text{дж}}$ витрачається на теплоту δQ, на приріст магнітної енергії dW і на механічну роботу $\delta A_{\text{мех}}$:

$$\delta A_{\text{дж}} = \delta Q + dW + \delta A_{\text{мех}}. \tag{13.34}$$

З іншого боку, за законом Ома, робота джерела дорівнює $\delta A_{\text{дж}} = \delta Q - \mathscr{E}_{\text{ci}} I\,dt$ (ЕРС самоіндукції — частина роботи джерела, витрачена на подолання цієї ЕРС). Порівнюючи два вирази для $\delta A_{\text{дж}}$:

$$-\mathscr{E}_{\text{ci}} I\,dt = dW + \delta A_{\text{мех}}.$$

Випадок $I = \text{const}$ (струм у колі підтримується сталим джерелом). Тоді, за формулою (12.13), $-\mathscr{E}_{\text{ci}} I\,dt = \dfrac{I^2}{c^2} dL$, тоді як приріст магнітної енергії за формулою (13.1) становить лише половину цього, $dW = \dfrac{I^2}{2c^2} dL$ (оскільки $I = \text{const}$, а не Ф). Отже, $\delta A_{\text{мех}} = +dW$, і сила

$$\boxed{F_x = +\left(\frac{dW}{dx}\right)_I}. \tag{13.35}$$

Випадок $\Phi = \text{const}$ (наприклад, контур з надпровідника). Тоді $\mathscr{E}_{\text{ci}} = 0$ (адже $d\Phi/dt = 0$), тому $\delta A_{\text{мех}} = -dW$, і

$$\boxed{F_x = -\left(\frac{dW}{dx}\right)_\Phi}. \tag{13.36}$$

Знаки формул (13.35) і (13.36) такі самі, як і у відповідних формулах електростатики (6.25), (6.26) (розділ 6), якщо правильно зіставити режими. Сталий струм відповідає сталій різниці потенціалів: в обох випадках джерело підтримує режим і виконує роботу $2\,dW$, половина якої йде на приріст енергії поля, а половина — на механічну роботу, тому $F_x = +\partial W/\partial x$. Сталий потік відповідає сталому заряду: система ізольована від джерел, і механічна робота виконується за рахунок енергії поля, $F_x = -\partial W/\partial x$. Плутанина виникає, якщо формально зіставляти струм із зарядом (енергія $LI^2/2c^2$ зовні схожа на $q^2/2C$), — тому варто щоразу з'ясовувати, хто виконує роботу.

! *Строго кажучи, роботу сил поля за сталої температури визначає не сама енергія W, а* вільна енергія *F (термодинамічний потенціал, що визначає роботу за $T = \text{const}$). Різниця між ними виникає лише тоді, коли властивості середовища (наприклад, ма-*

! *гнітна проникність μ) залежать від температури й віртуальне переміщення супроводжується тепловими ефектами. У прикладах цього розділу $\mu = \text{const}$, тому F і W — буквально та сама величина, і формули (13.35), (13.36) застосовуються без змін.*

Втягування стержня з магнетика в соленоїд.

Знайдемо, користуючись загальним методом, силу, з якою втягується у вакуумний соленоїд довгий циліндричний стержень (рис. 13.7) з магнітною проникністю μ і площею поперечного перерізу S. По соленоїду, що має густину намотування $n = N/\ell$, циркулює струм I.

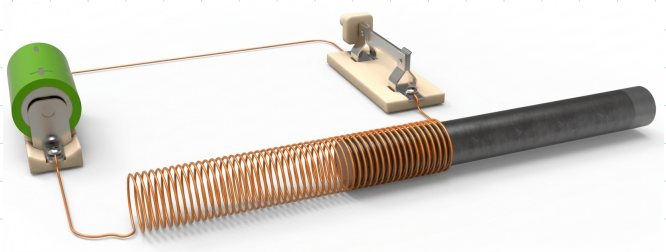


Рис. 13.7. Осердя втягується в котушку зі струмом — приклад пондеромоторної сили в магнітному полі

Вважатимемо, що струм у соленоїді підтримується сталим, тому користуємось формулою при сталому струмі,

$$\delta A_{\text{поле}} = f\,\delta x = (dW)_I = \frac{I}{2c}\,d\Phi \qquad (13.37)$$

(тут Φ — повне потокозчеплення соленоїда, тобто сума потоків крізь усі його витки, і $W = I\Phi/2c$, як у формулі (13.1)). Далі, оскільки соленоїд довгий, а точки спостереження обрано далеко від межі розділу стержень-вакуум і від кінців соленоїда, напруженість поля там усюди та сама, що й в ідеальному нескінченному соленоїді: $H = 4\pi nI/c$ (розділ 10), звідки $I = cH/4\pi n$, а отже

$$(dW)_I = \frac{1}{8\pi n} H\,d\Phi. \qquad (13.38)$$

Знайдемо зміну потоку $d\Phi$ при зміщенні стержня на δx. Потокозчеплення Φ змінюється за рахунок того, що частина довжини соленоїда, яка досі містила вакуум ($\mu = 1$), заповнюється речовиною з проникністю μ: при зміщенні стержня на δx число витків, що охоплюють вакуумну частину, зменшується на $n\,\delta x$, а число витків, що охоплюють частину з магнетиком, на стільки ж збільшується. Тому, нехтуючи неоднорідністю поля поблизу межі розділу й кінців соленоїда (об'єм цих ділянок при малому δx практично не змінюється) і використовуючи $B_{\text{стержень}} = \mu H$, $B_{\text{вакуум}} = H$ (розділ 10):

$$d\Phi = n\,\delta x\,(B_{\text{стержень}} - B_{\text{вакуум}})\,S = n\,\delta x\,(\mu - 1)HS. \qquad (13.39)$$

*

Підставляючи (13.39) у (13.38), знаходимо

$$(dW)_I = \frac{\mu - 1}{8\pi} H^2 S\, \delta x,$$

звідки, за формулою (13.37),

$$f = \frac{(dW)_I}{\delta x} = \frac{\mu - 1}{8\pi} H^2 S. \qquad (13.40)$$

При $\mu > 1$ (парамагнетик) сила додатна — стержень втягується в соленоїд; при $\mu < 1$ (діамагнетик) сила від'ємна — стержень виштовхується з нього.

Формула (13.40) — ще одне підтвердження загального правила: парамагнетики ($\mu > 1$) втягуються в область сильнішого поля, а діамагнетики ($\mu < 1$) — виштовхуються з неї. Сила пропорційна H^2 (тобто не залежить від напрямку поля) і площі перерізу стержня S — чим «товщий» стержень, тим більша втягувальна сила. Порівняйте цей результат із формулою (13.41) для підйомної сили електромагніта: там сила теж виявилась пропорційною $B^2 S$ (з точністю до множника, зумовленого іншою геометрією задачі), що ще раз наголошує на універсальності енергетичного методу — він дає змогу знаходити силу в найрізноманітніших конфігураціях, не вдаючись щоразу до прямого обчислення сил Ампера.

Підйомна сила електромагніта. Розглянемо електромагніт — П-подібне осердя з феромагнетика проникності μ, обмотане N витками зі струмом I, до полюсів якого прикладено якір (пластину), відокремлений повітряним зазором завтовшки x з кожного боку. Знайдемо силу притягання якоря.

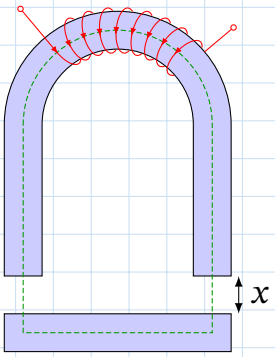


Рис. 13.8. Електромагніт з якорем, відокремленим повітряним зазором x

*

За теоремою про циркуляцію для **H**, застосованою до контуру, що проходить через осердя (довжиною ℓ) і двічі перетинає зазор (загальною товщиною $2x$):

$$\frac{B}{\mu}\ell + B\cdot 2x = \frac{4\pi}{c}IN \quad\Rightarrow\quad B = \frac{4\pi\mu}{c}\,\frac{NI}{\ell + 2\mu x}$$

(у повітряному зазорі $\mu_{\text{пов}} \approx 1$, тому там $\mathbf{H} = \mathbf{B}$; поле в зазорі й осерді те саме завдяки неперервності B_n на межі, розділ 10). Магнітний потік крізь переріз S магніту: $\Phi = NBS = \dfrac{4\pi\mu}{c}\,\dfrac{N^2 I}{\ell + 2\mu x}S$.

За умови сталого струму ($I = \text{const}$) зміна енергії поля при віртуальній зміні зазору $dW = \dfrac{I\,d\Phi}{2c}$ (з формули (13.1), $W = I\Phi/(2c)$ при $I = \text{const}$), і, за формулою (13.35),

$$F_x = \left(\frac{dW}{dx}\right)_I = \frac{I}{2c}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_I = -\frac{4\pi\mu^2}{c^2}\,\frac{N^2I^2}{(\ell + 2\mu x)^2}S = -\frac{B^2}{8\pi}\cdot 2S.$$

Отже,

$$F_x = -\frac{B^2}{4\pi}S. \qquad (13.41)$$

Від'ємний знак означає, що сила — сила *притягання*: якір втягується в зазор, зменшуючи x, — цілком у дусі загального висновку про те, що пара- й феромагнетики (тут — феромагнітний якір) завжди втягуються в область сильнішого поля (формула (13.40)).

Підсумки

Шлях цього розділу був обернений до того, яким вводилась енергія електричного поля: там вона народжувалась *напряму* з роботи проти сили Кулона. Тут так не вийшло: магнітна сила, за Лоренцем, роботи над зарядами не виконує ніколи — ні для сталого поля, ні для змінного. Але, змінюючись, магнітне поле породжує інше поле — *вихрове електричне* — і вже воно виконує роботу над зарядами. Саме цю роботу, на подолання ЕРС *самоіндукції*, і виконує джерело струму, а не роботу проти сили Ампера.

З цієї роботи ми й отримали густину енергії $w = BH/8\pi$ — за формою тотожну електростатичній $w = ED/8\pi$ (розділ 6). Та сама логіка лежить і в основі пондеромоторних сил (втягування магнетика в соленоїд, притягання якоря електромагніта). На макрорівні здається, що механічну роботу виконує саме магнітна сила. Проте для заряду, що рухається *разом* із провідником, ця ж сила одночасно гальмує дрейфовий струм. Робота магнітної сили над макроскопічним рухом тіла в точності компенсується її ж від'ємною роботою над струмом — так що сумарно, як і належить, сила Лоренца роботи не виконує. У мові ж електродинамічних контурів рух тіла змінює індуктивність $L(x)$, викликаючи додаткову ЕРС індукції. Саме джерело струму, долаючи цю ЕРС, компенсує гальмування носіїв і здійснює підсумкову роботу, яка за сталого струму ділиться порівну: одна її частина йде на поповнення енергії поля з густиною $w = BH/8\pi$, а інша — переходить у механічний розгін тіла.

Звідси головний висновок розділу: магнітне поле — не *виконавець*, а *посередник*. Енергію воно *зберігає*, але обмінюється нею із зарядами лише через електричне поле, яке воно саме й породжує, змінюючись у часі.

Задачі

? **13.1.** Замкнений плоский контур із постійним струмом I поміщено в зовнішнє однорідне магнітне поле $\mathbf{B}$. Поле повертає контур, орієнтуючи його магнітний момент уздовж $\mathbf{B}$. Відомо, що сила Лоренца не виконує роботи над носіями заряду. Поясніть, за рахунок якого джерела і через який мікроскопічний механізм здійснюється механічний розгін контуру. Запишіть енергетичний баланс.

13.2. У те саме однорідне магнітне поле **B** поміщено намагнічену феромагнітну стрілку з таким самим за величиною магнітним моментом $\mathbf{p}_m$. Вона повертається вздовж поля, не маючи макроскопічного струму чи джерела живлення. Спираючись на формулу потенціальної енергії магнітного диполя у зовнішньому полі (9.35), поясніть, як механічна робота повороту пов'язана зі зміною цієї енергії, і які саме внутрішні сили безпосередньо повертають стрілку. Запишіть енергетичний баланс та порівняйте його із балансом для контуру зі струмом.

13.3. *Енергія магніту томографа.* Надпровідний магніт томографа створює поле $B = 3$ Тл ($3 \cdot 10^4$ Гс) в об'ємі близько 1 м^3. Оцініть енергію, запасену в полі, і порівняйте з енергією вибуху 1 кг тротилу (4,2 МДж). Чому аварійна втрата надпровідності («квенч») такого магніту небезпечна?

13.4. *Індуктивність коаксіального кабелю.* По внутрішньому тонкостінному циліндру радіуса a коаксіального кабелю тече струм I, по зовнішньому радіуса b — зворотний струм. Знайдіть енергію магнітного поля на одиницю довжини кабелю й звідси індуктивність одиниці довжини. Обчисліть її для $a = 0{,}5$ мм, $b = 3{,}5$ мм (1 Гн $= 10^9$ см).

13.5. *Взаємна індуктивність кілець.* Для двох концентричних кілець в одній площині з радіусами $R_1 = 10$ см і $R_2 = 1$ см (рис. 13.4) знайдіть взаємну індуктивність у сантиметрах і в генрі. Яка ЕРС наводиться в малому кільці, якщо струм у великому змінюється зі швидкістю 10^3 А/с?

13.6. *Підйомна сила електромагніта.* Індукція в зазорі електромагніта (рис. 13.8) $B = 10$ кГс, площа кожного з двох полюсів $S = 10$ см^2. Знайдіть силу притягання якоря.

13.7. *Магнітний тиск.* Методом віртуальних переміщень за сталого потоку покажіть, що на обмотку довгого соленоїда з полем B діє тиск $p = B^2/8\pi$, напрямлений назовні. Оцініть його для $B = 10$ Тл.

Контрольні питання

1. Виведіть енергію магнітного поля контуру зі струмом $W = LI^2/2c^2$ з роботи джерела ЕРС. На що йде решта роботи джерела?

2. Як звідси отримати густину енергії магнітного поля $w = BH/8\pi$ для соленоїда? Як це виведення узагальнюється на довільне поле і яку роль у ньому відіграє вихрове електричне поле?

3. Дайте означення коефіцієнтів взаємної індуктивності L_{12}, L_{21} (чим вони відрізняються від власної індуктивності) і покажіть на прикладі двох обмоток на спільному осерді, що $L_{12} = L_{21}$. За яких умов ця рівність може порушуватися і яку роль тут відіграє феромагнітне осердя?

4. Сформулюйте теорему взаємності. Як теорема спрощує обчислення потоку, як у прикладі з двома коаксіальними кільцями?

5. Узагальніть формулу енергії одного контуру на систему N зв'язаних контурів. Чому саме теорема взаємності дозволяє писати подвійну суму $W = \frac{1}{2c^2}\sum L_{ik} I_i I_k$, не турбуючись про порядок індексів? Звідки береться нерівність $L_{12}^2 \le L_1 L_2$ і що вона означає фізично?

6. Поясніть принцип дії трансформатора. Що таке коефіцієнт трансформації, чим відрізняються підвищувальний і знижувальний трансформатори і чому передавати електроенергію вигідно при високій напрузі?

7. Виведіть формули для пондеромоторної сили при $I = \text{const}$ та при $\Phi = \text{const}$. Чому їхні знаки протилежні до відповідних формул електростатики?

8. Що таке вільна енергія в контексті енергетичного методу обчислення магнітних сил і чому саме вона, а не повна енергія, визначає роботу поля? Знайдіть силу, з якою парамагнітний чи діамагнітний стержень втягується (виштовхується) із соленоїда.

9. Знайдіть підйомну силу електромагніта (рис. 13.8). Чому вона є силою притягання?

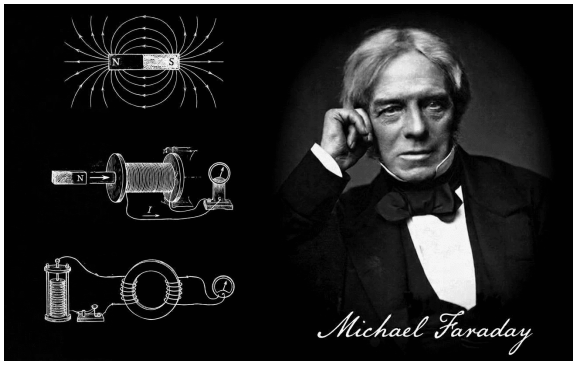
14 Система рівнянь Максвелла

Кількісне, математичне формулювання законів поля дано в так званих рівняннях Максвелла. Експериментальні факти призвели до формулювання цих рівнянь, але зміст їх значно багатший [...]. Їхня проста форма приховує глибину, що виявляється тільки при ретельному вивченні.

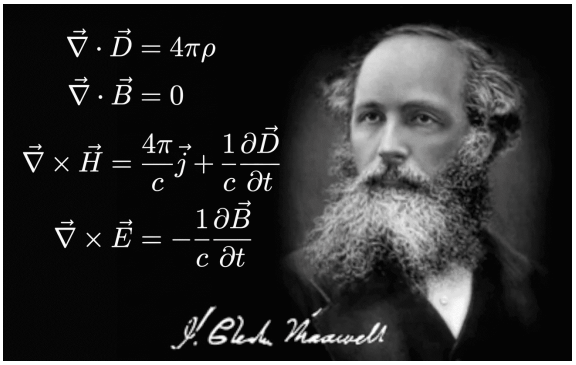
А. Ейнштейн, Л. Інфельд, «Еволюція фізики»

Основоположники теорії електромагнітного поля

Теорію електромагнітного поля, початки якої заклав *Фарадей*, математично завершив *Максвелл* (рис. 14.1). Однією з найважливіших нових ідей, висунутих Максвеллом, була думка про *симетрію* у взаємозалежності електричного й магнітного полів: якщо змінне магнітне поле породжує електричне (закон Фарадея, розділ 12), то, за красивою симетрією, змінне електричне поле мусить породжувати магнітне. Ця ідея, як ми зараз побачимо, узгоджується із законом збереження заряду й веде до відкриття *струму зміщення* — останньої відсутньої ланки повної системи рівнянь електродинаміки.



Майкл Фарадей
(1791–1867)



Джеймс Клерк Максвелл
(1831–1879)

Рис. 14.1. Основоположники класичної теорії електромагнітного поля

Формулювання рівнянь Максвелла А. Ейнштейн і Л. Інфельд у книзі «Еволюція фізики» назвали «найважливішою подією з часу Ньютона» — не лише через цінність їхнього змісту, а й тому, що вони дають зразок *нового типу законів*: *рівняння Максвелла — це закони, що виражають структуру поля*, а не закони руху окремих частинок.

14.1. Струм зміщення

Суперечність у законах магнетизму. Теорема про циркуляцію для постійного магнітного поля, яку ми встановили в розділ 10,

$$\oint_L \mathbf{H}\cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c}\int_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{14.1}$$

виявляється *неправильною* у випадку *змінного* електричного поля (рис. 14.2). Застосуємо операцію $\boldsymbol{\nabla}\cdot$ до диференціальної форми цього рівняння: оскільки дивергенція будь-якого ротора тотожно дорівнює нулю, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H}\equiv 0$, отримуємо

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{j} = 0. \tag{14.2}$$

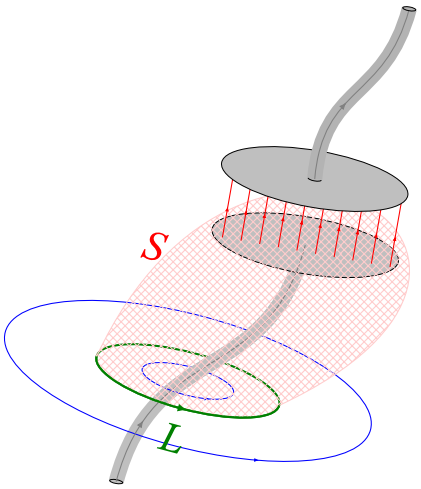


Рис. 14.2. Контур L, натягнута на нього поверхня S та провідник зі струмом, що її пронизує

Але, з іншого боку, за законом збереження заряду (рівняння неперервності, розділ 7), якщо густина заряду змінюється з часом, $\partial\rho/\partial t \neq 0$, то

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \neq 0. \tag{14.3}$$

Рівняння (14.2) і (14.3) відверто *суперечать* одне одному щоразу, коли $\partial\rho/\partial t \neq 0$ — а отже, теорему про циркуляцію (14.1) необхідно *видозмінити*.

Гіпотеза Максвелла. Щоб усунути цю суперечність, Дж. Максвелл увів поняття *струму зміщення* $\mathbf{j}_{\text{зм}}$, доповнивши теорему про циркуляцію так, щоб закон збереження заряду виконувався за будь-яких обставин:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{зм}}). \tag{14.4}$$

Застосовуючи операцію $\boldsymbol{\nabla}\cdot$ до цього рівняння:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{зм}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j}_{\text{зм}} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

(тут ми скористались рівнянням (14.3)). За теоремою Гаусса для електричного поля, $\rho = \dfrac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D}$ (розділ 5), тому

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j}_{\text{зм}} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D}\right) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right).$$

Найпростіше (і, як показує подальша перевірка експериментом, єдино правильне) розв'язання цього рівняння — покласти

$$\boxed{\mathbf{j}_{\text{зм}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.} \tag{14.5}$$

! *Рівняння* $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j}_{\text{зм}} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{4\pi}\partial\mathbf{D}/\partial t\right)$ *саме собою* не доводить, *що* $\mathbf{j}_{\text{зм}}$ *дорівнює точно* $\frac{1}{4\pi}\partial\mathbf{D}/\partial t$*: до цього виразу можна було б, узагалі кажучи, додати довільне бездивергентне поле* ($\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{f} = 0$)*. Максвелл обрав* найпростіший *можливий варіант — без жодного додаткового доданка; те, що саме цей вибір відповідає дійсності (а не просто математичній зручності), — це вже суто* експериментальний *факт, підтверджений, зокрема, дослідами Г. Герца з випромінювання електромагнітних хвиль (див. розділ 16).*

Викладене вище виведення формули для струму зміщення (14.5) через закон збереження заряду та усунення суперечності в теоремі про циркуляцію — це *логічна реконструкція*, зручна для навчального курсу, а не той шлях, яким ішов сам Максвелл. Він прийшов до цієї ідеї через складну механічну модель ефіру («молекулярні вихори» з «холостими коліщатками» між ними), у якій електричне поле спричиняло пружну деформацію середовища.

Саме ця механічна картина й дала назву новому явищу. Математично вектор електричного зміщення дорівнює:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P},$$

через що густина струму зміщення природно розпадається на два доданки:

$$\mathbf{j}_{зм} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}.$$

! *Другий доданок,* $\mathbf{j}_{пол} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$*, має прямий наочний зміст: це* струм поляризації*, який описує реальний рух (зміщення) зв'язаних зарядів у речовині. Перший же доданок,* $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$*, Максвелл вважав аналогічним зміщенням частинок самого ефіру.*

Згодом від концепції ефіру відмовилися, і сьогодні вакуумний доданок описує лише швидкість зміни самого електричного поля, проте узагальнена назва «струм зміщення» назавжди збереглася за всією величиною $\mathbf{j}_{зм}$*. Те, що фундаментальне рівняння можна отримати й без механічних гіпотез, свідчить, що рівняння Максвелла відображають об'єктивну структуру поля, а не залежать від моделі, яка привела до їх відкриття.*

Теорема про циркуляцію магнітного поля з урахуванням струму зміщення. Отже, теорема про циркуляцію для магнітного поля, узгоджена із законом збереження заряду, набуває остаточного вигляду:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.} \qquad (14.6)$$

В інтегральній формі:

$$\boxed{\oint_L \mathbf{H}\cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c}\int_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S},} \qquad (14.7)$$

де

$$I_{зм} = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} \qquad (14.8)$$

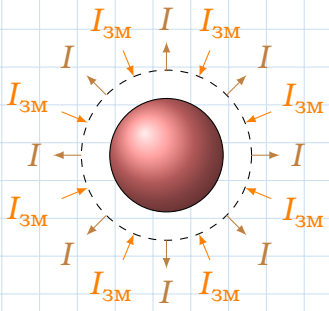
— струм зміщення, що пронизує поверхню S, натягнуту на контур L. Тут $\mathbf{j}$ — густина струму провідності (і конвекційного струму, тобто руху заряджених тіл). Отже, згідно з гіпотезою Максвелла, *змінне електричне поле поряд зі звичайними струмами провідності також створює магнітне поле.*

Порівняння закону Фарадея та гіпотези Максвелла. Порівняємо закон електромагнітної індукції Фарадея (розділ 12) і «оновлену» теорему про циркуляцію за відсутності струмів провідності ($\mathbf{j} = 0$) у вакуумі ($\varepsilon = \mu = 1$, тобто $\mathbf{E} = \mathbf{D}$, $\mathbf{H} = \mathbf{B}$):

$$\underbrace{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}_{\text{закон електромагнітної індукції}} \qquad \underbrace{\nabla \times \mathbf{B} = +\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}}_{\text{«закон магнітоелектричної індукції»}} . \qquad (14.9)$$

! *Ця пара рівнянь — вершина ідеї Максвелла про* симетрію *електрики й магнетизму:* змінне в часі магнітне поле породжує вихрове електричне поле, а змінне в часі електричне поле породжує магнітне поле. *Єдина відмінність — знак: у законі Фарадея «мінус» (правило Ленца), у гіпотезі Максвелла — «плюс». Ця відносно невелика асиметрія знаків, утім, має глибокі наслідки: саме вона (разом з рівняннями* $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ *у вакуумі) приводить, як буде показано в наступних розділах курсу, до існування* електромагнітних хвиль, *що біжать зі швидкістю світла c, а не до експоненційно загасаючих чи зростаючих розв'язків.*

* **Радіальне стікання заряду з кулі**. Нехай куля несе заряд $Q(t)$, що стікає в зовнішнє (слабко провідне) середовище рівномірно в усіх напрямках. Чи виникає при цьому магнітне поле?



Радіальне стікання заряду з кулі:
струм провідності I і струм зміщення $I_{зм}$

Стікання заряду створює радіальний струм провідності $I = -\dfrac{\partial Q}{\partial t}$. Поле кулі на відстані r, за теоремою Гаусса, $\mathbf{E}(r) = \dfrac{Q(t)}{r^3}\mathbf{r}$ (і теж спадає з часом), тому крізь будь-яку сферу радіуса $r > R$ додатково тече струм зміщення:

$$I_{зм} = \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial Q}{\partial t} = -I. \qquad (14.10)$$

За теоремою про циркуляцію, застосованою до довільного кола L, що лежить на сфері радіуса $r > R$ (натягнемо на нього частину цієї ж сфери — поверхню S, яку перетинають і струм провідності, і струм

зміщення):

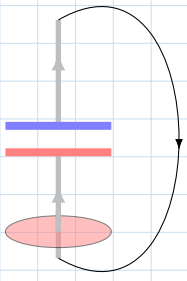
$$\oint_L \mathbf{H}\cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c}(I + I_{\text{зм}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} = 0. \qquad (14.11)$$

(Нульова циркуляція дає $\mathbf{H} = 0$ з урахуванням симетрії: за сферичної симетрії поле могло б бути лише радіальним, а радіальне $\mathbf{B}$ заборонене умовою $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$.)

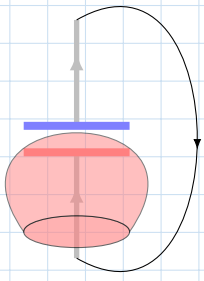
! *У цій задачі, попри те, що заряд явно* рухається *(тече струм!), магнітне поле* не виникає взагалі*: струм зміщення в кожній точці простору точно компенсує струм провідності. Це наочно ілюструє, що струм зміщення — не якась математична поправка «про око», а реальний фізичний внесок у джерела магнітного поля, необхідний для узгодженості всієї теорії. Без нього теорема про циркуляцію давала б для кола L результат, що залежить від вибору натягнутої на нього поверхні (крізь різні «шапки» сфери тече різний струм провідності), а це неможливо.*

Струм зміщення в конденсаторі. Розглянемо коло з плоским конденсатором, яке заряджається від джерела струмом I (див. рис.). Візьмемо контур L, що охоплює дріт поблизу конденсатора, і натягнемо на нього *дві різні* поверхні: одну (ліворуч) — що перетинає сам провід, і другу (праворуч) — що проходить між обкладками конденсатора, не перетинаючи жодного проводу.

Для лівої поверхні циркуляція визначається звичайним струмом провідності: $\oint_L \mathbf{H}\cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c}I$. Для правої поверхні провідного струму немає взагалі (вона проходить у проміжку між обкладками, де є лише електричне поле, що змінюється в часі), тому циркуляція визначається *лише* струмом зміщення: $\oint_L \mathbf{H}\cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c}I_{\text{зм}}$.



Площа S пронизується лише струмом провідності



Площа S пронизується лише струмом зміщення

Дві різні поверхні, натягнуті на один і той самий контур L

Але циркуляція по одному й тому самому контуру не може залежати від вибору поверхні, натягнутої на нього (це властивість теореми

Стокса), тому

$$I = I_{\text{зм}}, \tag{14.12}$$

тобто між обкладками «протікає» струм зміщення, який замикає коло.

Розглянемо докладніше, яке магнітне поле створює струм зміщення в конденсаторі (див. рис. нижче).

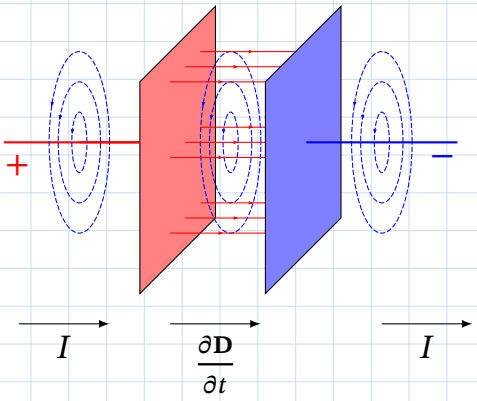


Рис. 14.3. Магнітне поле, створене струмом зміщення всередині конденсатора під час його зарядки

Нехай плоский конденсатор із пластинами радіуса R заряджається струмом I (зазор між пластинами малий, крайовими ефектами нехтуємо). Густина струму зміщення між обкладками дорівнює

$$j_{\text{зм}} = \frac{I}{\pi R^2},$$

і він спрямований так само як струм провідності в підвідних дротах. Магнітне поле всередині конденсатора знаходимо за теоремою про циркуляцію, взявши контур радіуса r із центром на осі конденсатора:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} I_{\text{зм}}(r),$$

де $I_{\text{зм}}(r) = j_{\text{зм}} \pi r^2 = Ir^2/R^2$. Звідси

$$2\pi r H(r) = \frac{4\pi}{c} I \frac{r^2}{R^2} \quad \Rightarrow \quad H(r) = \frac{2Ir}{cR^2}.$$

Отже, всередині конденсатора виникає вихрове магнітне поле, силові лінії якого охоплюють вісь конденсатора за правилом правого гвинта. Це поле точнісінько таке саме, як у провіднику того самого радіуса зі струмом I: у цьому й полягає фізичний зміст твердження, що струм зміщення *замикає* коло й створює магнітне поле нарівні зі струмом провідності.

! Струми зміщення замикають струми провідності і створюють магнітне поле точнісінько так само, як і звичайні струми провідності *(рис. 14.3). Проте вони мають і принципову відмінність: струм зміщення (у вакуумі)* не *пов'язаний з тепловиділенням — до нього незастосовні ні закон Ома, ні закон Джоуля–Ленца (розділ 7), адже він не пов'язаний з переміщенням реальних носіїв заряду проти сил опору, а лише зі зміною електричного поля в просторі. (У реальному діелектрику змінна поляризація супроводжується діелектричними втратами, але це властивість речовини, а не струму зміщення як такого.)*

14.2. Система рівнянь Максвелла

Доповнивши основні закони електромагнетизму, встановлені в попередніх розділах, гіпотезою про струм зміщення, Максвелл отримав повну систему фундаментальних рівнянь електродинаміки. Таких рівнянь — чотири (табл. 14.1).

Таблиця 14.1. Система рівнянь Максвелла

Рівняння	Інтегральна форма	Диференціальна форма
Теорема Гаусса для магнітного поля	$\oint\limits_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0$	$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$
Теорема про циркуляцію для електричного поля	$\oint\limits_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c}\int\limits_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$	$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$
Теорема Гаусса для електричного поля	$\oint\limits_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi\int\limits_V \rho dV$	$\nabla\cdot\mathbf{D} = 4\pi\rho$
Теорема про циркуляцію для магнітного поля	$\oint\limits_L \mathbf{H}\cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c}\int\limits_S \left(\mathbf{j}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{S}$	$\nabla\times\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$

Тут ρ і $\mathbf{j}$ — густини вільних зарядів і струмів (зв'язані заряди й струми враховано через $\mathbf{D}$ і $\mathbf{H}$). Закон збереження заряду не є окремим рівнянням, а випливає з двох останніх: застосувавши $\nabla\cdot$ до четвертого рівняння й підставивши третє, отримуємо $\nabla\cdot\mathbf{j} + \partial\rho/\partial t = 0$.

У такому компактному вигляді рівняння Максвелла *самому Максвеллу невідомі*. У статті «Динамічна теорія електромагнітного поля» (1865) теорія викладена двадцятьма рівняннями для двадцяти змінних, записаними покомпонентно, а в «Трактаті про електрику й магнетизм» (1873) — частково в кватерніонній нотації. Чотири векторні рівняння вигляду, наведеного в табл. 14.1, виокремили Олівер Хевісайд (1884–1885 рр.) і незалежно від нього Генріх Герц (1890 р.), а векторний апарат grad, div, rot розвивали водночас із ними Дж. В. Гіббс і сам Хевісайд. Тому їх іноді називають «рівняннями Герца–Хевісайда».

Вираз електричного поля через потенціали. Рівняння Максвелла природно групуються парами: *перша* пара (теорема Гаусса для **B** і циркуляція **E**) — рівняння *без* явних джерел (зарядів і струмів), *друга* пара — рівняння *з* джерелами.

Теорема Гаусса для **B** дає змогу, як і в магнітостатиці (розділ 9), ввести вектор-потенціал:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Підставляючи це в закон індукції, $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla \times \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)$, отримуємо

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

Оскільки ротор цього виразу тотожно дорівнює нулю, сам вираз можна подати як градієнт деякої скалярної функції $-\varphi$:

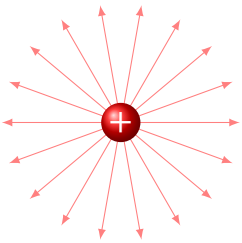
$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.} \qquad (14.13)$$

У випадку сталих у часі полів $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$, і $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ — введена тут функція φ природно збігається зі звичним скалярним потенціалом електростатики. Зауважимо, що потенціали визначені неоднозначно: заміна $\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla f$, $\varphi \to \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$ не змінює ні **B**, ні **E** (калібрувальна свобода, розділ 9).

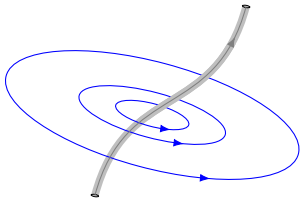
! *Формула* (14.13) *показує, що в загальному, нестаціонарному випадку електричне поле визначається* не тільки *скалярним потенціалом* φ *(як в електростатиці), а й швидкістю зміни векторпотенціала* **A***: частина* **E** *породжується не зарядами напряму, а через посередництво змінного магнітного поля — це і є, по суті, вихрова, «індукційна» частина електричного поля (у кулонівському калібруванні* $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$*), з якою ми вже зустрічались у розділ 12.*

Стаціонарні поля. У стаціонарному випадку всі часткові похідні за часом дорівнюють нулю, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, і повна система рівнянь Максвелла розпадається на дві *незалежні* системи — для електростатики й магнітостатики (рис. 14.4):

$$\underbrace{\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho, \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0. \end{cases}}_{\text{електростатика}} \qquad \underbrace{\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} = \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \end{cases}}_{\text{магнітостатика}} \tag{14.14}$$



(а) Електростатика: поле точкового заряду



(б) Магнітостатика: поле провідника зі струмом

Рис. 14.4. У стаціонарному випадку електричне (а) й магнітне (б) поля «не знають» одне про одного

> ! *Це — глибокий концептуальний висновок: усі розділи курсу, які передували цьому (електростатика, магнітостатика), — не окремі теорії, а лише* частинні випадки *єдиної теорії електромагнітного поля Максвелла, що виникають у граничному випадку, коли поля не залежать від часу.* Зв'язок *електрики й магнетизму (взаємне породження одне одного) — принципово* нестаціонарне *явище, яке зникає, щойно всі процеси застигають у часі.*

Матеріальні рівняння. Рівняння Максвелла — це рівняння *загальної* структури поля; щоб розв'язати конкретну задачу, їх необхідно доповнити *матеріальними рівняннями*, що пов'язують поля **D** та **E**, з одного боку, і **H** та **B** — з іншого, і залежать від властивостей конкретного середовища (табл. 14.2).

Граничні умови. Диференціальні рівняння Максвелла необхідно доповнити граничними умовами на межі розділу двох середовищ; ці умови неявно містяться в *інтегральній* формі рівнянь Максвелла і виводяться з них тим самим способом (циліндр Гаусса, контур циркуляції), що й у попередніх розділах курсу. Граничні умови для змінних полів мають *той самий вигляд*, що й для стаціонарних (табл. 14.3).

Таблиця 14.2. Матеріальні рівняння

	Вираз
Вектор електричної індукції (зміщення)	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$
Вектор поляризації (для лінійних ізотропних речовин)	$\mathbf{P} = \chi\mathbf{E}$
Діелектрична проникність (для лінійних ізотропних речовин)	$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$
Зв'язок **D** та **E** (для лінійних ізотропних речовин)	$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$
Вектор напруженості магнітного поля	$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{J}$
Вектор намагніченості (для лінійних ізотропних речовин)	$\mathbf{J} = \chi_m\mathbf{H}$
Магнітна проникність (для лінійних ізотропних речовин)	$\mu = 1 + 4\pi\chi_m$
Зв'язок **H** та **B** (для лінійних ізотропних речовин)	$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$
У разі струму, спричиненого електричним полем у провідному середовищі, виконується закон Ома	$\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}$

Таблиця 14.3. Граничні умови для електромагнітного поля

Умови для електричних векторів	Умови для магнітних векторів
$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma$	$B_{1n} = B_{2n}$
$E_{1\tau} = E_{2\tau}$	$[\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2] - [\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{i}$

Тут σ — поверхнева густина *вільних* електричних зарядів, а $\mathbf{i}$ — поверхнева густина струму провідності на межі розділу; нормаль $\mathbf{n}$ напрямлена із середовища 1 у середовище 2. Якщо поверхневих струмів немає, гранична умова для тангенціальної компоненти $\mathbf{H}$ спрощується:

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}.$$

14.3. Про рівняння Максвелла

Теорія Максвелла — це вершина класичної науки про електромагнітне поле. До цієї висоти ми піднімалися крок за кроком, уточнюючи поняття й розкриваючи глибинні принципи цієї науки: кожен пройдений розділ — електростатика, закони постійного струму, магнітостатика, явище електромагнітної індукції — був немов базовий табір на шляху до вершини (рис. 14.5).

На вершині перед нами постають рівняння Максвелла — велична симфонія електричного й магнітного полів, ключ до розуміння електромагнітної взаємодії. Уся споруда класичної електродинаміки, зведена нами розділ за розділом — від закону Кулона до струму



Рис. 14.5. Теорія Максвелла — це вершина класичної науки про електромагнітне поле

зміщення, — вміщується тепер у чотирьох компактних рівняннях Максвелла, доповнених трьома матеріальними рівняннями середовища. Ці чотири рівняння містять *усе*: електростатику й магнітостатику як окремі стаціонарні випадки, електромагнітну індукцію й струм зміщення як дві половини єдиної симетрії, — і, як буде показано далі, *електромагнітні хвилі* й саме *світло* як прямий наслідок цих же рівнянь у вакуумі. Генріх Герц сказав про ці рівняння так:

> *Неможливо позбутися відчуття, що математичні формули живуть власним життям і володіють власним розумом, що вони розумніші за нас, розумніші навіть за тих, хто їх відкрив, що ми отримуємо з цих формул більше, ніж у них було спочатку закладено…*
>
> *Г. Герц.*

Ці слова — не поетичне перебільшення, а точний опис того, що сталося з рівняннями вже за життя їхнього автора. Максвелл записав систему рівнянь, спираючись на закони Кулона, Ампера, Фарадея — і жодне з цих окремих досягнень електростатики та магнітостатики не містило натяку на те, що об'єднана система виявиться незрівнянно багатшою за суму своїх частин. Наслідки рівнянь подібні (за словами Фейнмана) до спуску з вершини, у простір застосувань. Перші кроки цього спуску ми зробимо вже в межах цього розділу: закон збереження енергії електромагнітного поля (теорема Пойнтінга) і скін-

ефект у провідниках — найближчі до вершини застосування щойно записаної системи. Далі, у наступних розділах курсу, цей спуск продовжиться — до поширення електромагнітних хвиль, принципів їх випромінювання і, зрештою, до основ оптики, радіо- та електротехніки.

14.4. Енергія електромагнітного поля

Закон збереження енергії електромагнітного поля. Нехай у деякій області простору присутнє електромагнітне поле й заряджені частинки, що з ним взаємодіють (рис. 14.6). Якщо ця система *замкнена*, її енергія зберігається; якщо ж *незамкнена*, енергія може як *втікати* в цю область, так і *витікати* з неї. Якісно закон збереження енергії для такої області можна записати так:

(зменшення енергії поля в об'ємі) =
(робота над частинками) + (потік енергії назовні),

або, виражаючи цікаву для нас величину — роботу поля над зарядженими частинками:

(робота над частинками) =
(зменшення енергії поля в об'ємі) – (потік енергії назовні).

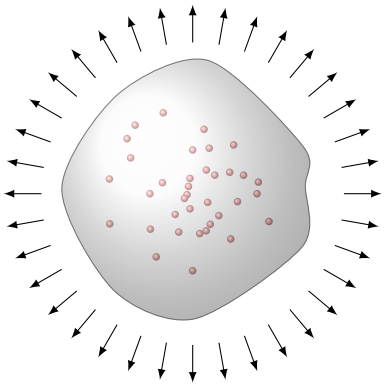


Рис. 14.6. Заряджені частинки в області, обмеженій замкненою поверхнею: енергія електромагнітного поля може втікати й витікати крізь цю поверхню

Рухати заряджені частинки, як ми твердо встановили ще в розділ 9, може *лише електричне* поле (магнітне поле роботи не виконує). Енергія, яку електричне поле витрачає на розгін частинок в одиниці об'єму за одиницю часу, — це потужність $\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}$ (у провіднику вона перетворюється на джоулеве тепло, розділ 7).

Виведення закону збереження. Запишемо закон Максвелла для $\nabla\times\mathbf{H}$ (14.6), розв'язавши його відносно $\mathbf{j}$:

$$\mathbf{j}=\frac{c}{4\pi}\nabla\times\mathbf{H}-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}.$$

Помножимо скалярно обидві частини на $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H} - \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}.$$

Скористаємось тотожністю векторного аналізу $\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot[\mathbf{E}\times\mathbf{H}] + \mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}$ та матеріальним рівнянням $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ (середовище лінійне, без дисперсії, ε і μ сталі; тому $\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2\right)$):

$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]\right) + \frac{c}{4\pi}\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{8\pi}\varepsilon E^2\right).$$

Тепер підставимо закон електромагнітної індукції, $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$, і матеріальне рівняння $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ (так що $\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu H^2\right)$):

$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon E^2}{8\pi} + \frac{\mu H^2}{8\pi}\right).$$

Теорема Пойнтінга. Проаналізуємо отриманий вираз. Позначимо

$$\boxed{\boldsymbol{\Pi} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]} \tag{14.15}$$

— *вектор Пойнтінга*, і

$$\boxed{w = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} + \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}{8\pi} + \frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}}{8\pi}} \tag{14.16}$$

— об'ємну густину енергії електромагнітного поля (сума вже відомих нам електричної й магнітної частин, розділи 6 і 13). Тоді

$$\boxed{-\frac{\partial w}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Pi} + \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}.} \tag{14.17}$$

Інтегруючи по довільному об'єму V, обмеженому поверхнею S, і застосовуючи теорему Остроградського–Гаусса, отримуємо *інтегральну* форму — *теорему Пойнтінга*:

$$\boxed{-\frac{dW}{dt} = \oint_S \boldsymbol{\Pi}\cdot d\mathbf{S} + \int_V \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\,dV.} \tag{14.18}$$

! Теорема Пойнтінга: *зменшення енергії електромагнітного поля за одиницю часу в даному об'ємі дорівнює сумі потоку енергії крізь поверхню, що обмежує цей об'єм, і потужності, яку сили поля виконують над зарядами речовини всередині об'єму.* Вектор Пойнтінга **П** *визначає кількість енергії поля, що протікає крізь одиничну площадку за одиницю часу, і вказує* напрям *руху енергії електромагнітного поля в просторі — поняття, яке в статичних задачах електростатики й магнітостатики не було потрібне (енергія в них нікуди не тече). Зауважимо, що сам вектор* **П** *визначений з точністю до ротора довільного векторного поля, але потік крізь замкнену поверхню однозначний.*

Джон Генрі Пойнтінг (1852–1914), учень Максвелла, а згодом перший професор фізики в Бірмінгемі, опублікував теорему й вектор, що носять його ім'я, 1884 р. у статті «Про передачу енергії в електромагнітному полі». Головна нова думка — енергія передається *не вздовж провідника*, а *через простір навколо нього*: саме до цього висновку ми прийдемо нижче в прикладах з провідником і конденсатором. Приблизно в той самий час до такого ж результату незалежно дійшов Олівер Хевісайд, тож у літературі трапляється й назва «вектор Умова–Пойнтінга» (М. О. Умов ще 1874 р. запровадив поняття потоку енергії для пружних середовищ).

Про одиниці вимірювання. У гауссовій системі одиниць

$$[\text{П}] = \frac{\text{ерг}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}}, \qquad [w] = \frac{\text{ерг}}{\text{см}^3};$$

для порівняння, у СІ вектор Пойнтінга вимірюється у Вт/м^2, а густина енергії — у Дж/м^3.

* **Зарядка конденсатора**. Плоский конденсатор з пластинами радіуса R заряджається струмом I від зовнішнього джерела (рис. 14.7). Якщо в деякий момент заряд на нижній пластині дорівнює q, то вектор індукції всередині конденсатора

$$D = 4\pi\sigma = \frac{4\pi q}{\pi R^2}, \tag{14.19}$$

напрямлений від нижньої пластини до верхньої. Густина струму зміщення в конденсаторі:

$$j_{\text{зм}} = \frac{\dot{D}}{4\pi} = \frac{\dot{q}}{\pi R^2}.$$

Цей струм породжує в конденсаторі магнітне поле, яке (як і в попередньому прикладі) знаходимо за теоремою про циркуляцію, взявши за контур L коло радіуса r з центром на осі конденсатора:

$$2\pi r H(r) = \frac{4\pi}{c}\pi r^2 j_{\text{зм}}(r) \quad \Rightarrow \quad H(r) = \frac{2r}{cR^2}\dot{q}.$$

Оскільки конденсатор заряджається ($\dot{q} > 0$), струм зміщення напрямлений від нижньої обкладки до верхньої, а силові лінії **H** охоплюють вісь конденсатора за правилом правого гвинта.

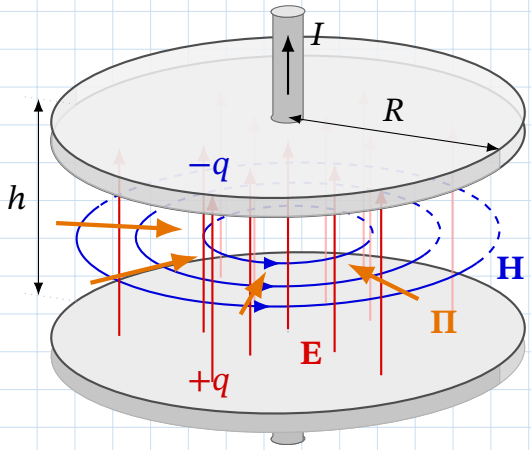


Рис. 14.7. Поля **E**, **H** і вектор Пойнтінга **П** при зарядці плоского конденсатора

* Вектор Пойнтінга $\mathbf{П} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]$ спрямований *до осі* конденсатора (перпендикулярно до бічної поверхні, всередину) і дорівнює за величиною на межі ($r = R$):

$$П = \frac{c}{4\pi}EH = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{4\pi q}{\varepsilon\pi R^2}\right)\left(\frac{2\dot{q}}{cR}\right) = \frac{2q\dot{q}}{\varepsilon\pi R^3}.$$

Зарядку вважаємо повільною, а зазор малим ($h \ll R$), тому магнітною енергією між обкладками й крайовими ефектами нехтуємо. Якщо відстань між пластинами дорівнює h, енергія, що втікає в конденсатор за одиницю часу (крізь бічну поверхню площею $2\pi Rh$):

$$\frac{dW}{dt} = П\cdot 2\pi Rh = \frac{2q\dot{q}}{\varepsilon\pi R^3}\cdot 2\pi Rh = \frac{4hq\dot{q}}{\varepsilon R^2} = \frac{q\dot{q}}{C},$$

де $C = \varepsilon\pi R^2/(4\pi h)$ — ємність конденсатора (розділ 6). За кінцевий час, коли заряд на пластині досягає значення q, енергія, що втекла в конденсатор ззовні, становить

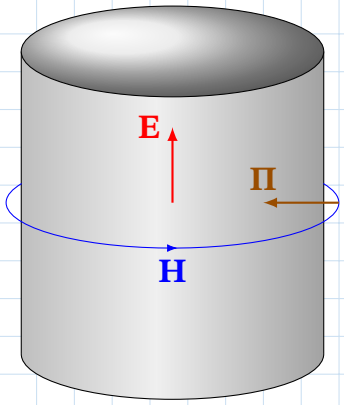
$$W = \frac{q^2}{2C} \qquad (14.20)$$

— ми прийшли, зовсім іншим шляхом, до вже відомої формули для енергії зарядженого конденсатора (6.20)!

! *Цей результат надзвичайно повчальний: вся енергія, що зрештою запасається в електричному полі* всередині *конденсатора, насправді* втекла туди ззовні — *крізь бічну поверхню, а не* вздовж *проводів чи вздовж силових ліній* **E**! *Теорема Пойнтінга дає абсолютно* однакову *відповідь на запитання про енергію конденса-*

! *тора, що й «наївний» підхід через роботу джерела (розділ 6), — але картина шляху, яким ця енергія потрапляє в конденсатор, виявляється зовсім іншою й набагато глибшою.*

* **Довгий провідник**. Розглянемо довгий прямий дріт радіуса R і довжини ℓ, яким тече струм I. На зовнішній поверхні проводу присутнє магнітне поле $H = 2I/(cR)$ (розділ 9). Струм у проводі виникає завдяки напрузі U на його кінцях, що створює всередині (і, за неперервністю тангенціальної складової, на поверхні) поле $E = U/\ell$.



Поля **E**, **H** і вектор Пойнтінга **П** на поверхні довгого провідника зі струмом

Вектор Пойнтінга виявляється спрямованим *до осі* провідника й дорівнює за величиною

$$\text{П} = \frac{c}{4\pi}EH = \frac{c}{4\pi}\cdot\frac{U}{\ell}\cdot\frac{2I}{cR} = \frac{1}{2\pi\ell R}UI.$$

Оскільки площа бічної поверхні провідника дорівнює $S = 2\pi\ell R$, повний потік енергії, що втікає в провідник, становить $\text{П}S = UI$ — це в точності та сама потужність, що йде на джоулеві втрати в проводі: $\text{П}S = \mathcal{P} = UI$ (розділ 7).

! *Цей результат — один із найбільш контрінтуїтивних, але при цьому й найглибших висновків класичної електродинаміки:* у картині Пойнтінга електрони отримують енергію, потрібну для подолання опору й виділення тепла, не «вздовж» проводу від джерела, а ззовні, з поля, що оточує провід! *Енергія, віддана далеким джерелом (батареєю), якимось чином «розтікається» через навколишній простір і* втікає *всередину провідника крізь його бічну поверхню, а сам дріт відіграє роль лише напрямної труби для цього потоку енергії, а не «кабелю», яким енергія тече вздовж. Це разюче суперечить наївному (але дуже поширеному) уявленню, ніби енергія «тече по дротах» так само, як вода тече по трубі.*

14.5. Скін-ефект

До цього моменту рівняння Максвелла поставали перед нами або як *підсумок* уже відомого (стаціонарні випадки — електро- і магнітостатика), або як *джерело* якісних висновків (струм зміщення, симетрія, теорема Пойнтінга). Тепер подивимося на них як на *робочий інструмент*, узявши конкретну фізичну задачу: поведінку електромагнітного поля у провіднику за швидкозмінних процесів, на прикладі скін-ефекту.

Означення та наслідки. *Скін-ефектом* (від англ. *skin* — шкіра) називають протікання струмів високої частоти переважно в тонкому поверхневому шарі провідника (рис. 14.8).

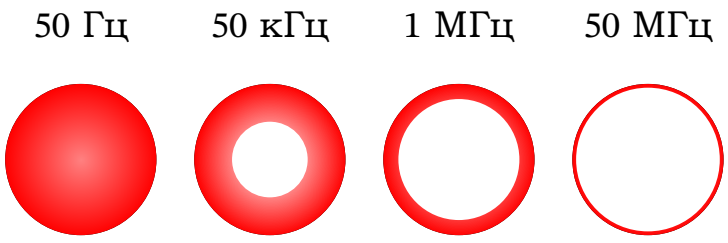


Рис. 14.8. Зменшення ефективної товщини струмонесучого шару зі зростанням частоти

Скін-ефект має кілька важливих практичних наслідків:

- зменшується *діюча* площа перерізу провідника, а отже, *зростає* його опір на змінному струмі;
- *зменшується* індуктивність провідника: оскільки за сильного скін-ефекту струму (а отже, і магнітного поля) всередині провідни-

ка практично немає, магнітна енергія стає меншою на величину енергії поля, яка раніше запасалась усередині провідника;

- електромагнітна хвиля, що потрапляє на поверхню провідника (металу, електроліту, плазми), швидко загасає вглиб нього, проникаючи лише на невелику глибину — це тісно пов'язано з тим, що *провідники добре відбивають світло*.

Скін-ефект першим теоретично описав Горацій Ламб (1883) — для провідних куль; Олівер Хевісайд, який ще з початку 1880-х років вивчав поширення сигналів у телеграфних лініях, розглянув його для проводів (1885 р.). Отже, явище теоретично описали ще до масового поширення змінного струму в енергетиці — у зв'язку з передаванням сигналів телеграфними лініями.

Якісне пояснення. Змінний струм у провіднику породжує змінне вихрове магнітне поле, силові лінії якого перпендикулярні до осі провідника (рис. 14.9). Це змінне магнітне поле, своєю чергою, породжує вихрове електричне поле (розділ 12), що спричиняє в товщі провідника струми Фуко: на *поверхні* провідника вихровий струм напрямлений *у той самий бік*, що й основний струм провідності (і *підсилює* його там), а *всередині* провідника — у *протилежний* бік (і *послаблює* струм у серцевині). У результаті струм *витісняється* з осі провідника до його поверхні.

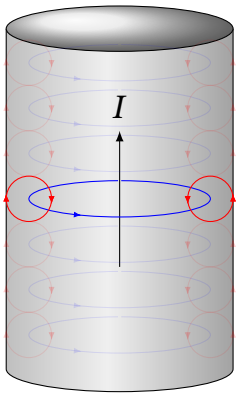


Рис. 14.9. Якісний механізм скін-ефекту: вихрові струми Фуко підсилюють струм на поверхні й послаблюють у центрі провідника

Чому в металах нехтують струмами зміщення. У провіднику густина струму провідності й напруженість поля пов'язані законом Ома, $\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}$. Якщо поле в провіднику змінюється гармонічно, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\cos(\omega t)$, то поряд зі струмом провідності виникає й струм зміщення:

$$\mathbf{j}_{\text{зм}} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon\omega}{4\pi}E_0\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Оцінимо відношення амплітуд густини струму зміщення та струму провідності:

$$\frac{j_{\text{зм}}}{j_{\text{пров}}} = \frac{\varepsilon\omega}{4\pi\lambda} = \omega\tau_{\text{M}} \ll 1, \tag{14.21}$$

де $\tau_{\text{M}} = \dfrac{\varepsilon}{4\pi\lambda}$ — максвелівський час релаксації (7.34). Умова означає, що $\tau_{\text{M}} \ll T$, де $T \sim 1/\omega$ — період зміни електромагнітного поля.

Для типових металів провідність $\lambda \sim 10^{16}$–10^{18} с^{-1} (гауссова система), а типова діелектрична проникність остова — порядку 10–100, що відповідає вкрай малому максвелівському часу $\tau_{\text{M}} \sim 10^{-19}$–$10^{-18}$ с. Тому аж до частот порядку 10^{13} Гц виконується нерівність (14.21), тобто у широкому діапазоні частот струми зміщення *не відіграють істотної ролі* у металах порівняно зі струмами провідності — саме тому надалі, аналізуючи скін-ефект у металах, ми зможемо ними знехтувати.

! *Варто уточнити фізичний зміст діелектричної проникності ε у цій оцінці: у металі вона описує* не *відгук вільних електронів провідності (їхній внесок уже повністю врахований окремо, через закон Ома і струм провідності), а значно слабшу поляризацію* зв'язаних *електронів іонного остова. Крім того, сама провідність λ у реальності не є сталою величиною — вона починає спадати з частотою, щойно період поля стає порівнянним із часом релаксації електронів провідності ($\tau \sim 10^{-14}$ с). Слід розрізняти макроскопічний час τ_M та мікроскопічний час вільного пробігу електронів τ: оскільки формально розрахований $\tau_M \ll \tau$, реальна швидкість релаксації в металі обмежується інерцією самих носіїв (моделлю Друде). Тому нерівність* (14.21) *і одержана з неї межа $\omega \sim 10^{13}$ Гц — лише орієнтовна, за порядком величини оцінка, а не різка межа. Формули цього підрозділу (*нормальний *скін-ефект) застосовні, поки $\omega\tau \ll 1$; на вищих частотах доводиться враховувати частотну залежність $\lambda(\omega)$.*

Строге виведення глибини проникнення. Виведемо глибину проникнення поля в провідник, спираючись безпосередньо на рівняння Максвелла (а не на якісні міркування). Нехай $\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$; у провіднику немає некомпенсованого об'ємного заряду, тому теорема Гаусса дає $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = 0$. З урахуванням закону Ома, а також знехтувавши, за щойно встановленою нерівністю (14.21), струмом зміщення, рівняння Максвелла в металі набувають вигляду

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H} = \frac{4\pi\lambda}{c}\mathbf{E}, \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = 0, \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{H} = 0.$$

Виключимо $\mathbf{H}$: застосуємо операцію $\boldsymbol{\nabla}\times$ до першого рівняння й підставимо друге:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H}) = -\frac{4\pi\mu\lambda}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

З іншого боку, за тотожністю векторного аналізу і з урахуванням $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}=0$: $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -\nabla^2\mathbf{E}$. Прирівнюючи, отримуємо *рівняння скін-ефекту*:

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{E} = \frac{4\pi\mu\lambda}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.} \tag{14.22}$$

Оцінка глибини проникнення. Рівняння (14.22) за математичною формою збігається з рівнянням *дифузії*, $\frac{\partial F}{\partial t} = D\nabla^2 F$, з коефіцієнтом дифузії $D = c^2/(4\pi\mu\lambda)$. Якщо на поверхні речовини діє джерело, то за час τ «хвиля дифузії» проникає на глибину $\delta = \sqrt{D\tau}$; якщо джерело діє періодично з періодом $T = 2\pi/\omega$, слід узяти $\tau \sim 1/\omega$ (з точністю до множника 2π це період $T = 2\pi/\omega$), звідки отримуємо *оцінку* для глибини проникнення:

$$\delta \sim \frac{c}{\sqrt{4\pi\lambda\mu\omega}}. \tag{14.23}$$

Переконаємось, що ця оцінка, з точністю до числового множника, дійсно правильна, застосувавши безпосередньо рівняння Максвелла в інтегральній формі до тонкого приповерхневого шару завтовшки δ.

Циркуляція $\mathbf{E}$. Розглянемо прямокутний контур L зі сторонами h (уздовж осі провідника, на його поверхні) і δ (углиб) (рис. 14.10). За законом електромагнітної індукції, $Eh = -\frac{1}{c}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, де магнітний потік крізь цей контур $\Phi = -BS = -\mu Hh\delta$ (поле H спадає до нуля на глибині δ), а швидкість його зміни за порядком величини $\Delta\Phi/\Delta t \approx \omega\Phi$ ($\omega \sim 1/T$ — частота зміни струму). Тому

$$Eh \sim \frac{1}{c}\mu H\omega h\delta \quad\Rightarrow\quad E \sim \frac{\mu H\omega\delta}{c}. \tag{14.24}$$

Циркуляція $\mathbf{H}$. Тепер розглянемо контур L на поперечному перерізі провідника, завдовжки ℓ уздовж поверхні й завширшки δ углиб (рис. 14.11). За теоремою про циркуляцію, $H\ell = \frac{4\pi}{c}j\ell\delta$, а з огляду на закон Ома, $j = \lambda E$:

$$H \sim \frac{4\pi\lambda}{c}E\delta. \tag{14.25}$$

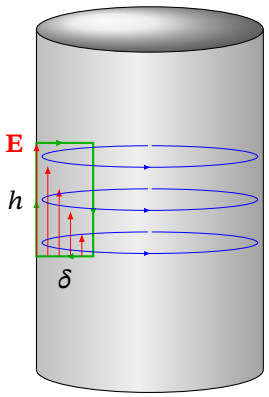


Рис. 14.10. Контур для оцінки циркуляції **E** поблизу поверхні циліндричного провідника (вигляд збоку)

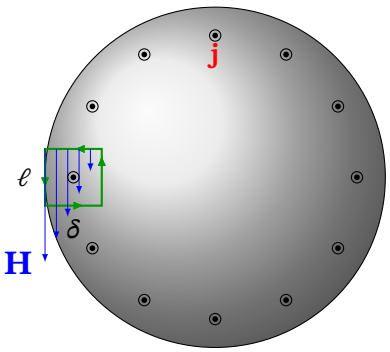


Рис. 14.11. Контур для оцінки циркуляції **H** поблизу поверхні циліндричного провідника (вигляд зверху)

Підставляючи (14.25) в (14.24):

$$E \sim \frac{4\pi\mu\lambda\omega\delta^2}{c^2} E,$$

звідки, скорочуючи на E, отримуємо оцінку глибини скін-шару:

$$\delta \sim \frac{c}{\sqrt{4\pi\lambda\mu\omega}}, \tag{14.26}$$

що збігається з дифузійною оцінкою (14.23). Точне значення числового коефіцієнта дає розв'язок рівняння (14.22) для однорідного провідника, що займає півпростір $x > 0$:

$$\boxed{\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\lambda\mu\omega}}}. \tag{14.27}$$

Оцінка (14.26) відрізняється від точної формули лише множником $\sqrt{2}$. Значення δ для деяких металів на частоті 10 ГГц, обчислені за точною формулою, наведено в табл. 14.4.

! *Оцінка* (14.26) *побудована на спрощених контурних міркуваннях і дає лише порядок величини та правильну залежність* $\delta \propto 1/\sqrt{\lambda\mu\omega}$*; точний числовий коефіцієнт дає розв'язок хвильового рівняння* (14.27)*. Формула* (14.27) *описує* нормальний *скін-ефект: вона застосовна, коли* δ *значно менша за розміри й радіус кривини провідника, частота така, що* $\omega\tau \ll 1$*, і довжина вільного пробігу електрона менша за* δ *(тоді справджується локальний закон Ома* $\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}$*). Інакше (наприклад, у чистих металах при низьких температурах) спостерігають* аномальний *скін-ефект.*

Таблиця 14.4. Глибина скін-шару для деяких металів на частоті 10 ГГц (за точною формулою)

Метал	Глибина скін-шару, мкм
Мідь (Cu)	0,652
Срібло (Ag)	0,634
Золото (Au)	0,753
Алюміній (Al)	0,820

Застосування скін-ефекту в техніці. Існування скін-ефекту завжди враховують у техніці швидкозмінних струмів. Оскільки такі струми практично не йдуть у глибині провідника, проводи й шини для них *виготовляють із порожнистих труб* — економлячи метал без істотної втрати в опорі. У радіотехніці надвисоких частот багато деталей (хвилеводи, коаксіальні лінії) покривають тонким, добре провідним шаром срібла, оскільки їхній опір практично повністю визначається лише поверхневим шаром. Скін-ефект у поєднанні з нагріванням вихровими струмами (розділ 12) використовують і для *поверхневого загартування сталі*: деталі піддають дії змінних струмів і потім швидко охолоджують, унаслідок чого розігрів і загартування відбуваються лише в поверхневому шарі, а основна маса деталі лишається незагартованою — це дає вироби з високою стійкістю до стирання поверхні, але без крихкості, властивої звичайному наскрізному загартуванню.

Підсумки

У цьому розділі ідея Максвелла про струм зміщення замкнула систему рівнянь електродинаміки в остаточному вигляді й дала нам два перші, найближчі до вершини, наслідки цієї системи: закон збереження енергії електромагнітного поля у формі теореми Пойнтінга та кількісний опис скін-ефекту у провідниках. В обох випадках рівняння Максвелла виступили вже не підсумком відомого, а робочим інструментом, що дає нові, нетривіальні результати — аж до контрінтуїтивного висновку про те, що енергія до провідника надходить не вздовж нього, а ззовні, крізь бічну поверхню.

Наступний крок — спуститися з вершини далі, у простір хвильових явищ: розглянути, як із рівнянь Максвелла у вакуумі випливає саме існування електромагнітних хвиль, що біжать зі швидкістю світла, а тоді — дослідити, як саме заряджені частинки, що рухаються з прискоренням, ці хвилі випромінюють.

Задачі

14.1. *Струм зміщення в конденсаторі змінної напруги.* Плоский конденсатор із круглими пластинами радіуса R, відстанню між ними d і діелектриком проникності ε приєднано до джерела напруги $U(t) = U_m \sin \omega t$. Знайдіть густину й повний струм зміщення між пластинами та напруженість магнітного поля H на краю пластин ($r = R$). Порівняйте струм зміщення зі струмом $C\,dU/dt$ у підвідних дротах ($C = \varepsilon R^2/4d$ — ємність конденсатора). *Вказівка:* $E = U/d$; далі скористайтесь означенням $j_{\text{зм}}$ та теоремою про циркуляцію.

14.2. *Коли струм зміщення в металі стає помітним?* Оцініть частоту ν, на якій амплітуди густин струму зміщення й струму провідності в металі зрівнюються, узявши $\lambda = 10^{16}$ с$^{-1}$, $\varepsilon = 50$. Порівняйте з частотою видимого світла ($\sim 5 \cdot 10^{14}$ Гц). *Вказівка:* прирівняйте $\varepsilon\omega/4\pi$ до λ.

14.3. *Енергія втікає в соленоїд.* По довгому соленоїду радіуса R з n витками на одиницю довжини тече струм $I(t)$, що повільно зростає. Знайдіть вектор Пойнтінга на бічній поверхні соленоїда й покажіть, що потік енергії крізь цю поверхню дорівнює швидкості зростання магнітної енергії всередині — так само як у прикладі з конденсатором. *Вказівка:* $H = 4\pi nI/c$ усередині; електричне поле на поверхні знайдіть із закону індукції Фарадея (циркуляція $\mathbf{E}$ по колу радіуса R).

14.4. *Скін-шар на промисловій частоті.* Знаючи з табл. 14.4 глибину скін-шару міді на частоті 10 ГГц (0,652 мкм), знайдіть її на частоті 50 Гц і зробіть висновок про доцільність суцільних мідних проводів великого діаметра в лініях електропередачі. *Вказівка:* $\delta \propto 1/\sqrt{\omega}$.

Контрольні питання

1. У чому полягала ідея Максвелла про симетрію електричного й магнітного полів? Як ця ідея привела його до поняття струму зміщення?
2. Покажіть, що теорема про циркуляцію $\mathbf{H}$ для постійних полів, застосована до випадку змінного в часі заряду, суперечить закону збереження заряду (рівнянню неперервності).
3. Виведіть вираз для густини струму зміщення $\mathbf{j}_{\text{зм}} = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ з вимо-

ги узгодженості теореми про циркуляцію із законом збереження заряду. Чому цей вибір не єдиний математично можливий, і що зрештою підтверджує саме його правильність?

4. Запишіть остаточну теорему про циркуляцію магнітного поля з урахуванням струму зміщення в інтегральній та диференціальній формах.

5. Розгляньте задачу про радіальне стікання заряду з кулі: чому магнітне поле в цій задачі не виникає взагалі, попри те що заряд явно рухається? Яку роль тут відіграє точна компенсація струму провідності струмом зміщення?

6. Розгляньте задачу про зарядку плоского конденсатора: чому циркуляція $\mathbf{H}$ по одному й тому самому контуру дає однаковий результат для двох різних поверхонь — тієї, що перетинає провід, і тієї, що проходить між обкладками? Що це означає для ролі струму зміщення в конденсаторі?

7. Чим струм зміщення принципово відрізняється від струму провідності — чому до нього незастосовні закон Ома і закон Джоуля–Ленца?

8. Порівняйте закон електромагнітної індукції Фарадея та гіпотезу Максвелла про магнітоелектричну індукцію. У чому полягає асиметрія знаків між ними та до яких глибоких наслідків вона приводить?

9. Запишіть повну систему чотирьох рівнянь Максвелла в інтегральній та диференціальній формах. За яким принципом ці рівняння групуються в дві пари?

10. Покажіть, що закон збереження заряду випливає з рівнянь Максвелла (з третього й четвертого).

11. Виведіть вираз електричного поля через потенціали, $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, з теореми Гаусса для $\mathbf{B}$ і закону індукції Фарадея. Чому в нестаціонарному випадку $\mathbf{E}$ визначається не лише скалярним потенціалом?

12. Покажіть, що в стаціонарному випадку повна система рівнянь Максвелла розпадається на незалежні системи електростатики й магнітостатики. Чому зв'язок електрики й магнетизму — принципово нестаціонарне явище?

13. Чому потенціали φ і $\mathbf{A}$ визначено неоднозначно? Як перетворюються вони при зміні калібрування, щоб поля $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$ не змінилися?

14. Перелічіть матеріальні рівняння, що доповнюють рівняння Максвелла ($\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, закон Ома). Навіщо вони потрібні для розв'язання конкретних задач?

15. Запишіть граничні умови для електричних і магнітних векторів на межі розділу двох середовищ у загальному (нестаціонарному)

випадку. Чим вони відрізняються від умов для стаціонарних полів?

16 Виведіть теорему Пойнтінга $-\frac{\partial w}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Pi} + \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}$ з рівнянь Максвелла для $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H}$ і $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}$, використовуючи тотожність для дивергенції векторного добутку.

17 Що таке вектор Пойнтінга і густина енергії електромагнітного поля? Сформулюйте теорему Пойнтінга в інтегральній формі та поясніть фізичний зміст кожного доданка.

18 Розгляньте приклад зарядки конденсатора через теорему Пойнтінга: чому вся енергія, що запасається в полі всередині конденсатора, насправді втікає туди ззовні, крізь бічну поверхню, а не вздовж проводів?

19 Розгляньте приклад довгого провідника зі струмом: чому енергія, що йде на джоулеві втрати, надходить у провідник не вздовж нього від джерела, а ззовні, крізь бічну поверхню?

20 Що таке скін-ефект і які його основні практичні наслідки (зміна опору, індуктивності, відбивання світла провідниками)?

21 Дайте якісне пояснення скін-ефекту через вихрові струми Фуко: чому вони підсилюють струм на поверхні провідника й послаблюють у його серцевині?

22 Чому в металах аж до дуже високих частот ($\sim 10^{13}$ Гц) можна нехтувати струмом зміщення порівняно зі струмом провідності? Виведіть умову $\varepsilon\omega/(4\pi) \ll \lambda$.

23 Виведіть рівняння скін-ефекту $\nabla^2\mathbf{E} = (4\pi\mu\lambda/c^2)\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ з рівнянь Максвелла для провідника, знехтувавши струмом зміщення.

15 Відносність електричного і магнітного полів

Відомо, що електродинаміка Максвелла — в сучасному її вигляді — у застосуванні до рухомих тіл приводить до асиметрії, яка невластива самим явищам.

А. Ейнштейн, «До електродинаміки рухомих тіл», 1905

Явище електромагнітної індукції — та ланка, що остаточно поєднує електрику й магнетизм у єдину теорію. Ми бачили (розділ 12), що ЕРС індукції виникає у двох, здавалося б, різних ситуаціях: коли провідник рухається в незмінному магнітному полі (причина — сила Лоренца) і коли нерухомий провідник перебуває у змінному магнітному полі (причина — вихрове електричне поле). Чи справді це *два різні* явища, чи *два погляди* на одне й те саме явище, побачені з різних систем відліку?

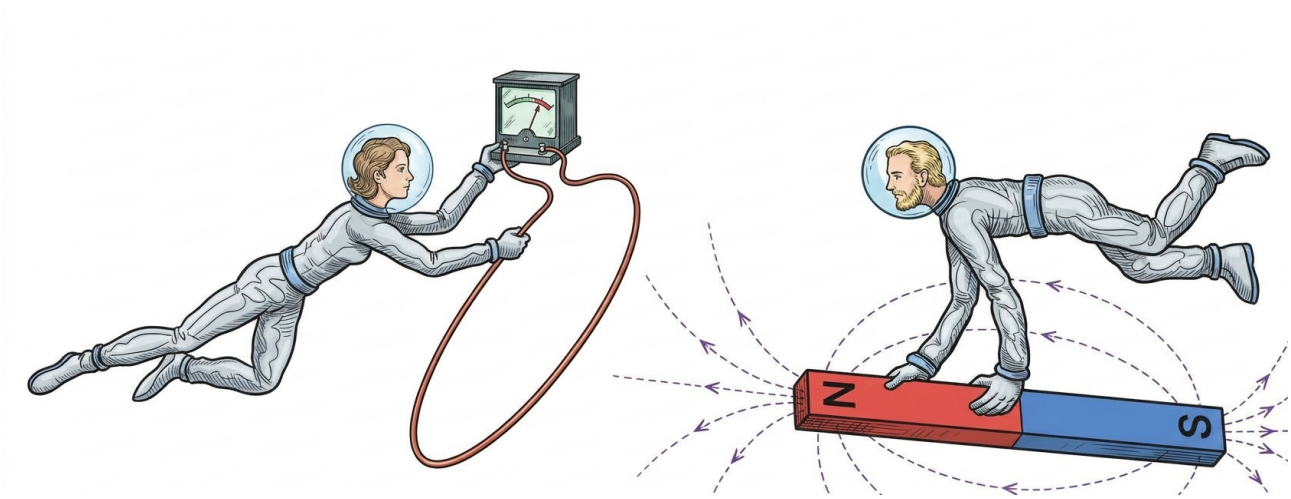


Рис. 15.1. Аліса та Боб, кожен з яких вважає нерухомим себе, по-різному пояснюють причину виникнення того самого струму в провіднику: для Аліси це електричне поле рухомого магніту, для Боба — сила Лоренца з боку магнітного поля нерухомого магніту

Щоб це з'ясувати, розгляньмо замкнений дрітний контур і ма-

гніт, які рухаються один відносно одного рівномірно й прямолінійно, та двох спостерігачів — Алісу й Боба (рис. 15.1). Аліса пов'язана з контуром: для неї контур нерухомий, а повз нього рухається магніт. Боб пов'язаний з магнітом: для нього магніт нерухомий, а рухається контур. Обидва реєструють *той самий* струм, але пояснюють його по-різному. Аліса бачить навколо рухомого магніту електричне поле, яке й рухає заряди в контурі. Боб електричного поля не бачить — поле нерухомого магніту для нього суто магнітне, — і струм він пояснює силою Лоренца, що діє на заряди рухомого контуру.

Тут ми спираємося на *принцип відносності*: усі інерціальні системи відліку рівноправні, а фізичний результат — показ амперметра в контурі — залежить лише від відносного руху контуру й магніту, а не від того, хто з них «насправді» рухається. Слово «інерціальні» суттєве: наведений аргумент працює лише для рівномірного руху. Для довільної індукції (деформація контуру, змінний струм у котушці) два механізми переходом до іншої системи відліку не зводяться; їх об'єднує вже правило потоку.

Саме з цієї ситуації починає Ейнштейн свою статтю 1905 року, з якої взято епіграф. Далі в ній сказано:

> *Пригадаємо, наприклад, електродинамічну взаємодію між магнітом та провідником зі струмом. Спостережуване явище залежить лише від відносного руху провідника і магніту, тоді як, згідно зі звичайним уявленням, два випадки, у яких рухається або одне, або інше з цих тіл, повинні бути строго розмежовані. Справді, якщо рухається магніт, а провідник знаходиться в спокої, то навколо магніту виникає електричне поле, що має деяку кількість енергії, яке в тих місцях, де знаходяться частини провідника, породжує струм. Якщо ж магніт перебуває у спокої, а рухається провідник, навколо магніту немає ніякого електричного поля; натомість у провіднику виникає електрорушійна сила, якій самій по собі не відповідає ніяка енергія, але яка — за умови передбачуваної тотожності відносного руху в обох випадках, — викликає електричні струми тієї ж величини і того ж напрямку, що й електричне поле в першому випадку.*
>
> *А. Ейнштейн, 1905*

Отже, асиметрія — у теорії, а не в явищі. Явище симетричне щодо обміну «рухається магніт» ↔ «рухається провідник», а теорія ці два випадки розрізняє: в одному є електричне поле з енергією, в іншому — лише ЕРС, якій жодна енергія не відповідає. Тому запитання ставиться не так, чи електричне поле «насправді» існує. Воно таке: як пов'язані між собою електричне й магнітне поля, які бачать різні спостерігачі, і що в цьому зв'язку від вибору системи відліку не залежить?

! *Із принципу відносності та з того, що Аліса й Боб описують той самий струм через різні поля, випливає: електричне й магнітне поля* окремо *не є абсолютними — їхній поділ залежить від системи відліку. Але це не означає, що поле є лише «способом опису». Реальним є електромагнітне поле* як ціле*; від системи відліку залежить тільки його розклад на електричну й магнітну частини. Далі ми побачимо й величини, які від системи відліку не залежать. Це наскрізна думка розділу.*

15.1. Нерелятивістські закони перетворення полів

Перетворення електричного поля. Нехай заряджена частинка в системі відліку S рухається зі швидкістю $\mathbf{v}$ в полях $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$. Тоді на неї діє сила

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right).$$

Перейдімо в систему відліку S', яка рухається зі швидкістю $\mathbf{v}$, — у цій системі частинка *спочиває*. У системі S' на частинку діє лише сила з боку електричного поля (магнітне поле на нерухому частинку не діє):

$$\mathbf{F}' = q\mathbf{E}'.$$

У нерелятивістському наближенні сила є інваріантом, тобто $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$. Звідси випливає *перший закон перетворення*:

$$\boxed{\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}.} \qquad (15.1)$$

! *Формула* (15.1) *показує, що «суто електричне» поле в одній системі відліку стає комбінацією електричного й магнітного полів в іншій. Це — прямий наслідок принципу відносності: жодне з полів не є «абсолютним», обидва — лише різні прояви єдиного електромагнітного поля.*

Перехід від системи відліку S' до системи S отримується зміною знака швидкості:

$$\boxed{\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}'.} \qquad (15.2)$$

Перетворення магнітного поля. Із закону Біо–Савара–Лапласа випливає, що магнітне поле заряду, який рухається зі швидкістю $\mathbf{v}$, дорівнює

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{E}', \qquad \mathbf{E}' = \frac{q\mathbf{r}}{r^3}.$$

Розглянемо систему нерухомих (у системі відліку S') заряджених частинок. Вони створюють електростатичне поле

$$\mathbf{E}' = \sum_k \frac{q_k}{r_k^3}\mathbf{r}_k = \sum_k \mathbf{E}'_k.$$

Перейдімо в систему відліку S, відносно якої система S' рухається зі швидкістю $\mathbf{v}$. У S заряди рухаються зі швидкістю $\mathbf{v}$, тому кожен із них створює магнітне поле $\mathbf{B}_k = \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{E}'_k$, а всі разом вони створюють поле

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{E}'.$$

Таким чином, у системі відліку, в якій заряди рухаються, виникає магнітне поле. Якщо у вихідній системі присутнє магнітне поле $\mathbf{B}'$ (створюване, наприклад, власним магнітним моментом частинки), то сумарне магнітне поле дається формулою

$$\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{B}' + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{E}'.} \tag{15.3}$$

Обернений перехід від системи S до системи S' отримується зміною знака швидкості:

$$\boxed{\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{E}.} \tag{15.4}$$

! *Пари формул* (15.1), (15.4) *та* (15.2), (15.3) *дають* нерелятивістські закони перетворення *полів при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої. Ці закони справедливі лише при* $v \ll c$*; точні (релятивістські) формули, розглянуті далі, переходять у них у граничному випадку малих швидкостей.*

15.2. Релятивістські закони перетворення полів

Інваріантність заряду. При виведенні закону збереження заряду,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{j} = 0,$$

передбачалося, що величина заряду не залежить від його швидкості. Це твердження є фактично результатом досліду. Припустимо, що це не так, тобто що заряд залежить від швидкості, $q = q(v)$. Візьмімо електронейтральне тіло, в якому додатні й від'ємні заряди точно скомпенсовані. Нагріватимемо це тіло. Тоді легкі частинки почнуть рухатися швидше, ніж важкі (наприклад, у газі $v_T = \sqrt{3kT/m} \sim m^{-1/2}$).

У результаті заряд одного знака почне переважати — тіло набуде нескомпенсованого заряду.

Однак такого ефекту не спостерігалося в жодному експерименті. Найточніше це перевірено на атомах гелію й молекулах водню: обидві системи містять по два протони й два електрони, але в атомі гелію електрони рухаються помітно швидше, а проте обидві електронейтральні з точністю близько 10^{-20} заряду електрона (Дж. Кінг, 1960 р.). Це означає *незалежність заряду від швидкості*.

> **!** *Інваріантність заряду — один із фундаментальних принципів електродинаміки. Саме завдяки їй стає можливим узгоджене релятивістське перетворення густини заряду й густини струму: заряд елемента об'єму не змінюється, хоча сам об'єм зазнає лоренцевого скорочення.*

Релятивістські формули перетворення полів. Нерелятивістські формули ми вивели, вважаючи силу однаковою в обох системах відліку. Тепер зробимо те саме точно: замінимо рівність $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$ правильним перетворенням сили. Введемо позначення $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ і, як і раніше, вважатимемо, що система S' рухається відносно S зі швидкістю $\mathbf{v}$ (вісь x напрямлена вздовж $\mathbf{v}$). Індексом «$\parallel$» позначимо компоненти полів, паралельні вектору швидкості, а індексом «$\perp$» — перпендикулярні до нього. Виведення спирається на три положення: означення полів через силу Лоренца, яке однакове в усіх інерціальних системах; інваріантність заряду; принцип відносності, за яким обернене перетворення отримується заміною $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$.

Перетворення сили. Розглянемо частинку, яка наразі перебуває в спокої в системі S'. Енергія й імпульс перетворюються як компоненти 4-вектора $(\varepsilon/c,\ \mathbf{p})$:

$$dp_\parallel = \gamma\left(dp'_\parallel + \frac{v}{c^2}\,d\varepsilon'\right), \qquad dp_\perp = dp'_\perp, \qquad dt = \gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}\,dx'\right).$$

Для частинки, що спочиває в S', зміщення $dx' = 0$, а $d\varepsilon' = \mathbf{F}'\cdot d\mathbf{r}' = 0$. Тому $dt = \gamma\,dt'$, $dp_\parallel = \gamma\,dp'_\parallel$, $dp_\perp = dp'_\perp$, і, ділячи, отримуємо

$$F_\parallel = F'_\parallel, \qquad \mathbf{F}_\perp = \frac{\mathbf{F}'_\perp}{\gamma}.$$

Електричне поле. У системі S частинка рухається зі швидкістю $\mathbf{v}$, тому $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B})$; у системі S' вона спочиває, тому $\mathbf{F}' = q\mathbf{E}'$ (заряд інваріантний). Вектор $\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}$ перпендикулярний до $\mathbf{v}$, тож із $F_\parallel = F'_\parallel$ випливає $E_\parallel = E'_\parallel$, а з $\mathbf{F}_\perp = \mathbf{F}'_\perp/\gamma$ — $\mathbf{E}_\perp + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B} = \mathbf{E}'_\perp/\gamma$. Отже,

$$\mathbf{E}'_\parallel = \mathbf{E}_\parallel, \qquad \mathbf{E}'_\perp = \gamma\,(\mathbf{E}_\perp + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}). \tag{15.5}$$

Як і для нерелятивістських формул, точку простору можна вибрати довільно: у ній завжди можна розмістити пробну частинку.

Магнітне поле, перпендикулярні компоненти. Формула (15.5) справедлива для будь-яких полів. За принципом відносності обернене перетворення відрізняється лише знаком швидкості:

$$\mathbf{E}_\perp = \gamma\,(\mathbf{E}'_\perp - \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}')\,.$$

Підставимо в нього $\mathbf{E}'_\perp$ з (15.5):

$$\mathbf{E}_\perp = \gamma^2\,(\mathbf{E}_\perp + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}) - \gamma\,\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}' \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}' = \gamma\beta^2\,\mathbf{E}_\perp + \gamma\,\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B},$$

де використано $\gamma^2 - 1 = \gamma^2\beta^2$. Помножимо обидві частини векторно на $\boldsymbol{\beta}$ зліва. Для будь-якого вектора $\mathbf{X}$ маємо $\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{X}) = -\beta^2\mathbf{X}_\perp$, тому $-\beta^2\mathbf{B}'_\perp = \gamma\beta^2\,\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E} - \gamma\beta^2\,\mathbf{B}_\perp$, тобто

$$\mathbf{B}'_\perp = \gamma\,(\mathbf{B}_\perp - \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E})\,. \tag{15.6}$$

Магнітне поле, паралельна компонента. Нехай довгий соленоїд, вісь якого напрямлена вздовж $\mathbf{v}$, спочиває в S'. Поле всередині нього $B'_\parallel = \frac{4\pi}{c}\,i'$, де $i' = \sigma' u'$ — лінійна густина струму (струм на одиницю довжини соленоїда), σ' — поверхнева густина заряду носіїв, u' — їхня азимутальна швидкість. У системі S соленоїд рухається вздовж своєї осі. Поперечні розміри не змінюються, поздовжні скорочуються, тому через інваріантність заряду $\sigma = \gamma\sigma'$. Азимутальна швидкість носіїв, перпендикулярна до $\mathbf{v}$, через уповільнення часу зменшується: $u = u'/\gamma$. Отже, $i = \sigma u = i'$. Соленоїд залишається електронейтральним (струм перпендикулярний до $\mathbf{v}$), тому в S є лише магнітне поле, і $B_\parallel = B'_\parallel$.

Отже, ми отримуємо закони перетворення при переході від S до S':

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{E}'_\parallel &= \mathbf{E}_\parallel, & \mathbf{E}'_\perp &= \gamma\,(\mathbf{E}_\perp + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B})\,,\\ \mathbf{B}'_\parallel &= \mathbf{B}_\parallel, & \mathbf{B}'_\perp &= \gamma\,(\mathbf{B}_\perp - \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E})\,. \end{aligned}} \tag{15.7}$$

Обернені перетворення, від S' до S, отримуються заміною $\mathbf{v}\to-\mathbf{v}$:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{E}_\parallel &= \mathbf{E}'_\parallel, & \mathbf{E}_\perp &= \gamma\,(\mathbf{E}'_\perp - \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}')\,,\\ \mathbf{B}_\parallel &= \mathbf{B}'_\parallel, & \mathbf{B}_\perp &= \gamma\,(\mathbf{B}'_\perp + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}')\,. \end{aligned}} \tag{15.8}$$

! *При $v \ll c$ маємо $\gamma \to 1$, і формули (15.7) та (15.8) переходять у нерелятивістські формули (15.1)–(15.4): паралельні компоненти взагалі не змінюються, а для перпендикулярних залишається лише змішування $\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}$ і $\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}$. Множник γ з'являється лише для компонент, перпендикулярних до руху, — саме там працюють скорочення довжин і уповільнення часу. Формули можна перевірити на прикладі рухомого зарядженого листа далі: він дає $E = \gamma E'$ і $B = \gamma \frac{v}{c} E'$, у повній згоді з (15.8).*

Інваріанти електромагнітного поля. З формул перетворення (15.7) випливає, що є два *інваріанти* електромагнітного поля:

$$I_1 \equiv E^2 - B^2 = \text{inv}, \qquad I_2 \equiv \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \text{inv}. \tag{15.9}$$

Доведення. Розкладемо поля на паралельні й перпендикулярні до $\mathbf{v}$ складові. Для векторів, перпендикулярних до $\boldsymbol{\beta}$, скористаємося тотожністю $(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{a}) \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{b}) = \beta^2\, \mathbf{a}_\perp \cdot \mathbf{b}_\perp$, а також тим, що вектори $\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}$ і $\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}$ перпендикулярні до $\boldsymbol{\beta}$, а $\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E} \perp \mathbf{E}$, $\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} \perp \mathbf{B}$.

Інваріант I_2. Паралельні компоненти не змінюються, тому

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = E_\parallel B_\parallel + \gamma^2 (\mathbf{E}_\perp + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{B}_\perp - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}).$$

Розкриємо добуток. Доданки $\mathbf{E}_\perp \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E})$ і $(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_\perp$ дорівнюють нулю, а $(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) = \beta^2\, \mathbf{E}_\perp \cdot \mathbf{B}_\perp$. Тому

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = E_\parallel B_\parallel + \gamma^2 \left(1 - \beta^2\right) \mathbf{E}_\perp \cdot \mathbf{B}_\perp = E_\parallel B_\parallel + \mathbf{E}_\perp \cdot \mathbf{B}_\perp = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B},$$

оскільки $\gamma^2(1 - \beta^2) = 1$.

Інваріант I_1. Аналогічно,

$$E'^2 - B'^2 = E_\parallel^2 - B_\parallel^2 + \gamma^2 \left[(\mathbf{E}_\perp + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})^2 - (\mathbf{B}_\perp - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E})^2 \right].$$

Різниця квадратів у дужках дорівнює

$$\left(1 - \beta^2\right)\left(E_\perp^2 - B_\perp^2\right) + 2\left[\mathbf{E} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E})\right].$$

Вираз у квадратних дужках дорівнює $\boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) + \boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = 0$, тому $E'^2 - B'^2 = E_\parallel^2 - B_\parallel^2 + E_\perp^2 - B_\perp^2 = E^2 - B^2$.

! *Інваріанти (15.9) показують, що поділ поля на електричну й магнітну частини не абсолютний, але деякі його характеристики від системи відліку не залежать: знак $E^2 - B^2$ і обертання в нуль добутку $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ однакові для всіх спостерігачів. Наступні наслідки випливають саме з цього.*

Наслідки Якщо в якій-небудь системі відліку $I_2 \neq 0$, то не існує системи відліку, в якій одне з полів оберталося б у нуль (тоді $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ дорівнювало б нулю). Іншими словами, неможливо вибором системи відліку виключити хоча б одне з полів.

Нехай у системі S інваріант $I_2 = 0$, тобто $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$. Якщо при цьому $I_1 > 0$, тобто $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$, то існує система відліку S', в якій присутнє тільки електричне поле. Вона рухається відносно S з такою швидкістю, що

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = c\,\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{E^2}.$$

Ця швидкість перпендикулярна і до $\mathbf{E}$, і до $\mathbf{B}$, тому обидва поля в S поперечні, множник γ на умову $\mathbf{B}' = 0$ не впливає, і формула точна; при цьому $v = cB/E < c$. Величину поля в S' дає інваріант I_1: $E' = \sqrt{E^2 - B^2}$.

Якщо ж $I_1 < 0$, то підхожим вибором системи відліку можна виключити електричне поле, так що залишається тільки магнітне поле. Швидкість відповідної системи відліку така, що

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = c\,\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B^2},$$

причому $v = cE/B < c$, а $B' = \sqrt{B^2 - E^2}$.

Нарешті, якщо $I_1 = 0$ і $I_2 = 0$ (наприклад, поле плоскої хвилі), то в будь-якій системі відліку $E = B$, і жодним вибором системи відліку не можна виключити ні електричне, ні магнітне поле.

Перетворення потенціалів. Електромагнітне поле характеризується скалярним φ і векторним $\mathbf{A}$ потенціалами, причому

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}.$$

Ця пара потенціалів повністю визначає електромагнітне поле і, виявляється, утворює *4-вектор*

$$A = (\varphi, A_x, A_y, A_z),$$

компоненти якого перетворюються при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої відповідно до перетворень Лоренца:

$$\varphi = \frac{\varphi' + (v/c)A'_x}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad A_x = \frac{A'_x + (v/c)\varphi'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad A_y = A'_y, \qquad A_z = A'_z;$$

$$\varphi' = \frac{\varphi - (v/c)A_x}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad A'_x = \frac{A_x - (v/c)\varphi}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad A'_y = A_y, \qquad A'_z = A_z. \tag{15.10}$$

Передбачається, що вісь x напрямлена вздовж вектора швидкості $\mathbf{v}$.

! *Формули (15.10) — це не що інше, як перетворення Лоренца для 4-вектора потенціалу. Саме тому потенціали φ і $\mathbf{A}$ нерозривно пов'язані між собою: при переході до рухомої системи відліку скалярний потенціал «перемішується» з компонентою векторного потенціалу вздовж напрямку руху. Це ще один прояв єдності електричного й магнітного полів.*

15.3. Тензор електромагнітного поля*

Закони перетворення (15.7) мають дивний вигляд: шість компонент $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$ переходять одна в одну за різними правилами для поздовжніх і поперечних складових. Це означає, що вони є компонентами одного об'єкта, як три просторові й одна часова компоненти 4-вектора. Цей об'єкт — *тензор електромагнітного поля*.

Позначення. Координати $x^\mu = (ct, x, y, z)$, а метрика має сигнатуру $(+,-,-,-)$, тобто для 4-вектора $a^\mu = (a^0, \mathbf{a})$ маємо $a_\mu = (a^0, -\mathbf{a})$; грецькі індекси пробігають значення $0,1,2,3$, латинські — $1,2,3$, за повторюваними індексами йде сума. Похідна $\partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$. 4-потенціал: $A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$, $A_\mu = (\varphi, -\mathbf{A})$.

Означення. Тензор поля будується з потенціалів як

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{15.11}$$

Він не змінюється при калібрувальному перетворенні $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$. Виразимо його компоненти через $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$:

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial A^i}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = E_i,$$
$$F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = -\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = -B_z,$$

і аналогічно $F_{13} = B_y$, $F_{23} = -B_x$. У вигляді таблиці:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \qquad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{15.12}$$

Тензор антисиметричний, $F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}$, тому має рівно шість незалежних компонент — стільки, скільки в $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$ разом. Перехід до $F^{\mu\nu}$ означає зміну знака компонент з одним просторовим індексом ($F^{0i} = -F_{0i}$).

Перетворення полів. Компоненти тензора перетворюються за правилом, однаковим для кожного індексу:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де Λ — перетворення Лоренца при переході до системи S', що рухається вздовж осі x зі швидкістю v. Розпишемо дві компоненти:

$$F'^{02} = \gamma F^{02} - \gamma\beta F^{12} \;\Rightarrow\; -E'_y = -\gamma E_y + \gamma\beta B_z \;\Rightarrow\; E'_y = \gamma\left(E_y - \beta B_z\right),$$

$$F'^{12} = -\gamma\beta F^{02} + \gamma F^{12} \;\Rightarrow\; -B'_z = \gamma\beta E_y - \gamma B_z \;\Rightarrow\; B'_z = \gamma\left(B_z - \beta E_y\right).$$

Це складові формул (15.7): $(\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B})_y = -\beta B_z$, $(\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E})_z = \beta E_y$. Решта чотири компоненти дають $E'_x = E_x$, $B'_x = B_x$, $E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y)$, $B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z)$, тобто *всі* шість співвідношень (15.7) одразу.

! *Закони перетворення полів, які ми виводили в кілька кроків, є наслідком одного факту: $F^{\mu\nu}$ — тензор. Причина в силі Лоренца: у 4-вимірній формі вона записується як*

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}u_\nu, \qquad u^\mu = \gamma\,(c,\ \mathbf{v}),$$

де τ — власний час. Ліворуч 4-вектор, а q й u_ν — інваріант і 4-вектор, тому $F^{\mu\nu}$ мусить перетворюватися як тензор. При $\mu = 1,2,3$ праворуч виходить $\gamma q(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B})$, тобто звичайна сила Лоренца, а при $\mu = 0$ — робота поля $q\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}$.

Інваріанти з тензора. Так само як скалярний добуток $a_\mu b^\mu$ двох 4-векторів однаковий в усіх інерціальних системах, скалярами є й повні згортання тензора зі самим собою. Побудуємо їх.

Інваріант I_1. Розглянемо згортання $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Компоненти з індексом 0 дають $F_{0i}F^{0i} + F_{i0}F^{i0} = -2E^2$, а чисто просторові — $F_{ij}F^{ij} = 2B^2$ (кожна компонента B входить двічі). Тому

$$\boxed{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2\left(B^2 - E^2\right) \quad\Longleftrightarrow\quad I_1 = E^2 - B^2 = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.} \tag{15.13}$$

Це скаляр, бо $F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$: при перетворенні кожен нижній індекс компенсується верхнім, тому що $\Lambda^{-1}\Lambda = 1$.

Інваріант I_2. Другий скаляр потребує *дуального тензора*

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma},$$

де $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ — цілком антисиметричний символ Леві-Чивіти, $\varepsilon^{0123} = +1$. Обчислення дають, що $\tilde{F}^{\mu\nu}$ отримується з $F^{\mu\nu}$ заміною $\mathbf{E}\to\mathbf{B}$, $\mathbf{B}\to-\mathbf{E}$. Зокрема $\tilde{F}^{01} = F_{23} = -B_x$. Повне згортання

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = 8\left(F_{01}F_{23} - F_{02}F_{13} + F_{03}F_{12}\right) = -8\left(E_xB_x + E_yB_y + E_zB_z\right),$$

тому

$$\boxed{I_2 = \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = -\frac{1}{4}\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{8}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}.} \tag{15.14}$$

Символ $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ не змінює вигляду при власних перетвореннях Лоренца ($\det\Lambda = 1$), тому й цей скаляр не залежить від системи відліку. Він змінює знак при дзеркальному відбитті (псевдоскаляр): $\mathbf{E}$ — вектор, $\mathbf{B}$ — аксіальний вектор, і їхній скалярний добуток парність не зберігає. Величина $E^2 - B^2$ від парності не залежить.

Незалежно від дуального тензора: $\det F_{\mu\nu} = (\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})^2$. Оскільки $F' = \Lambda F \Lambda^T$ і $\det\Lambda = 1$, визначник не змінюється, і $|I_2|$ інваріантний.

Чому їх рівно два? Складемо комплексний вектор $\mathcal{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{B}$. Тоді

$$\mathcal{F}^2 = E^2 - B^2 + 2i\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = I_1 + 2i\,I_2,$$

а формули (15.7) набувають вигляду $\mathcal{F}'_\parallel = \mathcal{F}_\parallel$, $\mathcal{F}'_\perp = \gamma(\mathcal{F}_\perp - i\boldsymbol{\beta}\times\mathcal{F})$. Це «обертання» комплексного вектора навколо $\mathbf{v}$ на уявний кут: $\gamma = \cosh\eta$, $\gamma\beta = \sinh\eta$. Прямою підстановкою $\mathcal{F}'^2 = \mathcal{F}_\parallel^2 + \gamma^2(1-\beta^2)\mathcal{F}_\perp^2 = \mathcal{F}^2$ (перехресний член $\mathcal{F}_\perp\cdot(\boldsymbol{\beta}\times\mathcal{F}_\perp)$ дорівнює нулю). Тобто I_1 і I_2 — дійсна й уявна частини єдиного комплексного інваріанта, а обертання комплексного вектора не змінює лише його квадрат.

! *Рівняння Максвелла в тензорному вигляді складаються з двох рівнянь:*

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}\,j^\nu, \qquad \partial_\mu \tilde F^{\mu\nu} = 0, \qquad j^\nu = (c\rho,\ \mathbf{j}).$$

При $\nu = 0$ перше з них дає $\nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho$, при $\nu = 1,2,3$ — $\nabla\times\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$; друге дає $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ і $\nabla\times\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0$. У першому рівнянні обидві частини є 4-векторами ($\partial_\mu F^{\mu\nu}$ — згортання 4-вектора ∂_μ з тензором), а в другому 4-вектор дорівнює нулю. Тому рівняння зберігають вигляд у всіх інерціальних системах, якщо $F^{\mu\nu}$ — тензор, а j^ν — 4-вектор. Це стисла схема розв'язання задачі 15.6.

Підсумки

Усі результати цього розділу спираються на одну спільну ідею: *електричне й магнітне поля — це дві грані єдиного електромагнітного поля*, а їхній поділ залежить від вибору системи відліку. Нерелятивістські закони перетворення (15.1)–(15.4) справедливі при $v \ll c$ і показують, як «суто електричне» поле набуває магнітної складової при переході до рухомої системи відліку. Релятивістські закони (15.8) уточнюють ці співвідношення з урахуванням лоренцевого фактора $\sqrt{1-(v/c)^2}$. Інваріанти (15.9) $I_1 = E^2 - B^2$ та $I_2 = \mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ залишаються незмінними в будь-якій інерціальній системі відліку й визначають, чи можна вибором системи відліку повністю виключити одне з полів. Нарешті, потенціали φ і $\mathbf{A}$ утворюють 4-вектор (15.10), а поля $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$ — компоненти одного антисиметричного тензора $F^{\mu\nu}$; закони перетворення полів і інваріанти випливають із того, що це тензор, — це найглибше вираження єдності електромагнітного поля.

Задачі

У всіх задачах система S' рухається відносно S зі швидкістю $\mathbf{v}$, якщо не сказано інше.

15.1. *Нерелятивістське перетворення полів.* У системі відліку S є однорідне електричне поле $\mathbf{E} = E_0\mathbf{i}$ і магнітне поле $\mathbf{B} = B_0\mathbf{j}$. Знайдіть поля $\mathbf{E}'$ і $\mathbf{B}'$ у системі S', що рухається зі швидкістю $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$ ($v \ll c$).

15.2. *Інваріанти поля.* Доведіть, що величини $I_1 = E^2 - B^2$ та $I_2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ справді є інваріантами відносно перетворень (15.8). *Вказівка:* розкладіть поля на паралельну та перпендикулярну до $\mathbf{v}$ складові й скористайтесь явними формулами перетворення.

15.3. *Чисте електричне поле в одній системі — чисто магнітне в іншій?* Чи може так статися, що в деякій інерціальній системі відліку існує *тільки* електричне поле ($\mathbf{E} \neq 0$, $\mathbf{B} = 0$), а в іншій інерціальній системі — *тільки* магнітне поле ($\mathbf{E}' = 0$, $\mathbf{B}' \neq 0$)? Обґрунтуйте відповідь, використовуючи інваріанти поля.

15.4. *Коли існує система з чисто електричним полем?* Нехай у деякій інерціальній системі відліку задано однорідні поля $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$. За яких умов на ці поля існує така інерціальна система, в якій магнітне поле дорівнює нулю? Знайдіть її швидкість відносно вихідної системи.

15.5. *«Нейтральний» дріт зі струмом.* У системі відліку S довгий прямий дріт нерухомий і електрично нейтральний: додатні іони спочивають, а електрони дрейфують зі швидкістю u, створюючи струм I. Покажіть, що в системі відліку S', яка рухається вздовж проводу зі швидкістю v (меншою за u), дріт виявляється *зарядженим*. Як це узгоджується з інваріантністю заряду?

Вказівка: скористайтесь релятивістським перетворенням густини заряду й густини струму як компонент 4-вектора $j = (\rho c, \mathbf{j})$ та лоренцевим скороченням відстаней між іонами й електронами. Ця задача — класична ілюстрація того, що магнітна сила в одній системі відліку є проявом електричної сили в іншій.

15.6. *Чи зберігають рівняння Максвелла форму?* Покажіть, що рівняння Максвелла

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

зберігають свій вигляд при переході до будь-якої інерціальної системи відліку, якщо поля перетворюються за формулами (15.8), а густини заряду й струму — за перетвореннями Лоренца для 4-вектора $j = (\rho c, \mathbf{j})$. *Вказівка:* це найпряміший шлях довести, що рівняння Максвелла *релятивістськи інваріантні* — і що саме тому вони «автоматично» містили у собі спеціальну теорію відносності, задовго до її створення.

Контрольні питання

1. У чому полягає парадокс Аліси й Боба про магніт і провідник? Чому в обох випадках виникає той самий струм, попри різне фізичне пояснення (сила Лоренца проти вихрового електричного поля)?
2. Що мав на увазі Ейнштейн, кажучи, що асиметрія — «в теорії, а не в явищі»? Чому питання про те, чи електричне поле «насправді» існує, поставлене некоректно?
3. Виведіть нерелятивістський закон перетворення електричного поля $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}$, виходячи з інваріантності сили в нерелятивістському наближенні.
4. Виведіть нерелятивістський закон перетворення магнітного поля $\mathbf{B} = \mathbf{B}' + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{E}'$, спираючись на закон Біо–Савара–Лапласа для рухомих зарядів.
5. Чому інваріантність заряду (незалежність від швидкості) — фундаментальний експериментальний факт? Як довід із нагріванням електронейтрального тіла демонструє, що було б, якби заряд залежав від швидкості?
6. На яких трьох положеннях ґрунтується релятивістське виведення законів перетворення полів? Виведіть перетворення сили $F_{\parallel} = F'_{\parallel}$, $\mathbf{F}_{\perp} = \mathbf{F}'_{\perp}/\gamma$ для частинки, що спочиває в S'.
7. Виведіть релятивістський закон перетворення паралельної та перпендикулярної складових електричного поля, $\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}$, $\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})$.

8 Виведіть релятивістське перетворення перпендикулярної складової магнітного поля $\mathbf{B}'_\perp = \gamma(\mathbf{B}_\perp - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E})$, користуючись принципом відносності й уже знайденим перетворенням для $\mathbf{E}$.

9 На прикладі рухомого соленоїда покажіть, чому паралельна складова магнітного поля не змінюється при переході в іншу інерціальну систему відліку, $B_\parallel = B'_\parallel$.

10 Запишіть повну систему релятивістських перетворень полів. Чому при $v \ll c$ вони переходять у нерелятивістські формули, і чому множник γ з'являється лише для перпендикулярних компонент?

11 Що таке інваріанти електромагнітного поля $I_1 = E^2 - B^2$ та $I_2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$? Доведіть інваріантність I_2, використовуючи розклад полів на паралельну й перпендикулярну складові.

12 За яких умов на інваріанти I_1, I_2 можна вибором системи відліку повністю виключити електричне поле, а за яких — магнітне? Виведіть відповідну швидкість такої системи відліку.

13 Чому для поля плоскої хвилі ($I_1 = I_2 = 0$) жодним вибором системи відліку не можна виключити ні електричне, ні магнітне поле?

14 Покажіть, що скалярний φ і векторний $\mathbf{A}$ потенціали утворюють 4-вектор, компоненти якого перетворюються за формулами Лоренца.

15 Дайте означення тензора електромагнітного поля $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ через 4-потенціал. Чому цей тензор антисиметричний і має рівно шість незалежних компонент?

16 Виведіть явний вигляд матриці $F_{\mu\nu}$ через компоненти $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$. Покажіть, як з перетворення тензора Лоренца відновлюються всі шість формул релятивістського перетворення полів.

17 Як інваріанти I_1 і I_2 виражаються через повні згортання тензора поля $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ та дуального тензора $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$? Чому I_2 — псевдоскаляр, а I_1 — звичайний скаляр?

18 Складіть комплексний вектор $\mathcal{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{B}$ і поясніть, чому саме тому інваріантів рівно два — дійсна й уявна частини квадрата цього вектора.

19 Як записуються рівняння Максвелла в коваріантному тензорному вигляді $\partial_\mu F^{\mu\nu} = (4\pi/c) j^\nu$ та $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$? Чому з цього запису випливає релятивістська інваріантність рівнянь Максвелла?

20 Розгляньте парадокс «нейтрального» провідника зі струмом: чому в системі відліку, що рухається вздовж проводу, він виявляється зарядженим, і як це узгоджується з інваріантністю заряду?

Частина VI

Електромагнітні хвилі

На запитання «Що таке теорія Максвелла?» я не знаю коротшої й визначенішої відповіді, ніж ця: теорія Максвелла — це система рівнянь Максвелла.

Генріх Герц, «Дослідження поширення електричної сили» (1892)

16 Електромагнітні хвилі

Ми навряд чи можемо уникнути висновку, що світло полягає в поперечних коливаннях того самого середовища, яке є причиною електричних і магнітних явищ.

Джеймс Клерк Максвелл, «Про фізичні силові лінії» (1862)

16.1. Хвильове рівняння

Хвильовий процес. Попри величезну різноманітність фізичних процесів, що спричиняють хвилі (коливання струни чи ланцюжка зв'язаних тягарців, хвилі на поверхні води, звукові хвилі, електромагнітні хвилі), їхнє утворення підпорядковане спільному принципу: збурення, що виникло в деякий момент часу в одному місці, з часом поширюється в просторі з певною швидкістю. *Хвиля — це процес поширення збурень у просторі.*

Хвилю описують деякою величиною $u = f(x, y, z, t)$, що є функцією як просторових координат, так і часу. Наприклад, для хвилі на поверхні води u — це висота підняття поверхні над рівноважним рівнем; для механічної хвилі в ланцюжку зв'язаних пружинками тягарців (рис. 16.1) u — зміщення тягарця від положення рівноваги; для електромагнітної хвилі u — змінна складова електричного чи магнітного поля, що накладається на їхнє (можливо, нульове) статичне значення.

Хвильове рівняння. Розглянемо збурення, що поширюється вздовж осі x без зміни форми зі швидкістю v (рис. 16.2). Якщо в момент $t = 0$ профіль збурення описувався функцією $u = f(x)$, то через час t те саме за формою збурення просто зміститься на відстань vt, тобто опишеться функцією $u = f(x - vt)$ (для хвилі, що біжить у додатному напрямку осі x) або $u = g(x + vt)$ (для хвилі, що біжить у від'ємному

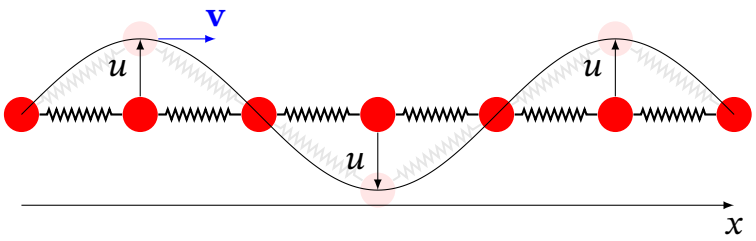


Рис. 16.1. Механічна хвиля в ланцюжку зв'язаних пружинками тягарців — наочна модель для розуміння хвильового процесу

напрямку). Загалом (суперпозиція обох):

$$u = f(x - vt) + g(x + vt). \tag{16.1}$$

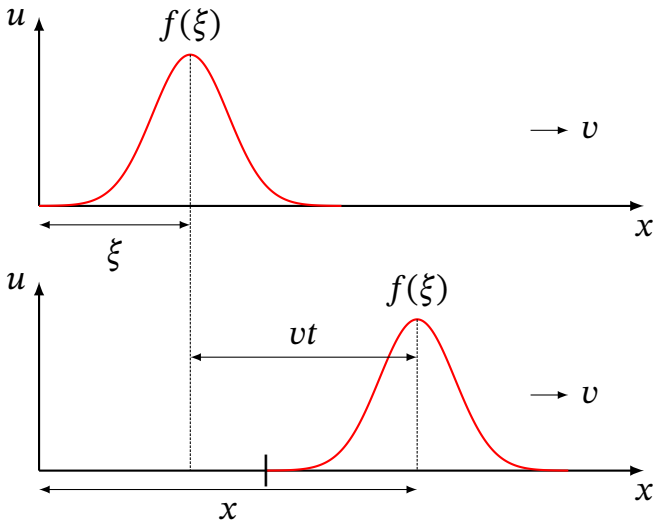


Рис. 16.2. Збурення, що поширюється без зміни форми зі швидкістю v: профіль у момент t — це профіль у момент 0, зсунутий на vt

Конкретний вигляд функцій f і g визначається початковими умовами (початковою формою збурення й початковим розподілом швидкостей) і може бути яким завгодно. Знайдемо диференціальне рівняння, якому підпорядковується *будь-яка* функція вигляду (16.1), незалежно від її конкретного вигляду. Позначимо $\xi = x - vt$; тоді, за правилом диференціювання складеної функції,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(\xi), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(\xi); \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -vf'(\xi), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 f''(\xi)$$

(і аналогічно для доданка $g(x+vt)$, з тим самим кінцевим результатом через парність других похідних за знаком швидкості). Порівнюючи другі похідні, знаходимо *хвильове рівняння*:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.} \tag{16.2}$$

У тривимірному випадку, коли збурення поширюється в довільних напрямках, хвильове рівняння узагальнюють, замінюючи другу похідну за x на лапласіан $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{16.3}$$

! *Рівняння* (16.3) *— своєрідний «пароль», за яким фізики впізнають хвильові процеси в геть різних розділах фізики:* якщо якісь закони фізики (механіки, акустики, електродинаміки, теорії поля) приводять до рівняння саме такого вигляду, то ці закони описують поширення хвиль *зі швидкістю v, яка входить у це рівняння, — незалежно від конкретної фізичної природи величини u.*

Плоска монохроматична хвиля. *Плоскою хвилею* називають хвилю, що має однакове значення u в усіх точках площини, перпендикулярної до напряму її поширення (*хвильової площини*, рис. 16.3). Хвилю називають *монохроматичною*, якщо u змінюється з часом за гармонічним законом з певною частотою. Для плоскої монохроматичної хвилі:

$$u = u_m \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}). \tag{16.4}$$

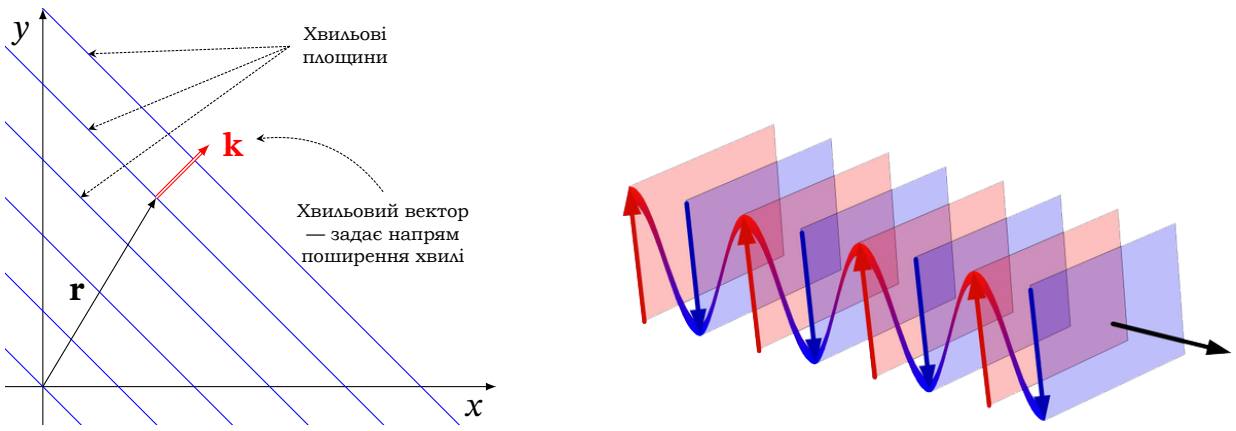


Рис. 16.3. Хвильовий вектор $\mathbf{k}$ вказує напрям поширення плоскої хвилі й перпендикулярний до хвильових площин

Для зручності плоску монохроматичну хвилю часто подають у комплексній формі:

$$u = u_m e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}, \tag{16.5}$$

розуміючи, що фізичний зміст має лише *дійсна* частина цього виразу (сама ж комплексна форма — лише зручний обчислювальний прийом:

формула Ейлера $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ дає змогу компактно поєднати синус і косинус, а диференціювання й інтегрування зводяться до простого множення на $i\omega$ чи $-i\mathbf{k}$).

Характеристики монохроматичної хвилі. *Довжиною хвилі* λ називають найменшу відстань між двома точками простору, що коливаються цілком синхронно (в одній фазі), виміряну вздовж напряму поширення:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \tag{16.6}$$

де $\mathbf{k}$ — *хвильовий вектор*, напрямлений уздовж поширення хвилі перпендикулярно до хвильової площини, а $k = |\mathbf{k}|$ — *хвильове число*. Величину ω у формулі (16.4) називають *коловою частотою* хвилі, а $T = 2\pi/\omega$ — *періодом*. Нарешті, *фазовою швидкістю* хвилі називають швидкість, з якою в просторі переміщується точка з фіксованою фазою $\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = \text{const}$:

$$\boxed{v = \frac{\omega}{k}, \qquad \mathbf{v} = \frac{\omega}{k}\frac{\mathbf{k}}{k}.} \tag{16.7}$$

16.2. Електромагнітні хвилі

Виведення хвильових рівнянь з рівнянь Максвелла. Розглянемо електромагнітне поле в однорідній ділянці простору, де немає вільних зарядів і струмів провідності ($\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$). Рівняння Максвелла (розділ 14) у цьому випадку спрощуються:

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{D} = 0, \qquad \nabla\times\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \tag{16.8}$$

доповнені матеріальними рівняннями $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ (нехай середовище однорідне й ізотропне, без дисперсії: $\varepsilon, \mu = \text{const}$).

Застосуємо операцію $\nabla\times$ до другого рівняння:

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{B}) = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{H}) = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$$

(в останній рівності скористались четвертим рівнянням). З іншого боку, за тотожністю векторного аналізу й $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$ (яке випливає з $\nabla\cdot\mathbf{D} = 0$): $\nabla\times\nabla\times\mathbf{E} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -\nabla^2\mathbf{E}$. Прирівнюючи, отримуємо хвильове рівняння для електричного поля:

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}.} \tag{16.9}$$

Цілком аналогічно, застосувавши $\nabla\times$ до четвертого рівняння й підставивши друге, отримуємо те саме рівняння для магнітного поля:

$$\nabla^2\mathbf{H} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}, \qquad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{16.10}$$

Швидкість поширення і показник заломлення. Отже, поля $\mathbf{E}$ і $\mathbf{H}$ підпорядковуються *хвильовому рівнянню*, тобто описують процес поширення збурень електромагнітного поля — *електромагнітну хвилю*, — зі швидкістю

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{16.11}$$

У вакуумі ($\varepsilon = \mu = 1$) швидкість поширення дорівнює електродинамічній сталій $c \approx 3\cdot 10^{10}$ см/с — *швидкості світла*. У середовищі з $\varepsilon, \mu \geqslant 1$ швидкість поширення менша, $v = c/n < c$, де

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}, \tag{16.12}$$

— *абсолютний показник заломлення* середовища.

Швидкість, що випливає з рівнянь Максвелла, у вакуумі дорівнює відношенню електромагнітної й електростатичної одиниць заряду. Цю величину виміряли В. Вебер і Р. Кольрауш (1856 р.): вона становила близько $3{,}1\cdot 10^{10}$ см/с і майже збігалася зі швидкістю світла, виміряною А. Фізо ($\approx 3{,}15\cdot 10^{10}$ см/с). Помітивши цей збіг, Максвелл (1861–1865 рр.) висунув гіпотезу, що *світло — це електромагнітна хвиля*, а оптика — розділ електродинаміки. Це один із найграндіозніших результатів класичної фізики: рівняння, сформульовані на основі дослідів з електрикою й магнетизмом, *самі собою* описують світло. Експериментально електромагнітні хвилі отримав Г. Герц у 1886–1888 рр., уже після смерті Максвелла (1879 р.); його досліди описано в розділі 17.

Плоскі електромагнітні хвилі. Розглянемо гармонічні електромагнітні хвилі в комплексній формі:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m\, e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}_m\, e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}. \tag{16.13}$$

Підставляючи ці вирази в рівняння Максвелла, диференціальні операції заміняються алгебраїчними за правилом

$$\nabla \to -i\mathbf{k}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} \to i\omega \tag{16.14}$$

(легко переконатися прямим диференціюванням (16.13)). Рівняння Максвелла (16.8) набувають вигляду

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0, \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \mathbf{k}\times\mathbf{E} = \frac{\omega}{c}\mathbf{B}, \qquad -\mathbf{k}\times\mathbf{H} = \frac{\omega}{c}\varepsilon\mathbf{E}. \tag{16.15}$$

Поперечність електромагнітних хвиль. Перші два рівняння в співвідношеннях (16.15) показують, що

$$\boxed{\mathbf{E} \perp \mathbf{k}, \qquad \mathbf{H} \perp \mathbf{k}:} \tag{16.16}$$

вектори $\mathbf{E}$ і $\mathbf{H}$ перпендикулярні до напряму поширення хвилі. Цю властивість називають *поперечністю* електромагнітних хвиль. Два інші рівняння дають співвідношення для амплітуд (і показують, що $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$, тобто $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{k}$ утворюють правовинтову трійку взаємно перпендикулярних векторів):

$$\boxed{nE_m = B_m, \qquad \sqrt{\varepsilon}\, E_m = \sqrt{\mu}\, H_m.} \tag{16.17}$$

! *Поперечність — принципова властивість, що відрізняє електромагнітні хвилі, наприклад, від звукових (поздовжніх). Разом з (16.17) вона означає, що в біжучій електромагнітній хвилі* $\mathbf{E}$ *і* $\mathbf{H}$ *не є незалежними: досить знати одне з них (наприклад,* $\mathbf{E}$*) у кожен момент часу, щоб миттєво відновити й друге.*

16.3. Енергія та вектор Пойнтінга для хвилі

Густина енергії електромагнітного поля (розділ 14) для амплітудних значень:

$$w_m = \frac{\varepsilon E_m^2}{8\pi} + \frac{\mu H_m^2}{8\pi}. \tag{16.18}$$

Скориставшись співвідношенням амплітуд (16.17), $\sqrt{\varepsilon/\mu}\, E_m = H_m$, електрична й магнітна частини густини енергії виявляються *рівними* одна одній, і

$$w_m = \frac{\varepsilon E_m^2}{4\pi} = \frac{\mu H_m^2}{4\pi}.$$

Схематично плоску монохроматичну електромагнітну хвилю, у якій вектори $\mathbf{E}$ і $\mathbf{H}$ взаємно перпендикулярні та поширюються вздовж $\mathbf{k}$, зображено на рис. 16.4.

Знайдемо вектор Пойнтінга $\mathbf{\Pi} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$ для хвилі. Скориставшись зв'язком $\mathbf{E} = -\frac{c}{\varepsilon\omega}[\mathbf{k} \times \mathbf{H}]$ (з останнього рівняння (16.15)) і тотожністю подвійного векторного добутку:

$$\mathbf{\Pi} = \frac{c^2}{4\pi\varepsilon\omega}[[\mathbf{H} \times \mathbf{k}] \times \mathbf{H}] = \frac{c^2}{4\pi\varepsilon\omega} H^2 \mathbf{k} = \frac{c}{\omega} \cdot \frac{1}{\varepsilon\mu}\left(\frac{\mu H^2}{4\pi}\right) c\mathbf{k}. \tag{16.19}$$

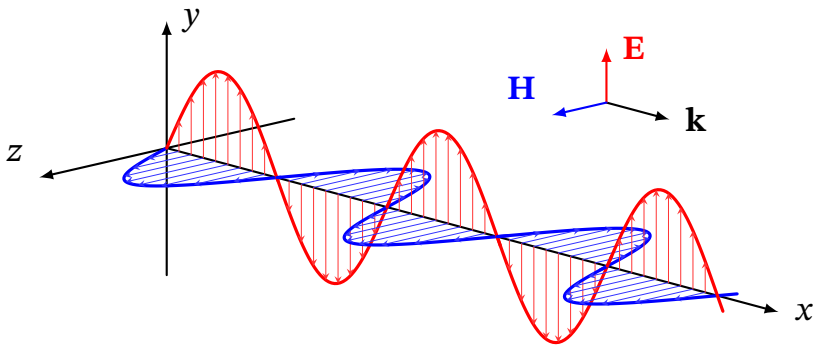


Рис. 16.4. Плоска монохроматична електромагнітна хвиля: взаємно перпендикулярні коливання **E** і **H**, що поширюються вздовж **k**

Помічаючи, що для біжучої хвилі співвідношення (16.17) справедливі й для миттєвих значень полів, а тому $\mu H^2/(4\pi) = w$ (густина енергії), і що $c^2\mathbf{k}/(\varepsilon\mu\omega) = (c/\sqrt{\varepsilon\mu})(\mathbf{k}/k) = \mathbf{v}$ (за означенням (16.7) і (16.11)), отримуємо простий результат:

$$\boxed{\mathbf{\Pi} = w\mathbf{v}.} \tag{16.20}$$

! *Формула* (16.20) *має простий фізичний зміст: енергія електромагнітної хвилі* переноситься разом з нею *зі швидкістю поширення самої хвилі* **v** *— вектор Пойнтінга просто дорівнює густині енергії, помноженій на швидкість її «течії», за повною аналогією з потоком речовини (густина × швидкість).*

Оптичні поля змінюються надто швидко ($\sim 10^{15}$ Гц), тому приймачі реєструють не миттєвий, а *усереднений* за період потік енергії. Його модуль називають *інтенсивністю* випромінювання; оскільки середнє від $\cos^2$ дорівнює 1/2, то $\langle w\rangle = w_m/2$ і

$$I = \langle|\mathbf{\Pi}|\rangle = \langle w\rangle v = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E_m^2 \propto E_m^2. \tag{16.21}$$

Тиск електромагнітної хвилі. Електромагнітні хвилі, відбиваючись від тіл чи поглинаючись ними, чинять на них тиск. Цей тиск виникає внаслідок дії магнітного поля хвилі на електричні струми, збуджені в тілі електричним полем тієї самої хвилі (рис. 16.5).

Електричне поле хвилі збуджує в тілі струм густиною $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ (тут σ — питома провідність; у розділ 14 її позначено λ, але цю літеру ми залишаємо для довжини хвилі), на який з боку магнітного поля хвилі $B = nE = (c/v)E$ діє сила Ампера $d\mathbf{F} = \frac{1}{c}[\mathbf{j}\times\mathbf{B}]\,dV$, спрямована вздовж поширення хвилі. Якщо вся енергія, що падає на поверхню тіла ($\Pi\,dS = wv\,dS$), перетворюється на теплоту ($\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\,dV$), тобто $wv\,dS = jE\,dV$,

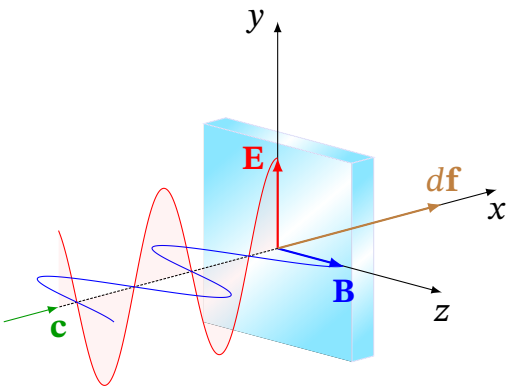


Рис. 16.5. Механізм виникнення тиску електромагнітної хвилі: сила Ампера $d\mathbf{f}$, що діє на струм, збуджений полем $\mathbf{E}$, у полі $\mathbf{B}$

то сила, що діє на поверхню:

$$dF = \frac{1}{c} jB\,dV = \frac{1}{c} j \frac{c}{v} E\,dV = \frac{1}{v} jE\,dV = \frac{1}{v} wv\,dS = w\,dS, \tag{16.22}$$

звідки тиск при повному поглинанні

$$p = w. \tag{16.23}$$

У випадку часткового відбивання (коефіцієнт відбивання за енергією $0 \leqslant \mathcal{R} \leqslant 1$) тіло отримує додатковий імпульс від відбитої хвилі, і тиск

$$p = w(1 + \mathcal{R}). \tag{16.24}$$

При повному відбиванні ($\mathcal{R} = 1$) тиск рівно *вдвічі* більший, ніж при повному поглинанні ($\mathcal{R} = 0$). Тиск світла передбачив Дж. К. Максвелл (1873 р.), а А. Бартоллі (1876 р.) отримав його з термодинаміки. Експериментально тиск світла вперше виміряв П. М. Лебедєв (1899–1901 рр.): у крутильних терезах у високому вакуумі, на тонких крильцях — зачорненому (поглинальному) і дзеркальному (відбивальному), — світло створювало різні моменти сил, у згоді з формулою (16.24) (рис. 16.6). Головна складність полягала в усуненні радіометричних і конвекційних ефектів у залишковому газі, які на порядки перевищують сам тиск світла.

Тиск світла в природі та техніці. Тиск сонячного світла, попри свою мізерну величину (на орбіті Землі — близько $5 \cdot 10^{-6}$ Па при повному поглинанні), відіграє помітну роль і в природних явищах, і в сучасних космічних технологіях.

В астрофізиці тиск випромінювання, поряд із тиском газу, протидіє гравітаційному стисканню й забезпечує стійкість зір. У масивних гарячих зорях він стає настільки суттєвим, що визначає їхню структуру та еволюцію. Саме тиском сонячного світла пояснюється пиловий

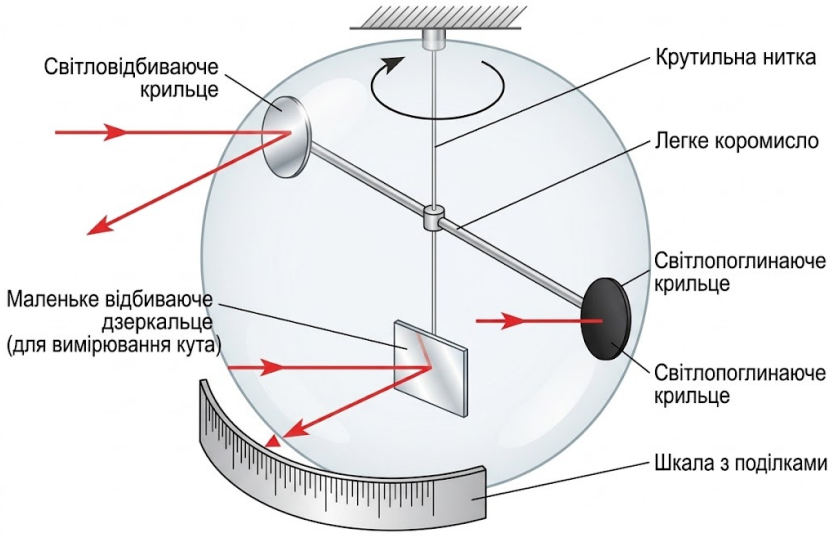


Рис. 16.6. Схема досліду П. М. Лебедєва (1899 р.) з вимірювання тиску світла

хвіст комети: дрібні пилинки «здуваються» в напрямку *від* Сонця, тому хвіст завжди орієнтований приблизно протилежно до Сонця, незалежно від напряму руху самої комети (задача 16.4). Прямий іонний хвіст формує не тиск світла, а сонячний вітер.

Ідея *сонячного вітрила* полягає в тому, щоб використати тиск світла для розгону космічного апарата без витрати палива.

Першу спробу випробувати вітрило в космосі здійснила Планетарна спілка у 2005 році (місія *Cosmos 1*), але ракета-носій зазнала аварії, і апарат не досяг орбіти. Першим апаратом, який успішно використав сонячне вітрило для руху, став японський *IKAROS* (2010 р., політ до Венери). У 2019 році *LightSail 2* Планетарної спілки вперше серед малих апаратів змінив свою орбіту навколо Землі виключно за рахунок тиску сонячних фотонів, а у 2024 році NASA розгорнуло композитне вітрило *ACS3* площею близько 80 м^2. Найамбітнішою залишається концепція лазерного вітрила для розгону грамових зондів до часток швидкості світла (проєкт *Breakthrough Starshot*), хоча станом на середину 2020-х років вона далека від практичної реалізації.

16.4. Імпульс і момент імпульсу електромагнітного поля

Густина імпульсу поля. Оскільки поле має енергію, а електромагнітна хвиля чинить тиск на речовину (передаючи їй імпульс), логічно припустити, що й саме поле, в одиниці об'єму, має певний *імпульс*. Для електромагнітної хвилі у вакуумі $\Pi = wc$, тому $\Pi/c^2 = w/c$. З релятивістського співвідношення енергії й імпульсу, $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$, для частинки з нульовою масою спокою (наприклад, фотона) $E = pc$, тобто $p = E/c$. Порівнюючи структуру цих двох формул, для густини

імпульсу поля природно отримуємо

$$\boxed{\mathbf{g} = \frac{\mathbf{\Pi}}{c^2}.} \tag{16.25}$$

Переконаємось у цьому прямим розрахунком, повторюючи міркування про тиск хвилі. Густина сили Ампера $\mathbf{f} = \frac{1}{c}[\mathbf{j} \times \mathbf{B}]$, що діє на струм, збуджений хвилею в тілі, за час dt змінює імпульс одиниці об'єму тіла на величину

$$d\mathbf{g} = \mathbf{f}\,dt = \frac{1}{c}[\mathbf{j} \times \mathbf{B}]\,dt = \frac{\sigma}{c}[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]\,dt = \frac{4\pi\sigma}{c^2}\mathbf{\Pi}\,dt = \frac{4\pi\sigma}{c}\,w\mathbf{n}\,dt,$$

тоді як за той самий час у тій самій одиниці об'єму поглинається (передається від поля речовині) енергія

$$dw = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}\,dt = \sigma E^2\,dt = 4\pi\sigma\frac{E^2}{4\pi}\,dt = 4\pi\sigma w\,dt.$$

Звідси $d\mathbf{g} = \frac{dw}{c}\mathbf{n}$, тобто за весь час дії хвилі

$$\mathbf{g} = \frac{w}{c}\mathbf{n} = \frac{\mathbf{\Pi}}{c^2} \tag{16.26}$$

— прямий розрахунок підтверджує результат (16.25), отриманий раніше з релятивістської аналогії.

! *Погодженість двох зовсім різних способів отримання формули* (16.25) *— прямого мікроскопічного розрахунку сили Ампера й релятивістського співвідношення енергія-імпульс для безмасової частинки — ще один вияв внутрішньої узгодженості класичної електродинаміки з рештою фізики (тут — зі спеціальною теорією відносності, яка історично якраз і* виникла *з аналізу рівнянь Максвелла).*

Приклад: момент імпульсу поля циліндричного конденсатора (парадокс Фейнмана). Заряджений циліндричний конденсатор (зовнішня обкладка радіуса R, внутрішньою знехтуємо) вміщений у зовнішнє однорідне магнітне поле $\mathbf{B}$, напрямлене вздовж його осі; конденсатор може вільно обертатись навколо цієї осі. Внутрішня обкладка несе заряд $+q$, зовнішня — $-q$; маса конденсатора — m (рис. 16.7). Знайдемо момент імпульсу поля конденсатора та кутову швидкість, з якою конденсатор почне обертатися після вимкнення поля $\mathbf{B}$.

Густина моменту імпульсу поля відносно осі:

$$\mathcal{L} = \mathbf{r} \times \frac{\mathbf{\Pi}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c}\mathbf{r} \times [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] = -\frac{1}{4\pi c}\mathbf{B}\,(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) \tag{16.27}$$

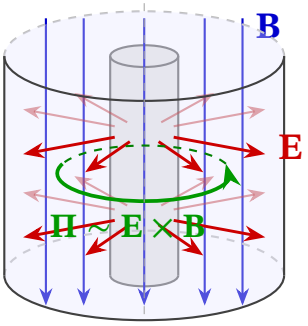


Рис. 16.7. Циліндричний конденсатор в аксіальному магнітному полі: зображено поля **E**, **B** і вектор Пойнтінга **П**, що циркулює навколо осі

(тут скористались тотожністю подвійного векторного добутку й тим, що $\mathbf{B} \perp \mathbf{r}$). Поле між обкладками конденсатора, за теоремою Гаусса, $E = 2q/(rh)$, де h — висота циліндра. Інтегруючи модуль (16.27) за об'ємом між обкладками:

$$L = \int_V \mathcal{L}\, dV = \frac{1}{4\pi c} B \frac{2q}{h} \pi R^2 h = \frac{qBR^2}{2c}, \qquad \mathbf{L} = -\frac{qR^2}{2c}\mathbf{B}. \tag{16.28}$$

При вимкненні магнітного поля момент імпульсу, який раніше «зберігався» в самому електромагнітному полі, нікуди не зникає — за законом збереження моменту імпульсу він переходить у механічне обертання самого конденсатора, $L = mR^2\omega$ (наближено вважаючи всю масу розподіленою на радіусі R), звідки

$$\omega = -\frac{q}{2mc}\mathbf{B}. \tag{16.29}$$

! *Ця задача — варіант відомого* парадоксу Фейнмана*: до вимкнення поля конденсатор* нерухомий*, і жодного механічного моменту імпульсу у видимій системі немає — проте* момент імпульсу самого електромагнітного поля*, обчислений за формулою* (16.28)*, відмінний від нуля! Коли поле* **B** *вимикають, змінне магнітне поле (розділ 12) породжує вихрове електричне поле, яке й розкручує заряджені обкладки конденсатора, — момент імпульсу «перетікає» з поля в механічне обертання речовини, а повний момент імпульсу системи* поле + речовина *зберігається протягом усього процесу. Це переконливий приклад того, що електромагнітне поле — цілком повноцінний фізичний об'єкт, здатний нести не лише енергію, а й імпульс, і момент імпульсу, — так само, як і звичайна речовина.*

16.5. Відбивання хвиль від межі двох діелектриків

Ми розглядали електромагнітну хвилю, що поширюється в необмеженому однорідному середовищі. Однак хвиля рідко поширюється в однорідному середовищі необмежено довго — рано чи пізно

вона зустрічає *межу розділу* двох середовищ із різними показниками заломлення, і саме там відбуваються найцікавіші явища: частина хвилі відбивається назад, а частина проходить у друге середовище. Покажемо, що закони відбивання й заломлення, а також кількісні співвідношення для амплітуд відбитої й заломленої хвиль (формули Френеля) — традиційно предмет геометричної та хвильової оптики — *прямо випливають* із граничних умов для електромагнітного поля на межі розділу (розділ 14), без жодних додаткових постулатів, крім самих рівнянь Максвелла.

Поляризація хвиль. *Поляризація* — характеристика поперечних хвиль, що описує поведінку вектора величини, яка коливається (для електромагнітної хвилі — вектора **E**), у площині, перпендикулярній до напряму поширення. При розгляді відбивання й заломлення хвилі на межі розділу двох середовищ зручно окремо розглядати два незалежні випадки поляризації відносно *площини падіння* (площини, що містить хвильовий вектор падаючої хвилі й нормаль до межі розділу):

- *s-поляризація* (від нім. *senkrecht* — перпендикулярний): вектор **E** перпендикулярний до площини падіння (а отже, паралельний до межі розділу середовищ);
- *p-поляризація* (від *parallel* — паралельний): вектор **E** лежить у площині падіння.

Довільну поляризацію хвилі завжди можна розкласти на суперпозицію цих двох незалежних випадків.

Відбивання й заломлення *s*-поляризованої хвилі: закони відбивання й заломлення. Розглянемо межу розділу ($x = 0$) двох діелектриків з показниками заломлення n_1 (при $x < 0$) і n_2 (при $x > 0$), на яку під кутом i падає плоска s-поляризована хвиля (рис. 16.8). Породжуються *відбита* хвиля (кут i') і *заломлена* хвиля (кут r):

$$E = E_m e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}, \qquad E' = E'_m e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y)}, \qquad E'' = E''_m e^{i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y)}.$$

Гранична умова для тангенціальної складової **E** ($E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$, розділ 14) при $x = 0$ мусить виконуватись у *кожен* момент часу t і в *кожній* точці y межі розділу одночасно:

$$E_m\, e^{i(\omega t - k_y y)} + E'_m\, e^{i(\omega' t - k'_y y)} = E''_m\, e^{i(\omega'' t - k''_y y)}.$$

Диференціюючи цю тотожність за t, а потім за y (або, що те саме, порівнюючи показники експонент, які мусять збігатися при будь-яких t, y), отримуємо

$$\omega = \omega' = \omega'', \qquad k_y = k'_y = k''_y, \tag{16.30}$$

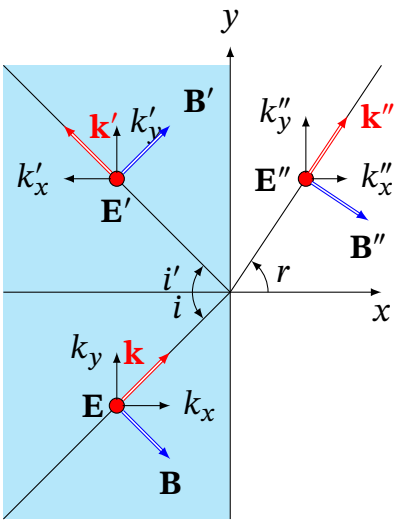


Рис. 16.8. Падаюча, відбита й заломлена s-поляризовані хвилі на межі розділу двох діелектриків

після чого гранична умова спрощується до $E_m + E'_m = E''_m$. Рівність частот означає, що колір (частота) світла не змінюється при відбиванні чи заломленні. З рівності $k_y = k'_y$ (з огляду на те, що падаюча й відбита хвилі перебувають в одному середовищі, $k = k' = n_1\omega/c$, а $k_y = k\sin i$, $k'_y = k'\sin i'$):

$$\boxed{i = i'} \qquad (16.31)$$

— *закон відбивання*, добре відомий з геометричної оптики. З рівності $k'_y = k''_y$ (тепер $k' = n_1\omega/c$, $k'' = n_2\omega/c$):

$$\boxed{n_1\sin i = n_2\sin r, \qquad \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}} \qquad (16.32)$$

— *закон заломлення* (закон Снелла), де n_{21} — відносний показник заломлення другого середовища відносно першого. Оскільки більшість діелектриків не проявляють магнітних властивостей ($\mu_1 = \mu_2 \approx 1$),

$$n_{21} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{v_1}{v_2}. \qquad (16.33)$$

! *Класичні закони геометричної оптики — закони відбивання й заломлення, відомі задовго до Максвелла й зазвичай постульовані окремо (чи виведені з принципу Ферма) — виявляються* прямим наслідком *граничних умов для електромагнітного поля на межі розділу середовищ. Максвеллівська електродинаміка не просто узгоджується з геометричною оптикою — вона* містить *її як частинний, найпростіший випадок.*

Формули Френеля для s-поляризації. Крім уже отриманої граничної умови для **E** (яка звелась до $E_m + E'_m = E''_m$), потрібна ще одна — гранична умова для **H**. Для s-поляризованої хвилі $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_z$ напрямлений

уздовж осі z (перпендикулярно до площини падіння xy); амплітуда й напрям магнітного поля плоскої хвилі в середовищі з показником заломлення n зв'язані з електричним співвідношенням $\mathbf{B} = n(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E})$, де $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ — одиничний вектор напрямку поширення хвилі (сам хвильовий вектор $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}}$ має модуль $k = n\omega/c$), звідки, зокрема, $B_m = nE_m$. Оскільки одиничні вектори напрямку поширення падаючої, відбитої й заломленої хвиль дорівнюють $\hat{\mathbf{k}} = (\cos i, \sin i, 0)$, $\hat{\mathbf{k}}' = (-\cos i, \sin i, 0)$, $\hat{\mathbf{k}}'' = (\cos r, \sin r, 0)$ (вісь x — нормаль до межі, y — уздовж межі в площині падіння), безпосереднє обчислення $\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_z$ дає для тангенціальної (уздовж y) складової $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ (з огляду на $\mu_1 = \mu_2 \approx 1$):

$$H_y = -n_1 E_m \cos i, \qquad H'_y = n_1 E'_m \cos i, \qquad H''_y = -n_2 E''_m \cos r.$$

Гранична умова неперервності $H_{\tau_1} = H_{\tau_2}$, тобто $H_y + H'_y = H''_y$, набуває вигляду

$$n_1 \cos i\,(E_m - E'_m) = n_2 \cos r\, E''_m. \tag{16.34}$$

Виражаючи $n_1 = n_2 \sin r / \sin i$ за законом Снелла (16.32) і підставляючи $E''_m = E_m + E'_m$, отримуємо

$$\sin r \cos i\,(E_m - E'_m) = \sin i \cos r\,(E_m + E'_m) \quad \Longrightarrow \quad E_m \sin(r-i) = E'_m \sin(i+r),$$

де використано формулу синуса різниці кутів. Підставляючи знайдене E'_m назад у $E''_m = E_m + E'_m$ й скориставшись $\sin(i+r) - \sin(i-r) = 2\cos i \sin r$, остаточно дістаємо *формули Френеля* для s-поляризації:

$$\boxed{E'_\perp = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} E_\perp,} \tag{16.35}$$

$$\boxed{E''_\perp = \frac{2\sin r \cos i}{\sin(i+r)} E_\perp.} \tag{16.36}$$

Формули Френеля для p-поляризації. Для p-поляризованої хвилі (рис. 16.9), навпаки, у площині падіння xy лежить вектор $\mathbf{E}$, а $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ напрямлений уздовж осі z. Обираючи напрям $\mathbf{E}$ так, щоб трійка $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \hat{\mathbf{k}}$ лишалась правою (тобто за тим самим правилом $\mathbf{B} = n(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E})$, як і для s-поляризації), одиничний вектор $\mathbf{E}$ дорівнює $\hat{\mathbf{e}}_E = \mathbf{z} \times \hat{\mathbf{k}}$, що для падаючої, відбитої й заломленої хвиль дає тангенціальні (уздовж y) складові

$$E_y = E_m \cos i, \quad E'_y = -E'_m \cos i, \quad E''_y = E''_m \cos r;$$
$$B_z = n_1 E_m, \quad B'_z = n_1 E'_m, \quad B''_z = n_2 E''_m$$

(складова B_z тут цілком тангенціальна, оскільки $\mathbf{B} \parallel \mathbf{e}_z$). Неперервність тангенціальних складових $\mathbf{E}$ і $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ дає систему двох рівнянь

$$\cos i\,(E_m - E'_m) = \cos r\,E''_m, \qquad n_1(E_m + E'_m) = n_2 E''_m. \tag{16.37}$$

Виключаючи з другого рівняння $n_1 = n_2 \sin r/\sin i$ (закон Снелла) і підставляючи в нього E''_m з першого рівняння, маємо

$$\sin r\cos r\,(E_m + E'_m) = \sin i\cos i\,(E_m - E'_m) \quad \Longrightarrow$$
$$E_m\big[\sin 2i - \sin 2r\big] = E'_m\big[\sin 2i + \sin 2r\big]$$

(тут використано $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$). Застосувавши до різниці й суми синусів подвійних кутів формули $\sin 2i - \sin 2r = 2\cos(i+r)\sin(i-r)$ та $\sin 2i + \sin 2r = 2\sin(i+r)\cos(i-r)$, знаходимо $E'_m/E_m = \mathrm{tg}(i-r)/\mathrm{tg}(i+r)$; підстановка цього результату в $E''_m = \dfrac{n_1}{n_2}(E_m + E'_m) = \dfrac{\sin r}{\sin i}(E_m + E'_m)$ дає E''_m. Разом це — *формули Френеля* для p-поляризації:

$$\boxed{E'_\parallel = \frac{\mathrm{tg}(i-r)}{\mathrm{tg}(i+r)}\,E_\parallel,} \tag{16.38}$$

$$\boxed{E''_\parallel = \frac{2\sin r\cos i}{\sin(i+r)\cos(i-r)}\,E_\parallel.} \tag{16.39}$$

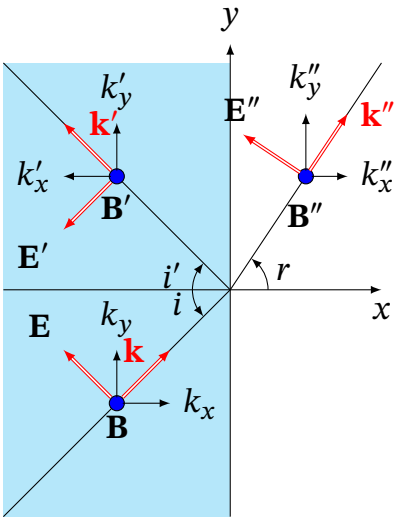


Рис. 16.9. Падаюча, відбита й заломлена p-поляризовані хвилі на межі розділу двох діелектриків

! *З формули* (16.38) *випливає цікавий наслідок: якщо* $i + r = 90°$, *то* $\operatorname{tg}(i + r) \to \infty$, $i\, E'_{\parallel} = 0$ — *відбита хвиля* повністю відсутня *для p-поляризації! Кут падіння, за якого це відбувається, називають* кутом Брюстера*: за умови* $i + r = 90°$ *маємо* $\sin r = \cos i$, *тому за законом Снелла* $\operatorname{tg} i_B = n_{21}$ *(для скла* $i_B \approx 56°$, *для води* $\approx 53°$*). За цього кута відбите світло, незалежно від поляризації падаючого, виявляється* повністю *s*-поляризованим — *явище, широко застосовуване в поляризаційній оптиці й фотографії (світло, відбите від води чи скла, переважно s-поляризоване, тому поляризаційні фільтри прибирають відблиски).*

Відбивання за інтенсивністю. Частку енергії, що відбивається, задає *коефіцієнт відбивання* $\mathcal{R} = (E'_m/E_m)^2$. Із формул Френеля

$$\mathcal{R}_\perp = \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}, \qquad \mathcal{R}_\parallel = \frac{\operatorname{tg}^2(i-r)}{\operatorname{tg}^2(i+r)},$$

а решта енергії, $1 - \mathcal{R}$, переноситься заломленою хвилею (закон збереження енергії; рівності $E'^2_m + E''^2_m = E^2_m$ немає, бо заломлена хвиля має іншу швидкість і поширюється під іншим кутом). При нормальному падінні ($i \to 0$, $r \approx i\, n_1/n_2$) обидві формули дають

$$\boxed{\mathcal{R} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2.} \qquad (16.40)$$

Для межі повітря-скло ($n = 1{,}5$) $\mathcal{R} = 4\,\%$, для межі повітря-вода ($n = 1{,}33$) — 2 %. Саме тому кожна непросвітлена поверхня в оптичних приладах забирає кілька відсотків світла, а *просвітлювальні покриття* (плівки товщиною $\lambda/4$ з показником $\sqrt{n_1 n_2}$) зменшують ці втрати завдяки інтерференції відбитих хвиль.

Повне внутрішнє відбивання. Якщо світло переходить з оптично густішого середовища в оптично менш густе, $n_2 < n_1$, то, за законом заломлення (16.32), $\sin i / \sin r = n_2/n_1 < 1$, тобто $i < r$: кут заломлення завжди *більший* за кут падіння (рис. 16.10).

Зі зростанням кута падіння i заломлений промінь усе більше наближається до межі розділу. При деякому значенні $i = i_b$ кут заломлення досягає $r = 90°$ — на рисунку цьому відповідає промінь, що йде вздовж самої межі розділу. Кут i_b називають *граничним кутом*:

$$\boxed{\sin i_b = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \qquad \text{або} \qquad n \sin i_b = 1, \quad n = \frac{n_1}{n_2} > 1.} \qquad (16.41)$$

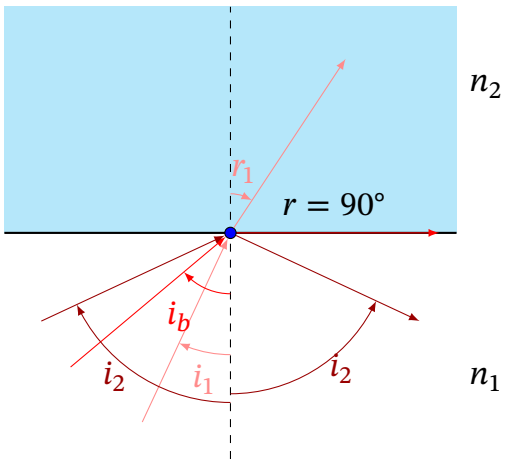


Рис. 16.10. Заломлений промінь наближається до поверхні розділу при зростанні кута падіння

При кутах падіння $i > i_b$ виникає *повне внутрішнє відбивання*: уся енергія падаючої хвилі відбивається назад у перше середовище, а проходження заломленої хвилі в геометрично-оптичному сенсі стає неможливим.

Що відбувається за граничним кутом: згасаюча хвиля. «Неможливість» існування заломленої хвилі при $i > i_b$ — це висновок саме геометричної оптики. З'ясуємо, що відбувається із заломленою хвилею формально, виходячи з *рівнянь Максвелла*. Заломлена хвиля $\mathbf{E}'' = \mathbf{E}''_m e^{i(\omega t - k''_x x - k''_y y)}$ (частота $\omega'' = \omega$ — за (16.30)) повинна задовольняти дисперсійне співвідношення для другого середовища, $k''^2 = k''^2_x + k''^2_y$, де $k'' = n_2\omega/c$. З граничної умови $k_y = k''_y$ (16.30) (а $k_y = k\sin i$, де $k = n_1\omega/c$ — хвильове число падаючої хвилі в першому середовищі) маємо

$$k''^2_x = k''^2 - k_y^2 = \left(\frac{n_2\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n_1\omega}{c}\right)^2 \sin^2 i = \frac{\omega^2}{c^2}\left(n_2^2 - n_1^2\sin^2 i\right).$$

Оскільки при $i > i_b$ виконується $n_1 \sin i > n_2$ (тобто й $n_1^2\sin^2 i > n_2^2$), вираз у дужках — *від'ємний*, тому $k''^2_x < 0$, тобто k''_x — *уявне* число: $k''_x = -iK$ (знак обираємо так, щоб поле спадало вглиб середовища), де, повертаючись до позначення $n = n_1/n_2$ з формули (16.41),

$$K = \frac{\omega}{c}\sqrt{n_1^2\sin^2 i - n_2^2} = \frac{n_2\omega}{c}\sqrt{n^2\sin^2 i - 1} > 0.$$

Розв'язок рівнянь Максвелла в другому середовищі при цьому набуває вигляду

$$\boxed{\mathbf{E}'' = \mathbf{E}''_m e^{-Kx} e^{i(\omega t - k''_y y)}.} \qquad (16.42)$$

Отже, поле в другому середовищі *існує* навіть при куті падіння, більшому за граничний: воно «чіпляється» за межу розділу й проникає в друге середовище на глибину порядку довжини хвилі світла λ_0, а амплітуда цього поля *експоненційно спадає* вглиб середовища (уздовж x). Таке поле називають *згасаючою хвилею* (рис. 16.11).

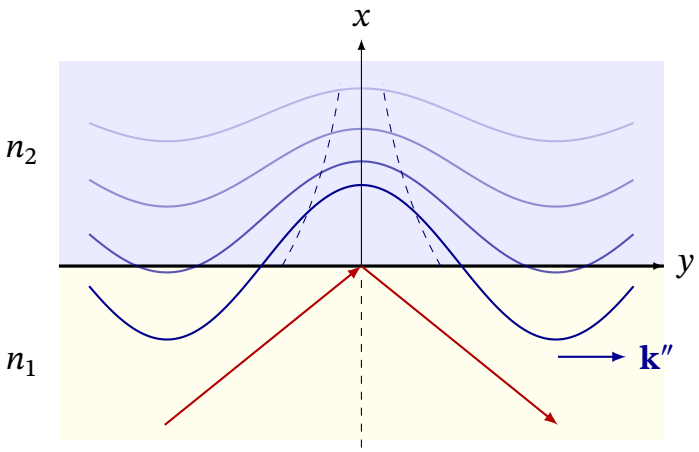


Рис. 16.11. Згасаюча хвиля в другому середовищі при $i > i_b$ (s-поляризація: $\mathbf{E} = E_z\mathbf{e}_z$, спрямоване перпендикулярно до площини рисунка). Крива неперервно переходить із середовища n_1 (де поле — суперпозиція падаючої й відбитої хвиль) у середовище n_2, де воно поширюється вздовж межі розділу (у напрямку $\mathbf{k}''$), а його амплітуда $|E_z|$ експоненційно спадає вглиб середовища (уздовж x) за законом $A(x) = A_0 e^{-Kx}$; $x = 1/K$ — характерна глибина проникнення поля, порядку довжини хвилі λ_0.

При $i \to i_b$ маємо $K \to 0$, тобто глибина проникнення $1/K \to \infty$ — саме тому граничний промінь на рис. 16.10 ($i = i_b$, $r = 90°$) виглядає як звичайний біжучий промінь уздовж межі розділу. Це узгоджується з уже отриманими формулами Френеля для проходження, (16.36) і (16.39): підставляючи $r \to 90°$, маємо $E''_\perp \to 2E_\perp$ і $E''_\parallel \to 2n\,E_\parallel$ — обидві границі скінченні й ненульові, тобто поле на межі при $i = i_b$ цілком реальне.

Переконаємось прямим розрахунком, що нормальна до межі складова потоку Пойнтінга згасаючої хвилі дорівнює нулю в середньому. Для s-поляризації ($\mathbf{E}'' = E''_z\mathbf{e}_z$) магнітне поле знаходимо із (16.15), $\mathbf{k}\times\mathbf{E} = \dfrac{\omega}{c}\mathbf{B}$, справедливого й для комплексного $\mathbf{k}'' = (-iK, k''_y, 0)$:

$$\mathbf{B}'' = \frac{c}{\omega}\,\mathbf{k}''\times\mathbf{E}'' = \frac{c}{\omega}\,E''_z\,(k''_y,\, iK,\, 0) \quad\Longrightarrow\quad B''_x = \frac{c}{\omega}k''_y E''_z, \qquad B''_y = i\frac{c}{\omega}KE''_z.$$

Усереднений за період вектор Пойнтінга для комплексних амплітуд дорівнює $\langle\mathbf{\Pi}\rangle = \dfrac{c}{8\pi}\,\mathrm{Re}\,(\mathbf{E}''\times\mathbf{H}''^{*})$, звідки $\langle\Pi_x\rangle = -\dfrac{c}{8\pi}\mathrm{Re}(E''_z H''^{*}_y)$, $\langle\Pi_y\rangle = \dfrac{c}{8\pi}\mathrm{Re}(E''_z H''^{*}_x)$. Оскільки коефіцієнт при E''_z у H''_y — *уявний*, а в H''_x — *дійсний*:

$$\boxed{\langle\Pi_x\rangle = 0,} \qquad \langle\Pi_y\rangle = \frac{c^2 k''_y}{8\pi\omega}\,|E''_m|^2\,e^{-2Kx} \neq 0. \tag{16.43}$$

Звідси видно, що потік $\langle\Pi_y\rangle \neq 0$ показує поширення енергії хвилі вздовж межі, а не вглиб другого середовища.

! *Якщо на відстані порядку λ_0 від межі розділу розташувати третє середовище (наприклад, наблизити впритул ще один шматок скла до межі повного внутрішнього відбивання), «хвіст» згасаючої хвилі виявиться там ще достатньо відчутним, щоб розхитати електрони цього середовища й породити нову, вже* біжучу хвилю *— частина світла* пройде *крізь проміжок, попри те, що кожна з двох меж окремо давала б повне відбивання. Це явище називають* порушеним повним внутрішнім відбиванням *— оптичний аналог квантовомеханічного тунелювання, який легко спостерігати експериментально для сантиметрових радіохвиль (де λ_0 — сантиметри, тому проміжок легко зробити порівнянним з довжиною хвилі) і значно важче — для видимого світла (де $\lambda_0 \sim 10^{-5}$ см вимагає надзвичайно вузького проміжку).*

Підсумки

Рівняння Максвелла в однорідному діелектрику без вільних зарядів і струмів приводять до хвильових рівнянь для $\mathbf{E}$ і $\mathbf{H}$ зі швидкістю $v = c/n$, $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$: збурення електромагнітного поля поширюється у вигляді *електромагнітної хвилі*, швидкість якої у вакуумі дорівнює швидкості світла. Плоска монохроматична хвиля *поперечна*: $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ і $\mathbf{k}$ утворюють праву трійку взаємно перпендикулярних векторів, а амплітуди пов'язані співвідношенням $nE_m = B_m$, $\sqrt{\varepsilon}E_m = \sqrt{\mu}H_m$. Звідси Максвелл дійшов гіпотези, що світло — електромагнітна хвиля, а оптика — розділ електродинаміки.

Хвиля переносить енергію ($\mathbf{\Pi} = w\mathbf{v}$), імпульс ($\mathbf{g} = \mathbf{\Pi}/c^2$) і, як показує приклад із циліндричним конденсатором, момент імпульсу; звідси тиск світла $p = w(1 + \mathcal{R})$, який визначає форму пилових хвостів комет і лежить в основі сонячних вітрил.

Закони відбивання й заломлення та формули Френеля — не окремі постулати геометричної оптики, а наслідок граничних умов для електромагнітного поля на межі розділу. З них випливають кут Брюстера, повне внутрішнє відбивання та *згасаюча хвиля* в другому середовищі: вона не переносить енергії вглиб середовища, але за наявності третього середовища зумовлює порушене повне внутрішнє відбивання.

Задачі

16.1. *Світло в склі.* Монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda_0 = 600$ нм у вакуумі входить у скло з показником заломлення $n = 1{,}5$ ($\mu = 1$). Знайдіть частоту, швидкість, довжину хвилі й хвильове число в склі, а також ε скла на цій частоті.

16.2. *Лазерний пучок.* Пучок потужністю 1 Вт і діаметром 2 мм падає нормально на поглинальну поверхню. Знайдіть інтенсивність, амплітуди E_m і B_m та тиск світла. Як зміниться тиск для ідеального дзеркала? (Використайте 1 Вт $= 10^7$ ерг/с, 1 СГСЕ напруженості поля $= 300$ В/см.)

16.3. *Сонячне вітрило.* Вітрило площею 100 м^2 з коефіцієнтом відбивання $\mathcal{R} = 0{,}9$ перпендикулярне до сонячних променів поблизу орбіти Землі (інтенсивність $1{,}37 \cdot 10^6$ ерг/(с·см^2)). Знайдіть силу тиску світла, прискорення апарата масою 10 кг та приріст швидкості за рік.

16.4. *Пилинка в променях Сонця.* Сферична поглинальна пилинка густиною $\rho = 1$ г/см^3 перебуває на відстані r від Сонця (світність $L = 3{,}85 \cdot 10^{33}$ ерг/с, маса $M = 2 \cdot 10^{33}$ г). Знайдіть радіус a, за якого сила тиску світла дорівнює силі гравітації. Чому результат не залежить від r?

16.5. *Парадокс Фейнмана: оцінка.* Циліндричний конденсатор із зарядом $q = 3 \cdot 10^3$ СГСЕ (≈ 1 мкКл), зовнішній радіус якого $R = 5$ см, маса $m = 10$ г, перебуває у полі $B = 10^4$ Гс вздовж осі. Знайдіть момент імпульсу поля й кутову швидкість, з якою конденсатор почне обертатися після вимкнення поля.

16.6. *Відбивання від скла.* Знайдіть коефіцієнти відбивання за інтенсивністю при нормальному падінні на межу повітря-скло ($n = 1{,}5$) і повітря-вода ($n = 1{,}33$). Яка частка енергії проходить крізь скляну пластинку (дві поверхні; поглинання не враховуйте, багаторазові відбивання враховуйте)?

16.7. *Кут Брюстера.* Знайдіть кут Брюстера для межі повітря-скло ($n = 1{,}5$), повітря-вода ($n = 1{,}33$) і для виходу зі скла в повітря. Покажіть, що відбитий і заломлений промені при цьому перпендикулярні.

16.8. *Глибина згасаючої хвилі.* Світло з $\lambda_0 = 600$ нм падає зсередини скла ($n = 1{,}5$) на межу з повітрям під кутом 45°. Знайдіть граничний кут і глибину, на якій амплітуда згасаючої хвилі в повітрі зменшується в e разів.

Контрольні питання

1. Що таке хвиля в загальному сенсі? Наведіть кілька прикладів фізичних процесів, що описуються хвилями, і поясніть, що означає величина u в кожному з них.
2. Виведіть хвильове рівняння $\partial^2 u/\partial x^2 = (1/v^2)\,\partial^2 u/\partial t^2$ для збурення $u = f(x - vt) + g(x + vt)$, що поширюється без зміни форми, і поясніть, як воно узагальнюється на тривимірний випадок. Чому рівняння $\nabla^2 u = (1/v^2)\,\partial^2 u/\partial t^2$ вважають «паролем» хвильового процесу в різних розділах фізики?
3. Що таке плоска монохроматична хвиля? Запишіть її дійсну та комплексну форми. У чому зручність комплексного запису?
4. Дайте означення довжини хвилі, хвильового вектора, хвильового числа, колової частоти, періоду та фазової швидкості хвилі. Як вони пов'язані між собою?
5. Виведіть хвильові рівняння для **E** і **H** з рівнянь Максвелла в однорідному середовищі без вільних зарядів і струмів. Чому дорівнює швидкість поширення електромагнітних хвиль і як з неї отримати показник заломлення n?
6. Чому збіг швидкості електромагнітних хвиль зі швидкістю світла, отриманий суто з рівнянь електрики й магнетизму, вважають одним із найважливіших результатів класичної фізики?
7. Запишіть рівняння Максвелла для плоскої гармонічної хвилі в комплексній формі. Яке правило заміни диференціальних операцій алгебраїчними при цьому використовується?
8. Доведіть поперечність електромагнітних хвиль ($\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$, $\mathbf{H} \perp \mathbf{k}$). Яке співвідношення пов'язує амплітуди E_m і H_m, і що з нього випливає для незалежності полів **E** і **H**?
9. Покажіть, що електрична й магнітна частини густини енергії хвилі рівні між собою. Виведіть формулу $\mathbf{\Pi} = w\mathbf{v}$ для вектора Пойнтінга хвилі та поясніть її фізичний зміст.
10. Що таке інтенсивність випромінювання і чому вона пропорційна E_m^2?
11. Виведіть формулу тиску електромагнітної хвилі $p = w$ при повному поглинанні та $p = w(1 + \mathcal{R})$ при частковому відбиванні, і опишіть

дослід Лебедєва, яким цю різницю тисків для поглинального й відбивального крилець було виміряно.

12 Яку роль відіграє тиск світла в астрофізиці (рівновага зір, хвости комет) і в космічній техніці (сонячні та лазерні вітрила)? Наведіть приклади місій, що використовують цей принцип.

13 Виведіть формулу для густини імпульсу поля $\mathbf{g} = \mathbf{\Pi}/c^2$ двома способами: з релятивістського співвідношення енергія-імпульс для безмасової частинки та прямим розрахунком сили Ампера.

14 У чому полягає парадокс Фейнмана з циліндричним конденсатором в аксіальному магнітному полі? Виведіть момент імпульсу поля конденсатора $L = qBR^2/(2c)$ та кутову швидкість його обертання після вимкнення поля, і поясніть, як це демонструє, що електромагнітне поле — повноцінний фізичний об'єкт, здатний нести імпульс і момент імпульсу.

15 Що таке s- та p-поляризація хвилі відносно площини падіння? Чому довільну поляризацію можна розкласти на суперпозицію цих двох випадків?

16 Виведіть закони відбивання ($i = i'$) та заломлення ($n_1 \sin i = n_2 \sin r$) з граничної умови неперервності тангенціальної складової $\mathbf{E}$ для s-поляризованої хвилі. Чому рівність частот $\omega = \omega' = \omega''$ означає незмінність кольору світла при відбиванні й заломленні?

17 Чому закони геометричної оптики (відбивання й заломлення) вважають прямим наслідком граничних умов для електромагнітного поля, а не окремим постулатом?

18 Запишіть формули Френеля для s-поляризації. Що вони визначають?

19 Запишіть формули Френеля для p-поляризації. Що таке кут Брюстера і чому за цієї умови відбите світло виявляється повністю s-поляризованим?

20 Що таке граничний кут повного внутрішнього відбивання? Виведіть умову $\sin i_b = n_2/n_1$ і поясніть, чому вона можлива лише при переході з оптично густішого середовища в менш густе.

21 Що відбувається з полем у другому середовищі при куті падіння, більшому за граничний? Виведіть вигляд згасаючої (evanescent) хвилі та поясніть, чому вона не переносить енергії в середньому вглиб середовища.

22 Що таке коефіцієнт відбивання за інтенсивністю? Чому дорівнює він при нормальному падінні на межу двох діелектриків і чому кожна непросвітлена скляна поверхня втрачає кілька відсотків світла?

23 Чому відношення сили світлового тиску до сили гравітації для пилинки в полі Сонця не залежить від відстані до нього і від чого воно залежить?

24 Що таке порушене повне внутрішнє відбивання? Чому його легше спостерігати для радіохвиль, ніж для видимого світла?

17 Випромінювання електромагнітних хвиль

Погляд, який я наважуюся висловити, розглядає випромінювання як вищий різновид коливань у силових лініях, що, як відомо, зв'язують між собою частинки, а також маси речовини.

Майкл Фарадей, «Думки про променеві коливання» (1846)

Ми розглянули основні властивості електромагнітних хвиль: їхню природу й закономірності поширення. Проте залишається ключове питання: як саме виникають ці хвилі?

17.1. Історична довідка: досліди Герца

У 1888 році Генріх Герц[1] уперше експериментально отримав електромагнітні хвилі. У його досліді джерелом випромінювання слугував так званий *вібратор Герца* — прямолінійний провідник із невеликим повітряним проміжком посередині (рис. 17.1). Завдяки цьому проміжку двом половинам вібратора можна було надати значних зарядів: коли різниця потенціалів сягала граничного значення, у повітряному зазорі відбувався пробій (проскакувала іскра), і заряди через іонізоване повітря перетікали з однієї половини вібратора на іншу — в такому *відкритому контурі* виникали електромагнітні коливання. Щоб швидкозмінні струми існували лише у вібраторі й не замикалися через джерело живлення, між вібратором і джерелом вмикали *дроселі*. Високочастотні коливання існують, поки іскра замикає проміжок; загасання ж їх від-

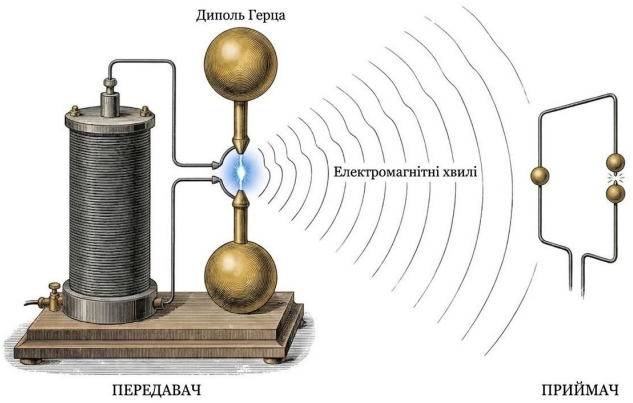


Рис. 17.1. Вібратор Герца.

[1] Генріх Рудольф Герц (1857–1894) — німецький фізик.

бувається в основному не шляхом джоулевих втрат (як у закритому коливальному контурі), а шляхом *випромінювання електромагнітних хвиль*.

Для виявлення хвиль Герц застосовував другий (*приймальний*) вібратор. Під дією змінного електричного поля хвилі, що надходить від випромінювача, електрони в приймальному вібраторі здійснюють вимушені коливання — у ньому збуджується швидкозмінний струм. Якщо розміри приймального вібратора такі самі, як і в випромінювального, то частоти власних коливань у них збігаються, і вимушені коливання внаслідок *резонансу* досягають помітної величини. Ці коливання Герц реєстрував по проскакуванню іскри в мікроскопічному зазорі посередині приймального вібратора або по свіченню мініатюрної газорозрядної трубки, увімкненої між його половинами.

Герц не лише експериментально довів існування електромагнітних хвиль, а й уперше почав вивчати їхні властивості — поглинання й заломлення в різних середовищах, відбивання від металевих поверхонь тощо. На досліді вдалося також виміряти довжину хвилі й оцінити швидкість електромагнітних хвиль, яка виявилася рівною швидкості світла. Так було експериментально підтверджено *електромагнітну теорію світла*, яку Максвелл запропонував ще 1865 р. (розділ 16).

> **!** *Електромагнітна хвиля існує* без джерел поля *в тому сенсі, що після її випромінювання електромагнітне поле хвилі вже не пов'язане з джерелом. Саме цим електромагнітна хвиля відрізняється від статичних електричного й магнітного полів, які не існують у відриві від джерела.*

17.2. Елементарна модель випромінювання

Якісна картина. Розглянемо електричне поле точкового заряду q. У стані спокою це звичайне електростатичне поле з радіальними силовими лініями. Нехай у момент $t = 0$ заряд під дією зовнішньої сили починає рухатися з прискоренням a, а через невеликий час τ дія сили припиняється, після чого заряд рухається рівномірно зі швидкістю $v_q = a\tau$ (рис. 17.2); нехай $v_q \ll c$, а τ дуже мале порівняно з часом спостереження T.

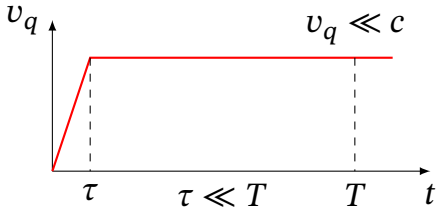


Рис. 17.2. Швидкість заряду: короткий імпульс прискорення тривалістю τ, після якого заряд рухається рівномірно

Оскільки збурення поля поширюється не миттєво, а зі швидкістю світла c, різні спостерігачі дізнаються про прискорення заряду в різний момент часу. Нехай пройшов час $T \gg \tau$ (рис. 17.3):

- *Зовнішній спостерігач* (на відстані, більшій за cT) іще нічого не знає про рух заряду: сигнал про початок руху до нього не встиг дійти, і він бачить поле нерухомого заряду в його *початковому* положенні.
- *Внутрішній спостерігач* (на відстані, меншій за $c(T-\tau)$) уже знає, що прискорення закінчилось і заряд рухається рівномірно, — він бачить поле рівномірно рухомого заряду в його *поточному* положенні.
- У проміжній *тонкій сферичній оболонці* товщиною $c\tau$ — *області випромінювання* — силові лінії поля мусять «зшивати» ці два різні поля, утворюючи характерний *злам*.

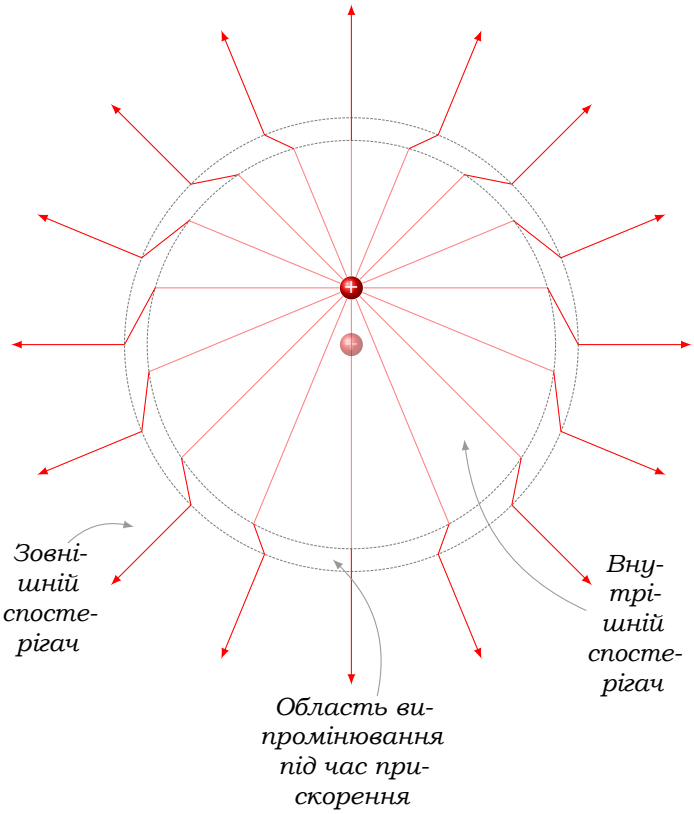


Рис. 17.3. Зламані силові лінії поля короткочасно прискореного заряду: межа між «старим» і «новим» полем

! *Саме цей злам силових ліній і є, по суті, електромагнітна хвиля, що «відірвалась» від заряду й розповсюджується самостійно. Оскільки лінії неперервні (теорема Гаусса), вони не можуть обірватись на межі — і саме необхідність «зшити» два різні поля без розриву ліній породжує додаткову,* поперечну *складову поля, якої немає ні в чисто електростатичному, ні в чисто «рівномірно-рухомому» полі окремо.*

Математичне виведення поля випромінювання. Розглянемо детальніше злам силової лінії, що виходила з заряду під кутом θ до напряму його прискорення (рис. 17.4). Нехай спостереження ведеться в момент $T = r/c$ (де r — відстань до точки спостереження), тобто поле, яке зараз «на підході», — це поле, випромінене в момент $T - \tau$. Розкладемо поле $\mathbf{E}$ у зламі на *радіальну* (поздовжню) складову $E_\parallel$ і *поперечну* складову $E_\perp$.

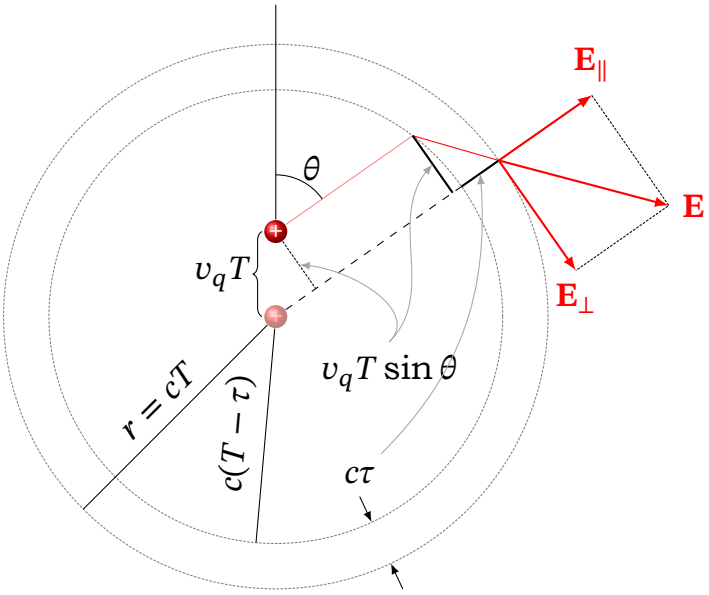


Рис. 17.4. Геометрія зламу силової лінії: розкладання поля на поздовжню $E_\parallel$ і поперечну $E_\perp$ складові

Із подібності трикутників (побудованих на бічних сторонах зламу) випливає:

$$\frac{E_\perp}{E_\parallel} = \frac{\upsilon_q T \sin\theta}{c\tau}. \qquad (17.1)$$

Поздовжня складова — це просто (майже незмінене) кулонівське поле заряду на відстані $r = cT$ (у гауссовій системі одиниць):

$$E_\parallel = \frac{q}{(cT)^2} \overset{r=cT}{=} \frac{q}{(cT)\,r}. \qquad (17.2)$$

Оскільки прискорення $a = v_q/\tau$, підставляючи в (17.1) і (17.2):

$$E_\perp(t) = \frac{q}{(cT)\,r} \cdot \frac{v_q T \sin\theta}{c\tau} = \frac{1}{c^2}\frac{q}{r}\, a \,\sin\theta, \tag{17.3}$$

де прискорення потрібно брати саме в той момент, коли воно й породило спостережуваний зараз злам, тобто в момент $t - r/c$:

$$\boxed{E_\perp(t) = \frac{1}{c^2}\frac{q}{r}\, a\Big(t - \frac{r}{c}\Big)\sin\theta.} \tag{17.4}$$

Формула (17.4) містить дві ключові риси *будь-якого* випромінювання, які ми надалі зустрічатимемо знову й знову:

1. Напруженість поля *хвилі* $E_\perp$ спадає як $1/r$, на відміну від електростатичного поля $E_\parallel \propto 1/r^2$. Це узгоджується із законом збереження енергії: енергія хвилі розподіляється по поверхні сфери ($\propto r^2$), а густина енергії $\propto E^2$, тому $E^2 \cdot r^2 = \text{const} \Rightarrow E \propto 1/r$.
2. $E_\perp$ у момент часу t визначається прискоренням заряду a не в цей самий момент, а в *більш ранній* момент $t - r/c$ — *час запізнення*, потрібний хвилі, щоб дістатися точки спостереження на відстані r.

Випромінювання осцилюючого заряду. Нехай тепер заряд q не просто короткочасно прискорюється, а весь час рухається вздовж прямої зі змінним прискоренням $a(t)$ поблизу початку координат — наприклад, здійснює гармонічні коливання. Тоді він випромінює електромагнітні хвилі *неперервно*, і напруженість поля випромінювання в точці на відстані r від початку координат, як і раніше, визначається формулою (17.4), але тепер прискорення потрібно брати в більш ранній момент $t - r/c$:

$$E_\perp(t) = \frac{1}{c^2}\frac{q}{r}\, a\Big(t - \frac{r}{c}\Big)\sin\theta. \tag{17.5}$$

Нехай, зокрема, заряд здійснює гармонічні коливання з амплітудою A і частотою ω:

$$x(t) = A\cos\omega t, \qquad a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 A\cos\omega t.$$

Підставляючи це прискорення у (17.5), отримуємо

$$\boxed{E_\perp(t) = -\frac{q\omega^2 A}{c^2 r}\,\cos\omega\Big(t - \frac{r}{c}\Big)\sin\theta.} \tag{17.6}$$

Отже, поле в кожній точці простору гармонічно коливається з тією самою частотою ω: *осцилюючий заряд випромінює монохроматичну*

хвилю. Формула (17.6) справедлива на відстанях r, великих порівняно з амплітудою коливань A (і, звісно, за умови $v \ll c$).

! Монопольного випромінювання не існує! *Ізольований заряд не може «пульсувати» (породжувати хвилю), бо це порушило б закон збереження заряду. Але тоді виникає питання: як же тоді випромінює* один *заряд, що коливається? Відповідь: коли заряд коливається біля певного «центра», він фактично утворює* диполь *із цим центром — і саме дипольний момент системи й визначає випромінювання. Тому найпростішою системою, здатною ефективно випромінювати, є* електричний диполь *зі змінним у часі дипольним моментом. До нього ми й переходимо.*

17.3. Дипольне випромінювання

Диполь як елементарний випромінювач. Розглянемо електронейтральну систему з двох зарядів $+q$ і $-q$, з яких додатний — нескінченно важкий (і тому нерухомий), а від'ємний вільно рухається (рис. 17.5). Дипольний момент такої системи та його друга похідна за часом:

$$\mathbf{p} = -q\mathbf{r}', \qquad \ddot{\mathbf{p}} = -q\dot{\mathbf{v}},$$

де $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}'$ — швидкість заряду, а $\dot{\mathbf{v}}$ — його прискорення.

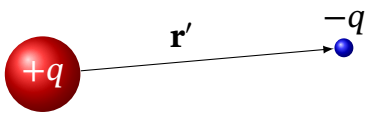


Рис. 17.5. Найпростіша модель диполя: важкий нерухомий заряд $+q$ і легкий рухомий $-q$

Про запізнюючі потенціали (коротко). Строге виведення полів диполя спирається на розв'язання рівнянь Максвелла через електромагнітні потенціали φ, $\mathbf{A}$ у калібруванні Лоренца, що приводить до неоднорідного хвильового рівняння Даламбера з розв'язками у вигляді *запізнюючих потенціалів*:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\int\limits_{V'} \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \dfrac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \qquad \varphi(\mathbf{r},t) = \int\limits_{V'} \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \dfrac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Ці потенціали називають *запізнюючими*, бо поле в точці $\mathbf{r}$ у момент t визначається не миттєвим розподілом зарядів і струмів, а

їхнім станом у *попередній* момент часу $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ — з урахуванням скінченної швидкості поширення поля. Формально рівняння Даламбера допускають і другий розв'язок, зі знаком «+» в аргументі (*випереджувальні потенціали*), — але він не має ясного фізичного сенсу (поле випереджало б причину, яка його породжує) і відкидається на основі *причинності*. Розкладаючи ці інтеграли в ряд для випадку $r \gg r'$ (система набагато менша за відстань до спостерігача) і нерелятивістських швидкостей зарядів ($v \ll c$), можна довести, що головний член розкладу визначається виключно *дипольним моментом* системи $\mathbf{p}(t - r/c)$ — це й строго обґрунтовує, чому диполь є найпростішим (і найважливішим) елементарним випромінювачем; наступні члени розкладу відповідають магнітно-дипольному, електрично-квадрупольному й вищим типам випромінювання, зазвичай значно слабшим за дипольне.

Поля диполя: ближня й хвильова зони. Нехай дипольний момент змінюється гармонічно, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \cos \omega t$. Точне вираження полів (у сферичних координатах, з віссю z уздовж $\mathbf{p}_0$) містить доданки різного порядку за $1/r$, і його зручно аналізувати окремо у двох граничних випадках.

Ближня зона. Відстань від осцилятора до точки спостереження мала порівняно з довжиною хвилі:

$$r \ll \frac{\lambda}{2\pi}. \tag{17.7}$$

Тут електричне поле в кожен момент часу t практично збігається з полем *статичного* диполя, момент якого дорівнює миттєвому значенню $p(t)$:

$$E_r = \frac{2\cos\theta\, p(t)}{r^3}, \qquad E_\theta = \frac{\sin\theta\, p(t)}{r^3}, \tag{17.8}$$

а магнітне поле, оскільки $\dot{p}(t) = Il$ (де I — еквівалентний струм, l — довжина еквівалентного елемента струму), збігається з квазістатичним полем цього елемента струму за законом Біо–Савара–Лапласа:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{cr^3}\,[\dot{\mathbf{p}}(t) \times \mathbf{r}]\,. \tag{17.9}$$

У ближній зоні поля *не запізнюються* (запізнення $r/c \ll T = 2\pi/\omega$ — мізерне порівняно з періодом коливань) і практично збігаються з полями відповідного статичного диполя й елемента струму — випромінювання тут ще «не встигло сформуватися».

Хвильова зона. Відстань, набагато більша за довжину хвилі:

$$r \gg \frac{\lambda}{2\pi}. \tag{17.10}$$

Тут (рис. 17.6) залишаються лише члени, що спадають як $1/r$ (решта — швидше, і на великих відстанях нехтовно малі):

$$\boxed{E_\theta = B_\varphi = \frac{\sin\theta}{c^2 r}\,\ddot{p}\Big(t - \frac{r}{c}\Big), \qquad E_r = E_\varphi = B_r = B_\theta = 0.} \tag{17.11}$$

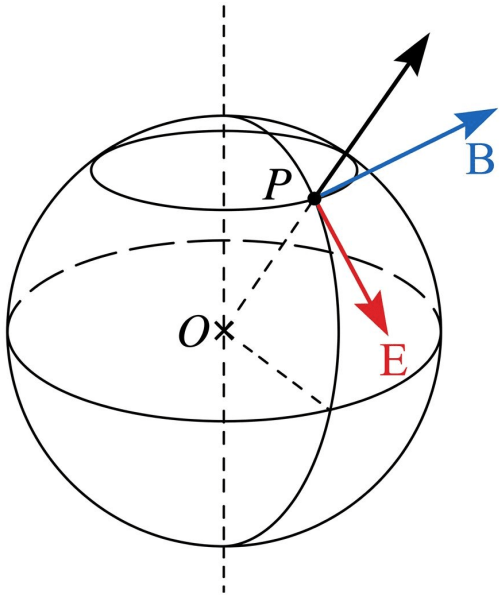


Рис. 17.6. Поля E_θ і B_φ у хвильовій зоні диполя

У хвильовій зоні поля **E** і **B** поперечні, чисельно рівні одне одному й спадають як $1/r$ — точнісінько ті самі риси плоскої електромагнітної хвилі (розділ 16). Крім того, поле залежить від полярного кута θ: на осі диполя ($\theta = 0, \pi$) поле дорівнює нулю, максимуму ж воно сягає в екваторіальній площині ($\theta = \pi/2$) — *диполь не випромінює вздовж власної осі*. У кожній точці хвильової зони вектори **E**, **B** і **r** взаємно перпендикулярні й утворюють правовинтову трійку.

Формула (17.11) — *загальна*: вона описує випромінювання будь-якого диполя з довільним законом зміни моменту $p(t)$. Зокрема, для гармонічного осцилятора $p(t) = p_0 \cos\omega t$ вона дає

$$E_\theta = -\frac{p_0\omega^2}{c^2 r}\cos\omega\Big(t - \frac{r}{c}\Big)\sin\theta,$$

що з точністю до позначень ($p_0 = qA$) збігається з формулою (17.6), отриманою вище для осцилюючого заряду. Отже, *осцилюючий заряд є частковим випадком диполя* — і загальна теорія дипольного випромінювання природно узагальнює результати попереднього розділу (рис. 17.7).

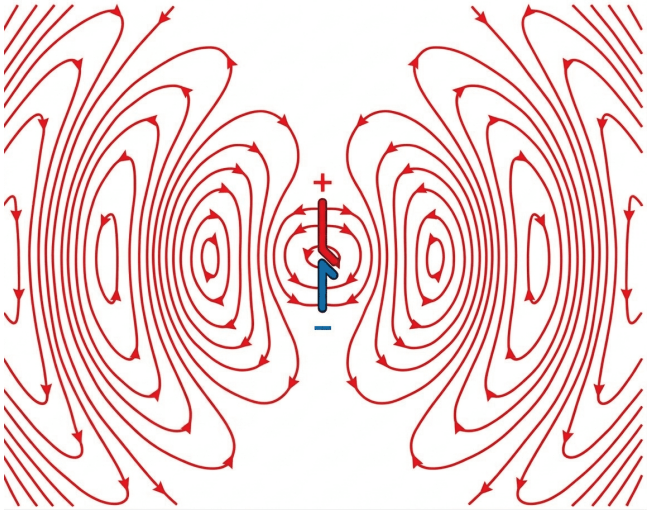


Рис. 17.7. Електричне поле осцилюючого диполя: у ближній зоні поле ніби «причеплене» до диполя, у хвильовій — випромінюється

Діаграма спрямованості. Кутову залежність інтенсивності випромінювання диполя ($\propto \sin^2\theta$) зручно зображати *полярною діаграмою спрямованості* (рис. 17.8): довжина відрізка від початку координат до кривої в напрямку θ дорівнює величині поля (чи інтенсивності) у цьому напрямку.

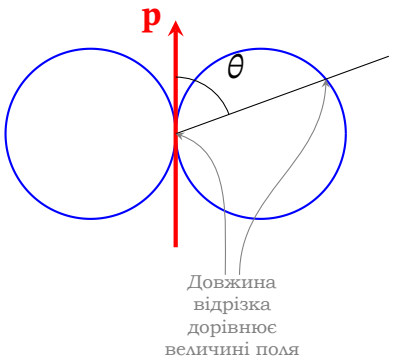


Рис. 17.8. Полярна діаграма спрямованості дипольного випромінювача: характерна форма «бублика»

Поляризація випромінювання. З формули (17.11) видно, що у хвильовій зоні відмінна від нуля лише *одна* компонента електричного поля — E_θ: вектор **E** у кожній точці простору лежить у площині, що проходить через вісь диполя (напрямок **p**) і напрямок спостереження **r**. Оскільки ця площина для заданого напрямку спостереження не змінюється з часом (диполь коливається вздовж фіксованої осі), випромінена хвиля виявляється *лінійно поляризованою*: вектор **E** у кожній точці простору коливається вздовж однієї й тієї самої прямої, а не обертається й не описує еліпс. Це не просто математична деталь: саме завдяки лінійній поляризації дипольного випромінювання приймальні антени ефективно вловлюють сигнал лише тоді, коли їх зорієнтовано *вздовж* площини коливань поля хвилі (детальніше — нижче), а поляризаційні світлофільтри здатні пропускати чи затримувати світло певної поляризації (детальніше про поляризацію — розділ 16).

17.4. Потужність випромінювання осцилятора

Густина потоку електромагнітної енергії характеризується вектором Пойнтінга **П** (розділ 14); потік енергії крізь поверхню сфери радіуса r, що оточує осцилятор, і називають *потужністю випромінювання*. Елемент площі сфери в сферичних координатах $d\sigma = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, тому, підставляючи поля хвильової зони (17.11) у $\Pi = \frac{c}{4\pi} EB = \frac{c}{4\pi} E^2$:

$$\frac{dW}{dt} = \oint_\sigma \Pi\, d\sigma = \frac{c}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left[\frac{\sin\theta}{c^2 r}\, \ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]^2 r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{\ddot{p}^2\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi c^3} \cdot 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta. \quad (17.12)$$

Оскільки $\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta = \frac{4}{3}$, отримуємо

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = \frac{2\ddot{p}^2\left(t - \frac{r}{c}\right)}{3c^3}.} \quad (17.13)$$

Тут $\ddot{p}$ — друга похідна дипольного моменту за часом (тобто «прискорення» дипольного моменту). Для гармонічного осцилятора $p = p_0 \cos\omega t$, $\ddot{p} = -\omega^2 p_0 \cos\omega t$, і, усереднюючи за період ($\langle\cos^2\rangle = 1/2$):

$$\boxed{\left\langle\frac{dW}{dt}\right\rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{3c^3}.} \quad (17.14)$$

Середня потужність випромінювання осцилятора пропорційна квадрату амплітуди дипольного моменту p_0 і — значно різкіше — *четвертому степені частоти* ω. Тому ефективно випромінюють лише досить швидкі коливання: проводи зі струмом промислової частоти 50 Гц (довжина хвилі 6000 км) практично нічого не випромінюють, а для радіозв'язку використовують частоти від сотень кілогерц і вище (довжини хвиль від кілометрів до сантиметрів), коли розміри антени можна зробити порівнянними з довжиною хвилі. Реальні радіоантени часто мають розмір порядку половини дов-



Рис. 17.9. Реальна півхвильова дипольна антена

жини хвилі — саме такі *півхвильові диполі* (рис. 17.9) найефективніше випромінюють і приймають електромагнітні хвилі.

Розсіювання світла: чому небо блакитне. Тим же характером залежності випромінювання осцилятора від частоти пояснюється, зокрема, і блакитний колір неба (рис. 17.10). Сонячне світло, що пронизує атмосферу, розсіюється молекулами повітря, які можна вважати елементарними осциляторами: під впливом світлової хвилі вони здійснюють *вимушені* коливання. Оскільки період власних коливань цих молекул істотно відрізняється від періоду видимого світла (резонанс відсутній), амплітуда вимушених коливань слабко залежить від частоти хвилі, тому інтенсивність розсіяного світла, тобто інтенсивність випромінювання цих вимушених осциляторів, за формулою (17.14), обернено пропорційна λ^4 (позаяк $\omega \propto 1/\lambda$). Тому короткохвильове (синє) світло розсіюється значно сильніше, ніж довгохвильове (червоне), — і небо здається блакитним.

Та сама залежність $\propto 1/\lambda^4$ пояснює і, на перший погляд, протилежне явище — *червоне Сонце на заході*. Коли Сонце стоїть низько над горизонтом, його промені, перш ніж дістатися ока спостерігача, проходять крізь *набагато товщий* шар атмосфери, ніж опівдні. Синя й фіолетова складові світла, розсіюючись найсильніше, встигають майже повністю «вибути» з прямого пучка вздовж цього довгого шляху (розсіюючись убік — це і є та сама блакить, яку ми бачимо, дивлячись не на Сонце, а в інший бік неба); до ока ж у прямому напрямку доходить переважно те, що лишилося в пучку, — довгохвильове, червоно-жовтогаряче світло. Отже, блакитне небо вдень і червоне Сонце на заході — два прояви однієї й тієї самої фізики *релеївського розсіювання*: розсіяне вбік світло — блакитне, послаблений розсіюванням прямий пучок — червоний.



Рис. 17.10. Розсіювання сонячного світла молекулами атмосфери — причина блакитного кольору неба

Опір випромінювання. З погляду генератора, що живить антену змінним струмом, випромінена антеною енергія — це енергія, яка *безповоротно* йде з кола, точнісінько так само, як і енергія, що розсіюється на звичайному омічному опорі. Тому в теорії кіл зручно формально ввести *опір випромінювання* $R_{\text{вип}}$ — такий еквівалентний опір, що виділяв би в собі ту саму середню потужність $\langle dW/dt \rangle$ при

тому самому амплітудному струмі I_0 в антені, який реально в ній тече:

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle \equiv \frac{1}{2} I_0^2 R_{\text{вип}}.$$

Це дозволяє формально врахувати випромінювання нарівні зі звичайними тепловими втратами при розрахунку електричних кіл антен, хоча фізична природа цих «втрат» зовсім інша: енергія не переходить у тепло всередині самої антени, а назавжди йде з нею у вигляді електромагнітної хвилі. Той самий півхвильовий диполь чудово працює й у зворотному режимі — як приймальна антена. Характеристики антени — діаграма спрямованості й поляризаційні властивості — однакові й для передавання, і для приймання.

17.5. Випромінювання рухомого заряду

Скориставшись моделлю «важкий $+q$ — легкий рухомий $-q$» (див. рис. 17.5) і формулою (17.13), підставимо $\ddot{\mathbf{p}} = -q\dot{\mathbf{v}}$:

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3}\dot{\mathbf{v}}^2.} \qquad (17.15)$$

Тут $\dot{\mathbf{v}}$ — прискорення заряду (друга похідна його радіус-вектора за часом). Формулу (17.15) називають *формулою Лармора*.

! *Формула* (17.15) *— один із найважливіших результатів класичної електродинаміки:* будь-який *заряд, що рухається з прискоренням, неминуче випромінює електромагнітну енергію, причому втрачена потужність залежить* лише *від заряду й миттєвого прискорення — і зовсім не залежить від того, чому саме заряд прискорюється (електричне поле, магнітне поле, механічний поштовх). Заряд, що рухається* рівномірно *й прямолінійно (*$\dot{\mathbf{v}} = 0$*), не випромінює взагалі — випромінює лише* прискорений *заряд.*

Гальмівне випромінювання. Різке гальмування швидких заряджених частинок — поширений і технологічно важливий прояв формули Лармора, який називають *гальмівним випромінюванням* (нім. *Bremsstrahlung*). Саме на ньому ґрунтується робота рентгенівської трубки: пучок електронів, розігнаний високою напругою (десятки кіловольт), влучає в металевий анод і різко (за час прольоту відстані порядку розміру атома) гальмується електричним полем атомних ядер речовини анода. За формулою (17.15) таке величезне (від'ємне) прискорення неминуче супроводжується випромінюванням; оскільки різні електрони пучка гальмуються по-різному — одні зупиняються

практично одразу в одному зіткненні, інші — поступово, за кілька послідовних зіткнень, віддаючи енергію частинами, — випромінювання виходить не на одній частоті, а суцільним спектром. Саме так рентгенівські трубки й отримують потрібне для медичної діагностики, дефектоскопії металів та рентгеноструктурного аналізу випромінювання.

Синхротронне випромінювання. Той самий принцип — прискорено рухомий по коловій траєкторії заряд неминуче випромінює — працює не лише для кулонівського притягання, а й для руху заряджених частинок по колу в магнітному полі (де прискорення забезпечує сила Лоренца, а не кулонівська сила). На цьому явищі, яке називають *синхротронним випромінюванням*, ґрунтується робота потужних лабораторних джерел рентгенівського й ультрафіолетового випромінювання (синхротронів) для дослідження речовини й матеріалів; водночас воно ж — головне джерело небажаних втрат енергії в кільцевих прискорювачах заряджених частинок. Оскільки втрати різко зростають зі зменшенням маси частинки, для легких, ультрарелятивістських електронів синхротронні втрати на коловій орбіті стають катастрофічними: саме вони обмежили енергію найбільшого кільцевого електрон-позитронного колайдера LEP (близько 100 ГеВ на пучок), тому для вищих енергій електронів проєктують *лінійні* прискорювачі, тоді як важчі протони у Великому адронному колайдері прискорюють по кільцю до 7 ТеВ.

Стабільність атома: класична суперечність. Формула Лармора має й драматичний історичний наслідок: електрон, що обертається по коловій орбіті навколо ядра (як у класичній «планетарній» моделі атома Резерфорда), рухається з доцентровим прискоренням, а отже, за (17.15), *неминуче випромінює* й безперервно втрачає енергію. Оцінка (задача 17.4) показує, що класичний електрон мав би *впасти на ядро* за час порядку 10^{-11} с — атоми в такій моделі просто не могли б бути стабільними!

Суперечність між класичною електродинамікою й спостережуваною стабільністю атомів стала одним з головних поштовхів до створення квантової механіки: М. Бор 1913 р. був змушений постулювати, що на деяких («стаціонарних») орбітах електрон *всупереч* класичній електродинаміці не випромінює — цей постулат, який не мав жодного пояснення в межах класичної фізики, згодом отримав строге обґрунтування вже в повній квантовій теорії.

Реакція випромінювання і парадокси самодії. Формула (17.15) описує втрату енергії, але не пояснює, *як саме* заряд «відчуває» цю втрату. Якщо заряд випромінює, то на нього має діяти додаткова сила з боку його власного поля — *сила реакції випромінювання* (самодія). У класичній електродинаміці її записують у вигляді формули Абрагама–Лоренца:

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{2q^2}{3c^3}\,\ddot{\mathbf{v}}. \tag{17.16}$$

Тут $\ddot{\mathbf{v}}$ — *третя* похідна радіус-вектора заряду за часом (похідна прискорення, його «ривок»). Через це рівняння руху заряду з урахуванням (17.16) стає диференціальним рівнянням *третього* порядку — і саме звідси виникають класичні парадокси.

! *Рівняння з третьою похідною має, крім фізичних, два неприйнятні типи розв'язків:*

- самочинний розгін *(runaway): заряд без зовнішніх сил експоненційно збільшує прискорення, тобто енергія нібито береться «нізвідки»;*
- передприскорення *(pre-acceleration): заряд починає реагувати на силу ще до того, як вона ввімкнулася, що в наївному вигляді порушує причинність.*

До цього додається проблема точкового заряду: його власна енергія розбігається, і коректне віднімання нескінченностей вимагає перенормування. У межах класичної електродинаміки ці труднощі так і не були остаточно подолані — вони стали одним із кроків до квантової електродинаміки, де реакція випромінювання описується випромінюванням реальних фотонів та обміном віртуальними.

Підсумки

Розділ про випромінювання підбиває важливий підсумок: *будь-який* прискорений заряд неминуче породжує хвилю, що назавжди йде від нього в навколишній простір, — а електромагнітне поле остаточно постає перед нами не як допоміжна математична конструкція для опису сил між зарядами, а як цілком самостійна, фізично реальна субстанція, здатна існувати, поширюватись і переносити енергію *без* будь-яких зарядів поблизу. Саме на цьому явищі — випромінюванні прискорених зарядів — ґрунтується вся радіотехніка, вся астрофізика випромінювання зір і туманностей, і, зрештою, саме воно — а не якийсь окремий, спеціально влаштований «носій світла» — відповідає за існування й поширення видимого світла в природі.

Задачі

17.1. Електромагнітна хвиля, що випромінюється диполем, поширюється у вакуумі так, що у хвильовій зоні на промені, перпендикулярному до осі диполя, на відстані r від нього середнє значення густини потоку енергії дорівнює $\langle \Pi \rangle$. Знайдіть середню потужність випромінювання диполя.

17.2. Сталий за модулем електричний дипольний момент $\mathbf{p}$ обертають з кутовою швидкістю ω навколо осі, перпендикулярної до осі диполя, що проходить через його середину. Знайдіть потужність випромінювання диполя.

17.3. Знайдіть потужність випромінювання нерелятивістської частинки із зарядом e і масою m, що рухається коловою орбітою радіуса R у полі нерухомого точкового заряду q.

17.4. *Падіння класичного електрона на ядро.* Електрон рухається навколо протона по коловій орбіті радіуса $a_0 = 0{,}53 \cdot 10^{-8}$ см і через випромінювання поступово втрачає енергію. Вважаючи, що в кожен момент орбіта колова, оцініть, за який час електрон упав би на ядро.

17.5. *Синє й червоне.* У скільки разів синє світло ($\lambda = 450$ нм) розсіюється молекулами повітря сильніше, ніж червоне ($\lambda = 700$ нм)?

17.6. *Опір випромінювання короткої антени.* Антена — прямий провідник довжиною $l = 1$ м, по якому тече (майже однаковий уздовж провідника) струм з амплітудою $I_0 = 1$ А і частотою 10 МГц. Знайдіть опір випромінювання й потужність випромінювання. *Вказівка:* амплітуда дипольного моменту $p_0 = I_0 l/\omega$ (бо $\dot{p} = Il$); 1 с/см $= 9 \cdot 10^{11}$ Ом.

17.7. *Синхротронні втрати електрона й протона.* Для ультрарелятивістської частинки на коловій орбіті потужність випромінювання в γ^4 разів більша за ларморівську, де $\gamma = W/mc^2$. У скільки разів потужність випромінювання електрона більша, ніж протона з тією самою енергією на орбіті того самого радіуса?

? Контрольні питання

1. У чому полягав дослід Герца 1888 р.? Як була влаштована установка з випромінювальним та приймальним вібраторами, і чому в приймачі виникає резонансний відгук?
2. Чим електромагнітна хвиля принципово відрізняється від статичних електричного й магнітного полів у сенсі зв'язку з джерелом?
3. Опишіть якісну картину випромінювання короткочасно прискореного заряду: чим відрізняється поле, яке бачить зовнішній спостерігач, від поля, яке бачить внутрішній, і що відбувається в проміжній сферичній оболонці товщиною $c\tau$?
4. Чому саме необхідність «зшити» без розриву силові лінії поля до й після прискорення заряду породжує додаткову поперечну складову поля?
5. Виведіть формулу поперечної складової поля випромінювання $E_\perp = \dfrac{q}{c^2 r}\, a(t - r/c)\sin\theta$, використовуючи подібність трикутників у зламі силової лінії.
6. Чому напруженість поля хвилі спадає як $1/r$, на відміну від електростатичного поля $\propto 1/r^2$? Як це узгоджується із законом збереження енергії?
7. Що таке час запізнення і чому поле випромінювання в момент t визначається прискоренням заряду не в цей самий момент, а в момент $t - r/c$?
8. Чому монопольного випромінювання не існує? Як ізольований коливний заряд, попри закон збереження заряду, все ж утворює випромінюючу систему — диполь?
9. Що таке запізнюючі потенціали і чим вони відрізняються від випереджувальних? Чому саме запізнюючий розв'язок відповідає фізичній причинності?
10. Чим поле диполя в ближній зоні ($r \ll \lambda/2\pi$) відрізняється від поля в хвильовій зоні ($r \gg \lambda/2\pi$)? Чому в ближній зоні поле практично збігається зі статичним полем диполя того самого моментального значення $p(t)$?
11. Запишіть поля хвильової зони диполя $E_\theta = B_\varphi = \sin\theta\, \ddot{p}(t - r/c)/(c^2 r)$. Які риси плоскої електромагнітної хвилі вони відтворюють? Чому диполь не випромінює вздовж власної осі?
12. Що таке діаграма спрямованості дипольного випромінювача? Чому вона має характерну форму «бублика», з максимумом в екваторіальній площині?

13 Чому випромінювання диполя виявляється лінійно поляризованим? Яке практичне значення це має для орієнтації приймальних антен?

14 Виведіть формулу миттєвої потужності дипольного випромінювання $dW/dt = 2\ddot{p}^2(t - r/c)/(3c^3)$, інтегруючи вектор Пойнтінга по сфері у хвильовій зоні.

15 Виведіть середню потужність випромінювання гармонічного осцилятора $\langle dW/dt\rangle = \omega^4 p_0^2/(3c^3)$. Чому саме різка залежність від четвертого степеня частоти пояснює перевагу коротких хвиль для ефективного радіовипромінювання?

16 Поясніть, чому небо блакитне, спираючись на залежність інтенсивності розсіяного світла $\propto 1/\lambda^4$. Як та сама залежність пояснює червоний колір Сонця на заході?

17 Що таке опір випромінювання антени? Чим фізична природа цих «втрат» відрізняється від звичайних омічних втрат, попри формальну схожість у розрахунку кіл?

18 Виведіть формулу Лармора $dW/dt = 2q^2\dot{\mathbf{v}}^2/(3c^3)$ для потужності випромінювання довільного прискореного заряду. Чому рівномірно рухомий заряд не випромінює взагалі?

19 Що таке гальмівне випромінювання (Bremsstrahlung)? Чому воно виходить не на одній частоті, а суцільним спектром, і як це використовується в рентгенівських трубках?

20 Що таке синхротронне випромінювання? Чому синхротронні втрати особливо катастрофічні для легких ультрарелятивістських частинок, і чому це змушує будувати найбільші прискорювачі електронів лінійними, а не кільцевими?

21 У чому полягає класична суперечність між формулою Лармора та стабільністю атома? Який історичний вихід із цієї суперечності запропонував Бор?

Частина VII

Електромагнітні коливання та хвилі в колах і хвилеводах

Коли ви можете виміряти те, про що говорите, і виразити це числами, ви дещо про це знаєте; коли ж ви не можете виразити це числами, ваше знання мізерне й незадовільне.

Вільям Томсон (лорд Кельвін), лекція «Електричні одиниці вимірювання» (1883)

18 Коливальні процеси в електричних колах

Однакові рівняння мають однакові розв'язки.

Р. Фейнман, «Фейнманівські лекції з фізики», т. 2, гл. 12 (1964)

Досі електричне і магнітне поле розглядалися переважно як самостійний фізичний об'єкт: ми записали рівняння Максвелла, з'ясували, що вони допускають розв'язки у вигляді електромагнітних хвиль, і простежили, як збурення поля поширюється в просторі зі скінченною швидкістю c. Проте є практично важливі задачі, де поле не поширюється у вільному просторі, а виявляється «замкненим» в електричному колі — системі провідників, конденсаторів і котушок, з'єднаних певним чином.

Виникає природне питання: чи можна описувати процеси в такому колі, не розв'язуючи щоразу повні рівняння Максвелла, а обмежившись значно простішими співвідношеннями — законом Ома, правилами Кірхгофа, формулами для заряду конденсатора чи струму в котушці? Виявляється, що так, — але лише за певної умови, яка й дозволяє знехтувати хвильовим (запізненим) характером поля всередині кола. Ця умова називається *квазістаціонарним наближенням*, і саме з неї ми розпочнемо вивчення коливальних процесів в електричних колах.

18.1. Квазістаціонарне наближення

Процес вважається *квазістаціонарним*, якщо миттєві значення струму в усіх ділянках провідника (нерозгалуженого кола) однакові, а електричні поля в конденсаторах такі самі, як в електростатиці.

Сформулюємо умову квазістаціонарності. По електричному колу поширюється електромагнітний сигнал, швидкість якого порядку швидкості світла. Якщо частота сигналу ω, то відповідна довжина хвилі порядку $\lambda = 2\pi c/\omega = cT$, де $T = 2\pi/\omega$ — характерний період

коливань або змін сигналу. Якщо довжина кола l така, що

$$l \ll \lambda, \qquad \text{або} \qquad l \ll cT, \tag{18.1}$$

то в усіх ділянках кола струми й напруги змінюються синхронно, в одній і тій самій фазі. Оскільки час проходження сигналом усього кола $\tau \sim l/c$, то умову квазістаціонарності можна записати у вигляді

$$\tau \ll T. \tag{18.2}$$

> **!** *Наскільки серйозна ця умова для звичної нам мережі 50 Гц? Довжина хвилі становить $\lambda = cT \approx 3 \times 10^8$ м/с $\cdot$ 0,02 с $\approx$ 6000 км. Для будинкової проводки чи навіть цілого заводу це запас у сотні тисяч разів — квазістаціонарність виконується з величезним надлишком. Але магістральна лінія електропередачі (ЛЕП) може тягнутися на сотні й тисячі кілометрів, тобто вже становити відчутну частку довжини хвилі мережі. Тоді просту схему з R, L, C доводиться замінювати повноцінною теорією довгих ліній, в якій напруга і струм у різних точках проводу зсунуті за фазою, як у хвилі, що біжить уздовж лінії. Саме тому надто довга лінія, розімкнута на одному кінці, може несподівано увійти в резонанс із частотою мережі — про це ще буде мова далі у цьому розділі.*

Далі ми розглядаємо саме квазістаціонарні процеси. Це означає, що ми нехтуємо скінченним часом поширення електромагнітної взаємодії вздовж кола й вважаємо, що струм і напруга встигають узгодитися по всьому колу в кожний момент часу. Іншими словами, коло описується не як система з розподіленими параметрами (довга лінія), а як система із зосередженими елементами — резисторами R, котушками L і конденсаторами C, з'єднаними ідеальними провідниками. Саме в межах цього наближення справедливі закон Ома, правила Кірхгофа та рівняння коливального контуру, тож усі подальші результати — вільні й вимушені коливання, змінний струм, резонанс — чинні лише тією мірою, якою виконується умова (18.2).

18.2. Вільні коливання в коливальному контурі

Рівняння коливального контуру. Нехай є електричне коло, що включає ємність (конденсатор) C, індуктивність L, опір R і стороннє джерело електрорушійної сили (ЕРС) $\mathscr{E}$ (рис. 18.1). Складемо рівняння, що визначає зміну струму в колі[1]. Застосуємо теорему про

[1] У цьому розділі всюди ми використовуємо систему одиниць СІ, в якій $\Phi = LI$, $\mathscr{E} = -d\Phi/dt$.

циркуляцію електричного поля до замкнутого контуру Γ = {12341}:

$$\oint\limits_{\{12341\}} E_l\, dl = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{18.3}$$

В праву частину цієї рівності входить ЕРС індукції, що виникає в котушці індуктивності при зміні магнітного потоку. Додатковий облік цього елемента кола в лівій частині рівності вже не потрібен. Будемо вважати також, що весь опір кола об'єднано в один елемент R. Виберемо за додатний напрямок обходу контуру той, що вказано на рис. 18.1 для струму I.

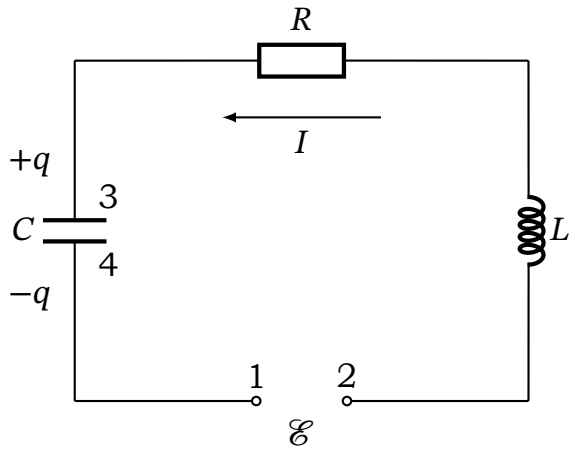


Рис. 18.1. Контур, що включає конденсатор, індуктивність, опір R і стороннє джерело ЕРС $\mathscr{E}$.

Виділимо тепер у циркуляції окремі ділянки, що містять по одному суттєвому елементу кола:

$$\oint\limits_{\{12341\}} E_l\, dl = \int\limits_{(12)} E_l\, dl + \int\limits_{(23)} E_l\, dl + \int\limits_{(34)} E_l\, dl + \int\limits_{(41)} E_l\, dl. \tag{18.4}$$

Доданок $\int\limits_{(41)} E_l\, dl = 0$, оскільки на цій ділянці немає елементів, що змінюють потенціал. Доданок

$$\int\limits_{(12)} E_l\, dl = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{18.5}$$

визначає зміну потенціалу на ділянці 12 і враховує стороннє джерело (стік) енергії — електрорушійну силу. ЕРС вводиться рівністю

$$\mathscr{E} = \varphi_2 - \varphi_1 \tag{18.6}$$

і дає *приріст* потенціалу при переході цього елемента.

Розглянемо ділянку контуру 23. На цій ділянці з не врахованих раніше елементів присутні тільки провідники з опором R, тому

$$\int\limits_{(23)} E_l\, dl = IR. \tag{18.7}$$

Ділянка контуру 34 містить конденсатор. Вважаємо, що на верхній пластині є заряд $(+q)$, а на нижній $(-q)$. Тоді струм у додатному напрямку пов'язаний із зарядом q співвідношенням $I = dq/dt$ і відповідає заряджанню верхньої пластини конденсатора. За означенням напруга на конденсаторі є $V = \varphi_3 - \varphi_4$. З урахуванням цього маємо

$$\int\limits_{(34)} E_l\, dl = \varphi_3 - \varphi_4 = V = \frac{q}{C}, \tag{18.8}$$

де введено ємність конденсатора $C = q/V$.

З урахуванням сказаного отримуємо

$$-\mathscr{E} + IR + \frac{q}{C} = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{18.9}$$

Перепишемо це рівняння, маючи на увазі зв'язок магнітного потоку і струму $\Phi = LI$:

$$\boxed{L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = \mathscr{E}.} \tag{18.10}$$

Рівняння вільних коливань. Нехай у замкненому колі, показаному на рис. 18.1, відсутнє джерело ЕРС. Тоді рівняння (18.10) набирає вигляду

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0. \tag{18.11}$$

Введемо позначення

$$2\gamma = \frac{R}{L}, \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \tag{18.12}$$

і врахуємо, що $I = dq/dt$. Тоді отримаємо таке рівняння:

$$\boxed{\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0.} \tag{18.13}$$

Це рівняння описує поведінку заряду на конденсаторі за відсутності сторонніх джерел енергії і називається *рівнянням вільних коливань*.

Гармонічні коливання. Нехай опір кола дорівнює нулю: $R = 0$. Тоді $\gamma = 0$, і ми приходимо до рівняння гармонічного осцилятора:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \tag{18.14}$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$q(t) = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{18.15}$$

Значення амплітуди q_m і початкової фази φ_0 коливань визначаються з початкових умов. Частота коливань є

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{18.16}$$

Відповідно період коливань дорівнює

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.} \tag{18.17}$$

Це співвідношення називається *формулою Томсона*.

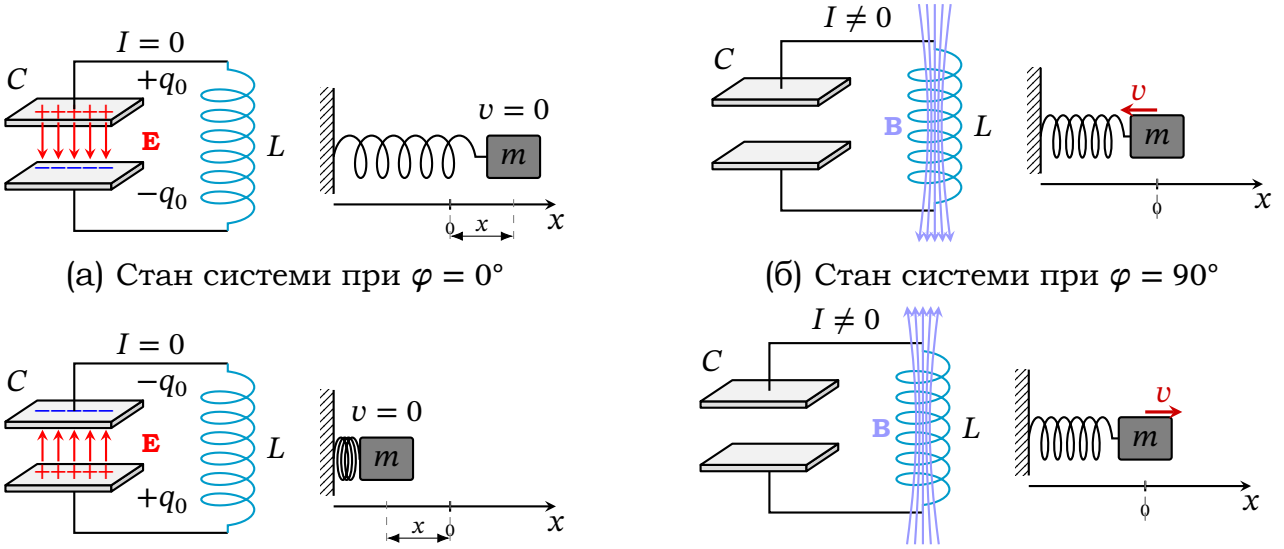
Система, що здійснює коливання, називається *осцилятором*. Осцилятор називається *гармонічним*, якщо коливання, які він здійснює, є гармонічними, тобто описуються формулою

$$q(t) = q_m \cos(\omega t + \varphi_0). \tag{18.18}$$

Величина q_m в цьому співвідношенні називається *амплітудою*, а аргумент косинуса $\varphi = \omega t + \varphi_0$ — *фазою коливань*.

Рівняння (18.14) тотожне за формою рівнянню руху пружинного маятника без тертя $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Це не випадковий збіг, а наслідок спільної структури обох систем: у кожній з них є «інерційний» елемент, що накопичує кінетичну енергію, і «пружний» елемент, що накопичує потенціальну енергію. Нижче наведено відповідність величин, яка допомагає переносити всі результати, отримані для контуру, на механічний осцилятор (і навпаки).

Коливальний контур	Пружинний маятник	Фізична роль
Заряд q	Зміщення x	Динамічна змінна
Струм $I = \dot{q}$	Швидкість $v = \dot{x}$	Швидкість зміни
Індуктивність L	Маса m	Інертність
$1/C$	Жорсткість k	Повертальна дія



(а) Стан системи при $\varphi = 0°$ (б) Стан системи при $\varphi = 90°$

(в) Стан системи при $\varphi = 180°$ (г) Стан системи при $\varphi = 270°$

Рис. 18.2. Фази коливань електричного та магнітного полів у коливальному контурі та координати пружинного маятника

Порівняння станів системи у чотирьох фазах коливань наведено на рис. 18.2.

Важливо усвідомити, що в контурі коливається не лише заряд на конденсаторі. Разом із зарядом періодично змінюються *обидва* поля: електричне поле в конденсаторі та магнітне поле в котушці. Ці поля відіграють ту саму роль, що потенціальна та кінетична енергія маятника. У фазі 0° конденсатор заряджений максимально, струм дорівнює нулю, і вся енергія зосереджена в електричному полі — це повний аналог маятника, відхиленого від рівноваги, коли вся енергія потенціальна. У фазі 90° конденсатор розряджений, струм максимальний, і енергія перейшла в магнітне поле котушки — аналог проходження маятником положення рівноваги з максимальною швидкістю, коли енергія суто кінетична. У фазах 180° і 270° картина повторюється з протилежним знаком: конденсатор перезаряджається, а струм змінює напрямок. Отже, вільні коливання в контурі — це періодичне взаємне перетворення енергій електричного та магнітного полів, точно так само, як коливання маятника — це періодичне перетворення потенціальної енергії пружини в кінетичну енергію тягарця.

Згасаючі коливання. Розглянемо загальний випадок рівняння вільних коливань

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \qquad (18.19)$$

Введемо комплекснозначну функцію $\hat{q}(t)$, таку, що $\operatorname{Re}\hat{q}(t) = q(t)$, і яка підпорядковується тому самому рівнянню, що й $q(t)$:

$$\frac{d^2\hat{q}}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\hat{q}}{dt} + \omega_0^2\hat{q} = 0. \tag{18.20}$$

Будемо шукати розв'язок у формі

$$\hat{q}(t) = q_m e^{i\Omega t}. \tag{18.21}$$

Підстановка цього виразу в (18.20) дає

$$\left[-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2\right]\hat{q} = 0, \tag{18.22}$$

що приводить до квадратного рівняння для Ω:

$$\Omega^2 - 2i\gamma\Omega - \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_{1,2} = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \tag{18.23}$$

Відповідно загальний розв'язок диференціального рівняння (18.20) є лінійною комбінацією частинних розв'язків, що відповідають двом кореням цього квадратного рівняння:

$$\hat{q}(t) = q_{10}e^{i\Omega_1 t} + q_{20}e^{i\Omega_2 t}. \tag{18.24}$$

Коефіцієнти q_{10} і q_{20} визначаються з початкових умов.

Розв'язок вихідного рівняння (18.13) є $q(t) = \operatorname{Re}\hat{q}(t)$.

Наведемо частинні випадки.

1) Слабке згасання: $\omega_0 > \gamma$.

Позначимо $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Тоді $\Omega_{1,2} = i\gamma \pm \omega$, і розв'язок можна переписати у вигляді

$$\hat{q}(t) = e^{-\gamma t}\left[q_{10}e^{i\omega t} + q_{20}e^{-i\omega t}\right]. \tag{18.25}$$

Маючи на увазі формулу Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{18.26}$$

і відділяючи дійсну частину $q(t) = \operatorname{Re}\hat{q}(t)$, отримаємо

$$q(t) = e^{-\gamma t}\left(a\cos\omega t + b\sin\omega t\right) = q_m e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi_0). \tag{18.27}$$

Розв'язок містить дві довільні сталі (a, b) або (q_m, φ_0). Ці пари констант пов'язані співвідношеннями

$$q_m = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{b}{a}. \tag{18.28}$$

2) Сильне згасання: $\omega_0 < \gamma$.

Позначимо $\Gamma = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$. Тоді $\Omega = i(\gamma \pm \Gamma)$, і розв'язок набирає вигляду

$$q(t) = e^{-\gamma t}\left[q_{10}e^{\Gamma t} + q_{20}e^{-\Gamma t}\right]. \tag{18.29}$$

3) Якщо $\omega_0 = \gamma$, то $\Omega_1 = \Omega_2$, і розв'язок вироджується:

$$q(t) = e^{-\gamma t}\,(C_1 + C_2 t) \tag{18.30}$$

(C_1 і C_2 — довільні сталі).

На рис. 18.3 показано графік згасаючих коливань. Такі коливання можна представляти як періодичні (гармонічні) коливання зі спадною амплітудою:

$$q(t) = A(t)\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad A(t) = q_m e^{-\gamma t}. \tag{18.31}$$

На цьому рисунку часова залежність амплітуди згасаючих коливань показана штриховою лінією.

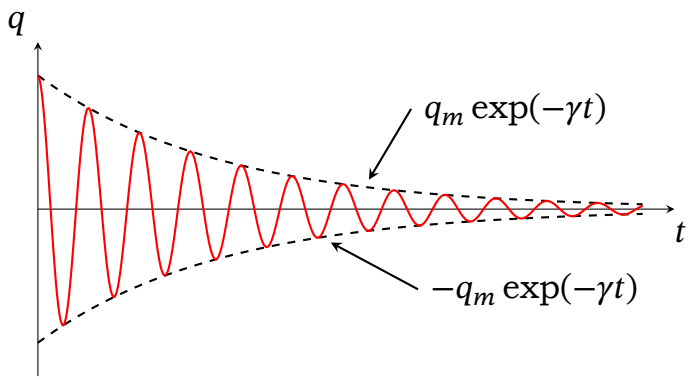


Рис. 18.3. Графік згасаючих коливань. Штриховою лінією показано часову залежність амплітуди $A(t) = q_m e^{-\gamma t}$.

Величина γ показує, з якою швидкістю зменшується амплітуда коливань $A(t) = q_m e^{-\gamma t}$, і називається *коефіцієнтом згасання*. Для LCR-контуру коефіцієнт згасання рівний $\gamma = R/2L$. Обернена величина $\tau = 1/\gamma$ називається *часом згасання*, і показує, за який час амплітуда коливань зменшується в e разів.

Закон збереження енергії. Запишемо диференціальне рівняння згасаючих коливань у такій формі:

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = -R\dot{q}. \tag{18.32}$$

Помножимо почленно це рівняння на $\dot{q}$ і врахуємо тотожності

$$\dot{q}\ddot{q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2\right), \qquad \dot{q}q = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}q^2\right). \tag{18.33}$$

Оскільки $\dot{q} = I$, то отримуємо рівність

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right) = -RI^2.} \tag{18.34}$$

Величина в дужках

$$W = W_L + W_C, \qquad W_L = \frac{LI^2}{2}, \qquad W_C = \frac{q^2}{2C} \tag{18.35}$$

є повна енергія контуру, запасена в котушці індуктивності (W_L) і в конденсаторі (W_C). Доданок у правій частині рівності ($-N = -RI^2$) описує, згідно із законом Джоуля–Ленца, втрати енергії. Таким чином, отримуємо

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = -N.} \tag{18.36}$$

Перетворення енергії в контурі без втрат. Якщо опір контуру дорівнює нулю, то втрати відсутні, $N = 0$, і енергія зберігається. При цьому заряд на конденсаторі і струм у колі змінюються за законом

$$q(t) = q_m \cos(\omega_0 t), \qquad I(t) = \dot{q}(t) = -I_m \sin(\omega_0 t) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right), \tag{18.37}$$

де введена амплітуда струму $I_m = \omega_0 q_m$. Звідси видно, що фази $q(t)$ і $I(t)$ зсунуті на $\pi/2$. Відповідно для доданків в енергії знаходимо:

$$W_L = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}\cos^2\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{LI_m^2}{2}\frac{1 - \cos(2\omega_0 t)}{2}, \tag{18.38}$$

$$W_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t) = \frac{q_m^2}{2C}\frac{1 + \cos(2\omega_0 t)}{2}. \tag{18.39}$$

Очевидно, що

$$\boxed{W_L + W_C = \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2} + \frac{q_m^2}{2C} = \text{const}.} \tag{18.40}$$

Крім того, в силу співвідношень $I_m = \omega_0 q_m$, $\omega_0^2 = 1/LC$ отримуємо

$$W_L^{(0)} = \frac{LI_m^2}{2} = \frac{L\omega_0^2}{2} q_m^2 = \frac{q_m^2}{2C} = W_C^{(0)}. \tag{18.41}$$

Таким чином, запаси енергії в котушці індуктивності і в конденсаторі здійснюють коливання з однаковою амплітудою, але в протифазі, причому періодично відбувається повне перекачування енергії з індуктивності в ємність і назад.

Якщо контур неідеальний ($R \neq 0$), то енергія втрачається. Максимальна швидкість втрат досягається в ті моменти, коли струм у колі максимальний, оскільки в ці моменти максимальні джоулеві втрати ($N = RI^2$).

Характеристики згасаючих коливань. Для кількісного опису згасаючих коливань використовують декілька взаємопов'язаних характеристик, кожна з яких описує згасання зі свого боку: через зменшення амплітуди, через втрати енергії, через час життя коливання тощо. Розглянемо основні з них.

Логарифмічний декремент згасання. Розглянемо згасаючі коливання (рис. 18.3):

$$q(t) = A(t)\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad A(t) = q_m e^{-\gamma t}. \tag{18.42}$$

Виберемо два послідовних максимуми: q_n, q_{n+1}. Величина

$$\boxed{\delta = \ln(q_n/q_{n+1})} \tag{18.43}$$

називається *логарифмічним декрементом*. Знайдемо явний вираз для δ.

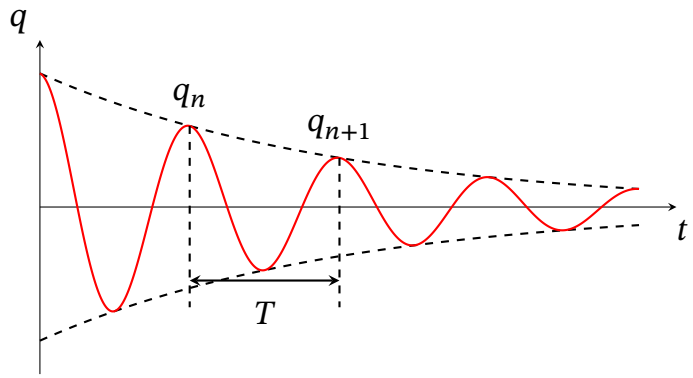


Рис. 18.4. Згасаючі коливання. До означення логарифмічного декремента.

Максимуми функції $q(t)$ визначаються з умови $\dot{q} = 0$. З виразу (18.42) знаходимо

$$\begin{aligned}\dot{q} &= q_m e^{-\gamma t}\left[-\gamma\cos(\omega t + \varphi_0) - \omega\sin(\omega t + \varphi_0)\right] = \\ &= -q_m\omega_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi_0 + \varphi_1).\end{aligned} \tag{18.44}$$

Додатковий доданок φ_1 у фазі такий, що

$$\cos\varphi_1 = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+\omega^2}} = \frac{\gamma}{\omega_0}, \tag{18.45}$$

$$\sin\varphi_1 = -\frac{\omega}{\sqrt{\gamma^2+\omega^2}} = -\frac{\omega}{\omega_0}. \tag{18.46}$$

Враховано також, що відповідно до означення величини ω виявляється $\sqrt{\gamma^2+\omega^2} = \omega_0$.

Покладемо $\dot{q} = 0$. Як видно з (18.44), проміжок часу між двома сусідніми максимумами становить

$$T = 2\pi/\omega \tag{18.47}$$

і дорівнює періоду коливань множника $\cos(\omega t + \varphi_0)$ у виразі для $q(t)$. Це означає, що згідно з (18.42)

$$\frac{q_n}{q_{n+1}} = \frac{A(t_n)}{A(t_{n+1})} = e^{\gamma T}, \tag{18.48}$$

звідки випливає вираз для логарифмічного декремента:

$$\delta = \gamma T = 2\pi\gamma/\omega. \tag{18.49}$$

У випадку слабкого згасання ($\gamma \ll \omega_0$) для LCR-контуру знаходимо:

$$\omega \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad \gamma = \frac{R}{2L} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{2\pi\gamma}{\omega} = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}}. \tag{18.50}$$

Смисл логарифмічного декремента такий. За характерний час згасання коливань $\tau = 1/\gamma$ осцилятор здійснить

$$n = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\gamma T} = \frac{1}{\delta} \tag{18.51}$$

коливань. Отже, $\delta = 1/n$.

Добротність коливальної системи. Величина $Q = \pi n$, або

$$\boxed{Q = \omega/2\gamma} \tag{18.52}$$

називається *добротністю* коливальної системи. Очевидний зв'язок добротності і логарифмічного декремента: $Q = \pi/\delta$. Для послідовного LCR-контуру зі слабким згасанням маємо

$$\boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.} \tag{18.53}$$

За період коливань амплітуда коливань заряду і струму зменшується в $e^{\gamma T}$ разів. При цьому згідно з (18.35) енергія системи зменшується як квадрат амплітуди, тобто в $e^{2\gamma T}$ разів. Це означає, що якщо на початку якогось періоду коливань в контурі запасена енергія $W(t)$, то до початку наступного циклу в системі залишається енергія $W(t+T) = e^{-2\gamma T}W(t)$. Втрати енергії за цикл становлять

$$\Delta W = W(t) - W(t+T) = \left(1 - e^{-2\gamma T}\right) W(t). \tag{18.54}$$

Вважаючи згасання слабким: $2\gamma T \ll 1$, отримуємо $\Delta W = 2\gamma T \cdot W(t)$. Звідси випливає

$$\boxed{\frac{W}{\Delta W} = \frac{1}{2\gamma T} = \frac{1}{2\pi}\frac{\omega}{2\gamma} = \frac{1}{2\pi}Q,} \tag{18.55}$$

що й визначає енергетичний смисл добротності Q. Останню формулу зазвичай записують у вигляді

$$\boxed{Q = 2\pi\frac{W}{\Delta W}.} \tag{18.56}$$

Цю формулу іноді приймають як означення добротності.

! *Добротність — це, по суті, спосіб виміряти, наскільки «дзвінкою» є коливальна система: скільки коливань вона встигне зробити, перш ніж розтратити запасену енергію. Величини Q для різних систем відрізняються на порядки. У звичайному LC-контурі з дроту й повітряного конденсатора добротність — це, як правило, кілька десятків чи сотень. У кварцового резонатора наручного годинника вона сягає 10^4–10^6, тому такий годинник і не поспішає та не запізнюється роками. А рекордсменами є надпровідні резонатори, які використовують у прискорювачах заряджених частинок: їхня добротність доходить до 10^9–10^{11} — електромагнітне поле в такому резонаторі «дзвенить», практично не втрачаючи енергії, мільярди періодів підряд.*

18.3. Вимушені коливання під дією гармонічної ЕРС

Рівняння вимушених коливань. Запишемо рівняння (18.10) для послідовного LCR-контуру за наявності ЕРС $\mathscr{E}$, що змінюється за гармонічним законом:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = \mathscr{E}(t), \qquad \mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_m \cos\omega t. \tag{18.57}$$

Переходячи від заряду на конденсаторі до напруги ($V = q/C$) і використовуючи введені раніше позначення (18.12) ($2\gamma = R/L$, $\omega_0^2 = 1/LC$), перепишемо це рівняння у вигляді

$$\ddot{V} + 2\gamma\dot{V} + \omega_0^2 V = \omega_0^2\mathscr{E}_m \cos\omega t. \tag{18.58}$$

! *Мати справу з гармонічними функціями не так просто; набагато зручніше працювати з експоненційними, які легко диференціювати й інтегрувати. Ключем, що пов'язує їх, є формула*

Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Нехай дійсна величина $x(t)$ здійснює гармонічні коливання:

$$x(t) = x_0\cos(\omega t + \varphi_0). \tag{18.59}$$

Введемо комплексну функцію

$$z(t) = z_0 e^{i\omega t}, \tag{18.60}$$

таку що $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$. Коефіцієнт z_0 називається комплексною амплітудою *величини x. У розглянутому прикладі*

$$z_0 = x_0 e^{i\varphi_0}. \tag{18.61}$$

Отже, комплексна амплітуда несе інформацію як про амплітуду x_0, так і про початкову фазу φ_0 коливання.

Нагадаємо, що будь-яке комплексне число $z = a + ib$ можна записати як $z = |z|e^{i\varphi}$, де $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ — модуль, а φ — фаза, що визначається як $\operatorname{tg}\varphi = b/a$; при цьому $\operatorname{Re} z = |z|\cos\varphi$. Саме ці співвідношення й лежать в основі комплексного представлення: амплітуда x_0 відіграє роль модуля, а початкова фаза φ_0 — роль фази комплексної амплітуди $z_0 = x_0 e^{i\varphi_0}$.

Далі, для розв'язання отриманого рівняння перейдемо до комплексного представлення коливань, поклавши

$$V(t) \to \hat{V}(t) = \operatorname{Re}\hat{V}(t) + i\operatorname{Im}\hat{V}(t), \qquad V(t) = \operatorname{Re}\hat{V}(t); \tag{18.62}$$

$$\mathscr{E}(t) \to \hat{\mathscr{E}}(t) = \mathscr{E}_m e^{i\omega t}, \qquad \mathscr{E}(t) = \operatorname{Re}\hat{\mathscr{E}}(t). \tag{18.63}$$

Тоді замість (18.58) будемо мати справу з рівнянням

$$\ddot{\hat{V}} + 2\gamma\dot{\hat{V}} + \omega_0^2\hat{V} = \omega_0^2\mathscr{E}_m e^{i\omega t}. \tag{18.64}$$

Розв'язок останнього рівняння будемо шукати у вигляді

$$\hat{V}(t) = \hat{V}_s(t) + \hat{V}_f(t), \tag{18.65}$$

де доданок $\hat{V}_s(t)$ описує вільні коливання («s» = *self*), а доданок $\hat{V}_f(t)$ — вимушені коливання («f» = *forced*):

$$\begin{cases} \ddot{\hat{V}}_s + 2\gamma\dot{\hat{V}}_s + \omega_0^2\hat{V}_s = 0, \\ \ddot{\hat{V}}_f + 2\gamma\dot{\hat{V}}_f + \omega_0^2\hat{V}_f = \omega_0^2\mathscr{E}_m e^{i\omega t}. \end{cases} \tag{18.66}$$

Якщо коефіцієнт згасання ненульовий ($\gamma \neq 0$), то вільні коливання з часом згаснуть: $V_s(t) \to 0$, і залишаться тільки вимушені коливання. Знайдемо розв'язок $\hat{V}_f(t)$, що відповідає вимушеним коливанням.

Будемо шукати розв'язок у вигляді

$$\hat{V}_f(t) = \hat{V}_m e^{i\Omega t}. \tag{18.67}$$

Підстановка цього виразу в друге рівняння в (18.66) дає

$$\left(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega\right)\hat{V}_m e^{i\Omega t} = \omega_0^2 \mathscr{E}_m e^{i\omega t}. \tag{18.68}$$

Оскільки така рівність повинна виконуватися в будь-який момент часу, то звідси випливає $\Omega = \omega$ і

$$\boxed{\hat{V}_m = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}\mathscr{E}_m.} \tag{18.69}$$

Отримана залежність називається *частотною характеристикою* контуру.

Покладемо

$$\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega = \rho e^{-i\varphi_0}. \tag{18.70}$$

Звідси знаходимо

$$\rho = \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}, \tag{18.71}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \tag{18.72}$$

З урахуванням цього розв'язок, що описує вимушені коливання напруги, набирає вигляду

$$\boxed{V_f = V_m \cos(\omega t + \varphi_0), \qquad V_m = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}\mathscr{E}_m.} \tag{18.73}$$

Перехід від диференціального рівняння(18.57) до звичайної алгебри з комплексними числами (18.68), яким ми щойно скористалися, здавався інженерам XIX століття далеко не очевидним. До 1890-х років розрахунок кожного нового кола змінного струму означав щоразу розв'язувати диференціальні рівняння вручну, що на практиці ставало непідйомним для розгалужених промислових мереж. Усе змінив інженер компанії General Electric Чарльз Протеус Штейнмец: у доповіді «Complex Quantities and Their Use in Electrical Engineering» (1893) він показав, що достатньо замінити напруги й струми комплексними амплітудами — і розрахунок кола перетворюється на просту алгебру,

якою ми користуємося у цьому розділі. Метод Штейнмеца настільки прискорив і спростив проєктування електричних мереж, що саме йому значною мірою завдячують швидким розгортанням систем передачі й розподілу електроенергії на змінному струмі наприкінці XIX — на початку XX століття.

Амплітудно-частотна характеристика. На рис. 18.5 показана залежність амплітуди вимушених коливань від частоти ω зовнішньої ЕРС, яка називається *амплітудно-частотною* (або *амплітудною*) характеристикою.

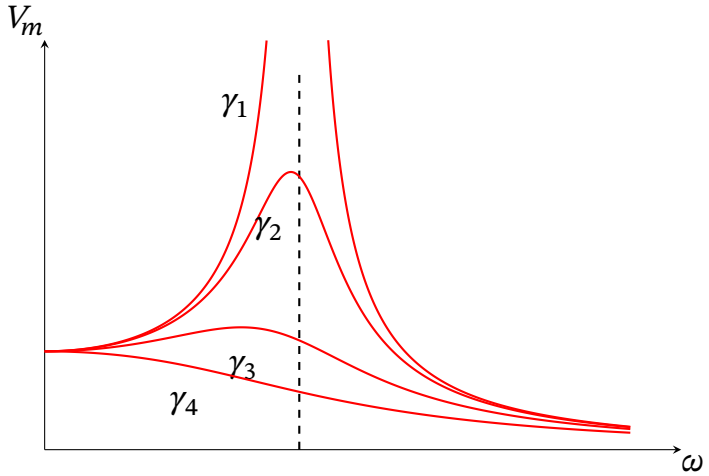


Рис. 18.5. Амплітудно-частотна характеристика контуру. Залежність амплітуди вимушених коливань V_m від частоти ω зовнішньої ЕРС.

Як видно з рис. 18.5, при не надто великому згасанні спостерігається сильне зростання амплітуди при наближенні частоти зовнішньої сили (ЕРС) до деякої характерної частоти. Це явище називається *резонансом*, а частота ω_m, при якій амплітуда досягає максимуму, — *резонансною частотою*. Докладніше про резонанс ітиметься нижче, а також у § 18.4, присвяченому змінному струму, де ми побачимо його з боку імпедансів.

Якщо згасання відсутнє: $\gamma = 0$, то резонансна частота збігається з власною частотою осцилятора: $\omega_m = \omega_0$. При цьому

$$V_m = \frac{\omega_0^2}{|\omega_0^2 - \omega^2|}\mathscr{E}_m. \tag{18.74}$$

Якщо ж $\gamma \neq 0$, то резонансну частоту можна знайти з (18.73), поклавши $dV_m/d\omega = 0$:

$$\boxed{\omega_m = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}.} \tag{18.75}$$

Якщо $\gamma \geqslant \omega_0/\sqrt{2}$, то з ростом частоти ЕРС амплітуда коливань монотонно зменшується при всіх частотах.

Фазово-частотна характеристика. Як видно з (18.71), (18.73), коливання напруги $V_f(t)$ зсунуті по фазі відносно коливань ЕРС $\mathscr{E}(t)$. На рис. 18.6 показана залежність фазового зсуву φ_0 від частоти ЕРС, яка називається *фазово-частотною* (або *фазовою*) характеристикою.

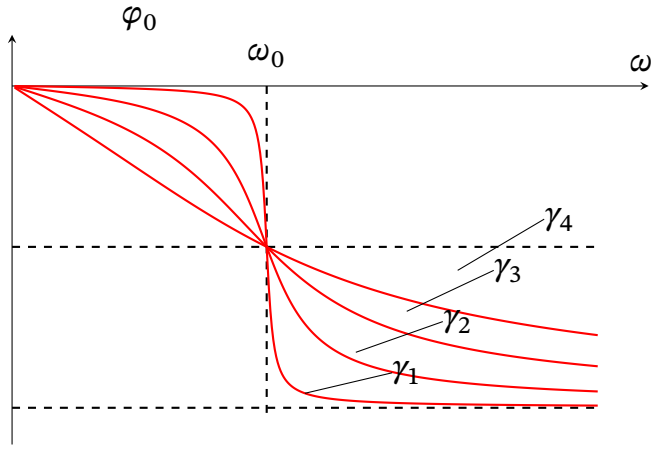


Рис. 18.6. Фазово-частотна характеристика контуру. Залежність фазового зсуву φ_0 від частоти ω зовнішньої ЕРС.

Резонанс. У багатьох практично важливих випадках згасання в коливальних системах мале, $\gamma \ll \omega_0$. Знайдемо для цього випадку характеристики резонансної кривої (рис. 18.7).

Згідно з (18.73) резонансна частота $\omega_m \approx \omega_0$. Максимум амплітуди досягається при $\omega \approx \omega_0$ і становить

$$\boxed{V_{\max} \approx \frac{\omega_0}{2\gamma}\mathscr{E}_m.} \tag{18.76}$$

При $\omega \to 0$ амплітуда V_m прямує до границі

$$V_{\text{ст}} = \mathscr{E}_m. \tag{18.77}$$

Цей результат відображає відгук на статичну дію $\mathscr{E} = \mathscr{E}_m = \text{const}$ і при $\dot{V} = 0$, $\ddot{V} = 0$ прямо випливає з (18.58).

Знайдемо відношення $V_{\max}/V_{\text{ст}}$. Згідно з (18.76), (18.77) маємо

$$\boxed{\frac{V_{\max}}{V_{\text{ст}}} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = Q.} \tag{18.78}$$

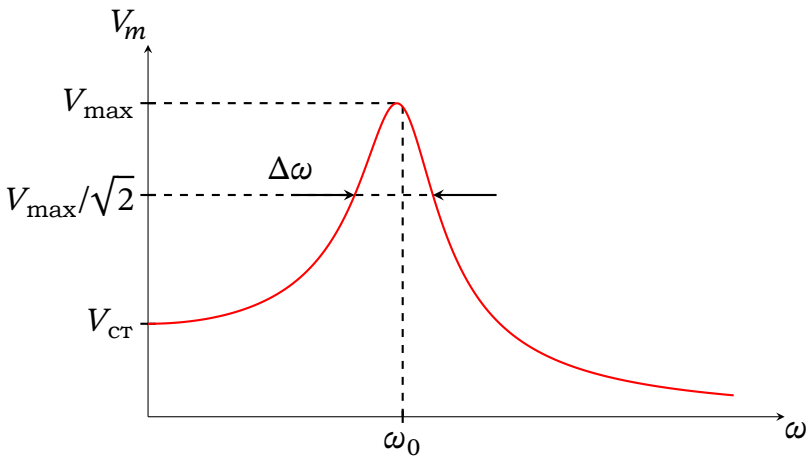


Рис. 18.7. Характеристики резонансної кривої: $V_{\max}$ — максимум амплітуди, $V_{\text{ст}}$ — статична амплітуда, $\Delta\omega$ — ширина резонансу.

Це відношення збігається з добротністю Q розглядуваної системи. Таким чином, в резонансі амплітуда коливань в Q разів більша, ніж статичне відхилення: $V_{\max} = QV_{\text{ст}}$.

Амплітуда вимушених коливань зменшується в міру віддалення від резонансної частоти. Знайдемо ширину резонансу $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, де ω_1 і ω_2 — частоти нижче і вище резонансної, при яких вона зменшується в $\sqrt{2}$ разів:

$$V_m(\omega) = V_{\max}/\sqrt{2}. \tag{18.79}$$

Будемо вважати згасання слабким. Оскільки при цьому $\omega_m \approx \omega_0$, $V_{\max} \approx (\omega_0/2\gamma)\mathscr{E}_m$, то згідно з (18.73) для знаходження шуканих частот маємо рівняння

$$\frac{\mathscr{E}_m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mathscr{E}_m}{2\gamma\omega_0}, \tag{18.80}$$

або

$$\begin{aligned} &\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2 = 8\gamma^2\omega_0^2 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 = 4\gamma^2\left(2\omega_0^2 - \omega^2\right) \approx 4\gamma^2\omega_0^2. \end{aligned} \tag{18.81}$$

Тут враховано, що в правій частині цієї рівності при малих γ можна покласти $\omega \approx \omega_0$. Таким чином, отримуємо

$$\omega_0^2 - \omega^2 \approx \pm 2\gamma\omega_0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \omega_0^2\left(1 \mp \frac{2\gamma}{\omega_0}\right), \tag{18.82}$$

звідки випливає:

$$\omega_1 = \omega_0 - \gamma, \qquad \omega_2 = \omega_0 + \gamma. \tag{18.83}$$

Отже, ширина резонансної кривої по рівню $1/\sqrt{2}$ становить

$$\boxed{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\gamma.} \tag{18.84}$$

Цей результат можна переписати в іншому вигляді, використовуючи поняття добротності:

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}.} \tag{18.85}$$

Отже, чим вище добротність системи, тим вужча резонансна крива.

Тут ми розглянули резонанс у послідовному LCR-контурі як явище вимушених коливань — через амплітуду напруги на конденсаторі. У § 18.4, присвяченому змінному струму, ми побачимо, як той самий результат випливає з аналізу імпедансів, і поширимо його на довільні розгалужені кола.

18.4. Змінний струм

Змінним струмом називають струм, миттєве значення якого періодично змінюється з часом. Найважливіший випадок — гармонічний змінний струм, який виникає в колі під дією гармонічної ЕРС. По суті, це ті самі вимушені коливання, які ми розглянули в попередньому розділі. Там ми вже ввели комплексні амплітуди як зручний спосіб опису гармонічних коливань. Тепер ми застосуємо цей метод до розрахунку довільних кіл змінного струму — як нерозгалужених, так і розгалужених. Виявиться, що всі правила — закон Ома, правила Кірхгофа, складання опорів — зберігають свою форму, якщо замінити активний опір R на комплексний імпеданс Z.

Закон Ома в комплексній формі. Імпеданс. У попередньому розділі ми знайшли комплексну амплітуду напруги на конденсаторі (18.69). Тепер нас цікавить не напруга, а струм у колі. Оскільки $I = \dot{q}$ і $V = q/C$, комплексні амплітуди цих величин пов'язані співвідношенням

$$\hat{I}_m = i\omega C\hat{V}_m. \tag{18.86}$$

Підставляючи сюди (18.69) і враховуючи, що $\omega_0^2 = 1/(LC)$, отримуємо

$$\hat{I}_m = \frac{i\omega/L}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}\mathscr{E}_m. \tag{18.87}$$

Перепишемо знаменник у вигляді

$$\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega = \frac{i\omega}{L}\left[R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right], \tag{18.88}$$

що легко перевірити розкриттям дужок. Тоді

$$\hat{I}_m = \frac{\mathscr{E}_m}{R + i\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}. \tag{18.89}$$

Отже, комплексна амплітуда струму пов'язана з комплексною амплітудою ЕРС тим самим співвідношенням, що й у законі Ома для постійного струму, — але замість активного опору R тут стоїть величина

$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), \tag{18.90}$$

яка називається *імпедансом*[1], або *комплексним опором*, електричного кола. У компактному вигляді отримане співвідношення записують як

$$\hat{I}_m Z = \mathscr{E}_m, \tag{18.91}$$

і називають *законом Ома в комплексній формі*: комплексна амплітуда струму дорівнює комплексній амплітуді ЕРС, поділеній на імпеданс. Це той самий закон Ома, що й для постійного струму, лише записаний для комплексних амплітуд гармонічних величин.

Величину

$$\operatorname{Re} Z = R \tag{18.92}$$

називають *активним* (або *омічним*) *опором*, а величину

$$\operatorname{Im} Z = \omega L - \frac{1}{\omega C} \tag{18.93}$$

— *реактивним опором*. Активний опір приводить до втрат енергії в контурі, тоді як реактивний до втрат не призводить: енергія лише періодично перекачується між джерелом і полями котушки та конденсатора.

Імпеданс Z описує коло в цілому. Кожен з елементів кола має свій власний імпеданс:

$$Z_R = R, \qquad Z_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}, \qquad Z_L = i\omega L. \tag{18.94}$$

Звідси видно, що імпеданс резистора — дійсна величина, а імпеданси конденсатора й котушки — уявні. Повний імпеданс послідовного LCR-контуру (18.90) є сумою імпедансів окремих елементів:

$$Z = Z_R + Z_C + Z_L. \tag{18.95}$$

[1] Імпеданс — від англ. *impede* — заважати, перешкоджати.

Це співвідношення за формою повністю збігається з правилом складання опорів для послідовного кола постійного струму: там теж $R = R_1 + R_2 + \dots$. Різниця лише в тому, що тепер опори — комплексні величини, і замість простого додавання дійсних чисел доводиться додавати комплексні, враховуючи їхні фази. Саме в цьому й полягає основна зручність методу комплексних амплітуд: усі правила для кіл постійного струму зберігають свою форму, якщо замінити R на Z.

Запишемо струм у вигляді $I = I_m e^{i\omega t}$ і помножимо його на імпеданс кожного елемента:

$$U_R = RI_m e^{i\omega t}, \tag{18.96}$$

$$U_C = -\frac{i}{\omega C} I_m e^{i\omega t} = \frac{I_m}{\omega C} e^{i(\omega t - \pi/2)}, \tag{18.97}$$

$$U_L = i\omega L I_m e^{i\omega t} = \omega L I_m e^{i(\omega t + \pi/2)}. \tag{18.98}$$

Звідси видно, що напруга на резисторі збігається за фазою зі струмом, на конденсаторі — відстає на $\pi/2$, а на котушці — випереджає на $\pi/2$. Множення на i у комплексній площині означає поворот на $+\pi/2$, а на $-i$ — на $-\pi/2$; саме тому реактивні елементи зсувають фазу, а активний — ні.

Векторні діаграми. Комплексні амплітуди можна зображати векторами на комплексній площині. Тоді додавання струмів і напруг стає додаванням векторів, а закон Ома (18.91) — твердженням про їхню *векторну* суму. Така побудова називається *векторною діаграмою*.

На рис. 18.8 показано векторну діаграму для послідовного LCR-контуру. Вектор струму I напрямлений уздовж дійсної осі; доданки RI, $i\omega LI$ і $-iI/(\omega C)$ утворюють прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює вектору ЕРС $\mathscr{E}$. З діаграми відразу видно, що

$$\mathscr{E}_m^2 = R^2 I_m^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 I_m^2,$$

— тобто векторна діаграма дає той самий результат, що й алгебраїчний підхід, але без обчислень. Саме тому нею зручно користуватися для швидкої якісної оцінки: вона показує, як співвідносяться між собою напруги на елементах і як зсунуті їхні фази.

Потужність змінного струму. Відповідно до закону Джоуля–Ленца (в інтегральній формі) потужність, що розсіюється струмом у провідному середовищі, рівна $P = \mathscr{E} I$. У випадку змінних періодично змінюваних струмів і напруг інтерес представляє середнє значення

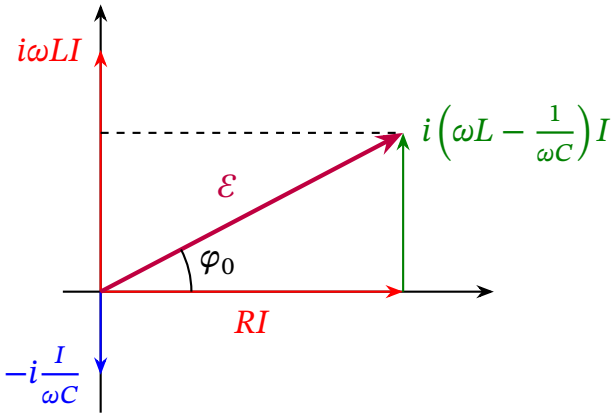


Рис. 18.8. Векторна діаграма для LCR-контуру, показаного на рис. 18.1, для випадку $\omega L > 1/\omega C$.

потужності за період коливань:

$$\overline{P} = \overline{\mathscr{E} I} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathscr{E}(t_1) I(t_1)\, dt_1. \tag{18.99}$$

У цю формулу входять дійсні величини. Тому користуватися комплексним представленням слід більш обережно. Покладемо

$$\mathscr{E}(t) = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathscr{E}}(t) + \hat{\mathscr{E}}^*(t)\right), \qquad I(t) = \frac{1}{2}\left(\hat{I}(t) + \hat{I}^*(t)\right). \tag{18.100}$$

Звідси знаходимо

$$\begin{aligned} \mathscr{E}(t) I(t) &= \frac{1}{4}\left(\hat{\mathscr{E}}(t) + \hat{\mathscr{E}}^*(t)\right)\left(\hat{I}(t) + \hat{I}^*(t)\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left[\hat{\mathscr{E}}(t)\hat{I}(t) + \hat{\mathscr{E}}^*(t)\hat{I}^*(t) + \hat{\mathscr{E}}(t)\hat{I}^*(t) + \hat{\mathscr{E}}^*(t)\hat{I}(t)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\hat{\mathscr{E}}(t)\hat{I}(t) + \hat{\mathscr{E}}(t)\hat{I}^*(t)\right]. \end{aligned} \tag{18.101}$$

Для знаходження середнього врахуємо, що

$$\hat{\mathscr{E}}(t) = \mathscr{E}_m e^{i\omega t}, \qquad \hat{I}(t) = I_m e^{i\omega t} e^{i\varphi_0} \tag{18.102}$$

(амплітуди $\mathscr{E}_m$ і I_m тут вважаються дійсними величинами). Це означає, що доданок $\hat{\mathscr{E}}(t)\hat{I}(t)$ осцилює з частотою 2ω і його середнє значення за період $T = 2\pi/\omega$ рівне нулю:

$$\overline{\hat{\mathscr{E}}(t)\hat{I}(t)} = \mathscr{E}_m I_m e^{i\varphi_0}\overline{\exp[2i\omega t]} = \mathscr{E}_m I_m e^{i\varphi_0}\frac{1}{T}\int_t^{t+T} \exp[2i\omega t_1]\, dt_1 = 0. \tag{18.103}$$

Аналогічно встановлюється, що

$$\overline{\hat{\mathscr{E}}^*(t)\hat{I}^*(t)} = 0. \tag{18.104}$$

В результаті з (18.99) отримуємо

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[\hat{\mathscr{E}}(t)\hat{I}^*(t)\right]. \tag{18.105}$$

З урахуванням зсуву фаз між струмом і ЕРС звідси знаходимо

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\mathscr{E}_m I_m \operatorname{Re}\left[e^{-i\varphi_0}\right] = \frac{1}{2}\mathscr{E}_m I_m \cos\varphi_0. \tag{18.106}$$

Введемо ефективні значення амплітуд напруги і струму:

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{I^2(t)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m, \qquad \mathscr{E}_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{\mathscr{E}^2(t)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathscr{E}_m. \tag{18.107}$$

Тоді співвідношення (18.106) набирає вигляду

$$\overline{P} = \mathscr{E}_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi_0. \tag{18.108}$$

Ця формула показує, що чим більше зсув фаз між струмом і напругою, тим менше розсіювана в опорі потужність. У випадку резонансу, коли $\operatorname{tg}\varphi_0 = 0$, споживана потужність максимальна: $\overline{P} = \mathscr{E}_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$.

Перепишемо співвідношення (18.105), враховуючи закон Ома: $\mathscr{E} = IZ$, а також рівності $\operatorname{Re} Z = R$, $|\hat{I}|^2 = I_m^2$:

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\hat{\mathscr{E}}(t)\hat{I}^*(t)\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(Z|\hat{I}|^2\right) = \frac{1}{2}RI_m^2 = RI_{\text{eff}}^2. \tag{18.109}$$

Остання формула показує, що за відсутності активного опору середня потужність змінного струму дорівнює нулю.

Формула $\overline{P} = RI_{\text{eff}}^2$ — це, по суті, формула, яка розв'язала долю електричних мереж по всьому світу. Щоб доставити споживачеві задану потужність $P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi_0$, можна взяти малу напругу й великий струм, або велику напругу й малий струм — добуток лишається тим самим. Але втрати в дротах самої лінії залежать не від потужності, а саме від струму: $\overline{P}_{\text{втрат}} = RI_{\text{eff}}^2$. Тому, підвищивши напругу вдесятеро при тій самій потужності, ми зменшуємо струм у стільки ж разів, а втрати — вже в сто разів. Саме на цьому «спіткнулася» постійнострумова мережа Едісона в 1880-х: підняти напругу постійного струму на відстані було технічно неможливо, тож електростанції доводилося ставити майже через кожні кілька кварталів. Джордж Вестінгауз і Нікола Тесла натомість запропонували систему змінного струму, в якій трансформатор дозволяє підняти напругу практично без втрат. У 1893 році

саме цю систему обрали для гідроелектростанції на Ніагарському водоспаді (проєкти станції перед тим розглядала міжнародна комісія на чолі з лордом Кельвіном, який спершу схилявся до постійного струму); станція запрацювала 1895 року, а 1896 року вже передавала струм за кілька десятків кілометрів, до Буффало — цю подію й вважають фактичним завершенням «війни струмів» на користь змінного струму. Відтоді магістральні лінії електропередачі (ЛЕП) тримають напругу в сотні кіловольт — не з надмірності, а через оцю саму формулу RI_{eff}^2.

Резонанс напруг і струмів. У попередньому розділі ми вже зустрілися з явищем резонансу — там воно постало як різке зростання амплітуди вимушених коливань при наближенні частоти ЕРС до власної частоти контуру. Тепер ми подивимося на це саме явище з боку імпедансів: виявиться, що резонанс — це момент, коли реактивний опір кола обертається в нуль. Такий погляд дозволяє однаково просто описати і послідовний контур (резонанс напруг), і паралельний (резонанс струмів), а також поширити аналіз на довільні розгалужені кола.

Резонансом напруг називають резонанс у послідовному LCR-контурі (рис. 18.1) при зміні частоти коливань ЕРС. Згідно з (18.89) максимум амплітуди струму $I_m(\omega)$ досягається на частоті $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ і становить $I_{m,\max} = \mathscr{E}_m/R$ (рис. 18.9). Це випливає з того, що на частоті ω_0 індуктивний і ємнісний імпеданси точно компенсують один одного:

$$Z_L + Z_C = \left(i\omega L + \frac{1}{i\omega C}\right)_{\omega=1/\sqrt{LC}} = 0. \qquad (18.110)$$

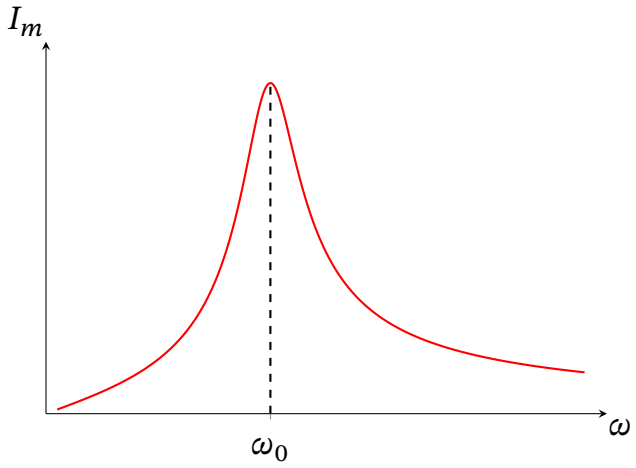


Рис. 18.9. Залежність амплітуди струму від частоти ЕРС у послідовному LCR-контурі (рис. 18.1): резонанс напруг.

В результаті імпеданс контуру зводиться до активного опору R, тож амплітуда струму досягає максимуму $I_{m,\max} = \mathscr{E}_m/R$. Напруга на

конденсаторі при цьому дорівнює:

$$V_{C,\max} = \frac{I_{m,\max}}{\omega_0 C} = \frac{\mathscr{E}_m}{\omega_0 C R}.$$

Враховуючи, що $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, маємо $\omega_0 C = \sqrt{C/L}$, звідки

$$V_{C,\max} = \frac{\mathscr{E}_m}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = Q\,\mathscr{E}_m,$$

де $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ — добротність контуру (18.53). Отже, напруга на конденсаторі в Q разів перевищує напругу джерела. Те саме стосується й напруги на котушці. Саме тому це явище називають *резонансом напруг*.

! *Резонанс напруг — це не лише корисне явище (виділення сигналу в радіоприймачах), а й потенційно* небезпечне. *На резонансі напруги на котушці й конденсаторі хоч і рівні за модулем і протилежні за фазою (тому їхня сума дорівнює напрузі джерела), але* кожна з них окремо *в Q разів перевищує напругу джерела. Уже при $Q \sim 100$ і напрузі джерела 220 В напруга на конденсаторі сягає 22 000 В — цього достатньо, щоб пробити ізоляцію конденсатора або спричинити розряд між витками котушки. У силовій електротехніці це явище називають* перенапругою *і враховують при проєктуванні обладнання; в радіотехніці ж його, навпаки, використовують для підсилення слабких сигналів.*

Резонансом струмів називають резонанс у паралельному LCR-контурі (рис. 18.10), коли елементи L, C, R з'єднані паралельно і підключені до джерела змінного струму. На відміну від резонансу напруг, тут амплітуда струму джерела вважається незмінною, тобто не залежить від параметрів елементів контуру.

Оскільки елементи контуру з'єднані паралельно, імпеданс кола Z визначається з рівності

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C}, \qquad Z_R = R, \qquad Z_L = i\omega L, \qquad Z_C = \frac{1}{i\omega C}. \tag{18.111}$$

Струм у зовнішній частині кола дорівнює сумі струмів через окремі елементи:

$$I = I_R + I_L + I_C. \tag{18.112}$$

Позначимо напругу, створювану джерелом струму, як U. Тоді

$$U = IZ. \tag{18.113}$$

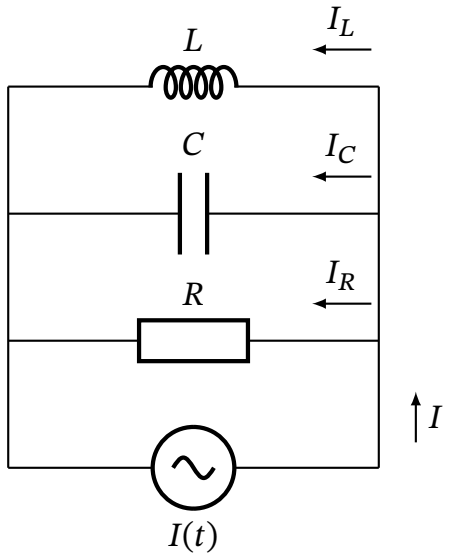


Рис. 18.10. Паралельний LCR-контур, що включає джерело заданого змінного струму $I(t) = I_m \cos \omega t$.

Оскільки напруга на всіх паралельно з'єднаних елементах однакова, то

$$I_R = \frac{U}{Z_R} = \frac{U}{R}, \qquad I_L = \frac{U}{Z_L} = \frac{U}{i\omega L}, \qquad I_C = \frac{U}{Z_C} = i\omega CU. \tag{18.114}$$

З урахуванням (18.113) перепишемо ці вирази у вигляді

$$I_R = I\frac{Z}{R}, \qquad I_L = I\frac{Z}{Z_L}, \qquad I_C = I\frac{Z}{Z_C}. \tag{18.115}$$

Амплітуда струму через активний опір дорівнює

$$I_{R_0} = \frac{I_m}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{R}{\omega L} - \omega CR\right)^2}} = \frac{I_m}{\sqrt{1 + \dfrac{4\gamma^2}{\omega^2}\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}}. \tag{18.116}$$

Звідси видно, що I_{R_0} має максимум при $\omega = \omega_0$ і становить $(I_{R0})_{\max} = I_m$. Це означає, що на резонансній частоті весь струм від джерела тече тільки через активний опір. Справа в тому, що опір блока з паралельно з'єднаних конденсатора й котушки на цій частоті обертається в нескінченність, і струм через нього не тече.

Амплітуди струмів через котушку й конденсатор на резонансній частоті дорівнюють

$$I_{L0} = I_{C0} = QI_m, \tag{18.117}$$

де

$$Q = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 RC = R\sqrt{\frac{C}{L}} \tag{18.118}$$

— добротність *паралельного* контуру. Зверніть увагу, що вона відрізняється від добротності послідовного контуру (18.53): там $Q = \frac{1}{R}\sqrt{L/C}$, тут — $Q = R\sqrt{C/L}$. Фізично це означає, що в паралельному контурі

добротність зростає зі збільшенням опору R (менші втрати — вища добротність), тоді як у послідовному — навпаки, спадає.

Таким чином, на резонансній частоті по замкнутому LC-контуру циркулює струм, у Q разів більший за струм джерела, тобто тим більший, чим вища добротність кола.

Якщо замість джерела струму використовувати джерело ЕРС, то в зовнішньому колі на частоті ω_0 спостерігався б *мінімум* струму, а не максимум, як у послідовному контурі. Таке явище називають *антирезонансом*.

! *Резонанс струмів — це дзеркальне відображення резонансу напруг. Якщо там різко зростали напруги на реактивних елементах, то тут різко зростають* струми *в котушці й конденсаторі: на резонансі* $I_{L0} = I_{C0} = QI_m$*, тобто при високій добротності струм у LC-контурі в багато разів перевищує струм джерела. Це явище широко використовується в індукційних печах: паралельно котушці, що створює змінне магнітне поле, підключають ємність, і на резонансі струм у котушці зростає в багато разів, тоді як струм у підвідних дротах залишається відносно невеликим. Той самий принцип — лише в мініатюрі — лежить в основі побутових індукційних варильних поверхонь і безконтактної зарядки телефонів: замість тонни розплавленого металу тут вистачає котушки під склокерамічною плитою чи в зарядній панелі.*

У радіотехніці резонанс струмів використовують у приймальних пристроях для виділення слабкого сигналу у вузькому спектральному інтервалі поблизу резонансної частоти: паралельний LC-контур має на цій частоті великий опір, тому напруга на ньому максимальна, а сигнали інших частот пригнічуються.

Правила Кірхгофа для змінного струму. Розрахунок довільних квазістаціонарних кіл (як нерозгалужених, так і розгалужених) при наявності змінних ЕРС може здійснюватися за правилами Кірхгофа, аналогічним тим, що мають місце у випадку постійних струмів і напруг. Різниця полягає лише в заміні опорів R на імпеданси Z.

Правила такі:

1. Сума струмів, що входять у вузол (з урахуванням знаків), рівна нулю (рис. 18.11):

$$\sum_k I_k = 0. \tag{18.119}$$

Дане правило є наслідком закону збереження заряду і стверджує, що у вузлі заряди не можуть накопичуватися.

2. Для будь-якого замкнутого контуру в квазістаціонарному електричному колі виконується рівність

$$\sum_k I_k Z_k = \sum_i \mathscr{E}_i, \tag{18.120}$$

де $\mathscr{E}_i$ — ЕРС, що входять у вибраний контур, I_k — струми через елементи контуру, що мають імпеданси Z_k.

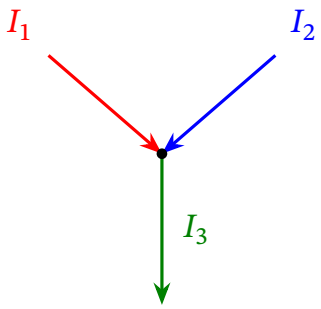


Рис. 18.11. Перше правило Кірхгофа: сума струмів, що входять у вузол, рівна нулю.

Це правило безпосередньо випливає із закону індукції (теореми про циркуляцію для електричного поля в інтегральній формі):

$$\oint_\Gamma E_l\, dl = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad \Phi = LI. \tag{18.121}$$

Приклад розрахунку розгалуженого кола. Застосуємо правила Кірхгофа до конкретного розгалуженого кола (рис. 18.12): джерело ЕРС $\mathscr{E} = \mathscr{E}_m e^{i\omega t}$ навантажене на паралельно з'єднані резистор R і конденсатор C, послідовно з якими ввімкнено котушку L. Позначимо вузол, у якому сходяться три вітки, буквою A, а другий вузол — буквою B. Контур I містить джерело, котушку й резистор; контур II — джерело, котушку й конденсатор.

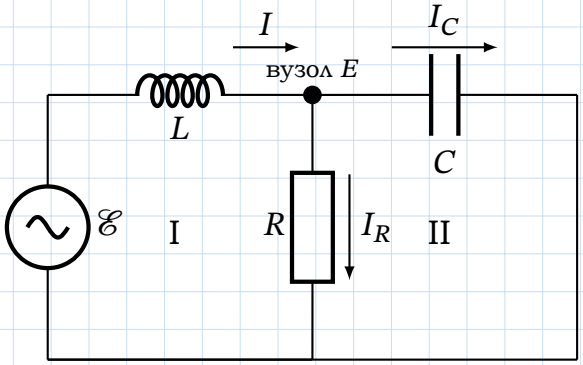


Рис. 18.12. Розгалужене коло: котушка L послідовно з паралельно з'єднаними R і C. Вузли позначено A і B; контури I та II показано умовно.

Застосуємо *перше правило Кірхгофа* до вузла A: сума струмів, що виходять із вузла, дорівнює нулю. Струм I приходить до вузла A, а

струми I_R і I_C виходять із нього, тому

$$I - I_R - I_C = 0 \quad \Rightarrow \quad I = I_R + I_C. \tag{18.122}$$

Застосуємо *друге правило Кірхгофа* до контуру I (джерело — котушка — резистор):

$$Z_L I + R I_R = \mathscr{E}. \tag{18.123}$$

Для контуру II (джерело — котушка — конденсатор):

$$Z_L I + Z_C I_C = \mathscr{E}. \tag{18.124}$$

Маємо систему трьох рівнянь (18.122)–(18.124) із трьома невідомими I, I_R, I_C. Розв'яжемо її. З (18.123) і (18.124) виразимо I_R і I_C через I:

$$I_R = \frac{\mathscr{E} - Z_L I}{R}, \qquad I_C = \frac{\mathscr{E} - Z_L I}{Z_C}.$$

Підставимо ці вирази в (18.122):

$$I = \frac{\mathscr{E} - Z_L I}{R} + \frac{\mathscr{E} - Z_L I}{Z_C}.$$

Розв'язуючи відносно I, отримуємо

$$I = \frac{\mathscr{E}}{Z_L + \dfrac{1}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{Z_C}}}. \tag{18.125}$$

Вираз у знаменнику — це повний імпеданс кола Z. Дійсно, паралельна ділянка $R \parallel C$ має імпеданс

$$Z_{RC} = \frac{1}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{Z_C}} = \frac{R}{1 + i\omega RC}, \tag{18.126}$$

а повний імпеданс кола, згідно з правилом послідовного складання, дорівнює

$$Z = Z_L + Z_{RC} = i\omega L + \frac{R}{1 + i\omega RC}. \tag{18.127}$$

Підставляючи (18.126) і (18.127) у (18.125), отримуємо остаточно

$$I = \frac{\mathscr{E}_m e^{i\omega t}}{i\omega L + \dfrac{R}{1 + i\omega RC}} = \mathscr{E}_m e^{i\omega t} \frac{1 + i\omega RC}{R(1 - \omega^2 LC) + i\omega L}. \tag{18.128}$$

Напруга на паралельній ділянці:

$$U_{RC} = I Z_{RC} = \frac{\mathscr{E}_m e^{i\omega t} R}{R(1 - \omega^2 LC) + i\omega L}.$$

Струми через резистор і конденсатор:

$$I_R = \frac{U_{RC}}{R} = \frac{\mathscr{E}_m e^{i\omega t}}{R(1-\omega^2 LC)+i\omega L},$$

$$I_C = i\omega C\, U_{RC} = \frac{i\omega RC\, \mathscr{E}_m e^{i\omega t}}{R(1-\omega^2 LC)+i\omega L}.$$

Перевіримо виконання першого правила Кірхгофа (18.122):

$$I_R + I_C = \frac{\mathscr{E}_m e^{i\omega t}(1+i\omega RC)}{R(1-\omega^2 LC)+i\omega L} = I,$$

що збігається з (18.128). Отже, розв'язок задовольняє обидва правила Кірхгофа.

Із отриманих виразів видно, як розгалужене коло розраховується чисто алгебраїчно: спочатку записуємо рівняння Кірхгофа через імпеданси, потім розв'язуємо систему відносно невідомих струмів. Саме в цьому й полягає практична сила методу комплексних амплітуд: диференціальні рівняння замінюються системою лінійних алгебраїчних рівнянь із комплексними коефіцієнтами.

18.5. Трансформатор

Принцип дії *трансформатора* — взаємну індукцію двох обмоток на спільному осерді — ми вже обговорили в розділі 13 (рис. 13.6), де коефіцієнт трансформації отримано із закону збереження енергії для ідеального зв'язку обмоток. Тут розглянемо трансформатор як систему двох зв'язаних контурів змінного струму (рис. 18.13): обмотки мають опори R_1, R_2, власні індуктивності L_1, L_2 і взаємну індуктивність L_{12} (у СІ $\Phi_1 = L_1 I_1 + L_{12} I_2$, $\Phi_2 = L_{12} I_1 + L_2 I_2$), а вторинну обмотку навантажено імпедансом $Z_н$. Коефіцієнт трансформації тут зручно означити як $n = N_1/N_2$ (у розділі 13 $\eta = N_2/N_1 = 1/n$).

Друге правило Кірхгофа для комплексних амплітуд дає

$$\hat{\mathscr{E}}_1 = (R_1 + i\omega L_1)\,\hat{I}_1 + i\omega L_{12}\hat{I}_2, \tag{18.129}$$

$$0 = i\omega L_{12}\hat{I}_1 + (R_2 + i\omega L_2 + Z_н)\,\hat{I}_2 \tag{18.130}$$

(у вторинному колі стороннього джерела немає: струм $\hat{I}_2$ збуджує лише ЕРС взаємної індукції). Виключивши $\hat{I}_2$, знаходимо *вхідний імпеданс* трансформатора

$$\boxed{Z_{вх} = \frac{\hat{\mathscr{E}}_1}{\hat{I}_1} = R_1 + i\omega L_1 + \frac{(\omega L_{12})^2}{R_2 + i\omega L_2 + Z_н};} \tag{18.131}$$

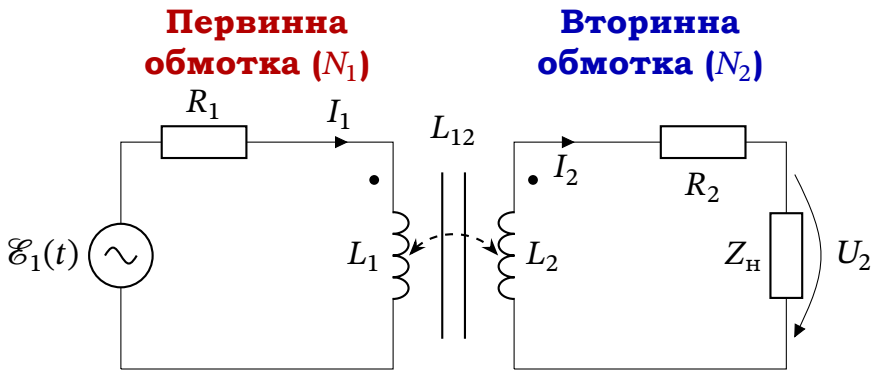


Рис. 18.13. Еквівалентна схема трансформатора: котушки L_1, L_2 з крапками фазування (вказують на однакову полярність виводів), опори R_1, R_2, взаємна індуктивність L_{12} та навантаження $Z_н$.

останній доданок називають *внесеним опором*: через нього джерело первинного кола «відчуває» навантаження вторинного.

Ідеальний трансформатор. Нехай опори обмоток малі ($R_1 = R_2 = 0$), потік не розсіюється ($L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$, $L_1/L_2 = (N_1/N_2)^2 = n^2$), а індуктивності великі ($\omega L_2 \gg |Z_н|$ — для цього й потрібне феромагнітне осердя). Тоді з (18.129), (18.130) для напруг на затискачах обмоток $\hat{U}_1 = \hat{\mathscr{E}}_1$, $\hat{U}_2 = Z_н \hat{I}_2$ отримуємо

$$\frac{|\hat{U}_1|}{|\hat{U}_2|} = n, \qquad \frac{|\hat{I}_1|}{|\hat{I}_2|} = \frac{1}{n}, \qquad Z_{вх} = n^2 Z_н. \tag{18.132}$$

У скільки разів трансформатор підвищує напругу, у стільки ж разів знижує струм, а потужність $|\hat{U}_1||\hat{I}_1| = |\hat{U}_2||\hat{I}_2|$ зберігається. Остання формула показує, що трансформатор «перераховує» опір навантаження в первинне коло в n^2 разів; цим користуються для *узгодження навантаження* з джерелом (задача 18.7).

Головне застосування трансформатора — передача електроенергії. Втрати в лінії з опором $R_л$ при переданій потужності P дорівнюють $R_л I^2 = R_л (P/U\cos\varphi)^2$, тобто обернено пропорційні квадрату напруги: підвищивши напругу в n разів, зменшуємо втрати в n^2 разів (задача 18.8). Тому магістральні лінії працюють на сотнях кіловольт, а біля споживачів напругу знову знижують.

18.6. Частотні фільтри

Оскільки реактивні опори залежать від частоти ($X_L = \omega L$, $X_C = 1/(\omega C)$), кола з реактивними елементами по-різному пропускають сигнали різних частот. Ця властивість лежить в основі *частотних фільтрів* — пристроїв, що виділяють або пригнічують певні ділянки спектра.

Фільтр низьких частот (ФНЧ). Найпростіший ФНЧ — це RC-коло, в якому вихідна напруга знімається з конденсатора (рис. 18.14). Коефіцієнт передачі за напругою:

$$K(\omega) = \frac{U_{\text{вих}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{Z_C}{R + Z_C} = \frac{1}{1 + i\omega RC}. \tag{18.133}$$

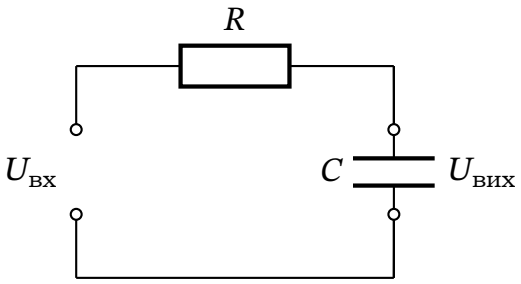


Рис. 18.14. Фільтр низьких частот: вихідна напруга знімається з конденсатора C.

Модуль коефіцієнта передачі:

$$|K(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}. \tag{18.134}$$

На низьких частотах $\omega \ll 1/(RC)$ маємо $|K| \approx 1$ — сигнал проходить без ослаблення. На високих частотах $\omega \gg 1/(RC)$ маємо $|K| \approx 1/(\omega RC) \to 0$ — сигнал пригнічується. Гранична частота, на якій $|K| = 1/\sqrt{2}$, дорівнює

$$\omega_c = \frac{1}{RC}. \tag{18.135}$$

Такий фільтр використовується, наприклад, для згладжування пульсацій у випрямлячах живлення: конденсатор великої ємності шунтує високочастотні складові, залишаючи майже сталу напругу.

Фільтр високих частот (ФВЧ).. Якщо в тому самому RC-колі знімати вихідну напругу з резистора (рис. 18.15), отримаємо ФВЧ:

$$K(\omega) = \frac{R}{R + Z_C} = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC}, \qquad |K(\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}. \tag{18.136}$$

Тепер на низьких частотах $|K| \to 0$, а на високих $|K| \to 1$. Такий фільтр застосовується, наприклад, для розділення частот у гучномовцях: високочастотний динамік (твітер) підключається через конденсатор, який не пропускає низькочастотні складові.

Смуговий фільтр.. Послідовний LCR-контур, у якому вихідна напруга знімається з резистора (рис. 18.16), є смуговим фільтром. Його коефіцієнт передачі

$$K(\omega) = \frac{R}{R + i(\omega L - 1/\omega C)} = \frac{1}{1 + iQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}, \tag{18.137}$$

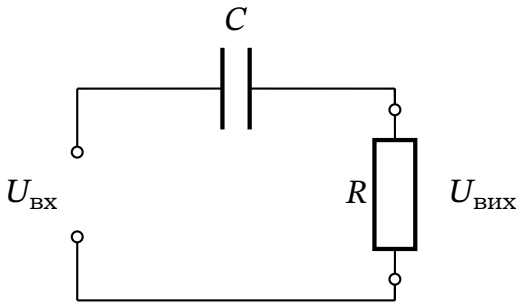


Рис. 18.15. Фільтр високих частот: вихідна напруга знімається з резистора R.

де $Q = \omega_0 L/R$ — добротність. Максимум $|K| = 1$ досягається на резонансній частоті $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, а ширина смуги пропускання $\Delta\omega = \omega_0/Q$. Чим вища добротність, тим вужча смуга — саме тому високодобротні контури використовують для виділення одного радіоканалу з безлічі інших.

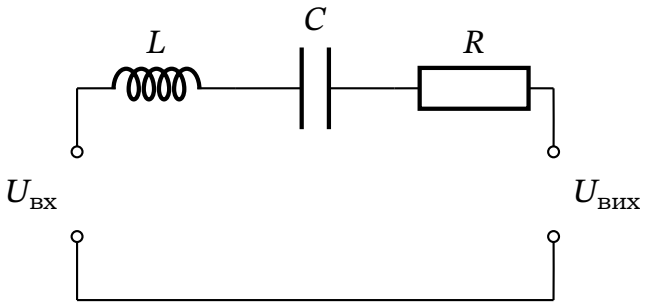


Рис. 18.16. Смуговий фільтр на основі послідовного LCR-контуру: вихідна напруга знімається з резистора R.

Порівняти поведінку всіх трьох фільтрів зручно на одному графіку амплітудно-частотних характеристик (рис. 18.17).

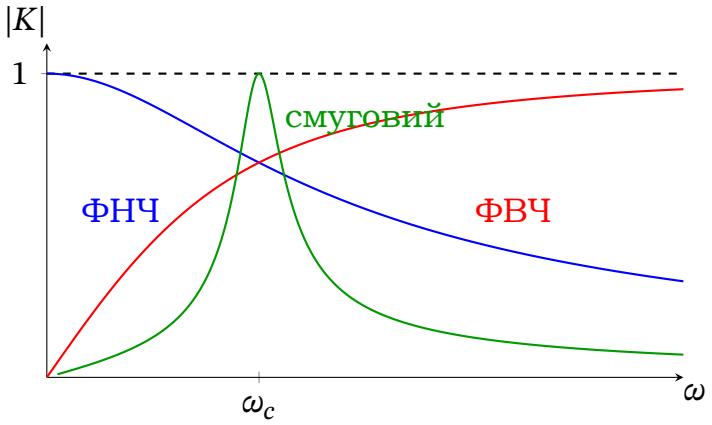


Рис. 18.17. Амплітудно-частотні характеристики трьох фільтрів: ФНЧ (синій), ФВЧ (червоний) і смугового (зелений). Для смугового прийнято $Q = 5$.

Частотні фільтри — це, мабуть, найпоширеніший застосунок кіл змінного струму. У радіоприймачі вхідний LC-контур виділяє потрібну станцію з усього ефіру; у підсилювачі звуку RC-ланцюжки розділяють смуги між високочастотним і низькочастотним динаміками; у блоці живлення комп'ютера конденсатори й дроселі придушують високочастотні завади, щоб вони не проникали в мережу; у цифрових схемах фільтри прибирають шум із сигналів перед оцифровуванням. Спільна ідея в усіх випадках одна: реактивний опір залежить від частоти, і цим можна керувати тим, які частоти «пройдуть», а які — ні.

18.7. Трифазний струм

Для передачі великих потужностей і живлення двигунів використовують *трифазні системи*. Генератор має три однакові обмотки статора, зсунуті одна відносно одної на 120°; магніт ротора, що обертається з кутовою швидкістю ω, наводить у них ЕРС однакової амплітуди, зсунуті в часі на третину періоду (рис. 18.18):

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_1(t) &= \mathscr{E}_m \sin(\omega t), \\ \mathscr{E}_2(t) &= \mathscr{E}_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \\ \mathscr{E}_3(t) &= \mathscr{E}_m \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned} \qquad (18.138)$$

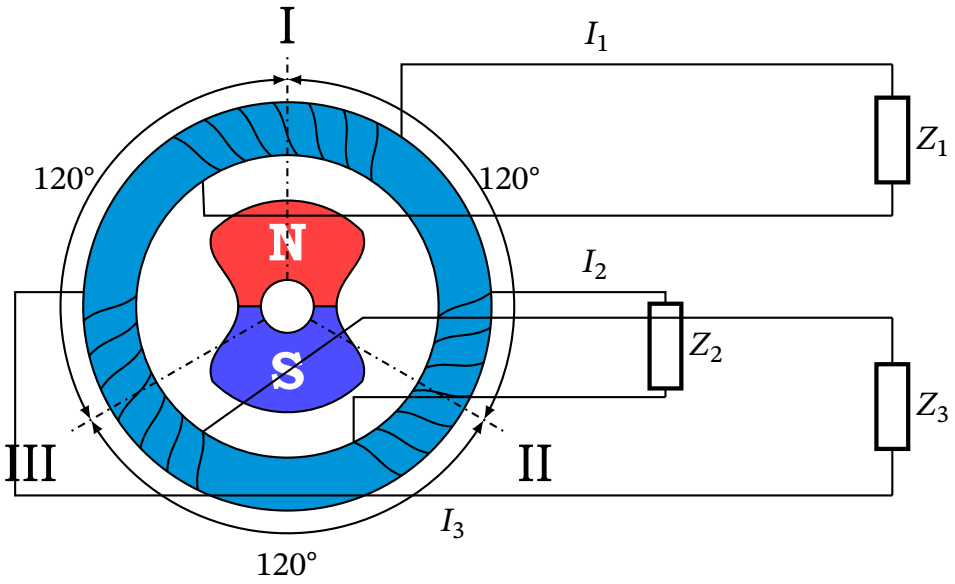


Рис. 18.18. Схематичне зображення трифазного генератора

Сума трьох ЕРС у будь-який момент дорівнює нулю. Тому, з'єднавши кінці обмоток в одну точку («зірка»), енергію можна переда-

вати трьома дротами замість шести: за однакового навантаження фаз струм у спільному (нейтральному) дроті дорівнює нулю. Напруга між двома лінійними дротами в $\sqrt{3}$ разів більша за напругу однієї фази (звідси пара 380 і 220 В). Таку систему 1889 р. запропонував М. Доливо-Добровольський, а 1891 р. її переваги показала передача енергії лінією Лауффен–Франкфурт завдовжки 175 км.

Обертове магнітне поле. Три однакові котушки, осі яких розташовані під кутом 120° одна до одної, живлять трифазними струмами $I_k = I_m \sin(\omega t - 2\pi(k-1)/3)$. Кожна створює пульсуюче поле вздовж своєї осі, $\mathbf{B}_k = B_m \sin(\omega t - 2\pi(k-1)/3)\,\mathbf{e}_k$, а їхня сума

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3, \qquad |\mathbf{B}| = \frac{3}{2}B_m = \text{const}, \tag{18.139}$$

обертається з кутовою швидкістю ω (задача 18.10). Таке поле без жодних рухомих частин захоплює провідний ротор (струми Фуко, розділ 12) — на цьому працюють асинхронні двигуни.

Стала потужність. За однакового навантаження фаз сума миттєвих потужностей трьох фаз не залежить від часу: $p(t) = 3U_\text{ф}I_\text{ф}\cos\varphi = \text{const}$, тоді як в однофазному колі потужність пульсує з частотою 2ω. Це забезпечує рівномірну роботу потужних генераторів і двигунів.

Підсумки

Електричне коло можна описувати простими співвідношеннями (закон Ома, правила Кірхгофа) без повних рівнянь Максвелла, якщо виконується умова *квазістаціонарності*: довжина кола значно менша за довжину хвилі, $l \ll \lambda = cT$ (або $\tau \sim l/c \ll T$). Тоді коло складається із зосереджених елементів R, L, C, і процеси в ньому описує рівняння $L\dot{I} + IR + q/C = \mathscr{E}$. За відсутності ЕРС воно перетворюється на рівняння вільних коливань $\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$, де $\gamma = R/2L$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. При $R = 0$ коливання гармонічні з періодом $T = 2\pi\sqrt{LC}$ (формула Томсона), причому енергія періодично перетікає між електричним полем конденсатора й магнітним полем котушки. За слабкого згасання ($\gamma < \omega_0$) амплітуда спадає як $e^{-\gamma t}$ з частотою $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, а при $\gamma \geqslant \omega_0$ коливання не виникають. Швидкість згасання характеризують логарифмічний декремент $\delta = \gamma T$ та добротність $Q = \omega/2\gamma = \pi/\delta = 2\pi W/\Delta W$; для послідовного LCR-контуру $Q = \frac{1}{R}\sqrt{L/C}$.

Під дією гармонічної ЕРС, після загасання вільних коливань, у контурі лишаються *вимушені* коливання на частоті джерела. Їх зручно шукати методом комплексних амплітуд, який замінює диференціальне рівняння алгебраїчним. Амплітуда напруги на конденсаторі має максимум (*резонанс*) при $\omega_m = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$; за слабкого згасання

$V_{\max} = QV_{\text{ст}}$, а ширина резонансної кривої по рівню $1/\sqrt{2}$ дорівнює $\Delta\omega = 2\gamma = \omega_0/Q$: чим вища добротність, тим вужчий і вищий резонанс. Те саме явище з боку імпедансів виглядає так: закон Ома набуває форми $\hat{I}_m Z = \mathscr{E}_m$, де *імпеданс* $Z = R + i(\omega L - 1/\omega C)$, а окремі елементи мають $Z_R = R$, $Z_L = i\omega L$, $Z_C = 1/(i\omega C)$. Правила Кірхгофа зберігають форму, якщо замінити R на Z. Середня потужність $\overline{P} = \mathscr{E}_{\text{еф}} I_{\text{еф}} \cos\varphi_0 = RI_{\text{еф}}^2$ визначається лише активним опором, тому електроенергію вигідно передавати при високій напрузі. У послідовному контурі при резонансі напруг напруги на L і C у Q разів перевищують напругу джерела; у паралельному контурі при резонансі струмів струм у гілках L і C у Q разів перевищує струм джерела, а $Q = R\sqrt{C/L}$.

Метод імпедансів дозволяє розрахувати й практично важливі пристрої. *Трансформатор* як систему двох магнітно зв'язаних контурів описують рівняння з взаємною індуктивністю L_{12}; для ідеального трансформатора $|U_1/U_2| = N_1/N_2 = n$, $|I_1/I_2| = 1/n$ і $Z_{\text{вх}} = n^2 Z_{\text{н}}$, що дає змогу узгоджувати навантаження з джерелом. *Частотні фільтри* використовують залежність реактивних опорів від частоти: для RC-ланцюжка гранична частота $\omega_c = 1/RC$, а смуговий фільтр має смугу пропускання $\Delta\omega = \omega_0/Q$. У *трифазній системі* три ЕРС зсунуті на 120° і в сумі дають нуль, тож енергію передають трьома дротами; трифазний струм створює обертове магнітне поле сталої величини й забезпечує сталу миттєву потужність.

Уся ця теорія трималася на умові $l \ll \lambda$. Коли довжина лінії стає порівнянною з довжиною хвилі, струм і напруга вже не однакові вздовж кола, і потрібна теорія *довгих ліній*, з якої ми почнемо наступний розділ (розділ 19).

Задачі

18.1. *Квазістаціонарність.* При якій найбільшій частоті коло довжиною 3 м ще можна вважати квазістаціонарним, якщо вимагати $l \leqslant \lambda/10$? Яка частка довжини хвилі мережі 50 Гц припадає на ЛЕП завдовжки 1000 км?

18.2. *Вільні коливання в контурі.* Контур містить $L = 0{,}5$ мГн, $C = 200$ пФ і $R = 5$ Ом. Знайдіть власну частоту, період, коефіцієнт згасання, логарифмічний декремент, добротність, кількість коливань, за які амплітуда спадає в e разів, та критичний опір, при якому коливання стають неможливими.

18.3. *Резонанс у послідовному контурі.* До контуру з попередньої задачі приєднано генератор із $\mathscr{E}_m = 1$ В. Знайдіть амплітуду струму й напруги на конденсаторі на резонансі та ширину резонансної кривої.

18.4. *Імпеданс і потужність.* Послідовно з'єднані резистор $R = 100$ Ом, котушка $L = 0{,}1$ Гн та конденсатор $C = 10$ мкФ підключені до мережі 220 В, 50 Гц. Знайдіть імпеданс, зсув фаз, ефективний струм і споживану потужність. Чим викликано малий $\cos\varphi$?

18.5. *Резонанс струмів.* Паралельний контур ($R = 100$ кОм, $L = 1$ мГн) настроєно на 1 МГц і під'єднано до джерела струму з амплітудою $I_m = 1$ мА. Знайдіть ємність, добротність, амплітуду напруги на контурі та амплітуди струмів у котушці й конденсаторі.

18.6. *Коефіцієнт потужності.* Підприємство споживає активну потужність $P = 1$ МВт при $\cos\varphi = 0{,}6$ (індуктивне навантаження) від однофазного джерела 10 кВ, 50 Гц. Знайдіть струм, реактивну потужність і ємність батареї конденсаторів, що доводить $\cos\varphi$ до 1. Як зміняться втрати в лінії?

18.7. *Узгодження за допомогою трансформатора.* Підсилювач є джерелом із ЕРС 80 В (ефективна) і внутрішнім опором 800 Ом, гучномовець має опір 8 Ом. Знайдіть потужність у гучномовці при безпосередньому підключенні та через ідеальний трансформатор, що узгоджує опори. Який коефіцієнт трансформації $n = N_1/N_2$ потрібен?

18.8. *Втрати в лінії.* Потужність 100 МВт передають лінією з сумарним опором проводів 20 Ом при напрузі 110 кВ і 500 кВ ($\cos\varphi = 1$, розрахунок ведіть як для однофазної лінії). Порівняйте втрати.

18.9. *RC-фільтр низьких частот.* $R = 1$ кОм, $C = 0{,}16$ мкФ. Знайдіть граничну частоту, а також модуль і фазу коефіцієнта передачі при 10 кГц. У скільки разів (і на скільки децибел) послаблюється сигнал?

18.10. *Обертове поле.* Покажіть, що при зміні місцями двох фаз у котушках трифазної системи напрям обертання магнітного поля змінюється на протилежний.

? Контрольні питання

1. Що таке квазістаціонарний процес? Сформулюйте умову квазістаціонарності через довжину кола та довжину хвилі. Чому для будинкової проводки при 50 Гц вона виконується з великим запасом, а для довгої ЛЕП це може бути не так?
2. Чим система із зосередженими елементами відрізняється від системи з розподіленими параметрами (довгої лінії)? Для чого можна застосовувати закон Ома та правила Кірхгофа?
3. Виведіть рівняння $L\dot{I} + IR + q/C = \mathscr{E}$ для послідовного LCR-контуру (рис. 18.1). Яку роль відіграє теорема про циркуляцію електричного поля і як вона враховує ЕРС індукції в котушці?
4. Запишіть рівняння вільних коливань $\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$. Що означають γ та ω_0 і як вони виражаються через R, L, C?
5. Розв'яжіть рівняння вільних коливань при $R = 0$. Запишіть формулу Томсона. Чим визначаються амплітуда та початкова фаза коливань?
6. Як знаходять розв'язок рівняння згасаючих коливань за допомогою комплексних чисел? Які три випадки виникають залежно від співвідношення ω_0 та γ і який вигляд має розв'язок у кожному з них?
7. Що таке коефіцієнт згасання та час згасання? Як виглядає графік згасаючих коливань (рис. 18.3) і який вигляд має закон зміни амплітуди?
8. Виведіть рівняння енергетичного балансу $\frac{d}{dt}\left(\frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right) = -RI^2$. Що означають його доданки?
9. Як перетворюється енергія в контурі без втрат? Чому енергії W_L та W_C коливаються з однаковою амплітудою в протифазі, а їхня сума залишається сталою? Який зсув фаз між $q(t)$ і $I(t)$?
10. Що таке логарифмічний декремент згасання? Виведіть його вираз через γ та T і поясніть зв'язок з числом коливань n, за які амплітуда спадає в e разів.
11. Що таке добротність коливальної системи? Запишіть її через ω та γ, через логарифмічний декремент та через відношення енергії до втрат за період. Чому дорівнює добротність послідовного LCR-контуру?
12. Яких порядків величини досягає добротність у звичайному LC-контурі, кварцовому резонаторі та надпровідному резонаторі прискорювача? Що це означає для тривалості «дзвону» системи?

13. У чому полягає метод комплексних амплітуд? Що таке комплексна амплітуда і як з її модуля та аргумента отримати амплітуду та початкову фазу коливання?

14. Що таке частотна характеристика контуру? Виведіть вираз для амплітуди V_m та фазового зсуву вимушених коливань напруги на конденсаторі.

15. Опишіть амплітудно-частотну (рис. 18.5) та фазово-частотну (рис. 18.6) характеристики контуру. Як змінюється їхній вигляд зі збільшенням згасання?

16. Що таке резонанс? Чому дорівнює резонансна частота ω_m при $\gamma \neq 0$ і за якої умови резонанс відсутній?

17. Виведіть значення $V_{\max}$ при слабкому згасанні та поясніть, чому відношення $V_{\max}/V_{\text{ст}}$ дорівнює добротності. Що таке статична амплітуда $V_{\text{ст}}$?

18. Виведіть ширину резонансної кривої по рівню $1/\sqrt{2}$ і запишіть її через добротність. Як зв'язані добротність та вузькість резонансу?

19. Що таке змінний струм? Чим закон Ома в комплексній формі відрізняється від закону Ома для постійного струму?

20. Що таке імпеданс? Запишіть імпеданси R, L, C та послідовного LCR-кола. Чим активний опір відрізняється від реактивного?

21. Який зсув фаз між струмом і напругою на резисторі, конденсаторі та котушці? Чому множення на i у комплексній площині означає поворот на $\pi/2$?

22. Як побудувати векторну діаграму послідовного LCR-контуру (рис. 18.8)? Що можна визначити з неї, не виконуючи обчислень?

23. Виведіть формулу для середньої потужності змінного струму $\overline{P} = \frac{1}{2}\mathscr{E}_m I_m \cos\varphi_0$. Що таке ефективні значення струму й напруги і чому потужність залежить від зсуву фаз?

24. Чому середня потужність змінного струму дорівнює нулю за відсутності активного опору? Чому при тій самій потужності вигідно передавати електроенергію при високій напрузі?

25. Що таке резонанс напруг? Чому в резонансі імпеданс контуру дорівнює R, а напруга на конденсаторі та котушці в Q разів перевищує напругу джерела? Чим небезпечний цей ефект?

26. Що таке резонанс струмів у паралельному контурі (рис. 18.10)? Як записується імпеданс паралельного кола і що відбувається зі струмами в гілках на резонансній частоті?

27. Чим відрізняється добротність паралельного контуру від добротно-

сті послідовного? Що таке антирезонанс?

28. Сформулюйте правила Кірхгофа для змінного струму. Чим вони відрізняються від правил для постійного струму і як пов'язані із законом збереження заряду та законом індукції?

29. Як розраховується розгалужене коло методом комплексних амплітуд? Які кроки включає розв'язання прикладу з L, R, C (рис. 18.12)?

30. Чому трансформатор працює лише на змінному струмі?

31. Запишіть рівняння трансформатора як двох зв'язаних контурів (18.129), (18.130). Що таке внесений опір?

32. Виведіть співвідношення ідеального трансформатора для напруг, струмів і вхідного імпедансу. Навіщо узгоджують навантаження з джерелом?

33. Що таке частотний фільтр? Виведіть коефіцієнт передачі та граничну частоту RC-фільтра низьких частот (рис. 18.14). Як працює смуговий фільтр на основі LCR-контуру і від чого залежить ширина смуги?

34. Чому сума трьох ЕРС симетричної трифазної системи дорівнює нулю і що це дає для передачі енергії? Як утворюється обертове магнітне поле?

19 Довгі лінії. Телеграфні рівняння

Чи маю я відмовлятися від доброго обіду лише тому, що не розумію процесу травлення?

Олівер Хевісайд, «Електромагнітна теорія», т. 2 (1899)

19.1. Від зосереджених елементів до розподілених

У попередньому розділі ми розглядали квазістаціонарні кола, де довжина кола l набагато менша за довжину хвилі $\lambda = cT$. Для таких кіл справедливі закон Ома, правила Кірхгофа та метод комплексних амплітуд у тій формі, як ми їх виклали. Але вже там, в (18.1), ми бачили межу цього наближення: магістральна лінія електропередачі, кабель зв'язку або доріжка на друкованій платі можуть мати довжину, сумірну з довжиною хвилі. Тоді напруга й струм у різних точках лінії зсунуті за фазою, і коло вже не можна описувати скінченним набором зосереджених елементів R, L, C.

Історично першими з цією проблемою зіткнулися не фізики, а інженери-телеграфісти. У 1850-х роках між Англією та Францією було прокладено перший підводний телеграфний кабель, а в 1858 році — трансатлантичний. Сигнал у ньому виявився настільки спотвореним, що вітальне повідомлення королеви Вікторії з 98 слів передавали близько 16 годин. Причина — не в самій довжині хвилі (телеграфні сигнали низькочастотні), а в тому, що ємність і опір кабелю розподілені вздовж тисяч кілометрів: кожен імпульс «розпливається», і час його наростання зростає як квадрат довжини кабелю («закон квадратів» В. Томсона, 1855 р.). Теорію, яка це описала, розробили Вільям Томсон (лорд Кельвін) та Олівер Хевісайд — і саме вона лягла в основу сучасної теорії ліній передачі.

Коло з розподіленими параметрами описують не скінченним набором R, L, C, а чотирма *погонними параметрами* — величинами, віднесеними до одиниці довжини лінії:

- R_0 — опір на одиницю довжини;
- L_0 — індуктивність на одиницю довжини;
- G_0 — провідність витоку на одиницю довжини;
- C_0 — ємність на одиницю довжини.

Провідність G_0 описує струми витоку між провідниками лінії — через недосконаліть ізоляції. У ідеальному випадку $G_0 = 0$, але для реальних кабелів цей параметр важливий, особливо на низьких частотах.

Як і в попередньому розділі, тут користуємося системою СІ: потік $\Phi = LI$, ЕРС самоіндукції дорівнює $-L\,dI/dt$, і ділянка лінії довжиною dz дає спад напруги $L_0\,dz\,\partial i/\partial t$.

19.2. Виведення телеграфних рівнянь

Розглянемо елементарний відрізок лінії довжиною dz (рис. 19.1). На цьому відрізку зосереджені елементи $R_0\,dz$, $L_0\,dz$, $G_0\,dz$ і $C_0\,dz$. Позначимо напругу і струм на вході відрізка як $u(z,t)$ та $i(z,t)$, а на виході — як $u(z+dz,t)$ та $i(z+dz,t)$.

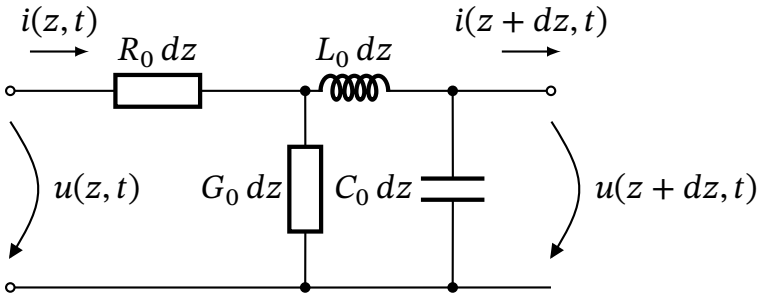


Рис. 19.1. Схема заміщення елементарного відрізка довгої лінії як чотириполюсника. Паралельні елементи $G_0\,dz$ і $C_0\,dz$ рознесені для наочності.

Застосуємо до цього відрізка *друге правило Кірхгофа*. Сума спадів напруг уздовж верхньої гілки дорівнює нулю:

$$u(z,t) - R_0\,dz\cdot i(z,t) - L_0\,dz\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} - u(z+dz,t) = 0. \qquad (19.1)$$

Переносячи $u(z+dz,t)$ у праву частину й ділячи на dz, отримуємо

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = R_0 i + L_0\frac{\partial i}{\partial t}. \qquad (19.2)$$

Тут ми скористалися означенням похідної:

$$\frac{u(z+dz,t)-u(z,t)}{dz} \xrightarrow{dz\to 0} \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Тепер застосуємо *перше правило Кірхгофа* до вузла на виході відрізка. Струм, що входить у вузол, дорівнює сумі струмів, що виходять:

$$i(z,t) - i(z+dz,t) - G_0\,dz\cdot u(z+dz,t) - C_0\,dz\frac{\partial u(z+dz,t)}{\partial t} = 0. \qquad (19.3)$$

Ділячи на dz і переходячи до границі $dz \to 0$, отримуємо

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = G_0 u + C_0\frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (19.4)$$

Рівняння (19.2) і (19.4) називаються *телеграфними рівняннями* у часовій формі. Разом вони утворюють систему двох диференціальних рівнянь першого порядку для двох невідомих функцій $u(z,t)$ і $i(z,t)$.

! *Телеграфні рівняння — це, по суті, закон Ома та правила Кірхгофа, записані для нескінченно малого відрізка лінії. У границі $dz \to 0$ скінченний набір зосереджених елементів перетворюється на неперервний розподіл параметрів уздовж лінії. Саме тому ці рівняння ще називають рівняннями довгої лінії: вони описують коло, довжина якого вже не мала порівняно з довжиною хвилі. Якщо формально покласти $L_0 = C_0 = 0$, рівняння зводяться до звичайного закону Ома для розподіленого опору — але саме наявність L_0 і C_0 робить поведінку лінії хвильовою.*

19.3. Гармонічний режим. Хвильове рівняння

Розглянемо випадок гармонічних сигналів, коли напруга й струм змінюються за законом $e^{i\omega t}$. Перейдемо до комплексних амплітуд:

$$u(z,t) = \operatorname{Re}\bigl[V(z)e^{i\omega t}\bigr], \qquad i(z,t) = \operatorname{Re}\bigl[I(z)e^{i\omega t}\bigr]. \qquad (19.5)$$

Підставляючи ці вирази в (19.2) і (19.4) і скорочуючи на $e^{i\omega t}$, отримуємо систему рівнянь для комплексних амплітуд:

$$-\frac{dV}{dz} = (R_0 + i\omega L_0)I, \qquad -\frac{dI}{dz} = (G_0 + i\omega C_0)V. \qquad (19.6)$$

Ці рівняння за формою нагадують закон Ома для ділянки кола, але тепер «опір» і «провідність» розподілені вздовж лінії й залежать від частоти.

Продиференціюємо перше рівняння (19.6) по z і підставимо в нього друге:

$$\frac{d^2V}{dz^2} = (R_0 + i\omega L_0)(G_0 + i\omega C_0)V. \qquad (19.7)$$

Аналогічно для струму:

$$\frac{d^2I}{dz^2} = (R_0 + i\omega L_0)(G_0 + i\omega C_0)I. \tag{19.8}$$

Введемо позначення

$$\boxed{\gamma = \sqrt{(R_0 + i\omega L_0)(G_0 + i\omega C_0)} = \alpha + i\beta,} \tag{19.9}$$

яке називається *сталою поширення*. Тоді рівняння (19.7) і (19.8) набирають вигляду

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \gamma^2 V, \qquad \frac{d^2I}{dz^2} = \gamma^2 I. \tag{19.10}$$

Це — одновимірні рівняння Гельмгольца.

Загальний розв'язок рівняння для напруги має вигляд

$$\boxed{V(z) = V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{+\gamma z},} \tag{19.11}$$

де V^+ і V^- — комплексні сталі, що визначаються граничними умовами. Перший доданок описує хвилю, що поширюється в напрямку $+z$ (від генератора до навантаження), другий — хвилю, що поширюється в напрямку $-z$ (відбиту від навантаження). Дійсна частина α називається *сталою згасання* і описує зменшення амплітуди хвилі з відстанню; уявна частина β — *фазовою сталою* і визначає довжину хвилі та фазову швидкість:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}, \qquad v_\text{ф} = \frac{\omega}{\beta}. \tag{19.12}$$

Підставляючи (19.11) у перше рівняння (19.6), знаходимо вираз для струму:

$$I(z) = \frac{\gamma}{R_0 + i\omega L_0}\left(V^+ e^{-\gamma z} - V^- e^{+\gamma z}\right). \tag{19.13}$$

Величина

$$\boxed{Z_\text{хв} = \frac{R_0 + i\omega L_0}{\gamma} = \sqrt{\frac{R_0 + i\omega L_0}{G_0 + i\omega C_0}}} \tag{19.14}$$

називається *хвильовим опором* лінії. Через неї вираз для струму записується компактно:

$$I(z) = \frac{1}{Z_\text{хв}}\left(V^+ e^{-\gamma z} - V^- e^{+\gamma z}\right). \tag{19.15}$$

! *Хвильовий опір — це не опір у звичному розумінні. Це величина, яка показує, у якому відношенні перебувають напруга й струм у біжучій хвилі. Якщо лінія нескінченно довга або навантажена на $Z_н = Z_{хв}$, то відбитої хвилі немає ($V^- = 0$), і $V/I = Z_{хв}$. Саме тому узгодження навантаження з хвильовим опором лінії — одна з головних задач радіотехніки та НВЧ-техніки. Для лінії без втрат ($R_0 = G_0 = 0$) хвильовий опір дійсний: $Z_{хв} = \sqrt{L_0/C_0}$. Для коаксіального кабелю з хвильовим опором 50 Ом це означає, що напруга і струм у біжучій хвилі збігаються за фазою — так само як на активному опорі.*

Нехай лінія навантажена на кінці $z = l$ імпедансом $Z_н$, тобто $V(l) = Z_н I(l)$. Підставляючи (19.11) і (19.15), знаходимо відношення відбитої хвилі до падаючої на кінці лінії — *коефіцієнт відбиття*:

$$\Gamma = \frac{V^- e^{\gamma l}}{V^+ e^{-\gamma l}} = \frac{Z_н - Z_{хв}}{Z_н + Z_{хв}}. \tag{19.16}$$

За узгодженого навантаження ($Z_н = Z_{хв}$) $\Gamma = 0$; на розімкненому кінці ($Z_н \to \infty$) $\Gamma = 1$ — хвиля напруги відбивається без зміни знака; на закороченому ($Z_н = 0$) $\Gamma = -1$.

19.4. Лінія без втрат

Розглянемо важливий граничний випадок, коли втратами в лінії можна знехтувати: $R_0 = 0$, $G_0 = 0$. Тоді стала поширення (19.9) стає чисто уявною:

$$\gamma = i\omega\sqrt{L_0 C_0} = i\beta, \qquad \beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}, \qquad \alpha = 0. \tag{19.17}$$

Згасання відсутнє, хвиля поширюється без зменшення амплітуди. Фазова швидкість і довжина хвилі дорівнюють

$$v_ф = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}, \qquad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{L_0 C_0}}. \tag{19.18}$$

У лінії без втрат фазова швидкість $v_ф$ не залежить від частоти; у реальній лінії з втратами вона від частоти залежить, і це є причиною дисперсійного спотворення сигналу (див. нижче).

Хвильовий опір стає дійсним:

$$Z_{хв} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \tag{19.19}$$

Розв'язок для напруги набирає вигляду

$$V(z) = V^+ e^{-i\beta z} + V^- e^{+i\beta z}. \tag{19.20}$$

Переходячи до часової залежності $u(z,t) = \mathrm{Re}[V(z)e^{i\omega t}]$, отримуємо

$$u(z,t) = |V^+|\cos(\omega t - \beta z + \varphi^+) + |V^-|\cos(\omega t + \beta z + \varphi^-). \tag{19.21}$$

Перший доданок описує хвилю, що біжить у напрямку $+z$ з фазовою швидкістю $v_\text{ф}$; другий — хвилю, що біжить у протилежному напрямку. Якщо відбитої хвилі немає ($V^- = 0$), напруга і струм у кожній точці лінії збігаються за фазою, а їхнє відношення дорівнює $Z_\text{хв}$.

Якщо ж відбита хвиля присутня, виникає інтерференційна картина — стояча хвиля, показана на рис. 19.2. Амплітуда сумарної напруги періодично змінюється вздовж лінії: максимуми дорівнюють $|V^+| + |V^-|$, мінімуми — $|V^+| - |V^-|$ (при повному відбитті мінімуми перетворюються на вузли). Глибину модуляції характеризує *коефіцієнт стоячої хвилі*

$$\text{КСХ} = \frac{|V^+| + |V^-|}{|V^+| - |V^-|} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}.$$

Для узгодженого навантаження (відбитої хвилі немає) КСХ = 1, при повному відбитті КСХ $\to \infty$.

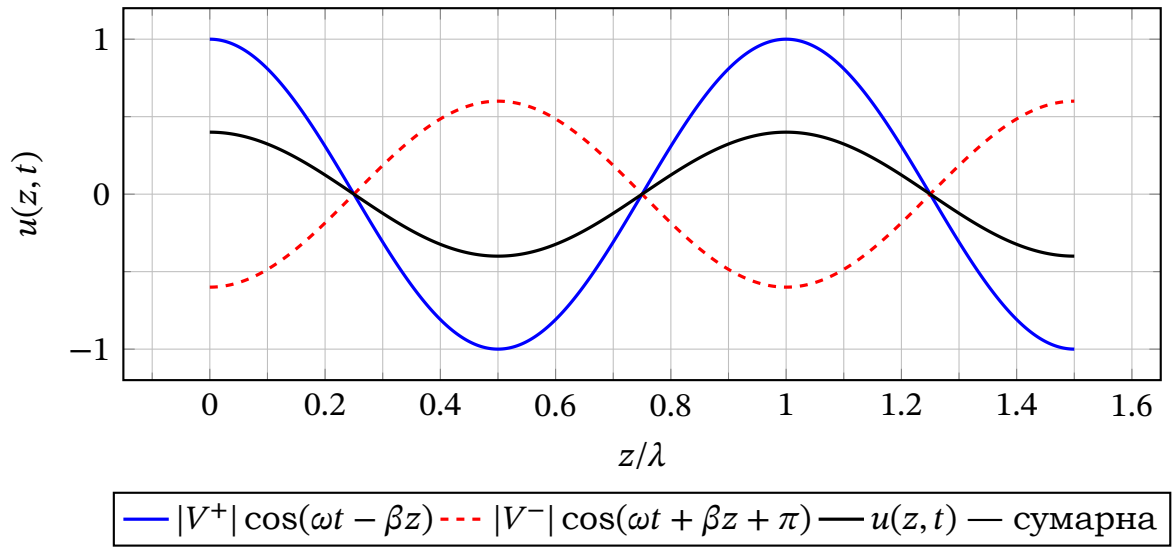


Рис. 19.2. Інтерференція падаючої та відбитої хвиль у лінії без втрат при $|V^-|/|V^+| = 0{,}6$. Амплітуда сумарної напруги має максимуми й мінімуми (стояча хвиля). Коефіцієнт стоячої хвилі КСХ $= (1 + 0{,}6)/(1 - 0{,}6) = 4$.

! *Для лінії без втрат фазова швидкість $v_\text{ф} = 1/\sqrt{L_0 C_0}$ не залежить від частоти. Це означає, що сигнал довільної форми поширюється без спотворень — усі його спектральні складові біжать*

! *з однаковою швидкістю. У реальних лініях з втратами $v_ф$ залежить від частоти, що призводить до дисперсії: різні складові сигналу приходять у різний час, і імпульс «розмазується». Саме ця проблема мучила перші трансатлантичні кабелі. Хевісайд 1887 р. показав, що спотворень можна позбутися, якщо штучно збільшити індуктивність лінії так, щоб виконувалася умова $R_0/L_0 = G_0/C_0$ — так звана* лінія без спотворень. *На практиці індуктивність ліній почали збільшувати котушками (М. Пупін, 1899–1900 рр.), що в кілька разів збільшило дальність телефонного зв'язку.*

Наочно ефект дисперсійного розмазування показано на рис. 19.3: гауссовий імпульс при поширенні вздовж реальної лінії поступово розширюється і зменшується за амплітудою.

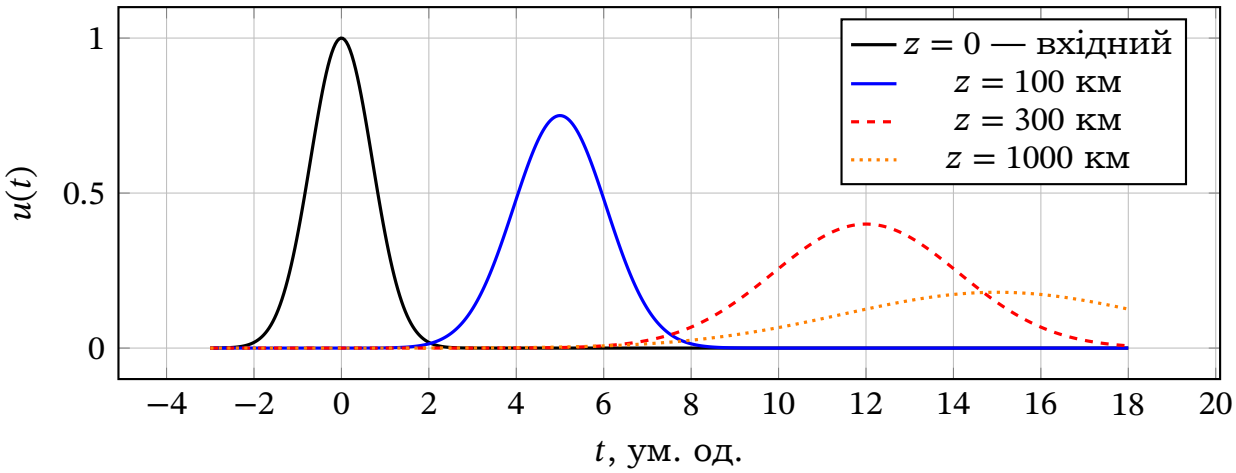


Рис. 19.3. Дисперсійне спотворення гауссового імпульсу при поширенні в лінії з втратами. З відстанню імпульс розширюється і зменшується за амплітудою — саме ця проблема мучила перші трансатлантичні кабелі.

19.5. Польова картина. Зв'язок з рівняннями Максвелла

Теорія довгих ліній оперує інтегральними величинами — напругою $u(z,t)$ та струмом $i(z,t)$, — які описують стан лінії як цілого. Проте самі ці величини є лише зручною мовою для опису глибшого фізичного процесу: у просторі, що оточує лінію, існують електричне та магнітне поля, які змінюються з часом і в просторі. Сукупність цих полів і являє собою *електромагнітну хвилю*. Тому, коли в лінії поширюється біжуча хвиля струму (або напруги), уздовж лінії біжить електромагнітна хвиля; відповідно, відбиття хвилі струму (або напруги) означає відбиття електромагнітної хвилі.

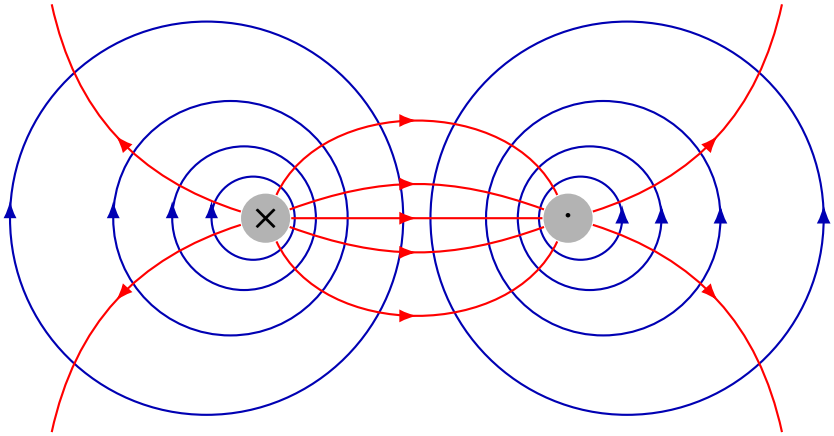


Рис. 19.4. Лінії електричного (червоні) та магнітного (сині) полів для біжучої хвилі в перерізі двопровідної лінії

На рис. 19.4 показано лінії електричного та магнітного полів для біжучої хвилі в деякому перерізі двопровідної лінії у фіксований момент часу. Лінії магнітного поля охоплюють провідники, а лінії електричного поля спрямовані від провідника з більшим потенціалом до провідника з меншим потенціалом. Електричне та магнітне поля коливаються у фазі. Обидва вектори лежать у площині поперечного перерізу: поздовжніх складових поля в такій хвилі (для ідеальних провідників) немає, тому її називають *поперечною* (ТЕМ-хвилею). Вектор Пойнтінга

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

спрямований уздовж проводів від джерела до навантаження — саме він переносить енергію вздовж лінії.

! *Важливо розрізняти* струм провідності *в дротах і* струм зміщення *між ними. Вздовж проводів тече струм провідності $i(z,t)$; саме він визначає магнітне поле в перерізі за законом Ампера* (19.22). *Оскільки напруга u змінюється в часі, між проводами існує змінне електричне поле, а отже, й струм зміщення, який тече від одного провідника до іншого. Він «замикає» струм, що зменшується вздовж лінії: друге телеграфне рівняння $-\partial i/\partial z = C_0\,\partial u/\partial t$ (при $G_0 = 0$) якраз і виражає, що частина струму провідності «витікає» з проводу в діелектрик у вигляді струму зміщення. У самих дротах, внаслідок їхньої високої провідності, поле дуже мале, тому струм зміщення там значно менший за струм провідності; в діелектрику, навпаки, струму провідності практично немає. У стоячій хвилі при повному відбитті коливання електричного та магнітного полів зсунуті за фазою на $\pi/2$.*

Положення вузлів і пучностей полів $\mathbf{E}$ *і* $\mathbf{H}$ *повторюють положення вузлів і пучностей напруги u і струму i відповідно.*

! *Провідники довгої лінії самі по собі не «проштовхують» енергію. Вони відіграють роль* напрямних елементів *(напрямної системи): задають граничні умови для електричного й магнітного полів, змушуючи електромагнітну хвилю поширюватися вздовж лінії.*

Зв'язок між характеристиками поля $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ та величинами в колі (u, i) визначається інтегральними співвідношеннями в поперечному перерізі лінії:

$$u(z,t) = \int_1^2 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}, \qquad i(z,t) = \oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{r}, \tag{19.22}$$

де перший інтеграл береться вздовж довільної лінії між провідниками 1 та 2, а другий — за замкненим контуром C, що охоплює один із провідників.

Оскільки структура поля в кожному поперечному перерізі за формою збігається з відповідними задачами електростатики та магнітостатики, погонні параметри визначені суто геометрією провідників та властивостями діелектрика (ε, μ).

З фундаментальних рівнянь Максвелла випливає (доведення — у прикладі нижче) універсальне співвідношення між погонною індуктивністю та ємністю для *довільної* лінії з двох провідників в однорідному середовищі:

$$L_0 C_0 = \varepsilon\varepsilon_0\,\mu\mu_0 = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}. \tag{19.23}$$

Тут ε і μ — відносні діелектрична та магнітна проникності середовища, $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. (У гауссовій системі, де $\Phi = LI/c$, те саме співвідношення має вигляд $L_0C_0 = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0$.)

Якщо підставити цей результат у формулу для фазової швидкості хвилі в лінії без втрат $v_\text{ф} = 1/\sqrt{L_0C_0}$, ми отримаємо:

$$v_\text{ф} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \tag{19.24}$$

де c — швидкість світла у вакуумі.

Це фундаментальний результат: *сигнал у довгій лінії поширюється саме зі швидкістю світла у діелектрику*, що оточує провідники.

* **Доведення співвідношення** $L_0C_0 = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0$*. Розглянемо біжучу хвилю в лінії без втрат і запишемо енергію електричного й магнітного полів на одиницю довжини двома способами. Через погонні параметри

$$W'_E = \frac{1}{2}C_0u^2, \qquad W'_H = \frac{1}{2}L_0i^2,$$

а через поля (інтеграли по поперечному перерізу S)

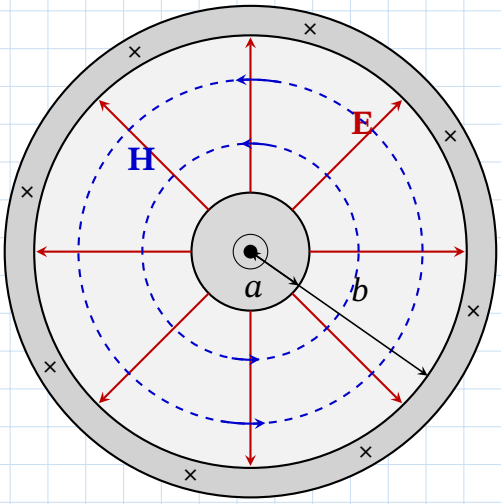
$$W'_E = \frac{1}{2}\int_S \varepsilon\varepsilon_0 E^2\,dS, \qquad W'_H = \frac{1}{2}\int_S \mu\mu_0 H^2\,dS.$$

У біжучій хвилі в кожній точці перерізу $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\,E = \sqrt{\mu\mu_0}\,H$, тож $W'_E = W'_H$, звідки $C_0u^2 = L_0i^2$, тобто $Z_{\text{хв}} = u/i = \sqrt{L_0/C_0}$. Потік енергії крізь переріз

$$P = \int_S EH\,dS = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}\int_S E^2\,dS = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}\,W'_E = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,W',$$

де $W' = 2W'_E$ — повна енергія хвилі на одиницю довжини. Хвиля переносить цю енергію зі швидкістю $v_\text{ф}$, тож $P = v_\text{ф}W'$ і $v_\text{ф} = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Порівнюючи з $v_\text{ф} = 1/\sqrt{L_0C_0}$, отримуємо $L_0C_0 = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0$ незалежно від геометрії провідників.

Коаксіальний кабель. Як приклад застосування польового підходу, розрахуємо параметри коаксіального кабелю з радіусом внутрішньої жили a, радіусом зовнішнього екрана b та діелектриком (ε, μ).



Структура електромагнітного поля в поперечному перерізі довгої лінії (коаксіального кабелю): вектор **E** спрямований від внутрішньої жили до зовнішнього екрана, а лінії вектора **H** охоплюють провідник зі струмом.

Застосовуючи теорему Гаусса та закон Ампера для перерізу кабелю:

$$E(r) = \frac{q'}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}, \qquad H(r) = \frac{i}{2\pi r}, \tag{19.25}$$

де q' — погонний заряд. Знаходячи напругу $u = \int_a^b E(r)\,dr$ та магнітний потік $\Phi' = \int_a^b \mu\mu_0 H(r)\,dr$ і вводячи погонні параметри співвідношеннями

* $q' = C_0 u$ та $\Phi' = L_0 i$, отримуємо:

$$C_0 = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\ln(b/a)}, \qquad L_0 = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{19.26}$$

Легко перевірити, що $L_0 C_0 = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0$. Хвильовий опір такого кабелю $Z_{\text{хв}} = \sqrt{L_0/C_0}$ дорівнює:

$$Z_{\text{хв}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\eta}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \approx \frac{60}{\sqrt{\varepsilon}}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\ \text{Ом} \quad (\mu = 1), \tag{19.27}$$

де $\eta = \sqrt{\mu\mu_0/\varepsilon\varepsilon_0}$ — хвильовий опір самого діелектрика (для вакууму $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \approx 377$ Ом).

Підсумки

Метод зосереджених елементів R, L, C працює, поки довжина кола l набагато менша за довжину хвилі $\lambda = cT$: тоді напруга й струм у всіх точках кола змінюються синхронно. Якщо l сумірна з λ, сигнал не встигає «одночасно» охопити все коло, а u та i залежать і від часу, і від координати z вздовж лінії. Тоді коло описують *погонними параметрами* R_0, L_0, G_0, C_0 (на одиницю довжини), а замість рівнянь для окремих елементів записують рівняння в частинних похідних.

Усе зводиться до відповідей на три запитання:

1. *Коли коло слід вважати довгою лінією?* Коли час проходження сигналу вздовж кола порівнянний з періодом, тобто $l \sim \lambda$.
2. *Як і з якою швидкістю поширюється сигнал?* Як хвиля: у лінії без втрат вона біжить зі швидкістю $1/\sqrt{L_0 C_0} = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ без спотворень. Втрати призводять до згасання й дисперсії, а за умови $R_0/L_0 = G_0/C_0$ дисперсія зникає.
3. *Що відбувається на кінці лінії?* Відношення u/i у біжучій хвилі дорівнює $Z_{\text{хв}}$. Якщо опір навантаження $Z_{\text{н}} = Z_{\text{хв}}$, відбитої хвилі немає; інакше виникає відбита хвиля з коефіцієнтом $\Gamma = (Z_{\text{н}} - Z_{\text{хв}})/(Z_{\text{н}} + Z_{\text{хв}})$, а вздовж лінії — стояча хвиля з коефіцієнтом КСХ $= (|V^+| + |V^-|)/(|V^+| - |V^-|)$.

За рівнянням $v_{\text{ф}} = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ сигнал у лінії поширюється зі швидкістю світла в діелектрику (для поліетиленового кабелю $v_{\text{ф}} \approx 2\cdot 10^8$ м/с), а хвильовий опір типових коаксіальних кабелів лежить у межах 50–75 Ом. Напруга й струм — лише зручна мова для опису електромагнітної хвилі, що біжить у діелектрику між провідниками: u і i є інтегралами від $\mathbf{E}$ та $\mathbf{H}$ по перерізу лінії, а самі провідники виконують роль напрямної системи й не «проштовхують» енергію. Саме тому теорія довгих ліній є мостом між теорією кіл і електродинамікою хвиль.

Задачі

19.1. Коаксіальний кабель має внутрішню жилу радіусом $a = 0{,}5$ мм та зовнішній екран радіусом $b = 2{,}0$ мм. Діелектрик між ними — поліетилен із відносною діелектричною проникністю $\varepsilon = 2{,}25$; $\mu \approx 1$. Обчисліть погонні ємність C_0 та індуктивність L_0, хвильовий опір $Z_{\text{хв}}$ і фазову швидкість $v_{\text{ф}}$.

19.2. Коаксіальний кабель має внутрішню жилу радіусом $a = 0{,}5$ мм, зовнішній екран радіусом $b = 3a$ та діелектрик із $\varepsilon = 2{,}25$, $\mu = 1$. Обчисліть $Z_{\text{хв}}$ і $v_{\text{ф}}/c$. Як зміняться вони, якщо збільшити b удвічі, не змінюючи діелектрика?

19.3. Кабель з хвильовим опором 50 Ом навантажено на опір 75 Ом. Знайдіть коефіцієнт відбиття, КСХ і частку потужності, що відбивається від навантаження.

19.4. Яку затримку вносить відрізок поліетиленового кабелю ($\varepsilon = 2{,}25$) завдовжки 100 м?

19.5. Сигнал біжить доріжкою друкованої плати завдовжки 1 м зі швидкістю $v \approx c/2$. Починаючи з якої частоти доріжку вже не можна вважати квазістаціонарною, якщо вимагати $l \leqslant \lambda/10$?

Контрольні питання

1. Чому кола з зосередженими елементами перестають адекватно описувати лінію, довжина якої сумірна з довжиною хвилі сигналу? Наведіть історичний приклад трансатлантичного телеграфного кабелю.
2. Що таке погонні параметри довгої лінії R_0, L_0, G_0, C_0? Яку фізичну роль відіграє кожен із них?
3. Виведіть перше телеграфне рівняння $-\partial u/\partial z = R_0 i + L_0\,\partial i/\partial t$, застосовуючи друге правило Кірхгофа до елементарного відрізка лінії.
4. Виведіть друге телеграфне рівняння $-\partial i/\partial z = G_0 u + C_0\,\partial u/\partial t$, застосовуючи перше правило Кірхгофа до вузла на виході відрізка.
5. Перейдіть до комплексних амплітуд у гармонічному режимі й виведіть хвильове рівняння (рівняння Гельмгольца) для напруги $d^2V/dz^2 = \gamma^2 V$. Що таке стала поширення $\gamma = \alpha + i\beta$?
6. Запишіть загальний розв'язок для напруги $V(z) = V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{+\gamma z}$. Що фізично означають доданки з V^+ і V^-, і що описують стала

згасання α та фазова стала β?

7. Що таке хвильовий опір лінії $Z_{\text{хв}}$? Чому це не опір у звичному розумінні, а відношення напруги до струму саме в біжучій хвилі?

8. Розгляньте лінію без втрат ($R_0 = G_0 = 0$): чому стала поширення стає чисто уявною, а хвильовий опір — дійсним? Виведіть фазову швидкість $v_\text{ф} = 1/\sqrt{L_0 C_0}$.

9. Що таке коефіцієнт відбиття? Чому він дорівнює для узгодженого, розімкненого й закороченого кінця лінії?

10. Що таке стояча хвиля в лінії та коефіцієнт стоячої хвилі (КСХ)? За яких умов виникає стояча хвиля замість чистої біжучої?

11. Що таке дисперсія сигналу в довгій лінії, і чому вона призводить до «розмазування» імпульсу? Яку умову лінії без спотворень знайшов Хевісайд, щоб цього уникнути?

12. Як пов'язані напруга й струм у лінії з польовими величинами **E** і **H** через інтеграли вздовж перерізу лінії? Чому електричне й магнітне поля в довгій лінії лежать у площині, перпендикулярній до осі z?

13. Чому провідники довгої лінії самі по собі не «проштовхують» енергію, а лише напрямляють електромагнітну хвилю? У якому напрямку спрямований вектор Пойнтінга в довгій лінії?

14. Виведіть універсальне співвідношення $L_0 C_0 = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0$ для довільної лінії з двох провідників, спираючись на енергетичний баланс біжучої хвилі (рівність енергій електричного й магнітного полів на одиницю довжини).

15. Чому з універсального співвідношення $L_0 C_0 = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0$ випливає, що фазова швидкість сигналу в довгій лінії дорівнює швидкості світла в діелектрику лінії, $v_\text{ф} = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, незалежно від геометрії провідників?

16. Виведіть погонні параметри C_0 і L_0 коаксіального кабелю через радіуси a, b та властивості діелектрика, застосовуючи теорему Гаусса й закон Ампера. Виведіть формулу хвильового опору коаксіального кабелю через хвильовий опір діелектрика η.

17. Як зміниться хвильовий опір коаксіального кабелю, якщо збільшити радіус зовнішнього екрана, не змінюючи діелектрика? Чи вплине це на фазову швидкість сигналу?

20 Хвилеводи

Якщо частота коливання, що виникло в якомусь місці циліндра, значно менша за цю [найнижчу частоту], то збурення практично обмежується скінченною прилеглою ділянкою циліндра.

Лорд Релей, «Про проходження електричних хвиль крізь труби» (1897)

20.1. Від довгої лінії до хвилеводу

У попередньому розділі ми розглянули довгу лінію — найпростішу напрямну систему, в якій електромагнітна хвиля поширюється вздовж *двох* провідників. Така конфігурація має принципове обмеження: зі зростанням частоти (а отже, зі зменшенням довжини хвилі) відстань між провідниками стає сумірною з довжиною хвилі, а втрати в діелектрику й металі різко зростають. На частотах вище кількох гігагерців коаксіальний кабель стає непридатним для передачі великої потужності.

Природний вихід — *відмовитися від другого провідника*. Виявляється, що електромагнітна хвиля може поширюватися вздовж *порожнистої металевої труби* або *діелектричного стрижня*, не маючи жодного «зворотного» дроту. Такі напрямні системи називаються *хвилеводами*.

Будь-яку електромагнітну хвилю, що поширюється вздовж осі x, можна розкласти на поперечну (у площині yz) та поздовжню (уздовж x) складові. Залежно від того, які складові мають електричне й магнітне поля, розрізняють три типи хвиль:

- *ТЕМ-хвиля* (від англ. *Transverse Electro-Magnetic*, *поперечна електромагнітна*): *обидва* вектори — і $\mathbf{E}$, і $\mathbf{H}$ — лежать у поперечній площині. Поздовжніх складових немає: $E_x = 0$, $H_x = 0$ (x — напрям поширення хвилі).
- *ТЕ-хвиля* (від англ. *Transverse Electric*, *поперечно-електрична*):

електричне поле **E** лежить у поперечній площині ($E_x = 0$), але магнітне поле має поздовжню складову ($H_x \neq 0$). Іноді позначають як *H-хвиля*.

- *TM-хвиля* (від англ. *Transverse Magnetic*, *поперечно-магнітна*): магнітне поле **H** лежить у поперечній площині ($H_x = 0$), але електричне поле має поздовжню складову ($E_x \neq 0$). Іноді позначають як *E-хвиля*.

У довгій лінії існує TEM-хвиля. У порожнистому металевому хвилеводі TEM-хвиля існувати не може. Там поширюються лише TE- або TM-хвилі.

> **!** *Чому TEM-хвиля неможлива в порожнистому хвилеводі? Інтуїтивно: для TEM-хвилі електричне поле в перерізі має бути потенціальним, тобто описуватися скалярним потенціалом $\varphi(y,z)$, який задовольняє рівняння Лапласа $\Delta\varphi = 0$. Але стінки порожнистого хвилеводу утворюють* один *провідник, тому гранична умова вимагає $\varphi = \text{const}$ на всьому контурі перерізу, а це разом із рівнянням Лапласа дає $\varphi = \text{const}$ всередині — тобто* $\mathbf{E} = 0$. *(У коаксіальному кабелі два провідники мають різні потенціали, тому там TEM-хвиля можлива.) Отже, TEM-хвилі в порожнистому хвилеводі не буває.*

20.2. Прямокутний хвилевід

Найпростіший і найпоширеніший тип хвилеводу — *прямокутна металева труба* зі сторонами a і b (зазвичай $a > b$). Оскільки, як ми вже з'ясували, TEM-хвиля в порожнистому хвилеводі неможлива, у ньому можуть поширюватися лише хвилі типу TE або TM.

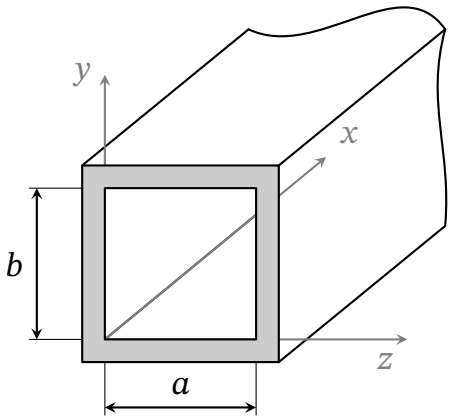


Рис. 20.1. Прямокутний хвилевід

Розглянемо TE-хвилі в прямокутному хвилеводі. Стінки хвилеводу будемо вважати ідеально провідними, розміри хвилеводу та

положення системи координат наведено на рис. 20.1. Припустимо, що електричний вектор хвилі напрямлений уздовж осі y. Шукатимемо поле, яке не залежить від y. На стінках $y = 0$ і $y = b$ таке поле $\mathbf{E} = E_y\mathbf{e}_y$ перпендикулярне до поверхні, тож гранична умова (зникнення дотичної складової $\mathbf{E}$) там виконується автоматично; лишаються лише умови на стінках $z = 0$ і $z = a$. Тому отриманий нижче розв'язок — не наближення, а точна мода TE_{n0} прямокутного хвилеводу скінченного перерізу. Фізичну картину поширення — багаторазове відбиття хвиль від стінок — розглянуто нижче.

Таким чином, задача зводиться до двох вимірів. Хвильове рівняння (16.9) для напруженості електричного поля у вибраній системі декартових координат має вигляд

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \tag{20.1}$$

де $E = E_y(x, z, t)$.

Оскільки стінки хвилеводу ідеально провідні, гранична умова для E має вигляд

$$E(x, 0, t) = 0, \quad E(x, a, t) = 0. \tag{20.2}$$

Будемо шукати розв'язок рівняння у вигляді

$$E = E_0 \sin k_z z e^{i(\omega t - k_x x)}, \tag{20.3}$$

причому для задоволення граничним умовам (20.2) треба покласти

$$k_z a = \pi n \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{20.4}$$

На рис. 20.2 для $n = 1$ показано поперечний профіль

$$E_y \propto \sin\Big(\frac{\pi z}{a}\Big), \tag{20.5}$$

який дорівнює нулю на стінках $z = 0$ та $z = a$, а максимум має при $z = a/2$. Це і є графічна ілюстрація граничних умов (20.2) і вибраної моди хвилеводу.

Очевидно також, що розв'язок (20.3) задовольняє умову відсутності вільних зарядів у хвилеводі: $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \partial E_y/\partial y = 0$, $E_x = E_z = 0$. Підставляючи (20.3) в (20.1), отримуємо:

$$(-k_x^2 - k_z^2 + \omega^2/c^2)E = 0. \tag{20.6}$$

Ця рівність може бути задоволена лише за умови

$$-k_x^2 - k_z^2 + \omega^2/c^2 = 0, \tag{20.7}$$

з якого випливає, що

$$k_x = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 n^2}{a^2}}. \tag{20.8}$$

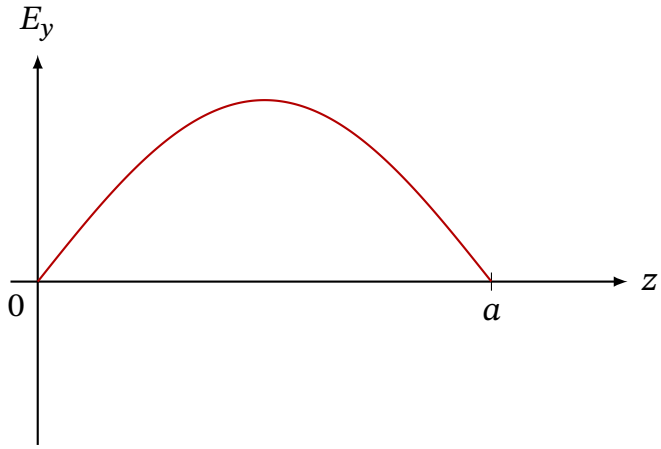


Рис. 20.2. Графік рівняння (20.3) при $n = 1$.

Гранична частота. Електромагнітна хвиля поширюється в хвилеводі без згасання, якщо в (20.3) величина k_x дійсна. Це означає, що в (20.8) підкореневий вираз не повинен бути від'ємним. Звідси отримуємо умову, за якої у хвилеводі поширюються хвилі:

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 n^2}{a^2} \geqslant 0 \tag{20.9}$$

або

$$\omega \geqslant \frac{\pi c}{a} n. \tag{20.10}$$

Таким чином, при заданому значенні n, що характеризує форму хвилі в напрямку осі z, існує *гранична частота*. Електромагнітні хвилі з меншою частотою не можуть поширюватися в хвилеводі: при $\omega < \omega_0$ величина $k_x = -i\kappa$ уявна, поле спадає вздовж хвилеводу як $e^{-\kappa x}$ і енергія не переноситься. Значення цієї частоти отримується з (20.10) при $n = 1$:

$$\omega_0 = \pi c/a. \tag{20.11}$$

Наявність граничної частоти означає, іншими словами, існування хвилі з максимальною довжиною хвилі, яка здатна поширюватися в хвилеводі. Враховуючи, що $\lambda = cT = 2\pi c/\omega$, отримуємо для граничної довжини хвилі

$$\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0 = 2a. \tag{20.12}$$

Ця рівність має дуже ясний геометричний зміст: *в розглядуваному хвилеводі можуть поширюватися лише хвилі, довжина хвилі яких (у вільному просторі) менша за подвоєну ширину хвилеводу* $2a$.

! *Наявність граничної частоти є характерною рисою порожнистих металевих хвилеводів (ТЕМ-лінії, як-от коаксіальний кабель, граничної частоти не мають), хоча її значення залежить від форми й розмірів перерізу. Саме тому такі хвилеводи — це фільтри високих частот: вони пропускають високі частоти й блокують низькі. Це принципово відрізняє їх від довгої лінії, яка пропускає все.*

Фазова швидкість. Згідно з виразом (20.3) ця швидкість знаходиться з умови

$$\omega t - k_x x = \text{const}, \tag{20.13}$$

звідки

$$v_\text{ф} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k_x} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2/c^2 - \pi^2/a^2}} = c\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \pi^2 c^2/a^2}} > c. \tag{20.14}$$

! *Фазова швидкість електромагнітних хвиль у хвилеводі більша за швидкість світла. Це не суперечить теорії відносності: фазова швидкість — це швидкість руху точки сталої фази, а не швидкість перенесення енергії чи сигналу (див. групову швидкість нижче). Конкретне значення $v_ф$ залежить від властивостей хвилеводу та типу хвилі.*

З урахуванням виразів (20.11) і (20.12) формулу (20.14) зручно подати у вигляді

$$v_\text{ф} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_0/\omega)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_0)^2}}. \tag{20.15}$$

Отже, $\omega \geqslant \omega_0$, $\lambda \leqslant \lambda_0$, оскільки в протилежному випадку фазова швидкість стає уявною, тобто поширення хвиль неможливе.

Групова швидкість. Енергію й сигнал переносить хвильовий пакет, що рухається з *груповою швидкістю* $v_\text{г} = d\omega/dk_x$. З дисперсійного співвідношення $\omega^2 = c^2(k_x^2 + k_z^2)$ маємо $\omega\, d\omega = c^2 k_x\, dk_x$, тому

$$v_\text{г} = \frac{c^2 k_x}{\omega} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}, \qquad v_\text{ф}\, v_\text{г} = c^2. \tag{20.16}$$

Отже, $v_\text{г} < c$: сигнал у хвилеводі поширюється повільніше за світло у вакуумі. При $\omega \to \omega_0$ групова швидкість прямує до нуля (уздовж хвилеводу хвиля майже не просувається), а при $\omega \gg \omega_0$ обидві швидкості наближаються до c.

Фізичний зміст цього результату простий. Розв'язок (20.3) є різницею двох плоских хвиль, що біжать під кутами $\pm\theta$ до осі x і багаторазово відбиваються від стінок, причому $\sin\theta = k_z c/\omega$, $\cos\theta = k_x c/\omega$.

Уздовж хвилеводу хвиля просувається зигзагом, тому $v_г = c\cos\theta < c$, а фазова картина вздовж осі «біжить» швидше: $v_ф = c/\cos\theta > c$. На граничній частоті $\theta = 90°$: хвиля лише «б'ється» між стінками й нікуди не рухається вздовж осі. Така сама картина багаторазових відбиттів лежить в основі оптичного волокна.

Оптичне волокно — діелектричний хвилевід. Металеві хвилеводи — не єдиний тип напрямних систем. На початку розділу ми вже згадали діелектричний стрижень як хвилевід без металевих стінок; найважливіший приклад такого хвилеводу — оптичне волокно. Якщо замість порожнистої труби взяти *діелектричний стрижень* із показником заломлення n_1, оточений середовищем із меншим показником $n_2 < n_1$, то електромагнітна хвиля може поширюватися вздовж стрижня завдяки *повному внутрішньому відбиттю*.

Саме так працює *оптичне волокно*. Його серцевина має показник заломлення n_1, а оболонка — $n_2 < n_1$. Світло, яке входить у серцевину під достатньо малим кутом, багаторазово відбивається від межі «серцевина-оболонка» і поширюється вздовж волокна з дуже малими втратами (рис. 20.3). Умова повного відбиття: кут падіння θ на межу (від нормалі) має задовольняти $\sin\theta \geqslant n_2/n_1$.

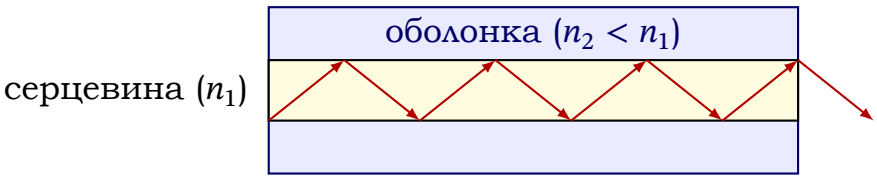


Рис. 20.3. Поширення світла в оптичному волокні завдяки повному внутрішньому відбиттю на межі серцевина-оболонка: промінь «замкнений» усередині серцевини й рухається вздовж волокна майже без втрат.

! *Оптичне волокно — це, по суті, хвилевід, у якому роль «стінок» відіграє не метал, а межа двох діелектриків. У ньому теж існують моди (їх називають LP), для вищих мод існує критична частота (основна мода її не має — на цьому ґрунтується одномодовий режим). Волокно з діаметром серцевини близько 9 мкм використовується в магістральних лініях зв'язку; втрати в ньому становлять близько 0,2 дБ/км, тому сигнал проходить десятки й сотні кілометрів без підсилення, а з оптичними підсилювачами — тисячі.*

Підсумки

На високих частотах двопровідні лінії стають непридатними, і електромагнітну хвилю спрямовують уздовж порожнистої металевої труби або діелектричного стрижня — *хвилеводу*. Залежно від наявності поздовжніх складових полів розрізняють ТЕМ-, ТЕ- та ТМ-хвилі; у порожнистому металевому хвилеводі ТЕМ-хвиля неможлива, бо за відсутності другого провідника потенціал перерізу стала величина.

Усе зводиться до відповідей на три запитання:

1. *Які хвилі можуть існувати в хвилеводі?* Лише ТЕ та ТМ (у порожнистому металевому); електричне поле на стінках мусить зникати, тому поперек хвилеводу вкладається ціла кількість півхвиль, $k_z a = \pi n$.
2. *Коли хвиля поширюється?* Лише за $\omega > \omega_0$, тобто коли довжина хвилі менша за $2a$. Нижче граничної частоти поле експоненційно спадає вздовж хвилеводу, а енергія не переноситься.
3. *З якою швидкістю?* Фазова швидкість перевищує c, групова — менша за c, а їхній добуток дорівнює c^2; перенесення енергії відбувається з груповою швидкістю, тому теорії відносності це не суперечить.

Фізично все це — наслідок багаторазового відбиття плоскої хвилі від стінок: вздовж осі хвиля просувається зигзагом зі швидкістю $c\cos\theta$, а на граничній частоті $\theta = 90°$. Те саме відбиття, але на межі двох діелектриків, утримує світло в оптичному волокні. Порівняно з довгою лінією, де ТЕМ-хвиля не має граничної частоти й поширюється без дисперсії зі швидкістю $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, хвилевід є фільтром високих частот із дисперсією.

Задачі

20.1. *Стандартний хвилевід.* Прямокутний хвилевід має ширину $a = 2{,}286$ см. Знайдіть граничну частоту моди TE_{10}, а також фазову й групову швидкості та довжину хвилі в хвилеводі $\lambda_в = 2\pi/k_x$ на частоті 10 ГГц.

20.2. *Які моди поширюються?* Які моди TE_{n0} поширюються в тому самому хвилеводі на частоті 15 ГГц?

20.3. *Нижче граничної частоти.* На якій відстані поле частоти 5 ГГц слабне в e разів у тому самому хвилеводі?

20.4. *Затримка сигналу.* За який час сигнал частоти 10 ГГц проходить 1 м того самого хвилеводу? Порівняйте з вакуумом.

Контрольні питання

1. Чому на частотах вище кількох гігагерців коаксіальний кабель стає непридатним для передачі великої потужності, і який природний вихід із цієї проблеми пропонують хвилеводи?
2. Дайте означення трьох типів хвиль у напрямних системах — ТЕМ, ТЕ (Н-хвиля) та ТМ (Е-хвиля) — через наявність поздовжніх складових $\mathbf{E}$ і $\mathbf{H}$.
3. Доведіть, чому ТЕМ-хвиля неможлива в порожнистому металевому хвилеводі, спираючись на рівняння Лапласа для потенціалу поперечного електричного поля та граничні умови на стінках.
4. Запишіть хвильове рівняння для поля $E_y(x, z, t)$ у прямокутному хвилеводі та граничні умови на ідеально провідних стінках. Чому шукають розв'язок у вигляді $E = E_0 \sin(k_z z)\, e^{i(\omega t - k_x x)}$?
5. Виведіть умову квантування поперечного хвильового числа $k_z a = \pi n$ з граничних умов на стінках хвилеводу.
6. Підставте припущений розв'язок у хвильове рівняння і виведіть дисперсійне співвідношення $k_x = \sqrt{\omega^2/c^2 - \pi^2 n^2/a^2}$.
7. Що таке гранична (критична) частота хвилеводу? Виведіть умову поширення хвилі без згасання та граничну частоту $\omega_0 = \pi c/a$ для моди з $n = 1$.
8. Чому граничну частоту хвилеводу можна інтерпретувати через граничну довжину хвилі $\lambda_0 = 2a$? Який геометричний зміст цього результату?
9. Чому хвилеводи називають фільтрами високих частот, і чим це принципово відрізняє їх від довгої лінії?
10. Виведіть формулу фазової швидкості хвилі у хвилеводі $v_\text{ф} = c/\sqrt{1 - (\omega_0/\omega)^2}$. Чому ця швидкість завжди перевищує швидкість світла і чому це не суперечить теорії відносності? Що таке групова швидкість $v_\text{г}$ і як вона пов'язана з $v_\text{ф}$?
11. Поясніть поширення хвилі у хвилеводі як багаторазове відбиття плоскої хвилі від стінок. Як через кут θ виражаються $v_\text{ф}$ і $v_\text{г}$ і що відбувається при $\omega \to \omega_0$?
12. Як влаштоване оптичне волокно як діелектричний хвилевід? Поясніть, чому світло утримується в серцевині завдяки повному внутрішньому відбиттю на межі з оболонкою.

Відповіді

Електричні заряди та їх взаємодія

1.1. $N_p \approx \dfrac{7\cdot 10^4}{2\cdot 1{,}7\cdot 10^{-24}} \approx 2\cdot 10^{28}$, надлишковий заряд $q \approx 2\cdot 10^{26}\cdot 4{,}8\cdot 10^{-10} \approx 10^{17}$ Фр, $F = q^2/r^2 \approx 10^{30}$ дин $\approx 10^{25}$ Н. Вага Землі $M_\oplus g \approx 6\cdot 10^{30}$ дин, тобто сила того ж порядку.

1.2. За збереженням заряду та симетрією на кожній кульці стало по $+q$. Було притягання $F_1 = 3q^2/r^2$, стало відштовхування $F_2 = q^2/r^2$: сила зменшилась у 3 рази й змінила напрям.

1.3. $\dfrac{F_e}{F_g} = \dfrac{e^2}{Gm_e m_p} \approx 2\cdot 10^{39}$; від відстані не залежить, бо обидві сили $\propto 1/r^2$.

Постійне електричне поле у вакуумі

2.1. $E = \dfrac{Qr}{R^3}$, $\varphi = \dfrac{Q\,(3R^2 - r^2)}{2R^3}$ при $r \leqslant R$; $E = \dfrac{Q}{r^2}$, $\varphi = \dfrac{Q}{r}$ при $r \geqslant R$.

2.2. $F = \displaystyle\int_l^\infty \frac{q\lambda\,dx}{x^2} = \frac{q\lambda}{l}$ (у СІ $F = \dfrac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0 l}$); для наведених даних $F \approx 4{,}5\cdot 10^{-3}$ Н.

2.3. $E = \dfrac{2Q}{R^2}\left(1 - \dfrac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$, поле напрямлене вздовж осі диска.

2.4. $\Phi = q\,\Omega = 2\pi q\left(1 - \dfrac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$, де Ω — тілесний кут, під яким видно кільце із заряду.

2.5. повний потік $4\pi q$ мінус потоки крізь дві основи: $\Phi_{\text{біч}} = \dfrac{2\pi q h}{\sqrt{h^2/4 + R^2}}$.

2.6. $E = \dfrac{4\pi}{3}\rho r$ при $r \leqslant R$, $E = \dfrac{4\pi\rho R^3}{3r^2}$ при $r \geqslant R$ — те саме, що в задачі 2.1 (з $Q = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$); теорема Гаусса в інтегральній формі тут простіша.

2.7. $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$.

2.8. $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ при $r > 0$; при $r \to 0$ дивергенція не визначена: потік крізь будь-яку сферу навколо заряду дорівнює $4\pi q$, тобто $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi q\,\delta(\mathbf{r})$.

2.9. потенціал поля сфери $\varphi(r) = \varphi_0 R/r$: на відстані $4R$ він дорівнює -100 В, на поверхні -400 В; електрон має подолати різницю потенціальних енергій 300 еВ, тож $v_{\min} = \sqrt{2e \cdot 300\ \text{В}/m} \approx 1{,}0 \cdot 10^7$ м/с.

2.10. $U = \dfrac{mv^2}{2e} \approx 9{,}5 \cdot 10^{-3}$ СГСЕ $\approx 2{,}8$ В.

2.11. $\mathbf{E} = -\nabla\dfrac{Q}{r} = \dfrac{Q\mathbf{r}}{r^3}$.

2.12. $\nabla \times \mathbf{r} = 0$.

Електричне поле статичної системи зарядів

3.1. $E_r = \dfrac{2p\cos\theta}{r^3}$, $E_\theta = \dfrac{p\sin\theta}{r^3}$; на осі $E = 2p/r^3$ уздовж $\mathbf{p}$, на серединному перпендикулярі $E = p/r^3$ проти $\mathbf{p}$.

3.2. $\cos^2\theta = \dfrac{1}{3}$, тобто $\theta \approx 54{,}7°$ (і 125,3°). Підказка: $\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = \dfrac{p^2}{r^3}(3\cos^2\theta - 1)$.

3.3. $q_\Sigma = 0$, $\mathbf{p} = 0$; єдині ненульові компоненти $D_{xy} = D_{yx} = 3qa^2$ (слід нульовий).

3.4. (а) $E_z = 6qa^2/z^4$. (б) Точно $\varphi = \dfrac{2qa^2}{z(z^2-a^2)} = \dfrac{q}{60a}$, наближення дає $\dfrac{2q}{125a}$; їхнє відношення $(z^2-a^2)/z^2 = 24/25$, тож похибка $\approx 4\%$ (наближення занижує).

3.5. $T = 2\pi\sqrt{I/(pE)}$.

3.6. $A = 2pE$ і $A = pE$ відповідно.

3.7. $F_r = p\dfrac{d}{dr}\dfrac{Q}{r^2} = -\dfrac{2pQ}{r^3}$, тобто притягання із силою $2pQ/r^3$. Перевірка: поле диполя на осі в місці заряду дорівнює $2p/r^3$, тож сила на заряд $2pQ/r^3$ і вона протилежна.

3.8. (а) $U = -2p^2/r^3$; (б) $U = +p^2/r^3$. Вигідніше розташування на одній прямій.

3.9. $\alpha = \dfrac{e^2}{m\omega_0^2} \approx \dfrac{(4{,}8\cdot 10^{-10})^2}{9{,}1\cdot 10^{-28}\cdot 10^{32}} \approx 2{,}5\cdot 10^{-24}$ см^3 (порядок розміру атома в кубі).

Електричне поле у провідниках

4.1. методом зображень $\sigma(x) = -\dfrac{qd}{2\pi\,(x^2+d^2)^{3/2}}$; повний індукований заряд дорівнює $-q$.

4.2. $\varphi = \dfrac{q}{b}$ (поле, створене індукованими зарядами, у центрі сфери дорівнює нулю, бо їхня сума нульова й усі вони на відстані R).

4.3. $F = \dfrac{3p^2R^3}{b^7}$, взаємодія — притягування.

4.4. $F = 2\pi\sigma^2 S$ (притягання); на відстані $\ell \gg R$ пластини взаємодіють як точкові заряди: $F \approx \dfrac{\left(\pi R^2\sigma\right)^2}{\ell^2}$.

4.5. $F = \dfrac{Q^2}{8R^2}$.

Основи електростатики діелектриків

5.1. $\mathbf{E} = -\frac{4\pi}{3}\mathbf{P}$.

5.2. $\mathbf{E}' = \frac{4\pi}{3}\mathbf{P} = \frac{\varepsilon-1}{3}\mathbf{E}$.

5.3. (а) $D = E_0$, $E = E_0/\varepsilon$, $P = (\varepsilon-1)E_0/(4\pi\varepsilon)$, $\sigma' = \pm P$; (б) $E = E_0$, $D = \varepsilon E_0$, $P = (\varepsilon-1)E_0/4\pi$, на великих гранях $\sigma' = 0$.

5.4. $q' = -Q(\varepsilon-1)/\varepsilon$; $\rho' = -\nabla\cdot\mathbf{P} = 0$ при $r > 0$.

5.5. $\operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg} 30^\circ/6 \approx 0{,}096$, $\alpha_2 \approx 5{,}5^\circ$.

5.6. $n = p/kT \approx 2\cdot 10^{19}$ см$^{-3}$; орієнтаційний внесок $4\pi n p_0^2/3kT \approx 5{,}4\cdot 10^{-3}$, електронний $4\pi n\alpha_e \approx 3{,}7\cdot 10^{-4}$; $\varepsilon \approx 1{,}0058$.

Енергія електричного поля

6.1. $C_{11} \approx 1$ см, $C_{22} \approx 2$ см, $C_{12} \approx -0{,}04$ см (знак від'ємний, оскільки $C_{12} \approx -R_1R_2/b$).

6.2. послідовно $\approx 0{,}55$ мкФ; паралельно 6 мкФ.

6.3. поле між обкладками зросте в 1,5 раза; екранування порушиться — з'явиться поле й назовні, $E_{\text{зовні}} = 2\pi q/S$.

6.4. $W = \dfrac{3Q^2}{5R}$ обома способами.

6.5. $F = \varepsilon_0 SU^2/2d^2 \approx 3{,}2\times 10^{-3}$ Н.

6.6. $F \approx 3{,}3\times 10^{-6}$ Н.

6.7. $h = \dfrac{(\varepsilon-1)U^2}{8\pi\rho_{\text{р}} g d^2}$; $\quad Q = \dfrac{1}{2}mgh = \dfrac{(\varepsilon-1)^2 lU^4}{128\pi^2\rho_{\text{р}} g d^3}$, де $m = \rho_{\text{р}} ldh$ — маса піднятого стовпа.

Постійний електричний струм

7.1. $u = \dfrac{I}{enS} \approx 7 \cdot 10^{-5}$ м/с $\approx 0{,}07$ мм/с; $t \approx 1{,}4 \cdot 10^4$ с ≈ 4 год.

7.2. $j_0 = \dfrac{3I}{\pi R^2} = 3\langle j \rangle$.

7.3. $I_{\text{к.з.}} = \mathscr{E}/r = 24$ А; $R = r = 0{,}5$ Ом; $\mathcal{P}_{\max} = \mathscr{E}^2/(4r) = 72$ Вт; $\eta = 50\%$.

7.4. $I = (\varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E})/R = 4{,}5$ А.

7.5. $I = (\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)/(R_1 + R_2) = 1{,}2$ А; $U_1 = 2{,}4$ В, $U_2 = 3{,}6$ В.

7.6. $Q = I^2Rt = 24$ кДж; $j = I/S = 4 \cdot 10^6$ А/м^2; $w = \rho j^2 \approx 1{,}8 \cdot 10^7$ Вт/м^3.

7.7. $R \approx 32$ Ом; при $r_0' = 2r_0$ опір зменшиться вдвічі.

7.8. $\tau = RC = 1$ с, $t = \tau \ln 10 \approx 2{,}3$ с; $Q = C\mathscr{E}^2/2 = 50$ мДж. При $R = 1$ кОм час зменшиться в 100 разів ($t \approx 23$ мс), а виділена теплота *не зміниться*.

7.9. $\tau = 5$ с; $t \approx 3{,}5$ с; $U(2\tau) \approx 27$ В.

Електричний струм у різних середовищах

8.1. *Відповідь:* $\tau = \dfrac{m_e\lambda}{ne^2} \approx 2{,}5{\cdot}10^{-14}$ с; $\ell \approx 3$ нм — це *класична* оцінка, лише вдесятеро більша за міжіонну відстань. Експеримент же дає ~ 40 нм, тобто на порядок більше: саме ця розбіжність і спонукає до квантової теорії.

8.2. $\mu = \lambda/(en) \approx 4{,}3 \cdot 10^{-3}$ м^2/(В·с); $E = j/\lambda \approx 1{,}7 \cdot 10^{-2}$ В/м; $u = \mu E \approx 7 \cdot 10^{-5}$ м/с (збігається з $u = I/(enS)$); $\mu = e\tau/m_e$ з $\tau \approx 2{,}5 \cdot 10^{-14}$ с дає те саме.

8.3. $R = R_{20}[1 + \alpha(t - 20)] \approx 59$ Ом; зростання на $\approx 490\%$.

8.4. $\kappa/\lambda \approx 6{,}8{\cdot}10^{-6}$ Вт·Ом/К; $L_{\text{кл}}T \approx 3{,}3{\cdot}10^{-6}$, $LT \approx 7{,}3{\cdot}10^{-6}$ Вт·Ом/К — з квантовим значенням збіг у межах $\sim 10\%$, класичне вдвічі

занижене.

8.5. (а) $I_c = j_c S = 1000$ А; (б) $P/\ell = I^2\rho/S \approx 3{,}4\cdot 10^4$ Вт/м (закон Джоуля–Ленца), у надпровіднику — нуль; (в) ті, у яких $T_c > 77$ К: купрат $YBa_2Cu_3O_7$ (H_3S — лише під тиском ~ 150 ГПа).

8.6. $m = \dfrac{\mu}{zF} It \approx 1{,}18$ г.

8.7. $\lambda = en(\mu_+ + \mu_-) \approx 1{,}3$ См/м; частка катіонів $\mu_+/(\mu_+ + \mu_-) \approx 0{,}40$.

8.8. $I = (U - \mathscr{E}_{\text{пол}})/R = 10$ А; $m = \dfrac{\mu}{zF} It \approx 0{,}38$ г; $P_{\text{Дж}} = I^2R = 5$ Вт; частка $\mathscr{E}_{\text{пол}}/U = 75\%$.

8.9. $n_0 = \sqrt{N/\beta} = 2{,}5\cdot 10^{12}$ м$^{-3}$; $\lambda = en_0(\mu_+ + \mu_-) \approx 1{,}3\cdot 10^{-10}$ См/м; $j_{\text{нас}} = eNd \approx 3{,}2\cdot 10^{-8}$ А/м^2, $E \sim j_{\text{нас}}/\lambda \approx 2{,}4\cdot 10^2$ В/м, $U \sim Ed \approx 5$ В.

8.10. $E = \dfrac{W_i}{e\ell} \approx 1{,}6\cdot 10^5$ В/м.

8.11. $\varphi = E_{\text{пр}} r = 30$ кВ і 300 В відповідно; на вістрі (малий радіус кривизни) поле при тому самому потенціалі найбільше.

8.12. $\dfrac{j_2}{j_1} = \left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)^2 \exp\left[\dfrac{A_{\text{вих}}}{k_B}\left(\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}\right)\right] \approx 2{,}9\cdot 10^2$.

8.13. $j \approx 2{,}6\cdot 10^2$ А/м^2; $I = jS \approx 26$ мА; j зросте у $2^{3/2} \approx 2{,}8$ рази при $2U$ і зменшиться вчетверо при $2d$; $P = IU \approx 5$ Вт.

8.14. $\lambda = en_i(\mu_n + \mu_p) \approx 4{,}4\cdot 10^{-4}$ См/м; $\rho \approx 2{,}3\cdot 10^3$ Ом·м.

8.15. $\dfrac{n_i(T_2)}{n_i(T_1)} = \left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} \exp\left[\dfrac{E_g}{2k_B}\left(\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}\right)\right] \approx 8$, тобто опір кремнію *спадає* майже у 8 разів, тоді як опір міді *зростає* лише на $\alpha\Delta t \approx 13\%$.

8.16. $\lambda \approx en\mu_n \approx 2{,}2\cdot 10^2$ См/м; $p = n_i^2/n \approx 2\cdot 10^{10}$ м$^{-3}$ (дірки — неосновні носії); провідність зросла приблизно в $5\cdot 10^5$ разів.

8.17. $\varphi_k = \dfrac{k_B T}{e} \ln\dfrac{N_a N_d}{n_i^2} \approx 0{,}75$ В; $\dfrac{I(+0{,}5)}{|I(-0{,}5)|} \approx e^{19{,}3} \approx 2{,}5\cdot 10^8$.

Магнітне поле у вакуумі

9.1. $B = \dfrac{2\pi R^2 I}{c\,(R^2+z^2)^{3/2}}$; у центрі $B = \dfrac{2\pi I}{cR}$. При $z \gg R$ маємо $B \approx \dfrac{2p_m}{z^3}$, що збігається з (9.30) на осі диполя ($\mathbf{r} \parallel \mathbf{p}_m$).

9.2. $\mathbf{B} = \dfrac{2\pi}{c}[\mathbf{j}\times\mathbf{a}]$, де $\mathbf{a}$ — вектор, проведений від осі провідника до осі порожнини. Поле однорідне, $B = \dfrac{2\pi jd}{c}$, перпендикулярне до $\mathbf{j}$ і до лінії, що сполучає осі. (Усередині суцільного циліндра $\mathbf{B} = \dfrac{2\pi}{c}[\mathbf{j}\times\mathbf{r}]$, де $\mathbf{r}$ — відстань від осі.)

9.3. (а) $p_m = \dfrac{QR^2\omega}{4c}$; за формулою (9.24) з $J = \frac{1}{2}MR^2$ — те саме. (б) $|\mathbf{p}_m| = \dfrac{e\hbar}{2mc} \approx 9{,}3\cdot 10^{-21}$ ерг/Гс (магнетон Бора); оскільки заряд електрона від'ємний, $\mathbf{p}_m$ напрямлений *протилежно* до $\mathbf{L}$.

9.4. $F = \dfrac{2p_m I}{cr^2}$, виток притягується до провідника (диполь втягується в область сильнішого поля); за $\mathbf{p}_m \uparrow\downarrow \mathbf{B}$ сила та сама за модулем, але це відштовхування. Перевірка: $F \approx \dfrac{2II'a}{c^2}\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r+a}\right) \approx \dfrac{2II'a^2}{c^2r^2}$, що збігається з $\dfrac{2p_mI}{cr^2}$ при $p_m = I'a^2/c$. Сили на сторони, перпендикулярні до провідника, взаємно скорочуються.

9.5. $B = \dfrac{2\pi\sigma\omega R}{c} = \dfrac{2Q\omega}{cR} \approx 1{,}3\cdot 10^{-5}$ Гс, тобто приблизно в $4\cdot 10^4$ разів менше за земне; при зміні напряму обертання напрям $\mathbf{B}$ змінюється на протилежний.

Магнітне поле в речовині

10.1. $H = \dfrac{4\pi}{c}nI$ (теорема про циркуляцію для $\mathbf{H}$), $B = \mu H = \dfrac{4\pi\mu}{c}nI$; молекулярні струми дають $4\pi J = (\mu-1)H$, тобто частку $(\mu-1)/\mu$ від B.

10.2. За теоремою про циркуляцію $H = \dfrac{2Ir}{cR^2}$ (азимутально), $J = \chi_m H$. Об'ємний струм $j_{m,z} = \dfrac{c}{r}\dfrac{d(rJ)}{dr} = \dfrac{4\chi_m I}{R^2}$ тече вздовж I,

повний $I'_{\text{об}} = 4\pi\chi_m I$. Поверхневий $i_m = cJ(R) = \dfrac{2\chi_m I}{R}$ тече проти I, повний $I'_{\text{пов}} = 4\pi\chi_m I$. Сумарний молекулярний струм крізь переріз дорівнює нулю: молекулярні струми замкнені й заряду крізь переріз не переносять.

10.3. (а) $i_m = cJ$ (струм тече по колу навколо осі), $B = 4\pi J$, $H = 0$. (б) Молекулярні струми течуть лише на краях пластини (нескінченно далеко), тому $B = 0$, а $H = -4\pi J$.

10.4. З теореми про циркуляцію $H_{\text{м}} l + H_{\text{з}}\delta = \dfrac{4\pi}{c} NI$ і неперервності B_n ($B = \mu H_{\text{м}} = H_{\text{з}}$) маємо $B = \dfrac{4\pi NI}{c\,(l/\mu + \delta)}$, $H_{\text{м}} = B/\mu$, $H_{\text{з}} = B$. Без зазору $B_0 = \dfrac{4\pi\mu NI}{cl}$, тож $B_0/B = 1 + \dfrac{\mu\delta}{l} = 3$.

10.5. (а) $\chi_m^{\text{пара}} = \dfrac{np_0^2}{3kT} \approx 3{,}5 \cdot 10^{-5}$. (б) $\chi_m^{\text{діа}} = -\dfrac{ne^2\langle r^2\rangle}{6m_e c^2} \approx -2{,}3 \cdot 10^{-7}$. (в) Парамагнітний внесок більший приблизно в $1{,}5 \cdot 10^2$ разів, тож речовина парамагнітна. (г) $p_0 B/kT \approx 2 \cdot 10^{-3} \ll 1$.

10.6. $H_{\text{мол}} \sim \dfrac{kT_C}{p_0} \approx 7 \cdot 10^6$ Гс, тоді як $\dfrac{p_0}{a^3} \approx 1{,}3 \cdot 10^3$ Гс, тобто приблизно в $5 \cdot 10^3$ разів менше. Магнітної взаємодії диполів недостатньо для феромагнітного впорядкування; потрібна обмінна взаємодія.

Рух заряджених частинок

11.1. (а) $R = \dfrac{mvc}{eB}$, $\omega_c = \dfrac{v}{R} = \dfrac{eB}{mc}$ — від v не залежить. (б) $R \approx 0{,}57$ см, $\omega_c \approx 1{,}8 \cdot 10^9$ с$^{-1}$ ($T \approx 3{,}6$ нс). (в) Гвинтова лінія з радіусом $R\sin\alpha$ і кроком $h = 2\pi R\cos\alpha$.

11.2. коло радіуса $R = \dfrac{mcv_0}{|q|B}$ в площині, перпендикулярній до $\mathbf{B}$, і рівноприскорений рух вздовж поля: $z = \dfrac{qE}{2m}t^2$. За період $T = \dfrac{2\pi mc}{|q|B}$ зміщення $\Delta z_n = (2n-1)\dfrac{2\pi^2 mc^2 E}{|q|B^2}$ (у напрямку сили $q\mathbf{E}$), тобто зміщення за послідовні оберти відносяться як $1 : 3 : 5 : \ldots$

11.3. (а) $u = cE/B \approx 3 \cdot 10^7$ см/с у напрямку $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. (б) $v_{\max} = 2u \approx 6 \cdot 10^7$ см/с. (в) $2u/|\omega_c| \approx 0{,}034$ см (радіус «колеса» $u/|\omega_c| \approx 0{,}017$ см). (г) $2\pi u/|\omega_c| = uT \approx 0{,}11$ см при $T \approx 3{,}6$ нс. Електрон спершу рухається в бік $-\mathbf{E}$ (сила $q\mathbf{E}$ для $q < 0$), а дрейфує в напрямку $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ так само, як і позитивний заряд.

11.4. $2R = \dfrac{2c}{B}\sqrt{\dfrac{2mU}{e}}$: 40,7 см і 42,7 см; відстань між лініями ≈ 2 см, тож щілина має бути вужчою за ~ 2 см (на практиці — значно вужчою).

11.5. (а) $f = \dfrac{eB}{2\pi m_p c} \approx 23$ МГц. (б) $W = \dfrac{e^2B^2R^2}{2m_pc^2} \approx 4{,}3 \cdot 10^{-5}$ ерг ≈ 27 МеВ. (в) $N = W/(2eU) \approx 450$. (г) $\Delta\omega/\omega \approx W/m_pc^2 \approx 3\,\%$.

11.6. (а) $U_H = \dfrac{IB}{n|q|cd} \approx 4{,}2 \cdot 10^{-7}$ СГСЕ $\approx 0{,}13$ мВ. (б) Знак змінюється на протилежний ($R_H > 0$ для дірок). (в) $n = \dfrac{IB}{|q|cd\,|U_H|}$.

11.7. (а) $R_e \approx 0{,}5$ мм, $R_i \approx 1{,}4$ м. (б) $u = cE/B \approx 10^8$ см/с ($E = 0{,}667$ СГСЕ). Оскільки $R_i \gg$ розмірів каналу, іони практично не замагнічені, а електрони ($R_e \ll$ розмірів каналу) замагнічені.

11.8. (а) З $mv_0^2/2 = |q|U$ маємо $y = \dfrac{El(l/2 + L)}{2U}$ (частинки різних знаків відхиляються в протилежні боки). (б) $|y| = \sqrt{|q|/m}\,\dfrac{Bl}{c\sqrt{2U}}\left(\dfrac{l}{2} + L\right)$, тому $|y_e|/|y_p| = \sqrt{m_p/m_e} \approx 43$.

11.9. $v_0 = cE/B \approx 10^9$ см/с; $\left|\dfrac{q}{m}\right| = \dfrac{y\,v_0\,c}{B\,l\,(l/2 + L)} \approx 5{,}2 \cdot 10^{17}$ од. СГСЕ·г$^{-1}$ $\approx 1{,}7 \cdot 10^{11}$ Кл·кг$^{-1}$.

11.10. $r = \sqrt{\dfrac{9\eta v_0}{2g\rho}} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-4}$ см; $q = 6\pi\eta r\,\dfrac{v_0 + v_E}{E} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-9}$ СГСЕ $\approx 3e$; $\Delta q = 6\pi\eta r\,\dfrac{v'_E - v_E}{E} \approx 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ СГСЕ $\approx e$.

Явище електромагнітної індукції

12.1. $\mathscr{E} = B\ell v/c \approx 1{,}7\cdot 10^{-4}$ СГСЕ $= 0{,}05$ В; $I = 0{,}5$ А; $F = I\ell B/c =$ 500 дин $= 5$ мН; $P = Fv = 25$ мВт $= \mathscr{E}I = I^2R$.

12.2. елемент радіуса dr має швидкість $v = \omega r$, тому $\mathscr{E} = \frac{1}{c}\int_0^a \omega r B\,dr = \frac{\omega B a^2}{2c} \approx 5{,}2\cdot 10^{-4}$ СГСЕ $\approx 0{,}16$ В.

12.3. $\mathscr{E}_m = \frac{NBS\omega}{c} \approx 0{,}21$ СГСЕ ≈ 63 В; $I_m \approx 6{,}3$ А; $\langle P\rangle = \frac{\mathscr{E}_m^2}{2R} \approx$ 0,2 кВт (за законом збереження енергії — рівна середній електричній потужності).

12.4. відкид пропорційний заряду, тому $Q = 1{,}2\cdot 10^{-7}$ Кл $=$ 360 СГСЕ. Повна зміна потоку крізь котушку $N\Phi_1 = cRQ$ (у СІ $RQ) = 2{,}4\cdot 10^{-5}$ Вб $= 2{,}4\cdot 10^3$ Гс·см^2, тобто крізь один виток $\Phi_1 \approx 2{,}4\cdot 10^2$ Гс·см^2.

12.5. із симетрії лінії **E** — кола навколо осі; $2\pi rE = -\frac{1}{c}\dot{B}\pi r^2$ при $r < a$, тобто $E = -\frac{r}{2c}\dot{B}$; при $r > a$ потік дорівнює $\dot{B}\pi a^2$, тобто $E = -\frac{a^2}{2cr}\dot{B}$. При $r = a = 5$ см $|E| \approx 8{,}3\cdot 10^{-8}$ СГСЕ $\approx 2{,}5\cdot 10^{-5}$ В/см. Циркуляція **E** по кільцю поза циліндром визначається потоком крізь *весь* циліндр, тому поле відмінне від нуля й там, де $B = 0$.

12.6. $\mathscr{E} = \frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} \approx 0{,}33$ СГСЕ $= 100$ В, тому за оберт електрон набуває $e\mathscr{E} = 100$ еВ; для 10 МеВ потрібно $\approx 10^5$ обертів, що відповідає шляху $\approx 2\pi R\cdot 10^5 \approx 190$ км.

12.7. $mg = F_A = \frac{B^2\ell^2 v}{c^2 R}$, тому $v = \frac{mgRc^2}{B^2\ell^2} \approx 2{,}5$ м/с; $mgv = I^2R$.

12.8. $s = -1$. Якби $s = +1$, за зростання потоку ЕРС і струм підсилювали б зміну потоку, і поле одночасно віддавало б енергію на джоулеве тепло I^2R і само себе посилювало — енергія бралася б нізвідки; лише знак «мінус» дає баланс, у якому тепло виділяється за рахунок роботи зовнішніх сил, що змінюють потік.

12.9. $\tau = L/R = 10$ мс; $I_\infty = \mathscr{E}/R = 2$ А; $I(5\text{ мс}) = I_\infty(1 - e^{-0{,}5}) \approx 0{,}79$ А; $t_{90} = \tau\ln 10 \approx 23$ мс.

12.10. $I_0 = \mathscr{E}/r = 10$ А; $\mathscr{E}_{\text{ci}}(0) = I_0(R+r) \approx 10$ кВ, тобто у $\sim 10^3$ разів більше за $\mathscr{E}$; $\tau' = L/(R+r) \approx 1$ мс.

12.11. $\mathbf{B} = -\nabla\psi$, $\psi = -B_0\left(r + \dfrac{a^3}{2r^2}\right)\cos\theta$; $B_r = B_0\cos\theta\left(1 - \dfrac{a^3}{r^3}\right)$, $B_\theta = -B_0\sin\theta\left(1 + \dfrac{a^3}{2r^3}\right)$; при $r = a$ маємо $B_r = 0$, $B_\theta = -\dfrac{3}{2}B_0\sin\theta$.

12.12. $\Phi = B_0\pi a^2 \approx 7{,}9\cdot 10^3$ Гс·см^2; за (12.20) $I = c\Phi/L \approx 9{,}4\cdot 10^{11}$ СГСЕ $\approx 3\cdot 10^2$ А; $\Phi/\Phi_0 \approx 4\cdot 10^{10}$ квантів.

12.13. $H(r) = \dfrac{2I}{cr}$, тому $I_c = \dfrac{crH_c}{2} \approx 1{,}2\cdot 10^{12}$ СГСЕ $\approx 4\cdot 10^2$ А.

12.14. $h = \left(\dfrac{3p_m^2}{8mg}\right)^{1/4} \approx 2{,}6$ см.

12.15. $\delta_L = \sqrt{\dfrac{m_e c^2}{4\pi n_s e^2}} \approx 5\cdot 10^{-6}$ см $= 50$ нм; $B(5\delta_L) = B_0 e^{-5}$, тобто поле зменшується приблизно у 150 разів.

Енергія магнітного поля

13.3. $w = \dfrac{B^2}{8\pi} \approx 3{,}6\cdot 10^7$ ерг/см^3, $W = wV \approx 3{,}6\cdot 10^{13}$ ерг $\approx$ 3,6 МДж — майже як 1 кг тротилу. При квенчі ця енергія за секунди виділяється як тепло в обмотці й випаровує рідкий гелій.

13.4. поле є лише між циліндрами, $H = \dfrac{2I}{cr}$; $\dfrac{W}{\ell} = \displaystyle\int_a^b \frac{H^2}{8\pi}2\pi r\,dr = \frac{I^2}{c^2}\ln\frac{b}{a}$, тому $\dfrac{L}{\ell} = 2\ln\dfrac{b}{a} \approx 3{,}9$ (см на см) $\approx 0{,}39$ мкГн/м.

13.5. $L_{12} = \dfrac{c\Phi_{12}}{I} = \dfrac{2\pi^2 R_2^2}{R_1} \approx 2$ см $= 2$ нГн; $|\mathscr{E}| = L_{12}\left|\dfrac{dI}{dt}\right|$ (у СІ) ≈ 2 мкВ.

13.6. за (13.41) $F = \dfrac{B^2 S}{4\pi} \approx 8\cdot 10^7$ дин $= 800$ Н (близько 80 кгс).

13.7. $W = \dfrac{B^2}{8\pi} S\ell = \dfrac{\Phi^2 \ell}{8\pi S}$ при $\Phi = BS = \text{const}$; при збільшенні площі перерізу $dW = -\dfrac{B^2}{8\pi}\ell\, dS = -p\, dV$, тож $p = \dfrac{B^2}{8\pi}$. Для $B = 10^5$ Гс $p \approx 4 \cdot 10^8$ дин/см^2 $\approx 4 \cdot 10^7$ Па, тобто близько 400 атм.

Система рівнянь Максвелла

14.1. $j_{\text{зм}} = \dfrac{\varepsilon\omega U_m}{4\pi d}\cos\omega t$, $I_{\text{зм}} = \dfrac{\varepsilon R^2 \omega U_m}{4d}\cos\omega t = C\dfrac{dU}{dt}$ (тобто дорівнює струму в дротах — струм зміщення «замикає» коло); $H(R) = \dfrac{2I_{\text{зм}}}{cR} = \dfrac{\varepsilon R\omega U_m}{2cd}\cos\omega t$.

14.2. $\omega \sim 4\pi\lambda/\varepsilon \approx 2{,}5 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$, тобто $\nu = \omega/2\pi \approx 4 \cdot 10^{14}$ Гц — близько до видимого діапазону; на таких частотах струм зміщення (як і частотну залежність λ) уже треба враховувати (оцінка орієнтовна, бо λ та ε відомі лише за порядком величини).

14.3. $E = \dfrac{2\pi n R\dot{I}}{c^2}$ (вздовж кола), $\Pi = \dfrac{2\pi n^2 R\, I\dot{I}}{c^2}$, вектор $\mathbf{\Pi}$ спрямований *до осі*; на одиницю довжини соленоїда $\Pi \cdot 2\pi R = \dfrac{4\pi^2 n^2 R^2}{c^2} I\dot{I} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{L_1 I^2}{2c^2}\right)$, де $L_1 = 4\pi^2 n^2 R^2$ — індуктивність одиниці довжини.

14.4. $\delta_{50} = \delta_{10\ \text{ГГц}}\sqrt{10^{10}/50} \approx 0{,}652$ мкм $\cdot\, 1{,}4 \cdot 10^4 \approx 9$ мм; отже, струм майже не йде глибше ніж на ~ 1 см, і суцільні мідні (чи алюмінієві) дроти діаметром понад ~ 2 см малоефективні — тому їх роблять порожнистими або складеними з тонших жил.

Відносність електричного і магнітного полів

15.1. $\mathbf{E}' = E_0\mathbf{i} + \dfrac{v}{c}B_0\mathbf{k}$, $\mathbf{B}' = B_0\mathbf{j}$.

15.2. доведення — у тексті розділу (§ «Інваріанти електромагнітного поля»); там використано лише явні формули перетворення й $\gamma^2(1-\beta^2) = 1$.

15.3. ні: у першій системі $I_1 = E^2 > 0$, у другій $I_1 = -B'^2 < 0$, а I_1 інваріантний.

15.4. система з $\mathbf{B}' = 0$ існує тоді й лише тоді, коли $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ та $E > B$; її швидкість $\mathbf{v} = c\dfrac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{E^2}$.

15.5. у S $\rho = 0$, $j_x = I/S$; у S' $\rho' = \gamma\left(\rho - \dfrac{v}{c^2}j_x\right) = -\gamma\dfrac{vj_x}{c^2}$, тобто лінійна густина заряду $\lambda' = -\gamma\dfrac{vI}{c^2}$ (I — струм у напрямку $\mathbf{v}$). Заряд кожної частинки той самий, але відстані між іонами й між електронами скорочуються в S' по-різному, бо їхні швидкості в S' різні.

15.6. схему розв'язання наведено в тексті: у тензорному записі $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \dfrac{4\pi}{c}j^\nu$, $\partial_\mu \tilde F^{\mu\nu} = 0$ обидві частини є 4-векторами, тож рівняння мають однаковий вигляд у всіх інерціальних системах.

Електромагнітні хвилі

16.1. $\nu = c/\lambda_0 = 5\cdot 10^{14}$ Гц (не змінюється); $v = c/n = 2\cdot 10^{10}$ см/с; $\lambda = \lambda_0/n = 400$ нм; $k = 2\pi/\lambda \approx 1{,}6\cdot 10^5$ см$^{-1}$; $\varepsilon = n^2 = 2{,}25$.

16.2. $I = P/S \approx 3{,}2\cdot 10^8$ ерг/(с·см^2) $\approx$ 32 Вт/см^2; із $I = cE_m^2/8\pi$ маємо $E_m \approx 0{,}52$ СГСЕ $\approx 1{,}5\cdot 10^2$ В/см, $B_m = E_m \approx 0{,}52$ Гс; $p = I/c \approx 1{,}1\cdot 10^{-2}$ дин/см^2 $\approx 1{,}1\cdot 10^{-3}$ Па; для дзеркала тиск удвічі більший.

16.3. $F = (1+\mathcal{R})IS/c \approx 87$ дин $\approx 0{,}87$ мН; $a \approx 8{,}7\cdot 10^{-5}$ м/с^2; $\Delta v \approx a\cdot 3{,}15\cdot 10^7$ с $\approx 2{,}7$ км/с.

16.4. $F_{\text{св}} = \dfrac{L}{4\pi r^2 c}\pi a^2$, $F_{\text{гр}} = \dfrac{GM}{r^2}\cdot\dfrac{4}{3}\pi a^3\rho$; звідки $a = \dfrac{3L}{16\pi GMc\rho} \approx 6\cdot 10^{-5}$ см $\approx 0{,}6$ мкм. Обидві сили спадають як $1/r^2$, тому їх відношення від r не залежить; дрібніші пилинки Сонце відштовхує.

16.5. $L = \dfrac{qBR^2}{2c} \approx 1{,}3\cdot 10^{-2}$ г·см^2/с; $\omega = \dfrac{qB}{2mc} = 5\cdot 10^{-5}$ рад/с (один оберт за ≈ 35 год).

16.6. $\mathcal{R} = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^2 = 4\,\%$ для скла, $2\,\%$ для води; для пластинки

$T = \dfrac{1-\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}} \approx 92\,\%$.

16.7. $\operatorname{tg} i_B = n_{21}$: 56,3°, 53,1° і 33,7° відповідно. Оскільки $i_B + r = 90°$ і $i' = i_B$, кут між відбитим і заломленим променями дорівнює $180° - i' - r = 90°$.

16.8. $i_b = \arcsin(1/1{,}5) \approx 41{,}8° < 45°$; $K = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{n^2 \sin^2 i - 1} \approx 3{,}7 \cdot 10^4$ см$^{-1}$, глибина $1/K \approx 2{,}7 \cdot 10^{-5}$ см ≈ 270 нм ($\approx 0{,}45\lambda_0$).

Випромінювання електромагнітних хвиль

17.1. при $\theta = \pi/2$ $\langle \Pi \rangle = \dfrac{\langle \ddot{p}^2 \rangle}{4\pi c^3 r^2}$, тому $\left\langle \dfrac{dW}{dt} \right\rangle = \dfrac{2\langle \ddot{p}^2 \rangle}{3c^3} = \dfrac{8\pi r^2}{3}\langle \Pi \rangle$.

17.2. $p_x = p\cos\omega t$, $p_y = p\sin\omega t$, $\ddot{\mathbf{p}}^2 = p^2\omega^4 = \text{const}$, тому $\dfrac{dW}{dt} = \dfrac{2p^2\omega^4}{3c^3}$ — удвічі більше, ніж у лінійного осцилятора з тією самою амплітудою, і стала в часі: обертовий диполь — це два лінійні осцилятори, зсунуті за фазою на 90°, пульсації потужності яких взаємно компенсуються.

17.3. $\dot{v} = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{eq}{mR^2}$, тому $\dfrac{dW}{dt} = \dfrac{2e^2}{3c^3}\left(\dfrac{eq}{mR^2}\right)^2 = \dfrac{2e^4q^2}{3c^3m^2R^4}$.

17.4. енергія $W = -\dfrac{e^2}{2r}$, втрати $\dfrac{dW}{dt} = -\dfrac{2e^6}{3c^3m^2r^4}$, звідки $\dfrac{dr}{dt} = -\dfrac{4e^4}{3m^2c^3r^2}$ і $t = \dfrac{m^2c^3a_0^3}{4e^4} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-11}$ с.

17.5. інтенсивність розсіяння $\propto \lambda^{-4}$, тому $(700/450)^4 \approx 6$.

17.6. $\langle dW/dt \rangle = \dfrac{\omega^2 I_0^2 l^2}{3c^3} = \dfrac{1}{2} I_0^2 R_{\text{вип}}$, тож $R_{\text{вип}} = \dfrac{2\omega^2 l^2}{3c^3} = \dfrac{8\pi^2}{3c}\left(\dfrac{l}{\lambda}\right)^2$, у СІ $R_{\text{вип}} = 80\pi^2(l/\lambda)^2$ Ом $\approx 0{,}9$ Ом при $\lambda = 30$ м; потужність $\approx 0{,}44$ Вт. Коротка антена ($l \ll \lambda$) випромінює погано.

17.7. прискорення $v^2/R \approx c^2/R$ однакові, тож $P \propto \gamma^4 \propto m^{-4}$, і $P_e/P_p = (m_p/m_e)^4 \approx 1{,}1 \cdot 10^{13}$.

Коливальні процеси в електричних колах

18.1. $\nu_{\max} = c/(10l) = 10$ МГц; $l/\lambda = 10^6$ м$/(6\cdot 10^6$ м$) \approx 0{,}17$ — лінія вже становить відчутну частку довжини хвилі, і квазістаціонарне наближення неприпустиме.

18.2. $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \approx 3{,}16\cdot 10^6$ с$^{-1}$ ($\nu \approx 503$ кГц), $T \approx 1{,}99$ мкс; $\gamma = R/2L = 5\cdot 10^3$ с$^{-1}$; $\delta = \gamma T \approx 9{,}9\cdot 10^{-3}$; $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{L/C} \approx 316$; $n = 1/\delta \approx 100$; $R_{\text{кр}} = 2\sqrt{L/C} \approx 3{,}2$ кОм.

18.3. $I_{m,\max} = \mathscr{E}_m/R = 0{,}2$ А; $V_{C,\max} = Q\mathscr{E}_m \approx 316$ В (у 316 разів більше за напругу джерела); $\Delta\omega = 2\gamma = 10^4$ с$^{-1}$, тобто $\Delta\nu = \omega_0/(2\pi Q) \approx 1{,}6$ кГц.

18.4. $X_L = 31{,}4$ Ом, $X_C = 318$ Ом, $Z = 100 - 287i$ Ом, $|Z| \approx 304$ Ом; $\varphi = \arg Z \approx -71°$ (струм випереджає напругу, коло ємнісне); $I_{\text{еф}} = U/|Z| \approx 0{,}72$ А; $P = I_{\text{еф}}^2 R \approx 52$ Вт; $\cos\varphi = R/|Z| \approx 0{,}33$ — через великий реактивний опір $|X_L - X_C|$.

18.5. $C = 1/(\omega_0^2 L) \approx 25$ пФ; $Q = R/(\omega_0 L) \approx 15{,}9$; $U_m = I_m R = 100$ В; $I_{L0} = I_{C0} = QI_m \approx 16$ мА — у Q разів більше за струм джерела.

18.6. $I = P/(U\cos\varphi) \approx 167$ А; $Q_{\text{р}} = P\,\text{tg}\,\varphi \approx 1{,}33$ Мвар; батарея, що створює $Q_C = U^2\omega C = Q_{\text{р}}$, має $C = Q_{\text{р}}/(\omega U^2) \approx 42$ мкФ. Після компенсації $I = P/U = 100$ А, втрати $\propto I^2$ зменшуються в $(0{,}6)^{-2} \approx 2{,}8$ раза.

18.7. без трансформатора $P = \dfrac{\mathscr{E}^2 R_{\text{н}}}{(R_{\text{дж}} + R_{\text{н}})^2} \approx 0{,}078$ Вт. Узгодження: $n = \sqrt{R_{\text{дж}}/R_{\text{н}}} = 10$; напруга на первинній обмотці $\mathscr{E}/2 = 40$ В, на гучномовці $U_2 = U_1/n = 4$ В, $P = U_2^2/R_{\text{н}} = 2$ Вт — у ≈ 25 разів більше.

18.8. $P_{\text{втр}} = R(P/U)^2$: $\approx 16{,}5$ МВт (16,5 %) при 110 кВ і 0,8 МВт (0,8 %) при 500 кВ — у $(500/110)^2 \approx 21$ раз менше.

18.9. $\nu_c = 1/(2\pi RC) \approx 1$ кГц; $\omega RC \approx 10$, $|K| = 1/\sqrt{1 + (\omega RC)^2} \approx 0{,}10$, $\arg K = -\arctan(\omega RC) \approx -84°$; послаблення у ≈ 10 разів, тобто ≈ 20 дБ.

18.10. при $I_2 \leftrightarrow I_3$ маємо $B_y = +\frac{3}{2}B_m\cos\omega t$ при тому ж $B_x = \frac{3}{2}B_m\sin\omega t$, тому кут θ вектора $\mathbf{B}$ визначається рівностями $\cos\theta = \sin\omega t$, $\sin\theta = \cos\omega t$, тобто $\theta = 90° - \omega t$ і вектор обертається за годинниковою стрілкою; раніше $\theta = \omega t - 90°$ (проти годинникової).

Довгі лінії. Телеграфні рівняння

19.1. $C_0 = \dfrac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\ln(b/a)} \approx 90$ пФ/м; $L_0 = \dfrac{\mu\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a} \approx 277$ нГн/м; $Z_{\text{хв}} = \sqrt{L_0/C_0} \approx \dfrac{60}{\sqrt{\varepsilon}}\ln\dfrac{b}{a} \approx 55$ Ом; $v_\text{ф} = c/\sqrt{\varepsilon} = 2\cdot10^8$ м/с.

19.2. $C_0 \approx 114$ пФ/м, $L_0 \approx 220$ нГн/м, $Z_{\text{хв}} \approx 44$ Ом, $v_\text{ф}/c = 1/\sqrt{\varepsilon} \approx 0{,}67$. При $b/a = 3 \to 6$ $Z_{\text{хв}} \propto \ln(b/a)$ зростає в $\ln 6/\ln 3 \approx 1{,}63$ раза, до ≈ 72 Ом; фазова швидкість не змінюється, бо залежить лише від ε і μ.

19.3. $\Gamma = (75-50)/(75+50) = 0{,}2$; КСХ $= (1+0{,}2)/(1-0{,}2) = 1{,}5$; відбивається $|\Gamma|^2 = 4\,\%$ потужності.

19.4. $v_\text{ф} = c/1{,}5 = 2\cdot10^8$ м/с, затримка $l/v_\text{ф} = 0{,}5$ мкс.

19.5. $\lambda \geqslant 10$ м, тобто $\nu \leqslant v/\lambda = 1{,}5\cdot10^8/10 = 15$ МГц; на вищих частотах доріжку треба розглядати як довгу лінію.

Хвилеводи

20.1. $\nu_0 = c/(2a) \approx 6{,}56$ ГГц; $\sqrt{1-(\nu_0/\nu)^2} \approx 0{,}755$, тож $v_\text{ф} \approx 1{,}32c$, $v_\text{г} \approx 0{,}76c$, $\lambda_\text{в} = \lambda/0{,}755 \approx 4{,}0$ см (у вакуумі $\lambda = 3$ см).

20.2. умова $\nu > nc/(2a)$ дає $n < 2a\nu/c \approx 2{,}3$, тобто поширюються TE_{10} і TE_{20}.

20.3. $\varkappa = \sqrt{(\pi/a)^2-(\omega/c)^2} \approx \sqrt{137^2-105^2} \approx 89$ м$^{-1}$, тобто поле слабне в e разів на $1/\varkappa \approx 1{,}1$ см.

20.4. $t = l/v_\text{г} = 1/(0{,}755\cdot3\cdot10^8)$ с $\approx 4{,}4$ нс проти 3,3 нс у вакуумі.

Додатки

A. Таблиця переходу між гауссовою системою одиниць та SI

Для коректного читання та інтерпретації літератури з класичної електродинаміки необхідно вільно орієнтуватися в різних системах одиниць, зокрема в системі СІ та гауссовій системі (СГС). Це пов'язано з тим, що різні джерела використовують різні системи одиниць: фундаментальні теоретичні праці традиційно формулюються в СГС, тоді як у сучасній навчальній і прикладній літературі переважає система СІ. Тому необхідно впевнено володіти перевідними співвідношеннями між цими системами для основних фізичних величин.

Перехід між системами одиниць не зводиться до простого масштабування величин, а супроводжується зміною вигляду рівнянь. У системі SI рівняння містять константи ε_0 та μ_0, тоді як у гауссовій системі вони відсутні, і відповідні коефіцієнти з'являються у вигляді множників 4π. Тому необхідно враховувати не лише перевідні співвідношення, але й зміну структури рівнянь.

Таблиця A.1. Перехід між гауссовою системою одиниць та SI

Величина	Система СГС	Система SI
Швидкість світла	c	$(\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$
Напруженість електричного поля	$\mathbf{E}_{\text{СГС}}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\,\mathbf{E}_{\text{СГС}}$
Електричний потенціал	$\varphi_{\text{СГС}}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\,\varphi_{\text{СГС}}$
Магнітна індукція	$\mathbf{B}_{\text{СГС}}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu_0}}\,\mathbf{B}_{\text{СГС}}$
Вектор-потенціал	$\mathbf{A}_{\text{СГС}}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu_0}}\,\mathbf{A}_{\text{СГС}}$
Густина заряду	$\rho_{\text{СГС}}$	$\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,\rho_{\text{СГС}}$
Заряд	$q_{\text{СГС}}$	$\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,q_{\text{СГС}}$
Густина струму	$\mathbf{j}_{\text{СГС}}$	$\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,\mathbf{j}_{\text{СГС}}$

Приклад: переписування рівнянь Максвела з гауссової системи (СГС) в SI. Розглянемо перехід від гауссової системи (СГС) до системи SI на прикладі рівнянь Максвелла. Це дозволяє простежити зміну вигляду рівнянь при переході між системами одиниць.

У гауссовій системі рівняння Максвела для вакууму мають вигляд:

$$\operatorname{div}\mathbf{E}_{\text{СГС}} = 4\pi\rho_{\text{СГС}}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E}_{\text{СГС}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}_{\text{СГС}}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}_{\text{СГС}} = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{B}_{\text{СГС}} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{СГС}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}_{\text{СГС}}}{\partial t}.$$

З таблиці беремо перевідні співвідношення (позначимо величини в SI тим же символом без індексу):

$$\mathbf{E}_{\text{СГС}} = \sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,\mathbf{E}, \quad \mathbf{B}_{\text{СГС}} = \sqrt{4\pi\mu_0}\,\mathbf{B},$$
$$\rho_{\text{СГС}} = \frac{\rho}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}, \quad \mathbf{j}_{\text{СГС}} = \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}},$$
$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}.$$

Підставимо в перше рівняння (теорема Гауса):

$$\operatorname{div}\bigl(\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,\mathbf{E}\bigr) = 4\pi\cdot\frac{\rho}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} \implies \sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,\operatorname{div}\mathbf{E} = \sqrt{\frac{4\pi}{\varepsilon_0}}\,\rho \implies \operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Друге рівняння (закон електромагнітної індукції Фарадея):

$$\operatorname{rot}\bigl(\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,\mathbf{E}\bigr) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\bigl(\sqrt{4\pi\mu_0}\,\mathbf{B}\bigr).$$

$$\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\sqrt{4\pi\mu_0}}{c}\,\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Оскільки $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, то $\sqrt{\mu_0}/c = \sqrt{\mu_0}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \mu_0\sqrt{\varepsilon_0}$. Тоді:

$$\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,\mu_0\,\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \implies \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Третє рівняння:

$$\operatorname{div}\bigl(\sqrt{4\pi\mu_0}\,\mathbf{B}\bigr) = 0 \implies \operatorname{div}\mathbf{B} = 0.$$

Четверте рівняння:

$$\operatorname{rot}\bigl(\sqrt{4\pi\mu_0}\,\mathbf{B}\bigr) = \frac{4\pi}{c}\cdot\frac{\mathbf{j}}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\bigl(\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,\mathbf{E}\bigr).$$

$$\sqrt{4\pi\mu_0}\,\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}{c}\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

Використаємо $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$:

$$\frac{4\pi}{c\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} = 4\pi\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} = \frac{4\pi\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} = \sqrt{4\pi}\sqrt{\mu_0} = \sqrt{4\pi\mu_0}.$$

А другий доданок: $\frac{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}{c} = \sqrt{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \sqrt{4\pi}\,\varepsilon_0\sqrt{\mu_0}$.

Отже:

$$\sqrt{4\pi\mu_0}\,\operatorname{rot}\mathbf{B} = \sqrt{4\pi\mu_0}\mathbf{j} + \sqrt{4\pi}\,\varepsilon_0\sqrt{\mu_0}\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

Поділимо на $\sqrt{4\pi\mu_0}$:

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mathbf{j} + \frac{\sqrt{4\pi}\,\varepsilon_0\sqrt{\mu_0}}{\sqrt{4\pi\mu_0}}\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} + \varepsilon_0\sqrt{\mu_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mu_0}}\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} + \varepsilon_0\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

Отримані рівняння Максвелла в системі SI для вакууму:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$
$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} + \mu_0\varepsilon_0\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

Слід зауважити, що навіть у вакуумі в системі SI часто вводять допоміжні вектори електричної індукції $\mathbf{D}$ та напруженості магнітного поля $\mathbf{H}$, які для вакууму визначаються як:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}, \qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}.$$

Підставляння цих визначень дозволяє переписати рівняння Максвелла в симетричнішій формі, де коефіцієнти ε_0 та μ_0 зникають з правих частин[1]:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$
$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}.$$

[1] У такому записі рівняння Максвелла в SI набувають формально однакового вигляду як для вакууму, так і для середовищ, хоча у випадку середовищ ρ та $\mathbf{j}$ позначають лише вільні заряди та струми, а поля $\mathbf{D}$ та $\mathbf{H}$ включають внесок зв'язаних зарядів і струмів намагніченості.

Б. Основні позначення

Векторні величини позначено напівжирними літерами, їхні модулі — звичайними. Формули записано в гауссовій системі одиниць; частину VII (електричні кола, довгі лінії, хвилеводи) викладено в СІ (див. передмову). Деякі літери в різних розділах означають різні величини — це вказано в останньому стовпчику.

Таблиця Б.1: Основні позначення

Позначення	Величина	Примітка
	Електричне поле	
q, Q	заряд	
ρ, σ	об'ємна й поверхнева густина заряду	ρ також густина речовини
λ	лінійна густина заряду	у розділах про струм λ — питома провідність
$\mathbf{E}$, φ	напруженість і потенціал електричного поля	
$\mathbf{D}$	електрична індукція (зміщення)	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$
$\mathbf{P}$	вектор поляризації (поляризованість)	
$\mathbf{p}$	дипольний момент	
α	поляризовність атома чи молекули	
χ	діелектрична сприйнятливість	$\mathbf{P} = \chi\mathbf{E}$, $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$
ε	діелектрична проникність	
C	ємність	
W, w	енергія та її густина	
	Постійний струм	
I, $\mathbf{j}$	сила й густина струму	
λ	питома провідність	$\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}$; у розділі 16 — σ
R, $\mathscr{E}$	опір, електрорушійна сила (ЕРС)	
$\tau_{\text{М}}$	максвелівський час релаксації	$\tau_{\text{М}} = \varepsilon/4\pi\lambda$

Продовження на наступній сторінці

Таблиця Б.1: Основні позначення (продовження)

Позначення	Величина	Примітка
	Магнітне поле	
$\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$	магнітна індукція і напруженість магнітного поля	$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{J}$
$\mathbf{A}$	векторний потенціал	$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$
$\mathbf{J}$	намагніченість	
$\mathbf{p}_m$	магнітний момент	
χ_m	магнітна сприйнятливість	$\mathbf{J} = \chi_m \mathbf{H}$, $\mu = 1 + 4\pi\chi_m$
μ	магнітна проникність	
Φ	магнітний потік	
L, L_{12}	індуктивність, взаємна індуктивність	$\Phi = LI/c$; у частині VII (CI) $\Phi = LI$
	Хвилі, випромінювання, відносність	
$\mathbf{\Pi}$	вектор Пойнтінга	$\mathbf{\Pi} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{H}$
$\mathbf{g}$	густина імпульсу поля	$\mathbf{g} = \mathbf{\Pi}/c^2$
$\mathbf{k}$, ω, λ	хвильовий вектор, колова частота, довжина хвилі	
n	показник заломлення	$n = \sqrt{\varepsilon\mu}$
$\boldsymbol{\beta}$, γ	$\mathbf{v}/c$ і лоренців множник	$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$
	Коливання, кола, довгі лінії (частина VII, CI)	
γ	коефіцієнт згасання	$\gamma = R/2L$; не плутати з лоренцевим γ
ω_0, δ, Q	власна частота, логарифмічний декремент, добротність	Q використано лише для добротності
Z	імпеданс	$Z = R + i(\omega L - 1/\omega C)$
$\overline{P}$, $Q_\text{р}$	середня й реактивна потужність	
R_0, L_0, C_0, G_0	погонні параметри довгої лінії	на одиницю довжини
γ, $Z_\text{хв}$, Γ	стала поширення, хвильовий опір, коефіцієнт відбиття	

В. Основні формули векторного аналізу

В.1. Диференціальні операції в різних системах координат.

Декартова система координат

$$\operatorname{grad}\psi \equiv \boldsymbol{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e}_z \tag{B.17}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\psi) \equiv \Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{B.18}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A} \equiv \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{B.19}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} \equiv \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z \tag{B.20}$$

Циліндрична система координат

$$\boldsymbol{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e}_z \tag{B.21}$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{B.22}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_\rho\right)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{B.23}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = &\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\varphi + \\ &+ \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_z\end{aligned} \tag{B.24}$$

Орти циліндричної системи координат зв'язані з декартовими ортами як:

$$\mathbf{e}_r = \cos\varphi\,\mathbf{e}_x + \sin\varphi\,\mathbf{e}_y, \tag{B.25}$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\mathbf{e}_x + \cos\varphi\,\mathbf{e}_y, \tag{B.26}$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z. \tag{B.27}$$

Сферична система координат

$$\boldsymbol{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi \tag{B.28}$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \tag{B.29}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2A_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\theta\sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \tag{B.30}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\varphi\sin\theta\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi\right)\right)\mathbf{e}_\theta +$$
$$+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\varphi \tag{B.31}$$

Орти сферичної системи координат зв'язані з декартовими ортами як:

$$\mathbf{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{e}_y + \cos\theta\,\mathbf{e}_z, \tag{B.32}$$
$$\mathbf{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\mathbf{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\mathbf{e}_y - \sin\theta\,\mathbf{e}_z, \tag{B.33}$$
$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\mathbf{e}_x + \cos\varphi\,\mathbf{e}_y. \tag{B.34}$$
$$\tag{B.35}$$

B.2. Другі похідні.

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\varphi) = 0 \tag{B.36}$$
$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) = 0 \tag{B.37}$$
$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} \tag{B.38}$$

B.3. Похідні від добутків.

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \psi\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{grad}\psi \tag{B.39}$$
$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi\operatorname{div}\mathbf{A} + \mathbf{A}\operatorname{grad}\varphi \tag{B.40}$$
$$\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi\operatorname{rot}\mathbf{A} + \operatorname{grad}\varphi\times\mathbf{A} \tag{B.41}$$
$$\operatorname{grad}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{B}\times\operatorname{rot}\mathbf{A} + \mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{B} + (\mathbf{B}\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{A} + (\mathbf{A}\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{B} \tag{B.42}$$
$$\operatorname{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B} \tag{B.43}$$
$$\operatorname{rot}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{A} - (\mathbf{A}\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B} - \mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A} \tag{B.44}$$
$$\frac{1}{2}\operatorname{grad}A^2 = (\mathbf{A}\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{A} + \mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{A} \tag{B.45}$$

B.4. Індексна нотація формул векторного аналізу. Нагадаємо співвідношення з векторного аналізу, що будуть потрібні далі. Латинські індекси i, j, k пробігатимуть допустимі значення 1,2,3. Якщо індекси у виразі повторюються, це означатиме суму по цих індексах (правило Ейнштейна).

Тривимірний символ Леві-Чівіти

Тривимірний символ Леві-Чівіти визначений співвідношеннями

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj}. \tag{B.46}$$

Деякі співвідношення з цим символом:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}, \tag{B.47}$$
$$\varepsilon_{iqk}\varepsilon_{pqk} = 2\delta_{ip}. \tag{B.48}$$

Ротор та векторний добуток у декартових координатах $\{x, y, z\} = \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$[\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}]_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k, \tag{B.49}$$
$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_i = \varepsilon_{ijk}A_j B_k, \tag{B.50}$$

всі індекси пробігають значення 1, 2, 3.

Диференціальні операції в декартових координатах

У декартових координатах x_1, x_2, x_3 дивергенція:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} \equiv \partial_j A_j;$$

градієнт:

$$(\boldsymbol{\nabla} F)_i \equiv \partial_i F,$$

тут і надалі $(X)_i = X_i$ означає i-ту компоненту вектора $\mathbf{r}$;
та оператор Лапласа:

$$\Delta F \equiv \partial_j \partial_j F.$$

За допомогою (B.46) можна записати i-ту компоненту векторного добутку:

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_i = \varepsilon_{ijk}A_j B_k$$

де (A_i, B_i — компоненти векторів $\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}$), а також ротор:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k.$$

Добуток скалярної та векторної функцій

Легко перевірити такі співвідношення для добутку скалярної функції $F(\mathbf{r})$ та векторної $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$\operatorname{div}(F\mathbf{A}) = \partial_i(FA_i) = A_i\partial_i F + F\partial_i A_i = \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nabla}F + F\operatorname{div}\mathbf{A};$$

$$\operatorname{rot}(F\mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j(FA_k) = \varepsilon_{ijk}(\boldsymbol{\nabla}F)_j A_k + F\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k,$$

або

$$\operatorname{rot}(F\mathbf{A}) = [\boldsymbol{\nabla}F\times\mathbf{A}] + F\operatorname{rot}\mathbf{A}.$$

Дивергенція векторного добутку

Дивергенція векторного добутку:

$$\operatorname{div}[\mathbf{A}\times\mathbf{B}] = \partial_i(\varepsilon_{ijk}A_jB_k) = B_k\varepsilon_{ijk}\partial_i A_j + A_j\varepsilon_{ijk}\partial_i B_k = B_k\varepsilon_{kij}\partial_i A_j - A_j\varepsilon_{ijk}\partial_i B_k = \\ = \mathbf{B}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B}.$$

Згортка символів ε_{ijk}

Далі будуть потрібні формули для *згортки двох символів* ε_{ijk}. Користуючись властивостями визначника, легко перевірити, що:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix},$$

де δ_{ij} — символ Кронекера, а також:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$$

Якщо в останньому співвідношенні розкрити визначник за правилом трикутників:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr} = \delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kr} + \delta_{iq}\delta_{jr}\delta_{kp} + \delta_{ir}\delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{ip}\delta_{jr}\delta_{kq} - \delta_{iq}\delta_{jp}\delta_{kr} - \delta_{ir}\delta_{jq}\delta_{kp},$$

та взяти суму по $k = r$, отримаємо формулу згортки:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}. \qquad \text{(В.51)}$$

Подвійний векторний добуток

Отримаємо за допомогою (B.51) правило для подвійного векторного добутку:

$$([\mathbf{A}\times[\mathbf{B}\times\mathbf{C}]])_i \equiv \varepsilon_{ijk}A_j([\mathbf{B}\times\mathbf{C}])_k \equiv \varepsilon_{ijk}A_j\varepsilon_{kpq}B_pC_q.$$

Завдяки (B.51):

$$([\mathbf{A}\times[\mathbf{B}\times\mathbf{C}]])_i \equiv (\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp})A_jB_pC_q = B_iA_qC_q - C_iA_pB_p,$$

тобто маємо відому формулу:

$$[\mathbf{A}\times[\mathbf{B}\times\mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}).$$

Подвійний ротор

Обчислимо за допомогою (B.51) подвійний ротор:

$$(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j(\operatorname{rot}\mathbf{A})_k = \varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{kpq}\partial_pA_q.$$

Завдяки (B.51):

$$(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A})_i = (\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp})\partial_j\partial_pA_q = \partial_i\partial_jA_j - \partial_j\partial_jA_i.$$

За означенням, $\partial_jA_j \equiv \operatorname{div}\mathbf{A}$ та $\partial_j\partial_jA_i \equiv \Delta A_i$. Звідси маємо:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla}\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}.$$

B.5. Інтегральні характеристики та теореми. Теорема Остроградського-Гауса:

$$\int\limits_{\partial\Omega}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int\limits_{\Omega}\operatorname{div}\mathbf{A}dV, \tag{B.52}$$

де Ω — об'єм, $\partial\Omega$ — його межа.

Теорема Стокса:

$$\int\limits_{\partial S}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \int\limits_{S}\operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}, \tag{B.53}$$

де S — поверхня, що спирається на контур ∂S.

Перша та друга тотожності Гріна:

$$\int\limits_{\Omega}\left(\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi + \varphi\nabla^2\psi\right)dV = \int\limits_{\partial\Omega}\varphi\operatorname{grad}\psi\cdot d\mathbf{S}, \tag{B.54}$$

$$\int\limits_{\Omega}(\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi)\,dV = \int\limits_{\partial\Omega}(\varphi\operatorname{grad}\psi - \psi\operatorname{grad}\varphi)\cdot d\mathbf{S}. \tag{B.55}$$

Література

1. *Feynman R., Lejton R., Sends M.* Lectures on physics. Vol. 2. Mainly Electromagnetism and matter. — New Millenium Edition. — Basic Books, 2010. — 566 p.
2. *Jefimenko O. D.* Demonstration of the Electric Fields of Current-Carrying Conductors // American Journal of Physics. — 1962. — Vol. 30, no. 1. — P. 19–21. — DOI: 10.1119/1.1941887.
3. *Purcell E. M., Morin D. J.* Berkeley Physics Course. Vol. 2. Electricity and Magnetism. — 3rd ed. — Cambridge : Cambridge University Press, 2013. — ISBN 978-1107014022.
4. *Жданов В. І.* Електрика та магнетизм. Посібник для студентів фізико-технічного факультету : в 2 т. Частина 1. — К. : НТУУ «КПІ», 1999. — 62 с.
5. *Жданов В. І.* Електрика та магнетизм. Посібник для студентів фізико-технічного факультету : в 2 т. Частина 2. — К. : Політехніка, 2002. — 44 с.
6. *Парновский С. Л.* Електрика та магнетизм: додаткові матеріали до курсу. — ФТІ, КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. — 24 с.
7. *Пономаренко С. М.* Електрика та магнетизм. Збірник задач. — КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. — 156 с.
8. *Сугаков В. Й.* Теоретична фізика : Електродинаміка. — Київ : Вища школа, 1975. — С. 272.
9. *Федорченко А. М.* Теоретична фізика. Т. 1: Класична механіка і електродинаміка. — Київ : Вища школа, 1992. — С. 535. — ISBN 5-11-003760-4.

Алфавітний покажчик

А

Ампера гіпотеза, 236
Ампера досліди, 215
Ампера сила, 209
Амплітудно-частотна характеристика, 427
Антиферомагнетики, 250

Б

Балістичний гальванометр, 290
Бетатрон, 293
Біо–Савара–Лапласа закон, 211
Ближня і хвильова зони, 401
Брюстера кут, 387

В

Ван де Граафа генератор, 75
Вейса молекулярне поле, 249
Вектор електричної індукції, 101
Вектор поляризації, 98
Вектор-потенціал, 216
Векторна діаграма, 432
Взаємодії фундаментальні, 14
Взаємоіндукція, 283
Відбивання закон, 384
Відемана–Франца закон, 180
Відносності принцип, 358
Вімсхерста машина, 72
Віртуальних переміщень метод, 135
  для магнітних сил, 323
Вістря, поле поблизу, 76

Г

Газовий розряд
  несамостійний, 187
  самостійний, 188
Гальванічний елемент, 186
Гальмівне випромінювання, 406
Гаусса теорема, 32
  диференціальна форма, 35
  для вектора поляризації, 100
  для магнітного поля, 217
Генератор змінного струму, 287
Герца вібратор, 395
Герца досліди, 395
Гіромагнітне відношення, 223
Гістерезис, 250
Граничні умови
  для електростатичного поля, 45
  на межі діелектриків, 103
  на межі магнетиків, 242
Громовідвід, 79
Групова швидкість, 469
Густина енергії
  електричного поля, 130
  магнітного поля, 308
Густина струму, 146

Д

Джоуля–Ленца закон, 163
Диполь електричний, 55
  жорсткий, 55
  пружний, 55
  точковий, 55
  у зовнішньому полі, 61
Диполь магнітний, 227
Дипольне випромінювання, 400

Дипольний момент, 54
Діаграма спрямованості, 403
Діамагнетики, 242
Діелектрики
  неполярні, 96
  полярні, 96
Діелектрична проникність, 102
Діелектрична сприйнятливість, 98
Діод напівпровідниковий, 199
Діючих мас закон, 186
Добротність, 423
Довга лінія, 454
  погонні параметри, 452
Домени
  магнітні, 249
  сегнетоелектричні, 111
Дрейфова швидкість, 147
Друде теорія провідності, 176

Е

Едісона ефект, 193
Еквіпотенціальні поверхні, 40
Екстраструми, 296
Електрети, 110
Електрична міцність, 189
Електричних зображень метод, 81
Електроліз, 184
Електромагнітна індукція, 281
Електромагнітні хвилі, 375
  поперечність, 377
Електронна лавина, 188
Електрорушійна сила, 156
Електростатичний захист, 74
Електростатичний тиск, 139
Електрострикція, 98
Елемент струму, 210
Емісія
  вторинна електронна, 189
  термоелектронна, 191
Енергія електромагнітного поля
  закон збереження, 343
Енергія зарядів
  взаємна, 127
  власна, 134
Ерншоу теорема, 34

Є

Ємність електрична, 118
  взаємна, 120
  власна, 119
  коефіцієнти ємності, 119

З

Заломлення закон, 384
Заломлення силових ліній, 105
Заряд електричний, 16
  адитивність, 16
  два знаки, 16
  дискретність, 16
  закон збереження, 16, 149
  релятивістська інваріантність, 17, 360
  точковий, 18
Заряди вільні і зв'язані, 92
Зонна теорія, 194

І

Ідеальний провідник і надпровідник, 297
Імпеданс, 431
Імпульс електромагнітного поля, 380
Інваріанти електромагнітного поля, 363
Індуктивність, 294
  взаємна, 311
Іонізація ударна, 188
Іонний вітер, 78

К

Калібрування потенціалів, 217
  кулонівське, 217
Квадрупольний момент, 59
Квазістаціонарне наближення, 413
Квазістаціонарні струми, 167
Кірхгофа правила, 159

для змінного струму, 438
Клаузіуса–Моссотті формула, 109
Коерцитивне поле, 112
Коефіцієнт відбиття, 456
Коефіцієнт корисної дії джерела, 159
Коефіцієнт стоячої хвилі, 457
Коливальний контур, 414
Коливання
вимушені, 424
вільні, 416
згасаючі, 418
Конденсатор, 122
з'єднання, 123
складний, 123
Контактна різниця потенціалів, 199
Крокова напруга, 165
Кулона закон, 18
Куперівські пари, 182
Кюрі закон, 108, 248
Кюрі температура, 112
Кюрі–Вейса закон, 249

Л

Ланжевена формула для діамагнетизму, 248
Ланжевена–Дебая закон, 107
Лапласа рівняння, 47
Лармора прецесія, 246
Лармора теорема, 246
Лармора формула, 406
Ларморів радіус, 259
Ле Шательє–Брауна принцип, 289
Левітація надпровідника, 299
Ленца правило, 288
Логарифмічний декремент згасання, 422
Лондонівська глибина проникнення, 298
Лоренца сила, 209
Лоренца число, 181

М

Магнітна індукція, 209
Магнітна проникність, 241
Магнітна сприйнятливість, 241
Магнітне екранування, 245
Магнітний момент, 222
Магнітні заряди ефективні, 227
Магнітні монополі, 208
Максвелла гіпотеза, 333
Максвелла рівняння, 338
Максвеллівський час релаксації, 169
Мас-спектрометр, 264
Матеріальні рівняння, 340
Мейснера ефект, 297
Мікрополе і середнє поле, 93
Міллікена досліди, 273
Молекули полярні і неполярні, 95
Молекулярні струми, 237
Момент імпульсу електромагнітного поля, 382
Мультипольне розкладання, 58

Н

Надпровідність, 179
енергетична щілина, 182
замороження потоку, 297
квантування потоку, 300
Намагніченість, 238
Напівпровідники, 193
n-типу, 196
p-типу, 196
власна провідність, 196
домішкова провідність, 196
Напруженість електричного поля, 24
Напруженість магнітного поля, 240
Неперервності рівняння, 150
Носії заряду основні і неосновні, 197

О

Обертове магнітне поле, 446
Обмінна взаємодія, 250
Ома закон, 151
  для неоднорідної ділянки кола, 158
  у диференціальній формі, 152
  у комплексній формі, 431
Опір випромінювання, 405
Опір електричний, 151
  залишковий, 179
  питомий, 152
  реактивний, 431
Оптичне волокно, 470
Остроградського–Гаусса теорема, 36

П

П'єзоелектрики, 113
П'єзоефект, 98
Парамагнетики, 242
Перетворення полів
  нерелятивістські, 359
  релятивістські, 361
Питомий заряд, 269
Піроелектрики, 113
Плазмові двигуни, 268
Повне внутрішнє відбивання, 388
  порушене, 390
Пойнтінга вектор, 344
Пойнтінга теорема, 344
Показник заломлення, 376
Поле
  вихрове, 44
  вихрове електричне, 287
  потенціальне (консервативне), 38
Поляризація діелектриків, 95
  електронна, 96
  іонна, 96
  орієнтаційна, 96
Поляризація хвиль, 383
  p-поляризація, 383
  s-поляризація, 383
Поляризовність молекули, 64
Пондеромоторні сили, 135
Потенціал електростатичний, 38
Потенціали запізнюючі, 400
Потік вектора напруженості, 31
Потужність випромінювання, 404
Правого гвинта правило, 219
Пробій газу, 189
Провідник
  сили, що діють на поверхню, 87
Пуассона рівняння, 47

Р

Радіус електрона класичний, 129
Реакції випромінювання сила, 408
Резонанс, 427
  напруг, 435
  струмів, 436
Рідкі кристали, 113
Робота виходу, 191
Розсіювання світла (чому небо блакитне), 405
Рухливість носіїв заряду, 174

С

Самодії парадокси, 408
Самоіндукція, 293
Сегнетоелектрики, 111
Сила струму, 146
Силові лінії, 27
Синхротронне випромінювання, 407
Скін-ефект, 348
  глибина проникнення, 350
  застосування, 353
Сонячне вітрило, 380
Стабільність атома, 407

Стокса теорема, 44
Сторонні сили, 156
Струм зміщення, 333
Суперпозиції принцип, 26
Схрещені поля, рух частинок, 260

Т

Таунсенда умова, 189
Телеграфні рівняння, 454
Тензор електромагнітного поля, 365
Теорема взаємності, 312
Теорема єдиності, 47
Теорема про циркуляцію
  для електростатичного поля, 42
  для магнітного поля, 218
  зі струмом зміщення, 334
  у магнетику, 240
Тиск світла, 378
Толмена і Стюарта досліди, 70, 148
Томсона метод, 272
Томсона формула, 417
Трансформатор, 441
  внесений опір, 442
  ідеальний, 442
Трибоелектричний ефект, 17
Трибоелектричний ряд, 17
Трифазний струм, 445
Трьох других закон, 193

У

Узгоджене навантаження, 159

Ф

Фазова швидкість, 375
Фазово-частотна характеристика, 428
Фарадея закон електромагнітної індукції, 283
Фарадея закони електролізу, 185
Фарадея стала, 185
Фейнмана парадокс, 381
Феримагнетики, 250
Фермі енергія, 179
Феромагнетики, 242
  магнітом'які і магнітотверді, 251
Фільтр швидкостей, 273
Фільтри частотні, 442
Френеля формули, 385
Фуко струми, 291

Х

Хвилевід, 465
  гранична частота, 468
Хвильове рівняння, 372
Хвильовий вектор, 375
Хвильовий опір, 455
Хвиля
  згасаюча, 388
  монохроматична, 374
  плоска, 374
Холла ефект, 266
Холла стала, 268

Ц

Циклотрон, 265
Циркуляція вектора, 42

Ч

Час вільного пробігу, 176

Пономаренко Сергій Миколайович

Електрика та магнетизм
Підручник

Комп'ютерне верстання в системі LaTeX 2ε С. М. Пономаренко

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Свідоцтво про державну реєстрацію: серія ДК № 5354 від 25.05.2017 р.
просп. Берестейський, 37, м. Київ, 03056