概率论第一周作业：

1. 52张牌混合后扣在桌子上，先逐张翻开，直到出现一张A为止。接
张牌，问出现黑桃A 的概率和出现梅花2的概率哪个大？

2. 一副牌52张，一手牌是5张

（1）如果五张牌是连续的，但不同花色，那么成为顺子（straight）
牌是顺子的概率？

（2）如果3张点数一样，另2张点数一样，就成为full house, 试问一
是full house的概率？

3. 20名数学系的女生，20名物理系的女生，两人一间，随机安排宿舍

（1）没有一个宿舍既有数学系的又有物理系的概率？

（2）正好有2i（i=1,..., 10）个宿舍既有数学又有物理的概率？

4. 设f_n, f 是定义在Ω上的实值函数，试证明

$$\omega : f_n(\omega)\text{不收敛到}f(\omega)\} = \cup_{k=1}^{\infty} \cap_{N=1}^{\infty} \cup_{n=N}^{\infty} \{\omega : |f_n(\omega) - f(\omega)| \geq \frac{1}{k}\}$$

1， 52张牌混合后扣在桌子上，先逐张翻开，直到出现一张A为止。接下来翻一张牌，问出现黑桃A 的概率和出现梅花2的概率哪个大？

解： 已知一共有 （52）！ 种可能的发牌顺序。 黑桃A排在第一张A后面，相当于先去掉黑桃A，一共51！ 中发牌可能， 然后再将黑桃A放在第一张A的后面，而这只有一种可能。所以，
P({第一张A后面是黑桃A})=51!/52!=1/52.

同理，P（{第一张A后面是梅花2}）=1/52.

所以，所求的两个概率相等。

2 一副牌52张，一手牌是5张

不是同花顺(花色相同的顺子)

（1） 如果五张牌是连续的，但不同花色，那么成为顺子（straight），求一手牌是顺子的概率？
（2） 如果3张点数一样，另2张点数一样，就成为full house，试问一手牌恰好是full house的概率？

解：（1） 所有的可能性是 C_{52}^{5}

顺子共有10种，"A，2，3，4，5"，。。。。，"10，J,Q,K,A". 每一种顺子都有 4^5 种减去4种同花顺， 所以 一共有 10 * (4^5 -4）中可能的顺子。所以

顺子的概率是 $\dfrac{10\times(4^5-1)}{C_{52}^{5}}\approx 0.0039$

(2） 一副牌 共有从A 到K 13中点数， 先选一对的可能是13种， 之后再选3张同点数的可能是12种，

所以full house的所有可能为 $13\times12\times C_4^2\times C_4^3$

Full house 的概率为 $\dfrac{13\times12\times C_4^2\times C_4^3}{C_{52}^{5}}\approx 0.0014$

3， 20名数学系的女生，20名物理系的女生， 随机安排宿舍。
（1）没有一个宿舍既有数学系的又有物理系的概率？
（2） 正好有2i（i=1,..., 10）个宿舍既有数学又有物理的概率？

解：

(1) 40名同学分到有顺序安排的20个房间的所有可能性为 $\frac{40!}{(2!)^{20}} = C_{40}^2 \times C_{38}^2 \times \cdots \times C_2^2$

因此不考虑房间顺序，40个人分到20组的可能性一共是 $\frac{40!}{(2!)^{20}\,20!}$

同理，20个数学系的学生和20名物理系的学生各自分到10个宿舍的可能都是 $\frac{20!}{(2!)^{10}10!}$

所以， 都是本系的学生一个宿舍的概率为

$$\frac{\left(\frac{20!}{(2!)^{10}\,10!}\right)^2}{\frac{40!}{(2!)^{20}\,20!}}$$

（2） 分配宿舍，一共有2i 个宿舍是数学物理两系同学， 一共有两步，第一步从数学系和物理系里面各挑出2i 个学生， 各有 C_{20}^{2i} 中方法，然后这4i个同学一共(2i)! 种分配方法使得2i 个宿舍是混合宿舍。
第二步，数学物理两个系各自剩下的（20-2i）个学生， 各自分别组成10-i 个宿舍。和（1）的计算方法相同，其各自有 $\dfrac{(20-2i)!}{2^{10-i}(10-i)!}$ 种方法。

所以，可以求出有2i 个混合宿舍的概率是

$$(C_{20}^{2i})^2(2i)!\left(\frac{(20-2i)!}{2^{10-i}(10-i)!}\right)^2 \Big/ \frac{40!}{2^{20}20!}$$

上一页

下一页

7. 设f_n, f 是定义在Ω上的实值函数，试证明

$$\{\omega : f_n(\omega)\text{不收敛到}f(\omega)\} = \cup_{k=1}^{\infty} \cap_{N=1}^{\infty} \cup_{n=N}^{\infty} \{\omega : |f_n(\omega) - f(\omega)| \geq \frac{1}{k}\}.$$

Proof. (1) 对于任意$\omega \in \{\omega : f_n(\omega)\text{不收敛到}f(\omega)\}$, 存在$\epsilon > 0$, 对于任意自然数$N$，存在$n \geq N$, $|f_n(\omega) - f(\omega)| \geq \epsilon$. 选取正整数$k$ 使得$\frac{1}{k} < \epsilon$, 则可证$\omega \in \cup_{k=1}^{\infty} \cap_{N=1}^{\infty} \cup_{n=N}^{\infty} \{\omega : |f_n(\omega) - f(\omega)| \geq \frac{1}{k}\}$. 因此左 $\subset$ 右。

(2) 对于任意$\omega \in$ 右，同理可证存在$\epsilon > 0$, 对于任意自然数N，存在$n \geq N$, $|f_n(\omega) - f(\omega)| \geq \epsilon$. 因此数列$f_n(\omega)$ 不收敛于点$f(\omega)$. 因此右 $\subset$ 左。

概率论第二周作业：

1. 某班有N个士兵，每人各有一只枪，这些枪外形完全一样，在一次夜间紧急集合中，若每人随机地取走一支枪，问至少有一个人拿到自己枪的概率。

2. (1)Ω的一切子集组成的集类是一个$\sigma-$域。
(2)两个$\sigma-$域之交仍为$\sigma-$域。

3. 试证：概率定义中三个要求：
(a) $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$;
(b) $P(\Omega) = 1$;
(c) 若$A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \cdots, A_iA_j = \emptyset, i \neq j$, 则$P(\sum_i A_i) = \sum_i P(A_i)$.
等价于两个要求：
（i）$P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$;
(ii) 若$A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \cdots, A_iA_j = \emptyset, i \neq j$, 且$\sum_i A_i = \Omega$, 则$\sum_i P(A_i) = 1$.

4. $\Omega = \{f, a, n, g\}$, $\mathcal{G} = \{\{f, a, n\}, \{a, n\}\}$. 求$\mathcal{G}$张成的$\sigma-$域$\sigma(\mathcal{G})$.

前面没有了

下一页

概率论第二周作业：

1. 某班有N个士兵，每人各有一只枪，这些枪外形完全一样，在一次夜间紧急集合中，若每人随机地取走一支枪，问至少有一个人拿到自己枪的概率。

解：设$A_i = \{$第i个士兵拿到自己的枪$\}$，$i = 1, 2, ..., n$.

$P(A_i) = \frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N}$,

$P(A_iA_j) = \frac{(N-2)!}{N!} = \frac{1}{N(N-1)}, i \neq j$,

....

$P(A_1A_2\cdots A_n) = \frac{1}{N!}$,

由加法公式，

$$
\begin{aligned}
& P(\text{至少有一个人拿到自己枪}) \\
= & P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \\
= & \sum_{i=1}^{N} P(A_i) - \sum P(A_iA_j) + \cdots + (-1)^{N-1} P(A_1A_2\cdots A_n) \\
= & C_N^1 \frac{1}{N} - C_N^2 \frac{1}{N(N-1)} + \cdots + (-1)^{N-1} \frac{1}{N!} \\
= & 1 - \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^{N-1} \frac{1}{N!} = \sum_{i=1}^{N} \frac{(-1)^{i-1}}{i!}.
\end{aligned}
$$

2. (1)Ω的一切子集组成的集类是一个$\sigma-$域。
(2)两个$\sigma-$域之交仍为$\sigma-$域。

证明：（1）设$\mathcal{F}_1 = \{A | A \subset \Omega\}$, 则
$(a)\Omega \in \mathcal{F}_1$
$(b)\forall A \in \mathcal{F}_1, \bar{A} \subset \Omega$, 则$\bar{A} \in \mathcal{F}_1$;
$(c)A_i \in \mathcal{F}_1, i = 1, 2, ..., \cup_i A_i \subset \Omega$, 则$\cup A_i \in \mathcal{F}_1$,
因此$\mathcal{F}_1$是一个$\sigma-$域.

(2)设$\mathcal{F}, \mathcal{G}$为两个$\sigma-$域。
$(a)\Omega \in \mathcal{F}, \Omega \in \mathcal{G}$, 则$\Omega \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$;
$(b)A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, 则$\bar{A} \in \mathcal{F}, \bar{A} \in \mathcal{G}$, 因而$\bar{A} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$;
$(c)A_i \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}, i = 1, 2, ...$, 则$\cup_i A_i \in \mathcal{F}, \cup_i A_i \in \mathcal{G}$, 因而$\cup_i A_i \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$,
因此$\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$是一个$\sigma-$域.

3. 试证：概率定义中三个要求：
(a) $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$;
(b) $P(\Omega) = 1$;
(c) 若$A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \cdots, A_iA_j = \emptyset, i \neq j$, 则$P(\sum_i A_i) = \sum_i P(A_i)$.
等价于两个要求：
（i）$P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$;
(ii) 若$A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \cdots, A_iA_j = \emptyset, i \neq j$, 且$\sum_i A_i = \Omega$, 则$\sum_i P(A_i) = 1$.

证明： （a）与（i）等价。

由（a）(b)(c)⇒ (ii):
若$A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \cdots, A_iA_j = \emptyset, i \neq j,$且$\sum_i A_i = \Omega$. 则由（c），

$$\sum_i P(A_i) = P(\sum_i A_i)$$

由$\sum_i A_i = \Omega$ 和条件（b），$P(\sum_i A_i) = P(\Omega) = 1$. 所以有$\sum_i P(A_i) = 1$,（ii）得证。

由(i)(ii)⇒ (b)(c):
首先，设$A_1 = \Omega$, $A_i = \emptyset, i = 2, 3, ...,$ 则$A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \cdots, A_iA_j = \emptyset, i \neq j,$且$\sum_i A_i = \Omega$, 由(ii), $1 = \sum_i P(A_i) = P(\Omega) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \cdots = P(\Omega)$, (b)得证。
其次，若$A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \cdots, A_iA_j = \emptyset, i \neq j$, 设$A_0 = (\sum_i A_i)^C$, 因$A_0, \sum_i A_i, \emptyset, \emptyset, \cdots$为一列两两不相交且并为$\Omega$的集合列，由（ii），

$$1 = P(A_0) + P(\sum_i A_i) + P(\emptyset) + \cdots = P(A_0) + P(\sum_i A_i) \qquad (1)$$

又有$A_0, A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$, 两两不相交，且$A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots = \Omega$, 由(ii),

$$1 = P(A_0) + \sum_{i=1} P(A_i). \qquad (2)$$

因此，由(1)(2), 得$\sum_{i=1} P(A_i) = P(\sum_i A_i)$. (c)得证。

4. $\Omega = \{f, a, n, g\}$, $\mathcal{G} = \{\{f, a, n\}, \{a, n\}\}$. 求$\mathcal{G}$张成的$\sigma-$域$\sigma(\mathcal{G})$.

解：$\sigma(\mathcal{G}) = \{\{f, a, n, g\}, \{f, a, n\}, \{a, n, g\}, \{a, n\}, \{f, g\}, \{f\}, \{g\}, \emptyset\}$

写出全部子集在找符合σ域定义的那些

概率论第三周作业

1. 假设一副52张牌洗好后扣在桌子上，每次翻开一张，直到出现第一张A. 已知第一张A出现在第20张翻牌，问接下来的第21张牌是以下牌的条件概率：

（1）黑桃A, (2) 梅花2.

2 证明：若$P(A|B)=1$, 则$P(\bar{B}|\bar{A})=1$.

3. 假设坛子中有8个红球与4个白球，我们无放回地取出两个球。

（1）坛子中球等可能被取出去，则取出的两个球都是红球的概率？

（2）假设红球的质量为a, 白球的质量为b, 假设每次抽到一个球的概率是这个球的质量和当时坛中球的总质量的比值，则两次取出的都为红球的概率。

4. I型的电池会以0.7的概率正常工作，而II型电池会以0.4的概率正常工作。现在从一个装着8个I型和6个II型电池的箱子中随机抽取一个电池。

（1）电池可以正常工作的概率？

（2）假设电池没有正常工作，那么它是I型电池的概率？

5. 98% 的婴儿分娩是安全的，分娩的婴儿中有15% 的是剖腹产的。当采用剖腹产时，安全的概率是96%. 如果随机选择一个采用非剖腹产的孕妇，其婴儿安全的概率？

6. 事件A,B,C两两独立，$ABC=\emptyset$, $P(A)=P(B)=P(C)$, 且已知$P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$, 试求$P(A)$.

7. 你买了50张彩票，中奖的概率是1/100，问将有以下中彩数的概率：

（1）至少一张；（2）正好一张；（3）至少两张。

8. （**选做** 提示：用Borel-Cantelli引理）设f_n 是定义在Ω上的实值可测函数，试证明：

如果对任意常数$C>0$都有$\sum_n P(\{\omega:|f_n(\omega)|>C\})<\infty$, 则有

$$P(\{\omega:lim_{n\to\infty}f_n(\omega)=0\})=1$$

9.轮盘有38格1到36和0，00. 一个人永远压注在1到12，问下面的概率：（1）这个人输掉前5局，（2）他第一次赢钱将是在第4次下注.

10. 坛子里面有4个白球，4个黑球，随机从中抽出4个球，如果是2黑2白，则停止抽取。否则将这些球放回去，再继续抽取4个，直到2黑2白。那么正好抽取了n次的概率？

11.一个通信系统由n个元件组成，每个元件正常工作时独立的，并且各个元件正常工作的概率为p, 当至少一半的元件正常工作时，该系统才可以正常运行。问，p取何值时，2k+1个元件的系统比2k-1个远见的系统正常运行的可能性大？.

第三周作业答案

1. 假设一副52张牌洗好后扣在桌子上，每次翻开一张，直到出现第一张A. 已知第一张A出现在第20张翻牌，问接下来的第21张牌是以下牌的条件概率：

（1）黑桃A, (2) 梅花2.

证明：

（1）当第一张A出现在第20次翻牌，前19张是52-4=48张牌排列，第20张牌是4张A的一种，20张之后的牌就是52-20=32张牌的排列。所以

$$P(\text{第一张A出现在第20次翻牌}) = \frac{48\times 47\times\cdots\times 30\times 4\times 32!}{52!}$$

第一张A出现在第20次翻牌,且下一张牌是黑桃A，前19张是52-4=48张牌排列，第20张牌是3张A的一种，第21张只能是黑桃A一种，21张之后的牌就是52-21=31张牌的排列，所以

$$P(\text{第一张A出现在第20次翻牌,且下一张牌是黑桃A}) = \frac{48\times 47\times\cdots\times 30\times 3\times 31!}{52!}$$

因此，

$$\begin{aligned}
&P(\text{第21张牌是黑桃A}|\text{第一张A出现在第20次翻牌})\\
&= \frac{P(\text{第一张A出现在第20次翻牌,且下一张牌是黑桃A})}{P(\text{第一张A出现在第20次翻牌})}\\
&= \frac{3}{4\times 32} = \frac{3}{128}.
\end{aligned}$$

(2) 第一张A出现在第20次翻牌,且下一张牌是梅花2，前19张不是A不是梅花2，是52-5=47张牌排列，第20张牌是4张A的一种，第21张只能是梅花2一种，21张之后的牌就是52-21=31张牌的排列，所以

$$P(\text{第一张A出现在第20次翻牌,且下一张牌是梅花2}) = \frac{47\times 46\times\cdots\times 29\times 4\times 31!}{52!}$$

因此，

$$\begin{aligned}
&P(\text{第21张牌是梅花2}|\text{第一张A出现在第20次翻牌})\\
&= \frac{P(\text{第一张A出现在第20次翻牌,且下一张牌是梅花2})}{P(\text{第一张A出现在第20次翻牌})}\\
&= \frac{29}{48\times 32} = \frac{29}{1536}.
\end{aligned}$$

2 证明：若$P(A|B)=1$，则$P(B^c|A^c)=1$.

证明： 由已知$P(A|B)=1$，可得$P(AB)=P(B)$

$$P(B^cA^c) = 1-P(A\cup B) = 1-P(A)-P(B)+P(AB) = 1-P(A) = P(A^c) \Rightarrow P(B^c|A^c) = \frac{P(B^cA^c)}{P(A^c)} = 1$$

3. 假设坛子中有8个红球与4个白球，我们无放回地取出两个球。

（1）坛子中球等可能被取出去，则取出的两个球都是红球的概率？

（2）假设红球的质量为a，白球的质量为b，假设每次抽到一个球的概率是这个球的质量和当时坛中球的总质量的比值，则两次取出的都为红球的概率。

解：

（1）

$$\begin{aligned} P(\text{两个球都是红球}) &= P(\text{第一次抽到红球})P(\text{第二次抽到红球}|\text{第一次抽到红球}) \\ &= \frac{8}{12}\frac{7}{11} = \frac{14}{33}. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} P(\text{两个球都是红球}) &= P(\text{第一次抽到红球})P(\text{第二次抽到红球}|\text{第一次抽到红球}) \\ &= \frac{8a}{8a+4b}\frac{7a}{7a+4b}. \end{aligned}$$

4. I型的电池会以0.7的概率正常工作，而II型电池会以0.4的概率正常工作。现在从一个装着8个I型和6个II型电池的箱子中随机抽取一个电池。

（1）电池可以正常工作的概率？

（2）假设电池没有正常工作，那么它是I型电池的概率？

解：

（1）

$$\begin{aligned} & P(\text{电池可以正常工作}) \\ = \ & P(\text{电池可以正常工作}|\text{I型电池})P(\text{I型电池}) + P(\text{电池可以正常工作}|\text{II型电池})P(\text{II型电池}) \\ = \ & 0.7 \times \frac{8}{14} + 0.4 \times \frac{6}{14} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & P(\text{I型电池}|\text{电池没有正常工作}) \\ = \ & \frac{P(\text{电池没有正常工作}|\text{I型电池})P(\text{I型电池})}{P(\text{电池没有正常工作})} \\ = \ & \frac{0.3 \times (8/14)}{3/7} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

5. 98% 的婴儿分娩是安全的，分娩的婴儿中有15% 的是剖腹产的。当采用剖腹产时，安全的概率是96%. 如果随机选择一个采用非剖腹产的孕妇，其婴儿安全的概率？

解： 设$A = \{\text{婴儿是剖腹产}\}$，$B = \{\text{婴儿安全}\}$，

由全概率公式$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B^C|A^C)P(A^C)$, $0.98 = 0.96 \times 0.15 + P(B^C|A^C)P(A^C) \times (1-0.15)$,

最后有$P(B^C|A^C)=98.3\%$

6. 事件A,B,C两两独立，$ABC=\emptyset$, $P(A)=P(B)=P(C)$, 且已知$P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$, 试求$P(A)$.

证明：

$$\begin{aligned}\frac{9}{16} &= P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\ &= P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(A)P(C)-P(B)P(C)\\ &= 3P(A)-3P(A)^2\end{aligned}$$

解的$P(A)=\frac{1}{4},\frac{3}{4}$. 由$P(A)\le P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$, 因此$P(A)=\frac{1}{4}$.

7. 你买了50张彩票，中奖的概率是1/100，问将有以下中彩数的概率：（1）至少一张；（2）正好一张；（3）至少两张。

证明：

设中奖的概率为p=1/100, n=60.

(1)$P(\text{至少一张})=1-P(\text{一张都没有中})=1-(1-\frac{1}{100})^{50}$.

(2)$P(\text{正好一张})=C_{50}^{1}p(1-p)^{49}=50\frac{1}{100}(\frac{99}{100})^{49}$.

(3)$P(\text{至少两张})=1-C_{50}^{0}(1-p)^{50}-C_{50}^{1}p(1-p)^{49}$.

8. 设f_n是定义在Ω上的实值可测函数，试证明：
如果对任意常数$C>0$都有$\sum_n P(\{\omega:|f_n(\omega)|>C\})<\infty$, 则有

$$P(\{\omega: lim_{n\to\infty}f_n(\omega)=0\})=1$$

证明：设

$$A_n=\{\omega:|f_n(\omega)|>C\},$$

Borel Cantelli lemma

由0-1律，及条件$\sum_n P(A_n)<\infty$, 有

$$P(\cap_{n=1}\cup_{k=n}A_k)=0.$$

即$P(\cup_{n=1}\cap_{k=n}\bar{A}_k)=1$.

另一方面，由于

$$\{\omega: lim_{n\to\infty}f_n(\omega)=0\}=\cap_{m=1}\cup_{n=1}\cap_{k=n}\{|f_k|\le\frac{1}{m}\}$$

有

$$P(\{\omega: lim_{n\to\infty}f_n(\omega)=0\})=\lim_{m\to\infty}P(\cup_{n=1}\cap_{k=n}\{|f_k|\le\frac{1}{m}\})=1,$$

其中最后一个等式是因为之前一部分已经证明，对任意的m, $P(\cup_{n=1}\cap_{k=n}\{|f_k|\le\frac{1}{m}\})=1$.

9. 轮盘有38格1到36和0，00. 一个人永远压注在1到12，问下面的概率：（1）这个人输掉前5局，（2）他第一次赢钱将是在第4次下注.

证明：

每一局成功的概率$p = \frac{12}{38} = \frac{6}{19}$, $q = \frac{13}{19}$.

(1)P(这个人输掉前5局) $= (\frac{13}{19})^5$.

(2)P(他第一次赢钱将是在第4次下注) $= (\frac{13}{19})^3\frac{6}{19}$

10. 坛子里面有4个白球，4个黑球，随机从中抽出4个球，如果是2黑2白，则停止抽取。否则将这些球放回去，再继续抽取4个，直到2黑2白。那么正好抽取了n次的概率？

解： 抽中2黑2白的概率$p = \frac{C_4^2C_4^2}{C_8^4} = \frac{18}{35}$.

P(首次成功发生在第n次) $= (\frac{17}{35})^{n-1}\frac{18}{35}$.

11.一个通信系统由n个元件组成，每个元件正常工作时独立的，并且各个元件正常工作的概率为p, 当至少一半的元件正常工作时，该系统才可以正常运行。问，p取何值时，2k+1个元件的系统比2k-1个远见的系统正常运行的可能性大？

解：$2k+1$ 个元件的系统正常工作需要至少k+1个元件正常工作，记其概率p_{2k+1},

$$\begin{aligned}
p_{2k+1} &= P(\{\text{前2k-1个元件至少有k+1个工作}\}) \\
&\quad + P(\{\text{前2k-1个元件有k个工作}\})P(\{\text{后两个元件至少有一个工作}\}) \\
&\quad + P(\{\text{前2k-1个元件有k-1个工作}\})P(\{\text{后两个元件都工作}\})
\end{aligned}$$

$2k-1$ 个元件的系统正常工作需要至少k个元件正常工作，记其概率p_{2k-1},

$$\begin{aligned}
p_{2k-1} &= P(\{\text{前2k-1个元件至少有k个工作}\}) \\
&= P(\{\text{前2k-1个元件至少有k+1个工作}\}) + P(\{\text{前2k-1个元件有k个工作}\})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{2k+1} - p_{2k-1} &= P(\{\text{前2k-1个元件有k-1个工作}\})P(\{\text{后两个元件都工作}\}) \\
&\quad - P(\{\text{前2k-1个元件有k个工作}\})(1 - P(\{\text{后两个元件至少有一个工作}\})) \\
&= C_{2k-1}^{k-1}p^{k-1}q^kp^2 - C_{2k-1}^{k}p^kq^{k-1}(1 - C_2^1pq - p^2) \\
&= C_{2k-1}^{k-1}p^{k-1}q^kp^2 - C_{2k-1}^{k}p^kq^{k-1}(1-p)^2 \\
&= C_{2k-1}^{k-1}p^{k+1}(1-p)^k - C_{2k-1}^{k}p^k(1-p)^{k+1} \\
&= C_{2k-1}^{k-1}p^k(1-p)^k(p-(1-p)) > 0 \\
&\Leftrightarrow p > \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

第四周作业

1.（1）在伯努利试验中，事件A出现的概率为p, 求在n次独立试验中A出现
数次的概率。

（2）n次独立的事件，第i次试验A出现的概率为$\frac{1}{2i+1}$，A出现奇数次的概
P_n.

(2.1) 计算$P_n, n = 1, 2, 3, 4, 5$

(2.2) 试求P_n的一般表达式。

2.A队和B队进行一系列比赛，先胜三局者为比赛的胜者。假设每局A胜的概
为p, 且各局相互独立。求下列**条件概率**：

（1）已知A赢得第一局，求他最终获胜的条件概率；

（2）已知A取得了最终胜利，求他赢得第一局的概率。

3. 假设某高速公路上每天发生的事故数服从参数为3的泊松分布，

（1）求今天至少发生3次事故的概率；

（2）在今天至少发生了一次事故的假定条件下，重做（1）.

4. 甲，乙两个赌徒，按照某种约定赌博，规定先胜t局者赢得全部赌注，但
甲胜r局，乙胜s局时（$r < t, s < t$），因故中断比赛，试问如何公平合理的
配赌注？

第四周作业答案

1. (1) 在伯努利试验中，事件A出现的概率为p, 求在n次独立试验中A出现奇数次的概率。

(2) n次独立的事件，第i次试验A出现的概率为$\frac{1}{2i+1}$，A出现奇数次的概率P_n.

(2.1) 计算$P_n, n = 1, 2, 3, 4, 5$

(2.2) 试求P_n的一般表达式。

证明：

(1) 设$p_n = P(\{\text{n次独立试验中A出现奇数次的概率}\})$.

则

$$\begin{aligned} & p_n \\ = \; & P(\text{前n-1次独立试验中A出现奇数次的概率})P(\text{第n次失败}) \\ & +P(\text{前n-1次独立试验中A出现偶数次的概率})P(\text{第n次成功}) \\ = \; & p_{n-1}(1-p)+(1-p_{n-1})p=(1-2p)p_{n-1}+p \end{aligned}$$

当n=1时，$p_1 = P(\text{一次试验一次成功}) = p$.

$1-2p_n = (1-2p)(1-2p_{n-1}) = (1-2p)^2(1-2p_{n-2}) = \cdots = (1-2p)^{n-1}(1-2p_1) = (1-2p)^n$.

$p_n = \frac{1-(1-2p)^n}{2}$.

(2.1)

$$p_1 = \frac{1}{3}$$
$$p_2 = \frac{2}{5}$$
$$p_3 = \frac{3}{7}$$
$$p_4 = \frac{4}{9}$$
$$p_5 = \frac{5}{11}$$

(2.2)

$$\begin{aligned} & p_n \\ = \; & P(\text{前n-1次独立试验中A出现奇数次的概率})P(\text{第n次失败}) \\ & +P(\text{前n-1次独立试验中A出现偶数次的概率})P(\text{第n次成功}) \\ = \; & p_{n-1}(1-\frac{1}{2n+1})+(1-p_{n-1})\frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

由数学归纳法，和上式可以证明$p_n = \frac{n}{2n+1}$.

2.A队和B队进行一系列比赛，先胜三局者为比赛的胜者。假设每局A胜的概率为p, 且各局相互独立。求下列**条件概率**：

2.A队和B队进行一系列比赛，先胜三局者为比赛的胜者。假设每局A胜的概率为p，且各局相互独立。求下列**条件概率**：

（1）已知A赢得第一局，求他最终获胜的条件概率；

（2）已知A取得了最终胜利，求他赢得第一局的概率。

解：

（1）

$$\begin{aligned} & P(\text{A赢得最终胜利}|\text{A赢得第一场}) \\ = \ & P(\text{比赛至多再进行4场，甲至少赢得2场比赛}) \\ = \ & p^4+4p^3q+6p^2q^2=3p^4-8p^3+6p^2. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & P(\text{A赢得第一场}|\text{A赢得最终胜利}) \\ = \ & \frac{P(\text{A赢得最终胜利}|\text{A赢得第一场})P(\text{A赢得第一场})}{P(\text{A赢得最终胜利})} \\ = \ & \frac{3p^5-8p^4+6p^3}{C_5^3p^3q^2+C_5^4p^4q+C_5^5p^5} \\ = \ & \frac{3p^2-8p+6}{6p^2-15p+10}. \end{aligned}$$

3. 假设某高速公路上每天发生的事故数服从参数为3的泊松分布，

（1）求今天至少发生3次事故的概率；

（2）在今天至少发生了一次事故的假定条件下，重做（1）.

解：（1）$P(\{\text{至少发生3次事故}\})=1-P(\{\text{正好发生0次事故}\})-P(\{\text{正好发生1次事故}\})-P(\{\text{正好发生2次事故}\})=1-e^{-3}-3e^{-3}-\frac{9}{2}e^{-3}=0.5768.$

(2)$P(\{\text{至少发生3次事故}\}|\{\text{至少发生1次事故}\})=\frac{P(\{\text{至少发生3次事故}\})}{P(\{\text{至少发生1次事故}\})}=\frac{1-e^{-3}-3e^{-3}-\frac{9}{2}e^{-3}}{1-e^{-3}}=0.6070.$

4. 甲，乙两个赌徒，按照某种约定赌博，规定先胜t局者赢得全部赌注，但当甲胜r局，乙胜s局时（$r<t,s<t$），因故中断比赛，试问如何公平合理的分配赌注？

解一： $n=t-r$, $m=t-s$. 设每局中，甲获胜的概率为p.

设$p_{\text{甲}}=\{\text{甲最终取得胜利}\}$。按照$p_{\text{甲}}:1-p_{\text{甲}}$ 的比例分配赌资。

由于

$$\begin{aligned} \{\text{甲最终取得胜利}\} &= \{\text{甲赢n次，乙赢得少于m次}\} \\ &= \cup_{k=0}^{m-1}\{\text{甲赢n次，乙赢得少于k次}\} \\ &= \cup_{k=0}^{m-1}\{\text{第k+n次甲赢，且前n+k-1次中甲赢n-1次，乙赢k次}\} \end{aligned}$$

等于

有

$$P(\{\text{甲最终取得胜利}\}) = \sum_{k=0}^{m-1}C_{n+k-1}^{n-1}p^n(1-p)^k.$$

保存以上内容

解二：

$$P\{\text{甲最终取得胜利}\} = \cup_{k=n}^{\infty} P\{\text{第k+m次乙赢，且前m+k-1次中甲赢k次，乙赢m-1次}\}$$
$$= \sum_{k=n}^{\infty} C_{m+k-1}^{k} p^{k}(1-p)^{m}.$$

解三： 比赛至多进行m+n-1次就会结束。甲在这m+n-1局中，至少胜n次。

$$P\{\text{甲最终取得胜利}\} == \sum_{k=n}^{m+n-1} C_{m+n-1}^{k} p^{k}(1-p)^{m+n-1-k}.$$

第五周作业

1. 掷一个硬币n次，随机变量X表示得到的正面朝上数与反面朝上数之差。
（1）X 的取值范围。
（2）假设硬币是均匀的，求$n=3$时，X的分布列。

2. 坛子中的有m+n个球，按1，2，3，..., m+n 标号，从中抽取n个球，令X表示抽取的球中，其号码大于留在坛子中的球的号码最大值的数量。求X的分布列。

3. 令$X \sim P(\lambda)$, 求λ取何值时$P(X=k)$取最大值$(k \geq 0)$.

4. 离散型随机变量X取值于$\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$，且满足对于任意正整数m, n,

$$P(X = m+n | X > m) = P(X = n)$$

求随机变量X的分布列。

5. 假设A拥有初始赌注为a, 同一个无限富裕的人赌博。每一局可以赢或者输一个单位，赢得概率为p,输的概率为1-p. 求A输光的概率？

第五周作业答案

1. 掷一个硬币n次，随机变量X表示得到的正面朝上数与反面朝上数之差。
（1）X 的取值范围。
（2）假设硬币是均匀的，求$n=3$时，X的分布列。

解：（1）掷n次硬币，k个正面，$n-k$个反面，$k=0,1,\cdots,n$，则$X=\{2k-n;k=0,1,\cdots,n\}$.
(2) X 取值-3，-1，1，3.
$P(X=3)=P(X=-3)=\frac{1}{8}$, $P(X=1)=P(X=-1)=\frac{3}{8}$.

2. 坛子中的有m+n个球，按1，2，3，..., m+n 标号，从中抽取n个球，令X表示抽取的球中，其号码大于留在坛子中的球的号码最大值的数量。求X的分布列。

解：当$\{X=i\}$时，$m+n,m+n-1,...,m+n-i+1$ 号球被取出，$m+n-i$号球在坛子中，其余取出的$n-i$个球在$1,\cdot,m+n-i-1$号中选出。因此

$$P(X=i)=\frac{C_{m+n-i-1}^{n-i}}{C_{m+n}^{n}};i=0,\cdots,n.$$

3. 令$X\sim P(\lambda)$, 求λ取何值时$P(X=k)$取最大值$(k\geq 0)$.

解：令$f(\lambda):=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.
$f'(\lambda)=\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}-\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{k-1}(k-\lambda)}{k!}e^{-\lambda}=0$,
当$\lambda=k$ 时，$f(\lambda)$ 达到最大值。

4. 离散型随机变量X取值于$\{1,2,3,4,\cdots\}$，且满足对于任意正整数m,n,

$$P(X=m+n|X>m)=P(X=n)$$

求随机变量X的分布列。

解：设$p_k=P(X=k)$, $q_k=P(X>k)$, 则有$p_{k+1}=q_k-q_{k+1}$, 且$q_0=1$.
设$p=P(X=1)$, 因为

$$p=P(X=k+1|X>k)=\frac{p_{k+1}}{q_k}=\frac{q_k-q_{k+1}}{q_k}=1-\frac{q_{k+1}}{q_k}$$

有

$$q_{k+1}=q_k(1-p).$$

由$q_0=1$, 归纳可知$q_k=(1-p)^k$.
因此$p_{k+1}=q_k-q_{k+1}=(1-p)^k-(1-p)^{k+1}=p(1-p)^k$.

5. 假设A拥有初始赌注为a, 同一个无限富裕的人赌博。每一局可以赢或者输一个单位，赢得概率为p,输的概率为1-p. 求A输光的概率？

解：

假设A拥有初始赌注为a，同一个初始赌资为b的人赌博，则A在B输光前输光的概率为p_{ab}。

（1）当$p=\frac{1}{2}$，$p_{ab}=\frac{b}{a+b}$.

(2) 当$p\neq\frac{1}{2}$, $p_{ab}=1-\frac{1-(\frac{q}{p})^a}{1-(\frac{q}{p})^{a+b}}$.

令$b\to+\infty$, 有

$$p_a=lim_{b\to\infty}\begin{cases}1, p\leq\frac{1}{2}\\(\frac{q}{p})^a, p>\frac{1}{2}\end{cases} \tag{1}$$

第六周作业

1. 离散型随机变量X取值于$\{1,2,3,4,\cdots\}$，且满足对于任意正整数m,n,

$$P(X=m+n|X>m)=P(X=n)$$

求随机变量X的分布列(设$P(X=1)=p,0<p<1$)。

2. 随机变量X的密度函数,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{10}{x^2}, & x>10\\ 0, & x\le 10\end{cases} \tag{1}$$

求（1）$P(X>20)$,

(2)X的分布函数。

3. 随机变量X的密度函数为f_X，求随机变量$Y=aX+b$的密度函数。

4. X的密度函数$f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}cx^n, & 0<x<1,\\ 0, & otherwise\end{cases} \tag{2}$$

(1)求C;

(2) 计算$P(X>x),0<x<1$.

5. $X\sim U(0,10)$, 计算以下事件概率(1)$X<3$, (2)$X>6$, (3)$3<X<8$.

6. $X\sim N(10,36)$. 用标准正态的分布函数$\Phi(x)$表示下列概率，并且查表计算其近似值：

(1)$P(X>5)$;

(2)$P(4<X<16)$;

(3)$P(X<20)$.

7. $X\sim Exp(\lambda)$, 常数$C>0$, 试证明：$CX\sim Exp(\frac{\lambda}{C})$.

第六周作业答案

1. 离散型随机变量X取值于$\{1,2,3,4,\cdots\}$，且满足对于任意正整数m,n,

$$P(X=m+n|X>m)=P(X=n)$$

求随机变量X的分布列(设$P(X=1)=p, 0<p<1$).

解：设$p_k=P(X=k)$, $q_k=P(X>k)$, 则有$p_{k+1}=q_k-q_{k+1}$，且$q_0=1$.
设$p=P(X=1)$, 因为

$$p=P(X=k+1|X>k)=\frac{p_{k+1}}{q_k}=\frac{q_k-q_{k+1}}{q_k}=1-\frac{q_{k+1}}{q_k}$$

有

$$q_{k+1}=q_k(1-p).$$

由$q_0=1$, 归纳可知$q_k=(1-p)^k$.
因此$p_{k+1}=q_k-q_{k+1}=(1-p)^k-(1-p)^{k+1}=p(1-p)^k$.

2. 随机变量X的密度函数，

$$f(x)=\begin{cases}\frac{10}{x^2}, & x>10\\ 0, & x\le 10\end{cases} \tag{1}$$

求（1）$P(X>20)$,
(2)X的分布函数。

解：(1) $P(X>20)=\int_{20}^{\infty}\frac{10}{t^2}dt=\frac{1}{2}$;
(2)X的分布函数$F(x)$:

$$F(x)=\int_{\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0 & ,x\le 10;\\ \int_{10}^{x}\frac{10}{t^2}dt=1-\frac{10}{x} & ,x>10.\end{cases}$$

3. 随机变量X的密度函数为f_X, 求随机变量$Y=aX+b$的密度函数。

解：

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P(aX+b<y)\\ &= \begin{cases}P(X\le\frac{y-b}{a})=F_X(\frac{y-b}{a}) & ,a>0;\\ P(X>\frac{y-b}{a})=1-F_X(\frac{y-b}{a}) & ,a<0.\end{cases}\end{aligned}$$

密度函数：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{a}f_X(\frac{y-b}{a}) & ,a>0;\\ -\frac{1}{a}f_X(\frac{y-b}{a}) & ,a<0\end{cases}=\frac{1}{|a|}f_X(\frac{y-b}{a}).$$

4. X的密度函数$f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}cx^n, & 0<x<1,\\ 0, & otherwise\end{cases} \tag{2}$$

(1)求C;

(2) 计算$P(X > x), 0 < x < 1$.

解：(1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 cx^n dx = \frac{c}{n+1} = 1,$$

有$c = n+1$.

(2) $P(X > x) = \int_x^{\infty} f(t)dt = \int_x^1 ct^n dt = t^{n+1}|_x^1 = 1 - t^{n+1}$.

5. $X \sim U(0, 10)$, 计算以下事件概率(1)$X < 3$, (2)$X > 6$, (3)$3 < X < 8$.

解：$f(x) = \frac{1}{10} I_{[0,10]}(x)$. 区间[0,10]上的均匀分布

(1)$P(X < 3) = \int_0^3 \frac{1}{10} dt = \frac{3}{10}$,

(2)$P(X > 6) = \int_6^{10} \frac{1}{10} dt = \frac{2}{5}$,

(3)$P(3 < X < 8) = \int_3^8 \frac{1}{10} dt = \frac{1}{2}$.

6. $X \sim N(10, 36)$. 用标准正态的分布函数$\Phi(x)$表示下列概率，并且查表算其近似值：

(1)$P(X > 5)$;

(2)$P(4 < X < 16)$;

(3)$P(X < 20)$.

$\frac{X-\mu}{\sigma}$ 划为

解：$X \sim N(10, 36)$，则$Y = \frac{X-10}{6} \sim N(0, 1)$.

(1)$P(X > 5) = 1 - P(X \le 5) = 1 - P(Y \le -\frac{5}{6}) = 1 - \Phi(-\frac{5}{6}) = \Phi(\frac{5}{6})$
0.7967.

(2) $P(4 < X < 16) = P(-1 < Y < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.682$

(3) $P(X < 20) = P(Y < \frac{5}{3}) = \Phi(\frac{5}{3}) = 0.9525$.

7. $X \sim Exp(\lambda)$, 常数$C > 0$, 试证明：$CX \sim Exp(\frac{\lambda}{C})$.

解：设$Y = CX$,

$F_Y(y) = P(Y < y) = P(X < \frac{y}{C}) = F_X(\frac{y}{C}) = 1 - e^{-\lambda\frac{y}{C}}$, $y > 0$.

密度函数

$f_Y(y) = \frac{\lambda}{C} e^{-\frac{\lambda}{C}y}$, $y > 0$。因此$Y \sim Exp(\frac{\lambda}{C})$.

概率论第七周作业：

1. 随机变量X, Y的联合密度函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{5} + cy, & 0 < x < 1, 1 < y < 5 \\ 0, & otherwise \end{cases} \quad (1)$$

(1) 确定常数c的取值？
(2) 计算边缘密度f_X, f_Y;
(2)计算$P(X+Y>3)$.

2. 求以下二维均匀分布的边缘分布：

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2+y^2 \le 1; \\ 0, & otherwise \end{cases} \quad (2)$$

3. 从1，2，3，4中任取一个数计为X,再从1,...,X中任取一个数记为Y. 求(X,Y)的联合分布列以及P(X=Y).

4. 进行n次独立重复试验，如果每次试验有r个可能的结果：$A_1, A_2, \cdots, A_r$, 且每次试验中A_i 发生的概率为$p_i = P(A_i)$, $i = 1,2,\cdots,r$. $p_1 + \cdots + p_r = 1$. 记X_i 为n次独立重复试验中A_i出现的次数，$i = 1,2,\cdots,r$. 则$(X_1, X_2, \cdots, X_r)$取值$(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ 的概率，即A_1 出现n_1次，A_2 出现n_2 次，...,A_r 出现n_r次的概率为

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \cdots, X_r = n_r) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r},$$

其中$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$.
这个联合分布成为**r项分布**。称$(X_1, X_2, \cdots, X_{r-1})$服从r项分布，记为$(X_1, X_2, \cdots, X_{r-}$
$M(n, p_1, p_2, \cdots, p_r)$。
证明：给定三项分布$(X,Y) \sim M(n, p_1, p_2, p_3)$, 则其边缘分布为二项分布。

概率论第七周作业：

1. 随机变量X,Y的联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{5}+cy, & 0<x<1,1<y<5\\ 0, & otherwise\end{cases} \tag{1}$$

(1) 确定常数c的取值？

(2) 计算边缘密度f_X, f_Y;

(2)计算$P(X+Y>3)$.

解：（1）

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy \\ &= \int_0^1 dx\int_1^5 (\frac{x}{5}+cy)dy = \int_0^1(\frac{4x}{5}+12c)dx = \frac{2}{5}+12c, \end{aligned}$$

因此$c=\frac{1}{20}$.

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_1^5(\frac{x}{5}+\frac{y}{20})dy = \frac{4}{5}x+\frac{3}{5}$, $x\in(0,1)$.

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^1(\frac{x}{5}+\frac{y}{20})dx = \frac{1}{10}+\frac{y}{20}$, $y\in(1,5)$.

(3)

$$P(X+Y>3)=\int_0^1 dx\int_{3-x}^5(\frac{x}{5}+\frac{y}{20})dy = \int_0^1(7x^2+22x+16)dx\cdot\frac{1}{40}=\frac{11}{15}.$$

给出积分区域

2. 求以下二维均匀分布的边缘分布：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1;\\ 0, & otherwise\end{cases} \tag{2}$$

解：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1<x<1;\\ 0, & otherwise\end{cases} \tag{3}$$

3. 从1，2，3，4中任取一个数计为X,再从1,...,X中任取一个数记为Y. 求(X,Y)的联合分布列以及P(X=Y).

解：$P(X=1,Y=1)=\frac{1}{4}$, $P(X=2,Y=1)=P(X=2,Y=2)=\frac{1}{8}$, $P(X=3,Y=1)=P(X=3,Y=2)=P(X=3,Y=3)=\frac{1}{12}$, $P(X=4,Y=1)=P(X=4,Y=2)=P(X=4,Y=3)=P(X=4,Y=4)=\frac{1}{16}$.

$P(X=Y)=P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=2)+P(X=3,Y=3)+P(X=4,Y=4)=\frac{25}{48}$.

4. 进行n次独立重复试验，如果每次试验有r个可能的结果：$A_1, A_2, \cdots, A_r$，且每次试验中A_i 发生的概率为$p_i = P(A_i)$, $i = 1, 2, \cdots, r$. $p_1 + \cdots + p_r = 1$. 记X_i 为n次独立重复试验中A_i出现的次数，$i = 1, 2, \cdots, r$. 则$(X_1, X_2, \cdots, X_r)$ 取值$(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ 的概率，即A_1 出现n_1次，A_2 出现n_2 次，...,A_r 出现n_r次的概率为

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \cdots, X_r = n_r) = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r},$$

其中$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$.

这个联合分布成为r**项分布**。称$(X_1, X_2, \cdots, X_{r-1})$ 服从r项分布，记为$(X_1, X_2, \cdots, X_{r-1})$ $M(n, p_1, p_2, \cdots, p_r)$。

证明：给定三项分布$(X, Y) \sim M(n, p_1, p_2, p_3)$, 则其边缘分布为二项分布。

证明：$P(X = n_1, Y = n_2) = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}$, 其中$n = n_1 + n_2 + n_3$.
则X的分布列:对任意整数$0 \le n_1 \le n$,

$$\begin{aligned} P(X = n_1) &= \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \frac{n!}{n_1!n_2!(1-n_1-n_2)!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n-n_1-n_2} \\ &= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} p_1^{n_1} \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} p_2^{n_2} p_3^{n-n_1-n_2} \\ &= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} p_1^{n_1} (p_2 + p_3)^{n-n_1} \\ &= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} p_1^{n_1} (1-p_1)^{n-n_1}. \end{aligned}$$

因此$X \sim B(n, p_1)$. 同理，$Y \sim B(n, p_2)$.

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & \end{cases}$$

概率论第八周作业:

1. 随机变量$U \sim U(0,1)$, 计算U在以下条件下的条件分布:
(1)$U > a$, (2) $U < a$, 其中$0 < a < 1$.

2.随机变量X, Y的联合密度函数

$$f(x,y) = c(x^2 - y^2)e^{-x}, 0 \le x < \infty, -x \le y \le x.$$

当给定$X = x$的条件下，随机变量Y的条件分布.

3. $(X,Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$, 求$f_{X|Y}(x|y)$.

4. 随机变量X, Y的联合分布列为

$$p_{11} = \frac{1}{8}, p_{12} = \frac{1}{4}, p_{21} = \frac{1}{8}, p_{22} = \frac{1}{2}, \quad (1)$$

1) 求给定$Y = i, i = 1,2$的条件下，随机变量X的分布列。
(2) X和Y是独立的吗?
(3) 计算$P(XY \le 3), P(X + Y > 2)$.

5. 随机变量X称为取值为整数1,2,...,n的离散型均匀随机变量，如果

$$P(X = i) = \frac{1}{n}, i = 1, 2, ..., n.$$

寸于非负实数x，$[x]$ 为不超过x的最大整数。证明：如果$X \sim U(0,1)$, 那么$Y =$
$nX] + 1$是取值为1,2,...,n的离散型均匀随机变量

概率论第八周作业答案:

1. 随机变量$U \sim U(0,1)$, 计算U在以下条件下的条件分布:
(1)$U > a$, (2) $U < a$, 其中$0 < a < 1$.

解: (1)

$$P(U < x|U > a) = \frac{P(U < x, U > a)}{P(U > a)} = \begin{cases} 0; & x \leq a; \\ \frac{x-a}{1-a}; & a < x \leq 1; \\ 1; & u > 1. \end{cases}$$

(2)

$$P(U < x|U < a) = \frac{P(U < x, U < a)}{P(U < a)} = \begin{cases} 0; & x \leq 0; \\ \frac{x}{a}; & 0 < x \leq a; \\ 1; & u > a. \end{cases}$$

2 .随机变量X, Y的联合密度函数

$$f(x,y) = c(x^2 - y^2)e^{-x}, 0 \leq x < \infty, -x \leq y \leq x.$$

求当给定$X = x$的条件下，随机变量Y的条件分布.
解: (

$$1 = \int_0^\infty dx \int_{-x}^{+x} c(x^2 - y^2)e^{-x} dy = \frac{4}{3}c \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx = 8c,$$

因此$c = \frac{1}{8}$.)
对于$x > 0$, 条件密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy} = \frac{c(x^2 - y^2)e^{-x}}{c\frac{4}{3}x^3 e^{-x}} = \frac{3(x^2 - y^2)}{4x^3}, \, y \in [-x, x].$$

对于$x > 0$, 条件分布为

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)dy = \begin{cases} 0, & y < -x; \\ \frac{3y}{4x} - \frac{y^3}{4x^3} + \frac{1}{2}, & -x \leq y \leq x; \\ 1, & y > x. \end{cases}$$

3. $(X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$, 求$f_{X|Y}(x|y)$.

解:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{[x-(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2))]^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}} \sim N(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2), \sigma_1^2(1-\rho^2)).$$

4. 随机变量X,Y的联合分布列为

$$p_{11}=\frac{1}{8},p_{12}=\frac{1}{4},p_{21}=\frac{1}{8},p_{22}=\frac{1}{2}, \tag{1}$$

(1) 求给定$Y=i,i=1,2$的条件下，随机变量X的分布列。

(2) X和Y是独立的吗？

(3) 计算$P(XY\leq 3),P(X+Y>2)$.

解：（1）

$$P(X=1|Y=1)=\frac{1}{2};\quad P(X=2|Y=1)=\frac{1}{2},$$

$$P(X=1|Y=2)=\frac{1}{3};\quad P(X=2|Y=2)=\frac{2}{3}.$$

(2) $P(X=1)=\frac{3}{8}\neq P(X=1|Y=1)=\frac{1}{2}$, 所以$X,Y$不独立。

(3) $P(XY\leq 3)=1-p_{22}=\frac{1}{2}$, $P(X+Y>2)=1-p_{11}=\frac{7}{8}$.

5. 随机变量X称为取值为整数1,2,...,n的离散型均匀随机变量，如果

$$P(X=i)=\frac{1}{n},i=1,2,...,n.$$

对于非负实数x，$[x]$ 为不超过x的最大整数。证明：如果$X\sim U(0,1)$, 那么$Y=[nX]+1$是取值为1,2,...,n的离散型均匀随机变量。

解：当X取值于（0，1），nX取值于$(0,n)$, $[nX]$取值于$\{0,1,2,\cdots,n-1\}$, 因此Y是取值于1,2,...,n的离散型随机变量。

选取任意$k\in\{1,2,\cdots,n\}$, 则有

$$P(Y=k)=P(\frac{k-1}{n}\geq X<\frac{k}{n})=\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}=\frac{1}{n}.$$

概率论第九周作业：

0. (1)X服从$(-1,1)$上的均匀分布，求随机变量$|X|$的密度函数。

(2)X服从(a,b)上的均匀分布,求与X具有线性关系，并且服从$(0,1)$上的均匀分布的随机变量？

(3) X服从$(0,1)$上的均匀分布, 分别求随机变量$min(X,1-X)$和$max(X,1-X)$的分布。

1. 设(X,Y) 的联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1+xy}{4}, & |x|<1,|y|<1; \\ 0, & ,otherwise, \end{cases} \tag{1}$$

试证明X,Y 不独立，但是X^2 与Y^2 独立。

2. 设X,Y,Z为独立随机变量，每个都等可能的取值1和2，求一下随机变量的分布列：

(1)XYZ,(2)$XY+XZ+YZ$,(3)X^2+YZ.

3. (1) $X\sim b(m,p)$, $Y\sim b(n,p)$, X,Y相互独立，求$X+Y$的分布？

(2) $X\sim P(\lambda_1)$, $Y\sim P(\lambda_2)$, X,Y相互独立，求$X+Y$的分布？

(3) $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i), i=1,2,$ X_1,X_2相互独立，求X_1+X_2的分布？

概率论第九周作业答案：

0. (1)X服从$(-1,1)$上的均匀分布，求随机变量$|X|$的密度函数。

(2)X服从(a,b)上的均匀分布,求与X具有线性关系，并且服从$(0,1)$上的均匀分布的随机变量？

(3) X服从$(0,1)$上的均匀分布, 分别求随机变量$min(X,1-X)$和$max(X,1-X)$的分布。

解：(1) X 的密度函数

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in (-1,1); \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

设$Y = |X|$, Y 的分布函数为

$$F_Y(y) = P(|Y| < y) = P(-y < X < y) = \begin{cases} 0, & y \le 0; \\ y, & 0 < y \le 1; \\ 1; & y > 1; \end{cases}$$

因此$Y \sim U(0,1)$, 密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1); \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

(2) 设$Y = mX + n$.

(i) 当$m > 0$时，Y的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{m(b-a)}, & y \in (am+n, bm+n); \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

因此，如果$Y \sim U(0,1)$, 则$m = \frac{1}{b-a}$, $n = -am = -\frac{a}{b-a}$. 即

$$Y = \frac{X-a}{b-a}.$$

(ii) 当$m < 0$时，Y的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} -\frac{1}{m(b-a)}, & y \in (bm+n, am+n); \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

因此，如果$Y \sim U(0,1)$, 则$m = -\frac{1}{b-a}$, $n = -bm = \frac{b}{b-a}$. 即

$$Y = \frac{b-X}{b-a}.$$

(3) (i)设$Y = max(X,1-X)$, Y的分布函数为

$$F_Y(y) = P(max(X,1-X) < y) = P(1-y < X < y)$$

因此，当$y \le \frac{1}{2}$时，分布函数为0,

$$F_Y(y) = P(max(X,1-X) < y) = P(1-y < X < y) = \begin{cases} 0, & y \le \frac{1}{2}; \\ 2y-1, & \frac{1}{2} < y \le 1; \\ 1, & y > 1. \end{cases}$$

(ii) 设$Z = mim(X, 1-X)$, Y的分布函数为

$$F_Z(z) = P(mim(X,1-X) < z) = 1-P(mim(X,1-X) \ge z) = 1-P(z \le X \le 1-z)$$

因此，当$z > \frac{1}{2}$时，分布函数为1,

$$F_Z(z) =) = 1 - P(z \le X \le 1-z) = \begin{cases} 0, & z \le 0; \\ 2z, & 0 < z \le \frac{1}{2}; \\ 1, & z > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

1. 设(X, Y) 的联合密度函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1+xy}{4}, & |x| < 1, |y| < 1; \\ 0, & , otherwise, \end{cases}$$

试证明X, Y 不独立，但是X^2 与Y^2 独立。

解：（1）当$x \in (-1,1)$时，X的密度函数$f_X(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1+xy}{4} dy = \frac{1}{2}$. 因此$X \sim U(-1,1)$. 同理$Y \sim U(-1,1)$.

由于$f(x,y) \ne f_X(x) f_Y(y)$, X,Y 不独立。

(2) (X^2, Y^2) 的联合分布函数，当$0 \le x, y \le 1$,

$$\begin{aligned} F(x,y) = P(X^2 \le x, Y^2 \le y) &= P(-\sqrt{x} \le X \le \sqrt{x}, -\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) \\ &= \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1+st}{4} ds dt = \sqrt{x}\sqrt{y}. \end{aligned}$$

当$0 \le x \le 1$, $y \ge 1$ 时，

$$F(x,y) = P(X^2 \le x, Y^2 \le y) = P(X^2 \le x) = P(-\sqrt{x} \le X \le \sqrt{x}) = \sqrt{x};$$

当$0 \le y \le 1$, $x \ge 1$ 时，

$$F(x,y) = P(X^2 \le x, Y^2 \le y) = P(Y^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le Y \le \sqrt{y}) = \sqrt{y};$$

当$x, y \ge 1$ 时，$F(x,y) = P(X^2 \le x, Y^2 \le y) = 1$

当$x < 0$或$y < 0$ 时, $F(x,y) = P(X^2 \le x, Y^2 \le y) = 0$.

而X^2的分布函数$F_{X^2}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \in (0,1) \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$.

同理，Y^2的分布函数$F_{Y^2}(y)=\begin{cases} 0, & y<0 \\ \sqrt{y}, & y\in(0,1) \\ 1, & y\geq 1 \end{cases}$. 因此

$$F(x,y)=F_{X^2}(x)F_{Y^2}(y),$$

X^2,Y^2 独立。

2. 设X,Y,Z为独立随机变量，每个都等可能的取值1和2，求一下随机变量的分布列：
(1)XYZ,(2)$XY+XZ+YZ$,(3)X^2+YZ.

解：（1）$P(XYZ=1)=1/8, P(XYZ=2)=3/8, P(XYZ=4)=3/8, P(XYZ=8)=1/8$,
(2)$P(XY+XZ+YZ=3)=1/8, P(XY+XZ+YZ=5)=3/8, P(XY+XZ+YZ=8)=3/8, P(XY+XZ+YZ=12)=1/8$,
(3) $P(X^2+YZ=2)=1/8, P(X^2+YZ=3)=2/8, P(X^2+YZ=5)=2/8, P(X^2+YZ=6)=2/8, P(X^2+YZ=8)=1/8$,

3. (1) $X\sim b(m,p)$, $Y\sim b(n,p)$, X,Y相互独立，求$X+Y$的分布？
(2) $X\sim P(\lambda_1)$, $Y\sim P(\lambda_2)$, X,Y相互独立，求$X+Y$的分布？
(3) $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i), i=1,2$, X_1,X_2相互独立，求X_1+X_2的分布？

解：（1）$X+Y$ 取值于0，1，..., n+m. 取$k=\{0,1,\cdots,m+n\}$,

$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= P(\cup_{l=0}^{k}\{X=l,Y=k-l\})=\sum_{l=0}^{k}P(X=l)P(Y=k-l) \\ &= \sum_{l=0}^{k}\frac{m!}{l!(m-l)!}p^l q^{m-l}\frac{n!}{(k-l)!(n-k+l)!}p^{k-l}q^{n-k+l} \\ &= C_{m+n}^{k}p^k q^{m+n-k}. \end{aligned}$$

(2)取$k=\{0,1,\cdots\}$,,

$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= \sum_{l=0}^{k}P(X=l)P(Y=k-l) \\ &= \sum_{l=0}^{k}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^l}{l!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{k-l}}{(k-l)!} \\ &= .e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{l=0}^{k}\frac{\lambda_1^l}{l!}\frac{\lambda_2^{k-l}}{(k-l)!} \\ &= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{l!(k-l)!}\lambda_1^l\lambda_2^{k-l} \\ &= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!} \end{aligned}$$

(3) X+Y 的密度函数

$$
\begin{aligned}
f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-x) f_Y(x) dx \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z-x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} e^{\frac{(z-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2))}}.
\end{aligned}
$$

概率论第十周作业：

1. 求最大顺序统计量X_n^*与最小顺序统计量X_1^*之差$X_n^*-X_1^*$的分布。

2. （1）对于非负值$a_j(j\geq 1)$, 证明：

$$\sum_{j=1}^{\infty}(a_1+\cdots+a_j)P(N=j)=\sum_{i=1}^{\infty}a_iP(N\geq i)$$

(2)设N为一个非负整数随机变量,利用(1)中结果证明：

$$E[N]=\sum_{i=1}^{\infty}P(N\geq i)$$

$$E[N(N+1)]=2\sum_{i=1}^{\infty}iP(N\geq i).$$

3. Y为非负连续型随机变量，证明：
(1)$E[Y]=\int_0^{\infty}P(Y>t)dt;$
(2) $E[Y^n]=\int_0^{\infty}nx^{n-1}P(X>x)dx.$
(3) 设X是参数为λ的指数随机变量，利用以上结果求$E[X^2]$.

4. 设X满足

$$P(X=1)=p=1-P(X=-1)$$

求$c(c\neq 1)$使得$E[c^X]=1$.

5. $X\sim B(n,p)$,证明：

$$E[\frac{1}{X+1}]=\frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

6. $X\sim P(\lambda)$, (1) 证明：

$$E[X^n]=\lambda E[(X+1)^{n-1}];$$

(2)利用以上结果计算$E[X^3]$.

7. X的密度函数$f(x)$, 已知$f(x)=a+bx^2, 0\leq x\leq 1$. 如果$EX=\frac{3}{5}$, 求$a,b$.

8. (1) 已知常数$A<\infty$, $X\sim U(0,A)$. 求$a\in(0,A)$ 使得$E[\quad |X-a| \quad]$ 达到极小值。

(2) $X\sim Exp(\lambda)$, 求$a>0$, 使得$E[\quad |X-a| \quad]$ 达到极小值。

概率论第十五周作业答案:

1. 求最大顺序统计量$X_{(n)}$与最小顺序统计量$X_{(1)}$之差$X_{(n)}-X_{(1)}$的分布。

解: X 的分布函数为$F(x)$. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为独立，与X同分布的随机变量序列。

$$X_{(n)} = max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}; \quad X_{(1)} = min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}.$$

设$X_{(1)}$, $X_{(1)}$ 的联合分布$F(x,y) = P(X_{(1)} \leq x, X_{(n)} \leq y) = P(X_{(n)} \leq y) - P(X_{(1)} > x, X_{(n)} \leq y)$.

(1) 当$x \geq y$, $F(x,y) = P(X_{(1)} \leq x, X_{(n)} \leq y) = P(X_{(n)} \leq y) = (F(y))^n$.

(2) 当$x < y$,

$$F(x,y) = (F(y))^n - P(x < X_{(1)} \leq X_{(n)} \leq y) = (F(y))^n - (F(y) - Fx)^n.$$

$X_{(1)}$, $X_{(1)}$ 的联合密度函数

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x \geq y; \\ n(n-1)(F(y) - Fx)^{n-2} f(x) f(y), & x < y, \end{cases}$$

对于$r > 0$,

$$\begin{aligned} P(X_{(n)} - X_{(1)} < r) &= \int\int_{y-x<r} f(x,y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_x^{x+r} n(n-1)(F(y) - Fx)^{n-2} f(x) f(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^{F(x+r)-F(x)} n(n-1)(\tilde{y})^{n-2} f(x) d\tilde{y} \ (\tilde{y} = F(y) - F(x)) \\ &= n \int_{-\infty}^{+\infty} (F(x+r) - F(x))^{n-1} f(x) dx. \end{aligned}$$

2. （1）对于非负值$a_j (j \geq 1)$, 证明:

$$\sum_{j=1}^{\infty} (a_1 + \cdots + a_j) P(N = j) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i P(N \geq i)$$

(2)设N为一个非负整数随机变量,利用(1)中结果证明:

$$E[N] = \sum_{i=1}^{\infty} P(N \geq i)$$

$$E[N(N+1)] = 2 \sum_{i=1}^{\infty} i P(N \geq i).$$

解: (1)

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} a_i P(N \geq i) &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i (\sum_{j=i}^{\infty} P(N=j)) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{j} (a_i P(N=j)) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} P(N=j) (\sum_{i=1}^{j} a_i) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} P(N=j)(a_1 + a_2 + \cdots + a_j).
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
E[N] &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(N=n) = \sum_{i=1}^{\infty} P(N \geq i); \text{(just take } \ a_i = 1, i = 1, 2, ...) \\
E[N(N+1)] &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)P(N=n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2iP(N \geq i). \text{(just take } \ a_i = 2i, i = 1, 2, ...).
\end{aligned}
$$

3. Y为非负连续型随机变量，证明：
(1)$E[Y] = \int_0^{\infty} P(Y > t)dt$;
(2) $E[Y^n] = \int_0^{\infty} nx^{n-1} P(X > x)dx.$
(3) 设X是参数为λ的指数随机变量，利用以上结果求$E[X^2]$.

解：（1）

$$
E[Y] = \int_0^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^{\infty} \int_0^{y} f_Y(y) ds dy = \int_0^{\infty} (\int_s^{\infty} f_Y(y) dy) ds = \int_0^{\infty} P(Y > s) ds.
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
E[Y^n] = \int_0^{\infty} x^n f_Y(x) ds = \int_0^{\infty} (\int_0^{x} ns^{n-1} \, ds) f_Y(x) \, dx &= \int_0^{\infty} ns^{n-1} (\int_s^{\infty} f_Y(x) dx) ds \\
&= \int_0^{\infty} ns^{n-1} P(Y > s) ds.
\end{aligned}
$$

(3)

$$
E[X^2] = \int_0^{\infty} 2sP(X > s) \, ds = \int_0^{\infty} 2s(1 - F(s)) ds = \int_0^{\infty} 2se^{-\lambda s} \, ds = \frac{2}{\lambda^2}.
$$

4. 设X满足

$$
P(X = 1) = p = 1 - P(X = -1)
$$

求$c(c\neq 1)$使得$E[c^X]=1$. 解：因$c\neq 1$, $p\neq 0,1$. 对$p\in(0,1)$, 求解

$$E[c^X]=c\cdot p+\frac{1}{c}(1-p)=1$$

得$c=1$ 或$c=\frac{1-p}{p}$. 因此，对$p\in(0,\frac{1}{2})\cap(\frac{1}{2},1)$,$c=\frac{1-p}{p}$.

5. $X\sim B(n,p)$,证明：

$$E[\frac{1}{X+1}]=\frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

解：

$$\begin{aligned}E[\frac{1}{X+1}] &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k}\\ &= \frac{1}{(n+1)p}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}p^{k+1}q^{n-k}\\ &= \frac{1}{(n+1)p}[\sum_{l=0}^{n+1}\frac{(n+1)!}{l!(n+1-l)!}p^lq^{n+1-l}-q^{n+1}]\\ &= \frac{1}{(n+1)p}[(p+1-p)^{n+1}-q^{n+1}]=\frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.\end{aligned}$$

6. $X\sim P(\lambda)$, (1) 证明：

$$E[X^n]=\lambda E[(X+1)^{n-1}];$$

(2)利用以上结果计算$E[X^3]$.

解：（1）

$$E[X^n]=\sum_{k=0}^{\infty}k^ne^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}k^ne^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\begin{aligned}\lambda E[(X+1)^{n-1}] &= \lambda\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{n-1}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^ne^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}=\sum_{l=1}^{\infty}l^ne^{-\lambda}\frac{\lambda^l}{l!}=E[X^n].\end{aligned}$$

(2)

$E[X^3]=\lambda E[(X+1)^2]=\lambda E[X^2+2X+1]=\lambda E[X^2]+2\lambda E[X]+\lambda=\lambda^2E[X+1]+2\lambda^2+\lambda=\lambda^2+3\lambda^2+\lambda.$

7. X的密度函数$f(x)$, 已知$f(x) = a + bx^2, 0 \le x \le 1$. 如果$EX = \frac{3}{5}$, 求$a, b$.

解：$1 = \int_0^1 a + bx^2\ ds = a + \frac{b}{3}$
且$\frac{3}{5} = EX = \int_0^1 x(a + bx^2)dx = \frac{a}{2} + \frac{b}{4}$,
求解得$a = \frac{3}{5}, b = \frac{6}{5}$.

8. (1) 已知常数$A < \infty$, $X \sim U(0, A)$. 求$a \in (0, A)$ 使得$E[\quad |X - a| \quad]$ 达到极小值。
(2) $X \sim Exp(\lambda)$, 求$a > 0$, 使得$E[\quad |X - a| \quad]$ 达到极小值。

解：（1）

$$E[|X - a|] = \int_0^a (a - x)\frac{1}{A}dx + \int_a^1 (x - a)\frac{1}{A}dx = \frac{a^2}{A} - a + \frac{1}{2}.$$

由$A > 0$, 当$a = \frac{A}{2}$时$E[|X - a|]$ 达到极小值.
(2)

$$E[|X - a|] = \int_0^a (a - x)\lambda e^{-\lambda x}dx + \int_a^\infty (x - a))\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda}e^{-a\lambda} + a - \frac{1}{\lambda} = f(a)$$

由于$f'(a) = -2e^{-\lambda a} + 1$, 取$a_0 = \frac{ln2}{\lambda}$, $f'(a_0) = 0$, 且$f''(a_0) > 0$,故在a_0取极小值。

概率论第十一周作业：

1. X是正态随机变量，$E[X]=1.7$, $Var(X)=3$, 求随机变量$Y=1-2X$的密度函数。

2. X, Y 都服从$(0,1)$上的均匀分布，且相互独立，求$E[|X-Y|]$, $Var(|X-Y|)$.

3. 假设

$$P(X=a)=p, P(X=b)=1-p,$$

(a) 证明$\frac{X-b}{a-b}$ 服从Bernulli分布；

(b) 计算$Var(X)$.

4. 随机变量$X \sim N(0,1)$, 记$A=\{|X|>1\}, B=\{|X|>2\}$, 试求随机变量I_A, I_B 的概率分布列，数学期望，方差，以及$Var(I_A+I_B)$.

5. 随机变量X的概率密度函数为$f(x)=ax+bx^2, 0<x<1$, 如果$E[X]=0.6$, 计算$Var(X)$.

6. 假设随机变量X的分布函数为$F(x)=1-e^{-x^2}, x>0$, 求$E[X]$ 和$Var(X)$.

概率论第十一周作业：

1. X是正态随机变量，$E[X]=1.7$, $Var(X)=3$, 求随机变量$Y=1-2X$的密度函数。

解：Y作为正态随机变量X的一个线性变换，也服从正态分布。因此只需要确定Y的均值和方差。

$$E[Y]=1-2E[X]=1-3.4=-2.4,$$
$$Var(Y)=4Var(X)=12,$$

推出$Y\sim N(-2.4,12)$, 即$f_Y(x)=\frac{1}{\sqrt{24\pi}}e^{-\frac{(x+2.4)^2}{24}}$.

2. X,Y 都服从$(0,1)$上的均匀分布，且相互独立，求$E[|X-Y|]$, $Var(|X-Y|)$.

解：X,Y的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} 1, & x\in(0,1), y\in(0,1) \\ 0, & otherwise, \end{cases}$$

因此

$$E[|X-Y|]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-y|f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1|x-y|dxdy=\frac{1}{3}.$$

由

$$E[|X-Y|^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-y|^2f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1|x-y|^2dxdy=\frac{1}{6},$$

可得$Var(|X-Y|)=E[|X-Y|^2]-(E[|X-Y|])^2=\frac{1}{18}$.

3. 假设

$$P(X=a)=p, P(X=b)=1-p,$$

(a) 证明$\frac{X-b}{a-b}$ 服从Bernoulli分布；

(b) 计算$Var(X)$.

解：（a）设$Y=\frac{X-b}{a-b}$, 因为$P(Y=0)=P(X=b)=1-p$, $P(Y=1)=P(X=a)=p$, 因此Y服从Bernoulli分布.

(b) 由于$Var(Y)=p(1-p)$, 且$X=(a-b)Y+b$, 有$Var(X)=(a-b)^2Var(Y)=(a-b)^2p(1-p)$.

4. 随机变量$X\sim N(0,1)$, 记$A=\{|X|>1\}, B=\{|X|>2\}$, 试求随机变量I_A, I_B 的概率分布列，数学期望，方差，以及$Var(I_A+I_B)$.

解：由于$P(A)=0.3174$, I_A服从Bernoulli分布$B(0.3174)$; 同理，I_A服从Bernoulli分布$B(0.0455)$.

$E[I_A] = P(A) = 0.3174$, $Var(I_A) = P(A)P(A^c) = 0.2167$,
$E[I_B] = P(B) = 0.0455$, $Var(I_B) = P(B)P(B^c) = 0.0434$,
又由于$Cov(I_A, I_B) = E[I_A I_B] - E[I_A]E[I_B] = P(B) - P(A)P(B) = P(B)P(A^c)$
$Var(I_A + I_B) = Var(I_A) + Var(I_B) + 2Cov(I_A, I_B) = 0.3222$.

5. 随机变量X的概率密度函数为$f(x) = ax + bx^2, 0 < x < 1$, 如果$E[X] = 0.6$, 计算$Var(X)$.

解：由

$$1 = \int_0^1 ax + bx^2 \, ds = \frac{a}{2} + \frac{b}{3};$$

$$0.6 = \int_0^1 ax^2 + bx^3 \, dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{4}$$

解得$a = 3.6, b = -2.4$. 因此

$$E[X^2] = \int_0^1 ax^3 + bx^4 \, dx = 0.42,$$

从而$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 0.06$.

6. 假设随机变量X的分布函数为$F(x) = 1 - e^{-x^2}, x > 0$, 求$E[X]$ 和$Var(X)$.
解：方法一：
（1）$E[X] = \int_0^\infty x f(x) \, dx = \int_0^\infty 2x^2 e^{-x^2} \, dx = (-xe^{-x^2})|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
（2）$E[X^2] = \int_0^\infty x^2 f(x) \, dx = -\int_0^\infty x^2 \, de^{-x^2} = (-x^2 e^{-x^2})|_0^\infty + \int_0^\infty 2xe^{-x^2} \, dx = 1$,
因此$Var(X) = 1 - \frac{\pi}{4}$.
方法二：
（1）$E[X] = \int_0^\infty P(X > x) \, dx = \int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$;
(2) $E[X^2] = \int_0^\infty 2xP(X > x) \, dx = -\int_0^\infty 2xe^{-x^2} \, dx = 1$,
因此$Var(X) = 1 - \frac{\pi}{4}$.

概率论第十二周作业：

1. 随机向量(X,Y)的联合密度函数$f(x,y)=\frac{2e^{-2x}}{x}, 0\le x<\infty, 0\le y\le x$，计算$Cov(X,Y)$.

2. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为独立同分布随机变量序列，期望为μ，方差为σ^2，记$Y_n=X_n+X_{n+1}+X_{n+2}$. 对于$j\ge 0$，求$Cov(Y_n,Y_{n+j})$。

3. 设X_1,X_2,X_3,X_4 是两两不相关的随机变量序列，具有均值0和方差1，计算下列各对随机变量的相关系数：
(1) X_1+X_2和X_2+X_3;
(2) X_1+X_2和X_3+X_4.

4. 设Z为标准正态随机变量，$Y=a+bZ+cZ^2$，证明：

$$\rho(Y,Z)=\frac{b}{\sqrt{b^2+2c^2}}.$$

5. $(X,Y)\sim N(1,4;1,4;0.5)$, $Z=X+Y$, 求ρ_{XZ}.

6. $X\sim f(x)$, $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}, x\in R$.
(1) $E|X|$, $D|X|$;
(2)求$Cov(X,|X|)$, 问$X,|X|$ 是否相关。
(3) $X,|X|$是否独立，为什么？

7. $(X,Y)\sim U(D)$, 其中区域$D=\{0<x<1, 0<y<x\}$, 求X,Y相关系数。

8. $(X,Y)\sim N(1,9;0,16;-0.5)$, $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$,
(1) Z的期望，方差
(2) X,Z的相关系数
(3) X,Z是否独立？

概率论第十二周作业：

1. 随机向量(X,Y)的联合密度函数$f(x,y)=\frac{2e^{-2x}}{x}, 0\le x<\infty, 0\le y\le x$，计算$Cov(X,Y)$.

解：$E[XY]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^\infty dx\int_0^x xy\frac{2e^{-2x}}{x}dy=\int_0^\infty x^2e^{-2x}dx=\frac{1}{4}$;

$E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^\infty dx\int_0^x x\frac{2e^{-2x}}{x}dy=2\int_0^\infty xe^{-2x}dx=\frac{1}{2}$,

$E[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\int_0^\infty dx\int_0^x y\frac{2e^{-2x}}{x}dy=\int_0^\infty xe^{-2x}dx=\frac{1}{4}$,

因此$Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=\frac{1}{8}$.

2. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为独立同分布随机变量序列，期望为μ，方差为σ^2，记$Y_n=X_n+X_{n+1}+X_{n+2}$. 对于$j\ge 0$, 求$Cov(Y_n,Y_{n+j})$。

解：当$j=0$, $Cov(Y_n,Y_{j+n})=Var(X_n+X_{n+1}+X_{n+2})=Var(X_n)+Var(X_{n+1})+Var(X_{n+2})=3\sigma^2$;

当$j=1$, $Cov(Y_n,Y_{j+n})=Cov(X_n+X_{n+1}+X_{n+2},X_{n+1}+X_{n+2}+X_{n+3})=Var(X_{n+1})+Var(X_{n+2})=2\sigma^2$;

当$j=2$, $Cov(Y_n,Y_{j+n})=Cov(X_n+X_{n+1}+X_{n+2},X_{n+2}+X_{n+3}+X_{n+4})=Var(X_{n+2})=\sigma^2$;

当$j\ge 3$, $Cov(Y_n,Y_{j+n})=Cov(X_n+X_{n+1}+X_{n+2},X_{n+j}+X_{n+j+1}+X_{n+j+2})=0$;

3. 设X_1,X_2,X_3,X_4 是两两不相关的随机变量序列，具有均值0和方差1，计算下列各对随机变量的相关系数：
(1) X_1+X_2和X_2+X_3;
(2) X_1+X_2和X_3+X_4.

解：(1) $Cov(X_1+X_2,X_2+X_3)=Var(X_2)=1$, $Var(X_1+X_2)=Var(X_1)+Var(X_2)=2$,同理$Var(X_2+X_3)=2$.
因此$\rho_{X_1+X_2,X_2+X_3}=\frac{1}{2}$.

（2）$Cov(X_1+X_2,X_3+X_4)=0$，因此$\rho_{X_1+X_2,X_3+X_4}=0$.

4. 设Z为标准正态随机变量，$Y=a+bZ+cZ^2$，证明：

$$\rho(Y,Z)=\frac{b}{\sqrt{b^2+2c^2}}.$$

解：$Cov(Y,Z)=Cov(a+bZ+cZ^2,Z)=bVar(Z)+E[Z^3]-E[Z^2]E[Z]=b$,

$Var(Y)=b^2Var(Z)+c^2Var(Z^2)=b^2+c^2[E[Z^4]-(E[Z^2])^2]=b^2+c^2[3-1]=b^2+2c^2$.

$$\rho(Y,Z)=\frac{Cov(Y,Z)}{\sqrt{Var(Y)}\cdot\sqrt{Var(Z)}}=\frac{b}{\sqrt{b^2+2c^2}}.$$

5. $(X,Y)\sim N(1,4;1,4;0.5)$**，**$Z=X+Y$**，求**ρ_{XZ}**.**

解：$Cov(X,Z)=Cov(X,X+Y)=Var(X)+Cov(X,Y)=4+\rho_{XY}\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}=4+0.5\times 4=6$,
$Var(Z)=Var(X)+Var(Y)+2Cor(X,Y)=4+4+2\times 0.5\times 4=12$,
$\rho_{XZ}=\frac{Cor(X,Z)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Z)}}=\frac{6}{\sqrt{4\times 12}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. $X\sim f(x)$**，**$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},x\in R$**.**
(1) $E|X|$, $D|X|$;
(2)求$Cov(X,|X|)$, 问$X,|X|$ 是否相关。
(3) $X,|X|$是否独立，为什么？
解: (1) $E[|X|]=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\,dx=2\int_0^{+\infty}x\frac{1}{2}e^{-x}\,dx=1$;
$E[|X|^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^2f(x)\,dx=2\int_0^{+\infty}x^2\frac{1}{2}e^{-x}\,dx=2$;
$Var(X)=E[|X|^2]-(E[|X|])^2=1$;
(2) $E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx=0$;
$E[X|X|]=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|f(x)\,dx=0$;
$Cov(X,|X|)=0$,因此$X,|X|$不相关。
(3) $P(X<1;|X|<1)=P(-1<X<1)=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=2\int_0^1\frac{1}{2}e^{-x}\,dx=1-e^{-1}$;
$P(X<1)=\int_{-\infty}^{1}f(x)\,dx=1-\frac{1}{2e}$,
因此$P(X<1;|X|<1)\neq P(X<1)P(|X|<1)$,$X$,$|X|$不独立。

7. $(X,Y)\sim U(D)$**，其中区域**$D=\{0<x<1,0<y<x\}$**，求X,Y相关系数。**

解:$f(x,y)=2$ on D,$f(x,y)=0$ on $\bar{D}$.
$EX=\int_0^1dx\int_0^x 2x\,dy=\frac{2}{3}$;
$EX^2=\int_0^1dx\int_0^x 2x^2\,dy=\frac{1}{2}$;
因此$Cov(X)=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$;
$EY=\int_0^1dx\int_0^x 2y\,dy=\frac{1}{3}$;
$EX^2=\int_0^1dx\int_0^x 2y^2\,dy=\frac{1}{6}$;
因此$Cov(X)=\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$;
$E[XY]=\int_0^1dx\int_0^x 2xy\,dy=\frac{1}{4}$;
$Cor(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=\frac{1}{4}-\frac{2}{9}=\frac{1}{36}$,
$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}=\frac{1}{2}$.

8. $(X,Y)\sim N(1,9;0,16;-0.5)$**，**$Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$**，**

(1) Z的期望，方差
(2) X,Z的相关系数
(3) X,Z是否独立？

解:(1)$EZ = \frac{EX}{3} + \frac{EY}{2} = \frac{1}{3}$;
$Var(Z) = \frac{Var(X)}{9} + \frac{Var(Y)}{4} + \frac{1}{3}Cov(X,Y) = 1 + 4 + \frac{1}{3}(-0.5) \times 12 = 3$;
(2) $Cov(X,Z) = \frac{1}{3}Var(X) + \frac{1}{2}Cov(X,Y) = 0$;
$\rho_{XZ} = 0$,
(3) 由于$\left(\begin{array}{c} X \\ Z \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} X \\ Y \end{array} \right)$,

(X,Z)作为二元正态随机向量的线性变换也服从二元正态分布，因此X,Z不相关等价于X,Z独立。

概率论第十三周作业

1．X,Y的特征函数分别为

$$\varphi_X(t) = \exp\{2e^{it} - 2\}, \varphi_Y(t) = (\frac{3}{4}e^{it} + \frac{1}{4})^{10},$$

X,Y相互独立，计算$P(X+Y=2)$, $E[XY]$.

2. $X_1, \cdots, X_n$ i.i.d., $X_i \sim B(1,p)$, 求$Y = \sum_{i=1}^n X_i$ 的分布(使用特征函数方法)。

3. X是取非负整数值的随机变量，其分布率$P(X=j) = p_j, j \geq 1$, 定义其矩母函数

$$\phi(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j = E[s^X],$$

(1) 定义$f(t) = ln\phi(t)$, 求$f^{'}(t)|_{t=1}$, $f^{''}(t)|_{t=1}$.

(2) 设Y 为几何随机变量，参数$p = 1-s, s \in (0,1)$. X与Y独立，证明$\phi(s) = P(X < Y)$. (提示：全概率公式)。

概率论第十三周作业

1. X,Y的特征函数分别为

$$\varphi_X(t)=\exp\{2e^{it}-2\},\varphi_Y(t)=(\frac{3}{4}e^{it}+\frac{1}{4})^{10},$$

X,Y相互独立，计算$P(X+Y=2)$, $E[XY]$.

解:$X\sim P(2)$, $Y\sim B(10,\frac{3}{4})$;
由独立性，$E[XY]=E[X]E[Y]=2\times\frac{30}{4}=15$,
$P(X+Y=2)=\sum_{i=0}^{2}P(X=i)P(Y=2-i)=\sum_{i=0}^{2}\frac{2^i}{i!}e^{-2}\cdot C_{10}^{2-i}(\frac{3}{4})^{2-i}(\frac{1}{4})^{8+i}=\frac{467}{4^{10}}e^{-2}$.

2. $X_1,\cdots,X_n$ i.i.d., $X_i\sim B(1,p)$, 求$Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的分布(使用特征函数方法)。

证：X_i 的特征函数$\varphi_i(t)=pe^{it}+(1-p)$,
由独立性，Y 的特征函数$\varphi_Y(t)=\Pi_{k=1}^{n}\varphi_k(t)=(pe^{it}+(1-p))^n$,
$Y\sim B(n,p)$.

3. X是取非负整数值的随机变量，其分布率$P(X=j)=p_j,j\geq 1$, 定义其矩母函数

$$\phi(s)=\sum_{j=0}^{\infty}p_js^j=E[s^X],$$

(1) 定义$f(t)=ln\phi(t)$, 求$f^{'}(t)|_{t=1}$, $f^{''}(t)|_{t=1}$.

(2) 设Y 为几何随机变量，参数$p=1-s,s\in(0,1)$. X与Y独立，证明$\phi(s)=P(X<Y)$. (提示：全概率公式)。

解：（1）$f^{'}(t)|_{t=1}=E[X]$,$f^{''}(t)|_{t=1}=E[X(x-1)]-(E[X])^2$.

(2) $k\geq 1$, 由独立性，$P(X<Y|Y=k)=P(X<k|Y=k)=P(X<k)$.
由全概率公式，

$$\begin{aligned}
P(X<Y) &= \sum_{k=1}^{\infty}P(X<Y|Y=k)P(Y=k)=\sum_{k=2}^{\infty}P(X<k)P(Y=k)\\
&= \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}(1-p)^{k-1}pp_i\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=i+1}^{\infty}(1-p)^{k-1}pp_i\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}p_i(1-p)^i=\sum_{i=1}^{\infty}p_is^i=\phi(s).
\end{aligned}$$

概率论第十四周作业

1. 证明：对任意$x \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-itx}\phi(t)dt = F(x+0) - F(x-0),$$

其中$\phi(t)$ 是分布F的特征函数，$F(x+0), F(x-0)$ 分别表示F在x 点的右、左极限。

证明：

$$\begin{aligned} Left &= lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it(y-x)}dF(y)dt \qquad (1)\\ &= lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-T}^{T}\frac{1}{2T}e^{it(y-x)}dtdF(y) \qquad (2)\end{aligned}$$

设$G(T,y) = \int_{-T}^{T}\frac{1}{2T}e^{it(y-x)}dt$,有

$$\sup_{T>0, y\in R}|G(T,y)| \le 1$$

且

$$lim_{T\to\infty}G(T,y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \ne y. \end{cases}$$

由控制收敛定理

$$left = \int_{-\infty}^{\infty} lim_{T\to\infty}G(T,y)dF(y) = \int_{\{x\}} dF(y) = F(x+0) - F(x-0).$$

2.（1）假设$X \sim Exp(1)$, 求X的特征函数？

（2）函数$\frac{1}{1+it}$ 是否为一个特征函数？如果是的话，指出它是那个随机变量的特征函数。

（3）X_1 是一个等概率取值± 1 的Bernulli 随机变量，求X_1 的特征函数？

（4）$(cost)^{17}$ 是否为一个特征函数？如果是的话，指出它是那个随机变量的特征函数.

(5)$|cost|$ 是否为一个特征函数？(提示，求两次导)

(6) 证明，当随机变量X 满足$E[|x|] < \infty$, X 的特征函数为$\phi(t)$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|dF(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1 - Re\phi(t)}{t^2}dt.$$

解：（1）$X \sim Exp(1)$, $\phi_X(t) = \int_0^\infty e^{itx}e^{-x}dx = \frac{1+it}{1+t^2}$.

(2) $X \sim Exp(1)$, $Y = -X$,则$\phi_Y(t) = \phi_X(-t) = \frac{1-it}{1+t^2} = \frac{1}{1+it}$.

(3) $P(X=1) = P(X=-1) = \frac{1}{2}$, $\phi_X(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = cost.$

(4) $P(X=1)=P(X=-1)=\frac{1}{2}$,令$Y_1,...,Y_{17}$是与X 同分布，且相互独立的随机变量。则$Y=\sum_{i=1}^{17}$的特征函数$\phi_Y(t)=\prod_{i=1}^{17}\Phi_{Y_i}(t)=(cost)^{17}$.

(5) $|cost|$具有周期性的偶函数，如果他是特征函数，其对应的分布为对称的离散型。

但$|cost|=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{4m^2-1}cos(2mt)$.

如果$|cost|=\sum_k cos(kt)P(X=k)=P(X=0)+2\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)coskt$.

而上面$|cost|$的两个分解中，$cos4t$的系数分别为$-\frac{4}{15\pi}<0$和$P(X=4)\geq 0$,矛盾。

（6）

$$\begin{aligned}
right &= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1-costx}{t^2}dtdF(x)\\
&= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}(costx-1)d(\frac{1}{t})dF(x)\\
&= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{x\cdot sintx}{t}dtdF(x)\\
&= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{\pi}{2}sgn(x)dF(x)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}|x|dF(x)
\end{aligned}$$