多元多项式.

定义1. 设K为数域. $x_1 \cdots x_n$为未知元.

单项式: $a x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$. $a \in K$.

a称为单项式系数. $i_1 \cdots i_n \in \mathbb{N}$. 若 $a \neq 0$. 则 $\deg(a x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}) = i_1 + i_2 + \cdots i_n$.

$b x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}$. $(b \neq 0)$. 称为 $a x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ 同类项. $\Leftrightarrow i_1 = j_1 \cdots i_n = j_n$.

$a x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} + b x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} = (a+b) x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ (合并同类项).

有限个单项式形式和称为多元多项式

$$f(x_1 \cdots x_n) = \sum_{(i_1 \cdots i_n) \in N^n} a_{i_1 i_2 \cdots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \quad \text{(有限形式和)}.$$

$$\deg(f) = \begin{cases} \max.\{i_1 + \cdots i_n \mid a_{i_1 \cdots i_n} \neq 0\}, & \text{当 } f \neq 0. \\ -\infty. & \text{当 } f = 0. \end{cases}$$

$$g(x_1 \cdots x_n) = \sum_{(i_1 \cdots i_n) \in N^n} B_{i_1 \cdots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$$

定义 $f = g$ 相等 $\overset{def}{\Longleftrightarrow} a_{i_1 i_2 \cdots i_n} = b_{i_1 i_2 \cdots i_n} \ \forall i_1 \cdots i_n \in N$

加法: $f + g \overset{def}{=\!=} \sum_{(i_1 \cdots i_n) \in N^n} (a_{i_1 \cdots i_n} + b_{i_1 \cdots i_n}) x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$.

数乘: $kf \overset{def}{=\!=} \sum_{(i_1 \cdots i_n) \in N^n} k(a_{i_1 \cdots i_n}) x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$

$$(a x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n})(B x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}) = ab x_1^{i_1+j_1} x_2^{i_2+j_2} \cdots x_n^{i_n+j_n}$$

多项式相乘分配律转为单项式相乘, 再合并同类项.

$K[x_1 \cdots x_n] = \{ f(x_1 \cdots x_n) = \sum_{(i_1 \cdots i_n) \in N^n} a_{i_1 \cdots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \}$. 为数域K上的代数

称为关于$x_1 \cdots x_n$的 n元多项式(环).

定义2.(字典排序法)

1° 按未定元自然数排序 $x_1>x_2\cdots>x_n$.

2°. $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}>bx_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}\overset{def}{\Longleftrightarrow}\exists 1\leq k\leq n$ 使 $i_1=j_1\cdots i_{k-1}=j_{k-1}$ 但 $i_k>j_k$

可以证明任一多项式一单项式可按以下规则排序

则 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.

$=x_1^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3+x_3^2$

引理3.在字典排序下,$f\cdot g$ 首项 $=f$ 首项 $\cdot g$ 首项.

证明: $f=0,g=0$,显然

$f\neq0,g\neq0$,时,设 $ax_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$ 为 f 首,$bx_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}$ 为 g 首.

任取 f 中另一单项 $cx_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$. g 中,$dx_1^{l_1}\cdots x_n^{l_n}$.

则 $\exists 1\leq r,s\leq n$,使.

$i_1=k_1\cdots i_{r-1}=k_{r-1}$,但 $i_r>k_r$.

$j_1=l_1\cdots j_{s-1}=l_{s-1}$ 但 $j_s>l_s$.

不妨设 $r<s$.则有 $i_1+j_1=k_1+l_1\cdots i_{r-1}+j_{r-1}=k_{r-1}+l_{r-1}$.但 $i_r+j_r>k_r+l_r$.即.

$abx_1^{i_1+j_1}\cdots x_n^{i_n+j_n}>cdx_1^{k_1+l_1}\cdots x_n^{k_n+l_n}$.

同理易证 $ab>cd$. $ab>ad$. $\Rightarrow$ 结论得证#.

定理4.设 $0\neq f,0\neq g,\in K[x_1\cdots x_n]$,则 $f\cdot g\neq0$.

证明:由 $f\neq0$,则 f 首 $\neq0$,同理 g 首 $\neq0$,由引理3. $f\cdot g$ 首项 $\neq0\Rightarrow f\cdot g\neq0$.

推论5.(乘法消去) $f,g,h\in K[x_1\cdots x_n]$,且 $h\neq0$.

若 $fh=gh$,则 $f=g$

证明:用反证法,若 $f-g\neq0$,由整性,$0\neq(f-g)h=fh-gh$,即 $fh\neq gh$ 矛盾.

定义6. 若多项式的所有单项式为m次.

则称 f 为m次齐次多项式或m次型.

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$.

$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$

定理7.(齐次分解).

(1) 若 f, g 为 m 次型, $f+g \neq 0$. 则 $f+g$ 也为 m 次齐次多项式.

(2). 设 $f\neq 0$ 为 齐次(m), $g\neq 0$ 为 k次齐次. 则 $fg\neq 0$ 为 $m+k$ 次齐次.

由整性, $f\neq 0, g\neq 0 \Rightarrow f\cdot g\neq 0$. 由乘法定义易证.

(3) 设 $f\neq 0 \in k[x_1 \cdots x_n]$. 则 $f = f_d + f_{d-1} + \cdots f_0$.

其中 $d = \deg(f) \geq 0$. $f_d \neq 0$ 为 d 次齐次多项式. $f_i = 0$ 或 i 次齐次多项式 $i = d-1 \cdots\cdots 0$.

证明: $d = \deg f \geq 0$ $f_i = f$ 的 i 次单项式之和.

命题8. $f, g \in k[x_1 \cdots x_n]$. 则.

(1). $\deg(f\cdot g) = \deg f + \deg g$

(2) $\deg(f \pm g) = \max\{\deg f, \deg g\}$.

证明: (1) 不妨设 $f\neq 0, g\neq 0$.

$f = f_d + f_{d-1} \cdots\cdots + f_0$. $d = \deg f$. $f_d\neq 0$.

$g = g_k + g_{k-1} + \cdots\cdots g_0$. $k = \deg g$. $g_k \neq 0$.

$$fg = \underbrace{f_dg_k}_{d+k\text{次}} + \underbrace{(f_dg_{k-1} + f_{d-1}g_k)}_{0\text{或}d+k-1\text{次}} + \cdots\cdots + f_0g_0$$ 为 fg 齐次分解.

则 $\deg(fg) = \deg f + \deg g$.

引理9. $f\neq 0, \in K[x_1\cdots x_n]$, 则 $\exists a_1\cdots a_n\in K$, $f(a_1\cdots a_n)\neq 0$.

证明. $n=1$, $f(x)\in K[x]$, 且 $f\neq 0$. 从而 $f(x)$ 在K中仅有有限根, 在K中.

从而 $\exists a\in K$, $f(a)\neq 0$.

下设 $n-1$ 个未定元成立, 证 n 个未定元.

只将 x_n 看为未定元.

$0\neq f=b_m(x_1\cdots x_{n-1})x_n^m+b_{m-1}(x_1\cdots x_m\text{-}x_{n-1})x_n^{m-1}+b_{m-2}(x_1\cdots x_{n-1})x_n^{m-2}+\cdots b_0(x_1\cdots x_{n-1})$

下不妨设 $b_m(x_1\cdots x_{n-1})\neq 0$. 由归纳, $\exists a_1\cdots a_{n-1}\in K$. $b_m(a_1\cdots a_{n-1})\neq 0$.

$f(a_1\cdots a_{n-1},x_n)=b_m(a_1\cdots a_{n-1})x_n^m+\cdots b_0(a_1\cdots a_{n-1})$

是关于 x_n 的 m 次多项式. 由 $n=1$ 情况, $\exists a_n\in K$, st. $f(a_1\cdots a_{n-1},a_n)\neq 0$.

推论. $f=g$ (多元多项式) $\Leftrightarrow$ $f=g$ (多元函数).

"$\Rightarrow$" 平凡.

"$\Leftarrow$" 反证. 若 $f\neq g$ (多元多项式), $f-g\neq 0$. 多元多项式, $\exists a_1\cdots a_n$. st $(f-g)(a_1\cdots a_n)\neq 0$.

$\Rightarrow f(a_1\cdots a_n)\neq g(a_1\cdots a_n)$ 与假设矛盾。

例: $f=x, g=y\in K[x,y]$. 定义 $\Rightarrow (x,y)=1$. 不存在 $u(x,y), v(x,y)$. $uf+vg=1$.

因式分解: $f(x_1\cdots x_n)\in K[x_1\cdots x_n]$. $f(x_1\cdots x_n)=cp_1(x_1\cdots x_n)^{m_1}\cdots\cdots p_k(x_1\cdots x_n)^{m_k}$.

则 $K[x_1\cdots x_n]$ 为 UFD. 唯一分解整区.

对称多项式

例：$f(x_1\cdots x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$

定义1. 设 $f(x_1\cdots x_n)\in K[x_1\cdots x_n]$.
若 $\forall\ 1\le i\le j\le n$. 有 $f(x_1\cdots x_i\ x_j\cdots x_n)=f(x_1\cdots x_j,\cdots x_i,\cdots x_n)$
则称 $f(x_1\cdots x_n)$ 为对称多项式.(n元).

引理2. 设 $(k_1\cdots k_n)$ 为 $(1,\cdots n)$ 的全排列.
若 $f(x_1\cdots x_n)$ 为对称多项式. 则 $f(x_{k_1}\cdots x_{k_n})=f(x_1\cdots x_n)$.

证明：$(k_1,k_2\cdots k_n)\xrightarrow{\text{相邻对换}}(1,2\cdots n)$.

反之. $(1,2\cdots n)\xrightarrow{\text{若干对换}}(k_1\cdots k_n)$

$f(x_1\cdots x_n)=\cdots\cdots=f(x_{k_1}\cdots x_{k_n})$

引理3. 设 $f_1\cdots f_m\in K[x_1\cdots x_n]$ 对称. $g(y_1\cdots y_m)\in k[y_1\cdots y_m]$. 则.
$g(f_1\cdots f_m)$ 仍为 $x_1\cdots x_n$ 对称多项式. [对称多项式加减乘]

证：$g(f(x_1\cdots x_n)\cdots f_m(x_1\cdots x_i,x_j\ x_n))=g(f_1(x_1\cdots x_j\cdots x_i\cdots x_n),\cdots f_m(x_1\cdots x_j\cdots x_i\cdots x_n))$. #.

定义4. 下列多项式称为初等对称多项式.

$\sigma_1=x_1+\cdots x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$

$\sigma_2=x_1x_2+\cdots x_1x_n+x_2x_3+\cdots x_2x_n+\cdots x_{n-1}x_n=\sum\limits_{1\le i\le j\le n}x_ix_j$.

$\sigma_r=\sum\limits_{1\le i_1\le i_2\cdots i_r\le n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r}$

$\sigma_n=x_1\cdots x_n$.

定理5.(对称多项式基本定理).

设 $f(x_1 \cdots x_n)$ 为对称,则 $\exists$ 唯一的 $g(y_1 \cdots y_n)$ 使 $f(x_1 \cdots x_n) = g(\sigma_1 \cdots \sigma_n)$.

证明:先证存在性.

不妨设 $f \neq 0$. 设 $a x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ $(a \neq 0)$ 为 f 首项(字典)

断言. $i_1 \geq i_2 \cdots \geq i_n$.

用反证.设 $\exists\ 1 \leq k \leq n-1$, $i_k < i_{k+1}$ 对换 x_k, x_{k+1}. $f(x_1 \cdots x_n)$ 保持不变.

首项 $a x_1^{i_1} \cdots x_k^{i_k} x_{k+1}^{i_{k+1}} \cdots x_n^{i_n} \xrightarrow[<]{} a x_1^{i_1} \cdots x_k^{i_{k+1}} x_{k+1}^{i_k} \cdots x_n^{i_n}$ 这与首项假设矛盾.

构造: $g_1 = a \sigma_1^{i_1 - i_2} \sigma_2^{i_2 - i_3} \cdots \sigma_{n-1}^{i_{n-1} - i_n} \sigma_n^{i_n}$ 对称多项式

g_1 首项: $= a \cdot x_1^{i_1 - i_2} (x_1 x_2)^{i_2 - i_3} \cdots (x_1 \cdots x_n)^{i_n}$. $= a x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} = f$ 首项.

Program. $f_0 = f$ 首项 $a x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \longrightarrow g_1$.

令 $f_1 = f_0 - g_1$. 首项后于 f_0 首项 $\longrightarrow g_2$.

$\vdots$

f_i 首项 $\longrightarrow g_{i+1}$.

$f_{i+1} = f_i - g_{i+1}$. 首项后于 f_i 首项 $\longrightarrow g_{i+2}$.

限制 $i_1 \geq k_1 \geq k_2 \cdots k_n \geq 0$. $[0, i_1]$.

$\Rightarrow$ $(k_1 \cdots k_n)$ 取法仅有限. $\exists\ s \in Z^+$. $f_{s+1} = 0$.

$\Rightarrow f = f_0 = g_1 + f_1 = g_1 + g_2 + f_2 + \cdots = g_1 + \cdots g_{s+1}$. 从而 $\exists$ 性得证.

再证唯一性: $\exists\ h(y_1 \cdots y_n)$. $f(x_1 \cdots x_n) = h(\sigma_1 \cdots \sigma_n)$.

令 $\phi(y_1 \cdots y_n) = g(y_1 \cdots y_n) - h(y_1 \cdots y_n)$. 且 $\phi(y_1 \cdots y_n) = 0$. 只证 $\phi = 0$.

若 $\phi(y_1 \cdots y_n) \neq 0$. $\phi = \cdots + c x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n} + d x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} + \cdots$ 无同类项.(#

则 $\phi(\sigma_1 \cdots \sigma_n) = 0 = \cdots + c \sigma_1^{j_1} \cdots \sigma_n^{j_n} + d \sigma_1^{k_1} \cdots \sigma_n^{k_n} + \cdots$

首项: $c x_1^{j_1 + \cdots j_n} x_2^{j_2 + \cdots j_n} \cdots x_n^{j_n}$

$d x_1^{k_1 + \cdots k_n} x_2^{k_2 + \cdots k_n} \cdots x_n^{k_n}$.

首项之间不同类. 反证: $j_1 + \cdots j_n = k_1 + \cdots k_n$. $j_2 + \cdots j_n = k_2 + \cdots k_n$. $j_n = k_n \Rightarrow j_i = k_i$, $\forall i$

则 $\phi(\sigma_1\cdots\sigma_n) = *_1 + \cdots\cdots$ $\Rightarrow \phi(\sigma_1\cdots\sigma_n) \neq 0$

$*_2 + \cdots\cdots$

$*_3 + \cdots\cdots$

与 $0=\phi(\sigma_1\cdots\sigma_n)$ 矛盾. 假设不成立 $\Rightarrow \phi=0$.

例: $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2$.

解: $f(x_1,x_2,x_3)$ 首 $x_1^2x_2$. 令 $g_1 = \sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0 = \sigma_1\sigma_2 = (x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$.

$= f + 3x_1x_2x_3 = f + 3\sigma_3$

$= \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$

例: $f = (x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_3^2)$.

解: 由 f 为 6 次齐次对称多项式. 所以 f 首项 $bx_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3}$. 首项 $x_1^4x_2^2$

① $\begin{cases} k_1+k_2+k_3=6. \\ 4\geq k_1\geq k_2\geq k_3\geq 0. \end{cases}$ (k_1,k_2,k_3) 可能取法 (4,2,0) (4,1,1) (3,2,1) (3,3,0) (2,2,2)

$g_1: \sigma_1^{4-2}\sigma_2^{2-0}\sigma_3^0$ - - - - - - - - - -

$f = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_1^3\sigma_3 - 2\sigma_2^3 + 4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_3^2$

②不齐次, 考虑齐次分解.

Fermat 和. $S_k = x_1^k + \cdots\cdots x_n^k$ $(k\geq 1)$ 约定 $S_0=n$.

定理6. $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_n)$.

$= x^n - \sigma_1x^{n-1} + \sigma_2x^{n-2} + \cdots\cdots (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x + (-1)^n\sigma_n$.

$k\geq 1$. $x^{k+1}f'(x) = [S_0x^k + S_1x^{k-1} + \cdots\cdots + S_k]f(x) + g(x)$. 其中 $g(x)$ 次数小于 n.

证明: $f'(x) = \sum_{i=1}^{n}(x-x_1)\cdots(\widehat{x-x_i})\cdots(x-x_n) = \sum_{i=1}^{n}\frac{f(x)}{x-x_i}$

$x^{k+1}f'(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{f(x)x^{k+1}}{x-x_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(x^{k+1}-x_i^{k+1})}{x-x_i}f(x) + \boxed{\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{k+1}f(x)}{x-x_i} \triangleq g(x)}$

$= \sum_{i=1}^{n}(x^k + x_ix^{k-1} + \cdots x_i^k)f(x) + g(x)$.

$= (S_0x^k + S_1x^{k-1} + \cdots\cdots S_k)f(x) + g(x)$.

定理7.(Newton公式).

若$k\le n-1$, $S_k-S_{k-1}\sigma_1+S_{k-2}\sigma_2-\cdots (-1)^k k\sigma_k=0$.

若$k\ge n$. $S_k-S_{k-1}\sigma_1+\cdots (-1)^n S_{k-n}\sigma_n=0$.

证明: $f'(x)=nx^{n-1}-(n-1)\sigma_1x^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}$.

$x^{k+1}f'(x)=nx^{n+k}+\cdots\cdots (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x^{k+1}$. $\boxed{(-1)^{n+k-t}(t-k)\sigma_{n+k-t}x^t}$

$x^{k+1}f(x)=(s_0x^k+\cdots s_k)f(x)+g(x)$.

比较x^n前系数.

若$k\le n-1$. $(-1)^k(n-k)\sigma_k=S_k-S_{k-1}\sigma_1+\cdots+(-1)^k \underset{=n}{S_0}\sigma_k$.

$\Rightarrow S_k-S_{k-1}\sigma_1+\cdots+(-1)^k k\sigma_k=0$.

若$k\ge n$. $0=S_k-S_{k-1}\sigma_1\cdots (-1)^n S_{k-n}\sigma_n$.

$f(x),g(x)\in K[x]$. $(f(x),g(x))_K=1\Leftrightarrow (f(x),g(x))_C=1.\Leftrightarrow f(x),g(x)$在C无公根.

$(f(x),g(x))\ne1\Leftrightarrow f(x),g(x)$在C上有公共根.

引理1. 设$f(x),g(x)\in K[x]$. $d(x)=(f(x),g(x))$ 则 $d(x)\ne1\Leftrightarrow\exists\, u(x),v(x)\in K[x]$.

$f(x)u(x)=g(x)v(x)$. 且$\deg u(x)<\deg g(x)$. $\deg v(x)<\deg f(x)$.

证明: "$\Rightarrow$" 设$f(x)=d(x)v(x)$. $g(x)=d(x)u(x)$. $\Rightarrow f(x)u(x)=g(x)v(x)$.

"$\Leftarrow$" 若$d(x)=1$. $(f(x),g(x))=1$. $f(x)\mid f(x)u(x)=g(x)v(x)$. $\Rightarrow f(x)\mid v(x)$.

由$v(x)\ne0$且$\deg f(x)>\deg v(x)$. $\Rightarrow$矛盾. 则. $(f(x),g(x))\ne1$.

设$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots a_{n-1}x+a_n$. $a_0\ne0$.

$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots b_{m-1}x+b_m$. $b_0\ne0$.

$u(x)=x_0x^{m-1}+x_1x^{m-2}+\cdots\cdots x_{m-2}x+x_{m-1}$.

$v(x)=y_0x^{n-1}+y_1x^{n-2}+\cdots\cdots y_{n-2}x+y_{n-1}$.

代入 $f(x)u(x)=g(x)v(x)$.

则观察

$$
(*).\ A.\quad\left\{\begin{aligned}
x^{n+m-1} &: a_0x_0 \cdots\cdots &&= b_0y_0.\\
x^{n+m-2} &: a_1x_0 + a_0x_1 &&= b_1y_0 + b_0y_1.\\
x^{n+m-3} &: a_2x_0 + a_1x_1 + a_0x_2 &&= b_2y_0 + b_1y_1 + b_0y_2.\\
&\vdots\\
x^2 &: a_nx_{m-3} + a_{n-1}x_{m-2} + a_{n-2}x_{m-1} &&= b_my_{n-3} + b_{m-1}y_{n-2} + b_{m-2}y_{n-1}.\\
x &: a_nx_{m-2} + a_{n-1}x_{m-1} + &&= b_my_{n-2} + b_{m-1}y_{n-1}\\
1 &: a_nx_{m-1} &&= b_my_{n-1}.
\end{aligned}\right.
$$

$$
A' = \begin{bmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0\\
0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0\\
0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 & \cdots & a_n\\
-b_0 & -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_m & 0 & \cdots & 0\\
 & -b_0 & -b_1 & -b_2 \cdots & & -b_m & \cdots & 0\\
 & & -b_0 & -b_1 & -b_2 \cdots & & -b_m \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & & & \cdots & -b_m
\end{bmatrix}_{(n+m)\times(n+m)}
$$

结式:

$|A'|=0. \Leftrightarrow (*)$ 有非零解 $\Leftrightarrow u(x), v(x)$ 必存在 $\Leftrightarrow (f(x), g(x)) \neq 1.$

$|A'| \neq 0 \Leftrightarrow (*)$ 仅有零解 $\Leftrightarrow (f(x), g(x)) = 1.$

定义2：设 $f(x)=a_0x^n+\cdots\cdots a_{n-1}x+a_n.\ (a_n\neq 0$

$g(x)=B_0x^m+\cdots\cdots\cdots B_m\ (B_0\neq 0).$

设 $\alpha=(a_0+\cdots\cdots a_n.\ \overbrace{0,0\cdots\cdots 0}^{m-1个}).$

$\beta=(B_0\cdots\cdots\cdots b_m.\ \overset{n-1}{0\cdots\cdots 0}).$

循环：$r: K_{n+m}\longrightarrow K_{n+m}.$

$(C_1\cdots\cdots\cdots C_{n+m})\longmapsto(C_{n+m}.C_1\cdots\cdots C_{n+m-1}).$

$R(f(x).g(x))=\det.\begin{bmatrix}\alpha\\ r(\alpha)\\ \vdots\\ r^{m-1}(\alpha)\\ \beta\\ \vdots\\ r^{n-1}(\beta)\end{bmatrix}$ 称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式（resultant）或 Sylvesten行列式）

定理3：$f(x).g(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有公共根 $\Leftrightarrow R(f.g)=0.$

$(f(x),g(x))=1\qquad\Longleftrightarrow R(f.g)\neq 0.$

定理4. 设 $f(x)$. 的 n 个根 $x_1\cdots\cdots x_n.$

$g(x)$ 的 m 个根 $y_1\cdots\cdots y_m$. 则 $R(f.g)=a_0^m b_0^n\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(x_i-y_j).$

证明：Step1. 首1化. $f(x)=a_0f_1(x).\quad f_1.g_1$ 首一.

$g(x)=b_0g_1(x).$

由行列式性质 $R(f.g)=a_0^m b_0^n R(f_1.g_1).$

即证 $R(f_1.g_1)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(x_i-y_j).$

Step2. 设 $f(x)=(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n).\ g(x)=(x-y_1)\cdots\cdots(x-y_m).$

若 $\exists\ 1\leq i\leq n.\ 1\leq j\leq m.$ 使 $x_i=y_j$. 则显然等式成立.

下设 $x_i\neq y_j.\ \forall 1\leq i\leq n.\ 1\leq j\leq n.\ x_1\cdots\cdots x_n$ 互不同. $y_1\cdots\cdots y_m$ 互不同.

$$R(f.g)\cdot\begin{bmatrix}x_1^{n+m-1}\cdots x_n^{n+m-1} & y_1^{n+m-1}\cdots y_m^{n+m-1}\\ \vdots\qquad\vdots & \vdots\qquad\vdots\\ 1\cdots\cdots 1 & 1\qquad 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\cdots\cdots 0 & y_1^{m-1}f(y_1)\cdots\cdots y_m^{m-1}\\ \vdots\qquad\vdots & \vdots\\ 0\cdots\cdots 0 & f(y_1)\cdots\cdots f\\ x_1^{n-1}g(x_1)\cdots\cdots x_n^{n-1}g(x_n) & 0\cdots\cdots 0\\ \vdots\qquad\vdots & \vdots\\ g(x_1)\cdots\cdots g(x_n) & 0\cdots\cdots\end{bmatrix}$$

$R(f,g)\prod_{1\le i<k\le n}(x_i-x_k)\prod_{1\le j<l\le m}(y_j-y_l)\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(x_i-y_j) = (-1)^{mn}\prod_{i=1}^{n}g(x_i)\prod_{j=1}^{m}f(y_j)\prod_{1\le i<k\le n}(x_i-x_k)\prod_{1\le j<l\le n}(y_j-y_l).$

$(-1)^{mn}\prod_{j=1}^{m}f(y_j) = \prod_{j=1}^{m}((-1)^n(y_j-x_1)\cdots\cdots(y_j-x_n)) = \prod_{j=1}^{m}((x_1-y_j)\cdots\cdots(x_n-y_j)) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(x_i-y_j)$

$\Rightarrow\ R(f,g) = \prod_{i=1}^{n}g(x_i) = \prod_{i=1}^{n}(x_i-y_1)\cdots\cdots(x_i-y_m) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(x_i-y_j).$

Step3. $\exists (c_1\cdots c_n, d_1\cdots d_m),\ \forall 0<t\ll 1.$

$x_1+c_1t \cdots x_n+c_nt,\ y_1+d_1t,\ \cdots\cdots\ y_m+d_mt.$ 互不相同.

设 $f_t(x) = (x-x_1-c_1t)(\cdots\cdots\cdots)(x-x_n-c_nt).$

$g_t(x) = (x-y_1-d_1t)\cdots\cdots(x-y_m-d_mt).$

$f_t(x), g_t(x)$ 为系数是 t 多项式. $f_0(x)=f(x),\ g_0(x)=g(x).$

$\forall 0<t\ll 1.$

由 Step. $R(f_t,g_t) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(x_i+c_it-y_j-d_jt)$

$\lim_{t\to 0^+}R(f_t,g_t) = \lim_{t\to 0^+}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(x_i+c_it-y_j-d_jt) \Rightarrow R(f,g) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(x_i-y_j).$

定义5. 设 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots\cdots a_{n-1}x + a_n.\ (a_0\ne 0).$

判别式: $\Delta(f) := (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{-1}R(f,f')$

定理6. 设 $f(x)$ 根 $x_1\cdots\cdots x_n$. 则 $\Delta(f) = a_0^{2n-2}\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)^2$

证明: $R(f,g) = a_0^m\prod_{i=1}^{n}(b_0(x_i-y_1)\cdots(x_i-y_m)).$

$= a_0^m\prod_{i=1}^{n}g(x_i).$

令. $g(x)=f'(x).\ m=n-1.$

$f(x) = (x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n)$ 则 $f'(x) = \sum_{i=1}^{n}(x-x_1)\cdots\cdots\widehat{(x-x_i)}\cdots(x-x_n)\cdot a_0$

$f'(x_i) = (x_i-x_1)\cdots\cdots(x_i-x_{i-1})\cdots\cdots(x_i-x_n)\cdot a_0.$

则 $R(f,f') = a_0^{n-1}\prod_{i=1}^{n}f'(x_i) = a_0^{n-1}\prod_{i=1}^{n}[(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)]\cdot a_0.$

$= a_0^{2n-1}\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)^2.$

$\Delta f = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}R(f,f') = a_0^{2n-2}\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)^2.$

推论7. $\Delta(f)=0 \Leftrightarrow f(x)\in\mathbb{C}$ 中有重根.

证明：由定理6. 即得.

或. f 在 $\mathbb{C}$ 中有重根 $\leftrightarrow (f(x), f'(x))\neq 1 \Leftrightarrow R(f,f')=0 \Leftrightarrow \Delta(f)=0$.

例：$f=ax^2+bx+c$. $\Delta(f)=a^2(x_1-x_2)^2=b^2-4ac$.

例：$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ 的解？

$f(x,y)=0$　$f(x,y)=a_0(y)x^n+a_1(y)x^{n-1}+\cdots\cdots a_n(y)$.

$g(x,y)=b_0(y)x^m+b_1(y)x^{m-1}+\cdots\cdots b_m(y)$.

令 $y=\beta$. $f(x,\beta)$ 与 $g(x,\beta)$ 有公共根 $x=\alpha$. $\Rightarrow R_x(f(x,\beta), g(x,\beta))=0$.

$R_x(f,g)$ 为关于 y 多项式. 有根 $y=\beta$.

解法：(1) 求 $R_x(f,g)$ 为 y 多项式.

(2) 求 $R_x(f,g)$ 根 $\beta_1\cdots\cdots\beta_r$.

(3). 将 $y=\beta_j$ 代入 $f(x,\beta_j)=0$. 求对应 $x=\alpha_1\cdots\cdots\alpha_s$.

(4) 验证 (α_i,β_j) 是否为解.

特征值、特征向量

V 为 K 上 n 维线性空间：ϕ 为 V 上线性变换.

设 ϕ 在 $\{e_1\cdots\cdots e_n\}$ 下表示：$diag\{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_n\}$.

$$[\phi(e_1)\cdots\cdots\phi(e_n)]=[e_1\cdots\cdots e_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$\phi(e_i)=\lambda_i e_i \quad \forall i\in[1,n]$.

设 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i$. 则 $\phi(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_ie_i$

设 $\lambda_1\cdots\cdots\lambda_r$ 非0. $\lambda_{r+1}\cdots\cdots\lambda_n=0$.

则 $r(\phi)=r$. 且 $\ker\phi=L(e_{r+1}\cdots\cdots e_n)$ $\operatorname{Im}\phi=L(e_1\cdots\cdots e_r)$.

由 $\phi(e_i)=\lambda_i e_i$. $e_i\neq 0$.

定义1. 设 $\phi\in\mathcal{L}(V)$. 若存在 $\lambda\in K$. $0\neq e\in V$. 使 $\phi(e)=\lambda e$. λ 为 ϕ 特征值, e 为 λ 特征向量.

令 $V_\lambda=\{v\in V\mid\phi(v)=\lambda v\}=\{\lambda$ 特征向量$\}\cup\{0\}$.

则 V_λ 为 V 的子空间. 也是 ϕ 一不变子空间, 称为特征值 λ 的特征子空间.

任取基. 设 ϕ 表示阵为 A. e 坐标向量 $\alpha\in K^n$.

$\phi(e)$ ~~~~ $\sim$ $A\alpha$.

$\phi(e)=\lambda e$. $\longleftrightarrow$ $A\alpha=\lambda\alpha$.

$e=[d_1\cdots d_n]\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{bmatrix}$

$\phi(e)=[d_1\cdots d_n]\phi[(\lambda_1\cdots\lambda_n)]$

$=\sum_{i=1}^{n}d_i\lambda_i$.

定义2. 设 $A\in M_n(K)$. 若 $\exists\lambda\in K$. $0\neq\alpha\in K^n$. 使 $A\alpha=\lambda\alpha$.

则称 λ 为 A 特征值. α 为 A 对应特征值 λ 特征向量.

令 V_λ 为线性方程组 $(\lambda I_n-A)X=0$. 称为特征值 λ 的特征子空间.

λ_0 为 A 特征值 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ 非0 $\alpha\in K^n$. $A\alpha=\lambda\alpha$. $\Leftrightarrow$ 线性方程组 $(\lambda_0 I-A)X=0$ 存在非0解

$\Rightarrow|\lambda_0 I-A|=0\Leftrightarrow\lambda I-A$ 非满秩, 为奇异阵. $\Leftrightarrow\lambda_0$ 为 $|\lambda I_n-A|=0$ 的根(解).

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. 则. $|\lambda I_n-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ \vdots & \ddots & & \vdots\\ -a_{n1} & \cdots & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots a_n$.

定义3. $f(\lambda)=|\lambda I_n-A|$ 为 A 的特征多项式.

引理4. 相似矩阵有相同特征多项式. 从而有相同特征值.(计重).

证明: $B=P^{-1}AP$ P 为非异. $|\lambda I_n-B|=|\lambda I_n-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda I_n-A)P|$

$=|P^{-1}||\lambda I_n-A||P|$

$=|\lambda I_n-A|$.

定义4. 设 $\phi\in\mathcal{L}(V_K^n)$. 任取一组基下表示阵 A. 则 ϕ 的特征多项式定义为 $|\lambda I_n-A|$

(由引理4). 特征多项式不依赖于基或表示阵选取. 记为 $|\lambda I_V-\phi|$

引理5. 设 A 特征值 $\lambda_1\cdots\lambda_n$ 则. $\lambda_1+\cdots\lambda_n=\mathrm{tr}A$. $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$

证明:(引理5).

设 $|\lambda I_n - A| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$.

则 $a_1 = -(a_{11} + a_{22} + \cdots a_{nn}) = -\mathrm{tr}A$. ??

令 $\lambda = 0$. 则 $|-A| = a_n$. 即. $a_n = (-1)^n|A|$.

由韦达定理: $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_n = -a_1 = \mathrm{tr}A$.

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = (-1)^n a_n = (-1)^n \cdot (-1)^n |A| = |A|.$$

$$\sum_{1\le i_1 \cdots i_r \le n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_r} = \sum_{1\le i_1 \cdots i_r \le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 \cdots & i_r \end{pmatrix}$$

推论6. 设 $A \in M_n(K)$. 则 A 非异 $\Leftrightarrow$ A 的特征值全 $\neq 0$.

证明: 由 $|A| = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

由 A 非异 $\Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \forall \lambda_i \neq 0$.

由 A 特征全 $\neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow A$ 非异

特征值求法略. 特征向量求法略.

定理8. 任一复方阵必复相似于一个上三角阵.

证明: $A \in M_n(K)$. 对阶数 n 归纳.

$n=1$ 显然. 设阶数小于 n 成立. 下证 n 情形.

由代数基本定理. 任取 A 特征值 $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. 特征向量 $\alpha_1 \neq 0 \in \mathbb{C}^n$. 即 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1$

由扩张定理. 将 α_1 扩为 $\mathbb{C}^n$ 一组基. $\{\alpha_1 \cdots \alpha_n\}$.

令 $P = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) \in M_n(\mathbb{C})$. 且 P 非异.

$$AP = [A\alpha_1 \cdots A\alpha_n] = [\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ \vdots & & \\ 0 & & A_{n-1} \end{bmatrix} \quad A_{n-1} \in M_{n-1}(\mathbb{C})$$

由归纳假设. $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ \vdots & \\ 0 & A_{n-1} \end{bmatrix}$

$\exists Q\in M_{n-1}(\mathbb{C})$ 非异.

st: $Q^{-1}A_{n-1}Q=\begin{bmatrix}\lambda_2 & & * \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots 0 & \lambda_n\end{bmatrix}$. 令 $R=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & Q\end{bmatrix}\in M_n(\mathbb{C})$. 非异.

$$(PR)^{-1}A(PR)=R^{-1}(P^{-1}AP)R$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & Q^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & A_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & Q\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

推论9: 设$A\in M_n(K)$的特征值在K中. $\exists P\in M_n(K)$.非异.使.

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0! & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

证明:同上述定理. 对阶数归纳.

① $n=1$ 成立.

② 小于n成立, 证n阶. 由假设,任取 A的特征值$\lambda_1\in K$. 特向量 $0\neq\alpha_1\in K^n$

即$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$, 由基扩张,扩为$K^n$基 $\{\alpha_1\cdots\cdots\alpha_n\}$.

令$P=(\alpha_1\cdots\cdots\alpha_n)\in M_n(K)$. P非异.

$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & A_{n-1}\end{bmatrix}$ 其中$A_{n-1}\in M_{n-1}(K)$.

下证A_{n-1}.的特征值全在K中. 这样才能用归纳.

由 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & A_{n-1}\end{bmatrix}$

$|\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix}\lambda-\lambda_1 & * \\ & \lambda I_n - A_{n-1}\end{vmatrix} = (\lambda-\lambda_1)|\lambda I_{n-1} - A_{n-1}|$. $\Rightarrow$ A_{n-1} 特征值 $\lambda_2 \cdots \lambda_n \in K$

由归纳：$\exists Q \in M_{n-1}(K)$. $Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix}\lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$. 令 $R=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & Q\end{bmatrix} \in M_n(K)$.

$(PR)^{-1}A(PR) = R^{-1}(P^{-1}AP)QR = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}$

$A \in M_n(K)$. $f(x) = a_m x^m + \cdots\cdots a_1 x + a_0 \in K[x]$.

$f(A) \overset{def}{=} a_m A^m + \cdots\cdots a_1 A + a_0 I_n \in M_n(K)$.

$(P^{-1}AP)^m = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots\cdots(P^{-1}AP) = P^{-1}A^m P$

$f(P^{-1}AP) = a_m(P^{-1}AP)^m + \cdots\cdots\cdots + a_0 P^{-1} I_n P$.

$= P^{-1}(a_m A^m + \cdots\cdots a_0)P = P^{-1}f(A)P$

$(P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$

$(P^{-1}AP)^* = P^* A^* (P^{-1})^* = P^* A^* (P^*)^{-1}$

命题10. 设 $A \in M_n(K)$. 特征值 $\lambda_1 \cdots\cdots \lambda_n$.

则 $f(A)$ 特征值：$f(\lambda_1) \cdots\cdots f(\lambda_n)$.

证明：由定理8. $\exists P$. $P^{-1}AP = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}$

则 $P^{-1}f(A)P=f(P^{-1}AP)\overset{计算}{=}\begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n)\end{bmatrix}$

$\Rightarrow f(A)$ 特征值 $f(\lambda_1)\cdots\cdots f(\lambda_n)$.

命题11. 设 $A\in M_n(K)$. 适合 $g(x)\in K[x]$. 即 $g(A)=0$.

则A的任一特征值也适合 $g(x)$. 即 $g(\lambda)=0$.

设 $A\alpha=\lambda\alpha$. $0\neq\alpha\in\mathbb{C}^n$

$(aA)\alpha=a\lambda\alpha$.

$A^m\alpha=A^{m-1}(A\alpha)=\lambda A^{m-1}\alpha\cdots=\lambda^m\alpha$.

即易证 $g(A)\alpha=g(\lambda)\alpha=0$

由 $\alpha\neq0\Rightarrow g(\lambda)=0$.

命题12. 设非异阵A特征值 $\lambda_1\cdots\cdots\lambda_n$. 则 A^{-1} 特征值 $\lambda_1^{-1}\cdots\cdots\lambda_n^{-1}$.

证明: $\exists P$. 使 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}\Rightarrow P^{-1}A^{-1}P=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\lambda_1^{-1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{-1}\end{bmatrix}$

即得证.

类似命题对 A^* 也成立.

定义1. 设 $\varphi\in\mathcal{L}(V_K)$. 若 φ 在某组基下表示阵为对角阵, 则 φ 可对角化

若A相似于对角阵, 则称A可对角化

定义2. 设V为数域K上n维线性空间. $\mathcal{L}(V)\ni\varphi$. 则 φ 可对角化 $\Leftrightarrow$ φ 有n个线性无关特征向量.

证明: 必要性. φ 可对角化. 即存在V基 $\{e_1\cdots e_n\}$. 使 φ 在该基下表示阵 $diag\{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_n\}$. $[\varphi(e_1)\cdots\varphi(e_n)]=[e_1\cdots\cdots e_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \varphi(e_1)=\lambda_1e_1\quad \varphi(e_2)=\lambda_2e_2\cdots\cdots\varphi(e_n)=\lambda_ne_n$.

$\Rightarrow$ φ 有n个线性无关特征向量.

充分性：ϕ 有 n 个线性无关特征向量 $e_1 \cdots\cdots e_n$，即 $\phi(e_i)=\lambda_i e_i$，$i\in[1,n]$.

由 n 维空间，则 $\{e_1,e_2\cdots\cdots e_n\}$ 为 V_0^n 一组基.

则 $[\phi(e_1)\cdots\cdots\phi(e_n)]=[e_1\cdots\cdots e_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ ϕ 表示阵为对角阵.

定理3. $A\in M_n(K)$，可对角化 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关特征向量.

例：$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 特征值 1（二重），特征向量 $k\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$k\neq 0$.

由定理3，A 不可对角化.

用反证法，若 A 可对角化，则 $\exists P$，使 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $A=PI_2P^{-1}=I_2$，而 $A\neq I_2$ 矛

定理4. 设 $\phi\in\mathcal{L}(V_K^n)$，$\lambda_1\cdots\cdots\lambda_k$ 为 ϕ 不同特征值，$V_1\cdots\cdots V_k$ 为对应特征子空间.

$V_1+V_2+\cdots\cdots V_k=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\cdots\oplus V_k$.

证明：对 k 归纳，$k=1$ 显然，假设小于 k 成立，证 k.

$V_1+\cdots\cdots V_{k-1}=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\cdots\oplus V_{k-1}\rightarrow V_i\cap(V_1+\cdots\cdots V_{i-1})=0\ \forall\ 2\leq i\leq k-1$.

要证 $V_1+\cdots\cdots V_k=V_1\oplus V_2\cdots\cdots\oplus V_k$.

$\Leftrightarrow V_i\cap(V_1+\cdots\cdots V_{i-1})=0$. $2\leq i\leq k$.

即证 $V_k\cap(V_1+\cdots\cdots V_{k-1})=0$ 即可.

任取 $v\in V_k\cap(V_1+\cdots\cdots V_{k-1})$.

$v\in V_k$. 且 $v=v_1+\cdots\cdots v_{k-1}$ ① $v_i\in V_i$. $1\leq i\leq k-1$.

而 $\phi(v)=\phi(v_1)+\cdots\cdots\phi(v_{k-1})$.

$\lambda_k v=\lambda_1 v_1+\cdots\cdots\lambda_{k-1}v_{k-1}$ ②.

$\lambda_k v=\lambda_k v_1+\cdots\cdots\lambda_k v_{k-1}$. ①$\times k$

$\Rightarrow(\lambda_k-\lambda_1)v_1+(\lambda_k-\lambda_2)v_2+\cdots\cdots(\lambda_k-\lambda_{k-1})v_{k-1}=0$.

由归纳假设：$(\lambda_k-\lambda_i)v_i=0$. $\forall 1\leq i\leq k-1$.

由 $\lambda_k-\lambda_i\neq 0$. $\Rightarrow v_i=0$. $\forall 1\leq i\leq k-1$ $\Rightarrow$ $V_k\cap(V_1+\cdots\cdots V_{k-1})=0$ $\Rightarrow$ 得证.

推论5. 不同特征值特征向量线性无关.

证明：设$\lambda_1 \cdots\cdots \lambda_k$为$\phi$不同特征值 $V_1 \cdots\cdots V_k$为对应特征向量.

令 $C_1V_1 + \cdots\cdots C_kV_k = 0$.

由定理4及直和充要条件 $C_1V_1 = \cdots\cdots = C_kV_k = 0$. 由 $V_1 \cdots\cdots V_k \neq 0$.

则 $C_1 = C_2 = \cdots\cdots = C_k = 0$.

即 $V_1 \cdots\cdots V_k$ 线性无关.

定理6. 若ϕ有$\in \mathcal{L}(V_R^n)$.有 n个不同特征值 $\Rightarrow \phi$可对角化.

证明：设ϕ特征值$\lambda_1 \cdots\cdots \lambda_n$. 特征向量 $e_1 \cdots\cdots e_n$.

则推论5知：$e_1 \cdots\cdots e_n$ 线性无关.

$\Rightarrow \phi$有 n个线性无关特征向量. 则ϕ可对角化.

注：定理6为可对角化充分条件.非必要.

定理7. $\phi \in \mathcal{L}(V_C^n)$，$\lambda_1 \cdots\cdots \lambda_k$为$\phi$全体特征值. $V_1 \cdots\cdots V_k$为特征子空间.则

ϕ可对角化 $\Leftrightarrow V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots\cdots \oplus V_k = V$

证明："$\Leftarrow$" $V = V_1 \oplus V_2 \cdots\cdots \oplus V_k$. 取$V_1$基 $\{e_{11}, e_{12} \cdots e_{1n_1}\}$ V_k基 $\{e_{k1} \cdots e_{kn_k}\}$

$\Rightarrow \{e_{11}\ e_{12} \cdots\cdots e_{kn_k}\}$为V一组基.

$\Rightarrow$. ϕ有n个线性无关特征向 $\Rightarrow \phi$可对角化.

证明"$\Rightarrow$" 则ϕ有n个线性无关特征. $e_1 \cdots\cdots e_n$为V的基. 即.

$\forall \alpha \in V$. $\alpha = \underbrace{a_1e_1 +}_{\substack{n_1 \\ \lambda_1}} \underbrace{\cdots}_{\lambda_2} \underbrace{\cdots\ a_ne_n}_{\substack{n_k \\ \lambda_k}}$.

$\Rightarrow V = V_1 + V_2 + \cdots\cdots V_k \overset{\text{定理4}}{\Longrightarrow} V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots\cdots \oplus V_k$.

定义8. 设λ_0为ϕ特征值. V_0为特征子空间$V_0\{v\in V, | \phi(v)=\lambda v\}$.
则称 $\dim V_0$为λ_0的几何重数. λ_0作为ϕ的特征多项式根重数为代数重数.

引理9. 几何重数 ≤ 代数重数.

证明: $t=\dim V_0$为几何重数. m为λ_0代数重数.

取V_0基$\{e_1 \cdots\cdots e_t\}$扩张为V^n的一组基. $\{e_1 \cdots e_t \cdots e_n\}$

$$(\phi(e_1), \phi(e_t) \cdots \phi(e_n)) = [e_1 \cdots\cdots e_n]\left[\begin{array}{c:c} \begin{matrix}\lambda_0 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_0\end{matrix} & C \\ \hdashline 0 & B\end{array}\right] \Rightarrow A.$$

$$|\lambda I_V-\phi| = |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix}(\lambda-\lambda_0)I_t & -C \\ & \lambda I_{n-t}-B\end{vmatrix} = (\lambda-\lambda_0)^t\,|\lambda I_{n-t}-B|.$$

$\Downarrow$ 可能有$\lambda-\lambda_0$.

则可知: $m \geqslant t$.

定义10. $\phi\in\mathcal{L}(V^n)$若对ϕ任意特征值. 几何重数 = 代数重数,称ϕ有完全特征向量系.

定理11. ϕ可对角化$\Longleftrightarrow \phi$有完全特征向量系.

证明:只要证ϕ有完全特征向量系$\Leftrightarrow V=V_1\oplus V_2 \cdots\cdots \oplus V_k$.

其中$\lambda_1 \cdots\cdots \lambda_k$为不同特征值 $V_1 \cdots\cdots V_k$为特征子空间.

充分性: $t_i=\dim V_i$. — λ_i几何

m_i — λ_i代数. $t_i \leqslant m_i$. $\forall 1\leqslant i\leqslant k$.

且 $m_1+\cdots\cdots m_k=n$.

$$n=\dim V=\dim(V_1\oplus V_2\cdots\cdots\oplus V_k). = \sum_{i=1}^{k}\dim V_i. = \sum_{i=1}^{k} t_i. \leqslant \sum_{i=1}^{k} m_i = n.$$

$\Rightarrow t_i=m_i$. $\forall 1\leqslant i\leqslant k$. 即$\phi$有完全特征向量系.

必要性: $\dim(V_1\oplus V_2\cdots\cdots\oplus V_k)=\sum_{i=1}^{k}\dim V_i = \sum_{i=1}^{k} t_i = \sum_{i=1}^{n} m_i. = n = \dim V.$

$\Rightarrow V=V_1\oplus V_2 \cdots\cdots \oplus V_k$.

已知A可对角化求P.使$P^{-1}AP$为对角阵.

令$P=(\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_n)$.非异. $\Longleftrightarrow$ $\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_n$线性无关.

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix} \Rightarrow AP=P\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

则 $(A\alpha_1 \cdots\cdots A\alpha_n)=(\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_n)\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$.

$\Longleftrightarrow A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$.

即. P的n个列向量为A的n个线性无关特征向量.

注:此P一定不唯一.

求可对角化阵A的幂A^m.

$$P^{-1}AP=\Lambda \Rightarrow A=P\Lambda P^{-1} \Rightarrow A^m=P\Lambda^m P^{-1}=P\begin{bmatrix}\lambda_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^m\end{bmatrix}P^{-1}$$

所有计算题目从略

极小多项式.

$\dim_K M_n(K)=n^2$ $A\in M_n(K)$. $\Rightarrow \overbrace{A^{n^2}, A^{n^2-1} \cdots\cdots A, I_n}^{n^2+1个}$ 线性相关.

即∃不全为0. n^2+1个数. $C_{n^2}, C_{n^2-1} \cdots\cdots C_0$. st. $C_{n^2}A^{n^2}+\cdots\cdots C_0I_n=0$.

令$g(x)=C_{n^2}x^{n^2}+C_{n^2-1}x^{n^2-1}\cdots\cdots+C_1x+C_0\in K[x]$. 且$g(x)\neq 0$. 且 $g(A)=O \Rightarrow O$矩阵.

令$S=\{f(x)\in K[x] \mid f(x)\neq 0.且f(A)=0\}$.则$S\neq\phi$. 考虑 $\min\limits_{f(x)\in S}\deg f(x)=k$ 必有存在.

即 $\exists h(x)\in S$. 使 $\deg h(x)=k$. 首一化 $h(x)\rightarrow m(x)\in K[x]$. 首一多项式. $m(x)\neq 0$. $m(A)=0$.

且$m(x)$次数最小.

定义1. $A\in M_n(K)$. $m(x)\in K[x]$. 首一.多项式. 且$m(A)=0$. 并且 $m(x)$为 A适合所有非零多项式中次数最小的. 则称 $m(x)$为 A 的极小多项式。

极小多项式一定存在, 唯一性?

引理2. 设 $m(x)$为A极小多项式. $f(x)\in K[x]$. 使 $f(A)=0$. 则 $m(x)\mid f(x)$.

证明: 带除: $f(x)=m(x)q(x)+r(x)$. $\deg r(x)<\deg m(x)$

下证 $r(x)=0$

若 $r(x)\neq 0$. 令 $x=A$. 则 $f(A)=m(A)q(A)+r(A) \Rightarrow r(A)=0$.

则 $r(x)$为A适合的非0多项式. $\deg r(x)<\deg m(x)$. 与极小矛盾.

则 $r(x)=0. \Rightarrow m(x)\mid f(x)$.

命题3. $A\in M_n(K)$. 极小多项式存在且唯一.

证明: 设$m(x)$, $g(x)$ 为A极小多项式.

由 $m(x)\mid g(x)$. $g(x)\mid m(x) \Rightarrow$ 从而 $\exists\, C\neq 0$. ~~使得~~ $m(x)=Cg(x)$.

由首一性: $C=1. \Rightarrow m(x)=g(x)$.

例: $A=cI_n$. A的极小多项式. $m(x)=x-c$.

例2: $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ $A^2=0$. 即A适合 $f(x)=x^2$. 则 $m(x)\mid x^2 \Rightarrow \begin{cases} m(x)=x \Rightarrow A=0 \\ m(x)=x^2. \Rightarrow A^2=0 \end{cases}$

命题4. 相似矩阵有相同极小多项式.

设$B=P^{-1}AP$. A极小 $m(x)$. B $g(x)$

$g(A)=g(PBP^{-1})=Pg(B)P^{-1}=0$. 由 $m(x)\mid g(x)$.

相同 $g(x)\mid m(x) \Rightarrow m(x)=Cg(x)$. $C\neq 0$

由首一: $m(x)=g(x)$.

命题5. 设 $A=\begin{bmatrix}A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k\end{bmatrix}$ 设. A 极小多项式 $m(x)$

A_i. $m_i(x)$. $1\le i\le k$.

则 $m(x)=[m_1(x) \cdots\cdots m_k(x)]$

令 $g(x)=[m_1(x)\cdots\cdots m_k(x)]$ 证 $m(x)=g(x)$.

则由 $m_i(x)\mid g(x)$. $m_i(A_i)=0\Rightarrow g(A_i)=0$.

则 $g(A)=\begin{bmatrix}g(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(A_k)\end{bmatrix}=0$. 性质 $m(x)\mid g(x)$.

再证 $g(x)\mid m(x)$.

$0=m(A).=\begin{bmatrix}m(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & m(A_k)\end{bmatrix}\Rightarrow m(A_i)=0$.

由. $m_i(x)\mid m(x)$. $\forall 1\le i\le k$. 由最小公倍 $g(x)\mid m(x)$.

则 $m(x)=g(x)$.

例3. 设A全体不同特征值 $\lambda_1\cdots\lambda_k$. 证:若A可对角化,则极小多项式 $m(x)=(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_k)$.

证明:$\exists P$. $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & \\ & & \lambda_2 & & & \\ & & & \lambda_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 I & & & \\ & \lambda_2 I & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k I\end{bmatrix}=B$.

由命题4. $m(x)=m_B(x)$.

由命题5. $m_B(x)=[(x-\lambda_1),\cdots\cdots,(x-\lambda_k)]=(x-\lambda_1)\cdots\cdots(x-\lambda_k)$.

$\Rightarrow m(x)=(x-\lambda_1)\cdots\cdots(x-\lambda_k)$.

注:后证:A可对角化 $\Leftrightarrow$ 极小多项式无重根.

引理6. 设 λ_0 为A的任意特征值. $(x-\lambda_0)\mid m(x)$.

证明:$m(A)=0\Rightarrow m(\lambda_0)=0\Rightarrow(x-\lambda_0)\mid m(x)$.

$\deg m(x) \le n^2$.

命题7. 设 $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \cdots \\ & \lambda_2 & \vdots \\ & & \ddots & \lambda_n \end{bmatrix}$ 则. $(A-\lambda_1 I_n)(A-\lambda_2 I_n)\cdots\cdots(A-\lambda_n I_n)=0$.

即A适合其特征. $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots\cdots(\lambda-\lambda_n)$.

设 $e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (i-) 标准列向量. $Ae_1=\lambda e_1$. $Ae_2=a_{12}e_1+\lambda_2 e_2$. $Ae_i = a_{1i}e_1+\cdots a_{i-1,i}e_{i-1}$,

$Ae_n = a_{1n}e_n + \cdots\cdots \lambda_n e_n$.

即证: $(A-\lambda_1 I_n)\cdots\cdots(A-\lambda_n I_n)e_i=0$. $\forall 1\le i\le n$

证: $(A-\lambda_1 I_n)\cdots\cdots(A-\lambda_i I_n)e_i=0$. $\forall 1\le i\le n$. ①

$f(x), g(x)$, $f(x)g(x)=g(x)f(x)$. 多项式交换律.

令 $x=A$. $f(A)g(A)=g(A)f(A)$.

用归纳法: 证①. $i=1$. $(A-\lambda_1 I)e_1 = 0$ ✓

②. 设 $<i$ 成立. $(A-\lambda_1 I_n)\cdots\cdots(A-\lambda_i I_n)e_i$.

$=(A-\lambda_1 I_n)\cdots\cdots(A-\lambda_{i-1} I_n)(a_{1i}e_1+\cdots\cdots a_{i-1,i}e_{i-1})$.

由归纳. $=0$.

定理8 (Cayley-Hamilton.

设 $A\in M_n(K)$. $f(\lambda)=|\lambda I_n - A|$. 特征多项式, 则 $f(A)=0$.

证明: $\exists P$. $P^{-1}AP=B=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \lambda_n \end{bmatrix}$ 则 $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots\cdots(\lambda-\lambda_n)$.

由命题7: $f(B)=0$.

$\Rightarrow f(A)=f(PBP^{-1})=Pf(B)P^{-1}=0$.

推论9. 设$A\in M_n(K)$. 特征多项式 $f(\lambda)$. 极小多项式 $m(\lambda)$.

(1). $m(\lambda)\mid f(\lambda)$. 特别 $\deg m(\lambda)\le n$.

(2). $f(\lambda)$与 $m(\lambda)$ 有同根(不计重)

(3) $f(\lambda)\mid m(\lambda)^n$

证明:(1). 极小多项式 + C-H $\Rightarrow$ $m(\lambda)\mid f(\lambda)$

(2). 由引理6. 特征多项式根为极小多项式根

由(1). , (2) 成立

(3). $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$.

$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots\cdots(\lambda-\lambda_k)^{r_k}$.

其中 $r_i\in\mathbb{Z}^+$

注意到: $m_1+\cdots\cdots m_k=n$. 则 $m_i\le n$. $\forall i\Rightarrow m_i\le nr_i$

则 $f(\lambda)\mid[m(\lambda)]^n$

例1: A有n个不同特征值. $\lambda_1\cdots\lambda_n$

$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots\cdots(\lambda-\lambda_n)$.

$\overset{(2)}{\Longrightarrow} m(\lambda)=f(\lambda)$.

例2: $A=cI_n$. $f(\lambda)=(\lambda-c)^n$. $m(\lambda)=\lambda-c$. $\Rightarrow$ $f(\lambda)=[m(\lambda)]^n$

定理10 (Cayley-Hamilton).

设$\phi\in\mathcal{L}(V^n_K)$. 特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda I_V-\phi|$ 则 $f(\phi)=0$.

若A不可对角化. 则A两个特征值等. 则有. $f(\lambda)=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$.

即: $\Delta=(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0$.

$\Longrightarrow f(a_{11},a_{12},a_{21},a_{22})$.

$\phi: M_2(\mathbb{C})\to\mathbb{C}^4$

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{12}\\a_{21}\\a_{22}\end{bmatrix}$$

A不可对角化 $\longrightarrow f(a_{11},a_{12},a_{21},a_{22})=0$.

先证：A ~~有n个不同特征值~~ 可对角化.

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix} \qquad f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

$$f(\Lambda)=\begin{bmatrix}0 & & & \\ & \lambda_2-\lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n-\lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1-\lambda_2 & & & \\ & 0 & & \\ & & \lambda_3-\lambda_2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n-\lambda_2\end{bmatrix}\cdots\cdots\begin{bmatrix}\lambda_1-\lambda_n & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{bmatrix}$$

$$=0$$

$$f(A)=f(P\Lambda P^{-1})=Pf(\Lambda)P^{-1}=0.$$

设 $A\in M_n(K)$. $\exists P$. $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}$.

$\exists c_1\cdots\cdots c_n$. $\forall 0<t\ll 1$. $\lambda_1+c_1t\cdots\cdots\lambda_n+c_nt$. 互不相同.

$$A_t=P\begin{bmatrix}\lambda_1+c_1t & & & \\ & \lambda_2+c_2t & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n+c_nt\end{bmatrix}P^{-1}$$

当 $t\in(0,1)$. $t\ll 1$. A_t可对角化. 当$t=0$. $A_0=A$.

$\forall 0<t\ll 1$ $(A_t-(\lambda_1+c_1t)I_n)(A_t-(\lambda_2+c_2t)I_n)\cdots\cdots(A_t-(\lambda_n+c_nt)I_n)=0$.

令$t\to 0$. $(A-\lambda_1I_n)\cdots\cdots(A-\lambda_nI_n)=0$.

矩阵函数.

第一步. 矩阵在相似关系下的全系不变量.

第二步、利用不变量构造相似标准型

例: $V=M_n(K)$. 等价关系为相抵.

定理: $A,B\in M_nK$. A与B相似 $\Longleftrightarrow$ $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 相抵.

定义1: 设 $A(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$. 其中 $a_{ij}(\lambda)$为关于λ多项式, 称多项式矩阵或λ-矩阵.

$B(\lambda)=(b_{ij}(\lambda))_{k\times l}$ λ-阵. $A(\lambda)=B(\lambda) \overset{def}{\Longleftrightarrow} n=l,\ m=k,\ a_{ij}(\lambda)=b_{ij}(\lambda)$.

加法. $B(\lambda)=(b_{ij}(\lambda))_{m\times n}$. $A(\lambda)\pm B(\lambda)=(a_{ij}(\lambda)\pm b_{ij}(\lambda))_{m\times n}$.

数乘: $k\in K$. $kA(\lambda)=(ka_{ij}(\lambda))_{m\times n}$.

乘法: $B(\lambda)=(b_{ij}(\lambda))_{n\times p}$. $A(\lambda)B(\lambda)=(c_{ij}(\lambda))_{m\times p}$.

$$c_{ij}(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(\lambda)b_{kj}(\lambda).$$

定义2: 以下变换称为λ-阵初等变换

第一类: 对换$A(\lambda)$第i行(列)与第j行(列)

第二类: 对$A(\lambda)$第i行(列)乘c

第三类: 将$A(\lambda)$第i行×多项式$+j$行.

定义3: 将I_n依次作用三类λ阵得初等λ阵.

(I). $P_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ (II) $P_i(c)=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$

(III) $T_{ij}(f(\lambda))=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & f(\lambda) & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$

定理4：λ-阵初等行列变换 $\Longleftrightarrow$ 左(右)乘初等阵.

行 $\overset{i}{\underset{j}{\rightrightarrows}} A(\lambda) = P_{ij} A(\lambda)$. $c_i A(\lambda) = P_i(c) A(\lambda)$. 加 $\overset{i}{\underset{j}{\sqsubset}} A(\lambda) = T_{ij}(f(\lambda)) A(\lambda)$.

列： $i \overset{f(\lambda)}{\sqcap} j \ A(\lambda) = A(\lambda) T_{ji}(\lambda)$.

定义5. 若 $A(\lambda)$ 通过若干次初等变换可变为 $B(\lambda)$. 则 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵.

易证 相抵关系为等价关系.

注： $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 不为初等变换.

$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 不为初等变换.

定义6. $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ 为 n 阶 λ-阵.

若 $A(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)A(\lambda) = I_n$,

则 $A(\lambda)$ 为可逆 λ-阵. $B(\lambda)$ 为 $A(\lambda)$ 逆阵, 记 $A(\lambda)^{-1}$

注：(1). 数值矩阵的结论不可随意推广至λ-阵.

$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. $|A(\lambda)| = \lambda \neq 0$.

但 $A(\lambda)$ 不可逆. 若可逆 $A(\lambda)^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(2). 若干可逆λ-阵乘积仍可逆.

$(A_1(\lambda) \cdots\cdots A_m(\lambda))^{-1} = A_m(\lambda)^{-1} \cdots\cdots A_1(\lambda)^{-1}$

(3). 初等 λ-阵为可逆 λ-阵.

$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$. $P_i(c)^{-1} = P_i(c^{-1})$ $T_{ij}(f(\lambda))^{-1} = T_{ij}(-f(\lambda))$.

λ-阵: $M(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda+1 & \lambda^2-1 \\ 2\lambda+1 & 3\lambda-2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix}1&-1\\1&-2\end{bmatrix}$$

定义1. $\underset{m\times n}{M(\lambda)} = M_m\lambda^m + M_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots\cdots M_1\lambda + M_0$.

其中 $M_i \in M_{m\times n}(K)$, 称 $M(\lambda)$ 为矩阵多项式.

若 $M_m \neq 0$, 则 $\deg M(\lambda) = m$. 若 $\deg(0) = -\infty$.

$N(\lambda) = N_n\lambda^n + \cdots\cdots N_1\lambda + N_0$, $N_n \neq 0$

$M(\lambda) = N(\lambda) \overset{def}{\iff} m=n,\ M_i = N_i,\ \forall 0\le i\le m$.

设 $m\ge n$.

加法. $M(\lambda)+N(\lambda) = M_m\lambda^m + \cdots + M_{n+1}\lambda^{n+1} + (M_n+N_n)\lambda^n + \cdots$

数乘同理.

乘法: $M(\lambda)N(\lambda) = P(\lambda) = \sum P_k\lambda^k$. $P_k = \sum_{i+j=k} M_iN_j$.

引理8. $\deg M(\lambda)\cdot N(\lambda) \le \deg M(\lambda) + \deg N(\lambda)$.

若 M_m 或 N_n 为可逆, 则等号成立.

证明: $M(\lambda)N(\lambda)$ 首 $= M_mN_n\lambda^{m+n}$.

若 M_m 可逆或 N_n 可逆, 则 M_mN_n 不为零阵.

引理9. $M(\lambda)$. λ-阵. $B\in M_n(K)$.

$M(\lambda) = (\lambda I - B)Q(\lambda) + R$. $M(\lambda) = S(\lambda)(\lambda I-B)+T$.

证明: 对 $\deg M(\lambda)=m$ 归纳. $m=0$. $Q(\lambda)=S(\lambda)=0$. $R=T=M(\lambda)$.

下设 $\deg M(\lambda)<m$ 成立, 证 $\deg M(\lambda)=m$.

令 $Q_1(\lambda) = M_m\lambda^{m-1}$ 则.

$M(\lambda)-(\lambda I-B)Q_1(\lambda) = (BM_m+M_{m-1})\lambda^{m-1}+\cdots\cdots+M_0$.

$\exists Q_2(\lambda)$. $\Rightarrow$ $M(\lambda)-(\lambda I-B)Q_1(\lambda) = (\lambda I-B)Q_2(\lambda)+R$.

令 $Q(\lambda)=Q_1(\lambda)+Q_2(\lambda)$ $M(\lambda)=(\lambda I-B)Q(\lambda)+R$.

定理10. $A,B\in M_n(K)$, 则 A 与 B 相似 $\Leftrightarrow$ $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 相抵.

证 "$\Rightarrow$" 设 $B=P^{-1}AP$. $P\in M_n(K)$.

$$(\lambda I-B)=P^{-1}(\lambda I-A)P.$$ P 可逆 $\Rightarrow$ P 为初等数值阵乘积

$\Rightarrow$ P 为初等 λ 阵乘积.

$\Rightarrow$ $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 相抵.

"$\Leftarrow$" $M(\lambda)(\lambda I-A)N(\lambda)=(\lambda I-B)$.

其中 $M(\lambda)$, $N(\lambda)$ 可逆 λ-阵.

$$M(\lambda)(\lambda I-A)=(\lambda I-B)N(\lambda)^{-1}$$

则有(带余)(左). $M(\lambda)=(\lambda I-B)Q(\lambda)+R$.

则 $(\lambda I-B)[Q(\lambda)(\lambda I-A)-N(\lambda)^{-1}]=-R(\lambda I-A)$.

断言 $\deg[Q(\lambda)(\lambda I-A)-N(\lambda)^{-1}]\le 0$.

反证: 若 $\deg\ge 1$. 则左边大于等于 2, 而右侧 $\deg\le 1$.

设 $P=N(\lambda^{-1})-Q(\lambda)(\lambda I-A)\in M_n(K)$.

$$(\lambda I-B)P=R(\lambda I-A)$$

$\Rightarrow$ $P=R$. $BP=RA$.

下证 P 可逆. $Q(\lambda)(\lambda I-A)N(\lambda)+PN(\lambda)=I_n$.

由 $Q(\lambda)M(\lambda)^{-1}(\lambda I-B)+P(N(\lambda))=I_n$.

右带余: $N(\lambda)=S(\lambda)(\lambda I-B)+T$.

$\Rightarrow$ $[Q(\lambda)M(\lambda)^{-1}+S(\lambda)][\lambda I-B)=I_n-PT$.

断言: $Q(\lambda)M(\lambda)^{-1}+S(\lambda)=0$

若不然. 则 $\deg Q(\lambda)M(\lambda)^{-1}+S(\lambda)\ge 0$. 由引理8. $\deg$左 ≥ 1. $\deg$右 ≤ 0.

于是. $PT=I_n$. P 可逆. 故 $A=P^{-1}BP$. 相似

矩阵的法式.

引入：$A_{m\times n}$. 相抵于. $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $r=r(A)$.

引理 1. $A(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$ 为非 0 λ阵. 则 $A(\lambda)$ 必相抵于 $B(\lambda)$. $b_{11}(\lambda)\neq 0$ 且

$b_{11}(\lambda) \mid b_{ij}(\lambda)$. $\forall i.j$.

证明：设. $k=\min\{\deg a_{ij}(\lambda) \mid a_{ij}(\lambda)\neq 0\}$. ≥ 0. 对 k 归纳.

对 $k=0$ 时. 即 $\exists\, a_{ij}(\lambda)$. 它为非零常数. 则通过行. 列对换. 可把 $a_{ij}(\lambda)$ 换为第一行.一列.

则 $b_{11}(\lambda) \mid b_{ij}(\lambda)$. $\forall i.j$.

设非零元素次数最小值 $<k$. 下证 $=k$.

取 $a_{ij}(\lambda)$. $\deg a_{ij}(\lambda)=k$. 把 a_{ij} 换为 b_{11} 位置. 下不妨设 $a_{11}(\lambda)$ 达 $\deg a_{11}(\lambda)=k$.

Case 1. $\exists\, a_{i1}(\lambda)$. $a_{11}(\lambda) \nmid a_{i1}(\lambda)$ 则 $a_{i1}(\lambda)=a_{11}(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda)$. $\deg r(\lambda)<\deg a_{11}(\lambda)=k$.

$r(\lambda)\neq 0$.
$$\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots\cdots & a_{1n}(\lambda) \\ \vdots & & \\ a_{i1}(\lambda) & \cdots\cdots & a_{in}(\lambda) \end{bmatrix} = A(\lambda) = \begin{bmatrix} & & \\ r(\lambda) & & \\ & & \end{bmatrix}$$

则有 $A(\lambda)$ 非零元次数小于 k. 由归纳得证.

Case 2. $\exists\, a_{1j}(\lambda)$. $a_{11} \nmid a_{1j}(\lambda)$. 同理.

Case 3. $a_{11}(\lambda) \mid a_{i1}(\lambda)$. $a_{11}(\lambda) \mid a_{1j}(\lambda)$. $\forall i.j$.

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{1j}(\lambda) \\ a_{i1}(\lambda) & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}(\lambda) & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & \end{bmatrix}$$

若 $a_{11}(\lambda)\mid a_{ij}(\lambda)$. $\forall\, 2\le i\le m,\ 2\le j\le n$.

则结论成立.

若 $\exists\, a_{ij}'(\lambda)$. st. $a_{11}(\lambda)\nmid a_{ij}'(\lambda)$. 利用Case 1, 2. 证明. 得证.

定理2. 设 $A(\lambda)$ 为 m 阶 λ-阵. 则 $A(\lambda)$ 相抵于 $B(\lambda)=\mathrm{diag}\{d_1(\lambda)\cdots d_r(\lambda),0\cdots 0\}$.

其中 $d_i(\lambda)$ 为非0首一多项式, 且 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$, $\forall\, 1\le i\le r-1$.

对阶数 n 归纳. $n=1$ 成立.

下设 $<n$ 成立, 证明 n 阶情形. $A(\lambda)=0$. 显然成立.

则由引理1. $A(\lambda)$ 相抵于 $B(\lambda)$. 其中 $b_{11}(\lambda)\neq 0$. $b_{11}(\lambda)\mid b_{ij}(\lambda)$.

$$\text{由 } B(\lambda)=\begin{bmatrix} b_{11}(\lambda) & \cdots & b_{ij}(\lambda)\\ \vdots & & \\ b_{i1}(\lambda) & & \end{bmatrix}\longrightarrow B'(\lambda)=\begin{bmatrix} b_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & b_{22}(\lambda) & \cdots & \\ \vdots & \vdots & b_{ij}'(\lambda) & \vdots\\ 0 & & \cdots & b_{nn}'(\lambda)\end{bmatrix}$$

$B'_{n-1}(\lambda)$.

且 $b_{11}(\lambda)\mid b_{ij}'(\lambda)$ $\forall\, 2\le i\le n$, $2\le j\le n$.

再看 $B'_{n-1}(\lambda)$. 由归纳, $\exists\, P(\lambda), Q(\lambda)$. 使.

$$P(\lambda)B'_{n-1}(\lambda)Q(\lambda)=\mathrm{diag}\{d_2(\lambda)\cdots d_r(\lambda),0\cdots 0\}.$$

其中 $d_2(\lambda)\cdots d_r(\lambda)$ 为非0首1. $d_2(\lambda)\mid\cdots\cdots d_r(\lambda)$.

设 b_{11} 首系 c 记 $d_1(\lambda)=c^{-1}b_{11}(\lambda)$.

$$\begin{bmatrix} c^{-1} & 0\\ 0 & I_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & P(\lambda)\end{bmatrix}B'(\lambda)\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & Q(\lambda)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_r(\lambda) & \\ & & & \ddots\ 0\end{bmatrix}.$$

则 $d_1(\lambda)\mid B'_{n-1}(\lambda)$ 中元素. $\Rightarrow$ $d_1(\lambda)\mid P(\lambda)B'_{n-1}(\lambda)Q(\lambda)$ 中元素.

$\mathrm{diag}\{d_2(\lambda)\cdots d_r(\lambda),0,0\cdots 0\}$.

则 $d_1(\lambda)\mid d_i(\lambda)$, $\forall\, i\in[2,r]$.

注：(1) 对 $A(\lambda)_{m\times n}$，则 $A(\lambda)$ 相抵于 $\begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & d_r(\lambda) & \\ & 0 & & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$

(2) 主对角线上非零多项式个数 r 称为 $A(\lambda)$ 秩。

(3) $r(A(\lambda)) = n \nRightarrow A(\lambda)$ 可逆。

例：$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ 不可逆。

定义3. 定理2中对角 λ 阵称 $A(\lambda)$ 的法式或相抵标准型。

引理4. 设 $A(\lambda)$，$B(\lambda)$ 为 n 阶 λ-阵。

(1) $|A(\lambda)B(\lambda)| = |A(\lambda)||B(\lambda)|$.

(2) $A(\lambda)A(\lambda)^* = A(\lambda)^*A(\lambda) = |A(\lambda)|I_n$.

证明：(1) 令 $f(\lambda) = |A(\lambda)B(\lambda)| - |A(\lambda)||B(\lambda)|$，为 λ 多项式。

$\forall a\in K$，$f(a) = |A(a)B(a)| - |A(a)|\cdot|B(a)| = 0$.

则 $f(\lambda)\equiv 0$，为 0 多项式。

(2) 令 $(f_{ij}(\lambda)) = A(\lambda)A(\lambda)^* - |A(\lambda)|I_n$.

$f_{ij}(\lambda)\in K[\lambda]$.

$\forall a\in K$，$(f_{ij}(a)) = A(a)A(a)^* - |A(a)|I_n = 0$.

则 $f_{ij}(\lambda)\equiv 0$，$\forall i, j$.

定理5：$A(\lambda)$为n阶λ阵，则以下等价：

(1) $A(\lambda)$可逆λ阵

(2) $|A(\lambda)|$为非0数

(3) $A(\lambda)$相抵标准型 I_n；

(4) $A(\lambda)$通过行(列)变换为I_n

(5) $A(\lambda)$为初等λ-阵乘积。

证明：(1)⇒(2). $\exists B(\lambda)$ $A(\lambda)B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=I_n$

$$1=|I_n|=|A(\lambda)B(\lambda)|=|A(\lambda)||B(\lambda)|.$$

由2个多项式之积为1，则$|A(\lambda)|$ $|B(\lambda)|$均非0数.

(2)⇒(3). 由定理2. $\exists P(\lambda)$ $Q(\lambda)$. 初等λ阵之积.

$$P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)=\mathrm{diag}\{d_1(\lambda)\cdots\cdots d_r(\lambda),0\cdots\cdots0\}.$$

则 $|P(\lambda)||A(\lambda)||Q(\lambda)|=d_1(\lambda)\cdots\cdots d_r(\lambda)\cdot\overbrace{0\cdots\cdots0}$. ⇒不存在.

$0^{\times}$ $0^{\times}$ $0^{\times}$

从而 $r=n$. 且 $0\neq c=d_1(\lambda)\cdots\cdots d_r(\lambda)$.

⇒ $d_i(\lambda)$均非0且首一 ⇒ $d_i(\lambda)=1$. ⇒ $A(\lambda)\sim I_n$.

(3)⇒(4). $\exists P(\lambda)$, $Q(\lambda)$.

$$P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)=I_n.$$

$$\Rightarrow\quad P(\lambda)A(\lambda)=Q(\lambda)^{-1}$$

⇒ $Q(\lambda)P(\lambda)A(\lambda)=I_n$. 同理 $A(\lambda)Q(\lambda)P(\lambda)=I_n$.

(4)⇒(5). $P_t(\lambda)\cdots\cdots P_1(\lambda)A(\lambda)=I_n$.

$$\Rightarrow\quad P_{t-1}(\lambda)\cdots P_1(\lambda)A(\lambda)=P_t(\lambda)^{-1}$$

$$\Rightarrow\quad A(\lambda)=P_1(\lambda)^{-1}\cdots\cdots P_t(\lambda)^{-1}$$

由$P_j(\lambda)^{-1}$仍为初等λ阵.

即

$A(\lambda)$为初等λ阵乘积

(1). $A(\lambda)$为初等λ-阵乘积. 则$A(\lambda)$可逆.

且 $A(\lambda)^{-1} = \frac{A(\lambda)^*}{|A(\lambda)|}$

证明: $A(\lambda)A(\lambda)^* = |A(\lambda)|I_n$. 由 $|A(\lambda)| \neq 0$.

$\Rightarrow A(\lambda)^{-1} = \frac{A(\lambda)^*}{|A(\lambda)|}$.

定理6. 设 $A \in M_n(K)$. 则 $\lambda I_n - A$ 相抵于 $diag\{1 \cdots 1, d_1(\lambda) \cdots d_m(\lambda)\}$

其中 $d_i(\lambda)$为非0首一多项式且 $d_1(\lambda) | d_2(\lambda) | \cdots$

证明: 定理2 $\Rightarrow \exists P(\lambda), Q(\lambda)$ 为可逆λ-阵.

$P(\lambda)(\lambda I_n - A)Q(\lambda) = diag\{d_1(\lambda) \cdots d_r(\lambda), 0 \cdots 0\}$.

$\Rightarrow c|\lambda I_n - A| = \cancel{0}\, d_1(\lambda) \cdots d_r(\lambda) \cdot 0 \cdot 0 \cdots 0$.

$\Rightarrow c|\lambda I_n - A| = d_1(\lambda) \cdots d_r(\lambda)$. 于是 $r = n$.

且. $c|\lambda I_n - A| = d_1(\lambda) \cdots d_n(\lambda) \Rightarrow c = 1$.

$\Rightarrow |\lambda I_n - A| = d_1(\lambda) \cdots d_n(\lambda)$.

把 $d_i(\lambda)$ 中常数 1 写出, 结论得证.

例: 若 $\deg d_1(\lambda) \geq 1$. 则. $A = cI_n$.

证明: $|\lambda I_n - A| = d_1(\lambda) \cdots d_n(\lambda)$.

deg: $n = \sum_{i=1}^{n} \deg d_i(\lambda)$. (且 $\deg d_i(\lambda) \geq 1$).

从而: 有 $\deg d_i(\lambda) = 1$. $\forall i \in [1, n]$.

又由整除 $\Rightarrow d_1(\lambda) = \cdots d_n(\lambda) = \lambda - c$.

$\lambda I_n - A$ 相抵于 $\{\lambda - c, \lambda - c \cdots \lambda - c\} = \lambda I_n - cI_n$.

$\Rightarrow A$ 相似于 cI_n. $\Rightarrow A = cI_n$.

$\boxed{A = PcIP^{-1} = cPP^{-1}} = cI_n$.

例：$A=\begin{bmatrix}0&1&-1\\3&-2&0\\-1&1&-1\end{bmatrix}$ λI_n-A 相抵标准型.

$$\lambda I_3-A=\begin{bmatrix}\lambda&-1&1\\-3&\lambda+2&0\\1&-1&\lambda+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&\lambda+1\\-3&\lambda+2&0\\\lambda&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&\lambda+1\\0&\lambda-1&3(\lambda+1)\\0&\lambda-1&-\lambda^2-\lambda+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda-1&3(\lambda+1)\\0&\lambda-1&-\lambda^2-\lambda+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda-1&6\\0&\lambda-1&-\lambda^2-4\lambda+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&6&6(\lambda-1)\\0&-\lambda^2-4\lambda+4&6(\lambda-1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&6&0\\0&-\lambda^2-4\lambda+4&(\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&6&0\\0&0&(\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+2)\end{bmatrix}$$

不变因子：

$A(\lambda)$ 相抵于 $diag\{d_1(\lambda)\cdots\cdots d_r(\lambda),0,\cdots 0\}$. 其中 $d_i(\lambda)$ 首1 且 $d_1(\lambda)|d_2(\lambda)|\cdots\cdots d_r(\lambda)$

问题 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵 $\Leftrightarrow$ $A(\lambda)$、$B(\lambda)$ 有相同法式.

定义1. 设 $A(\lambda)$ 为 n 阶 λ-阵. $\forall 1\le k\le n$. 定义 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子 $D_k(\lambda)$;

1°. 若 $A(\lambda)$ 的所有 k 阶子式为0, 则 $D_k(\lambda)=0$.

2°. 若 $A(\lambda)$ 中至少有一个 k 阶子式不为0. 则. $D_k(\lambda)=$ (所有k阶子) 最大公因式 且 $D_k(\lambda)$ 非零首一.

例：$\Lambda=dig\{d_1(\lambda)\cdots\cdots d_r(\lambda),0\cdots 0\}$. $d_i(\lambda)$ 首一 且 $d_1(\lambda)|d_2(\lambda)\cdots\cdots d_r(\lambda)$.

$D_1(\lambda)=d_1(\lambda)$. $D_2(\lambda)=(d_i(\lambda),d_j(\lambda))_{1\le i<j\le n}=d_1(\lambda)d_2(\lambda)$.

$D_r(\lambda)=d_1(\lambda)\cdots\cdots d_r(\lambda)$. $D_{r+1}(\lambda)=\cdots\cdots D_n(\lambda)=0$.

引理.2、设$A(\lambda)$非零行列式因子：$D_1(\lambda)\cdots\cdots D_r(\lambda)$，则$D_i(\lambda)\mid D_{i+1}(\lambda)$ $\forall 1\le i\le r-1$.

证明：任取$A(\lambda)$，$i+1$阶子式M_{i+1}.

$$M_{i+1}=a_{11}(\lambda)M_{11}-a_{12}(\lambda)M_{12}+\cdots\cdots(-1)^{i+2}a_{1(i+1)}(\lambda)M_{1i+1}.$$

由$D_i(\lambda)\mid M_{1j}$ $1\le j\le i+1$. $\rightarrow D_i(\lambda)\mid M_{i+1}$. $\Rightarrow D_i(\lambda)\mid D_{i+1}(\lambda)$. $\forall 1\le i\le r-1$.

定义3：不变因子：

设$A(\lambda)$的非零行列式因子：$D_1(\lambda)\cdots\cdots D_r(\lambda)$，A不变因子定义为：

$g_1(\lambda)=D_1(\lambda)$

$g_2(\lambda)=D_2(\lambda)/D_1(\lambda)$. $\cdots\cdots$ $g_r(\lambda)=D_r(\lambda)/D_{r-1}(\lambda)$.

例：同上例：

$g_1(\lambda)=D_1(\lambda)=d_1(\lambda)$ $\quad g_2(\lambda)=D_2(\lambda)/D_1(\lambda)=d_2(\lambda)$. $\cdots\cdots$ $g_r(\lambda)=d_r(\lambda)$.

对法式而言，不变因子为对角线元

定理4：相抵λ-阵有相同的行列式因子，有相同不变因子.

证明：设$B(\lambda)=P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)$，其中$P(\lambda)$，$Q(\lambda)$为可逆λ-阵.

设$A(\lambda)$，$B(\lambda)$行列式因子：$D_k(\lambda)$，$E_k(\lambda)$，$1\le k\le n$.

证~~A(λ)=B(λ)~~ $D_k(\lambda)=E_k(\lambda)$. $\forall 1\le k\le n$

$$B(\lambda)\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\xlongequal{\text{Cauchy-Binet}}P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{\substack{1\le r_1\cdots r_k\le n\\ 1\le s_1\cdots s_k\le n}}P(\lambda)\begin{pmatrix}i_1 & \cdots & i_k\\ r_1 & \cdots & r_k\end{pmatrix}A(\lambda)\begin{pmatrix}r_1 & \cdots & r_k\\ s_1 & \cdots & s_k\end{pmatrix}Q(\lambda)\begin{pmatrix}s_1 & \cdots & s_k\\ j_1 & \cdots & j_k\end{pmatrix}.$$

1°. 若$D_k(\lambda)=0$. $\forall k\in[1,n]$. 由上式. $B(\lambda)\begin{pmatrix}i_1 & \cdots & i_k\\ j_1 & \cdots & j_k\end{pmatrix}=0$. $\Rightarrow E_k(\lambda)=0$.

2°. 若$D_k(\lambda)\ne 0$. $D_k(\lambda)\mid A(\lambda)\begin{pmatrix}r_1 & \cdots & r_k\\ s_1 & \cdots & s_k\end{pmatrix}\Rightarrow D_k(\lambda)\mid B(\lambda)\begin{pmatrix}i_1 & \cdots & i_k\\ j_1 & \cdots & j_k\end{pmatrix}$

$D_k(\lambda)\mid E_k(\lambda)$.

$A(\lambda)=P(\lambda)^{-1}B(\lambda)Q(\lambda)^{-1}$. 同上述 1°, 2°.

由上式 1° $D_k(\lambda)=0 \Leftrightarrow E_k(\lambda)=0$.

2°. $D_k(\lambda)\neq 0$, $E_k(\lambda)\neq 0$. $D_k(\lambda) \mid E_k(\lambda)$. $E_k(\lambda) \mid D_k(\lambda)$.

$\Rightarrow D_k(\lambda) = cE_k(\lambda)$. $\Rightarrow c=1$. $D_k(\lambda)=E_k(\lambda)$.

定理5：设 $A(\lambda)$ 法式：$\Lambda=\mathrm{diag}\{d_1(\lambda)\cdots\cdots d_r(\lambda), 0\cdots\cdots 0\}$.

则 $A(\lambda)$ 的不变因子为 $d_1(\lambda)\cdots\cdots d_r(\lambda)$.

特别地 $A(\lambda)$ 的法式与不变因子相互确定.

证明：$A(\lambda)$ 相抵于 Λ. 由定理4. $A(\lambda)$ 不变因子即为 Λ 不变因子.

由例子. 即为 $d_1(\lambda)\cdots\cdots d_r(\lambda)$.

推论6：$A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵 $\Leftrightarrow$ 它们有相同法式.

证明：'$\Leftarrow$' $A(\lambda)\sim\Lambda\sim B(\lambda)$ $A(\lambda)\sim B(\lambda)$. 则由传递性得证.

'$\Rightarrow$' $A(\lambda)$ 法式 Λ_1. $B(\lambda)$ 法式 Λ_2.

则由传递 Λ_1 相抵 Λ_2. $\Rightarrow$ 相同法式.

推论7：(1). λ-阵相抵关系下全系不变量为行列式因子组或不变因子组

(2). 法式或相抵标准型不依赖初等变换选取.

证明：$A(\lambda)\sim B(\lambda) \xRightarrow{\text{定理4}}$ 有相同行列式行列式/不变

$\Uparrow 6$ $\quad 5 \Downarrow$ 相同法式

(2). 设 $A(\lambda)\to$ 法式 Λ_1.

$\searrow$ 法式 Λ_2.

证 $\Lambda_1=\Lambda_2$. 由 $\Lambda_1\sim A(\lambda)\sim\Lambda_2 \Rightarrow \Lambda_1\sim\Lambda_2 \xRightarrow{6}$ 有相同法式. $\Rightarrow \Lambda_1=\Lambda_2$.

定理8：$A, B \in M_n(K)$，则 A与B相似 $\Leftrightarrow$ $\lambda I-A$，$\lambda I-B$有相同行列式因子组。

证明：A与B相似 $\overset{7.1}{\Longleftrightarrow}$ $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 相抵。

$\Updownarrow$ 7(1)

$\lambda I-A$与$\lambda I-B$ 有相同行列式因子组。

注：$\lambda I-A$ 的行列式或不变因子称为A的行列式因子或不变因子。

定理9：设$A, B \in M_n(F)$，$F \subseteq K$，则

A与B在F相似 $\Leftrightarrow$ A与B在K相似。

证明：A与B在F相似 $\overset{det}{\Longleftrightarrow}$ $\exists P \in M_n(F)$，$B=P^{-1}AP$。

A与B在K相似 $\overset{det}{\Longleftrightarrow}$ $\exists Q \in M_n(K)$，$B=Q^{-1}AQ$。

必要性：$\exists P \in M_n(F)$，$B=P^{-1}AP$，P非异。

把P，P^{-1}都看为K上，则A, B在K上相似。

充分性：A与B在K相似，由定理8，$\lambda I-A$与$\lambda I-B$在K上有相同行列式因子组（法式）

$$\lambda I-A \sim diag\{1 \cdots 1, \underbrace{d_1(\lambda) \cdots d_k(\lambda)}_{\subseteq F}\}.$$

实际$\lambda I-A$，$\lambda I-B$为F上λ阵。

由推论(4)在求法式时，取$F[x]$上变换，可得$\lambda I-A$与$\lambda I-B$的法式。

则$\exists F$上的初等λ-阵，$P(\lambda)$，$Q(\lambda)$，$M(\lambda)$，$N(\lambda)$

$$P(\lambda)\underset{(\lambda I-A)}{\cancel{\quad}}Q(\lambda)=\Lambda=M(\lambda)(\lambda I-B)N(\lambda).$$

$$\lambda I-B=M(\lambda)^{-1}P(\lambda)(\lambda I-A)Q(\lambda)N(\lambda)^{-1}$$

则$\lambda I-A$与$\lambda I-B$作为F上λ-阵相抵。

$\overset{§7.1}{\Longrightarrow}$ A与B作为F上矩阵相似。

推论10：矩阵不变因子组在基域扩张下不变

引理1. $F=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \cdots & & & & 1 \\ -a_r & -a_{r-1} & \cdots & & -a_1 \end{bmatrix}_{r\times r}$

(1) F 的行列式因子为 $1, \cdots, 1$, $f(\lambda)=\lambda^r+a_1\lambda^{r-1}+\cdots a_r$.

不变因子同

(2) F 特征多项式 $=F$ 极小多项式 $=f(\lambda)$.

证明: (1) $\lambda I_r-F=\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda & -1 \\ a_r & \cdots & & & a_1 \end{bmatrix}$ $D_r(\lambda)=|\lambda I_r-F|=f(\lambda)=\lambda^r+a_1\lambda^{r-1}+\cdots a_r$

对 $\forall 1\le k<r$. $|\lambda I-F|$ 有 k 阶子式 $=(-1)^k$ (常).

$\Rightarrow D_k(\lambda)=1$, $\forall 1\le k<r$. 同理不变因子也算出.

(2). 证. $m(\lambda)=f(\lambda)$.

由 C-H 定理 $\Longrightarrow m(\lambda)|f(\lambda)\Rightarrow \deg m(\lambda)\le r$.

1°. $\deg m(\lambda)=r\Rightarrow m(\lambda)=f(\lambda)$

2°. $\deg m(\lambda)<r$ 推矛盾. 设 $m(\lambda)=c_{r-1}\lambda^{r-1}+\cdots c_1\lambda+c_0$. c_i 不全为 0.

设 $e_i=(0\cdots\cdots 1\cdots\cdots 0)$. 标准行.

$e_1F=e_2$. $e_2F=e_3\cdots\cdots$ $e_{r-1}F=e_r$. $e_1(F)^i=e_{i+1}$. $\forall 1\le i\le r-1$.

$0=m(F)=c_{r-1}F^{r-1}+\cdots\cdots+c_1F+c_0I_r$.

$=c_{r-1}e_1F^{r-1}+\cdots\cdots+c_1e_1F+c_0e_1I_r$.

$=c_{r-1}e_r+\cdots\cdots+c_1e_2+c_0e_1$.

$=(c_0, c_1\cdots\cdots c_{r-1})=0$. 全为 0. 则 2° 不成立.

有理标准型：P19.

引入：$\lambda I-A$ 相抵于 $\mathrm{diag}\{1,1,\cdots 1,d_1(\lambda)\cdots d_k(\lambda)\}$.

$d_1(\lambda)$ 为非0首1，$d_1(\lambda)|d_2(\lambda)\cdots\cdots d_k(\lambda)$.

A不变因子组：$1,1\cdots\cdots d_1(\lambda)\cdots\cdots d_k(\lambda)$.

引理1. $f(\lambda)=\lambda^r+a_1\lambda^{r-1}+\cdots\cdots a_{r-1}\lambda+a_r$.

$$F(f(\lambda))=F=\begin{bmatrix} 0 & & & \\ 0 & & I_{r-1} & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \\ -a_r & -a_{r-1} & \cdots\cdots & -a_1 \end{bmatrix}_{r\times r}$$

(1). F的行列式因子：$1\cdots\cdots 1,f(\lambda)$.

不变因子：$1\cdots\cdots 1,f(\lambda)$

(2) 特征多项式 = 极小多项式 = $f(\lambda)$.

引理2. $A(\lambda)$ 相抵 $\mathrm{diag}\{d_1(\lambda)\cdots\cdots d_n(\lambda)\}$.

$B(\lambda)\sim\mathrm{diag}\{d_{i_1}(\lambda)\cdots\cdots d_{i_n}(\lambda)\}$. $(i_1\cdots\cdots i_2)$ 为 $(1,2\cdots\cdots n)$ 全排列.

则 $A(\lambda)\sim B(\lambda)$

证明：$\mathrm{diag}\{d_1(\lambda)\cdots\cdots d_i(\lambda)\cdots d_j(\lambda)\cdots d_n(\lambda)\}P_{ij}=\mathrm{diag}\{d_1(\lambda)\cdots\cdots d_j(\lambda)\cdots d_i(\lambda)\cdots d_n(\lambda)\}$

由 $(i_1\cdots\cdots i_n)\xrightarrow[\text{相邻}]{N(i_1\cdots i_n)\text{次}}(1,2\cdots\cdots n)$.

$$\Rightarrow \underset{A(\lambda)}{\underset{\wr}{\mathrm{diag}\{d_1(\lambda)\cdots\cdots d_n(\lambda)\}}}\sim\underset{B(\lambda)}{\underset{\wr}{\mathrm{diag}\{d_{i_1}(\lambda)\cdots\cdots d_{i_n}(\lambda)\}}}$$

$\Rightarrow A(\lambda)\sim B(\lambda)$.

定理3：设 $A\in M_n(K)$，不变因子：$1\cdots\cdots 1,d_1(\lambda)\cdots\cdots d_k(\lambda)$

则 A相似于 $F=\mathrm{diag}\{F(d_1(\lambda))\cdots\cdots F(d_k(\lambda))\}$.

证明：$\lambda I-A\sim\mathrm{diag}\{1,1\cdots\cdots 1,d_1(\lambda)\cdots\cdots d_k(\lambda)\}$.

$\Rightarrow |\lambda I_n-A|=d_1(\lambda)\cdots\cdots d_k(\lambda)$ （相抵有相同行列式因子，取 $D_n(\lambda)$）

设 $\deg d_i(\lambda)=n_i>1$. 则 $n_1+n_2+\cdots n_k=n$.

$\lambda I-F(d_i(\lambda))$ 相抵于 $\mathrm{diag}\{\overbrace{1,\cdots,1}^{n_i-1}, d_i(\lambda)\}$ （引理1）.

$$\lambda I-F=\begin{bmatrix}\lambda I-F(d_1(\lambda)) & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\lambda I-F(d_k(\lambda))}\end{bmatrix}.$$

λ阵初.
$$\longrightarrow \mathrm{diag}\{\overbrace{1,1\cdots}^{n_1-1} d_1(\lambda); 1,1\cdots d_2(\lambda); \cdots\cdots \overbrace{1,1\cdots}^{n_k-1} d_k(\lambda)\}.$$

则 1 个数为 $n-k$ 个.

由引理2. $\lambda I-A\sim\lambda I-F$.

由 §7.1. 则 A 相似于 F.

定义4：定理3中分块对角阵 $F=\mathrm{diag}\{F(d_1(\lambda))\cdots\cdots F(d_k(\lambda))\}$ 称为 A 的有理标准型(或 Fobenius). (Fobenius 块) $\Leftarrow F_i(d_i(\lambda))$.

例：A^6 不变因子组 $\overbrace{1,\cdots\cdots 1}^{3个}$, $\lambda+1$, $(\lambda-1)^2$, $(\lambda-1)^2(\lambda+1)$.

解：$(\lambda-1)^2=\lambda^2-2\lambda+1$ $\quad (\lambda-1)^2(\lambda+1)=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1$.

$$F=\begin{bmatrix}1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & -1 & 2 & & & \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\mathrm{diag}\{1, [\ ], [\ \ ]\}.$$

扫描全能王 创建

定理5：设$A\in M_n(K)$的不变因子组$1,\cdots d_l(\lambda)\cdots d_k(\lambda)$，其中 ···首一···· $d_i|d_{i+1}$.

则 A 极小多项式：$m(\lambda)=d_k(\lambda)$.

证明：定理3：A 相似 $F=\{diag F(d_l(\lambda))\cdots F(d_k(\lambda))\}$

$1°$ $m_A(\lambda)=m_F(\lambda)$. 相似矩阵有相同极小.

$2°$. $m_F(\lambda)=[m_{F_l}(\lambda)\cdots\cdots m_{F_k}(\lambda)]$ 分块.

由引理1：$m_{F_i}(\lambda)=d_i(\lambda)$.

$\Rightarrow m_A(\lambda)=[d_l(\lambda)\cdots\cdots d_k(\lambda)]$.

$\xRightarrow{\text{由整除}} m_A(\lambda)=d_k(\lambda)$.

推论6：设$A\in M_n(F)$. 设极小多项式$m_F(\lambda)$. $F\subseteq K$. 将 A 看为 K 上 $M_n(K)$. 极小多项式 $m_K(\lambda)$.

则 $m_F(\lambda)=m_K(\lambda)$.

例：$A=\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right]$ $B=\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right]$

不变因子组：A: $1,\lambda,\lambda,\lambda^2$

B: $1,1,\lambda^2,\lambda^2$.

P80. 初等因子:

定义1: 设 $f(\lambda)\in K[\lambda]$, $p(\lambda)$ 不可约首一多项式, 若 $\exists\, e\in Z^+$, $p(\lambda)^e \mid f(\lambda)$, 但 $p(\lambda)^{e+1} \nmid f(\lambda)$

则 $p(\lambda)^e$ 为 $f(\lambda)$ 的准素因子.

标准因式分解: $f(\lambda)=c\,p_1(\lambda)^{e_1}\cdots\cdots p_m(\lambda)^{e_m}$.

$e_i\in Z^+$. $p_i(\lambda)$ 互异首一不可约多项式.

$\Rightarrow$ $f(\lambda)$ 准素因子 $p_1(\lambda)^{e_1},\cdots\cdots,p_m(\lambda)^{e_m}$.

$A\in M_n(K)$, 非常不变因子组 $d_1(\lambda)\cdots\cdots d_k(\lambda)$

公共因式分解:

$$\left.\begin{aligned} d_1(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{11}}\cdots\cdots p_t(\lambda)^{e_{1t}}\\ d_2(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{21}}\cdots\cdots p_t(\lambda)^{e_{2t}}\\ &\vdots\\ d_k(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{k1}}\cdots\cdots p_t(\lambda)^{e_{kt}}. \end{aligned}\right\}\quad (*)$$

整除关系 $\Leftrightarrow$ $e_{1j}\le e_{2j}\cdots\cdots\le e_{kj}$. $1\le j\le t$.

定义2: 若 $(*)$ 中某 $e_{ij}>0$. 则称 $p_j(\lambda)^{e_{ij}}$ 为 A 的一个初等因子, 它们构成 A 的初等因子组.

等价地, A 的非常不变因子中准素因子为 A 的初等因子. 从而 A 的初等因子为 A 的所有非常数不变因子的准素因子全体.

$$\text{不变因子} \overset{\text{决定}}{\rightleftarrows} \text{初等因子组}$$

给定 A 的初等因子组, 涉及其中不可约多项式设 $p_1(\lambda)\cdots\cdots p_t(\lambda)$.

在添加不可约因式零次幂, 可将不可约多项式降幂排列:

$$(**)\quad \begin{array}{l} p_1(\lambda)^{e_{k1}}\cdots\cdots p_1(\lambda)^{e_{11}}\\ p_2(\lambda)^{e_{k2}}\,p_2(\lambda)^{e_{k-1,2}}\cdots\cdots p_2(\lambda)^{e_{12}}\\ \vdots\\ p_t(\lambda)^{e_{kt}}\cdots\cdots p_t(\lambda)^{e_{1t}} \end{array}$$

令 $d_k(\lambda)=p_1(\lambda)^{e_{k1}}p_2(\lambda)^{e_{k2}}\cdots\cdots p_t(\lambda)^{e_{kt}}$.

$d_{k-1}(\lambda)=p_1(\lambda)^{e_{k-1,1}}\cdots\cdots p_t(\lambda)^{e_{k-1,t}}$.

$d_1(\lambda)=p_1(\lambda)^{e_{11}}\cdots\cdots p_t(\lambda)^{e_{1t}}$.

定理3：初等因子组.

A相似于B $\Longleftrightarrow$ A与B有相同初等因子组.（全系不变量）

例：A不变因子为 $1 \cdots\cdots 1.\ (\lambda-1)(\lambda^2+1).\ (\lambda-1)^2(\lambda^2+1)(\lambda^2-2)$.

求A在Q. R. C上初等因子.

解：$\wedge Q$：$\lambda-1,\ (\lambda-1)^2,\ \lambda^2+1,\ \lambda^2-2,\ \lambda^2+1$.

$\wedge R$：$\lambda-1,\ (\lambda-1)^2,\ \lambda^2+1,\ \lambda^2+1,\ \lambda-\sqrt{2},\ \lambda+\sqrt{2}$

$\wedge C$：$\lambda-1\ \ (\lambda-1)^2,\ \lambda-i\ \ \lambda+i,\ \lambda-i,\ \lambda+i,\ \lambda-\sqrt{2},\ \lambda+\sqrt{2}$.

例：A^{10}初等因子组 $\lambda-1,\ \lambda-1,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda+1)^2,\ (\lambda+1)^3\ \ \lambda-2$

$(\lambda-1)^2,\ \lambda-1,\ \lambda-1$

$(\lambda+1)^3,\ (\lambda+1)^2,\ 1.$

$\lambda-2,\ \ 1\ ,\ 1.$

$\Rightarrow d_3(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^3(\lambda-2)$

$d_2(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$

$d_1(\lambda)=\lambda-1.$

不变因子组 $d_1(\lambda)\ d_2(\lambda).\ d_3(\lambda).\ \overbrace{1.\ 1.\ 1 \cdots\cdots 1}^{10-3=7}$

A_k初等因子形如 $P(\lambda)^e$. 其中 $P(\lambda)$ 为不可约多项式. $e\geq 1$.

$1 \cdots\cdots 1.\ d_1(\lambda) \cdots\cdots d_k(\lambda)$

$F=\{F(d_1(\lambda)) \cdots\cdots F(d_k(\lambda))\}$.

构造矩阵 $J(P_i(\lambda)^{e_i})$ 初等因子为 $P_i(\lambda)^{e_i}$

$J=diag\{J(P_1(\lambda)^{e_1}) \cdots\cdots J(P_m(\lambda)^{e_m})\}$.

A相似于J

Jordan 标准型.

在 $\mathbb{C}$ 下. 初等因子 $(\lambda-\lambda_0)^r$

引理1. $J=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0\end{pmatrix}_{r\times r}$ 的初等因子 $(\lambda-\lambda_0)^r$

证明: $\lambda I-J=\begin{bmatrix}\lambda-\lambda_0 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & \lambda-\lambda_0\end{bmatrix}$ $D_r(\lambda)=|\lambda I-J|=(\lambda-\lambda_0)^r$

$\forall 1\leq k<r$. $\exists$ k阶子式 $=(-1)^k$. 则 $D_k(\lambda)=1$. $\forall 1\leq k<r$.

行列式因子 $1, \cdots\cdots 1, (\lambda-\lambda_0)^r$

不变因子. $1, \cdots\cdots 1$ $(\lambda-\lambda_0)^r$

初等因子: $(\lambda-\lambda_0)^r$

该阵 $J=J_r(\lambda_0)=\begin{bmatrix}\lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0\end{bmatrix}_{r\times r}$

引理2. 设 $\lambda I-A$ 相抵于 $\text{diag}\{f_1(\lambda)\cdots\cdots f_n(\lambda)\}$.

其中 $f_i(\lambda)$ 为首一多项式, 则 $f_1(\lambda)\cdots\cdots f_n(\lambda)$ 的准素因子全体为 A 初等因子组.

证明: Step1. $\forall 1\leq i\leq j\leq n$. $(f_i(\lambda), f_j(\lambda))=g(\lambda)$. $[f_i(\lambda), f_j(\lambda)]=h(\lambda)$

$\text{diag}\{f_1(\lambda)\cdots i\cdots j\cdots f_n(\lambda)\}$ 相抵于 $\text{diag}\{f_1(\lambda)\cdots g(\lambda), h(\lambda)\cdots f_n(\lambda)\}$

并且两对角阵主对角元素准素因子全体相同.

不妨设 $i=1, j=2$. 设 $f_1(\lambda)=g(\lambda)q(\lambda)$. $h(\lambda)=f_1(\lambda)f_2(\lambda)/g(\lambda)=f_2(\lambda)q(\lambda)$.

$\exists u(\lambda), v(\lambda)$. $g(\lambda)=f_1(\lambda)u(\lambda)+f_2(\lambda)v(\lambda)$

$$\begin{bmatrix}f_1(\lambda) & 0\\ 0 & f_2(\lambda)\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}f_1(\lambda) & g(\lambda)\\ 0 & f_2(\lambda)\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}0 & g(\lambda)\\ -f_2(\lambda)q(\lambda) & f_2(\lambda)\end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 0 & g(\lambda) \\ -h(\lambda) & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} g(\lambda) & 0 \\ 0 & h(\lambda) \end{bmatrix}$$

公共因式分解：$f_1(\lambda)=P_1(\lambda)^{r_1}P_2(\lambda)^{r_2}\cdots P_t(\lambda)^{r_t}$

$f_2(\lambda)=P_1(\lambda)^{s_1}\cdots\cdots P_t(\lambda)^{s_t}$.

其中 $P_i(\lambda)$ 为互异首一不可约，$r_i,s_i\geq 0$.

令 $e_i=\min\{r_i,s_i\}$，$k_i=\max\{r_i,s_i\}$

$g(\lambda)=P_1(\lambda)^{e_1}\cdots\cdots P_t(\lambda)^{e_t}$　$f(\lambda)=P_1(\lambda)^{k_1}\cdots\cdots P_t(\lambda)^{k_t}$

由构造知：$\{f_1(\lambda),f_2(\lambda)\}$ 与 $\{h(\lambda),g(\lambda)\}$ 有相同初等因子组

Step2. 利用 Step1. 将 $\mathrm{diag}\{f_1(\lambda)\cdots\cdots f_n(\lambda)\}$ 变为法式.

依次将 $(1,1)$ 元与 $(2,2)$ 元 第 $(3,3)$ …… 第 (n,n) 作 Step 1.

从而 $(1,1)$ 元不可约元幂次最小.

一般地 设 $(1,1)$ …… $(i-1,i-1)$ 也已做到，第 (i,i) …… (n,n) 依次做.

相抵于 $\mathrm{diag}\{d_1(\lambda)\cdots\cdots d_n(\lambda)\}$，$d_1(\lambda)\mid d_2(\lambda)\cdots\cdots d_n(\lambda)$. 法式.

例：$\lambda I-A$ 相抵于 $\mathrm{diag}\{1,(\lambda-1)^2(\lambda+2),(\lambda+2),1,\lambda-1\}$.

由引理2. $\Longrightarrow$ 初等因子. $\lambda+2$，$\lambda+2$，$(\lambda-1)^2$，$\lambda-1$.

引理3. 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$，~~初等因子 $(\lambda-\lambda_1)^{r_1}$~~ $A=\mathrm{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1),J_{r_2}(\lambda_2)\cdots\cdots J_{r_k}(\lambda_k)\}$.

则 A 初等因子 $(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots\cdots(\lambda-\lambda_k)^{r_k}$.

证明：$$\lambda I-A=\begin{bmatrix} \lambda I-J_{r_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda I-J_{r_k}(\lambda_k) \end{bmatrix}.$$

由引理1 $\Rightarrow$ $\lambda I-J_{r_i}(\lambda_i)$ 相抵 $diag\{1\cdots\cdots 1, (\lambda-\lambda_i)^{r_i}\}$

则相抵后: $diag\{1\cdots 1, (\lambda-\lambda_1)^{r_1}, 1\cdots 1, (\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots\cdots 1, 1\cdots 1, (\lambda-\lambda_k)^{r_k}\}$. 不为法式.

由引理2, A 初等因子 $(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots\cdots(\lambda-\lambda_k)^{r_k}$.

主定理4: $A\in M_n(C)$ 初等因子 $(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots\cdots(\lambda-\lambda_k)^{r_k}$.

则 A 相似于 $J=diag\{J_{r_1}(\lambda_1)\cdots\cdots J_{r_k}(\lambda_k)\}$.

证明: 由定理3. J 与 A 初等因子相同. 则 A 相似于 J. (P83 定理3)

定义5: 定理4中 $J=diag\{J_{r_1}(\lambda_1)\cdots\cdots J_{r_k}(\lambda_k)\}$ 称为 A 的 Jordan 标准型

$J_{r_i}(\lambda_i)$ 称为 Jordan 块.

68-74页结论总结.

代数学语言抽象.需内化为自己的知识

引理5. A特征值$\lambda_1 \cdots \lambda_n$. 则$\lambda_1 + \cdots \lambda_n = trA$. $\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|$.

推论6. $A \in M_n(K)$. 则A非异 $\Leftrightarrow$ A特征值$\lambda_1 \cdots \lambda_n$全不为0.

定理8. 任一复方阵必复相似于一个上三角阵.

推论9. $A \in M_n(K)$的全部特征值在K中. ∃ $P \in M_n(K)$. $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$.

命题10. $A \in M_n(K)$. 特征值$\lambda_1 \cdots \lambda_n$. $f(A)$特征值$f(\lambda_1) \cdots f(\lambda_n)$.

命题11. $A \in M_n(K)$. 且$g(A) = 0$. 则. ∀λ为A特征值. $g(\lambda) = 0$.

命题12. 非异阵A特征值$\lambda_1 \cdots \lambda_n$. 则$A^{-1}$特征值. $\lambda_1^{-1} \cdots \lambda_n^{-1}$

定义2. V为n维线性空间 φ可对角化 $\Leftrightarrow$ φ有n个线性无关特征向量. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$.

定理3. $A \in M_n(K)$可对角化 $\Leftrightarrow$ A有n个线性无关特征向量.

定理4. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda_1 \cdots \lambda_k$为φ不同特征值. $V_1 \cdots V_k$为对应特征子空间.

则有: $V_1 + V_2 + \cdots V_k = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$.

推论5. 不同特征值的特征向量线性无关.

定理6. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$有n个不同特征值 $\Rightarrow$ φ可对角化

定理7. $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ $\lambda_1 \cdots \lambda_k$为φ全体特征值. $V_1 \cdots V_k$为特征子空间. 则

φ可对角化 $\Leftrightarrow$ $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots V_k = V$

定理11. φ可对角化 $\Leftrightarrow$ φ有完全特征向量系. (几何重数 = 代数重数)

定义1. (极小多项式). $A \in M_n(K)$. $m(x) \in K[x]$. $m(A) = 0$. 且次数最小, 首一.

定理2. 设$m(x)$为A极小多项式. $f(x) \in K[x]$. $f(A) = 0$. 则. $m(x) | f(x)$.

命题3. $A \in M_n(K)$. 其极小多项式存在且唯一.

命题4: 相似矩阵有相同极小多项式.

命题5:

$A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{bmatrix}$ A极小多项式 $m(x)$, A_i极小多项式 $m_i(x)$ 则. $m(x) = [m_1(x) \cdots m_k(x)]$

例3：设A全体不同特征值$\lambda_1 \cdots\cdots \lambda_k$. 证：若$A$可对角化，则极小多项式$m(x)=(x-\lambda_1)\cdots\cdots(x-\lambda_k)$.

引理6：设λ_0为A特征值，则$(x-\lambda_0)\mid m(x)$.

命题7：$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$，则. $(A-\lambda_1 I_n)(A-\lambda_2 I_n)\cdots\cdots(A-\lambda_n I_n)=0$.

即.A适应其特征多项式$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots\cdots(\lambda-\lambda_n)$.

定理8.(Cayley-Hamilton). $A\in M_n(K)$. $f(\lambda)=|\lambda I_n-A|$. 则$f(A)=0$.

推论9. $A\in M_n(K)$. 特征多项式$f(\lambda)$. 极小多项式$m(\lambda)$. 则：

(1). $m(\lambda)\mid f(\lambda)$. $\deg(m(\lambda))\leq n$.

(2). $f(\lambda)$与$m(\lambda)$有同根(不计重数).

(3). $f(\lambda)\mid[m(\lambda)]^n$

75 - ~~83~~ 80 页 结论总结.

定义1. A, B: $A(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$. 多项式矩阵或 λ-阵.

引理9.(带余除法). $M(\lambda)$ 为 λ-阵, 则:

$$M(\lambda)=(\lambda I-B)Q(\lambda)+R. \qquad M(\lambda)=S(\lambda)(\lambda I-B)+T$$

定理10. $A, B\in M_n(K)$. A与B相似 $\Leftrightarrow$ λI_n-A 与 λI_n-B 相抵. (主定理).

引理1. $A(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$ 非0. 则 $A(\lambda)$ 相抵于 $B(\lambda)=(b_{ij}(\lambda))$ 且 $b_{11}(\lambda)\mid b_{ij}(\lambda)$, $\forall i, j$.

定理2. $A(\lambda)$ 为 m 阶 λ-阵. 则 $A(\lambda)$ 相抵于 $B(\lambda)=\mathrm{diag}\{d_1(\lambda)\cdots\cdots d_r(\lambda), 0\cdots\cdots 0\}$.

其中 $d_i(\lambda)$ 为非0首一多项式. $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$, $\forall 1\le i\le r-1$.

注: (1). $A(\lambda)$ 相抵于. $\begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & d_r(\lambda) & \\ & & & 0 \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$.

(2). 主对角线上非零多项式个数 r 为 $A(\lambda)$ 秩.

(3). $r(A(\lambda))=n \not\Rightarrow$ A 可逆. 例 $A(\lambda)=\begin{bmatrix}1&0\\0&\lambda\end{bmatrix}$ 不可逆.

定义3: 定理2中对角λ阵称 $A(\lambda)$ 的法式或相抵标准型。

定理6: $A\in M_n(K)$. λI_n-A 相抵于 $\mathrm{diag}\{1\cdots\cdots 1, d_1(\lambda)\cdots\cdots d_m(\lambda)\}$.

定义1: $A(\lambda)$ 为 n 阶 λ-阵, $\forall 1\le k\le n$. k阶行列式因子 $D_k(\lambda)$:

1°. 若 $A(\lambda)$ 所有 k 阶子式为0. 则 $D_k(\lambda)=0$.

2°. 若 $A(\lambda)$ 中至少有1个k阶子式不为0. 则 $D_k(\lambda)=$(所有k阶子式)最大公因式. $D_k(\lambda)$ 首一.

引理2: $A(\lambda)$ 非零行列式因子: $D_1(\lambda)\cdots\cdots D_r(\lambda)$. 则 $D_i(\lambda)\mid D_{i+1}(\lambda)$, $\forall 1\le i\le r-1$.

定义3: (不变因子). 若 $A(\lambda)$ 的非零行列式因子 $D_1(\lambda)\cdots\cdots D_r(\lambda)$. 则 $A(\lambda)$ 不变因子: $g_1(\lambda)\cdots\cdots g_r(\lambda)$

$g_1(\lambda)=D_1(\lambda)$. $g_2(\lambda)=D_2(\lambda)/D_1(\lambda)$. $\cdots\cdots$ $g_r(\lambda)=D_r(\lambda)/D_{r-1}(\lambda)$

则对法式而言,不变因子为对角线元.

定理4: 相抵λ-阵有相同行列式因子,进而有相同不变因子。

定理5: $A(\lambda)$ 法式 $\Lambda=\mathrm{diag}\{d_1(\lambda)\cdots\cdots d_r(\lambda), 0\cdots\cdots 0\}$. 则A的不变因子 $d_1(\lambda)\cdots\cdots d_r(\lambda)$.

推论6. A与B相抵 $A(\lambda), B(\lambda)$. $\Leftrightarrow$ 它们有相同法式。

定理8：$A,B\in M_n(K)$. 则 A,B 相似 $\Longleftrightarrow$ $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 相抵 $\Leftrightarrow$ $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 有相同

因子组。

定理9：$A,B\in M_n(F)$. $F\subseteq K$, 则：

A 与 B 在 F 相似 $\triangleq \exists P\in M_n(F)$. $B=P^{-1}AP$.

A 与 B 在 K 相似 $\triangleq \exists Q\in M_n(K)$ $B=Q^{-1}AQ$.

A 与 B 在 F 相似 $\Leftrightarrow$ A 与 B 在 K 相似.

推论10. 矩阵不变因子在基域扩张下不变。

引理1：$$F=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & & 1 \\ -a_r & -a_{r-1} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}_{r\times r}$$

(1). F 的行列式因子 $1,1,1\cdots\cdots f(\lambda)=\lambda^r+a_1\lambda^{r-1}+\cdots\cdots a_r$，不变因子同.

(2). F 特征多项式 $=F$ 极小多项式 $=f(\lambda)$.

注：$\lambda I-A$ 的行列式或不变因子称为 A 的行列式因子或不变因子组。

81页～84页.定理总结.

引理1：$f(\lambda)=\lambda^r+a_1\lambda^{r-1}+\cdots a_r$. $F(f(\lambda))=F=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_r & \cdots & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}_{r\times r}$

(1). F的行列式因子$1\cdots\cdots1, f(\lambda)$

不变因子$1\cdots\cdots1, f(\lambda)$

(2) 特征多项式＝极小多项式＝$f(\lambda)$.

引理2. $A(\lambda)\sim diag\{d_1(\lambda)\cdots\cdots d_n(\lambda)\}$. $B(\lambda)\sim diag\{d_{i_1}(\lambda)\cdots\cdots d_{i_n}(\lambda)\}$.

$(i_1\cdots\cdots i_n)$为$(12\cdots\cdots n)$全排列. 则$A(\lambda)\sim B(\lambda)$.

定理3. $A\in M_n(K)$.不变因子：$1\cdots\cdots1. d_1(\lambda)\cdots\cdots d_k(\lambda)$. 则A相似于$F=diag\{F(d_1(\lambda))\cdots\cdots F(d_k(\lambda))\}$

定义4. 定理3中分块对角阵$F=diag\{F(d_1(\lambda))\cdots\cdots F(d_k(\lambda))\}$为A的有理标准型.

$F(d_i(\lambda))$为Fobenius块.

定理5. $A\in M_n(K)$不变因子组$1.\cdots\cdots1. d_1(\lambda)\cdots\cdots d_k(\lambda)$. 其中$d_i$首一. $d_i|d_{i+1}$.

则A极小多项式$m(\lambda)=d_k(\lambda)$.

推论6. $A\in M_n(F)$.极小多项式$m_F(\lambda)$. $F\subseteq K$. 看$A\in M_n(K)$. 则有$m_K(\lambda)$. 有$m_F(\lambda)=m_K(\lambda)$.

定义1.(初等因子). $f(\lambda)\in K[\lambda]$. $p(\lambda)$首一不可约. 若$\exists b\in Z^+$. $P(\lambda)^b|f(\lambda)$. $P(\lambda)^{b+1}\nmid f(\lambda)$.

则$P(\lambda)^b$为$f(\lambda)$准素因子.

定义2. $A\in M_n(K)$.其不为常数的不变因子组$d_1(\lambda)\cdots\cdots d_k(\lambda)$.

因式分解：
$$\left.\begin{aligned} d_1(\lambda)&=P_1(\lambda)^{e_{11}}\cdots\cdots P_t(\lambda)^{e_{1t}}. \\ &\vdots \\ d_k(\lambda)&=P_1(\lambda)^{e_{k1}}\cdots\cdots P_t(\lambda)^{e_{kt}} \end{aligned}\right\}*.$$

若(*)中$e_{ij}>0$. 则$P_j(\lambda)^{e_{ij}}$为A初等因子. 它们构成A的初等因子组.

且不变因子$\Longleftrightarrow$初等因子（互相决定）

定理3. A相似于$B \Longleftrightarrow A$与B有相同初等因子组

Jordan 标准型.

引理1. $J=\begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0 \end{bmatrix}_{r\times r}$ 的初等因子为$(\lambda-\lambda_0)^r$

记阵: $J=J_r(\lambda_0)=\begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0 \end{bmatrix}_{r\times r}$

引理2. $\lambda I-A \sim diag\{f_1(\lambda) \cdots\cdots f_n(\lambda)\}$ 其中$f_i(\lambda)$首一, 则$f_1(\lambda) \cdots\cdots f_n(\lambda)$所有准素因子为$A$初等因子

引理3. $A\in M_n(C)$. $A=diag\{J_{r_1}(\lambda_1) \cdots\cdots J_{r_k}(\lambda_k)\}$. 则$A$初等因子 $(\lambda-\lambda_1)^{r_1} \cdots\cdots (\lambda-\lambda_k)$

定理4. $A\in M_n(C)$. 初等因子: $(\lambda-\lambda_1)^{r_1} \cdots\cdots (\lambda-\lambda_k)^{r_k}$.

则A相似于$J=diag\{J_{r_1}(\lambda_1) \cdots\cdots J_{r_k}(\lambda_k)\}$.

定义5. 定理4中$J=diag\{J_{r_1}(\lambda_1), J_{r_2}(\lambda_2) \cdots\cdots J_{r_k}(\lambda_k)\}$. 为$A$的 Jordan 标准型

注：Jordan 标准型中 Jordan 块次序可以互换。

Jordan 由一个初等因子唯一决定

$J_r(\lambda_0) \longleftrightarrow (\lambda-\lambda_0)^r$

从而在不考虑 Jordan 块次序下，Jordan 标准型由 A 唯一决定。

定理6：设 $\phi\in\mathcal{L}(V_{\mathbb{C}}^n)$，则 $\exists V$ 的一组基 $\{e_1\cdots\cdots e_n\}$ 使得 ϕ 在基下表示为 Jordan 标准型 $J=diag\{J_{r_1}(\lambda_1)\cdots\cdots J_{r_k}(\lambda_k)\}$

定理7. $A\in M_n(\mathbb{C})$，则下列结论等价。

(1) A 可对角化

(2) A 极小多项式无重根

(3) A 的初等因子为一次多项式.［或 A 的 Jordan 块为一阶］.

证明：(1) $\Rightarrow$ (2) 已证. P_{13}. 例3证明：

若 $\lambda_1\cdots\cdots\lambda_k$ 为 A 全体不同特征值，则 A 可对角化 $\Rightarrow m_A=(\lambda-\lambda_k)(\lambda-\lambda_{k-1})\cdots\cdots(\lambda-\lambda_1)$.

A 可对角化，$\exists$ 非异 P. $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&\lambda_1&&&\\&&&\lambda_2&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&\lambda_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 I&&&\\&\lambda_2 I&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_k I\end{bmatrix}=B.$

则 $m_A(\lambda)=m_B(\lambda)$

且 $m_B(\lambda)=[m_{\lambda_1}\cdots\cdots m_{\lambda_k}]=(\lambda-\lambda_1)\cdots\cdots(\lambda-\lambda_k)$.

(2) $\Rightarrow$ (3). 设 A 的不变因子组为 $1\cdots\cdots1\ d_1(\lambda)\cdots\cdots d_k(\lambda)$.

由有理标准型理论. $m_A=d_k(\lambda)$.（P_{82} 定理5）.

则 $d_k(\lambda)$ 无重根. $\forall d_i(\lambda), i\in[1,k], i\in\mathbb{Z}$ 均无重根.

则由定义. $d_i(\lambda)$ 准素因子为1次，即初等因子为1次.

(3) $\Rightarrow$ (1). 设初等因子 $\lambda-\lambda_1\cdots\cdots\lambda-\lambda_n$.

由定理4. 则 A 相似于 $J=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\ddots\end{pmatrix}$，则 A 可对角化.

命题8：设$\phi\in\mathcal{L}(V_{\mathbb{C}}^{n})$可对角化，$V_0$为$\phi$-不变子空间。

则若ϕ可对角化，则ϕ限制在V_0也可对角化。

证明：设ϕ极小多项式$m(\lambda)$。$\phi|_{V_0}$极小多项式$g(\lambda)$。

$m(\phi|_{V_0})=m(\phi)|_{V_0}=0$。则由极小多项式$\Rightarrow g(\lambda)\mid m(\lambda)$

若ϕ可对角化，由定理7，$m(\lambda)$无重根，则$g(\lambda)$无重根。

则再由定理7，$\phi|_{V_0}$可对角化。

推论9：$M=\begin{bmatrix}A&C\\0&B\end{bmatrix}_{(m+n)\times(m+n)}$ 若M可对角化，则A，B均可对角化。

证明：M极小多项式$m(\lambda)$。

$$0=m(M)=\begin{bmatrix}m(A)&*\\0&m(B)\end{bmatrix}$$ 从而$m(A)=m(B)=0$。

则：$m_A(\lambda)\mid m(\lambda)$，$m_B(\lambda)\mid m(\lambda)$。

则由定理7，$m_A(\lambda)$，$m_B(\lambda)$无重根 $\overset{定7}{\Rightarrow}$ A，B可对角化

命题10. $\phi\in\mathcal{L}(V)$ $V=V_1\oplus V_2\cdots\oplus V_k$，$V_i$为$\phi$-不变的，则$\phi$可对角化$\Leftrightarrow$ $\phi|_{V_i}$可对角化 $1\leq i$

证明：必要性，由命题8。

充分性，$\exists V_i$的基$e_{i1}\cdots e_{in_i}$，使$\phi|_{V_i}$上表示阵为对角阵。

由直和，V_i的基可拼为V基，ϕ在这组基下表示为对角阵。

推论11. $A=\begin{bmatrix}A_1&&\\&\ddots&\\&&A_k\end{bmatrix}$ 则A可对角化$\Leftrightarrow A_1\cdots A_k$可对角化。

推论12. 设$A\in M_n(K)$, 特征值全在K中, A在K上相似于其Jordan标准型.

证明: 由定理4: $\underset{M_n(K)}{\underset{\cap}{A}}$ 在$\mathbb{C}$上相似于 $J=\mathrm{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1)\cdots\cdots J_{r_k}(\lambda_k)\}$.

由$\lambda_1\cdots\lambda_k$全在K上, J在K上.

则由相似关系在基域扩张下不变, A与J在K上相似

例: A的初等因子: $(\lambda-1)$ $(\lambda-1)^3$ $(\lambda+2)^2$ $(\lambda+2)^3$

$$J=\mathrm{diag}\left\{1, \begin{bmatrix}1&1&\\&1&1\\&&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2&1\\&-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2&1&\\&-2&1\\&&-2\end{bmatrix}\right\}.$$

$$J=\begin{bmatrix}1&&&&&&&&\\&1&1&0&&&&&\\&0&1&1&&&&&\\&0&0&1&&&&&\\&&&&-2&1&0&&\\&&&&0&-2&1&&\\&&&&0&0&-2&&\\&&&&&&&-2&1\\&&&&&&&0&-2\end{bmatrix}_{9\times9}.$$

例：$\phi \in \mathcal{L}(V^4)$，基 $\{e_1 \cdots e_4\}$ 表示阵 $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ -14 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

新基 $\{f_1 \cdots f_4\}$，使得表示阵为 J，求旧基到新基的 P.

解：$P^{-1}AP = J$.（许久之前的结论，得追溯到高代上）.

$$\lambda I - A \longrightarrow \mathrm{diag}\{1, 1, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2\}.$$

$\Rightarrow$ 初等因子 $(\lambda-1)^2$，$(\lambda-1)^2$.

$$\Rightarrow J = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right].$$

设 $P = [\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_4]$，$AP = PJ$.

则：$[A\alpha_1 \cdots A\alpha_4] = [\alpha_1 \cdots \alpha_4]\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

特征值1线性无关特征向量.
$$\begin{cases} A\alpha_1 = \alpha_1 \\ A\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2 & (A - I_4)\alpha_2 = \alpha_1. \text{①} \\ A\alpha_3 = \alpha_3 \\ A\alpha_4 = \alpha_3 + \alpha_4. & (A - I_4)\alpha_4 = \alpha_3. \text{②} \end{cases}$$

由 A 解出 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$. $\alpha_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

①$\Downarrow$ ②$\Downarrow$

$\alpha_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{7}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\alpha_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

则 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$，解得.

7.7 Jordan 标准型的进一步讨论与应用.

V: n维复线性空间. $\phi \in \mathcal{L}(V)$.

~~$\Rightarrow \exists \{e_i$ ......~~

初等因子 $(\lambda-\lambda_1)^{r_1} \cdots\cdots (\lambda-\lambda_k)^{r_k}$.

$\Rightarrow$ ∃基 $\{e_{11} \cdots e_{1r_1}; e_{21} \cdots e_{2r_2} \cdots e_{k1} \cdots e_{kr_k}\}$. 使得 ϕ 在基下表示阵:

$$J = \mathrm{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1) \cdots\cdots J_{r_k}(\lambda_k)\}.$$

$$(\phi(e_{i1}) \cdots \phi(e_{ir_i})) = [e_{i1} \cdots e_{ir_i}]. \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{r_i \times r_i}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \phi(e_{i1}) = \lambda_i e_{i1}. \\ \phi(e_{i2}) = e_{i1} + \lambda_i e_{i2} \\ \vdots \\ \phi(e_{ir_i}) = e_{ir_i-1} + \lambda_i e_{ir_i}. \end{cases} \quad (1). \quad \forall 1 \leq i \leq k.$$

令: $V_i = L(e_{i1} \cdots\cdots e_{ir_i})$. 由(1). $\phi(V_i) \subseteq V_i$. 则 V_i 为 ϕ-不变子空间.

由直和. V_i 基拼为V基. $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots\cdots \oplus V_k$

$f(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2} \cdots\cdots (\lambda-\lambda_k)^{r_k}$

不妨设. $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s$. $\lambda_1 \neq \lambda_j$. $\forall s < j \leq k$.

$f(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{r_1+\cdots r_s}(\lambda-\lambda_{s+1})^{r_{s+1}} \cdots\cdots (\lambda-\lambda_k)^{r_k}$.

则 λ_1 代数重数 $r_1 + \cdots r_s$. 属于 λ_1 的 Jordan 块阶数和.

λ_1 的几何重数 $= \dim V_{\lambda_1} = \dim \ker(\phi - \lambda_1 I_V) = n - \dim \mathrm{Im}(\phi - \lambda_1 I_V) = n - r(\phi - \lambda_1 I_V)$.

只需计算 Jordan 标准型即可. 相似不改变秩

而看若当块：$J_{r_i}(\lambda_i)-\lambda_1 I_{r_i}=\begin{bmatrix}\lambda_i-\lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i-\lambda_1\end{bmatrix}_{r_i\times r_i}$

$\Rightarrow\ r(J_{r_i}(\lambda_i)-\lambda_1 I_{r_i})=\begin{cases} r_i-1, & \lambda_i=\lambda_1.\ (1\le i\le s) \\ r_i, & \lambda_i\ne\lambda_1.\ (s<i\le k)\end{cases}$

$$r(J-\lambda_1 I_n)=\sum_{i=1}^{k} r(J_{r_i}(\lambda_i)-\lambda_1 I_{r_i})=(r_1-1)+\cdots(r_s-1)+r_{s+1}+\cdots r_k=n-s.$$

则 λ_1 几何重数 $=n-r(\phi-\lambda_1 I_V)=n-r(J-\lambda_1 I_n)=s$.

几何重数 = 属于特征值 λ_1 Jordan 块个数.

定理1. 特征值 λ_1 代数重数 = 属于 λ_1 的所有 Jordan 块阶数和.

λ_1 几何重数 = 属于 λ_1 的所有 Jordan 块个数.

进一步：$\{e_{11}, e_{21}, \cdots, e_{s1}\}$ 为 V_{λ_1} 的一组基.

令 $\psi=\phi-\lambda_1 I_V$. 重改(1).

$$(1)\Rightarrow\begin{cases}\psi(e_{11})=0. \\ \psi(e_{12})=e_{11}. \\ \vdots \qquad \vdots \\ \psi(e_{1r_1})=e_{1r_1-1}.\end{cases}$$

$$e_{1r_1}\xrightarrow{\psi}e_{1r_1-1}\xrightarrow{\psi}e_{1r_1-2}\xrightarrow{\psi}\cdots\cdots\xrightarrow{\psi}0.$$

定义2. 设 $\psi\in\mathcal{L}(V)$. V_0 为 ψ-不变子空间. 若 $\exists\, 0\ne\alpha\in V_0$. 使 $\{\alpha, \psi(\alpha), \cdots\cdots, \psi^{m-1}(\alpha)\}$ 为 V_0 一组基. 称 V_0 为关于 ψ 的循环子空间. α 称为循环向量.

则按上述 ψ 与重改(1).

$\Rightarrow \{e_{ir_i}, \cdots\cdots \psi^{r_i-1}(e_{ir_i})\}$ 构成 V_i 一组基.

$\Rightarrow$ V_i 为关于 $\psi = \phi - \lambda_i I_V$ 的循环子空间.

引理3: 设 $R(\lambda_1) = V_1^{r_1} \oplus V_2^{r_2} \oplus \cdots\cdots \oplus V_s^{r_s}$, 则 $R(\lambda_1) = \ker(\phi - \lambda_1 I_V)^n$.

$R(\lambda_1) = \ker(\phi - \lambda_1 I_V)^n = \{v \in V \mid (\phi - \lambda_1 I_V)^n(v) = 0\}$.

证明: $R(\lambda_1) \subseteq \ker(\phi - \lambda_1 I_V)^n$.

$\forall v \in R(\lambda_1)$. 则 $v = v_1 + \cdots\cdots v_s$, $v_i \in V_i$.

对 V_i 的基. $e_{ir_i} \xrightarrow{\phi - \lambda_1 I_V} e_{ir_i - 1} \longrightarrow \cdots\cdots \xrightarrow{\phi - \lambda_1 I_V} 0$.

显然 $(\phi - \lambda_1 I_V)^{r_i}(e_{ij}) = 0$. $\forall j$. $\Rightarrow (\phi - \lambda_1 I_V)^{n}(v_i) = 0$.

$\Longrightarrow (\phi - \lambda_1 I_V)^n(v) = (\phi - \lambda_1 I_V)^n(v_1) + \cdots\cdots (\phi - \lambda_1 I_V)^n(v_s) = 0$. n 也可以是 $\max\{r_1 \cdots\cdots r_s\}$

再证. $\ker(\phi - \lambda_1 I_V)^n \subseteq R(\lambda_1)$.

设 $v \in V$. 在基下坐标. (基为斯Jordan标准型下基). $x = (x_{11}\ x_{12} \cdots x_{1r_1} \cdots\cdots x_{kr_k})^T$

要求 $\ker(\phi - \lambda_1 I_V)^n$ 即求 x. $(\phi - \lambda_1 I_V)^n x = 0$ 即. $(J - \lambda_1 I_n)^n x = 0$.

而每个Jordan块: $(J_{r_i}(\lambda_i) - \lambda_1 I_{r_i})^n = \begin{bmatrix} \lambda_i - \lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i - \lambda_1 \end{bmatrix}^n_{r_i \times r_i} = \begin{cases} 0. & 1 \le i \le s. \\ \text{非异阵}. & s < i \le k \end{cases}$

$\Rightarrow x_{i1} = x_{i2} = \cdots\cdots x_{ir_i} = 0$. $s < i \le k$.

$(x_{11} \cdots\cdots x_{1r_1} \cdots\cdots x_{sr_s})$ 为任意.

$\ker(\phi - \lambda_1 I_n)^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots\cdots V_s = R(\lambda_1)$.

定义4： $R(\lambda_1)=\ker(\phi-\lambda_1 I)^n=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\cdots V_s$. 称为 λ_1 的根子空间。

注：(1). $R(\lambda_1)=\ker(\phi-\lambda_1 I)^m$ $m=\max\{r_1\cdots\cdots r_s\}$ 或 $m=\lambda_1$-代数重数.

(2). 特征子空间 $\ker(\phi-\lambda_1 I_V)\subseteq R(\lambda_1)$.

推论5. $\phi\in\mathcal{L}(V)$. 可对角化. $\Longleftrightarrow\forall$ 特征值 λ_0. $R(\lambda_0)=V_{\lambda_0}$.

证明：由. $R(\lambda_0)\supseteq V_{\lambda_0}$. 则. $R(\lambda_0)=V_{\lambda_0}\Leftrightarrow\dim R(\lambda_0)=\dim V_{\lambda_0}$.

(特征子空间). $(V_1\oplus\cdots\oplus V_s)$.

$\Longleftrightarrow\lambda_0$ 的几何重数 = 代数重数 $\Leftrightarrow\phi$ 可对角化.

定理6： $\phi\in\mathcal{L}(V_{\mathbb{C}})$.

(1). 设 ϕ 的初等因子组 $\underset{\substack{\downarrow\\ V_1}}{(\lambda-\lambda_1)^{r_1}}$ ----- $\underset{\substack{\downarrow\\ V_k}}{(\lambda-\lambda_k)^{r_k}}$.

则 $V=V_1\oplus V_2$ ------ $\oplus V_k$. , V_i 为 $\phi-\lambda_i I$ 的循环子空间.

(2). ϕ 的全体特征值 $\lambda_1\cdots\cdots\lambda_s$. 则.

$V=R(\lambda_1)\oplus\cdots\cdots\oplus R(\lambda_s)$.

矩阵问题条件和结论在相似关系不改变, 则可把问题化为Jordan标准型解决.

Jordan块成立. $\Rightarrow$ Jordan标准型成立. $\Rightarrow$ 一般矩阵成立

例：$A\in M_n(\mathbb{C})$. 则 $A=BC$. B,C 为对称阵.

证明：$\exists P$. $P^{-1}AP=J=\mathrm{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1)\cdots\cdots J_{r_k}(\lambda_k)\}$.

$$J_{r_i}(\lambda_i)=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{r_i\times r_i}=\underbrace{\begin{bmatrix} & & 1 & \lambda_i\\ & ⋰ & ⋰ & \\ 1 & ⋰ & & \\ \lambda_i & & & \end{bmatrix}_{r_i\times r_i}}_{S_i}\underbrace{\begin{bmatrix} & & & 1\\ & & ⋰ & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}}_{T_i}.$$

令 $S=\mathrm{diag}\{S_1\cdots\cdots S_k\}$. $T=\mathrm{diag}\{T_1\cdots\cdots T_k\}$. $J=ST$. 其中 S,T 对称.

而 $A=PJP^{-1}=PSTP^{-1}=(PSP^T)((P^{-1})^T TP^{-1})$ A写成2个对称阵.

计算题：$A\in M_n(C)$. 求 A^k $(k\geq 1)$.

$\exists$非异阵P. $P^{-1}AP=J=\mathrm{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1)\cdots\cdots J_{r_k}(\lambda_k)\}$.

$$A^k=(PJP^{-1})^k=PJ^kP^{-1}=P\,\mathrm{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1)^k\cdots\cdots J_{r_k}(\lambda_k)^k\}.P^{-1}$$

$$J_n(\lambda_0)=\begin{bmatrix}\lambda_0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_0\end{bmatrix}=\lambda_0 I_n+N. \qquad N=\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 0\end{bmatrix}\Rightarrow N^n=0.$$

$$J_n(\lambda_0)^k=(\lambda_0 I_n+N)^k \qquad k\geq n-1.$$

$$=\lambda_0^k I_n+C_k^1\lambda_0^{k-1}N+\cdots\cdots C_k^{n-1}\lambda_0^{k-n+1}N^{n-1}.$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda_0^k & C_k^1\lambda_0^{k-1} & \cdots & C_k^{n-1}\lambda_0^{k-n+1}\\ 0 & \lambda_0^k & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & C_k^1\lambda_0^{k-1}\\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_0^k\end{bmatrix}$$

引理8. 设 $A,B\in M_n(C)$. A,B均可对角化. $AB=BA$. A,B可同时对角化. 即$\exists$非异P.

$P^{-1}AP$. $P^{-1}BP$为对角阵.

证明：几何语言. $\varphi,\psi\in\mathcal{L}(V_C^n)$. φ,ψ可对角化且 $\varphi\psi=\psi\varphi$. 则$\varphi.\psi$可同时对角化(∃公用基)

对维数n归纳.

$n=1$ 显然，设小于n成立，证 $\dim=n$.

设φ全体特征值 $\lambda_1\cdots\cdots\lambda_s$. (不同).

Case 1. $s=1$. $\Longrightarrow\varphi=\lambda_1 I_V$

ψ可对角化 ∃ $\{e_1\cdots e_n\}$. ψ表示阵为对角

在该基下φ表示也为$\lambda_1 I_n$.

Case 2. $s>1$. 特征子空间 $V_1\cdots V_s$

由可对角化 $V=V_1\oplus V_2\cdots\cdots\oplus V_s\Rightarrow$

$\dim V_i<n$.

详细证明 $\varphi\psi=\psi\varphi\Rightarrow V_i$均为$\psi$不变子空间.

$\forall v_i\in V_i$. $\varphi(v_i)=\lambda_i v_i$.

$\varphi(\psi(v_i))=\psi(\varphi(v_i))=\psi(\lambda_i v_i)=\lambda_i\psi(v_i)$

$\Rightarrow\psi(v_i)\in V_i$

作限制. $\phi|_{V_i}$. $\psi|_{V_i}$. 均可对角化.

$$\phi\psi=\psi\phi \Rightarrow \phi|_{V_i}\psi|_{V_i}=\psi|_{V_i}\phi|_{V_i}$$

由归纳. $\exists V_i$基. $\phi|_{V_i}$. $\psi|_{V_i}$ 在某基下表示阵为对角阵.

将上述 V_i 基拼成 V 基. 拼接 $\phi|_{V_i}$. $\psi|_{V_i}$. 均成为 ϕ. ψ 为对角阵.

定理9.(Jordan-Chevalley 分解).

设 $A\in M_n(\mathbb{C})$. 则 $A=B+C$. 其中

(1) B 可对角化. (2) C 幂零. (3). $BC=CB$ (4). B, C 均可表示为 A 多项式

并且满足条件(1)(2)(3) 的分解唯一.

证明: 设 P 非异: $P^{-1}AP=J=\mathrm{diag}\{J_1\cdots J_s\}$.

其中 $\lambda_1\cdots\lambda_s$ 为 A 全体特征值 $J_1\cdots J_s$ 为对应根子空间块.

$$J_i=\begin{bmatrix} J_{r_1}(\lambda_i) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{r_k}(\lambda_i)\end{bmatrix}_{m_i}=\underbrace{\lambda_i I}_{M_i}+\underbrace{\begin{bmatrix} \ddots\ 1 & & \\ & \ddots\ 1 & \\ & & \ddots\ 1\end{bmatrix}}_{N_i}$$

$M_i=\lambda_i I$. 可对角化.

N_i 幂零. ($N_i^{m_i}=0$).

$M_iN_i=N_iM_i$.

$M=\mathrm{diag}\{M_1\cdots\cdots M_s\}$ 对角. $N=\mathrm{diag}\{N_1\cdots N_s\}$. 幂0.

$MN=NM$. $J=M+N$.

J_i 特征多项式 $=(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$. (由C-H) $\Rightarrow$ $(J_i-\lambda_i I)^{m_i}=0$.

$(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$ 两两互素. 由中国剩余定理, $\exists g(x)$. s.t.

$g(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{m_i}q_i(\lambda)+\lambda_i.\quad \forall 1\leq i\leq s.$

$\Rightarrow\ g(J_i)=(J_i-\lambda_i I)^{m_i}q_i(J_i)+\lambda_i I=\lambda_i I=M_i.$

而 $g(J)=\mathrm{diag}\{g(J_1)\cdots g(J_s)\}=\mathrm{diag}\{M_1\cdots\cdots M_s\}=M.$

$N=J-M=J-g(J).$

$A=PJP^{-1}=P(M+N)P^{-1}=PMP^{-1}+PNP^{-1}=\overset{\text{可对角化}}{\hat{B}}+\overset{\text{幂0}}{\hat{C}}$

$BC=(PMP^{-1})(PNP^{-1})=PMNP^{-1}=(PNP^{-1})(PMP^{-1})=CB.$

$\cancel{g(B)=g(PMP^{-1})=Pg(M)P^{-1}}$

$g(A)=g(PJP^{-1})=Pg(J)P^{-1}=PMP^{-1}=B.\qquad C=A-B=A-g(A)$

B,C 可表示为 A 的多项式.

下证唯一性：设 $A=B_1+C_1$,满足(1)-(3). 下证 $B=B_1$, $C=C_1$

$B_1C_1=C_1B_1.\Rightarrow AB_1=(B_1+C_1)B_1=B_1A$

由 $B=g(A)\xRightarrow{B与A可交}$ B与A多项式可交 $\Rightarrow BB_1=B_1B$. 且还可推出 $CC_1=C_1C$

$A=B+C=B_1+C_1.\Rightarrow B-B_1=C_1-C$

令 $C_1^r=0$. $C^s=0$. $(C_1-C)^{r+s}=0$. (二项展开).

同理. $\Rightarrow (B-B_1)^{r+s}=0.$

由 $BB_1=B_1B$. 且 B,B_1 可对角化,由引理8. ∃非异 P. $P^{-1}BP=\mathrm{diag}\overset{\{a_1\cdots a_n\}}{1'}$ $P^{-1}B_1P=\mathrm{diag}\overset{\{b_1\cdots b_n\}}{2'}$

$$0=P^{-1}(B-B_1)^{r+s}P=(P^{-1}BP-P^{-1}B_1P)^{r+s}=\begin{bmatrix}(a_1-b_1)^{r+s}&&\\&\ddots&\\&&(a_n-b_n)^{r+s}\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow B=B_1\ \Rightarrow C=C_1.$

Topic. 1. 如何合理选取特征向量求广义特征向量.

例1. $A=\begin{bmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$. 求P. $P^{-1}AP$ 为 Jordan.

经计算 初等因子 $(\lambda+1)$ $(\lambda+1)^2$.

$$J=\left[\begin{array}{c|cc} -1 & & \\ \hline & -1 & 1 \\ & & -1 \end{array}\right]_{3\times3}.$$

设 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$. 由 $AP=PJ$. 可得:

$$A\alpha_1=-\alpha_1 \quad A\alpha_2=-\alpha_2 \quad A\alpha_3=\alpha_2-\alpha_3. \Rightarrow (A+I_3)\alpha_3=\alpha_2.$$

$$A+I_3=\begin{bmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}. \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \Rightarrow \beta_1=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \beta_2=\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

令 $\alpha_2=k_1\beta_1+k_2\beta_2=[-2k_1+5k_2,k_1,k_2]^T$.

$r(A+I_3)=r(A+I_3\vdots\alpha_2)$. $\Rightarrow k_1=k_2$ 有解.

令 $\alpha_2=\beta_1+\beta_2=[3,1,1]^T$. $\Rightarrow \alpha_3=[1,0,0]^T$. $\alpha_1=\beta_1$.

$$P=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jordan 标准型.进一步讨论.

Topic 2. 带参数矩阵确定Jordan标准型.

(1) 选取特殊子式求行列式因子.

(2). 计算几何重数确定Jordan块个数.

(3). 计算极小多项式确定最大Jordan块维数.

例: $A=\begin{bmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{bmatrix}$.

解1: $\lambda I-A=\begin{bmatrix} \lambda-a & -1 & \cdots & -1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -1 \\ & & & \lambda-a \end{bmatrix}$.

$(\lambda I-A)\begin{pmatrix} 1 \cdots n-1 \\ 1 \cdots n-1 \end{pmatrix}=(\lambda-a)^{n-1}$

$(\lambda I-A)\begin{pmatrix} 1 \cdots n-1 \\ 2 \cdots n \end{pmatrix}=g(\lambda)$

则由 $g(a)\neq 0$. 则 $(g(\lambda),(\lambda-a)^{n-1})=1$.

则由行列式因子定义 $D_{n-1}(\lambda)=1$ $D_n(\lambda)=(\lambda-a)^n \Rightarrow$ 不变. $1 \cdots 1, (\lambda-a)^n \Rightarrow J$.

解2. A 特征值 a. 代数重数 n.

几何 $=n-r(A-aI_n)=n-(n-1)=1$.

Jordan 块个数为1. $\Rightarrow J_n(a)$.

解3: A 特征多项式 $f(\lambda)=(\lambda-a)^n$. 极小: $(\lambda-a)^k$. $k\leq n$.

下算k. $A=aI_n+N+N^2+\cdots N^{n-1}$ ~~[illegible]~~ 则 $(A-aI_n)^{n-1}=(N+\cdots N^{n-1})^{n-1}\neq 0$.

$\Rightarrow$ 极小为 $(\lambda-a)^n \Rightarrow$ 不变. $1, 1 \cdots 1, (\lambda-a)^n \Rightarrow J_n(a)$.

例：$A=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ a+2 & 1 & & \\ 5 & 3 & 1 & \\ 7 & 6 & b+4 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 4}$

解：A 特征值 1.

几何重数 $= 4 - r(A-I_4) = \begin{cases} 1 & 若\ a+2\neq 0\ 且\ b+4\neq 0. \Rightarrow \text{Jordan 块个数 } 1.\quad J_4(1) \\ 2. & 若\ a+2=0\ 或\ b+4=0. \end{cases}$

$\text{diag}\{J_k(1), J_l(1)\}$. s.t. $k\le l$. 则 $1\le k\le l$, $k+l$

$l\in[2,3]$.

算：极小多项式.

$(A-I_4)^2 = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ 3(a+2) & & & \\ 6(a+2)+3(b+4) & 3(b+4) & & \end{bmatrix} = \begin{cases} 0.\ 若\ a+2=0\ 且\ b+4=0. \rightsquigarrow \text{diag}\{I_4 \\ \neq 0.\ a+2=0\ 或\ b+4=0\ (之一成立). \sim \text{diag}\{ \end{cases}$

Topic 3. 循环子空间应用

定义：$\phi\in\mathcal{L}(V_K^n)$. $0\neq\alpha\in V$. 称由 $\{\alpha, \phi(\alpha) \cdots\}$ 张成空间记为 $C(\phi,\alpha)$. 称为 ϕ 关于 α 的循环子空间.

引理2. 若 $\dim C(\phi,\alpha)=m$. 则 $\{\alpha, \cdots \phi^{m-1}(\alpha)\}$ 为 $C(\phi,\alpha)$ 基.

设 $k=\max\{l\in\mathbb{Z}^+ \mid \alpha \cdots \phi^{l-1}(\alpha)$ 线性无关$\}$.

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha \cdots\cdots \phi^{k-1}(\alpha) & 线性无关 \\ \alpha \cdots\cdots \phi^{k}(\alpha) & 线性相关. \end{cases}$

$\Rightarrow \phi^k(\alpha)$ 为 $\alpha \cdots\cdots \phi^{k-1}(\alpha)$ 线性组合.

$\forall l\geq k$. $\phi^l(\alpha)$ 为 $\alpha \cdots\cdots \phi^{k-1}(\alpha)$ 线性组合.

$\Rightarrow \alpha. \cdots\cdots \phi^{k-1}(\alpha)$ 为 $C(\phi,\alpha)$ 一组基. $\dim C(\phi,\alpha)=k$.

则 $k=m$.

设 $\phi^m(\alpha) = -a_0\alpha + \cdots - a_{m-1}\phi^{m-1}(\alpha)$.

令 $g(\lambda) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots\cdots \quad a_0 \in K[\lambda]$.

其实，$C(\phi,\alpha)$ 为包含 α 最小 ϕ 一不变子空间.

$\phi|_{C(\phi,\alpha)}$ 在基 $\{\alpha, \phi(\alpha) \cdots\cdots \phi^{m-1}(\alpha)\}$ 下表示阵.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -a_{m-1} \end{bmatrix}_{m\times m} = F(g(\lambda)) \text{ 之前定义.}$$

例3. (1) $\phi(\alpha) = \lambda_0\alpha$. ($\lambda_0 \in K, \alpha \neq 0$).

$C(\phi,\alpha) = L(\alpha)$.

$\phi(\alpha_i) = \lambda_i\alpha_i$. $\lambda_1 \cdots \lambda_n \in K$ 互异. $\alpha_i \neq 0$.

令 $\alpha = \alpha_1 + \cdots\cdots \alpha_n$.

$\Rightarrow C(\phi,\alpha) = V$ (全空间).

(3). $\phi \in \mathcal{L}(V_K)$ 不变因子 $1 \cdots\cdots | d_1(\lambda) \cdots\cdots d_k(\lambda)$.

$\exists$ 基. $\{e_1 \cdots\cdots e_n\}$. 使 ϕ 表示阵为 $F = \operatorname{diag}\{F(d_1(\lambda)) \cdots\cdots F(d_k(\lambda))\}$.

$$[\phi(e_1) \cdots\cdots \phi(e_n)] = [e_1 \cdots\cdots e_n]\begin{bmatrix} & & & -a_0 \\ 1 & & & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$\phi(e_1) = e_2 \quad \phi(e_2) = e_3 \cdots\cdots \quad \phi(e_n) = -a_0e_1 \cdots\cdots -a_{n-1}e_n$.

$$e_1 \xrightarrow{\phi} e_2 \xrightarrow{\phi} e_3 \cdots\cdots \longrightarrow e_n \xrightarrow{\phi} -\sum_{i=1}^{n} a_{i-1}e_i.$$

$V = C(\phi, e_{i1}) \oplus C(\phi, e_{i2}) \cdots\cdots \oplus C(\phi, e_{ik})$.

(4) $\phi\in \mathcal{L}(V_{\mathbb{C}})$ 初等因子 $(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots\cdots(\lambda-\lambda_k)^{r_k}$.

$\exists$ 基 $\{e_1\cdots\cdots e_n\}$. ϕ 表示阵为 $J=diag\{J_{r_1}(\lambda_1)\cdots\cdots J_{r_k}(\lambda_k)\}$

$\Rightarrow V=C(\phi-\lambda_1 I, e_{11})\oplus\cdots\cdots\oplus C(\phi-\lambda_k I, e_{1k})$.

命题4. $V=C(\phi,\alpha)$. 循环空间. $\psi\in\mathcal{L}(V)$. 且 $\phi\psi=\psi\phi$.

(1). ψ 由 $\psi(\alpha)$ 的值唯一决定.

(2). $\exists g(\lambda)\in K[\lambda]$. st $\psi=g(\phi)$.

证明: (1) $V=C(\phi,\alpha)$. 基 $\{\alpha\cdots\cdots\phi^{n-1}(\alpha)\}$.

ψ 由 ψ 在基上作用唯一决定.

$\psi(\phi^i(\alpha))=\phi^i(\psi(\alpha))$. $0\le i\le n-1$.

$\Rightarrow$ ψ 由 $\psi(\alpha)$ 唯一决定.

(2). $\psi(\alpha)=a_0\alpha+a_1\phi(\alpha)+\cdots\cdots a_{n-1}\phi^{n-1}(\alpha)$.

令 $g(\lambda)=a_0+\cdots\cdots a_{n-1}\lambda^{n-1}$.

ψ. $g(\phi)$. $\psi(\alpha)=g(\phi)(\alpha)$. $\xRightarrow{(1)}$ $\psi=g(\phi)$.

推论5. (1) $A=F(g(\lambda))$. $AB=BA$.

$\Rightarrow B=g(A)$.

(2). $A=J_n(\lambda_0)$. $AB=BA$, $\Rightarrow B=g(A)$.

求解矩阵法式.

（姚慕生高等代数习题）.

求 $\lambda I-A$ 法式. A 为

(1) $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\0&0&-2\end{bmatrix}$ (2) $A=\begin{bmatrix}-1&0&1\\3&2&-2\\-5&1&4\end{bmatrix}$. (3) $A=\begin{bmatrix}3&1&1\\0&4&0\\-1&1&5\end{bmatrix}_{3\times3}$

$\mathrm{diag}\{1\cdots\cdots1, d_1(\lambda)\cdots\cdots d_n(\lambda)\}$. $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$.

(1) $\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-1&-2&1\\0&\lambda-1&-1\\0&0&\lambda+2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-2&\lambda-1\\-1&\lambda-1&0\\\lambda+2&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+(-\lambda-2)r_1]{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&-2&\lambda-1\\0&\lambda-3&\lambda-1\\0&2\lambda+4&-(\lambda-1)(\lambda+2)\end{bmatrix}$

$\xrightarrow[C_3+(1-\lambda)C_1]{C_2+2C_1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda-3&\lambda-1\\0&2\lambda+2&-(\lambda-1)(\lambda+2)\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&\lambda-1\\0&(\lambda+2)(\lambda+1)&-(\lambda-1)(\lambda+2)\end{bmatrix}$

$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-\frac{\lambda-1}{2}\\0&(\lambda+2)(\lambda+1)&-(\lambda-1)(\lambda+2)\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-1)^2(\lambda+2)\end{bmatrix}$.

$A\rightarrow\lambda I-A$ 法式 $\longrightarrow$ 不变因子 $\longrightarrow$ 初等因子 $\longrightarrow J$

同理 (3)

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-3 & -1 & -1\\ 0 & \lambda-4 & 0\\ 1 & -1 & \lambda-5\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & \lambda-5\\ 0 & \lambda-4 & 0\\ \lambda-3 & -1 & -1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & \lambda-5\\ 0 & \lambda-4 & 0\\ 0 & \lambda-4 & -(\lambda-4)^2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-4 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-4)^2\end{bmatrix}.$$

矩阵函数.

定义9.1.1. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 部分和$\{S_n\}$收敛

$\lim_{n\to\infty} S_n = S$. 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S$

定义9.1.3 (Cauchy判别). 正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 令 $r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$

(1) $r<1$. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛 (2) $r>1$. 发散. (3) $r=1$ 失效.

定义: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 为幂级数. 令 $A = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$

定义 $R = \begin{cases} +\infty & , A=0. \\ \frac{1}{A} & , A\in(0,+\infty) \\ 0. & , A=+\infty. \end{cases}$

R称为幂级数收敛半径

定理10.3.1. (Cauchy-Hadamand定理).

若 $|x|<R$. 则 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 绝对收敛. $|x|>R$. 发散. $|x|=R$. 另行判别。

定理10.3.6. (逐项求导)

幂级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $|x|<R$ 时逐项求导.

且 $f'(x)$ 收敛半径为R.

复幂级数 $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nZ^n$. $a_i\in\mathbb{C}$, $Z\in\mathbb{C}$.

$$e^Z=1+Z+\frac{Z^2}{2!}+\cdots\cdots \qquad R=+\infty.$$

$$\sin Z=Z-\frac{Z^3}{3!}+\cdots\cdots \qquad R=+\infty.$$

$$\cos Z=1-\frac{Z^2}{2!}+\cdots\cdots \qquad R=+\infty.$$

$$\ln(1+Z)=Z-\frac{Z^2}{2}+\frac{Z^3}{3}+\cdots\cdots \qquad R=1$$

$$f(z)=a_0+a_1Z+\cdots\cdots a_pZ^p\in\mathbb{C}[Z]$$

$A\in M_n(\mathbb{C})$.

$$f(A)=a_0+a_1A+\cdots\cdots a_pA^p$$

设P为非异阵. $P^{-1}AP=J=\mathrm{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1)\cdots\cdots J_{r_k}(\lambda_k)\}$

$$f(A)=f(PJP^{-1})=Pf(J)P^{-1}=P\{f(J_{r_1}(\lambda_1))\cdots\cdots f(J_{r_k}(\lambda_k))\}P^{-1}$$

$$J_{r_i}(\lambda_i)=\lambda_iI+N.\quad N=J_{r_i}(0).$$

Taylor 展开: $f(z)=f(\lambda_i)+\frac{f'(\lambda_i)}{1}(Z-\lambda_i)+\cdots\cdots\frac{f^{(p)}(\lambda_i)}{p!}(Z-\lambda_i)^p$

$$f(J_{r_i}(\lambda_i))=f(\lambda_i)I+\frac{f'(\lambda_i)}{1!}N+\cdots\cdots\frac{f^{(n-1)}(\lambda_i)}{(n-1)!}N^{n-1}$$

$$=\begin{bmatrix} f(\lambda_i) & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda_i)}{(n-1)!} \\ & \ddots & \vdots \\ & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

定义1. 设矩阵序列 $\{A_p\}$. $A_p = \begin{bmatrix} a_{11}^{(p)} & \cdots & a_{1n}^{(p)} \\ \vdots & & \\ & \cdots & a_{nn}^{(p)} \end{bmatrix}_{n\times n}$

以及矩阵 $B = (b_{ij})_{n\times m}$.

若 $\forall (i,j)$, 数列 $\{a_{ij}^{(p)}\}$ 收敛到 b_{ij}. 即 $\lim\limits_{p\to\infty} a_{ij}^{(p)} = b_{ij}$.

则称矩阵序列收敛至 B. $\lim\limits_{p\to\infty} A_p = B$.

否则称矩阵序列 $\{A_p\}$ 发散.

例: $A_p = \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{p} & \frac{1}{p^2} \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[p\to\infty]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

定义2. $f(z) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i z^i$ 为幂级数. $f_p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots a_p z^p$ 为部分和.

设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 得到矩阵序列 $\{f_p(A)\}_{p=0}^{+\infty}$. 若矩阵序列 $\{f_p(A)\}_{p=0}^{+\infty}$ 收敛到 B.

则称: $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i A^i = a_0 I_n + a_1 A + \cdots$ 收敛到 B. 记为 $f(A) = B$.

$f(X) = a_0 I + a_1 X + \cdots$ 矩阵函数.

定理3. 设 $f(z) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i z^i$ 为复幂级数, 收敛半径 R.

(1) $f(X)$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\forall P$ 非异 $f(P^{-1}XP)$ 收敛.

(2). $X = diag\{X_1 \cdots X_k\}$. 则 $f(X)$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $f(X_i)$ 收敛.

(3). Jordan. $J_{ri}(\lambda_i)$. 若 $|\lambda_i| < R$. 则. $f(J_{ri}(\lambda_i))$ 收敛.

证明：设 $f_p(z)=\sum_{i=0}^{p}a_iz^i$. 为部分和.

(1). $f_p(P^{-1}XP)=P^{-1}f_p(X)P$

$f(X)$ 收敛 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\lim\limits_{p\to\infty}f_p(X)$ 存在. $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{p\to\infty}f_p(P^{-1}XP)$ 存在 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $f(P^{-1}XP)$ 收敛.

故 $f(P^{-1}XP)=\lim\limits_{p\to\infty}f_p(P^{-1}XP)=\lim\limits_{p\to\infty}P^{-1}f_p(X)P=P^{-1}f(X)P$

(2). $f_p(X)=\mathrm{diag}\{f_p(X_1)\cdots f_p(X_k)\}$.

$f(X)$ 收敛. $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\lim\limits_{p\to\infty}f_p(X)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{p\to\infty}f_p(X_i)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $f(X_1)\cdots f(X_k)$ 收敛

$f(X)=\lim\limits_{p\to\infty}f_p(X)=\lim\limits_{p\to\infty}\mathrm{diag}\{f_p(X_1)\cdots f_p(X_k)\}=\mathrm{diag}\{f(X_1)\cdots f(X_k)\}$

(3)

$$f_p(J_{n_i}(\lambda_i))=\begin{bmatrix} f_p(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}f_p^{(n-1)}(\lambda_i) \\ & \ddots & \vdots \\ & & f_p(\lambda_i)\end{bmatrix}$$

$f(J_{n_i}(\lambda_i))$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{p\to\infty}f_p(J_{n_i}(\lambda_i))$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{p\to\infty}f_p^{(l)}(\lambda_i)$ 存在.

因 $|\lambda_i|<R$. $\lim\limits_{p\to\infty}f_p(\lambda_i)=f(\lambda_i)$. $\lim\limits_{p\to\infty}f_p^{(n-1)}(\lambda_i)=f^{(n-1)}(\lambda_i)$.

$f(J_{n_i}(\lambda_i))=\lim\limits_{p\to\infty}f_p(J_{n_i}(\lambda_i))$.

定理4. $f(z)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ 收敛半径R.

$A\in M_n(\mathbb{C})$. 谱 $\sigma(A)=\{\lambda_1 \cdots \lambda_n\}$.

$\rho(A)=\max\{|\lambda_1| \cdots\cdots |\lambda_n|\}$.

(1). 若 $\rho(A)<R$. 则 $f(A)$ 收敛.

(2) 若 $\rho(A)>R$. 则 $f(A)$ 发散.

(3) 若 $\rho(A)=R$. 对所有模长为R的 λ_i. 并设初等因子最大幂 n_i.

则 $f(A)$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $f(\lambda_i) \cdots\cdots f^{(n_i-1)}(\lambda_i)$ 收敛.

(4) 若 $f(A)$ 收敛. 则 $f(A)$ 特征值 $f(\lambda_1) \cdots\cdots f(\lambda_n)$.

证明: $\exists$ 非异 P. $P^{-1}AP=J=\mathrm{diag}\{J_{r_1}(\lambda_1) \cdots J_{r_k}(\lambda_k)\}$

$f(A)$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $f(J)$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $f(J_{r_i}(\lambda_i))$ 收敛.

(1) 若 $\rho(A)<R \Rightarrow f(J_{r_i}(\lambda_i))$ 收敛.

(2) $\rho(A)>R$. $\exists \lambda_i$. $|\lambda_i|>R$. $\Rightarrow f(\lambda_i)$ 发散 $\Rightarrow$ $f(J_{r_i}(\lambda_i))$ 发散.

(3). $\rho(A)=R$ 若 $|\lambda_i|<R$. $f(J_{r_i}(\lambda_i))$ 收敛.

$|\lambda_i|=R$. $f(J_{r_i}(\lambda_i)) \overset{\text{收敛}}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{p\to\infty} f_p(\lambda_i) \cdots\cdots \lim\limits_{p\to\infty} f_p^{(n_i-1)}(\lambda_i)$ 存在.

$\Leftrightarrow$. $f(\lambda_i) \cdots\cdots f^{(n_i-1)}(\lambda_i)$ 收敛.

(4) $f(A)=f(PJP^{-1})=Pf(J)P^{-1}=P\,\mathrm{diag}\{f(J_{r_1}(\lambda_1)) \cdots\cdots f(J_{r_k}(\lambda_k))\}P^{-1}$.

$\Rightarrow$ $f(A)$ 特征值 $f(\lambda_1) \cdots\cdots f(\lambda_n)$.

$\forall A \in M_n(\mathbb{C})$.

$e^A \overset{def}{=\!=} I_n + \frac{A}{1!} + \cdots\cdots$

$\sin A = A - \frac{A^3}{3!} + \cdots\cdots$

$\cos A = I_n - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} + \cdots\cdots$

$\ln(I_n + A) = A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} + \cdots\cdots \qquad \rho(A) < 1.$

注：矩阵函数不可套用数值函数性质

$$e^x \cdot e^y = e^y \cdot e^x = e^{x+y}$$

$A, B \in M_n(\mathbb{C}) \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$

$$\begin{cases} e^A \cdot e^B \neq e^B \cdot e^A \\ e^A \cdot e^B \neq e^{A+B}. \end{cases}$$

例：$AB = BA$. 上式成立.

例：$A \in M_n(\mathbb{C})$. 求 e^{tA}.

解：$f(z) = e^{tz} \quad f^{(l)}(z) = t^l e^{tz}$

$P^{-1}AP = J = diag\{J_{r_1}(\lambda_1) \cdots J_{r_k}(\lambda_k)\}$.

$e^{tA} = f(A) = Pf(J)P^{-1} = P diag\{f(J_{r_1}(\lambda_1)) \cdots\cdots f(J_{r_k}(\lambda_k))\}P^{-1}$

$$e^{tJ_{r_i}(\lambda_i)} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda_i} & te^{t\lambda_i} & \cdots & \frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!}e^{t\lambda_i} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & te^{t\lambda_i} \\ & & & e^{t\lambda_i} \end{bmatrix}_{r_i \times r_i} = e^{t\lambda_i} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

8.1 二次型的化简与矩阵的合同

R^n 中坐标 $(x_1,\cdots,x_n)$

$f(x_1\cdots x_n)$：二次多项式.

$H=\{(a_1\cdots a_n)\in R^n \mid f(a_1\cdots a_n)=0\}$. ⟵ 二次超曲面.

问题：给出二次超曲面分类.

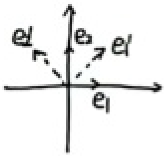
$n=2$, 二次曲线.

$n=3$. 二次曲面. 共17类.

一般二次曲面方程. $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$.

step 1. 通过坐标轴旋转 消交错项 xy.

step 2. 通过坐标轴平移 消低次项.



$$[e_1',e_2']=[e_1,e_2]\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$$

step 1. 通过坐标向量非异线性变换. 消去 $f(x_1\cdots x_n)$ 中交错项. x_ix_j, $i\neq j$.

使得二次项中仅含平方项

step 2. 通过坐标平移. 消低次项.

定义1. 数域K上二次齐次多项式. n元

$$f(x_1\cdots x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2a_{ii}+2\sum_{1\le i<j\le n}a_{ij}x_ix_j.$$

例: $f(x,y)=x^2+3xy+y^2$

构造K上对称阵:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}_{n\times n}\qquad a_{ij}=a_{ji}.\ \forall i,j.$$

令 $X=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}.$ $\quad X^TAX=[x_1\cdots x_n](a_{ij})_{n\times n}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$

映射: ϕ {K上n阶对称} $\to$ {n元2次型}.

$$A\mapsto X^TAX.$$

1°. ϕ为满映射.

2°. ϕ为单射. A,B对称.

$$X^TAX=X^TBX.$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}b_{ii}x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}b_{ij}x_jx_i.$$

$\Rightarrow\ a_{ii}=b_{ii}.\ \forall i.\quad a_{ij}=b_{ij}.\ \forall 1\le i<j\le n.\ \Rightarrow A=B.$

例: $f(x,y)=x^2+3xy+y^2\longleftrightarrow\begin{bmatrix}1 & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & 1\end{bmatrix}.$

例: $\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & -\sqrt{2}\\ \frac{1}{2} & -1 & 0\\ -\sqrt{2} & 0 & 2\end{bmatrix}\longleftrightarrow x_1^2-x_2^2+2x_3^2+x_1x_2-2\sqrt{2}x_1x_3.$

设 V 为数域 K 上 n 维线性空间.

$\{e_1 \cdots e_n\}$ 为一组基. $\forall \alpha\in V \longleftrightarrow$ 坐标 $x=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}$.

二次型 $f(x_1\cdots x_n)$ 看成 V 上函数.

另取基 $\{f_1 \cdots f_n\}$. $\{f_1\cdots f_n\}=\{e_1\cdots e_n\}C$

$\forall \alpha\in V. \longleftrightarrow$ 新坐标 $y=\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots \\ y_n\end{bmatrix}$. $\Rightarrow x=Cy$.

$$f(x_1\cdots x_n)=x^TAx. = (Cy)^TA(Cy). = y^T(C^TAC)y. = g(y_1\cdots y_n).$$

$$f(x_1\cdots x_n) \xleftrightarrow{1\leftrightarrow 1} A \xLeftrightarrow[\text{非异变换}]{\text{坐标向量}} g(y_1\cdots y_n) \longleftrightarrow C^TAC$$

定义2. $A,B\in M_n(K)$. 若 $\exists$ 非异 C. 使 $B=C^TAC$. 则 A,B 具有合同关系.

命题3. 合同关系是等价关系.

证明: (1) 反身. ~~对称~~. $A=I_n^TAI_n$

(2). 对称 $B=C^TAC$ $A=(C^{-1})^TBC^{-1}$

(3) 传递. $B=C^TAC$ $D=H^TBH$. $D=(CH)^TA(CH)$.

$$\begin{tikzcd}
\text{回顾. 二次型 } f(x_1\cdots x_n) \arrow[r, Rightarrow, "\text{非异}", "x=Cy"'] \arrow[d, leftrightarrow] & g(y_1\cdots y_n) \text{ 仅含平方项.} \arrow[d, leftrightarrow] \\
A \arrow[r, "\text{合同变换.}"] & C^TAC \text{ 为对角阵.}
\end{tikzcd}$$

引理4. 下列变换为合同变换. 称为对称初等变换.

(I) 对换 A 第 i 行与第 j 行, 第 i 列与第 j 列. $P_{ij}AP_{ij}$ $P_{ij}^T=P_{ij}$.

(II). A 的第 i 行乘 C. 第 i 列乘 C $P_i(c)AP_i(c)$. $P_i^T(c)=P_i(c)$

(III). A 的第 i 行 $\times C+$ 第 j 行上. 列也同理. $T_{ij}(c)AT_{ji}(c)$. $T_{ij}^T(c)=T_{ji}(c)$

引理5. $A\neq 0$ 为K上对称阵. 则∃非异C, C^TAC 第(1,1)元非0.

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. 若 $a_{11}\neq 0$ ✓

若: $a_{11}=0$, 若∃ $2\leq i\leq n$. $a_{ii}\neq 0$.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & & \\ & \ddots a_{ii} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \xrightarrow[P_{ij}AP_{ij}.]{\text{第1类}} \begin{bmatrix} a_{ii} & & \\ & \ddots 0 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}.$$

下设 $a_{ii}=0$. $\forall i$. 由 $A\neq 0$. ∃ $a_{ij}\neq 0$. $1\leq i\leq j\leq n$.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{ij} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ji} & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} \xrightarrow[T_{ij}(1)AT_{ji}(1).]{\text{第3类}} \begin{bmatrix} 2a_{ij} & \cdots & a_{ij} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ji} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{重复前}} \text{得证.}$$

定理6. 设 $A\in M_n(K)$. 且对称. 则存在K上非异C. C^TAC 为对角阵.

证明: $n=1$ 显然 (阶数)

设小于n成立. 证n.

若 $A=0$ 成立.

若 $A\neq 0$. 不妨设 $a_{11}\neq 0$ (引理5).

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & & \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{若干次}]{T_{i1}(-\frac{a_{i1}}{a_{11}})AT_{1i}(-\frac{a_{i1}}{a_{11}})} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B_{(n-1)\times(n-1)} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$ 其中B为 n-1阶对称

则由归纳. ∃ $D\in M_{n-1}(K)$. D^TBD 为 Λ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & \\ & \Lambda \end{bmatrix}$$

推论7. 合同变换为若干次对称初等变换复合.

证明: $A \longrightarrow C^TAC$ C 非异

$\Rightarrow C = P_1 \cdots P_r$ P_i 初等

$C^TAC = (P_1 \cdots P_r)^T A (P_1 \cdots P_r)$

$= P_r^T(\cdots P_2^T(P_1^TAP_1)P_2 \cdots)P_r$

定义8. 下列变换为分块初等变换 也为合同变换.

$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ $A_{12}^T = A_{21}$

(I). 对换第 i 分块行与第 j 分块行 分块列同理.

(II). 第 i 行左乘非异 M. i 列右乘 M^T $P_i(M)AP_i(M^T)$

(III). 第 i 块行左乘 M + 到第 j 块行

第 i 块列右乘 M^T + 到第 j 块列.

二次型的化简.

一、配方法.

基本方式. $(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j$

步骤: (1) 把 x_1 所有项凑完全平方.(消 x_1)

(2). 剩 $x_2 \cdots$ (消 x_2)

⋮

(n-1). 消(x_{n-1})

例1. $f = x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 + x_3^2$

$= (x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_2x_3) - 4x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_2x_3.$

$= (x_1+x_2-2x_3)^2 - 4(x_2^2 + \frac{1}{2}x_2x_3 + \frac{1}{16}x_3^2) - \frac{11}{4}x_3^2$

$= (x_1+x_2-2x_3)^2 - 4(x_2+\frac{1}{4}x_3)^2 - \frac{11}{4}x_3^2$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1+x_2-2x_3 \\ y_2 = x_2 + \frac{1}{4}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + \frac{9}{4}y_3 \\ x_2 = y_2 - \frac{1}{4}y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x = Cy$

$f = y_1^2 - 4y_2^2 - \frac{11}{4}y_3^2$

注：(1). 配方法得过渡阵为非异上三角阵.

(2). 有时明显配方无法保证过渡阵非异 则不正确.

例2. $f = 2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1.$

$= (x_1-x_2)^2 + (x_2+x_3)^2 + (x_3+x_1)^2.$ X

(3) 若只含交错项,利用下方法化简.

例3：$f = 2x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_4 - x_2x_3 + x_2x_4 - 2x_3x_4.$

令 $\begin{cases} x_1 = y_1+y_2 \\ x_2 = y_1-y_2 \\ x_3 = y_3 \\ x_4 = y_4 \end{cases} \Rightarrow f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_1y_3 + 2y_1y_4 - 2y_3y_4$

$= 2(y_1^2 - y_1y_3 + y_1y_4 + \frac{1}{4}y_3^2 + \frac{1}{4}y_4^2 - \frac{1}{2}y_3y_4) - 2y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2 - \frac{1}{2}y_4^2 - y_3y_4$

$= 2(y_1 - \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4)^2 - 2y_2^2 - \frac{1}{2}(y_3+y_4)^2$

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 + y_4 \\ z_4 = y_4. \end{cases}$$

二、对称初等变换法.

A对称：∃非异阵C. $C^TAC = \Lambda$. 对角阵. $C = P_1 \cdots P_r$. P_i为初等阵.

方法：$[A \mid I_n]$ 实施行变换. 再对左边阵做对称列变换. 直到左侧为Λ.

右侧矩阵恰为过渡阵转置

$$[A \mid I_n] \to [P_1^TAP_1 \mid P_1^T] \to [P_2^TP_1^TAP_1P_2 \mid P_2^TP_1^T] \to \cdots \to [(P_1\cdots P_r)^TA(P_1\cdots P_r) \mid (P_1\cdots P_r)^T]$$

例4: $f = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

$$[A \mid I_n] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{行}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{列}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 - \frac{1}{2}r_2]{\text{行}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{列}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]. \qquad f = y_1^2 - 4y_2^2 \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad x = Cy$$

例5:

$$f=2x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3.$$

解: $[A \,\vdots\, I_n]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&1&2&1&0&0\\1&0&-2&0&1&0\\2&-2&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1+r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&1&0\\1&0&-2&0&1&0\\2&-2&0&0&0&1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&1&1&0\\1&0&-2&0&1&0\\0&-2&0&0&0&1\end{array}\right]$

$\xrightarrow{r_2-\frac{1}{2}r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&1&1&0\\0&-\frac{1}{2}&2&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&-2&0&0&0&1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&1&0\\0&-\frac{1}{2}&-2&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&-2&0&0&0&1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&1&0\\0&-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&8&2&-2&1\end{array}\right]$

$f=2y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2+8y_3^2$ $\quad C=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&2\\1&\frac{1}{2}&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\quad x=Cy$

惯性定理.

一. 实二次型. 实对称阵. $f\longleftrightarrow x^TAx$. $\mathbb{R}$.

$\exists$ 非异阵 $C\in M_n(\mathbb{R})$. $C^TAC=\mathrm{diag}\{d_1\cdots\cdots d_n\}$.

对换主对角元为合同变换. $=\mathrm{diag}\{d_1\cdots d_r,0\cdots\cdots 0\}$. $d_i\neq 0$.

$r(A)=r(C^TAC)=r$

$\Rightarrow$ 秩为合同关系下不变量(实对称阵).

$f=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots\cdots d_rx_r^2$ 设 $d_1>0\cdots\cdots d_p>0$. $d_{p+1}<0\cdots\cdots d_r<0$.

令 $y_i=\sqrt{d_i}x_i$. $1\leq i\leq p$. $y_j=\sqrt{-d_j}x_j$. $p+1\leq j\leq r$.

$y_k=x_k$. $r+1\leq k\leq n$. 为非异变换.

$\Rightarrow f=y_1^2+\cdots\cdots y_p^2-y_{p+1}^2\cdots\cdots-y_r^2$ 规范标准型.

定理1.(惯性定理).设f还有一个规范型.

$$f=z_1^2+\cdots z_k^2-z_{k+1}^2-\cdots-z_r^2$$

看上述$y_1^2+\cdots y_p^2\cdots -y_r^2$. 则$p=k$.

证明: 设$x=By$, $x=Cz$, B.C非异.

$$f=y_1^2+\cdots y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$$

$$f=z_1^2+\cdots z_k^2-z_{k+1}^2\cdots-z_r^2 \quad (*).$$

$\Rightarrow Z=C^{-1}By \qquad C^{-1}B=(c_{ij})_{n\times n}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots c_{1n}y_n \\ \vdots \\ z_n=c_{n1}y_1-\cdots-c_{nn}y_n. \end{cases}$$

利用反证法: 若$p>k$. 将$y_1\cdots y_n$看成未知元.

$$\begin{cases} c_{11}y_1+\cdots\cdots c_{1n}y_n=0. \\ \vdots \\ c_{k1}y_1+\cdots\cdots c_{kn}y_n=0. \\ y_{p+1}=0 \\ \vdots \\ y_n=0. \end{cases}$$

系数矩阵秩$<n$. 线性方程组有非0解.

$y_1=a_1,\cdots y_p=a_p, y_{p+1}=0,\cdots,y_n=0$.

$a_1\cdots a_p$不全为0., 代入$(*)$

左$=a_1^2+\cdots+a_p^2>0$.

右$=-z_{k+1}^2\cdots-z_r^2\leq 0$. 矛盾

同理$p<k$不成立, 则$p=k$.

定义2. f有一规范标准型.

$$f=y_1^2+\cdots y_p^2-y_{p+1}^2\cdots\cdots-y_r^2$$

称r为二次型f秩. p为f正惯性指数. $q=r-p$为负惯性指数.

$s=p-q$. 为符号差.

由 r, s : $\Longrightarrow p=\frac{1}{2}(r+s) \quad q=\frac{1}{2}(r-s)$.

$p, q \Rightarrow r=p+q, \quad s=p-q$.

定理3. 秩和符号差(或正负惯性指数)为实二次型在合同关系下全系不变量

证明: 设实对称阵A, B. 秩$=r$. 符号差$=s$.

$p=\frac{1}{2}(r+s) \quad q=\frac{1}{2}(r-s)$

A合同于$\mathrm{diag}\{\overbrace{1\cdots\cdots 1}^{p}, \overbrace{-1\cdots\cdots -1}^{q}, 0\cdots 0\}$

B合同于$\mathrm{diag}\{1\cdots\cdots 1, -1\cdots -1, 0\cdots 0\}$.

$\Rightarrow A$合同于B.

$$\begin{bmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

二, 复二次型, 复对称阵.

$f=X^TAX$. 非异 $C\in M_n(\mathbb{C})$. $C^TAC=\mathrm{diag}\{d_1\cdots d_r, 0\cdots 0\}$. $d_i\neq 0$.

$f=d_1y_1^2+\cdots\cdots d_ry_r^2=(\sqrt{d_1}y_1)^2+\cdots\cdots(\sqrt{d_r}y_r)^2$.

$f=z_1^2+\cdots\cdots z_r^2$ 复数情况下全系不变量.

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

扫描全能王 创建

正定型与正定矩阵

定义1. 设 $f(x_1 \cdots x_n) = X^TAX$ 为实二次型.

	$\alpha^TA\alpha$	f	A
$\forall 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}^n$	>0.	正定型.	正定阵.
	$\geqslant 0$.	半正定型.	半正定阵.
	<0.	负定型.	负定阵
	$\leqslant 0$.	半负定型.	半负定阵.

$\exists \alpha \in \mathbb{R}^n$ $\alpha^TA\alpha > 0$
$\exists \beta \in \mathbb{R}^n$. $\beta^TA\beta < 0$. 则为不定型.

例:(1). $f = x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots x_n^2$ 正定型.

(2) $f = x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_r^2$. $r<n$. 半正定型.

(3) $f = -x_1^2 - \cdots\cdots -x_n^2$. 负定型.

定理2: 设实二次型 $f(x_1 \cdots x_n)$ 秩 r. 正负惯性指数 $p.q$.

(1) f 正定 $\Longleftrightarrow p = n$

(2) f 半正定 $\Longleftrightarrow p = r$. $r<n$

(3) f 负定 $\Longleftrightarrow q = n$.

(4) f 半负定 $\Leftrightarrow q = r$. $r<n$.

(5) f 不定 $\Leftrightarrow p>0.\ q>0$

定义2. f 有一规范标准型,

$$f=y_1^2+\cdots y_p^2-y_{p+1}^2\cdots\cdots-y_r^2$$

称 r 为二次型 f 秩, p 为 f 正惯性指数, $q=r-p$ 为负惯性指数.

$s=p-q$, 为符号差.

由 r, s, $\Longrightarrow p=\frac{1}{2}(r+s) \quad q=\frac{1}{2}(r-s)$.

$p, q \Longrightarrow r=p+q, \quad s=p-q$.

定理3. 秩和符号差(或正负惯性指数)为实二次型在合同关系下全系不变量

证明: 设实对称阵 A, B, 秩 $=r$. 符号差 $=s$.

$p=\frac{1}{2}(r+s) \quad q=\frac{1}{2}(r-s)$.

A 合同于 $diag\{\underbrace{1\cdots\cdots 1}_{p}, \underbrace{-1\cdots\cdots -1}_{q}, 0\cdots 0\}$

B 合同于 $diag\{1\cdots 1, -1\cdots -1, 0\cdots 0\}$.

$\Rightarrow A$ 合同于 B.

$$\begin{bmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

二, 复二次型, 复对称阵.

$f=X^TAX$. 非异 $C\in M_n(\mathbb{C})$. $C^TAC=diag\{d_1\cdots d_r, 0\cdots 0\}$. $d_i\neq 0$.

$f=d_1y_1^2+\cdots\cdots d_ry_r^2=(\sqrt{d_1}y_1)^2+\cdots (\sqrt{d_r}y_r)^2$.

$f=z_1^2+\cdots\cdots z_r^2$ 复数情况下全系不变量.

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

正定型与正定矩阵

定义1. 设 $f(x_1 \cdots x_n) = X^TAX$ 为实二次型.

	$\alpha^TA\alpha$	f	A.
$\forall 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}^n$	>0.	正定型.	正定阵.
	≥ 0.	半正定型.	半正定阵.
	<0.	负定型.	负定阵
	≤ 0.	半负定型.	半负定阵.

$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}^n$ $\quad \alpha^TA\alpha > 0$
$\exists\, \beta \in \mathbb{R}^n$. $\quad \beta^TA\beta < 0$. 则为不定型.

例:(1). $f = x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots x_n^2$ 正定型.

(2) $f = x_1^2 + x_2^2 + \cdots\ x_r^2$. $r<n$. 半正定型.

(3) $f = -x_1^2 - \cdots\cdots -x_n^2$. 负定型.

定理2: 设实二次型 $f(x_1 \cdots x_n)$ 秩 r. 正负惯性指数 $p.q$.

(1) f 正定 $\iff p = n$

(2) f 半正定 $\iff p = r.\quad r<n$

(3) f 负定 $\iff q = n$.

(4) f 半负定 $\iff q = r.\ r<n$.

(5) f 不定 $\iff p>0.\ q>0$

(1) ~(5) 证明类似.

(1). 充分性 $p=n$. 则∃非异线性变换 $x=Cy$.

使得 $f=y_1^2+\cdots\cdots y_n^2$

任取 $\alpha\neq0$. $\alpha=[a_1\cdots a_n]^T\in\mathbb{R}^n$.

则. $\beta=C^{-1}\alpha\neq0$ 为非0实列向量. $\beta=[b_1\cdots b_n]^T$

则 $f(a_1\cdots a_n)=b_1^2+\cdots b_n^2>0$.

则 f 正定

必要性: f 正定. $\Rightarrow p=n$.

反证: 设 $p<n$. ∃非异线性变换 $x=Cy$.

$f=y_1^2+\cdots y_p^2-y_{p+1}^2\cdots-y_r^2$ $(p\leqslant r)$.

令 $b_1=b_2\cdots b_p=0$. $b_{p+1}=\cdots b_n=1$.

从而: $\beta=[b_1\cdots\cdots b_n]^T$. 为非0实列向量.

故 $\alpha=C\beta\neq0$. $\alpha=[a_1\cdots a_n]^T$.

$f(a_1\cdots a_n)=b_1^2+b_2^2+\cdots b_p^2-b_{p+1}^2-\cdots b_r^2\leqslant0$.

这与 f 正定矛盾.

定理3. A 为实对称阵. A 秩为 r.

(1) A 正定阵 $\Leftrightarrow$ A 合同于 I_n.

(2) A 半正定 $\Leftrightarrow$ A 合同于 $\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}$

(3) A 负定 $\Leftrightarrow$ A 合同于 $-I_n$.

(4) A 半负定 $\Leftrightarrow$ A 合同于 $\begin{bmatrix}-I_r&0\\0&0\end{bmatrix}$

$f_1(A)$负定 $\Leftrightarrow -f_1(-A)$为正定。

$f_1(A)$半负定 $\Leftrightarrow -f_1(-A)$为半正定。

定义4：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则下列n个主子式：

$$|A_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad 1\le k\le n.$$

称为A的n个顺序主子式

定理5. 设A为n阶实对称阵，则A正定 $\Leftrightarrow$ A的n个顺序主子式 >0.

证明：必要性：设A正定，则 $f(x_1\cdots x_n)=X^TAX$ 为正二次型 $=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ 为正定型。

令 $f_k(x_1\cdots x_k) \overset{def}{=\!=} f(x_1\cdots x_k,0\cdots 0) = \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}x_ix_j \longleftrightarrow A_k$.

$\forall\, 0\ne(c_1\cdots c_k)^T\in\mathbb{R}^k$

$f_k(c_1\cdots c_k) = f(c_1\cdots c_k,0\cdots 0)$

注意到 $(c_1\cdots c_k,0\cdots 0)^T$ 为不为0非零列向量，由正定性 $f(c_1\cdots c_k,0\cdots 0)>0 \Rightarrow f_k(c_1\cdots c_k)>0$

$\Longleftrightarrow A_k$为正定阵 $(1\le k\le n)$.

由定理3.(1). $\exists\, B_k\in M_k(\mathbb{R})$. st. $B_k^TA_kB_k = \begin{bmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{bmatrix}_{k\times k}=I_k$.

$\Rightarrow 1=|I_k| = |B_k|^2|A_k|$ 由 $|B_k|^2>0 \Rightarrow |A_k|>0.\ \forall 1\le k\le n.$

充分性：设A的顺序主子式>0. 对n归纳. $n=1$时. $A=[a_{11}]$. $f=a_{11}x_1^2$. 由 $a_{11}>0$. 显然f正定 $\leftrightarrow$ A正定

设阶数<n成立，证n阶情型

$$A=\begin{bmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn}\end{bmatrix}_{n\times n}.$$

A_{n-1} 的 $n-1$ 个顺序主子式为 A 的顺序主子式，则由归纳，A_{n-1} 正定。

利用 A_{n-1}，对称消 α^T 与 α。　对称分块初等。

$$A=\begin{bmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ 0 & a_{nn}-\alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn}-\alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha \end{bmatrix}$$

上述变换为第三类对称分块初等变换。

$\Longrightarrow |A| = |A_{n-1}|\,|a_{nn}-\alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha|$.

由 $|A|>0$，$|A_{n-1}|>0$ $\Rightarrow$ $a_{nn}-\alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha>0$.

因为 $|A_{n-1}|$ 正定，则 $\exists\, C_{n-1}\in M_{n-1}(R)$，$C_{n-1}^T A_{n-1} C_{n-1} = I_{n-1}$.

$$\begin{bmatrix} C_{n-1}^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} C_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn}-\alpha^T A_{n-1}^{-1}\alpha \end{bmatrix}$$

则 A 正惯性指数 n，n 为正定。

例 $f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+3x_4^2+2t x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$，求 t 使 f 正定

$$A=\begin{bmatrix} 1 & t & -1 & 0 \\ t & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$|A_1|=1$　$|A_2|=\begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix}=4-t^2$　$|A_3|=-4(t-1)(t+2)$

$|A_4|=3|A_3|$.　令 $|A_i|>0$ $\Rightarrow$ $t\in(-2,1)$.

推论6. 设 A 为 n 阶正定阵.(则 A 一定实对称阵).

(1). A 的所有主子阵为正定阵

(2) A 的所有主子式 >0. 特别主对角元大于0.

(3). A 中元素绝对值最大值只在主对角线.

证明: (1) 取 $i_1\cdots i_k$ 行,列构成 B.

令. $f_B(x_{i_1}\cdots x_{i_k}) \triangleq f(0\cdots x_{i_1}\cdots 0\; x_{i_2}\cdots x_{i_k}\, 0\cdots 0)$.

由 f 正定性 $\Rightarrow$ f_B 正定 $\longleftrightarrow$ 相伴对称阵 B 正定.

(2) 为(1)推论

(3).的证明

设绝对值最大出现在 $|a_{ij}|$. $i<j$.

考虑 $A\begin{pmatrix} i & j \\ i & j\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj}\end{vmatrix} = a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2 \leq 0$. 矛盾于(2).

推论7. 设A为正定阵. 则A的特征值全大于0.

证明：设 $\xi = (a_1 \cdots a_n)^T \neq 0 \in \mathbb{C}^n$

则 $\bar{\xi}^T \xi > 0$. $= [\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_n]\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n}|a_i|^2 > 0$.

任取A特征值 λ. 特征向量 ξ.

因为A正定. $\Rightarrow \exists$ 非异 $C \in M_n(\mathbb{R})$. $A = C^T I_n C = C^T C$

由定义：$A\xi = \lambda_0 \xi$. $\bar{\xi}^T A \xi = \lambda_0 \bar{\xi}^T \xi \Rightarrow \bar{\xi}^T C^T C \xi = (\overline{C\xi})^T (C\xi)$.

$\xi \neq 0 \Rightarrow \bar{\xi}^T \xi > 0$. $C\xi \neq 0 \Rightarrow (\overline{C\xi})^T C\xi > 0$.

$\Rightarrow \lambda_0 = (\overline{C\xi})^T C\xi / \bar{\xi}^T \xi$. $\lambda_0 > 0$.

定理8. 设A为n阶实对称阵. 以下等价

(1) A正定

(2). A合同于 I_n

(3). $\exists$ 非异 $C \in M_n(\mathbb{R})$. $A = C^T C$

(4). A的所有主子式 >0

(5) A的顺序主子式 >0

(6). 全部特征值 >0.

定理8 证明:

(1) ⟺ (2). 定理3.

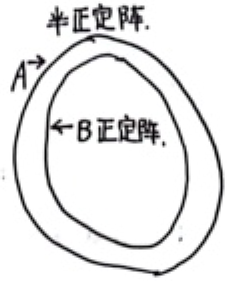
(2) ⟺ (3). 定义.

(1) ⟹ (4). 推论6.

(4) ⟹ (5). (5) ⟹ (1).

(1) ⟹ (6). 推论7.

(6) ⟹ (1). 为第九章内容.



C可异.

引理9. 设A为n阶实对称阵. A半正定 $\Longleftrightarrow \exists C\in M_n(\mathbb{R})$ $A=C^TC$ 特别 $|A|\geq 0$.

"⟹" 由定理3: A合同于 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $r=r(A)$

$\exists$ 非异 $B\in M_n(\mathbb{R})$. $A=B^T\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}B$.

令 $C=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}B$ 则 $A=C^TC$

"⟸" 设 $A=C^TC$ $\forall 0\neq\alpha\in\mathbb{R}^n$.

$\alpha^TA\alpha=\alpha^TC^TC\alpha=(C\alpha)^T(C\alpha)$. 设 $C\alpha=\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \overset{?}{=} 0$.

$=a_1^2+\cdots a_n^2\geq 0$.

引理10. 设A为n阶实对称阵. 则:

A半正定 $\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}^+$. $A+tI_n$ 为正定阵.

"⟹" $\forall 0\neq\alpha\in\mathbb{R}^n$. $\alpha^T(A+tI_n)\alpha=\alpha^TA\alpha+t\alpha^T\alpha>0$.

"⟸" $\forall 0\neq\alpha\in\mathbb{R}^n$. $\alpha^T(A+tI_n)\alpha=\alpha^TA\alpha+t\alpha^T\alpha>0$

令 $t\to 0^+$. $\alpha^TA\alpha\geq 0$. 极限保号性.

扫描全能王 创建

引理11. A为n阶实对称 则

A半正定 $\Leftrightarrow$ A的所有主子式大于等于0.

"$\Rightarrow$" $f(x_1 \cdots x_n) = x^TAX$. 半正定型.

取A的$i_1 \cdots i_r$行列构成B.

$f_A(0 \cdots 0 x_{i_1} 0 \cdots 0\ x_{i_r} 0 \cdots 0) \doteq f_B(x_{i_1} \cdots x_{i_r})$.

由 f 半正定 $\Rightarrow$ f_B半正定 $\Leftrightarrow$ B半正定 $\Rightarrow |B| \geq 0 \Rightarrow A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ i_1 & \cdots & i_r \end{pmatrix} \geq 0$

"$\Leftarrow$" $|A + tI_n| = t^n + c_1 t^{n-1} + \cdots c_{n-1}t + c_n$.

其中c_i为A的所有i阶主子式之和. $\Rightarrow c_i \geq 0$. $\forall 1 \leq i \leq n$.

$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+. |A + tI_n| > 0$.

设A_k为A的顺序主子阵. 则可得A_k所有主子式≥ 0. 重复上述.

$\Rightarrow |A_k + tI_k| > 0. \forall 1 \leq k \leq n. \forall t \in \mathbb{R}^+$.

$\Rightarrow A + tI_n$ 正定. $\forall t \in \mathbb{R}^+ \xRightarrow{\text{引理10}} A$半正定.

引理12. A为n阶实对称阵. A半正定 $\Leftrightarrow$ A的特征值≥ 0.

设A特征值$\lambda_1 \cdots \lambda_n$.

A半正定 $\xLeftrightarrow{\text{引理10}} A + tI_n$ 正定$(\forall t \in \mathbb{R}^+) \Longleftrightarrow \lambda_i + t > 0. \forall 1 \leq i \leq n. \forall t > 0. \Leftrightarrow \lambda_i \geq 0$.

定理13. A为n阶实对称阵. 下列等价

(1) A半正定

(2) A合同于 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(3). $\exists C \in M_n(\mathbb{R})$. $A = C^TC$

(4). A所有主子式大于等于0

(5) A 特征值大于等于0.

性质1. 设A半正定. $A=(a_{ij})_{n\times n}$. 若$a_{ii}=0$. 则A的第i行.第i列全为0.

证明: $\forall a_{ij}$. $i\neq j$. 所在二阶主子式 $\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} = -a_{ij}^2$

由 $-a_{ij}^2 \geq 0 \Rightarrow a_{ij}=0$. ($\forall j\neq i$ 成立). 同时$a_{ji}=0$.

性质2.

A正定 $\Leftrightarrow \forall 0\neq\alpha\in\mathbb{R}^n$. $\alpha^TA\alpha>0$.

A半正定 $\Leftrightarrow \forall 0\neq\alpha\in\mathbb{R}^n$. $\alpha^TA\alpha\geq 0$.

A半正定. $\alpha\in\mathbb{R}^n$. st. $\alpha^TA\alpha=0$. 则 $A\alpha=0$.

证明: $\exists C\in M_n(\mathbb{R})$. $A=C^TC$

$\Rightarrow 0=\alpha^TC^TC\alpha=(C\alpha)^T(C\alpha)$. $\Rightarrow C\alpha=0$.

则 $A\alpha=C^TC\alpha=C^T0=0$.

Hermite 型. :

9.1 内积空间概念

从$\mathbb{R}^3$空间引入:

点积性质. $\vec{u}.\vec{v}.\vec{w}\in\mathbb{R}^3, c\in R^1$

(1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

(2). $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

(3). $(c\vec{u})\vec{v}=c(\vec{u}\cdot\vec{v})$

(4). $\vec{u}\cdot\vec{u}\geq 0$. 等 $\Leftrightarrow \vec{u}=\vec{0}$

$\boxed{定义1.}$ V为实线性空间.若存在二元运算.

$$(-,-): V\times V \longrightarrow R$$
$$\alpha\times\beta \longmapsto (\alpha,\beta)$$

且满足如下: $\alpha,\beta,\gamma\in V.\ c\in R$

(1). 对称性: $(\beta,\alpha)=(\alpha,\beta)$;

(2). 第一变元线性 $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$;

(3). $(c\alpha,\beta) = c(\alpha,\beta)$;

(4) 正定 $(\alpha,\alpha)\geq 0$ 且等号成立 $\Leftrightarrow \alpha=0$.

则称$(-,-)$为V的一个内积. (α,β)称为α,β内积.

给定一个内积结构的线性空间为实内积空间

有限维实内积空间为Euclid空间.(欧氏空间)

$\boxed{定义2}$. V为复线性空间.若$\exists$二元运算.

$$(-,-)\ \ V\times V \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\alpha\times\beta \longmapsto (\alpha,\beta).$$

且满足如下. $\alpha,\beta,\gamma\in V\ \ c\in\mathbb{C}$.

(1).共轭对称性 $(\beta,\alpha)=\overline{(\alpha,\beta)}$

(2). 第一变元线性 $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

(3). $(c\alpha,\beta) = c(\alpha,\beta)$

(4) 正定性 $(\alpha,\alpha)\geq 0$ 等号成立 $\Leftrightarrow \alpha=0$.

则称$(-,-)$为V上内积. (α,β)称为α,β内积.

给定一个内积结构的复线性空间称为复内积空间

有限维复内积空间为酉空间

注：(1) 由共轭对称性 $(\alpha,\alpha)\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ (4) 定义有意义.

(2) 实：第二变元线性成立.

复：共轭线性(第二变元).

$(\gamma, c\alpha+d\beta) = \bar{c}(\gamma,\alpha)+\bar{d}(\gamma,\beta)$

$(\gamma, c\alpha+d\beta)=\overline{(c\alpha+d\beta,\gamma)} = \overline{c(\alpha,\gamma)} + \overline{d(\beta,\gamma)} = \bar{c}(\gamma,\alpha)+\bar{d}(\gamma,\beta)$.

例1. $V=\mathbb{R}^n$ $\alpha=(x_1,x_2\cdots x_n)^T$, $\beta=(y_1\cdots y_n)^T$.

$(\alpha,\beta):=\alpha^T\beta = x_1y_1+\cdots x_ny_n$. 称为 $\mathbb{R}^n$ 上标准内积.

$V=\mathbb{R}_n$. $\alpha=(x_1\cdots x_n)$ $\beta=(y_1\cdots y_n)$.

$(\alpha,\beta):=\alpha\cdot\bar{\beta}^T = x_1y_1+\cdots x_ny_n$. 称为 $\mathbb{R}_n$ 上标准内积

例2. $V=\mathbb{C}^n$

$(\alpha,\beta):=\alpha^T\bar{\beta} = x_1\bar{y_1}+\cdots x_n\bar{y_n}$

$(\beta,\alpha)=\beta^T\bar{\alpha}=\overline{(\alpha,\beta)}$

$(\alpha,\alpha)=|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots|x_n|^2\geqslant 0$. 称为 $\mathbb{C}^n$ 上标准内积

$V=\mathbb{C}_n$

$(\alpha,\beta):=\alpha\bar{\beta}^T = x_1\bar{y_1}+\cdots x_n\bar{y_n}$ 称为 $\mathbb{C}_n$ 上标准内积

例3. $V=\mathbb{R}^2$. $\alpha=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ $\beta=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$

$(\alpha,\beta)\xlongequal{def} x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2+4x_2y_2=(x_1-x_2)(y_1-y_2)+3x_2y_2$.

$(\alpha,\alpha)=(x_1-x_2)^2+3x_2^2\geqslant 0$. 等号 $\Leftrightarrow \alpha=0$. 不为标准内积.

例4. $V=\mathbb{R}^n$. G 为 n 阶正定实对称阵. $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$.

$(\alpha,\beta)\xlongequal{def}\alpha^TG\beta$.

(i) $(\beta,\alpha)=\beta^TG\alpha=(\beta^TG\alpha)^T=\alpha^TG^T\beta=\alpha^TG\beta=(\alpha,\beta)$.

(ii). $(\alpha,\beta)=\alpha^TG\beta$ 第一变量线性.

(iii). $(\alpha,\alpha)=\alpha^T G\alpha \geqslant 0$. 且等号成立. $\alpha=0$.

$\Rightarrow (\alpha,\beta)=\alpha^T G\beta$ 为内积.

例3为例4特例. 例3中 $(\alpha,\beta)=\alpha^T\begin{bmatrix}1&-1\\-1&4\end{bmatrix}\beta$

$V=\mathbb{R}_n$. $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_n$. $(\alpha,\beta)\xlongequal{def}\alpha G\beta^T$

例5. $V=\mathbb{C}^n$. H 为 n 阶 Hermite 阵(正定) $H=(\overline{H})^T$

$(\alpha,\beta)\xlongequal{def}\alpha^T H\overline{\beta}$

$\overline{(\alpha,\beta)}=\overline{\alpha}^T\overline{H}\beta.=(\overline{\alpha}^T\overline{H}\beta)^T=\beta^T\overline{H}^T\overline{\alpha}=\beta^T H\overline{\alpha}=(\beta,\alpha)$.

(ii). $\alpha^T H\overline{\beta}$ 线性.

(iii). $(\alpha,\alpha)=\alpha^T H\overline{\alpha}\xlongequal{\beta=\overline{\alpha}}\overline{\beta}^T H\beta\geqslant 0$.

$V=\mathbb{C}_n$. $(\alpha,\beta)\xlongequal{def}\alpha H\overline{\beta}^T$

例6: $V=C[a,b]$. $[a,b]$ 所有连续函数全体构成实线性空间. 无限维

$(f(t),g(t))\xlongequal{def}\int_a^b f(t)g(t)dt$.

$(f(t),f(t))=\int_a^b f^2(t)dt\geqslant 0$. $f(t)=0\Leftrightarrow$ "$=0$"

例7. $V=R[x]$. $f(x)=a_0+a_1x+\cdots a_nx^n$. $g(x)=b_0+b_1x+\cdots b_mx^m$. $(n\geqslant m)$

$(f(x),g(x))\xlongequal{def}a_0b_0+a_1b_1+\cdots a_nb_m$.

例8. $V=M_n(R)$. $A,B\in M_n(R)$.

$(A,B)\xlongequal{def}Tr(AB^T)$.

(i). $(B,A)=Tr(BA^T)=Tr(AB^T)=(A,B)$

(ii). 第一变量线性.

(iii) $(A,A)=Tr(AA^T).=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2\geqslant 0$. 且 "$=0$" $\Leftrightarrow A=0$.

$\boxed{定义3.}$ V为内积空间. $\alpha\in V$.

α的长度(范数) $\|\alpha\|:=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$

$d(\alpha,\beta):=\|\alpha-\beta\|$.

例: $V=\mathbb{R}^n$ 标准内积 $\alpha=[x_1\cdots x_n]^T$.

$\|\alpha\|=\sqrt{x_1^2+\cdots x_n^2}$

例: $V=\mathbb{C}^n$. 标准内积

$\|\alpha\|=\sqrt{|x_1|^2+\cdots |x_n|^2}$

性质 (1). 非负性. $\|\alpha\|\geqslant 0$ 且"$=0$"$\Leftrightarrow\alpha=0$.

(2). $d(\alpha,\beta)=d(\beta,\alpha)$.

$\boxed{定理4.}$ V为内积空间. $\alpha,\beta\in V$. C常.

(1) 范数齐次性 $\|C\cdot\alpha\|=|C|\|\alpha\|$

(2). Caudy-Schwazg $|(\alpha,\beta)|\leqslant\|\alpha\|\|\beta\|$.

且等号成立 $\Longleftrightarrow$ α,β 线性相关

(3) 三角: $\|\alpha+\beta\|\leqslant\|\alpha\|+\|\beta\|$.

证明: $\|C\alpha\|^2=(C\alpha,C\alpha)=C\overline{C}(\alpha,\alpha)=|C|^2\|\alpha\|^2$

取算术平方根: $\|C\alpha\|=|C|\|\alpha\|$.

(2). $(0,\beta)=(0+0,\beta)=(0,\beta)+(0,\beta)\Rightarrow(0,\beta)=0$

(i). $\alpha=0$. $(\alpha,\beta)=(0,\beta)=0$. $\|\alpha\|\|\beta\|=0$.

(ii). $\alpha\neq 0$. $\gamma=\beta-\frac{(\beta,\alpha)}{\|\alpha\|}\alpha$. $(\gamma,\alpha)=(\beta,\alpha)-\frac{(\beta,\alpha)}{\|\alpha\|}(\alpha,\alpha)=0$

计算: $\|\gamma\|^2=(\gamma,\gamma)=(\gamma,\beta-\frac{(\beta,\alpha)}{\|\alpha\|}\alpha)=(\gamma,\beta)-\overline{\frac{(\beta,\alpha)}{\|\alpha\|}}(\gamma,\alpha)=(\beta-\frac{(\beta,\alpha)}{\|\alpha\|}\alpha,\beta)$

$= (\beta,\beta) - \frac{(\beta,\alpha)}{\|\alpha\|^2}(\alpha,\beta).$

$\Rightarrow 0 \leqslant \|\gamma\|^2 = (\beta,\beta) - \frac{|(\alpha,\beta)|^2}{\|\alpha\|} \Rightarrow |(\alpha,\beta)| \leqslant \|\alpha\|\|\beta\|.$

等号成立 $\|\gamma\|=0 \leftrightarrow \gamma=0 \leftrightarrow$. β,α 线性相关.

3). $\|\alpha+\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + 2\mathrm{Re}(\alpha,\beta).$

$|\mathrm{Re}(\alpha,\beta)| \leqslant |(\alpha,\beta)| \leqslant \|\alpha\|\|\beta\|$

$\Rightarrow \|\alpha+\beta\|^2 \leqslant \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + 2\|\alpha\|\|\beta\|.$

$\Rightarrow \|\alpha+\beta\| \leqslant \|\alpha\| + \|\beta\|.$

例: $V=\mathbb{R}^n$. 标准内积.

$(x_1y_1 + \cdots\cdots x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2 + \cdots\cdots x_n^2)(y_1^2 + \cdots\cdots y_n^2).$

$V = C[a,b]$. 积分内积

$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)dt \int_a^b g^2(t)dt$

$\boxed{\text{定义5}}$ 设 $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$. $\in V$. α,β 夹角 θ 为

(i) 实内积: $\cos\theta = \frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}$. $\theta \in [0,\pi]$.

(ii) 复内积: $\cos\theta = \frac{|(\alpha,\beta)|}{\|\alpha\|\|\beta\|} \longrightarrow$ 模长. $\theta \in [0,\frac{\pi}{2}]$.

$\boxed{定义6}$ 若$(\alpha,\beta)=0$，则称α,β正交或垂直，记为$\alpha\perp\beta$.

$(\alpha,0)=0$. $(0,\beta)=0$. $0\perp\alpha$.

若$\alpha\neq0$, $\beta\neq0$, 且$\alpha\perp\beta$ $\Rightarrow$ 夹角$\theta=\frac{\pi}{2}$

$\boxed{定理7}$（勾股定理）. $\alpha\perp\beta$, 则 $\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$.

证明 $\|\alpha+\beta\|^2=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$.

9.2 内积的表示与正交基.

设V为n维内积空间. $\{e_1\cdots\cdots e_n\}$为一组V的基

令$g_{ij}=(e_i,e_j)$. $G=(g_{ij})_{n\times n}$.

取 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i \longleftrightarrow x=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}$

$\beta=\sum_{i=1}^{n}b_ie_i \longleftrightarrow y=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$

问$(\alpha,\beta)=?$

Case 1. V为欧氏空间.

$$(\alpha,\beta)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ie_i,\sum_{i=1}^{n}b_ie_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j(e_i,e_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_jg_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_ig_{ij}\right)b_j$$

$$=[a_1\cdots a_n]G\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ $(\alpha,\beta)=x^TGy$

G称为V^n关于$(e_1\cdots e_n)$的度量阵.(Gram阵).

$$(\alpha,\beta)=x^TGy.$$

$g_{ij}=(e_i,e_j)=g_{ji}.\Longrightarrow$ G为实对称阵.

$(\alpha,\alpha)=x^TGx>0.\ \forall 0\neq x\in\mathbb{R}^n.$ 内积正定性.

$\Rightarrow$ G为正定阵.

反之. V为实线性空间 $\{e_1\cdots e_n\}$为基. G为n阶正定实对称阵.

$\forall\alpha\longleftrightarrow x.\quad \beta\longleftrightarrow y.$

定义 $(\alpha,\beta)\overset{def}{=}x^TGy$ 可验证为内积

设V为实~~酉空间~~线性空间. $\{e_1\cdots e_n\}$为基.

$\{V上所有内积结构\}\xrightarrow{1:1对应}\{n阶正定实对称阵\}.$

$\phi:\quad (-,-)\longmapsto G=((e_i,e_j))_{n\times n}.$

$\psi:(\alpha,\beta)_G=x^TGy\longleftarrow G.$

Case 2. V为酉空间.

$$(\alpha,\beta)=(\sum_{i=1}^n a_ie_i.\sum_{j=1}^n b_je_j)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_i\overline{b_j}(e_i,e_j)=x^TG\overline{y}.$$

$\overline{g_{ij}}=\overline{(e_i,e_j)}=(e_j,e_i)=g_{ji}.$ 即 $G^T=\overline{G}$ 即 $\overline{G}^T=G.$ G为Hermite阵.

$(\alpha,\alpha)=x^TG\overline{x}>0,\ \forall 0\neq x\in\mathbb{C}^n.\ y=\overline{x}$

$=\overline{y}^TGy>0\Rightarrow$ G为Hermite阵.正定

反之. G为n阶正定Hermite阵.

$$(\alpha,\beta)_G\overset{def}{=}x^TG\overline{y}$$

设V为n维复线性空间. $\{e_1 \cdots e_n\}$.

$$\{V\text{上内积}\} \xleftrightarrow{1:1} \{n\text{阶正定 Hermite}\}.$$

$$(-,-) \longmapsto G=((e_i,e_j))_{n\times n}.$$

$$(\alpha,\beta)_G = X^T G \overline{Y} \longleftarrow G.$$

问题. 是否存在 $\{e_1 \cdots e_n\}$ 对应 Gram 阵为 I_n?

$$\Leftrightarrow (e_i,e_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

$\boxed{\text{定义1.}}$ 设V为内积空间. $\{e_1 \cdots e_n\}$ 为基.

若 $\forall i\neq j$. $(e_i,e_j)=0$. 则称基为正交基.

进一步. $(e_i,e_i)=1$. 即 $\|e_i\|=1$. 则称为标准正交基.

例1: $V=\mathbb{R}^n$. 标准内积. $e_i=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$. 为标准正交基

例2: $V=M_n(\mathbb{R})$. Frobenius 内积 ($\mathrm{tr}A$).

基础矩阵 $\{E_{ij},\ 1\leq i,j\leq n\}$. 为标准正交基

$$(E_{ij},E_{kl}) = \mathrm{Tr}(E_{ij}E_{kl}^T) = \mathrm{Tr}(E_{ij}E_{lk}) = \mathrm{Tr}(\delta_{jl}E_{ik}) = \delta_{jl}\,\mathrm{Tr}(E_{ik}) = \delta_{jl}\delta_{ik}.\ \text{标准正交基}$$

$$=\begin{cases}1 & (i,j)=(k,l)\ \text{数对}\\ 0 & (i,j)\neq(k,l)\end{cases}$$

$\boxed{\text{引理2}}$ 两两正交非0向量线性无关.

证明: 设 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$. 两两正交, 非0.

$$C_1\alpha_1 \cdots\cdots + C_m\alpha_m = 0.$$

$$0=\left(\sum_{i=1}^m C_i\alpha_i,\alpha_j\right) = C_j(\alpha_j,\alpha_j) \Rightarrow C_j=0.\ \forall 1\leq j\leq m. \Rightarrow \text{线性无关}$$

推论3 n维内积空间两两正交非0向量至多n个.

证明: 由引理2得.

引理4 设β与$\alpha_1 \cdots \alpha_m$都正交, 则β与$L(\alpha_1 \cdots \alpha_m)$也正交.

即 $\forall \gamma \in L(\alpha_1 \cdots \alpha_m)$, $(\beta, \gamma) = 0$.

证明: $\gamma = c_1\alpha_1 + \cdots c_m\alpha_m$.

$$(\gamma, \beta) = \left(\sum_{i=1}^{m} c_i\alpha_i, \beta\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i(\alpha_i, \beta) = 0.$$

定理5 (Gram-Schmit正交)

设$u_1 \cdots\cdots u_m$为V中线性无关向量, 则$\exists$两两正交非0向量$v_1 \cdots v_m$

$L(u_1 \cdots u_m) = L(v_1 \cdots v_m)$.

证明: 对m归纳. $m=1$. 取$v_1 = u_1$

设$m=k$成立, 证明$k+1$. 即$\{u_1 \cdots u_k\} \to \{v_1 \cdots v_k\}$, 两两正交. $L(u_1 \cdots u_k) = L(v_1 \cdots v_k)$

令 $v_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{(u_{k+1}, v_i)}{(v_i, v_i)} v_i$.

先证 $v_{k+1} \neq 0$. 若 $v_{k+1} = 0$. $\Rightarrow$ $u_{k+1} \in L(v_1 \cdots v_k) = L(u_1 \cdots u_k)$.

这与$u_1 \cdots u_k\ u_{k+1}$线性无关矛盾.

$\forall 1 \leq j \leq k$, $(v_{k+1}, v_j) = (u_{k+1}, v_j) - \sum_{i=1}^{k} \frac{(u_{k+1}, v_i)}{\|v_i\|^2}(v_i, v_j)$.

$$= (u_{k+1}, v_j) - (u_{k+1}, v_j) = 0.$$

$L(u_1 \cdots u_{k+1}) = L(u_1 \cdots u_k) + L(u_{k+1}) = L(v_1 \cdots v_k) + L(u_{k+1}) \subseteq L(v_1 \cdots v_{k+1})$.

$L(v_1 \cdots v_{k+1}) = L(v_1 \cdots v_k) + L(v_{k+1}) \subseteq L(v_1 \cdots v_k) + L(u_{k+1}) = L(u_1 \cdots u_{k+1})$.

正交基.

注: (1) $U = L(u_1 \cdots u_m) = L(v_1 \cdots v_m)$.

过渡阵. $[u_1 \cdots u_m] = [v_1 \cdots v_m]B$.

$$u_{k+1} = v_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \frac{(v_{k+1}, v_i)}{\|v_i\|^2} v_i \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & * & * & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & * & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

单位化. $v \neq 0 \rightarrow \frac{v}{\|v\|}$ $\quad \left\|\frac{v}{\|v\|}\right\| = \frac{\|v\|}{\|v\|} = 1$.

令 $w_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$, $i \in [1, n]$, $i \in Z^+ \Rightarrow \{w_1 \cdots w_m\}$ 为 U 标准正交基.

$$[v_1 \cdots v_m] = [w_1 \cdots w_m] \begin{bmatrix} \|v_1\| & & \\ & \ddots & \\ & & \|v_m\| \end{bmatrix} = [w_1 \cdots w_m]\Lambda$$

$$\Rightarrow [u_1 \cdots u_m] = [w_1 \cdots w_m]\Lambda B = [w_1 \cdots w_m] \begin{bmatrix} \|v_1\| & & * \\ & \ddots & \\ & & \|v_m\| \end{bmatrix}$$

定理6. 任一有限维内积空间必存在标准正交基

证明: 基 $\{u_1 \cdots u_n\} \xrightarrow{\text{Schmit}} \{v_1 \cdots v_m\} \xrightarrow{\text{单位化}} \{w_1 \cdots w_m\}$.

例 $V = R_3$. 标准内积 $u_1 = [3, 0, 4]$, $u_2 = [-1, 0, 7]$, $u_3 = [2, 9, 11]$.

求标准正交基.

令 $v_1 = u_1 = [3, 0, 4]$ $\qquad w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$

$v_2 = u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{\|v_1\|^2} v_1$ $\qquad w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$

$v_3 = u_3 - \frac{(u_3, v_2)}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{(u_3, v_1)}{\|v_1\|^2} v_1$. $\qquad w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$

引理7. V为内积空间. $\{e_1 \cdots e_n\}$ $\{f_1 \cdots f_n\}$. 过渡 C: $[f_1 \cdots f_n] = [e_1 \cdots e_n]C$

则实 $G[f_1 \cdots f_n] = C^T G[e_1 \cdots e_n] C$.

复 $G[f_1 \cdots f_n] = C^T G[e_1 \cdots e_n] \overline{C}$

证明：设 $C = (c_{ij})_{n \times n}$.

实：$[f_1 \cdots f_n] = [e_1 \cdots e_n] C$

$f_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} e_i$. $f_l = \sum_{j=1}^{n} g_{lj} e_j$.

$(f_i, f_l) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ik} g_{lj} (e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ik} g_{lj} g_{ij} = C^T G(e_1 \cdots e_n) C$

基 $\{e_1 \cdots e_n\}$. G 为正定实对称. $\exists$ 非异 C. $C^T G C = I_n$.

令 $[f_1 \cdots f_n] = [e_1 \cdots e_n] C$

由引理7. $G[f_1 \cdots f_n] = C^T G C = I_n$. $f_1 \cdots f_n$ 为标准正交基.

9.2 内积的表示与正交基

V 内积空间 $\{e_1 \cdots e_n\}$ 为标准正交基.

$\alpha \leftrightarrow x$. $\beta \leftrightarrow y$. $G = G(e_1 \cdots e_n) = I_n$.

$(\alpha, \beta) = x^T G y = x^T y$.

定义7. U 为内积空间 V 子空间.

$U^{\perp} = \{v \in V \mid (v, U) = 0\}$. 易证. $U^{\perp}$ 为 V 的子空间（正交补空间）.

定理8. 设 V 为 n 维内积空间. U 为子空间. 则

(1) $V = U \oplus U^{\perp}$.

(2) U 的标准正交基可扩为 V 的标准正交基.

证明：设 $\dim U = m$.

将 V 上内积限制在 U 上，易证 U 为 m 维内积空间.

从而 U 上存在标准正交基 $\{e_1 \cdots\cdots e_m\}$.

任取 $v \in V$.

令 $w = v - (v,e_1)e_1 - (v,e_2)e_2 \cdots\cdots - (v,e_m)e_m$.

则 $(w, e_i) = 0$. $1 \le i \le m$. 则 $(w, U) = 0$.

即 $w \in U^\perp$. $v = \sum_{i=1}^{m}(v,e_i)e_i + w \in U + U^\perp$.

任取 $v \in U \cap U^\perp$. 证 $v = 0$.

$\overset{U.\ U^\perp}{(v,v)} = 0$. 由正定性 $v=0 \Rightarrow U \cap U^\perp = 0 \Rightarrow V = U \oplus U^\perp$

(2) 取 $U^\perp$ 一组标准正交基 $\{e_{m+1} \cdots e_n\}$.

$\Longrightarrow \{e_1 \cdots\cdots e_n\}$ 为 V 标准正交基

定义9. V 为内积空间. $V_1 \cdots V_m$ 子空间.

若 $\forall \alpha \in V_i$. $\beta \in V_j$. $(\alpha,\beta) = 0 \Rightarrow$ 则称 V_i 与 V_j 正交.

此时若 $V = V_1 + \cdots\cdots V_m$. 且 V_i 两两正交, 则称为正交和.

例: $V = U \oplus U^\perp = U + U^\perp$.

引理10. 正交和为直和, 称为正交直和

证明: V_i 与 $(\sum_{j \ne i} V_j)$ 正交. $V_i \in V_i$. $(V_i, \sum_{j\ne i} V_j) = \sum_{j \ne i}(V_i, V_j) = 0$.

任取 $\alpha \in V_i \cap (\sum_{j\ne i} V_j)$.

$\overset{V_i\ \ \sum V_j}{(\alpha,\alpha)} = 0 \overset{正定}{\Rightarrow} \alpha = 0$. 由任意. $V_i \cap \sum_{j \ne i} V_j = 0$. $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ 为直和.

定义11. $V=V_1\oplus V_2\cdots\cdots\oplus V_m$. 直和.

$\forall v\in V$ $\quad v=v_1+v_2+\cdots\cdots v_m$ 分解唯一.

构造 $E_i\in L(V)$. $E_i(v)=v_i$. 称为V到V_i的投影变换.

性质(1) $E_i^2=E_i$. $(1\leq i\leq n)$.

(2) $E_iE_j=0$. $\forall i\neq j$.

(3). $E_1+\cdots\cdots E_m=I_V$.

进一步. 设 $V=V_1\perp V_2\cdots\cdots\perp V_m$. 正交直和.

投影 E_i. 称为 $V\longrightarrow V_i$ 正交投影变换.

引理12. 设V为内积空间. $V=U\perp U^{\perp}$. 记E为 $V\rightarrow U$ 上正交投影变换. $\forall\alpha,\beta\in V$

$(E(\alpha),\beta)=(\alpha,E(\beta))$.

证明: $\alpha=u_1+w_1$. $\beta=u_2+w_2$. $u_1,u_2\in U$. $w_1,w_2\in U^{\perp}$

$E(\alpha)=u_1$. $E(\beta)=u_2$.

$(E(\alpha),\beta)=(u_1,u_2+w_2)=(u_1,u_2)$.

$(\alpha,E(\beta))=(u_1,u_2)$.

定理3 (Bessel不等式)

设V为内积空间. $\{v_1\cdots\cdots v_m\}$ 两两正交非零. $\forall y\in V$. 有.

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{|(y,v_i)|^2}{\|v_i\|^2}\leq\|y\|^2.$$

证明: $\{v_1\cdots\cdots v_m\}$. 两两正交. $y\in V$. $\qquad x=\sum_{i=1}^{m}\frac{(y,v_i)}{\|v_i\|^2}v_i$.

$Z=y-\sum_{i=1}^{m}\frac{(y,v_i)}{\|v_i\|^2}v_i$. $\quad (z,v_i)=0$. $1\leq i\leq m$. $\Rightarrow$ $(z,x)=0$.

$y=x+z$. $x\perp z$. 由勾股定理. $\|y\|^2=\|x\|^2+\|z\|^2$.

$\|y\| = \|x\|+\|z\| \geq \|x\|$

再次用勾股定理 $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{|(y,v_i)|^2}{\|v_i\|^2}$.

$$\Rightarrow \|y\| \geq \sum_{i=1}^{m} \frac{|(y,v_i)|^2}{\|v_i\|^2}.$$

等号成立. y 为 v_i 线性组合.

等号成立 $\Leftrightarrow z=0 \Leftrightarrow y$ 为 v_i 线性组合.

$\{v_1 \cdots\cdots v_m \cdots\cdots\}$ 一列两两正交向量.

$\sum_{i=1}^{m} \frac{|(y,v_i)|^2}{\|v_i\|^2} \leq \|y\|^2$. 当 m 无穷. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|(y,v_i)|^2}{\|v_i\|^2} \leq \|y\|^2$.

9.3. 伴随:

线性变换称为线性算子.

设 V 为 n 维酉空间.(欧氏). $\{e_1 \cdots e_n\}$ 标准正交基 $\phi \in \mathcal{L}(V)$. 线性算子.

$V \ni \alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \longleftrightarrow x = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ $\beta \longleftrightarrow y = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

$\phi \xleftrightarrow{\text{表示阵}} A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$. $\phi(\alpha) \leftrightarrow Ax$.

$(\phi(\alpha),\beta) = (Ax)^T \overline{y} = x^T A^T \overline{y} = x^T \overline{(\overline{A}^T y)}$

定义: $\psi \in \mathcal{L}(V)$. $\xleftrightarrow{\text{表示阵}}$ $\overline{A}^T$ $\psi(\beta) \longleftrightarrow$ 坐标 $\overline{A}^T y$.

$(\alpha,\psi(\beta))=x^T(\overline{\bar{A}^T y}) \Rightarrow (\phi(\alpha),\beta)=(\alpha,\psi(\beta)),\ \forall\alpha,\beta\in V$

V为欧氏空间：$\exists!\psi \xleftrightarrow{\text{表示阵}} A^T$

定义1. ϕ为内积空间V上线性算子，若∃线性算子ϕ^*，$\forall\alpha,\beta\in V$，

$(\phi(\alpha),\beta)=(\alpha,\phi^*(\beta))$ 则ϕ^*为ϕ伴随算子

定理2.(1)伴随算子若存在，一定唯一.

(2).有限维内积空间上任意线性算子必存在伴随算子.

证(1). ϕ^*.$\phi^\#$为ϕ伴随.

$(\phi(\alpha),\beta)=(\alpha,\phi^*(\beta))=(\alpha,\phi^\#(\beta))$.

$\Rightarrow (\alpha,\phi^*(\beta)-\phi^\#(\beta))=0,\ \forall\alpha\in V$. 令$\alpha=\phi^*(\beta)-\phi^\#(\beta)$.

则$\|\phi^*(\beta)-\phi^\#(\beta)\|=0$. 再由正定性，$\phi^*(\beta)=\phi^\#(\beta)$. $\forall\beta\in V$.

则$\phi^*=\phi^\#$

(2). 由伴随唯一性及构造，知有限维空间伴随存在

可知$\psi=\phi^*$. 结论成立.

$\phi\in\mathcal{L}(V) \longleftrightarrow A$.

$\begin{cases} 酉.\ \phi^*\longleftrightarrow \bar{A}^T \\ 欧\ \ \phi^*\longleftrightarrow A^T \end{cases}$

定理3. V为n维内积空间. $\{e_1\cdots e_n\}$为标准正交基. $\phi\in\mathcal{L}(V)$表示为A.

则ϕ的伴随ϕ^*在同一标准正交基下阵. 酉：$\bar{A}^T$ 欧：A^T.

定理4. V为内积空间. $\phi,\psi\in\mathcal{L}(V)$.且$\phi^*$.$\psi^*$存在. $C\in\mathbb{R}$.则.

(1) $(\phi+\psi)^*=\phi^*+\psi^*$　　(3) $(\phi\psi)^*=\psi^*\phi^*$　　(5) 若ϕ可逆，ϕ^*可逆

(2) $(C\phi)^*=\bar{C}\phi^*$　　(4) $(\phi^*)^*=\phi$　　$(\phi^{-1})^*=(\phi^*)^{-1}$

证明：V为有限维内积空间，标准正交基 $\{e_1 \cdots e_n\}$.

$\phi \longleftrightarrow A$. $\psi \longleftrightarrow B$.

$(\phi+\psi)^* = \phi^*+\psi^*$. $\overline{(A+B)}^T = \overline{A}^T + \overline{B}^T$

$\overline{CA}^T = \overline{C}\,\overline{A}^T$

同理：$\overline{AB}^T = \overline{B}^T\overline{A}^T$.

$\overline{(\overline{A}^T)}^T = A$.

无限维用定义证.

$(\phi\psi(\alpha), \beta) = (\psi(\alpha), \phi^*(\beta)) = (\alpha, \psi^*\phi^*(\beta)) \Rightarrow (\phi\psi)^* = \psi^*\phi^*$

$(\phi^*(\alpha), \beta) = (\alpha, \phi(\beta))$. $\Rightarrow \phi = (\phi^*)^*$.

命题5. 设V为有限维内积空间. $\phi \in \mathcal{L}(V)$.

(1). 若 U为ϕ-不变子空间，$U^\perp$为 ϕ^*不变子空间.

(2). 若ϕ全体特征值 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$. $\phi^* \cdots \overline{\lambda_1} \cdots \overline{\lambda_n}$.

(1)

证明：$\forall u \in U$. $w \in U^\perp$

$(\phi(u), w) = (u, \phi^*(w))$.

由左=0. 则右=0. $\Rightarrow \phi^*(w) \in U^\perp$. $w \in U^\perp$

(2) 标准正交基 $\{e_1 \cdots e_n\}$. $\phi \leftrightarrow A$. $\phi^* \longleftrightarrow \overline{A}^T$

$|\lambda I - A| = (\lambda-\lambda_1) \cdots (\lambda-\lambda_n)$.

$|\lambda I_n - \overline{A}^T| = |\lambda I_n - \overline{A}|$. 令 $\lambda = \overline{\mu}$.

$= \overline{|\mu I_n - A|} = \overline{(\mu-\lambda_1) \cdots (\mu-\lambda_n)} = (\overline{\mu}-\overline{\lambda_1}) \cdots (\overline{\mu}-\overline{\lambda_n})$.

$= (\lambda-\overline{\lambda_1}) \cdots (\lambda-\overline{\lambda_n})$.

例: $V = U \perp U^{\perp}$, E为$\cancel{U}$ V到U正交投影

$$(E(\alpha), \beta) = (\alpha, E(\beta)).$$

$\Rightarrow E^* = E$. (自伴随算子).

例2. $V = M_n(\mathbb{R})$. Frobenius.

$\phi \in \mathcal{L}(V)$. $\phi(A) = PAQ$. $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$.

$(\phi(A), B) = \mathrm{Tr}(\phi(A)B^T) = \mathrm{Tr}(PAQB^T)$. 由 $\cancel{\text{}}$ $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

$= \mathrm{Tr}(AQB^TP) = \mathrm{Tr}(A, (P^TBQ^T)^T)$.

$(\phi(A), B) = (A, \phi^*(B))$

$\Rightarrow \phi^*(B) = P^TBQ^T$.

§4 内积空间的同构, 正交变换与酉变换.

设V为n维欧氏空间. $\{e_1 \cdots e_n\}$标准正交基.

线性同构: $\phi: V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (标准内积).

$$\alpha = \sum a_i e_i \longmapsto x = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i \longmapsto y = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$(\phi(\alpha), \phi(\beta)) = (x, y)_{\mathbb{R}^n} = x^Ty$.

$(\alpha, \beta) = x^TGy = x^Ty$.

则ϕ不仅同构, 且 $(\phi(\alpha), \phi(\beta))_{\mathbb{R}^n} = (\alpha, \beta)_V$. $\forall \alpha, \beta \in V$. 保持内积.

V为n维酉空间. $\{e_1 \cdots e_n\}$.

$\phi: V \longrightarrow \mathbb{C}^n$ (标准内积).

$(\phi(\alpha), \phi(\beta))_{\mathbb{C}^n} = (\alpha, \beta)_V \quad \forall \alpha, \beta \in V$

定义1. 设V, U同为实内积(复内积)空间, $\phi: V \to U$ 线性映射.

若 $\forall \alpha, \beta \in V$. $(\phi(\alpha), \phi(\beta))_U = (\alpha, \beta)_V$

则称该ϕ为保持内积的线性映射. 若进一步.

ϕ为线性同构, 则ϕ为保积同构。

注: (1). 内积空间的保积同构为等价关系.

(2). 保积线性映射为单射.

任取$\alpha \in \ker\phi$. 即$\phi(\alpha)=0$.

$(\alpha, \alpha) = (\phi(\alpha), \phi(\alpha)) = 0$ 由正定. $\alpha = 0$. 则ϕ单射.

例: $\phi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. (标准)

$[a, b]^T \longmapsto [a, b, 0]^T$. 不满

保积 $\Longrightarrow$ 保范. $\Rightarrow$ 保矩.

令$\alpha=\beta$. $\|\phi(\alpha)\|^2 = (\phi(\alpha), \phi(\alpha)) = (\alpha, \alpha) = \|\alpha\|^2$

$\Longrightarrow \|\phi(\alpha)\| = \|\alpha\|$. $\forall \alpha \in V$.

命题2. $\phi: V \longrightarrow U$ 为线性映射. 若ϕ保范 则 ϕ保积

证明: $\|\alpha+\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + (\alpha, \beta) + (\beta, \alpha)$.

$\|\alpha-\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 - (\alpha, \beta) - (\beta, \alpha)$.

若V为欧氏空间. $(\alpha, \beta) = \frac{1}{4}\|\alpha+\beta\|^2 - \frac{1}{4}\|\alpha-\beta\|^2$.

$$(\phi(\alpha), \phi(\beta)) = \frac{1}{4}\|\phi(\alpha+\beta)\|^2 - \frac{1}{4}\|\phi(\alpha-\beta)\|^2$$
$$= \frac{1}{4}\|(\alpha+\beta)\|^2 - \frac{1}{4}\|\alpha-\beta\|^2$$

$\Rightarrow (\phi(\alpha), \phi(\beta)) = (\alpha, \beta)$.

若V为酉空间 $\|\alpha+\beta\|^2 - \|\alpha-\beta\|^2 = 2(\alpha, \beta) + 2(\beta, \alpha)$. (1)

$\|\alpha+i\beta\|^2 - \|\alpha-i\beta\|^2 = -2i(\alpha, \beta) + 2i(\beta, \alpha)$. (2)

(1) + (2)i.

$\Longrightarrow (\alpha, \beta) = \frac{1}{4}\|\alpha+\beta\|^2 - \frac{1}{4}\|\alpha-\beta\|^2 + \frac{i}{4}\|\alpha+i\beta\|^2 - \frac{i}{4}\|\alpha-i\beta\|^2$.

定理3. $\phi: V^n \longrightarrow U^n$ 是n维实(复)内积空间线性映射. 下列等价:

(i) ϕ 保持内积. (ii). ϕ 为保积同构 (iii) ϕ 将V任一组标准正交基映为U标准正交基.

(iv). ϕ 将V某一组标准正交基映为U标准正交基.

证明: (i) $\Rightarrow$ (ii). ϕ 保持内积. $\Rightarrow \ker\phi = 0$. $\dim\phi = \dim V \Rightarrow \dim \mathrm{Im}\phi = \dim U$. $\mathrm{Im}\phi = U$.

于是 ϕ 为满射. $\phi: V \to U$ 为线性同构. (ii)得证

(ii) $\Rightarrow$ (iii).

任取V标准正交基 $\{e_1 \cdots e_n\}$.

$$(\phi(e_i), \phi(e_j)) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}. \quad \forall i, j.$$

从而 $\{\phi(e_1) \cdots \phi(e_n)\}$ 为U标准正交基.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) 显然

(iv) $\Rightarrow$ (i). 设 $\{e_1 \cdots e_n\}$ 为V标准正交基. $\{\phi(e_1) \cdots \phi(e_n)\}$ 为U标准正交基.

$$\alpha = \sum a_i e_i \longleftrightarrow x. \quad \beta = \sum b_i e_i \longleftrightarrow y.$$

$$\phi(\alpha) = \sum a_i \phi(e_i). \quad \phi(\beta) = \sum b_i \phi(e_i).$$

$$(\phi(\alpha), \phi(\beta)) = \sum a_i \overline{b_i} \quad (\alpha, \beta) = \sum a_i \overline{b_i}.$$

则 $(\phi(\alpha), \phi(\beta)) = (\alpha, \beta)$.

推论4: V, U同为有限维实(复)内积空间. 则 $\exists$ 保积同构 $\phi: U \to V \Leftrightarrow \dim V = \dim U$.

"$\Rightarrow$" 显然. 线性同构 $\Rightarrow$ 维数等

"$\Leftarrow$" $\dim V = \dim U = n$.

取V标 $\{e_1 \cdots e_n\}$. U标 $\{f_1 \cdots f_n\}$.

定义 $\phi: V \to U$. 扩张为 $\phi \in \mathcal{L}(V, U)$.
$e_i \mapsto f_i$

定理(3). (iv) $\Rightarrow$ ϕ 保积同构.

定义5. 设ϕ为内积空间V上线性算子.

若ϕ保持内积，则称ϕ为 $\begin{cases} \text{正交算子.} & \text{欧氏空间.} \\ \text{酉算子.} & \text{酉空间.} \end{cases}$

由定理3. $\Longrightarrow$ ϕ为可逆算子.

定理6. 设ϕ为内积空间上线性算子，

则ϕ为正交算子(酉算子) $\Longleftrightarrow$ ϕ可逆，$\phi^*=\phi^{-1}$.

证明：

"$\Longrightarrow$" $\forall \alpha,\beta\in V$. $(\phi(\alpha),\beta)=(\phi(\alpha),\phi(\phi^{-1}(\beta)))=(\alpha,\phi^{-1}(\beta))$

由伴随定义. $\therefore \phi^*=\phi^{-1}$.

"$\Longleftarrow$" $\forall \alpha,\beta\in V$. $(\phi(\alpha),\phi(\beta))=(\alpha,\phi^*\phi(\beta))=(\alpha,\phi^{-1}\phi(\beta))=(\alpha,\beta)$

定义7. $A\in M_n(\mathbb{R})$. 若$A^T=A^{-1}$. 则A为正交阵.

$C\in M_n(\mathbb{C})$. 若$\overline{C}^T=C^{-1}$. 则C为酉阵.

定理8. 设ϕ为n维内积空间线性算子.

ϕ为正交算子(酉算子) $\Leftrightarrow$ ϕ在$\begin{matrix}\text{任一}\\\text{某一}\end{matrix}$组标准正交基下表示阵为正交(酉)阵.

证明：任取V标准正交基$\{e_1,\cdots,e_n\}$. $\phi\leftrightarrow A$ $\quad\phi^*\longleftrightarrow \begin{cases} A^T. & V\text{为欧} \\ \overline{A}^T. & V\text{为酉.} \end{cases}$

ϕ为正交算子(酉算子). $\Leftrightarrow$ $\phi^*=\phi^{-1}$ $\Leftrightarrow$ ϕ^*与ϕ^{-1}在同一标准正交基下有相同表示阵

$\Updownarrow$

$\begin{cases} A^T=A^{-1}. & V\text{为欧} \\ \overline{A}^T=A^{-1}. & V\text{为酉.} \end{cases}$

定理9. $A\in M_n(\mathbb{R})$. 下列等价.

(1) A 为正交阵

(2). A 的 n 个行向量为 $\mathbb{R}^n$ (标准内积) 的一组标准正交基

(3). A 的 n 个列向量为 $\mathbb{R}^n$ - - - - - - - - -

证明: A 正交 $\overset{(1)}{\Longleftrightarrow} AA^T=I_n \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} A^TA=I_n$.

(2). $A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$. 行分块. $I_n=AA^T=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}[\alpha_1^T\cdots\alpha_n^T]$. $\delta_{ij}=(i,j)$元 $=\alpha_i\alpha_j^T=(\alpha_i,\alpha_j)_{\mathbb{R}^n}$.

$A=[\beta_1\cdots\beta_n]$. $I_n=A^TA=\begin{bmatrix}\beta_1^T\\ \vdots\\ \beta_n^T\end{bmatrix}[\beta_1\cdots\beta_n]$ (i,j)元 $=\beta_i^T\beta_j=(\beta_i,\beta_j)_{\mathbb{R}^n}$.

定理10. $A\in M_n(\mathbb{C})$. 下列等价

(1). A 为酉阵

(2). A 的 n 个行向量为 $\mathbb{C}^n$ (标准内积) 一组标准正交基

(3). - - - - - — — ——— — — - - - - - -

A 酉 $\Longleftrightarrow A\overline{A}^T=I_n \Longleftrightarrow \overline{A}^TA=I_n$. 同理.

例: (1). 正交阵为一种特殊酉阵.

(2). 单位阵为正交阵.

(3). $D=diag\{d_1\cdots d_n\}\in M_n(\mathbb{R})$ 为正交阵 $\Leftrightarrow d_i=\pm1$. $1\le i\le n$.

(4). 2阶正交阵:分类.

(I) 旋转. $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ $|A|=1$

(II). 反射. $\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$. $|A|=-1$.

命题11 (1)酉阵行列式模长为1.(正交阵行列式±1).

(2)酉阵特征值模1.

(1) $A\overline{A}^T=1. \Rightarrow 1=I_n=|A\overline{A}^T|=|A||\overline{A}|=|\det(A)|^2$

$\Rightarrow |\det(A)|=1$

(2) 设 $A\alpha=\lambda_0\alpha$. $\alpha\in\mathbb{C}^n$. $\lambda_0\in\mathbb{C}$

$\overline{\alpha}^T\overline{A}^T=\overline{\lambda_0}\overline{\alpha}^T$.

$\overline{\alpha}^T\alpha=|\lambda_0|^2\overline{\alpha}^T\alpha$. 由 $\overline{\alpha}^T\alpha>0$.

$\Rightarrow |\lambda_0|=1$.

定理12.(QR分解).

设A为n阶实(复)方阵. $A=QR$. Q为正交(酉) R为上三角. 主对角元≥0.

若A非异. 分解唯一.

证明: $A=[u_1\cdots u_n]$ 列分块.

推广Gram-Schmit 正交化.

目标: $\rightsquigarrow \{w_1\cdots w_n\}$. 正交向量组

其中 w_i 或为0或为单位向量

令 $v_k=u_k-\sum_{j=1}^{k-1}(u_k\cdot w_j)w_j$.

若 $v_k=0$. 令 $w_k=0$.

$v_k\neq0$. 令 $w_k=\frac{v_k}{\|v_k\|}$. $\Big\}$ $w_1\cdots w_{k-1}\ w_k$ 为正交.

$\{u_1\cdots u_n\}\to\{w_1\cdots w_n\}$ 正交.(可能有0).

$u_k=\sum_{j=1}^{k-1}(u_k.w_j)w_j+\|v_k\|w_k \quad (1\le k\le n)$

$$A=[u_1\cdots u_n]=[w_1\cdots w_n]\underbrace{\begin{bmatrix}\|v_1\| & & * \\ & \ddots & \\ & & \|v_n\|\end{bmatrix}}_{R}$$

若某个 $w_i=0$. 则 R 的第 i 行全为0.

设 $w_1 \cdots\cdots w_n$ 中有 r 个非零 $w_{i1} \cdots\cdots w_{ir}$.

扩为 $\mathbb{R}^n$ 中标准正交. $\{\widehat{w_1} \cdots\cdots \widehat{w_n}\}$. $\widehat{w_j} = w_j$.

$$\Rightarrow A = \underbrace{[\widehat{w_1} \cdots\cdots \widehat{w_n}]}_{\hat{Q}}R. = QR. \quad Q\text{为正交阵}$$

自伴随算子:

引理1. 内积空间中两组标准正交基间过渡阵为正交阵(酉阵).

证明: 取标准正交基 $\{e_1 \cdots\cdots e_n\}$. $\{f_1 \cdots\cdots f_n\}$. 过渡阵 $P = (a_{ij})_{n\times n}$.

$$[f_1 \cdots\cdots f_n] = [e_1 \cdots\cdots e_n]P$$

$$f_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i. \quad f_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}e_i. \quad \delta_{jk} = (f_j, f_k) = (\sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i, \sum_{i=1}^{n} a_{ik}e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{ik}.$$

即 P 的 n 个列向量为 $\mathbb{R}^n$ 中标准正交基,. P 为正交阵.

线性算子 φ. $\{e_1 \cdots e_n\}$ 表示阵 A, $\{f_1 \cdots f_n\}$ 表示阵 B. $\Rightarrow B = P^{-1}AP = \begin{cases} P^TAP & V\text{欧氏} \\ \bar{P}^TAP & V\text{酉}. \end{cases}$

定义2: 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $\exists$ 正交阵 P. $B = P^TAP$. A 与 B 正交相似.

$A, B \in M_n(\mathbb{C})$. $\exists$ 酉阵. $B = \bar{P}^TAP$. A 与 B 酉相似.

注: 正交相似, 酉相似为等价关系.

定义3: φ 为内积空间上线性算子. 若 $\varphi^* = \varphi$. 则为自伴随算子.

欧氏空间: $\Rightarrow$ 对称算子. 酉空间: $\Rightarrow$ Hermite 算子.

例: V: n 维内积空间. $U \subseteq V$. $V = U \oplus U^\perp$. E 为 $V \to U$ 投影 $\forall \alpha, \beta \in V$

$(E(\alpha), \beta) = (\alpha, E(\beta))$. $\Rightarrow E = E^*$. 为自伴随算子.

引理4：ϕ为n维内积空间线性算子，则：

ϕ自伴随 $\Longleftrightarrow$ ϕ在某$\begin{matrix}一组\\任一组\end{matrix}$标准正交基下表示阵$\begin{cases}实对称\\ \text{Hermite}.\end{cases}$

证明：$\{e_1 \cdots e_n\}$标准正交，ϕ表示阵为A.

则ϕ^*在同一基下阵 A^T($\bar{A}^T$).

ϕ自伴随：即$\phi=\phi^* \Longleftrightarrow \phi, \phi^*$在$\begin{matrix}某一组\\任一组\end{matrix}$标表示阵相等，即$\begin{matrix}A=A^T.\\ A=\bar{A}^T.\end{matrix}$

引理5：设ϕ为酉空间 V上自伴随算子，则ϕ所有特征值$\in R$，不同特征值特征向量正交

任取ϕ特征值λ, α.

$\phi(\alpha)=\lambda\alpha.$ $\quad \lambda(\alpha,\alpha)=(\lambda\alpha,\alpha)=(\phi(\alpha),\alpha)=(\alpha,\phi^*(\alpha))=(\alpha,\lambda\alpha)=\bar{\lambda}(\alpha,\alpha)$

$\Rightarrow \lambda=\bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$

任取不同特征值μ, β. 证明α, β正交.

$\because \lambda(\alpha,\beta)=(\lambda\alpha,\beta)=(\phi(\alpha),\beta)=(\alpha,\phi^*(\beta))=(\alpha,\mu\beta)=\mu(\alpha,\beta).$

由 $(\lambda-\mu)(\alpha,\beta)=0 \Rightarrow (\alpha,\beta)=0.$

推论6.：Hermite 阵特征值$\in\mathbb{R}$，不同特征值特征向量正交.

任一实对称阵为Hermite阵，从而实对称阵上述成立.

推论7. ϕ为欧氏空间线性算子，特征值为实，不同特征值特征向量正交

证明：任取标准正交基 $\phi \sim A$.

$\xRightarrow{引理4}$ A实对称 $\xRightarrow{推论6}$ A特征值$\in R$，不同特征值特征向量正交.

定理8：ϕ为n维内积空间V上自伴随算子，则存在$\{e_1\cdots e_n\}$，ϕ在基下为Λ.

证明：取ϕ特征值λ_1，$\alpha\in V$.

$e_1=\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$，则$e_1$为单位特征向量.

维数：$n=1$成立.

下证$\dim V<n$成立，证n.

令$U=L(e_1)^{\perp}$，$\dim U=n-1$.

$L(e_1)$为ϕ不变子空间，$\Rightarrow L(e_1)^{\perp}=U$为$\phi^*$不变子空间，也就为$\phi$不变.

作限制$\phi|_U$，$\forall u,v\in U\subseteq V$.

$(\phi(u),v)=(u,\phi(v))\Leftrightarrow(\phi|_U(u),v)=(u,\phi|_U(v))$

$\Rightarrow(\phi|_U)^*=\phi|_U$，即$\phi|_U$自伴随.

则由$\phi|_U$为$n-1$维，$\exists U$标准正交基，为实对角阵 $\{e_2\cdots e_n\}$

$\phi|_U$在这组基下表示阵$\{\lambda_2\cdots\lambda_n\}$. $V=L(e_1)\oplus U$.

$\Rightarrow\{e_1\cdots e_n\}$为$V$标准正交基，$\phi$表示阵$\mathrm{diag}\{\lambda_1\cdots\lambda_n\}$

定理9：A为n阶实对称阵(Hermite)，存在正交阵(酉阵)，P^TAP为($\bar{P}^TAP$)为实对角阵.

证明：构造$\phi:\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{C}^n$，(标准内积)

$\alpha\longmapsto A\alpha$.

ϕ在标准单位列向量$\{e_1\cdots e_n\}$表示阵A. A Hermite $\Rightarrow\phi$自伴随.

$\overset{\text{定理8}}{\Longrightarrow}\exists\mathbb{C}^n$中$\alpha_1\cdots\alpha_n$，使$\phi$表示阵对角$\Lambda$.

$[\phi(\alpha_1)\cdots\phi(\alpha_n)]=[\alpha_1\cdots\alpha_n]\Lambda$ 令$P=[\alpha_1\cdots\alpha_n]$为酉阵. $\bar{P}^TAP=\Lambda$

推论10. 实对称阵（Hermite阵）在正交相似（酉相似）下全系不变为全体特征值.

正交相似（酉相似）于特征值构成实对角阵.

证明：相似阵有相同特征值.

A, B 特 $\{\lambda_1 \cdots\cdots \lambda_n\}$. $\exists$ P, Q 正交.

$$P^T A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad Q^T B Q = \begin{bmatrix} \lambda_{i_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{i_n} \end{bmatrix}$$

其中 $(i_1 \cdots\cdots i_n)$ 为 $(1 \cdots\cdots n)$ 全排列.

$P_{ij}\{\lambda_1 \cdot \lambda_i \cdot \lambda_j \cdot \lambda_n\} P_{ij} = \mathrm{diag}\{\lambda_1 \cdot \lambda_j \cdot \lambda_i\ \lambda_n\}$. P_{ij} 正交阵. $P_{ij}^T P_{ij} = I_n$

$$\mathrm{diag}\{\lambda_{i_1} \cdots\cdots \lambda_{i_n}\} \xrightarrow[\text{相似}]{\text{若干正交}} \mathrm{diag}\{\lambda_1 \cdots\cdots \lambda_n\}.$$

$\Rightarrow$ A 与 B 正交相似.

$B = P^T A P = P^{-1} A P$

几何上. $f(x_1 \cdots\cdots x_n) = x^T A x = y^T (C^T A C) y.$

$x = Cy.$ $\quad [f_1 \cdots f_n] = [e_1 \cdots e_n] C$ 标准正交. 标准正交 正交阵.

推论11. $f = x^TAx$. 实二次型 [A实对称 — $\lambda_1 \cdots\cdots \lambda_n$]

则∃正交合同(相似). $x=Py$. f可化为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots \lambda_n y_n^2$

f正惯性指数: 正特征值数. 负同理.

推论12. A为n阶实对称阵. A正定 $\Longleftrightarrow$ A全体特征值 >0

负定 <0

半正定 ≥ 0

半负定 ≤ 0.

例1: $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

解: $|\lambda I - A| = (\lambda-2)^2(\lambda-8)$ 　2两重. 8一重.

$\lambda_1 = 8 \longleftrightarrow \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 　$\lambda_2 = 2 \longleftrightarrow \alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\alpha_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

利用Gram-Schmit. $\alpha_3' = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \alpha_2)}{\|\alpha_2\|^2}\alpha_2$.

$e_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ 　$e_2 = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$ 　$e_3 = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$ 　$P = [e_1, e_2, e_3]$. $P^TAP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_2 \end{bmatrix}$

例3: A实对称 $A^3 = I_n$ 证 $A = I_n$

证明: 任取 λ.. $\lambda \in \mathbb{R}$. 且 $\lambda^3 = 1$. $\lambda = 1$.

∃正交阵 $P^TAP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

9.6 复正规算子.

V 为酉空间. $\phi\in\mathcal{L}(V)$. $\{e_1\cdots\cdots e_n\}$ 为标准正交基. ϕ 表示阵为复对角阵

$\Lambda=\mathrm{diag}\{\lambda_1\ \cdots\cdots\ \lambda_n\}$. $[\phi(e_1)\ \cdots\ \phi(e_n)]=[e_1\cdots\cdots e_n]\Lambda$.

$\Longleftrightarrow \phi(e_i)=\lambda_i e_i.\ (1\leq i\leq n)$.

ϕ^* 表示阵. $\overline{\Lambda}^T=\mathrm{diag}\{\overline{\lambda_1}\cdots\cdots\cdots\overline{\lambda_n}\}$.

$\Longleftrightarrow \phi^*(e_i)=\overline{\lambda_i}e_i.\ \ (1\leq i\leq n)$.

$\phi\phi^*(e_i).=\phi(\overline{\lambda_i}e_i)=\overline{\lambda_i}\lambda_i e_i=|\lambda_i|^2e_i$.

$\phi^*\phi(e_i)\ =\ \lambda_i\phi^*(e_i)=\lambda_i\overline{\lambda_i}e_i=|\lambda_i|^2e_i$.

$\Rightarrow\ \phi\phi^*=\phi^*\phi$.

定义1. V 为有限维内积空间. $\phi\in\mathcal{L}(V)$. $\phi\phi^*=\phi^*\phi$. 则 ϕ 为正规算子

设 $A\in M_n(\mathbb{R})$. $AA^T=A^TA$. 则 A 为实正规阵.

$A\in M_n(\mathbb{C})$. $A\overline{A}^T=\overline{A}^TA$. A 为复正规阵.

例 (1). 自伴随算子为正规算子 $\phi=\phi^*$

(2). 正交算子(酉算子)为正规. $\phi^*=\phi^{-1}$

(3). Hermite. 酉阵复正规

(4). 实对称. 正交阵为实正规阵.

引理2. V为欧(酉). $\phi\in\mathcal{L}(V)$. 则.

ϕ为正规算子 $\Longleftrightarrow$ ϕ在 $\frac{\text{某一组}}{\text{任一组}}$ 标准正交基下表示阵实正规(复正规).

证明: 任取 $\{e_1 \cdots e_n\}$ 标正. $\phi \longleftrightarrow A$ $\quad \phi^* \longleftrightarrow \begin{cases} A^T. & \text{欧} \\ \bar{A}^T & \text{酉} \end{cases}$

ϕ正规: $\phi\phi^*=\phi^*\phi \Leftrightarrow$ 表示阵在标正下相等 即 $AA^T=A^TA$.
$A\bar{A}^T=\bar{A}^TA$.

酉空间V. $\phi\in\mathcal{L}(V)$. ϕ在某基{标正}为复对角阵 $\Leftrightarrow$ ϕ正规

引理3. V酉. $\phi\in\mathcal{L}(V)$. 为正规.

(1) $\|\phi(\alpha)\|=\|\phi^*(\alpha)\|$. $\forall\alpha\in V$.

(2). α为ϕ关于λ的特征向量. $\Leftrightarrow$ $\phi^*\cdots\bar{\lambda}\cdots$

(3). ϕ关于不同特征值特征向量正交

(1). $(\phi(\alpha),\phi(\alpha))=(\alpha,\phi^*\phi(\alpha))=(\alpha,\phi\phi^*(\alpha))=(\phi^*(\alpha),\phi^*(\alpha))$.

(2). 先证$\lambda I-\phi$也正规.

$(\lambda I-\phi)^*=\bar{\lambda}I-\phi^*$

$(\lambda I-\phi)(\lambda I-\phi)^*=(\lambda I-\phi)^*(\lambda I-\phi)$.

则(1). $\|(\lambda I-\phi)(\alpha)\|=\|(\bar{\lambda}I-\phi^*)(\alpha)\|$. $\forall\alpha\in V$. $\alpha\neq0$.

$\phi(\alpha)=\lambda\alpha \Leftrightarrow (\lambda I-\phi)(\alpha)=0. \leftrightarrow \phi^*(\alpha)=\bar{\lambda}\alpha$.

(3). $\phi(\alpha)=\lambda\alpha$. $\phi(\beta)=\mu\beta$. $\lambda\neq\mu$.

$$\Downarrow$$

$\phi^*(\beta)=\bar{\mu}\beta$.

$\lambda(\alpha,\beta)=(\lambda\alpha,\beta)=(\phi(\alpha),\beta)=(\alpha,\phi^*(\beta))=(\alpha,\bar{\mu}\beta)=\mu(\alpha,\beta)$.

$\Rightarrow(\alpha,\beta)=0$.

定理4. ϕ为酉空间V上线算子. $\exists V$标准正交基. ϕ在基下矩阵上三角.

对$\dim V$归纳. $n=1$. ✓

设 $\dim V<n$.成立. 证n.

设 $\phi^*(\alpha)=\lambda\alpha$. $e_n=\frac{\alpha}{|\alpha|}$. $\phi^*(e_n)=\lambda e_n$.

令 $U=L(e_n)^{\perp}$. $\dim U=n-1$.

$L(e_n)$为ϕ^*不变子空间 $\Rightarrow$ U为$\phi^{**}=\phi$不变子空间

$\phi|_U$. 则$\exists$基$\{e_1\cdots e_{n-1}\}$. $\phi|_U(e_1\cdots e_{n-1})=(e_1\cdots e_{n-1})$上

则$\{e_1\cdots e_n\}$为V标准正交 $[\phi(e_1)\cdots\phi(e_n)]=[e_1\cdots e_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & * & \vdots \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$

推论5.(Schur).

设$A\in M_n(\mathbb{C})$. $\exists$酉P. $\overline{P}^TAP$为上三角阵.

定理6. 设ϕ为酉空间线性算子. 则 ϕ正规 $\Leftrightarrow$ ϕ在某基下复对角阵.

证明: 充分性已证. "$\Leftarrow$" P118 后页.部分.

"$\Rightarrow$"

由(Schur). $\exists$标准正交基$\{e_1\cdots e_n\}$. ϕ表示为上三角.A. ϕ^*表示阵 $\overline{A}^T$

$$[\phi(e_1)\cdots\phi(e_n)]=[e_1\cdots e_n]\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ & a_{22} & \cdots \\ & & \ddots\end{bmatrix}$$

$$[\phi^*(e_1)\cdots\phi^*(e_n)]=[e_1\cdots e_n]\begin{bmatrix}\overline{a_{11}} & & \\ \vdots & \overline{a_{22}} & \\ \cdots & \cdots & \ddots\end{bmatrix}$$

$$\phi(e_1)=a_{11}e_1. \xRightarrow{\text{性质(2)}} \phi^*(e_1)=\overline{a_{11}}e_1.$$

$$\phi^*(e_1)=\overline{a_{11}}e_1+\overline{a_{12}}e_2\cdots\cdots \Rightarrow a_{12}=\cdots=a_{1n}=0.$$

$\phi(e_2)=a_{22}e_2 \Longleftrightarrow \phi^*(e_2)=\overline{a_{22}}e_2.$

$\phi^*(e_2)=\overline{a_{22}}e_2+\cdots\cdots \quad a_{23}=\cdots a_{2n}=0.$

同理 $a_{ij}=0.\ \forall i<j.$

从而 A为对角阵.

推论7. A为复正规阵. ∃酉P. P^TAP为复对角阵.

同理: 复正规阵在酉相似下全系不变量为特征值.

推论8. U为n阶酉阵. ∃酉阵P. st. $P^TUP=\mathrm{diag}\{c_1\cdots\cdots c_n\}.\ |c_i|=1.$

∃酉P. $P^{\bar{T}}UP=\mathrm{diag}\{c_1\cdots\cdots c_n\}.\ c_i\in\mathbb{C}.$

酉阵.

$\Rightarrow c_i$为模长为1复数.

定理9. ϕ为酉空间线性算子. $\lambda_1\cdots\cdots\lambda_k$为$\phi$全体不同特征值 $V_1\cdots\cdots V_k$.

则ϕ正规 $\Longleftrightarrow V_0=V_1\perp V_2\cdots\cdots\perp V_k.$

"$\Rightarrow$"

证明: ϕ正规 $\rightarrow$ ϕ可对角化 $\Rightarrow V=V_1\oplus V_2\cdots\cdots\oplus V_k.$

正规性质(3) $\Rightarrow V_i\perp V_j.\ \forall i\neq j.$ 正交直和.

"$\Leftarrow$" 取V_i标准正交基拼成V标正.

注意到基均为特征. ϕ在该基下表示为对角阵.

定理10. V欧. $\phi\in\mathcal{L}(V)$自伴随. $\lambda_1\cdots\cdots\lambda_k$全体不同. $V_1\cdots\cdots V_k$..

$V=V_1\perp V_2\cdots\cdots\perp V_k.$

A 为 n 阶实对称阵，特征值从小到大，$\lambda_1 \le \lambda_2 \cdots \le \lambda_n$.

$\Rightarrow \exists$ 正交阵 P. $P^TAP = diag\{\lambda_1 \cdots\cdots \lambda_n\}$.

$P = [e_1 \cdots\cdots e_n]$. $\Rightarrow \{e_1 \cdots e_n\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 在标准内积下标准正交基

$$A[e_1 \cdots\cdots e_n] = [e_1 \cdots e_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ $Ae_i = \lambda_i e_i$. $(1 \le i \le n)$.

$\forall x \in \mathbb{R}^n$. 得 $x = x_1e_1 + \cdots\cdots x_ne_n$.

$$Ax = A(\sum_{i=1}^n x_ie_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i.$$

$$x^TAx = (\sum x_ie_i, \sum \lambda_i x_i e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \qquad x^TAx \in [\underbrace{\lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^2}_{\lambda_1 x^Tx}, \underbrace{\lambda_n \sum_{i=1}^n x_i^2}_{\lambda_n x^Tx}]$$

$x = e_1$ $\Downarrow$ 　　$x = e_n$ $\Downarrow$

$$\max_{0 \ne x \in \mathbb{R}^n} \frac{x^TAx}{x^Tx} = \lambda_n. \qquad \min_{0 \ne x \in \mathbb{R}^n} \frac{x^TAx}{x^Tx} = \lambda_1.$$

定理

$$\lambda_i = \min_{V_i} \max_{0 \ne x \in V_i} \frac{x^TAx}{x^Tx}.$$

$\longrightarrow$ $\mathbb{R}^n$ 中 i 维子空间.

$$\lambda_i = \max_{V_{n+1-i}} \min_{0 \ne x \in V_{n+1-i}} \frac{x^TAx}{x^Tx}$$

证明：取定 $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$. $U = L(e_i, e_{i+1} \cdots e_n)$. $\dim U = n+1-i$. $\dim V_i = i$.

断言 $V_i \cap U \neq 0$. 若 $V_i \cap U = 0$. $\mathbb{R}^n \supseteq V_i \oplus U$. 矛盾.

取 $0 \neq x \in V_i \cap U$. $x = x_i e_i + x_{i+1} e_{i+1} \cdots\cdots x_n e_n$.

$x_0^T A x_0 = \sum_{j=i}^{n} \lambda_j x_j^2$ $\quad x_0^T x_0 = \sum_{j=i}^{n} x_j^2$.

$\frac{x_0^T A x_0}{x_0^T x_0} \geqslant \lambda_i$.

$\Rightarrow \max\limits_{0 \neq x \in V_i} \frac{x^T A x}{x^T x} \geqslant \lambda_i$.

$\min\limits_{V_i} \max\limits_{0 \neq x \in V_i} \frac{x^T A x}{x^T x} \geqslant \lambda_i$.

任取 $W = L(e_1 \cdots\cdots e_i)$. $\dim W = i$.

$\max\limits_{0 \neq x \in W} \frac{x^T A x}{x^T x}$ $\quad x = \sum_{j=1}^{i} x_j e_j$, $x^T A x = \sum_{j=1}^{i} \lambda_j x_j^2$ $\quad x^T x = \sum_{j=1}^{i} x_j^2$.

$\Rightarrow \lambda_i = \min\limits_{V_i} \max\limits_{0 \neq x \in V_i} \frac{x^T A x}{x^T x}$.

A实对称, $\lambda_1 \leqslant \cdots\cdots \lambda_n$. A_m m阶主子阵 $\mu_1 \leqslant \cdots\cdots \mu_m$.

实正规矩阵.

欧氏空间 /R. 正规算子 ϕ.

引理1. ϕ 实正规. $f(x) \in R[x]$. $f(\phi)$ 实正规.

$f(x) = a_n x^n + \cdots\cdots a_1 x + a_0$. $a_i \in R$.

$f(\phi) = a_n \phi^n + \cdots a_1 \phi + a_0 I$ $\qquad f(\phi)^* = f(\phi^*)$.

由 $f(\phi) f(\phi)^* = f(\phi) f(\phi^*) = f(\phi^*) f(\phi) = f(\phi)^* f(\phi)$.

引理2. ϕ实正规，$(f(x),g(x))=1$. $\alpha\in\ker f(\phi)$. $\beta\in\ker(g(\phi))$　$(\alpha,\beta)=0$.

证明：$\exists\ u(x),v(x)\in R[x]$.

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$$

令 $x=\phi$. $f(\phi)u(\phi)+g(\phi)v(\phi)=1_V$.

作用α.　$\alpha=u(\phi)f(\phi)(\alpha)+g(\phi)v(\phi)(\alpha)=g(\phi)v(\phi)(\alpha)$

$$(\alpha,\beta)=(g(\phi)v(\phi)(\alpha),\beta)$$

$$=(v(\phi)(\alpha),g(\phi)^*(\beta))$$

由条件 $g(\phi)(\beta)=0$.

正规 $\|\phi(\alpha)\|=\|\phi^*(\alpha)\|$.

$g(\phi)$正规 $\Rightarrow\ \|g(\phi)(\beta)\|=\|g(\phi)^*\beta\|$

$\Rightarrow\ g(\phi)^*\beta=0\ \Rightarrow\ (\alpha,\beta)=0$.

定理3. ϕ实正规. $g(x)$为极小多项式 设 $g_1(x)\cdots g_k(x)$为$g(x)$所有互异首一不可约因式 $W_i=\ker g_i(\phi)$. 则：

(1). $g(x)=g_1(x)\cdots g_k(x)$. 且 $\deg g_i(x)\le 2$

(2) $V=W_1\perp W_2\cdots\perp W_k$

(3). $\phi|_{W_i}$ 为实正规, 极小多项式$g_i(x)$

(1). 任取V一组标准正交基, ϕ表示A.　$AA^T=A^TA$. 将A看为复. A复正规

由上节定理. A酉相似diag　A可对角化$\Leftrightarrow g(x)$在$\mathbb{C}$上无重根

从而$g(x)$在$\mathbb{R}$上无重因式. $g(x)=g_1(x)\cdots g_k(x)$.

(2).

(2) 令 $f_i(x)=\frac{g(x)}{g_i(x)}=g_1(x)\cdots\widehat{g_i(x)}\cdots g_k(x)$

$\Rightarrow (f_1(x)\cdots\cdots f_k(x))=1.$

$\Rightarrow \exists\, u_i(x)\quad \sum_{i=1}^{k} f_i(x)u_i(x)=1.$

令 $x=\phi$. $\sum_{i=1}^{k} f_i(\phi)u_i(\phi)=I_V$.

$\forall \alpha\in V$

作用 α. $\alpha=f_1(\phi)u_1(\phi)(\alpha)\cdots\cdots f_k(\phi)u_k(\phi)(\alpha)$. 由 $g_i(\phi)f_i(\phi)u_i(\phi)(\alpha)=0$.

$f_i(\phi)u_i(\phi)(\alpha)\in \ker g_i(\phi)=W_i$.

$\alpha=w_1+\cdots\cdots w_k$.

$V=W_1+W_2+\cdots\cdots W_k$.

$\forall 1\le i\ne j\le k$. $(g_i(x), g_j(x))=1$

引理 2 $\Rightarrow W_i\perp W_j$. $V=W_1\perp W_2\cdots\perp W_k$.

(3). 先证. W_i 为 ϕ 不变. ϕ^* 不变

$\forall w\in W_i=\ker g_i(\phi)$. $g_i(\phi)(w)=0$. $g_i(\phi)(\phi(w))=\phi g_i(\phi)(w)=0$. $\Rightarrow$ W_i 为 ϕ 不变

$g_i(\phi)(\phi^*(w))=\phi^* g_i(\phi)(w)=0\Rightarrow W_i$ 为 ϕ^* 不变.

$\phi|_{W_i}$. $\phi^*|_{W_i}$. $\forall \alpha,\beta\in W_i$.

$(\phi(\alpha),\beta)=(\alpha,\phi^*(\beta))\Rightarrow(\phi|_{W_i}(\alpha),\beta)=(\alpha,\phi^*|_{W_i}(\beta))\Rightarrow(\phi|_{W_i})^*=\phi^*|_{W_i}$.

$\phi|_{W_i}(\phi|_{W_i})^*=\phi|_{W_i}\phi^*|_{W_i}=\phi^*|_{W_i}\phi|_{W_i}=(\phi|_{W_i})^*(\phi|_{W_i})$.

$W_i=\ker g_i(\phi)$. $\phi|_{W_i}$ 适合 $g_i(x)$

即 $g_i(\phi|_{W_i})\in \mathcal{L}(W_i)$.

$w\in W_i$. $g_i(\phi|_{W_i})(w)=g(\phi)(w)=0$. $\Rightarrow \phi|_{W_i}$ 极小多项式 $|\, g_i(x)$.

$g_i(x)$ 不可约 $\Rightarrow$ 极小 $=g_i(x)$.

$g(x) = x^2+1$.

引理4：ϕ：实正规，$\overset{\text{极小}}{g(x)} = x^2+1$. $0 \neq v \in V$

$u = \phi(v)$. $\|u\| = \|v\|$. $(u,v) = 0$ 且. $[\phi(u), \phi(v)] = [u, v]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$[\phi^*(u), \phi^*(v)] = [u, v]\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

证明：$\phi(u) = \phi^2(v) = -v$.

$0 = \|\phi(v) - u\|^2 + \|\phi(u) + v\|^2$.

$= (\phi(v), \phi(v)) - 2(\phi(v), u) + \|u\|^2 + \|\phi(u)\|^2 + 2(\phi(u), v) + \|v\|^2$.

由 ϕ 正规. $\|\phi(v)\| = \|\phi^*(v)\|$

$= \|\phi^*(v)\|^2 + 2(\phi^*(v), u) + \|u\|^2 + \|\phi^*(u)\|^2 - 2(\phi^*(u), v) + \|v\|^2$

$= \|\phi^*(v) + u\|^2 + \|\phi^*(u) - v\|^2$.

$\Rightarrow \phi^*(u) = v \quad \phi^*(v) = -u$.

$(u, u) = (\phi(v), u) = (v, \phi^*(u)) = (v, v)$. $\quad \|u\| = \|v\|$.

$(u, v) = (\phi(v), v) = (v, \phi^*(v)) = -(u, v) \quad (u, v) = 0$.

引理5 ϕ 实正规，$g(x) = (x-a)^2 + b^2$. $a, b \in \mathbb{R}$. $b \neq 0$.

任取 $0 \neq v \in V$. $u = b^{-1}(\phi - aI_V)(v)$. 则 $\|u\| = \|v\|$ $(u, v) = 0$ 且

$[\phi(u), \phi(v)] = [u, v]\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \qquad [\phi^*(u), \phi^*(v)] = [u, v]\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

令 $\psi = b^{-1}(\phi - aI_V)$. $g(x) = x^2+1$.

$\forall v \in V$. $u = \psi(v)$. $\|u\| = \|v\|$. $(u, v) = 0$. 且

ψ表 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. ψ^*表. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

反之. $\phi = aI_V + b\psi$. $\phi^* = aI_V + b\psi^*$.

$\Rightarrow \phi$表. $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ $\phi^* \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

定理6. ϕ实正规. $g(x) = (x-a)^2 + b^2$. $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.

则$\exists$ s个2维子空间V_i. $V = V_1 \perp V_2 \cdots\cdots \perp V_s$

且$\exists V_i$.标准正交基$\{u_i, v_i\}$、$\phi|_{V_i}$ 表示 $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

$n=1$. $\dim V = 1$. $V = L(e)$. $\phi(e) = \lambda_0 e$. λ_0为实特征值. $g(\lambda_0) = (\lambda_0 - a)^2 + b^2 > 0$.

设 维数小于n成立, 证n维. $0 \neq v_1 \in V$. $\|v_1\| = 1$

令 $u_1 = b^{-1}(\phi - aI_V)(v_1)$. 引理5. $\|u_1\| = \|v_1\| = 1$. $(u_1, v_1) = 0$.

令$V_1 = L(u_1, v_1)$. $u_1 v_1$为标准正交. $[\phi(u_1), \phi(v_1)] = [u_1, v_1]\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

$[\phi^*(u_1)\ \phi^*(v_1)] = [u_1, v_1]\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ V_1为ϕ. ϕ^*不变.

则 $V_1^\perp$为ϕ. ϕ^*不变子空间.

作限制 $\phi|_{V_1^\perp}$. $\phi^*|_{V_1^\perp}$. $\Rightarrow$ $\phi|_{V_1^\perp}$为正规算子.

$\dim V_1^\perp = n - \dim V_1 = n - 2 < n$.

由归纳. $\exists$ s-1个二维子空间 $V_2 \cdots\cdots V_s$. $V_1^\perp = V_2 \perp \cdots\cdots \perp V_s$. $\Rightarrow V = V_1 \perp \cdots\cdots \perp V_s$.

$\exists V_i$ $\{u_i, v_i\}$.标准正交基表示阵. $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

ϕ在 $\{u_1 v_1 \cdots\cdots u_s v_s\}$. $= \mathrm{diag}\{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdots\cdots \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\}$.

定理7. 设ϕ实正规. 存在V标准正交基 ϕ表示阵 $diag\{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_r & b_r \\ -b_r & a_r \end{bmatrix}, c_{2r+1} \cdots c_n\}$

正交相似标准型

证明: 考虑 $\phi|_{W_i}$. $(1 \le i \le k)$.

1°. 极小 $g(x) = x - c \Rightarrow \phi|_{W_i} = c_i I_{W_i}$.

2°. 极小 $g_i(x) = (x-a_i)^2 + b_i^2$. $b_i \neq 0$.

定理6. $\Rightarrow \exists W_i$标准正交基. $\phi|_{W_i}$. 表示 $diag\{\begin{bmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{bmatrix} \cdots\cdots \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{bmatrix}\}$.

注: 实正规阵正交相似下全系不变量为特征值.

推论8. A正交, $\exists$正交P. st.

$$P^TAP = diag\left\{\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \cdots\cdots \begin{bmatrix} \cos\theta_r & \sin\theta_r \\ -\sin\theta_r & \cos\theta_r \end{bmatrix} 1 \cdots 1, -1 \cdots -1\right\}.$$

证. $\exists$ P正交.

$$P^TAP = diag\left\{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} \cdots\cdots \begin{bmatrix} a_r & b_r \\ -b_r & a_r \end{bmatrix} c_{2r+1} \cdots c_n\right\}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = I_2$$

推论9. A为实反对称. $\exists$正交P.

$$P^TAP = diag\left\{\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ -b_1 & 0 \end{bmatrix} \cdots\cdots \begin{bmatrix} 0 & b_r \\ -b_r & 0 \end{bmatrix} 0 \cdots 0\right\}.$$

$$AA^T = -A^2 = A^TA.$$

推论10. 实反对称阵秩为偶.，特征值纯虚或0.