李剑涛
3021233062
2班.

天津大学
Tianjin University

A.

习题 5.1

1. 当 $g(x_1,\cdots,x_n)$, $h(x_1,\cdots,x_n)$ 是齐次多项式时, $f(x_1,\cdots,x_n)$ 显然也为齐次多项式. 现证: $f(x_1,\cdots x_n)$ 是齐次多项式 $\Rightarrow$ $g(x_1\cdots x_n)$, $h(x_1\cdots x_n)$ 也为齐次多项式. 缺少一个

用反证法, 不妨设 g、h 不为齐次多项式, 设 g 的最高次项为 a 次, 最低次项为 b 次 $(a>b)$, $g=\sum_{i=b}^{a} g_i$, 其中 g_i 是 g 中 i 次项的和, 同理 $h=\sum_{i=d}^{c} h_j$. $(c\geq d)$.

则易知 $g\cdot h$ 中次数最高的项为 $g_a h_c$, 最低次项为 $g_b h_d$ 次数不同, 且此两项为非零多项式乘积, 当然不为 0. 故与 f 为齐次多项式矛盾. 故 g, h 皆为齐次多项式.

多元多项式不存在带余除法.

2. 由 $f|g$, $g|f$, 则可得 $p(x_1,\cdots x_n)$, $q(x_1\cdots x_n)\in K[x_1\cdots x_n]$ 使得 $g=f\cdot p$. $f=g\cdot q$. 且 $f\neq 0$, $g\neq 0$

故 $g\cdot f=g\cdot f\cdot pq$.

由 $f\cdot g\neq 0 \Rightarrow p\cdot q=1$.

故 p、q 为可逆元, 由 $p(x_1\cdots x_n)$, $q(x_1\cdots x_n)\in K[x_1\cdots x_n]$ 得 p, $q\in K^*$

亦即 $f(x_1\cdots x_n)=c\,g(x_1\cdots x_n)$. $(c=q)$.

3. (1) 对 $\forall\ 1\leq i\leq n$.

若 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 与 x_i 无关. 则 $f(x_1,\cdots x_n)=f_i$

由f不可约则知f_i不可约.

若$f(x_1,\cdots,x_n)$与x_i有关. 由f不可约则知 $x_i \nmid f(x_1,\cdots x_n)$.

故可得f_i不为齐次多项式. 现假设f_i可约, 即 $f_i=g\cdot h$. 由1.

结论可知 g,h不均为齐次多项式, 不妨设其中g不为齐次多项式. 则

设g的最高次项为a次, 最低次项为b次. 则 $g=\sum_{i=b}^{a} g_i$ $(a>b)$. 同

理可设 $h=\sum_{i=c}^{d} h_i$ $(d\geq c)$.

则由 $f_i=g\cdot h=\left(\sum_{i=b}^{a} g_i\right)\cdot\left(\sum_{i=c}^{d} h_i\right)$, 可反构造齐次多项式$f$.

$f=(g_b\cdot x_i^{b-a}+g_{b+1}\cdot x_i^{b-a-1}+\cdots+g_a)(h_c\cdot x_i^{d-c}+h_{c+1}\cdot x_i^{d-c-1}+\cdots+h_d)$.

令 $g'=g_b\cdot x_i^{b-a}+\cdots+g_a$, $h'=h_c\cdot x_i^{b-c}+\cdots+h_d$

则 g',h'为齐次多项式 $\Longrightarrow$ f为齐次多项式.

得 $f(x_1\cdots x_n)$可约且 $f_i=f(x_1,\cdots x_{i-1},1,x_{i+1}\cdots x_n)$.

又题设条件f不可约知假设不成立, 故f_i不可约对$\forall\, 1\leq i\leq n$成立.

(2). 不妨假设f可约. 记 $f=g\cdot h$. (g,h均不为常数).

由1.结论可知, g,h也为齐次多项式.

设 $g_i=g(x_1,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots x_n)$.

$h_i=h(x_1,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots x_n)$

则 $f_i=g_i\cdot h_i$.

由f_i不可约则g_i,h_i中至少有一个多项式为常数, 否则f_i可约.

不妨设g_i为常数 (h_i同理). 则显然 g只与x_i有关. 即

$x_i\mid g$. 又由$f=g\cdot h$ 可得 $x_i\mid f$. (h_i同理).

与题设条件 $x_i \nmid f$ 矛盾. 故 f 不可约.

4. 由辗转相除法得:

$$d(x) = (x+1) = x+1$$

$$u(x) = \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{2}{4}x^2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}$$

$$v(x) = \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}\right) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}$$

5. 令 $(p(x), f(x)) = h(x)$.

由 $h(x) \mid p(x)$. 且 $p(x)$ 为不可约多项式.

则 $h(x)$ 为 $p(x)$ 的平凡因子. 即 $h(x) \in K^*$ 或 $h(x) = a \cdot p(x)$. $(a \in K^*)$.

若 $h(x)$ 为前者, 显然有 $h(x) \mid f(x)$.

若 $h(x) = a \cdot p(x)$ $(a \in K^*)$. 则由 $h(x) \mid f(x)$ 知 $p(x) \mid f(x)$.

又 $p(x) \nmid f(x)$. 故 $h(x) \in K^*$

即 $(p(x), f(x)) = 1$.

6. (1) 由 $(f(x), 0) \sim f(x)$, $(f(x), g(x)) \sim f(x)$ 知 $f(x) \neq 0$ 且 $f(x)$ 为 $(f(x), g(x))$ 的最大公因子. 故 $f(x) \mid g(x)$. 按定义验证.

由 $f(x) \mid g(x)$. 知 $f(x) \neq 0$. 且任意 $f(x)$ $g(x)$ 的公因子 $d(x)$ 都有 $d(x) \mid f(x)$. 故 $(f(x), 0) \sim f(x)$. $(f(x), g(x)) \sim f(x)$.

(2). 记 $(f(x), g(x)) = d(x)$ ~~$h(x)$~~.

则 $h(x)\cdot d(x) \mid h(x)\cdot f(x)$, $h(x)\cdot d(x) \mid h(x)\cdot g(x)$

令 $W(x) = (h(x)\cdot f(x), h(x)\cdot g(x))$.

则 $h(x)\cdot d(x) \mid W(x)$.

令 $W(x) = h(x)\cdot d(x)\cdot \cancel{g(x)} \cdot v(x)$

记 $h(x)\cdot f(x) = W(x)\cdot h_1(x) = h(x)\cdot d(x)\cdot \overset{v(x)}{\cancel{g(x)}}\cdot h_1(x)$

$h(x)\cdot g(x) = W(x)\cdot h_2(x) = h(x)\cdot d(x)\cdot v(x)\cdot h_2(x)$.

故 $f(x) = d(x)\cdot v(x)\cdot h_1(x)$.

$g(x) = d(x)\cdot v(x)\cdot h_2(x)$.

故 $d(x)\cdot v(x)$ 为 $f(x), g(x)$ 公因子. 故 $d(x)\cdot v(x) \mid d(x)$.

得 $v(x) \in K^*$

即 $W(x) = c\, h(x)\cdot d(x) = c\cdot h(x)\cdot (f(x), g(x)) \quad (c\in K^*)$.

即 $(h(x)\cdot f(x), h(x)\cdot g(x)) \sim h(x)\,(f(x), g(x))$.

(3). 设 $(f(x), g(x), h(x))$ 表示 $f(x), g(x), h(x)$ 的最大公因子.

现证 $((f(x), g(x)), h(x)) \sim (f(x), g(x), h(x))$. 即 $((f(x), g(x)), h(x))$ 为 $f(x), g(x), h(x)$ 的最大公因子.

令 $d(x) = ((f(x), g(x)), h(x))$.

故 $d(x) \mid h(x)$, $d(x) \mid (f(x), g(x))$

由 $(f(x), g(x)) \mid f(x)$, $(f(x), g(x)) \mid g(x)$.

知 $d(x) \mid f(x)$, $d(x) \mid g(x)$. 又 $d(x) \mid h(x)$.

故 $\overset{d(x)}{\cancel{h(x)}}$ 为 $f(x), g(x), h(x)$ 的公因子

又设 $v(x)$ 为 $f(x),g(x),h(x)$ 的任一公因子

则有 $v(x)\mid f(x)$, $v(x)\mid g(x) \Rightarrow v(x)\mid(f(x),g(x))$

又 $v(x)\mid h(x) \Rightarrow v(x)\mid((f(x),g(x)),h(x))$.

即 $v(x)\mid d(x)$.

得 $d(x)$ 为 $f(x),g(x),h(x)$ 的最大公因子.

同理可证 $(f(x),(g(x),h(x)))$ 也为 $f(x),g(x),h(x)$ 的最大公因子.

故二者皆为 $f(x),g(x),h(x)$ 的最大公因子.

故 $(f(x),(g(x),h(x))) \sim ((f(x),g(x)),h(x))$.

7. $f_1(x)\cdots f_s(x)$ 的最大公因子为 ~~$(((f_1(x),f_2(x)),f_3(x)),f_4(x)\cdots)$~~

$$(\cdots(((f_1(x),f_2(x)),f_3(x)),f_4(x))\cdots\cdots f_s(x)) \quad (s\geq 2)$$

现给予证明.

当 $s=2$ 时, 显然成立.

当 $s=3$ 时, 6(3)已证明.

不妨设当 $s=n-1$ 时, 结论成立.

令 $d_{n-1}(x)=(\cdots((f_1(x),f_2(x)),f_3(x))\cdots f_{n-1}(x))$.

故由假设条件 $d_{n-1}(x)$ 为 $f_1(x)\cdots f_{n-1}(x)$ 的最大公因子.

现证~~时~~当 $s=n$ 时, 结论仍成立.

令 $d_n(x)=(d_{n-1}(x),f_n(x))$.

则 $d_n(x) \mid f_n(x)$，$d_n(x) \mid d_{n-1}(x)$.

又 $d_{n-1}(x) \mid f_i(x)$ $(i=1,2\cdots n-1)$.

故 $d_n(x) \mid f_i(x)$ $(i=1,2\cdots n)$.

得 $d_n(x)$ 为 $f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 的公因子.

令 $f_1(x)\cdots f_n(x)$ 的任一公因子为 $h(x)$.

则 $h(x) \mid f_i(x)$ $(i=1,2\cdots n-1)$. $\Longrightarrow h(x) \mid d_{n-1}(x)$.

又 $h(x) \mid f_n(x) \Longrightarrow h(x) \mid (f_n(x), d_{n-1}(x)) = d_n(x)$

故 $d_n(x)$ 为 $f_1(x),\cdots f_n(x)$ 的最大公因子.

~~由 $(f_1(x), f_2(x)) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$~~

由于 $\exists\, a_1(x), a_2(x)$. $(f_1(x), f_2(x)) = a_1(x) f_1(x) + a_2(x) f_2(x)$

故 $\exists\, a_3(x), a_4(x)$. $((f_1(x), f_2(x)), f_3(x)) = a_3(x)(a_1(x) f_1(x) + a_2(x) \cdot f_2(x)) + a_4(x) f_3(x)$

$= a_1(x) \cdot a_3(x) \cdot f_1(x) + a_2(x) \cdot a_3(x) \cdot f_2(x) + a_4(x) \cdot f_3(x)$

依次下去，由数学归纳法可知，$\exists\, u_1(x), \cdots u_n(x)$

使得 $d_n(x) = u_1(x) \cdot f_1(x) + \cdots + u_n(x) \cdot f_n(x)$.

即 $d(x) = u_1(x) \cdot f_1(x) + \cdots + u_s(x) \cdot f_s(x)$.

若 $f_1(x), \cdots f_s(x)$ 互素，则令 $d(x) = 1$ 可得

$u_1(x) f_1(x) + \cdots + u_s(x) f_s(x) = 1$.

8. 由 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 是 d 次齐次多项式.

则不妨设 $f = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} a_{i_1 i_2 \cdots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$，$(i_1 + \cdots + i_n = d)$.

故 $f(tx_1, \cdots tx_n) = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} a_{i_1 i_2 \cdots i_n} (tx_1)^{i_1} (tx_2)^{i_2} \cdots (tx_n)^{i_n}$

即 $f(tx_1,\cdots,tx_n)=t^{i_1+\cdots+i_n}\cdot\sum_{i_1 i_2\cdots i_n} a_{i_1 i_2\cdots i_n}(x_1)^{i_1}(x_2)^{i_2}\cdots(x_n)^{i_n}$

$= t^d\cdot f(x_1,\cdots,x_n)$.

设 $f=\sum_{i=a}^{b} g_i$，g_i是f中i次项的和.

则 $f(tx_1\cdots tx_n)=\sum_{i=a}^{b} t^i\cdot g_i$

$t^d f(x_1,\cdots x_n)=t^d\cdot\sum_{i=a}^{b} g_i$

由 $f(tx_1,\cdots tx_n)=t^d f(x_1\cdots x_n)$. $\forall t$.

则 $\sum_{i=a}^{b} t^i g_i - t^d\cdot\sum_{i=a}^{b} g_i=\sum_{i=a}^{b}(t^i-t^d)\cdot g_i=0$. $\forall t$.

故当 $i\neq d$ 时，$g_i=0$. 否则存在关于t的多项式，对于$\forall t$，该多项式值恒为0. 此显然不成立

故 f是d次齐次多项式.

9.(1). $f(x)=g(x)\cdot(2x^2+3x+11)+(25x-5)$

(2) $f(x)=g(x)(\frac{1}{3}x-\frac{7}{9})-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}$

10.(1) 记 ~~$d(x)=f$~~ $f(x)=d(x)\cdot f_1(x)$, $g(x)=d(x)\cdot g_1(x)$.

由$d(x)$为$f(x)$, $g(x)$的最大公因子. 则 f_1, g_1互素.

故 $\exists$ $w(x)$, $h(x)$. 使 $1=w(x)\cdot f_1(x)+h(x)\cdot g_1(x)$.

现证：$\exists$ $u(x)$, $v(x)\in K[x]$. $\deg u(x)<\deg g_1(x)$., $\deg v(x)$ $<\deg f_1(x)$. 使 $u(x)f_1(x)+v(x)\cdot g(x_1)=1$.

记 ~~$h(x)$~~ $w(x)=g_1(x)\cdot r_1(x)+u(x)$. , ~~显然有deg $u(x)$~~

此时，自然有 $\deg u(x) < \deg g_1(x)$.

将 $h(x) = g_1(x)\cdot r_1(x) + u(x)$ 代入可得

$1 = u(x)\cdot f_1(x) + h(x)\cdot g_1(x)$

$= [g_1(x)\cdot r_1(x) + u(x)]\cdot f_1(x) + h(x)\cdot g_1(x)$

$= u(x)\cdot f_1(x) + g_1(x)[r_1(x)\cdot f_1(x) + h(x)]$

由 $\deg u(x) < \deg g_1(x)$. 则 $\deg u(x)\cdot f_1(x) < \deg g_1(x) + \deg f_1(x)$

故 $\deg[g_1(x)(r(x)\cdot f_1(x) + h(x))] < \deg g_1(x) + \deg f_1(x)$

即 $v(x) = r(x)\cdot f_1(x) + g_1(x)$. $\deg v(x) < f_1(x)$. 证毕

(2). 假设存在 $u'(x) \neq u(x)$, $v'(x) \neq v(x)$. 满足上式

则可得 [redacted] $(u(x) - u'(x))f(x) = (v'(x) - v(x))\cdot g(x)$.

即 $(u(x) - u'(x))\cdot f_1(x) = (v'(x) - v(x))\cdot g_1(x)$.

由 $(f_1(x), g_1(x)) = 1$ 则 $f_1(x) \mid (v'(x) - v(x))$

$g_1(x) \mid (u(x) - u'(x))$. 此与(1)矛盾. 故 $u(x)$. $v(x)$ 唯一.

作 业 纸

习题5.2

3021233083

A

院系________ 班级________ 姓名 王炎 第 页

① 对 $f(x)=x^{p-1}-1 \in \mathbb{F}_p[x]$. $p>2$ 是一个素数

$\deg(f(x))=p-1>0$，且 $f(x)$ 首系为1，可知存在 $\alpha_1,\dots,\alpha_{p-1}\in\overline{\mathbb{F}_p}$，使 $f(x)=(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{p-1})$

则 $\alpha_1,\dots,\alpha_{p-1}$ 为 $f(x)$ 的根。

由韦达公式，$a_k=(-1)^k s_k(\alpha_1,\dots,\alpha_{p-1})=0$，对 $1\le k\le p-2$

$a_{p-1}=(-1)^{p-1}\alpha_1\cdots\alpha_{p-1}=-1$

由费马小定理，$\forall u\in\mathbb{F}_p$，$f(u)=0$，$\mathbb{F}_p=\{\bar{0},\bar{1},\dots,\overline{p-1}\}$.

不妨令 $\alpha_1,\dots,\alpha_{p-1}$ 分别等于 $\bar{1},\dots,\overline{p-1}$

则 $a_k=(-1)^k s_k(1,\dots,p-1)=0$，有 $s_k(1,\dots,p-1)\equiv 0 \pmod p$，$1\le k\le p-2$?

$a_{p-1}=(-1)^{p-1}(p-1)!=-1$，由于 $p>2$ 是一个素数，$(-1)^{p-1}=1$，

故有 $(p-1)!=-1$，故 $(p-1)!+1\equiv 0 \pmod p$，得证。

123.

意思就是 $(p-1)!+1$ 和 0 除以 p 的余数相等

② 必要性：由题1可得

充分性：若 $p>2$ 不是一个素数，则有 $p_1p_2=p$，$p_1>1$，$p_2>1$.

当 $p_1\neq p_2$ 时，则 $p_1p_2\mid(p-1)!$，即 $p\mid(p-1)!$，与 $(p-1)!+1\equiv 0 \pmod p$ 矛盾

当 $p_1=p_2$ 时，则 $p_1\mid(p-1)!$ $p=p_1\cdot p_2=p_1^2$，

如果 $(p-1)>2p_1$，则仍有 $p\mid(p-1)!$ 与 $(p-1)!+1\equiv 0 \pmod p$ 矛盾

如果 $p-1<2p_1$，$p_1^2-1<2p_1$，则有 $1<p_1<1+\sqrt{2}$，~~$p_1=2$~~

则 $p_1=2$，$p=4$，$(p-1)!=6$，$6+1\not\equiv 0 \pmod 4$，矛盾，得证。

3、当 $k=1$ 时，$f(x)\in k[x]$ 是非零多项式，$\deg(f(x))=n>0$，$\exists\,\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\bar{k}$ 使 $f(x)=(x-\alpha_1)\cdots(x-$

又 k 是无限域，故 $\exists\,\alpha\in k$，使 $f(\alpha)\neq 0$

假设当 $k=n$ 时成立，则当 $k=n+1$ 时，

$f(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})=f_0(x_1,\dots,x_n)x_{n+1}^{i_1}+\cdots+f_n(x_1,\dots,x_n)x_{n+1}^{i_n}$

若 $\forall\,\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\in k$ 使 $f(\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1})=0$，则有 $\forall\,\alpha_1,\dots,\alpha_n\in k$ 使 $f_i(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$，

即 $f(x_1,\dots,x_n)$ 是零多项式矛盾，故 $\exists\,\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\in k$ 使 $f(\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1})\neq 0$，得证。

$=\sum a\cdots x_1\cdots x_{n+1}$

作 业 纸

3021233083

院系______ 班级______ 姓名 王炎 第 页

4. 当 $k=1$ 时, $f(x)\in \mathbb{F}_p[x]$ 非零 且 $\deg(f(x))<p$, ~~由定~~ $(\bar{1}\cdot\bar{2}\cdots\overline{p-1})\cdot u^{p-1}=\bar{1}\cdot\bar{2}\cdots\overline{p-1}$, $u^{p-1}=$

故若 $\forall \alpha\in\mathbb{F}_p$ 有 $f(x)=0$, 则与 $f(x)$ 非零矛盾.

假设当 $k=n$ 时结论成立, 则当 $k=n+1$ 时,

$$f(x_1,\dots,x_{n+1})=f_0(x_1,\dots,x_n)x_{n+1}^{i_1}+\cdots+f_{n(p-1)}(x_1,\dots,x_n)x_{n+1}^{i_{n(p-1)}}$$

若 $\forall$ ~~$\alpha\in$~~ $\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\in\mathbb{F}_p$ 有 $f(\alpha_1,\dots,x_{n+1})=0$, 则有 $\forall\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}_p$ 使 $f_i(x_1,\dots,x_n)=0$, 与假设矛盾

5. 对 $f(x_1,\dots,x_n)$ 进行带余除法, 有

$f(x_1,\dots,x_n)=g_1(x_1,\dots,x_n)(x_1^p-x_1)+f_1(x_1,\dots,x_n)$, 同理对 $f_1(x_1,\dots,x_n)$ 带余~~除~~除法

$f_1(x_1,\dots,x_n)=g_2(x_1,\dots,x_n)(x_2^p-x_2)+f_2(x_1,\dots,x_n)$, 依次类推.

$\cdots\cdots$

$f_{n-1}(x_1,\dots,x_n)=g_n(x_1,\dots,x_n)(x_n^p-x_n)+f_n(x_1,\dots,x_n)$, 令 $f^*(x_1,\dots,x_n)=f_n(x_1,\dots,x_n)$

综上则有 $f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n g_i(x_1,\dots,x_n)(x_i^p-x_i)+f^*(x_1,\dots,x_n)$, 若有 $x_i^p-x_i=0$, 则有 $f(x_1,\dots,x_n)=f^*(x_1,\dots,x_n)$

由带余除法可知, ~~$\deg f^*>p$~~ $f^*(x_1,\dots,x_n)$ 为零多项式或 $\deg f^*\leq\deg f$. 故 $\deg f^*\leq\deg f$.

对 $f_i(x_1,\dots,x_n)=g_{i+1}(x_1,\dots,x_n)(x_{i+1}^p-x_{i+1})+f_{i+1}(x_1,\dots,x_n)$,

有 $\deg f_{i+1}<\deg(x_{i+1}^p-x_i)=p$, $\deg_{x_j}(f_{i+1})\leq\deg(f_{i+1})<p$. 故有 $\deg_{x_i}(f^*)<p$ $(1\leq i\leq n)$

6. 充分性: $\exists g_i(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{F}_p[x_1,\dots,x_n]$ 使 $f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n g_i(x_1,\dots,x_n)(x_i^p-x_i)$

由费马小定理, 对 $f(x)=x^p-x$, 有 $f(u)=0$, $\forall u\in\mathbb{F}_p$

则 $\forall\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}_p$, 有 $\alpha_i^p-\alpha_i=0$, ~~即有~~

故 $f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\sum_{i=1}^n g_i(\alpha_1,\dots,\alpha_n)(\alpha_i^p-\alpha_i)=0$, 即 $f_{\mathbb{F}_p}:\mathbb{F}_p^n\to\mathbb{F}_p$ 是零函数

必要性: 由第5题知, $f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n g_i(x_1,\dots,x_n)(x_i^p-x_i)+f^*(x_1,\dots,x_n)$

$f(x_1,\dots,x_n)$ 是零函数, 即 $\forall\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}_p$, 有 $f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$,

故 $\sum_{i=1}^n g_i(\alpha_1,\dots,\alpha_n)(\alpha_i^p-\alpha_i)+f^*(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$

由费马小定理, $f^*(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$, 则 $f^*(x_1,\dots,x_n)$ 是零函数

故有 $f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n g_i(x_1,\dots,x_n)(x_i^p-x_i)$. 得证.

作 业 纸

3021233083

院系________ 班级________ 姓名 王炎 第 页

7. 由费马定理，$f(x)=x^p-x$，$\forall u\in\mathbb{F}_p$ 有 $f(u)=0$，

可知，$f(x)=1-x^{p-1}$ 符合题目所给条件，

不妨令 $f(x_1,\dots,x_n)=(1-x_1^{p-1})g(x_2,\dots,x_n)+r(x_1,\dots,x_n)$　$\deg_{x_i}(g)<p\ (1\le i\le n)$

若 $r(x_1,\dots,x_n)\neq 0$，则 $\deg r<p-1$，又有 $f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0+r(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$

即 $\forall$ 非零 $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{F}_p$，有 $r(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$，矛盾，故 $r(x_1,\dots,x_n)=0$

则可知，$g(x_2,\dots,x_n)$ 满足题目所给条件，

令 $g(x_2,\dots,x_n)=(1-x_2^{p-1})h(x_3,\dots,x_n)$，依次类推，

则有 $f(x_1,\dots,x_n)=(1-x_1^{p-1})\cdots\cdots(1-x_n^{p-1})$．得证

令 $F(x)=f(x_1,\dots,x_n)-(1-x_1^{p-1})\cdot\cdots\cdot(1-x_n^{p-1})$

由题5，$F(x)=\sum_{i=1}^{n}g_i(x_1,\dots,x_n)(x_i^p-x_i)+f^*(x_1,\dots,x_n)$

$\forall\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}_p$，有 $F(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=f^*(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$，$F(0,\dots,0)=0=f^*(0,\dots,0)$

故 $F(x)=\sum_{i=1}^{n}g_i(x_1,\dots,x_n)(x_i^p-x_i)$，由题6可知 $F(x)$ 为零函数

则有 $f(x_1,\dots,x_n)=(1-x_1^{p-1})\cdots(1-x_n^{p-1})$

8. 若 $\forall\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}_p$，$\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 不全为零，有 $f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\neq 0$．

令 $g(x_1,\dots,x_n)=1-f(x_1,\dots,x_n)^{p-1}$

由第5题，$g(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}h_i(x_1,\dots,x_n)(x_i^p-x_i)+g^*(x_1,\dots,x_n)$

$g(x_1,\dots,x_n)$ 满足，~~deg~~ $g(0,\dots,0)=1$，$\forall$ 非零 $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{F}_p^n$ 有 $g(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$，

$g(0,\dots,0)=0+g^*(0,\dots,0)=1$，$g(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0+g^*(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$．

并且 $\deg_{x_i}(g^*)<p\ (1\le i\le n)$，故 $g^*(x_1,\dots,x_n)$ 满足第7题条件

有 $g^*(x_1,\dots,x_n)=(1-x_1^{p-1})\cdots\cdots(1-x_n^{p-1})$，$\deg(g^*)=n(p-1)$

而 $\deg(g)=m(p-1)$，又有 $0<m<n$，$p-1>0$，与 $\deg(g^*)\le\deg(g)$

故存在不全为零的 $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}_p$ 使 $f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$，得证．

高等代数
李[illegible]
3021233062.

天津大学
Tianjin University

A+

~~作业~~

5.3.

1. $f(x)=x^2+bx+c=0$.

得 $x_1+x_2=-b$. $x_1 \cdot x_2=c$.

得 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1 \cdot x_2$

$=b^2-2c$.

故 $D(f)=\begin{vmatrix} 2 & x_1+x_2 \\ x_1+x_2 & x_1^2+x_2^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -b \\ -b & b^2-2c \end{vmatrix}=2(b^2-2c)-b^2=b^2-4c$

2. $f(x)=x^3+ax+b=0$.

得 $x_1+x_2+x_3=0$. $x_1 \cdot x_2+x_1 \cdot x_3+x_2 \cdot x_3=a$.

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3=-b$.

得 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1 \cdot x_2+x_1 \cdot x_3+x_2 \cdot x_3)=-2a$.

$x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(x_1+x_2+x_3)-(x_1+x_2+x_3)(x_1 \cdot x_2$
$+x_1x_3+x_2x_3)+3x_1 \cdot x_2 \cdot x_3=0-0-3b=-3b$.

$x_1^4+x_2^4+x_3^4=(x_1^3+x_2^3+x_3^3)(x_1+x_2+x_3)-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$
$(x_1 \cdot x_2+x_1 \cdot x_3+x_2 \cdot x_3)+(x_1+x_2+x_3)(x_1 \cdot x_2 x_3)=2a^2$

故 $D(f)=\begin{vmatrix} 3, & P_1, & P_2 \\ P_1 & P_2, & P_3 \\ P_2 & P_3 & P_4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3, & 0, & -2a \\ 0, & -2a, & -3b \\ -2a & -3b & 2a^2 \end{vmatrix}=-4a^3-27b^2$

天津大学
Tianjin University

3.(7) 记 $\theta_i = \sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_i\le p-1} k_1 k_2 \cdots k_i$. 令 $\theta_0 = 1$

由韦达公式: $\prod_{i=1}^{p-1}(x-i) = \sum_{i=0}^{p-1} x^i \theta_{p-1-i} \equiv x^{p-1}-1 \pmod p$.

故 $\theta_i \equiv 0 \pmod p$ $(i\ge 1)$, $\theta_{p-1} = -1 \equiv -1 \pmod p$.

由牛顿公式得 $S_k = \sum_{i=1}^{p-1} i^k = \sum_{i=1}^{k} \theta_i S_{k-i}(-1)^{i+1}$

当 $k \le p-2$ 时. 由上式知 $S_k \equiv 0 \pmod p$.

$k = p-1$ 时. $S_{p-1} \equiv \theta_{p-1} \equiv -1 \pmod p$.

此处:

由 Fermat 定理可将所有大于 $p-1$ 的 k 归结于上述情况.

(注: 该解法为与知乎用户讨论所得. 该解法我至今仍有疑虑. 若该解法正确, 也还请老师答疑时讲讲此题, 谢谢老师了).

这个我没看懂. 咱们可以单独讨论

4. $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$

$= s_1 \cdot s_2 + f_1$

$= (x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3) + f_1$

$= x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + 3x_1x_2x_3 + f_1$

得 $f_1 = -3x_1x_2x_3 = -3s_3$.

故 $f = g(s_1,s_2,s_3) = s_1 \cdot s_2 - 3s_3$.

5. 由 $f(x_1,\cdots x_n) \in Q[x_1,\cdots x_n]$ 为反对称多项式.

得 $f(x_1\cdots x_i\cdots x_j\cdots x_n) = -f(x_1\cdots x_j\cdots x_i\cdots x_n)$. $(i<j)$.

令 $x_i = x_j$ 得 $f = 0$.

故 $(x_j - x_i) \mid f$ $(i<j)$.

由此可得 $\prod_{i<j}(x_j-x_i) \mid f(x_1,\cdots,x_n)$.

令 $h(x_1,\cdots,x_n)=\dfrac{f(x_1,\cdots x_n)}{\prod_{i<j}(x_j-x_i)}$.

由于，$\prod_{i<j}(x_j-x_i)$ 均为反对称多项式.

则得 $h(x_1\cdots x_n)\in Q[x_1\cdots x_n]$ 为对称多项式.

由此时 $g(x_1\cdots x_n)$ 即为 $h(x_1,\cdots,x_n)$，证毕

6. (1) 由 Newton 公式，当 $1\le k\le n$ 时有.

$$\begin{cases} p_1=s_1 \\ p_1s_1-p_2=2s_2 \\ s_2p_1-p_2s_1+p_3=3s_3 \\ \cdots\cdots \\ s_{k-1}p_1-s_{k-2}p_2+\cdots+(-1)^{k-2}s_1p_{k-1}+(-1)^{k-1}p_k=ks_k \end{cases}$$

此可视作 $p_1,p_2\cdots p_k$ 为未知量的线性方程组，由此求解 p_k.

其系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ s_1 & -1 & & & \\ s_2 & -s_1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ s_{k-1} & -s_{k-2} & \cdots & (-1)^{k-2}s_1 & (-1)^{k-1} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)}.$$

而 $$D_k=\begin{vmatrix} 1 & & & & s_1 \\ s_1 & -1 & & & 2s_2 \\ s_2 & -s_1 & 1 & & 3s_3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ s_{k-1} & -s_{k-2} & \cdots & (-1)^{k-2}s_1 & ks_k \end{vmatrix}$$

将第 j 列乘 $(-1)^{j-1}$，$j=2,3,\cdots k-1$ 再将最后一列经 $k-1$ 次术

将第 j 列乘 $(-1)^{j-1}$，$j=2,3,\cdots k-1$，再将最后一列经 $k-1$ 次相邻两列

对换至第一列，得

$$D_k = (-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & & & \\ 2s_2 & s_1 & 1 & & \\ 3s_3 & s_2 & s_1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ ks_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \cdots & s_1 \end{vmatrix}$$

由 Cramer 法则得

$$p_k = \frac{D_k}{D} = \begin{vmatrix} s_1 & 1 & & & \\ 2s_2 & s_1 & 1 & & \\ 3s_3 & s_2 & s_1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ ks_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \cdots & s_1 \end{vmatrix}$$

(2) 由数学归纳法.

$k=1$，$k=2$ 时，易验证，等式显然成立.

设等式对所有阶数小于等于 $k-1$ 的行列式等式均成立，当阶数为 k 时，把右边的行列式按最后一行展开，得

$$\text{右边} = \frac{1}{k!}\left[(-1)^{k+1} p_k (k-1)! + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k+j+1} p_{k-j} M_{k-j}\right] \quad ①$$

M_{k-j} 是 p_{k-j} 的余子式，$1 \le j \le k-1$. 利用归纳假设有

$$M_{k-j} = \begin{vmatrix} p_1 & 1 & & & & & & & \\ p_2 & p_1 & 2 & & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & & & \\ p_{j-1} & p_{j-2} & \cdots & p_1 & j-1 & & & & \\ p_j & p_{j-1} & \cdots & p_2 & p_1 & & & & \\ p_{j+1} & p_j & \cdots & p_3 & p_2 & j+1 & & & \\ p_{j+2} & p_{j+1} & \cdots & p_4 & p_3 & p_1 & j+2 & & \\ \vdots & & & & & \vdots & \ddots & \ddots & \\ p_{k-1} & p_{k-2} & \cdots & p_{k-j+2} & p_{k-j+1} & p_{k-j-1} & & p_1 & k-1 \end{vmatrix}$$

代入①，利用Newton公式，得

右边 $= \frac{(-1)^{k+1}}{k}[p_k + \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j p_{k-j} s_j] = s_k$.

因此，对一切 $1 \le k \le n$，等式成立。

5.4.

1. 在 $\overline{K}[x]$ 中，f, g, h 可记为

$f(x) = a_0(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$.

$g(x) = b_0(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_m)$.

$h(x) = c_0(x-\gamma_1)\cdots(x-\gamma_k)$.

则 $f(x)\cdot g(x) = a_0\cdot b_0(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_n)$.

则 $Res(fg, h) = (a_0b_0)^k \cdot c_0^{m+n} \cdot \prod_{i,j}(\alpha_i - \gamma_j)\cdot\prod_{i,j}(\beta_i - \gamma_j)$.

$Res(f, h) = a_0^k \cdot c_0^n \cdot \prod_{i,j}(\alpha_i - \gamma_j)$

$Res(g, h) = b_0^k \cdot c_0^m \cdot \prod_{i,j}(\beta_i - \gamma_j)$.

则可得 $Res(fg, h) = Res(f, h)\cdot Res(g, h)$.

2. 记 f, g 首项系数分别为 a_0, b_0 $(a_0, b_0 \ne 0)$. 令 $c_0 = \deg f$. $d_0 = \deg g$

则 $D(fg) = (-1)^{\frac{(c_0+d_0)(c_0+d_0-1)}{2}} \cdot (a_0\cdot b_0)^{-1} Res(fg, fg'+f'g)$

在 $\overline{K}[x]$ 中，f, g 可记为

$f(x) = a_0(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$

$g(x) = b_0(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_m)$.

则 $f(x)\cdot g(x) = a_0b_0(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_m)$.

则令 $(c_1,\cdots,c_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$. $(c_{n+1},\cdots,c_{n+m})=(\beta_1,\cdots\beta_m)$

则 $D(fg)=(a_0b_0)^{2(m+n)-2}\prod_{i>j}(c_i-c_j)^2$

$D(f)=a_0^{2n-2}\prod_{i>j}(\alpha_i-\alpha_j)^2$

$D(g)=b_0^{2m-2}\prod_{i>j}(\beta_i-\beta_j)^2$

$[Res(f,g)]^2=a_0^{2m}\cdot b_0^{2n}\prod_{i,j}(\alpha_i-\beta_j)^2$

则 $D(f)\cdot D(g)[Res(f,g)]^2=(a_0 b_0)^{2(m+n)-2}\prod_{i>j}(c_i-c_j)^2=D(fg)$.

得证.

3.36 $\deg f(x)=n$.

则 $Res(f(x), x-a)=(-1)^n\cdot f(a)$.

$D(x^n+a)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}Res(x^n+a, n\cdot x^{n-1})$.

又 $Res(x^n+a, n\cdot x^{n-1})=$

$$\begin{array}{c l}\left|\begin{matrix} 1, & 0 & \cdots & , 0, & a & & & \\ & 1, & 0 & \cdots & ,0. & 0. & a & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & 1, & 0, & \cdots & 0, & a \\ 0, & n, & \cdots & & & & & 0 \\ 0, & 0, & n, & \cdots & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ 0, & \cdots & & & n & \cdots & & 0 \end{matrix}\right| & \begin{matrix} \\ n-1\text{行} \\ \\ \\ n\text{行} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\end{array}$$

则 $Res(x^n+a, n\cdot x^{n-1})=n^n\cdot a^{n-2}\times(-1)^{n\times(n-2)}$

故 $D(x^n+a)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\times(-1)^{n\times(n-2)}\times n^n\cdot a^{n-2}$

$=(-1)^{\frac{(3n-5)n}{2}}\times n^n\cdot a^{n-2}$

天津大学 Tianjin University

4. 由 $x^n-1=(x-1)\cdot f(x)$.

则由2.结论知 $D(x^n-1)=D(x-1)\cdot D(f(x))[Res(x-1,f(x))]^2$

又由3. $D(x^n-1)=(-1)^{\frac{(3n-5)n}{2}}\times n^n\times(-1)^{n-2}$

$$=(-1)^{\frac{3n^2-3n-4}{2}}\times n^n$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\times n^n$$

由 $D(x-1)=1$, $[Res(x-1,f(x))]^2=f^2(1)=n^2$

则 $D(f(x))=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\times n^{n-2}$

天津大学 Tianjin University

高代

提瑞 3021233064

习题六.

T6.1.1. 证明：对元素个数进行数学归纳.

当 $n=1$ 时，此时有 $k_1\alpha_1=0$. 由于 α 非零，故 $k_1=0$. 成立

当 $n=s-1$ 时，假设 $\alpha_1,\cdots\alpha_{s-1}$ 线性无关.

当 $n=s$ 时，则 $\exists k_1,\cdots k_s$ s.t. $k_1\alpha_1+\cdots k_s\alpha_s=0$.

同时取映射 A，则 $k_1\lambda_1\alpha_1+\cdots+k_s\lambda_s\alpha_s=0$.

且同时乘上 λ_1，则 $k_1\lambda_1\alpha_1+\cdots+k_s\lambda_1\alpha_s=0$.

相减有 $0+k_2(\lambda_2-\lambda_1)\alpha_2+\cdots+k_s(\lambda_s-\lambda_1)\alpha_s=0$.

由于 $i\neq j$，$\lambda_i-\lambda_j\neq0$.

则 $k_2=\cdots=k_s=0$. 代入得 $k_1=0$.

得证.

A

T6.1.2. 证明：(1). $\forall\alpha\in \mathrm{Ker}(A)$，则有 $A\alpha=0$ 成立.

由于 $0\in\mathrm{Ker}(A)$. A 是线性算子.

则 $A(\mathrm{Ker}(A))\subset\mathrm{Ker}(A)$.

$\forall\beta\in\mathrm{Im}(A)$，则有 $\beta\in\mathrm{Im}(A)\in V$，其中 $\mathrm{Im}(A)=\{A\gamma\mid\forall\gamma\in V\}$.

故 $A\beta\in\mathrm{Im}(A)$.

(2) $\forall\alpha\in V_1+V_2$，$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，其中 $\alpha_1\in V_1$，$\alpha_2\in V_2$.

$\Rightarrow A\alpha=A\alpha_1+A\alpha_2$，由于 V_1，V_2 是不变子空间，则有 $A\alpha_1\in V_1$，$A\alpha_2\in V_2$

故 $A\alpha\in V_1+V_2$. 成立.

$\forall \beta \in V_1 \cap V_2$. 由于$V_1, V_2$是不变子空间.

$\beta \in V_1$且$\beta \in V_2$

$\Rightarrow A\beta \in V_1$, $A\beta \in V_2$

故$A\beta \in V_1 \cap V_2$. 为不变子空间得证.

1.3. 证明: 若线性变换A有特征值λ_1.

则$A\alpha = \lambda_1 \alpha$. 记其中一个特征向量为$\alpha_1$.

则$\langle \alpha_1 \rangle$是A的1维不变子空间.

下证: 在复数域C上, A一定有特征值λ.

则$\chi_A(x) = |xI_n - A| = \begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x-a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x-a_{nn} \end{vmatrix} = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \in C[\lambda]$

由于在复数域C上, 存在$\lambda_1, \cdots \lambda_n \in C$ ($\lambda_1, \cdots \lambda_n$可以有相同元)

s.t. $|\lambda I_n - A| = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$. (5.2定理5.2.2).

故A中一定有特征值λ.

故A必有一维不变子空间得证.

6.1.4. 证明: ①A有一个特值征λ_1. 则$A\alpha = \lambda_1\alpha$. 记其中一个特征向量为$\alpha_1$

$\Rightarrow \langle \alpha_1 \rangle$是A的1维不变子空间.

② A中没有实特征值.

依定理5.2.2. R的代数闭包为C.

$f(x) = |xI_n - A|$为首1多项式, $\exists \lambda_1, \cdots \lambda_n \in C$ s.t. $f(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$.

天津大学
Tianjin University

固定3-组基

由于A没有实特征值.

则 λ_i 可以表示成复数形式.

不妨取 $\lambda_1 = a+bi$.

则 λ_1 的特值向量为 $X+iY$. 其中 $X, Y \in R^n$. $A(X+iY)=(a+bi)(X+iY)$. X, Y 俭关

故 $AX = aX - bY$. $AY = bX + aY$.

令 $\beta_1 = (e_1, \cdots e_n)X$, $\beta_2 = (e_1, \cdots e_n)Y$.

X, Y 为 β_1, β_2 坐标

下证 β_1, β_2 线性无关

则 $A\beta_1 = a\beta_1 - b\beta_2$, $A\beta_2 = b\beta_1 + a\beta_2$.

令 $W = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$.

且 $A\beta_1 \in W$, $A\beta_2 \in W$. W 为 A 的一个不变子空间.

若 β_1, β_2 线性相关, 故 X, Y 线性相关成立.

不妨设 $X \neq 0$. 则 $Y = cX$.

代入有 $AX = aX - bcX = (a-bc)X$.

$\Rightarrow A\beta_1 = (a-bc)\beta_1$, $\beta_1 \neq 0$. 故与A有实特征值矛盾.

β_1, β_2 线性无关, 且 $\dim W = 2$. 为2维不变子空间.

T6.1.5. 证明：若$l \in V^*$是$V^* \xrightarrow{A^*} V^*$的特征向量，记$\lambda$为特征值.

即$A^* l = \lambda l$

故记$W = \{v \in V \mid l(v) = 0\}$，$W$为不变子空间.

由于$l(v) = 0$.是唯一的齐次线性方程 → 高代A第三章 T3.18.

故$\dim_K(W) = n-1$.

下证W为不变子空间.

则$\forall \alpha \in W$，则有$l(\alpha) = 0$.

则$l(A\alpha) = A^* l(\alpha) = \lambda l(\alpha) = 0 . \in W$. (Hs拉回).

得证.

<一>.

T6.1.6. 证明：若$\ker(A^s) \cap \mathrm{Im}(A^s) = \{0\}$时则$\ker(A^s) \oplus \mathrm{Im}(A^s)$为直和.

则记$W = \ker(A^s) \cap \mathrm{Im}(A^s)$

$\forall \alpha \in \ker(A^s)$且$\alpha \in \mathrm{Im}(A^s)$.则$\exists \beta \in V$ s.t. $\alpha = A^s \beta$.

引理：下证对于任意$k \geq s$，均有$\mathrm{Im}A^k = \mathrm{Im}A^{k+1}$成立.

由于$\mathrm{Im}A^{n+1} \subseteq \mathrm{Im}A^n \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Im}A^2 \subseteq \mathrm{Im}A \subseteq V$.

上述$n+2$个子空间的维数在0与n之间，依抽屉原理可知

$\exists s \in [0, n]$, s.t. $\mathrm{Im}A^s = \mathrm{Im}A^{s+1}$ (题目已知)

故由于$\mathrm{Im}A^{k+1} \subseteq \mathrm{Im}A^k$显然，

$\forall \alpha \in \mathrm{Im}A^k$，则$\exists \beta \in V$. s.t. $\alpha = \mathrm{Im}A^k(\beta)$.

由于$A^s(\beta) \in \mathrm{Im}A^s = \mathrm{Im}A^{s+1}$. 故$\exists \gamma \in V$. s.t. $A^s(\beta) = A^{s+1}(\gamma)$.

$\Rightarrow \alpha = A^k(\beta) = A^{k-s}(A^s(\beta)) = A^{k-s}(A^{s+1}(\gamma)) = A^{k+1}(\gamma) \in \mathrm{Im}A^{k+1}$. 引理得证.

且由于$\ker A^j \subseteq \ker A^{j+1}$，依维数公式，对于$j \geq s$有$\dim\ker(A^j) = \dim V - \dim\mathrm{Im}A^j$为常数

故 $\ker A^s = \ker A^{s+1} = \cdots$ 成立.

直和等价 由于 $\alpha = A^s(\beta)$, $A^s(\alpha) = 0$. 则 $0 = A^s(\alpha) = A^{2s}(\beta)$ (迭加映射)

即 $\beta \in \ker A^{2s} = \ker A^s$. 于是 $\alpha = A^s(\beta) = 0$.

表出 且 $\forall \alpha \in V$. 由于 $A^s(\alpha) \in \mathrm{Im} A^s = \mathrm{Im} A^{2s}$. 故 $A^s(\alpha) = A^{2s}(\beta)$. $\beta \in V$.

$\Rightarrow \alpha = A^s(\beta) + (\alpha - A^s(\beta))$, 由于 $A^s(\alpha - A^s(\beta)) = 0$

故 $(\alpha - A^s(\beta)) \in \ker A^s$. 故 $V = \mathrm{Im} A^s + \ker A^s$, 且 $\mathrm{Im} A^s \cap \ker A^s = \{0\}$.

$\Rightarrow$ 直和得证.

(二) 维数公式应用.

直和等价 由于 $\dim_K(V) = \dim_K(\ker(A^s)) + \dim_K(\mathrm{Im}(A^s))$. 定理 3.3.1.

公式证明: 设 $\mathrm{Im}(A^s)$ 的一组基为 $\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_s)$

$\ker(A^s)$ 的一组基为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_t$, 则 $e_1, \cdots, e_s, \alpha_1, \cdots, \alpha_t$ 为基 (V中).

则 $\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_t\alpha_t + u_1e_1 + \cdots + u_se_s = 0$.

故 $0 = A^s(\lambda_1\alpha_1 + \cdots + u_1e_1 + \cdots + u_se_s) = u_1A^s(e_1) + \cdots + u_sA^s(e_s)$.

从而 $u_1 = \cdots = u_s = 0$. 故 $\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_t\alpha_t = 0$.

从而 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_t = 0$

张成 V.

$\forall \gamma \in V$, 则 $\exists b_1, \cdots, b_s \in K$ s.t. $A^s(\gamma) = b_1A^s(e_1) + \cdots + b_sA^s(e_n)$.

即 $A^s(\gamma - b_1e_1 - \cdots - b_se_s) = 0$. $\gamma - b_1e_1 - \cdots - b_se_s \in \ker A^s$.

故 $\gamma = a_1\alpha_1 + \cdots a_t\alpha_t + b_1e_1 + \cdots + b_se_s$ ✓

表出 且 $\forall \alpha \in V$, 由于 $A^s(\alpha) \in \mathrm{Im} A^s = \mathrm{Im} A^{2s}$. 则 $A^s(\alpha) = A^{2s}(\beta)$. $\beta \in V$

$\alpha = A^s(\beta) + (\alpha - A^s(\beta))$. 故 $A^s(\alpha - A^s(\beta)) = 0$. $\alpha - A^s(\beta) \in \ker A^s$. 证毕.

<一>

6.1.7. 证明. 先证明引理：若 A, B 为 $s\times n$, $n\times s$ 矩阵，则

(1) $\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_s \end{vmatrix} \overset{|I_n|}{=} |I_s - AB|$ (2) $\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_s \end{vmatrix} \overset{|I_s|}{=} |I_n - BA|$ (3) $\overset{|I_n|}{|I_s - AB|} = \overset{|I_s|}{|I_n - BA|}$.

(1): $\begin{pmatrix} I_n & B \\ A & I_s \end{pmatrix} \xrightarrow{②+(-A)①} \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & I_s-AB \end{pmatrix}$

于是有 $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & B \\ A & I_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & I_s-AB \end{pmatrix}$

两边取行列式，则有 $\begin{vmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_s \end{vmatrix}\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & B \\ 0 & I_s-AB \end{vmatrix}$

$\Rightarrow |I_n||I_s|\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & B \\ 0 & I_s-AB \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & B \\ 0 & I_s-AB \end{vmatrix}$ 得证.

(2) 同理，(3) 依(1)(2)可知.

则 $\lambda^n|\lambda I_s - AB| = \lambda^n|\lambda(I_s - \frac{1}{\lambda}\underbrace{AB}_{s\times s})| = \lambda^n\lambda\,|I_n - \underbrace{B(\tfrac{1}{\lambda}A)}_{n\times n}| = \lambda^s|\lambda I_n - BA|$.

当 AB 为 n 阶方阵时，得证.

<二>. 若 A, B 至少一个可逆，$|A|\neq 0$

则 $|\lambda I_n - A| = |A^{-1}||\lambda I_n - AB||A| = |A^{-1}(\lambda I_n - AB)A| = |\lambda I_n - BA|$

若 $|A| = |B| = 0$.

则 $\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$

下证 $a_k = (-1)^k \sum\limits_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$ → 所有k阶主子式之和.

记列向量为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，ε_i 表示 $\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \rightarrow$ 第i行

$|\lambda I-A|$ 可以拆开 2^n 个行列式之和：$\begin{vmatrix}\lambda & & & 0\\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ -a_{n1} & - & - & -a_{nn}\end{vmatrix}$

与 $\left|(-\alpha_1,\cdots,-\alpha_{j_1-1},\underset{\uparrow j_1列}{\lambda\varepsilon_{j_1}},\cdots,\underset{\uparrow j_2列}{\lambda\varepsilon_{j_2}},\cdots,\lambda\varepsilon_{j_k},\cdots,-\alpha_n)\right|$ ③ λ在以对角线上由于 $1\le j_1<j_2<\cdots<j_{n-k}\le n$. $k=1,\cdots,n-1$.

若考虑 λ^{n-k} 前面的系数，则 $j_k=n-k$. 经过初等列变换行列式可写成以下形式.

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \hline \lambda & 0 & & \vdots & B \\ 0 & \lambda & & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & \end{array}\right|_{n\times n}$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{n-k列}$　　k阶式

B为A的列向量组成的 $n\times k$ 矩阵.

右式系数令取λ才不为0.

$$\Rightarrow 故此行列式的值为 (-1)^{\overset{划去的行列下标号相同}{(j_1+\cdots+j_{n-k})+(j_1+\cdots+j_{n-k})}}(-A)\begin{pmatrix}j_1', j_2',\cdots, j_k'\\ j_1', j_2',\cdots, j_k'\end{pmatrix} \quad ③$$

$$=(-1)^kA\begin{pmatrix}j_1', j_2',\cdots j_k'\\ j_1', j_2',\cdots j_k'\end{pmatrix}.$$

其中 $\{j_1',\cdots j_k'\}=\{1,2,\cdots n\}\setminus\{j_1,\cdots j_{n-k}\}$. 且 $j_1'<j_2'<\cdots<j_k'$.

$$\Rightarrow ③=(-1)^kA\begin{pmatrix}j_1', j_2',\cdots j_k'\\ j_1', j_2',\cdots j_k'\end{pmatrix}\lambda^{n-k}.$$

故 λ^{n-k} 的系数为 $(-1)^k\sum\limits_{1\le j_1'<j_2'<\cdots<j_k'\le n}A\begin{pmatrix}j_1', j_2',\cdots j_k'\\ j_1', j_2',\cdots j_k'\end{pmatrix}$　$k=1,\cdots,n-1$.

故AB均为n阶方阵. AB与BA的n-k阶主子式之和相等.

即证AB与BA k阶主子式之和相等. $(1\le k\le n)$.

$1 \le r \le n$.

$$AB\begin{pmatrix} i_1, \cdots i_r \\ i_1, \cdots i_r \end{pmatrix} = \sum_{1 \le v_1 < v_2 < \cdots v_r \le n} A\begin{pmatrix} i_1, \cdots i_r \\ v_1, \cdots v_r \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} v_1, \cdots v_r \\ i_1, \cdots i_r \end{pmatrix}$$

$$BA\begin{pmatrix} v_1, \cdots v_r \\ v_1, \cdots v_r \end{pmatrix} = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n} B\begin{pmatrix} v_1 \cdots v_r \\ i_1 \cdots i_r \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_r \\ v_1 \cdots v_r \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n} AB\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_r \\ i_1, \cdots i_r \end{pmatrix} = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots i_r \le n} \sum_{1 \le v_1 < v_2 < \cdots v_r \le n} A\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_r \\ v_1, \cdots v_r \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} v_1, \cdots v_r \\ i_1, \cdots i_r \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{1 \le v_1 < \cdots < v_r \le n} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} B\begin{pmatrix} v_1, \cdots v_r \\ i_1, \cdots i_r \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1, \cdots i_r \\ v_1, \cdots v_r \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{1 \le v_1 < \cdots v_r \le n} BA\begin{pmatrix} v_1, \cdots v_r \\ v_1, \cdots v_r \end{pmatrix}.$$

T6.1.8、证明：设V中一组基为 $e_1,\dots,e_n$，V^*中一组基为 $e_1^*,\dots,e_n^*$. $e_i^*(e_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$

且记$\mathcal{A}$坐标矩阵为A，$\mathcal{A}^*$坐标矩阵为A^*.

$$\Rightarrow \mathcal{A}e_j=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}e_k\,;\quad \mathcal{A}^*e_j^*=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}^*e_k^*.$$

$$e_i^*(\mathcal{A})=\sum_{j=1}^{n}e_i^*\mathcal{A}(e_j)e_j^*=\sum_{j=1}^{n}e_i^*\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{kj}e_k\Big)e_j^*$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\,e_i^*(e_k)e_j^*=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_j^*$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}^*(e_1^*,e_2^*,\dots,e_n^*)=(e_1^*(\mathcal{A}),\dots,e_n^*(\mathcal{A}))$$

$$=\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}e_j^*,\sum_{j=1}^{n}a_{2j}e_j^*,\dots,\sum_{j=1}^{n}a_{nj}e_j^*\Big)$$

$$=(e_1^*,e_2^*,\dots,e_n^*)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \vdots & & & \\ a_{1n} & \cdots & & a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$=(e_1^*,e_2^*,\dots,e_n^*)A^t$$ 转置.

故 $A^*=A^t$

由于 $\gamma_A(x)=|xI_n-A|$，$u_A(x)=u_A(x)$

$\gamma_A(x)=|xI_n-A|=|(xI_n-A)^t|=|xI_n-A^t|=\gamma_{A^*}(x)$.

由于A与A^t相似.

且相似矩阵可以看成在不同基下的$\mathcal{A}$的坐标矩阵

$\Rightarrow u_A(x)=u_{A^*}(x)$ 得证.

W

6.1.9. 证明：由于W是r维子空间

则W中一组基为$e_1^*, \cdots e_r^*$.

$\forall l \in W$，则$l = \alpha_1 e_1^* + \cdots + \alpha_r e_r^*$. 不妨设$l$非零，$\exists \alpha_i \neq 0$.

由于$W^\perp = \{v \in V \mid l(v) = 0, \forall l \in W\}$

故$l(v) = \alpha_1 e_1^*(v) + \alpha_2 e_2^*(v) + \cdots + \alpha_r e_r^*(v) = 0$.

由于$e_1^*, \cdots e_r^*$线性无关

则由l的任意性可知，$e_1^*(v) = \cdots = e_r^*(v) = 0$成立

故共有r个方程组，$W^\perp$为其解空间.

$\dim W^\perp = n - r$得证.

且对于$\alpha, \beta \in W^\perp$，$l(\alpha + \beta) = l(\alpha) + l(\beta) = 0$.

对于任意$\lambda \in K$，$l(\lambda \alpha) = \lambda l(\alpha) = 0$成立.

故$W^\perp$为子空间得证.

(2). 由于W是A^*的不变子空间.

则$\forall l \in W$，均有$A^* l \in W$成立.

故$lA \in W$成立.

若$l = \gamma_1 e_1^* + \cdots + \gamma_r e_r^*$，$lA = t_1 e_1^* + \cdots + t_r e_r^*$.

$\forall \beta \in W^\perp$，故设$W^\perp$的一组基为$\alpha_1, \cdots \alpha_{n-r}$，且$l(\beta) = 0$恒成立.

$\Rightarrow \beta = b_1 \alpha_1 + \cdots b_{n-r} \alpha_{n-r}$，则$e_1^*(\beta) = \cdots = e_r^*(\beta) = 0$.（依(1)可知）.

$lA(\beta) = t_1 e_1^*(\beta) + \cdots + t_r e_r^*(\beta) = 0$.

$= l(\underbrace{A(\beta)}_{\in V}) = \gamma_1 e_1^*(A\beta) + \gamma_2 e_2^*(A\beta) + \cdots + \gamma_r e_r^*(A\beta)$

$\exists \gamma_i \neq 0$. 由于l的任意性，则$e_i^*(A\beta) = 0$.

$\Rightarrow A\beta \in W^\perp$. 得证

阅

(高代) 作 业 纸

第六章 作业6.2+6.3. 系别 应数 班级 求是 姓名 王瑞 3021233064 第 1 页

T6.2.1.(1) "⟹" 当V是循环不变空间时，此时∃$\alpha\in V$，则$V=k[\mathcal{A}]\cdot\alpha$.

则不妨设 $k[x]=x^n-a_1x^{n-1}-\cdots a_n$.

故 $k[\mathcal{A}]\cdot\alpha=\mathcal{A}^n\alpha-a_1\mathcal{A}^{n-1}\alpha-\cdots-a_n\alpha$

$\Rightarrow \alpha,\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}^2\alpha,\cdots\mathcal{A}^{n-1}\alpha$ 是V中一组基. $e_0=\alpha, e_1=\mathcal{A}\alpha,\cdots e_{n-1}=\mathcal{A}^{n-1}\alpha$.

则 $e_i=\mathcal{A}^i\alpha$，$\mathcal{A}(\mathcal{A}^i\alpha)=\mathcal{A}^{i+1}\alpha=e_{i+1}$，$0\le i<n-1$.

得证.

"⟸" 若存在一组基 $e_0,e_1,\cdots e_{n-1}$ s.t $\mathcal{A}e_i=e_{i+1}, 0\le i\le n-1$.

且∃$\alpha\in V$ s.t. $u_{\mathcal{A},\alpha}(x)=u_{\mathcal{A}}(x)$.

$\Rightarrow$ ~~故~~ $\deg u_{\mathcal{A},\alpha}(x)=\deg u_{\mathcal{A}}(x)=\dim_k k[\mathcal{A}]\cdot\alpha\le\dim_k V$.

故 $k[x]=x^t-a_1x^{t-1}-a_2x^{t-2}-\cdots-a_t\in k[x]$. $t\le n$.

且 $k[\mathcal{A}]\cdot\alpha=\mathcal{A}^t\alpha-a_1\mathcal{A}^{t-1}\alpha-a_2\mathcal{A}^{t-2}\alpha-\cdots-a_t\alpha$.

由于 $\mathcal{A}e_0=e_1$，$\mathcal{A}e_1=e_2$，$\cdots\mathcal{A}e_{n-2}=e_{n-1}$，$\mathcal{A}e_{n-1}=e_n$.

$e_n\in V\Rightarrow e_n=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\cdots\lambda_ne_n$.

则 $\mathcal{A}e_0,\mathcal{A}e_1,\cdots\mathcal{A}e_{n-1}$ 线性无关.

$\Rightarrow t\ge n$. $\Rightarrow t=n$ 成立. V是循环空间.

(2). 由于T(1). ∃$e_0,e_1,\cdots e_{n-1}$ s.t $\mathcal{A}e_i=e_{i+1}$，$0\le i<n-1$

$\Rightarrow \mathcal{A}e_0=e_1,\cdots\mathcal{A}e_{n-1}=a_0e_0+a_1e_1+\cdots+a_{n-1}e_{n-1}$

故 $(\mathcal{A}e_0,\mathcal{A}e_1,\cdots\mathcal{A}e_{n-1})=(e_0\cdots e_{n-1})\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&a_0\\1&0&&0&a_1\\0&1&&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&&\vdots\\0&0&\cdots&1&a_{n-1}\end{pmatrix}$、坐标矩阵记为A.

由于 $f_A(x)$ (特征多项式) $=|xI_n-A|=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ -1 & x & 0 & & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & -1 & x & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & x & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & -1 & x-a_{n-1} \end{vmatrix}$

则 $n=2$，$|xI_n-A|=\begin{vmatrix} x & -a_0 \\ -1 & x-a_1 \end{vmatrix}=x^2-a_1x-a_0$.

则 $n=k-1$ 时，假设有 $|xI_n-A|=\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & x & & \vdots & -a_1 \\ 0 & -1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & x & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x-a_{n-2} \end{vmatrix}=x^{n-1}-a_{n-2}x^{n-2}-\cdots-a_1x-a_0$.

故 $n=k$ 时，此时将 $|xI_n-A|$ 按第一行展开.

$|xI_n-A|=x\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ -1 & x & & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & -1 & x & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & & 0 & -1 & x-a_{n-1} \end{vmatrix}+(-1)^{1+n}(-a_0)\begin{vmatrix} -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$=x(x^{n-1}-a_{n-1}x^{n-2}-\cdots-a_1)+(-1)^{1+n}a_0(-1)^{n-1+1}$.

$=x^n-a_{n-1}x^{n-1}-\cdots-a_1x-a_0$.

则特征多项式为 $f(\lambda)=\lambda^n-a_{n-1}\lambda^{n-1}-\cdots a_1\lambda-a_0$.

设极小多项式为 $m_A(\lambda)=\lambda^r-b_{r-1}\lambda^{r-1}-\cdots-b_1\lambda-b_r$.

若 $r<n$. $Ae_1=e_2$，$A^2e_1=A(Ae_1)=e_3$，$\cdots A^{r-1}e_1=e_r$.

$A^re_1=e_{r+1}$.

$0=m_A(A)e_1=(A^r+b_{r-1}A^{r-1}+\cdots+b_1A+b_0I_n)e_1$

$=e_{r+1}+b_{r-1}e_r+\cdots+b_2e_3+b_1e_2+b_0e_1$.

故 $e_{r+1}, e_r, \cdots e_1$ 线相. 与基矛盾. 则 $\deg m_A(x)=\deg f(x)$

$\Rightarrow m_A(\lambda)=f(\lambda)$. 特征多项式与极小多项式相等

则 $m_A(x)=x^n-a_{n-1}x^{n-1}-\cdots-a_1x-a_0$.

特征多项式 & 极小多项式　① $m_A(x) \mid \chi_A(x)$.　② 特征多项式的所有不同根都是极小多项式的根

$m_A(x)$　$\chi_A(x)$

若特征多项式无重根 $\Rightarrow m_A(x)=\chi_A(x)$.

（　　）作　业　纸

3021233064

系别______ 班级______ 姓名 [illegible] 第　　页

T6.2.3. 证明：(1). 由于 $(V, \mathcal{A})$ 是不可分解空间，且 $\mu_{\mathcal{A}}(x)=(x^2-ax-b)^m$.

故 $\dim_F(V)=\deg \mu_{\mathcal{A}}(x)$. 则 $\dim_F(V)=2m$.

故只需证明 $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\cdots\alpha_m,\beta_m$ 的线性无关性.

令 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\beta_1+\cdots+\lambda_{2m-1}\alpha_m+\lambda_{2m}\beta_m=0$.

$\Rightarrow \lambda_1(\mathcal{A}^2-a\mathcal{A}-b)^0e+\lambda_2(\mathcal{A}^2-a\mathcal{A}-b)^0\mathcal{A}e+\lambda_3(\mathcal{A}^2-a\mathcal{A}-b)^1e+\cdots+\lambda_{2m-1}(\mathcal{A}^2-a\mathcal{A}-b)^{m-1}e$

$+\lambda_{2m}(\mathcal{A}^2-a\mathcal{A}-b)^{m-1}\mathcal{A}e=0$.

$(\lambda_1(\mathcal{A}^2-a\mathcal{A}-b)^0+\lambda_2(\mathcal{A}^2-a\mathcal{A}-b)^0\mathcal{A}+\lambda_3(\mathcal{A}^2-a\mathcal{A}-b)^1+\cdots+\lambda_{2m-1}(\mathcal{A}^2-a\mathcal{A}-b)^{m-1}$

$+\lambda_{2m}(\mathcal{A}^2-a\mathcal{A}-b)^{m-1}\mathcal{A})e=0$.

由于 $\mu_{\mathcal{A}}(x)=\mu_{\mathcal{A},e}(x)$，即 $(\mathcal{A}^2-a\mathcal{A}-b)^{2m}e=0$.

且对于 $f(x)$ 满足 $f(\mathcal{A})e=0$. 均有 $\mu_{\mathcal{A},e}(x)\mid f(x)$.

由于 $\deg f(x)=2m-1<\deg \mu_{\mathcal{A},e}(x)$

故 $\lambda_1,\cdots\lambda_{2m-1},\lambda_{2m}=0$ 时成立. $\alpha_1,\beta_1,\cdots\alpha_m,\beta_m$ 线性无关.

(2). $\mathcal{A}\alpha_i=\mathcal{A}(\mathcal{A}^2-a\mathcal{A}-b)^{i-1}e=\beta_i$. $\mathcal{A}\alpha_1=\mathcal{A}e=\beta_1$.

$\mathcal{A}\beta_i=\mathcal{A}(\mathcal{A}^2-a\mathcal{A}-b)^{i-1}\mathcal{A}e=(\mathcal{A}^2-a\mathcal{A}-b)^{i-1}\mathcal{A}^2e$.

$=(\mathcal{A}^2-a\mathcal{A}-b)^{i-1}(\mathcal{A}^2-a\mathcal{A}-b)e+(\mathcal{A}^2-a\mathcal{A}-b)^{i-1}a\mathcal{A}e$

$+(\mathcal{A}^2-a\mathcal{A}-b)^{i-1}be$

$=\alpha_{i+1}+a\beta_i+b\alpha_i$

故 $(\mathcal{A}\alpha_1,\mathcal{A}\beta_1,\cdots\mathcal{A}\alpha_m,\mathcal{A}\beta_m)=(\alpha_1,\beta_1,\cdots\alpha_m,\beta_m)$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}0 & b\\ 1 & a\end{matrix}} & & & & 0 \\ 1 & \boxed{\begin{matrix}0 & b\\ 1 & a\end{matrix}} & & & \\ & 1 & \boxed{\begin{matrix}0 & b\\ 1 & a\end{matrix}} & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & 1 & \boxed{\begin{matrix}0 & b\\ 1 & a\end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

(2). $\mathrm{Im}(P(A)^k) = \ker(P(A)^{m-k})$. $(0 \le k \le m)$.

① $\mathrm{Im}(P(A)^k) \subset \ker(P(A)^{m-k})$

$\forall \alpha \in \mathrm{Im}(P(A)^k)$，故$\exists \beta \in P(A)^k$，s.t. $\alpha = P(A)^k \beta$.

故 $P(A)^{m-k}\alpha = P(A)^{m-k} P(A)^k \beta = P(A)^m \beta = 0$.

则$\forall \alpha \in \mathrm{Im}(P(A)^k$，均有$\alpha \in \ker(P(A)^{m-k})$.

② $\ker(P(A)^{m-k}) \subset \mathrm{Im}(P(A)^k)$.

$\forall \alpha \in \ker(P(A)^{m-k})$，则 $P(A)^{m-k}\alpha = 0$.

由于 $P(A)^m \alpha = 0$.

$\Rightarrow P(A)^{m-k} \cdot P(A)^k \alpha = 0$

$\exists \beta \in \mathrm{Im}(P(A)^k$ s.t. $P(A)^k \alpha = \beta$.

则 $P(A)^{m-k}\beta = 0$.

则 $\alpha \in \mathrm{Im}(P(A)^k)$ 成立

综上，有 $\ker(P(A)^{m-k}) = \mathrm{Im}(P(A)^k)$.

T6.2.4. 证明：(1). $W^{\perp}=\{l\in V^{*} \mid l|_W=0\}\subset V^{*}$.

设 $\dim_K V=n=\dim_K V^{*}$.

设 W 中一组基为 $e_1,\cdots e_r$

则 $\exists\, l_1,\cdots l_r\in W^{*}$ 为 W^{*} 的一组基.

故 $W^{\perp}=\{l\in V^{*} \mid \forall w\in W, l_1(w)=l_2(w)=\cdots=l_r(w)=0\}$.

由于 $l_1,\cdots l_r$ 线性无关.

故 $\dim(W^{\perp})=\dim(V)-\dim(W^{*})=n-r$.

or 设 V 中一组基为 $e_1,\cdots e_n$.

$\therefore$ V^{*} 中一组基为 $l_1,\cdots l_n$.

由于 W^{*} 是 r 维空间，不妨设 $l_1,\cdots l_r$ 为 W^{*} 的一组基

由于 $W^{\perp}=\{l\in V^{*} \mid l|_W=0\}$.

则 $l=\lambda_1 l_1+\lambda_2 l_2+\cdots\lambda_n l_n\in W^{\perp}$.

若取 $w=e_1,\cdots e_r$

$\Rightarrow$ 则 $l(e_1)=\lambda_1=0$，同理 $\lambda_2=\cdots=\lambda_r=0$.

故 $l_{r+1},\cdots l_n\in W^{\perp}$，为 $W^{\perp}$ 的一组基.

$\dim_K(W^{\perp})=n-r$.

(2). 由于 W 是 A 的不变子空间.

则 $A(W)\subset W$. $\forall t\in W$ 均有 $A(t)\subset W$ 成立.

$\forall l\in W^{\perp}$，则有 $l(t)=0$，$l(A(t))=0$.

故 $A^{*}l(t)=l(A(t))=0$.

$A^{*}l\in W^{\perp}$. $W^{\perp}$ 是 A^{*} 的不变子空间得证.

T6.2.4. 证明：(1). $W^\perp=\{l\in V^* \mid l|_W=0\}\subset V^*$.

设 $\dim_K V=n=\dim_K V^*$.

设 W 中一组基为 $e_1,\cdots e_r$

则 $\exists\, l_1,\cdots l_r\in W^*$ 为 W^* 的一组基.

故 $W^\perp=\{l\in V^* \mid \forall w\in W, l_1(w)=l_2(w)=\cdots=l_r(w)=0\}$.

由于 $l_1,\cdots l_r$ 线性无关.

故 $\dim(W^\perp)=\dim(V)-\dim(W^*)=n-r$.

另 设 V 中一组基为 $e_1,\cdots e_n$.

V^* 中一组基为 $l_1,\cdots l_n$.

由于 W^* 是 r 维空间，不妨设 $l_1,\cdots l_r$ 为 W^* 的一组基

由于 $W^\perp=\{l\in V^* \mid l|_W=0\}$.

则 $l=\lambda_1 l_1+\lambda_2 l_2+\cdots\lambda_n l_n\in W^\perp$.

若取 $w=e_1,\cdots e_r$

$\Rightarrow$ 则 $l(e_1)=\lambda_1=0$, 同理 $\lambda_2=\cdots=\lambda_r=0$.

故 $l_{r+1},\cdots l_n\in W^\perp$, 为 $W^\perp$ 的一组基.

$\dim_K(W^\perp)=n-r$.

(2). 由于 W 是 A 的不变子空间.

则 $A(W)\subset W$. $\forall t\in W$ 均有 $A(t)\in W$ 成立.

$\forall l\in W^\perp$, 则有 $l(t)=0$, $l(A(t))=0$.

故 $A^* l(t)=l(A(t))=0$.

$A^* l\in W^\perp$. $W^\perp$ 是 A^* 的不变子空间得证.

（ ） 作 业 纸

3021233064

系别________ 班级________ 姓名 孙浩 第 页

(3). 即证明 $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim W^*$ 即可.

由于 $\dim_K W^{\perp} = n-r = \dim \ker \varphi$

且 $\dim_K V^* = n$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim V^* - \dim \ker \varphi = r$.

由于 $\dim W = r$. 故 $\dim W^* = r$.

则有 $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim W^*$. 满射得证.

3021233064

（高代） 作 业 纸

6.3. 系别 应数 班级 拔尖 姓名 [illegible] 第 页

T6.3.1.(1). $(xI_4-A \mid I_4)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} x-1 & 1 & -1 & & 1&0&0&0\\ 1 & x-2 & 1 & -1 & 0&1&0&0\\ 1&-1&x+1&0&0&0&1&0\\ 1&-1&0&x-1&0&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&-1&0&x-1&0&0&0&1\\ 1&x-2&1&-1&0&1&0&0\\ 1&-1&x+1&0&0&0&1&0\\ x-1&1&-1& &1&0&0&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&-1&0&x-1&0&0&0&1\\ 0&x-1&1&-x&0&1&0&-1\\ 0&0&x+1&1-x&0&0&1&-1\\ 0&x-1&1&-x^2+x-1&1&0&0&-x\end{array}\right)$

$\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&-1&0&x-1&0&0&0&1\\ 0&x-1&1&-x&0&1&0&-1\\ 0&0&x+1&1-x&0&0&1&-1\\ 0&0&0&-(x-1)^2&1&-1&0&-x+1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&-1&0&x-1&0&0&0&1\\ 0&x-1&1&1-x&0&1&0&-1\\ 0&0&x+1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&-(x-1)^2&1&-1&0&-x+1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&x-1&0&0&0&1\\ 0&x-1&1&1-x&0&1&0&-1\\ 0&0&x+1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&-(x-1)^2&1&0&0&-x+1\end{array}\right)$

$\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&x-1&1&1-x&0&1&0&-1\\ 0&0&x+1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&-(x-1)^2&1&0&0&2-2x\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&x-1&1-x&0&0&1&-1\\ 0&x+1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&-(x-1)^2&1&0&0&2-2x\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&x+1&0&0&0&1&0\\ 0&x+1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&-(x-1)^2&1&0&0&2-2x\end{array}\right)$

$\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&x+1&0&0&0&1&0\\ 0&0&-(x+1)^2&0&0&1&1-x&0\\ 0&0&0&-(x+1)^2&1&0&0&2-2x\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&(x+1)^2&0&0&-1&2x-2&0\\ 0&0&0&(x-1)^2&-1&0&0&2x-2\end{array}\right)$

即 $m_A(x)=d_3(x)=(x-1)^2$，且 $P(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&2x-2&0\\-1&0&0&2x-2\end{pmatrix}$

(2). $J(A)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

(3). 求逆矩阵 $P(x)^{-1}$. ＜由于 $|P(x)|\neq 0$＞，故 $(P(x)\mid I_4)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&-1&2x-2&0&0&0&1&0\\ -1&0&0&2x-2&0&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1&0&0&0&2-2x&0&0&1\\ 0&-1&2x-2&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0&0\end{array}\right)$

$\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&2x-2&0&0&-1\\ 0&1&0&0&0&2x-2&-1&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0&0\end{array}\right)$. $P(x)^{-1}=\begin{pmatrix}2x-2&0&0&-1\\0&2x-2&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$.

故 $(e_1,e_2,e_3,e_4)P(x)^{-1}=((2x-2)e_1+e_4=0,(2x-2)e_2+e_3=0,-e_2,-e_4)$.

则令 $v_1=-e_2$，$v_2=-e_4$. 则 $V=C[A]\cdot v_1\oplus C[A]\cdot v_2$.

由于 $m_{A,v_1}(x)=(x-2)^2=m_{A,v_2}(x)$. 在 $C[A]\cdot v_1$ 中取基：$(A-1)\cdot v_1$, v_1，在 $C[A]\cdot v_2$ 中取基：$(A-1)\cdot v_2$, v_2.

令$\alpha_1=(A-1)v_1$, $\alpha_2=v_1$, $\alpha_3=(A-1)v_2$, $\alpha_4=v_2$.

故$(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3, A\alpha_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\cdot J(A)$.

$\alpha_1=(A-1)v_1=(A-1)(e_2)=-Ae_2+e_2$ $\alpha_3=(A-1)v_2=-Ae_4+e_4$.

由于$(Ae_1, Ae_2, Ae_3, Ae_4)=(e_1,e_2,e_3,e_4)A$

$\Rightarrow Ae_2=e_1+2e_2+e_3+e_4$, $Ae_4=e_1+e_2+e_4$

$\Rightarrow \alpha_1=-e_1-e_1-e_3-e_4$. $\alpha_3=-e_1-e_2$.

$\Rightarrow$故$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(e_1,e_2,e_3)T=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}-1&0&-1&0\\-1&-1&-1&0\\-1&0&0&0\\-1&0&0&-1\end{pmatrix}$

$T=\begin{pmatrix}-1&0&-1&0\\-1&-1&-1&0\\-1&0&0&0\\-1&0&0&-1\end{pmatrix}$

T6.3.2. 不变因子组=

将初等因子组按降幂排列，即有 $(x-1)^3$ $x-1$ 1 1

$(x+1)^3$ $x+1$ $x+1$

$(x-2)^2$ $x-2$ 1

故$d_3(x)=(x-1)^3(x+1)^3(x-2)^2$, $d_2(x)=(x-1)(x+1)(x-2)$ $d_1(x)=x+1$.

$\Rightarrow J_1(1)=(1)$ $J_3(1)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. $J_1(-1)=(-1)$. $J_3(-1)=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

$J_1(2)=(2)$ $J_2(2)=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow J(A)=\begin{pmatrix}1&&&&&&&&&\\&1&1&0&&&&&&\\&0&1&1&&&&0&&\\&0&0&1&&&&&&\\&&&&-1&&&&&\\&&&&&-1&1&0&&\\&0&&&&0&-1&1&&\\&&&&&0&0&-1&&\\&&&&&&&&2&\\&&&&&&&&&2&1\\&&&&&&&&&0&2\end{pmatrix}$$

（　　）作　业　纸

系别________班级________姓名 孙亮________第　　页　3021233064

T6.3.4. 证明：先证 $K[A] \subset C(A)$.

$\forall f(A) \in K[A]$，则 $f(A) \cdot A = A \cdot f(A)$ 成立.

$\Rightarrow f(A) \subset C(A)$.

下证 $C(A) \subset K[A]$.

$\Rightarrow$ 由于 $m_A(x) = \varphi_A(x)$.

故 $V = K[A]\alpha$.

则 $\forall \beta \in C(A)$，$\beta\alpha \in V$ 成立.

$\exists f(x) \in K[x]$ s.t. $\beta\alpha = f(A) \cdot \alpha$.

取 $\beta \in V$，则有 $\beta = g(A)\alpha$，$g(A) \in K[A]$.

故 $\beta\beta = \beta g(A)\alpha = g(A)\beta\alpha = g(A)f(A)\alpha = f(A)\beta$.

$\Rightarrow \beta$ 任意，故 $\beta = f(A)$ 成立

$C(A) \subset K[A]$，综上 $C(A) = K[A]$.

delete

故 $J(A)=J_i(0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{i\times i}$ 由于 $\exists T$ s.t. $T^{-1}AT=J(A)$

故 $J(A)$ 与 A 相似，相似矩阵有相同的迹，$J(A)^i$ 与 A^i 相似，

$tr(A^i)=tr(J(A^i))=0$.

"$\Leftarrow$" 若 $tr(A^i)=0$ $(1\le i\le n)$.

由于 $J(A)$ 的所有特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$.

且 $T^{-1}AT=J(A)\Rightarrow T^{-1}A^iT=J(A)^i$，$A^i$ 与 $J(A)^i$ 相似

$\Rightarrow tr(J(A)^i)=0$. $(1\le i\le n)$

$\Rightarrow \lambda_1+\cdots+\lambda_n=0$, $\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2=0$, $\cdots$ $\lambda_1^i+\cdots+\lambda_n^r=0$.

假设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 为非零互异特征值，且代数重根分别为 $s_1,\cdots,s_r$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_1\lambda_1+\cdots+s_r\lambda_r=0 \\ s_1\lambda_1^2+\cdots+s_r\lambda_r^2=0 \\ \vdots \\ s_1\lambda_1^r+\cdots+s_r\lambda_r^r=0 \end{cases}$$

故假若 $s_1,\cdots,s_r$ 看成未知元，则系数矩阵为 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \cdots & \lambda_r^r \end{pmatrix}$，行列式为 $\prod_{k=1}^{r}\lambda_k\prod_{1\le j<i\le r}(\lambda_i-\lambda_j)$.

$D\neq 0$ 故当且仅当 $s_1=s_2=\cdots s_r=0$ 时成立.

非零特征值代数重根为0 $\Rightarrow \lambda_1=\cdots=\lambda_r=0$.

$\Rightarrow \chi_A(x)=\lambda^n$. $A^n=\chi_A(x)=\lambda^n=0$

$\Rightarrow$ A 是幂零矩阵.

6.4 周易潇潇 3021233090

1、 $v_i = (e_1, \cdots, e_n) T^{(i)}$ 而 $(v_i | v_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$\Rightarrow \langle (e_1, \cdots, e_n) T^{(i)} | (e_1, \cdots, e_n) T^{(j)} \rangle = \delta$

$\Rightarrow \bar{T}' \cdot T = (c_{ij})_{n \times n} \quad c_{ij} = \bar{T}'_{(i)} T^{(j)} = \delta$

$\Rightarrow C = I_n$

2、 $\langle 1, t \rangle^{\perp} = \{ g \in P_2 \mid (g | \alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in \langle 1, t \rangle \}$

设 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 t$，$(g | \alpha) = \int_{-1}^{1} g(t)(\alpha_1 + \alpha_2 t) = 0$

设 $g(t) = at^2 + bt + c$

$\int_{-1}^{1} g(t)(\alpha_1 + \alpha_2 t) dt = 0 \Rightarrow \frac{2}{3} a + 2c = 0 \quad \frac{2}{3} b = 0$

$\Rightarrow a + 3c = 0, \quad b = 0 \quad \Rightarrow \langle 1, t \rangle^{\perp} = \{ at^2 - \frac{1}{3} a \mid a \in \mathbb{R} \}$

(2) 取基 $1, t, t^2$ 应用格拉姆－施密特过程.

$v_1 = 1 \quad \cancel{v_2 = \frac{t}{1} = t} \quad v_2 = t \quad \|v_2\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$\|v_1\| = \sqrt{2}$

$\|v_3\| = \sqrt{\frac{8}{45}} \Rightarrow$

$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad e_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} t \quad e_3 = \sqrt{\frac{45}{8}} (t^2 - \frac{1}{3})$

3、(1) 对称性直接验证即得

正定性 $(f|f)=\int_0^{\infty}e^{-t}f^2(t)dt$

而 $e^{-t}f^2(t)\geqslant 0 \Rightarrow \langle f,f\rangle \geqslant 0 \Leftrightarrow f=0$

双线性：由广义积分的线性性即得.

(2) $\langle t^n,t^m\rangle=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{m+n}dt$

$=\int_0^{\infty}-t^{m+n}d(e^{-t})=-t^{m+n}e^{-t}\Big|_0^{\infty}$

$+\int_0^{\infty}(m+n)e^{-t}t^{m+n-1}dt=(m+n)\Gamma_{m+n-1}$

$\Rightarrow \langle t^n,t^m\rangle=(m+n)!$

4、"$\Rightarrow$" $\|x\|_1^2=\langle x,x\rangle_1=\langle x,x\rangle_2=\|x\|_2^2$

$\Rightarrow \|x\|_1=\|x\|_2$

"$\Leftarrow$" $\forall x,y\in V$ $\langle x,y\rangle_1=\langle x,y\rangle_2$.

而 $\langle x,y\rangle_1=\langle x+y,y\rangle_1-\langle y,y\rangle_1$

$=\langle x+y,x+y\rangle_1-\langle x+y,x\rangle_1-\langle y,y\rangle_1$

$=\langle x+y,x+y\rangle_1-\langle x,x\rangle_1-\langle y,y\rangle_1-\langle x,y\rangle_1$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle_1=\frac{1}{2}(\|x+y\|_1^2-\|x\|_1^2-\|y\|_1^2)$

$\langle x,y\rangle_2$ 同理

6. (1) $\langle x,y\rangle=\frac{1}{2}(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2)$.

$$=\frac{1}{2}(13-2-5)=3.$$

$\cos\varphi=\frac{3\sqrt{10}}{10}$ $\varphi=\arccos\frac{3\sqrt{10}}{10}$

(2) 设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

$\langle x,\alpha\rangle=\frac{1}{2}(\|x+\alpha\|^2-\|x\|^2-\|\alpha\|^2)=0$

$\Rightarrow 3(\alpha_1+1)^2+2(\alpha_2+1)^2+(\alpha_3+1)^2-4(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)$

$-2(\alpha_1+1)(\alpha_3+1)+2(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)$.

$=2+3\alpha_1^2+2\alpha_2^2+\alpha_3^2-4\alpha_1\alpha_2-2\alpha_1\alpha_3+2\alpha_2\alpha_3$

$\Rightarrow 2\alpha_2+2\alpha_3=0$

$\Rightarrow \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,-\alpha_2)$ ~~α_1,α_2~~

7、$B_{(i)}=\frac{A_{(i)}}{\|A_{(i)}\|}$ 即为一组规范正交基

$|A|=\|A_{(1)}\|\cdots\|A_{(n)}\|\det[B_{(1)},\cdots B_{(n)}]$

而由 $B\cdot B^T=I_n$ $\Rightarrow |B|\,|B^T|=|B|^2=1$ $|B|=\pm1$

$\Rightarrow |A|=\pm\|A_{(1)}\|\cdots\|A_{(n)}\|$

8. $\det X=0$ 显然 $\det X\neq0$

$A=X\cdot X^T\Rightarrow A$ 正定 $\Rightarrow |A|\leq a_{11}\cdots a_{nn}$

$\Rightarrow |X|\cdot|X^T|\leq\|X_{(1)}\|^2\cdots\|X_{(n)}\|^2$

$\Rightarrow |\det(X)|\leq\|X_{(1)}\|\cdots\|X_{n}\|$

9. $\langle \alpha-\beta, e_i \rangle = 0 \Rightarrow \forall X = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$

$\Rightarrow \langle \alpha-\beta, X \rangle = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha-\beta, e_i \rangle x_i = 0$

$\Rightarrow \alpha-\beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$

10. 按定义展开即得

11. $A^T A = \begin{pmatrix} \|A^{(1)}\|^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & \|A^{(n)}\|^2 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow F_n\left(\frac{1}{\|A^{(n)}\|^2}\right) \cdots F_1\left(\frac{1}{\|A^{(1)}\|^2}\right) A^T A = I_n$

$\Rightarrow A^{-1} = F_n(\ ) \cdots F_1(\ ) A^T$

$= \left[\frac{A^{(1)T}}{\|A^{(1)}\|^2} \cdots \frac{A^{(n)T}}{\|A^{(n)}\|^2} \right.$

12、应用格拉姆-施密特过程

$u_1 = (1, 2, 2, -1) \quad u_2 = (1, 1, -5, 3) \quad u_3 = (3, 2, 8, -7)$.

$v_1 = (1, 2, 2, -1) \quad v_2 = (2, 3, -3, -2)$

$v_3 = (2, -1, -1, -2)$.

$\Rightarrow e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{2\sqrt{10}}{10}, \frac{2\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10} \right)$

$e_2 = \cdots = \quad \frac{2}{\sqrt{26}} \quad 3 \quad -3 \quad -2$

$e_3 = \quad \frac{2}{\sqrt{10}} \quad \frac{-1}{\sqrt{10}} \quad -1 \quad -2$

13、扩充 $e_1,\cdots,e_n$ 为 V 的一组标准正交基

$x=x_1e_1+\cdots+x_ne_n \Rightarrow \sum_{i=1}^{k}\langle x,e_i\rangle^2=\sum_{i=1}^{k}x_i^2$

$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{n}x_n^2$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k}\langle x,e_i\rangle^2\leq\|x\|^2$

且等号成立 $\forall x\in V \Leftrightarrow k=n$.

6.5 周易潇潇 302123309?

1.(1) $\forall x \in \mathrm{Im}(\mathscr{A})$ $y \in \ker\mathscr{A}^*$ $\Rightarrow \exists x_0$ $x = \mathscr{A}x_0$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle = \langle \mathscr{A}x_0, y\rangle = \langle x_0, \mathscr{A}^* y\rangle = 0$

$\Rightarrow \ker\mathscr{A}^* = \mathrm{Im}(\mathscr{A})^{\perp}$

(2) $\Rightarrow$ ∵ $x = 0 \Rightarrow \langle \mathscr{A}x, x\rangle = 0$

"⇐" $\forall x, y$ $\langle \mathscr{A}(x+y), x+y\rangle = 0$

$0 = \langle \mathscr{A}x, x\rangle + \langle \mathscr{A}x, y\rangle + \langle \mathscr{A}y, x\rangle + \langle \mathscr{A}y, y\rangle = \langle \mathscr{A}x, y\rangle + \langle y, \mathscr{A}^* x\rangle$

$= 2\langle \mathscr{A}x, y\rangle = 0 \Rightarrow \mathscr{A}x = 0 \Rightarrow \mathscr{A} = 0$

(3) $\langle \mathscr{A}x, x\rangle = \langle x, \mathscr{A}^* x\rangle = -\langle \mathscr{A}x, x\rangle$

$\Rightarrow \langle \mathscr{A}x, x\rangle = 0$

(4) $\forall x \in \ker(\mathscr{A})$ $\langle \mathscr{A}x, \mathscr{A}x\rangle = \langle \mathscr{A}^*\mathscr{A}x, x\rangle$

$= \langle \mathscr{A}\mathscr{A}^*, x\rangle = \langle \mathscr{A}^* x, \mathscr{A}^* x\rangle$

$\Rightarrow \mathscr{A}^* x = 0$. 类似 $\forall x \in \ker\mathscr{A}^*$ $x \in \ker\mathscr{A}$

$\Rightarrow \ker\mathscr{A} = \ker\mathscr{A}^*$.

$k=n$ 时

2. "$\Rightarrow$" 设 V_i 的一组规范正交基为

$e_1, \cdots, e_n$ $\quad \|\mathcal{A} e_i\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle \mathcal{A} e_i, e_j \rangle^2$

$\|\mathcal{A}^* e_i\|^2 \geq \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, \mathcal{A} e_j \rangle^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, \mathcal{A} e_j \rangle^2$

$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \langle \mathcal{A} e_j, e_i \rangle^2 = \sum_{j=1}^{n} \|\mathcal{A} e_j\|^2$

若 $\mathcal{A}$ 正规 $\|\mathcal{A} e_i\| = \|\mathcal{A}^* e_i\|$

$\Rightarrow V_i$ 是 $\mathcal{A}^*$ 不变子空间

且 $\forall \alpha \in V_i \quad \mathcal{A}_i \mathcal{A}_i^* \alpha = \mathcal{A}_i \mathcal{A}_i^{\alpha} \alpha$.

有 $\mathcal{A}_i \alpha = \mathcal{A} \alpha$. $\quad \forall \alpha, \beta \in V_i$

$\langle \alpha, \mathcal{A}_i^* \beta \rangle = \langle \mathcal{A}_i \alpha, \beta \rangle = \langle \mathcal{A} \alpha, \beta \rangle$

$= \langle \alpha, \mathcal{A}^* \beta \rangle \Rightarrow \mathcal{A}_i^* = \mathcal{A}^* |_{V_i}$

$\Rightarrow \mathcal{A}_i$ 正规

"$\Leftarrow$" 有 $\mathcal{A}^*_i = \mathcal{A}^* |_{V_i}$

$\forall \alpha \in V \quad \alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s \quad \alpha_i \in V_i$

$\Rightarrow \mathcal{A} \mathcal{A}^* \alpha = \mathcal{A} \mathcal{A}^* \alpha_1 + \cdots + \mathcal{A} \mathcal{A}^* \alpha_s$

$= \sum_{i=1}^{s} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_i^* \alpha_i = \sum_{i=1}^{s} \mathcal{A}^* \mathcal{A}_i \alpha_i = \sum_{i=1}^{s} \mathcal{A}^* \mathcal{A} \alpha_i$

$= \mathcal{A}^* \mathcal{A} \alpha \Rightarrow \mathcal{A}$ 正规

n-n 阶

3. 设 V 中规范正交基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$

$$(\mathscr{A}\alpha_1,\cdots,\mathscr{A}\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$$

则 $\mathscr{A}$ 为对称算子 存在一组标准基 $e_1,\cdots,e_n$

$$\Rightarrow (\mathscr{A}e_1,\cdots,\mathscr{A}e_n)=(e_1,\cdots,e_n)A^*$$

A^* 为对角阵

设 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(e_1,\cdots,e_n)T$ T为正交阵

$$\Rightarrow (\mathscr{A}\alpha_1,\cdots,\mathscr{A}\alpha_n)=(\mathscr{A}e_1,\cdots,\mathscr{A}e_n)T$$

$$=(e_1,\cdots,e_n)A^*T$$

$$=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$$

$$=(e_1,\cdots,e_n)TA$$

$$\Rightarrow TA=A^*T \Rightarrow TAT^{-1}=A^*$$

由于T正交 $T^{-1}=T'$

$$\Rightarrow TAT'=A^*$$

4. (1) 设 $x=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n$ $y=y_1\alpha_1+\cdots+y_n\alpha_n$

$$\langle x,y\rangle=(x_1,\cdots,x_n)B[y_1,\cdots,y_n]$$

$$\langle \mathscr{A}x,y\rangle=\langle x,\mathscr{A}^*y\rangle$$

$$\mathscr{A}x=(x_1,\cdots,x_n)A[\alpha_1,\cdots,\alpha_n]$$

$$\mathscr{A}^*y=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\mathscr{A}^*[y_1,\cdots,y_n]$$

$$\Rightarrow AB=BA^*$$

(2) 若 $\mathscr{A}$ 是对称算子 则 $\mathscr{A}=\mathscr{A}^*$

即 $AB=BA$

若 $AB=BA$

$\forall x,y \quad \langle \mathscr{A}x,y\rangle=\langle x,\mathscr{A}y\rangle$

而 $\langle \mathscr{A}x,y\rangle=\langle x,\mathscr{A}^*y\rangle \Rightarrow \mathscr{A}^*=\mathscr{A}$

$\square$

5. 设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$AA^T=A^TA \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \diagdown & ac+bd \\ ac+bd & \diagdown \end{pmatrix}$

$\Rightarrow b^2=c^2 \quad ac+bd=ab+cd$

若 $b=c \qquad A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$

若 $b=-c \qquad b\neq 0 \Rightarrow a=d$

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

6. 由 $\mathscr{A}^2x=\mathscr{A}x \quad x-\mathscr{A}x\in \ker\mathscr{A}=\ker\mathscr{A}^*$

$\Rightarrow \mathscr{A}^*(1-\mathscr{A})x=0 \Rightarrow \mathscr{A}^*(1-\mathscr{A})=0$

$\langle \mathscr{A}^*(1-\mathscr{A})x,y\rangle=\langle x,(1-\mathscr{A}^*)\mathscr{A}y\rangle=0$

$\Rightarrow (1-\mathscr{A}^*)\mathscr{A}=0 \Rightarrow \mathscr{A}=\mathscr{A}^*$

7、由 $A^2=A$ $\quad B^2=B \Rightarrow A^2B=A\cdot B^2$

$\Rightarrow A\cdot B(A-B)=0$

设 $A-B=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 则 $AB\alpha_i=0$

$\Rightarrow B\alpha_i=0 \Rightarrow B(A-B)=0$

$\Rightarrow BA-B^2=0 \Rightarrow BA=B \Rightarrow AB=A$

$\Rightarrow A=B$

7.1

1. U是一个m维子空间

$\Rightarrow \forall u_1, u_2 \in U \quad u_1+u_2 \in U \quad \exists\, 0 \in U$

而 π 是仿射空间 $\Rightarrow (p+u_1)+u_2$

$= p+(u_1+u_2) \in p+U$

$p+0=p \in p+U$

$\forall p, q \in \pi$，而 π 是平面 $p+\vec{pq} \in \vec{pq} \subset \pi$

$\Rightarrow \vec{pq} \in U$

又因为 π 是仿射空间 $\Rightarrow \vec{pq}$ 唯一

$\Rightarrow \forall p, q \in \pi \quad \exists$ 唯一 $\vec{pq} \in U$ 使 $q = p+\vec{pq}$

$\square$

2. "$\Rightarrow$"

$\exists r \in \pi' \cap \pi''$ 设 $r = p+u_1' = q+u_1'$

$\pi = p+(U'+U'')$ $\Rightarrow u_1'-u_1' \in U'+U''$

有 $p+u_1'+(u_1)'' = p+(u_1'-u_1'') = q \in p+(U'+U'')$

$p+\vec{pq} = q = p+(u_1'-u_1'') \Rightarrow \vec{pq} \in U'+U''$

"$\Leftarrow$"

设 $\pi = p+(U'+U'')$ 有 $q = p+\vec{pq} \in p+(U'+U''$

设 $\vec{pq} = u_2'+u_2''$ $\Rightarrow q = p+(u_2'+u_2'') \Rightarrow q+(-u_2'')=$

$p+u_2' = r$

$\Rightarrow \quad Q = p + (v_2' - v_2'') \Rightarrow \quad x'$ 与 x'' 相等

3. ~~$e_1 = \overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, e_n = \overrightarrow{p_0p_n}$ 是 V 中一组~~

$f(p_0) = f'(p_0) = p_0'$

$f(p_1) = f(p_0 + e_1) = f(p_0) + f'(e_1) = p_0' + e_1' = p_1'$

$\vdots$

$f(p_n) \qquad = p_n'$

存在性即证

由于 $e_1, \ldots, e_n$ 是 V 中一组基且 $f'(e_i) = e_i'$

及 $f(p_0) = f'(p_0)$ 的定义 f 是唯一的

4. (1) $\forall v_1, v_2 \in V \quad p + v_1 + v_2 = p + (v_1 + v_2)$

$\exists \; v \in V \Rightarrow p + 0 = p$

(2) $\forall Q \in (A(V) \quad Q = p + \overrightarrow{pQ}$

其中 $\overrightarrow{pQ} = Q + (-p)$ 即证

5. (1) $\Rightarrow$ (2)

$\forall \; p_1 \in X, \lambda_1 = 1$ 则 $\lambda_1 p_1 \in X$

$k=2$ 由 (1) 直接得

设 $k = n-1$ 成立

$k=n$ 时

$\forall\ p_1, \cdots, p_n \in X$ 设 $\lambda + (1-\lambda)(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1}) = 1$

有 $(1-\lambda)p_n + \lambda(\lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_{n-1} p_{n-1}) = (1-\lambda)p_n + \lambda q$

由 $k=2 \Rightarrow (1-\lambda)p_n + \lambda q \in X$

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 $X = p + U$ ~~$p \in$~~

$\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2 \in X$ 设 $p_1 = p + u_1$ $p_2 = p + u_2$.

即 ~~λu_1~~

$\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \in U$ ~~$\in U$~~ 取

即 $\frac{1}{2}(u_1 + u_2) \in U$

因为 u_1, u_2 任意性 $\Rightarrow$ U 是子空间 $\Rightarrow$

X 是 $\mathbb{A}$ 中平面.

(2) $\Rightarrow$ (1)

$\forall\ q_1, q_2 \in X$ 设 $q_1 = p + u_1$ $q_2 = p + u_2$

$\lambda q_1 + (1-\lambda)q_2 = \lambda(p + u_1) + (1-\lambda)(p + u_2)$

$= p + (\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) \in p + U = X$

6、设 $\mathbb{A}(M) = p + U$ $M = p + U'$

设 $x_1 = p + u_1, \cdots, x_m = p + u_m$

其中 $u_1, \cdots, u_m$ 线性无关

$\Rightarrow$ U 是以 U' 中 ~~线性无关向量~~ 基生成的子空间

$\forall\ q \in \mathbb{A}(M)$ $q = p + u = p + (x_1 u_1 + \cdots + x_m u_m)$

$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = k \in \mathbb{R}$

$\frac{q}{k} = \frac{p}{k} + (\cdots)$ $\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{k} = 1$

7. 若 f 是仿射映射

$f(\lambda p + (1-\lambda) q) = f(\lambda p) + (1-\lambda) f' q$

$f': V \to V' = f(0) + \lambda f(p) + (1-\lambda) f(q)$

由 $f'(p) = f(p) - f(0)$ $f'(q) = f(p) - f(0)$ 则

代入 $f(\lambda p + (1-\lambda) q) = f(0) + \lambda f(p) + (1-\lambda) f(q)$ 则
$- f(0)$

$= \lambda f(p) + (1-\lambda) f(q)$

$f(\lambda p + (1-\lambda) q) = f(0) + f'(\lambda p + (1-\lambda) q)$

$= \lambda f(p) + (1-\lambda) f(q)$

$= f(0) + \lambda f'(p) + (1-\lambda) f'(q)$

则 $f'(\lambda p + (1-\lambda) q) = \lambda f'(p) + (1-\lambda) f'(q)$

取 $q = 0$ 则 $f'(\lambda p) = \lambda f'(p)$

由 p 的任意性 $f'(\lambda p) = \lambda f'(p)$

$\Rightarrow f'(\lambda p + (1-\lambda) q) = f'(\lambda p) + f[(1-\lambda) q]$

即 $f'(p_1+p_2)=f'(p_1)+f'(p_2)$

$\Rightarrow$ f' 是线性映射

$\Rightarrow$ f 是仿射映射.

8、若 $\exists v'\in V'$ $\varphi: V\to V'$ 使 $f=T_{v'}\varphi$

$\Rightarrow$ $f(\lambda p+(1-\lambda)q)=T_{v'}\varphi(\lambda p+(1-\lambda)q)$

$=T_{v'}(\lambda p'+(1-\lambda)q')=v'+\lambda p'+(1-\lambda)q'$

$\lambda f(p)+(1-\lambda)f(q)=\lambda T_{v'}\varphi(p)+(1-\lambda)T_{v'}\varphi(q)$

$=\lambda(p'+v')+(1-\lambda)(q'+v')=v'+\lambda p'+(1-\lambda)q'$

$\Rightarrow f(\lambda p+(1-\lambda)p)=\lambda f(p)+(1-\lambda)f(q)$

由7. $\Rightarrow$ f 是仿射映射

若 f 是仿射映射 $\forall p\in V$ $f(p)=f(0)+f'(p)$

f' 是线性映射

取 $v'=f(0)$ $f'=\varphi$

$\Rightarrow$ $f=T_{v'}\varphi$. □

9、满足(1)(2) 则 v 取 $\exists$ $\overrightarrow{pq}=0$ $p+v=p$

$\forall q\in A$ $\exists$ 唯一 $v\in V$ $\overrightarrow{pq}=v$

$\forall v_1, v_2 \in V$ 由 $v_1 = \overrightarrow{pq}$ $v_2 = \overrightarrow{pR}$

$\Rightarrow p + v_1 + v_2 = p + \overrightarrow{pR}$

而 $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qR} = \overrightarrow{pR}$

$\Rightarrow p + v_1 + v_2 = p + (\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qR})$

$\Rightarrow$ $\mathbb{A}$ 是与 V 相伴的仿射空间.

设 $p + v_1 = q$ $q + v_2 = R$ 由 v_1, v_2 任意性

p 选定后 $\forall q \in \mathbb{A}$ $\exists v_1$ s.t. $p + v_1 = q$

q 选定同理

$\Rightarrow \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qR} = \overrightarrow{pR}$.

D.

7.2 1、

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2-8x_3+13x_4=-19 \\ x_1+x_2-x_3+2x_4=1 \end{cases}$$

特解 $[-\frac{5}{2},\frac{7}{2},0,0]^T=\beta_0$

该方程的齐次方程的基础解系

$\eta_1=[2,1,1,0]$ $\eta_2=[-\frac{7}{2},\frac{3}{2},0,1]$

设 $V=\langle\eta_1,\eta_2\rangle \Rightarrow \Pi=\beta_0+V$

设 $\vec{PQ}\perp\Pi$ $Q\in\Pi$ 且 $\beta_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2$

$\Rightarrow \vec{PQ}=\beta_0-P+k_1\eta_1+k_2\eta_2$

$\forall r,s\in\Pi$ 设 $\vec{rs}=l_1\eta_1+l_2\eta_2$ $\forall l_1,l_2\in\mathbb{R}$

由前假设 $\vec{PQ}\perp\vec{rs}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{17}{2}+6k_1-\frac{17}{2}k_2=0 \\ \frac{31}{2}-\frac{17}{2}k_1+\frac{83}{2}k_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1=0 \\ k_2=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{PQ}=(-\frac{1}{2},1,3,-5)$

$\Rightarrow \|\vec{PQ}\|=\frac{\sqrt{141}}{2}$

2、解出 $\Pi_1=(0,1,2,0,0)+\langle(-2,0,1,1,0),(2,1,0,0,1)\rangle$

$\Pi_2=(1,-2,5,8,2)+\langle(0,1,2,1,2),(2,1,2,-1,1)\rangle$

由线性无关易知两平面公垂线唯一设为 $\vec{P_1P_2}$

$P_1=\beta_1+k_1\eta_1+k_2\eta_2$ $P_2=\beta_2+k_3\eta_3+k_4\eta_4$

$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 - k_1\eta_1 - k_2\eta_2 + k_3\eta_3 + k_4\eta_4$

$\forall\ x \in \Pi_1,\ y \in \Pi_2$

$x = x_1\eta_1 + x_2\eta_2$

$y = y_1\eta_3 + y_2\eta_4 \qquad \forall\ x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

由 $\langle \overrightarrow{P_1P_2}, x\rangle = \langle \overrightarrow{P_1P_2}, y\rangle = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6k_1 + 4k_2 + 3k_3 - 3k_4 = -9 \\ 3k_1 - 6k_2 + 6k_3 + 11k_4 = 1 \\ -3k_1 - 3k_2 + 10k_3 + 6k_4 = -15 \\ -2k_2 + 3k_3 + 2k_4 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 该方程组解唯一

$$\begin{cases} k_1 = -47 \\ k_2 = -42 \\ k_3 = -33 \\ k_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} = (7, 14, 0, 14, -14)$$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = 7\sqrt{13}$

7.3

1. 取 $O\in A$ $P_i=O+\alpha_i$ $\alpha_i\in V$

$$f(\lambda_0P_0+\cdots+\lambda_mP_m)=f(O)+f'(\lambda_0\alpha_0+\cdots+\lambda_m\alpha_m)$$
$$=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i(f(O)+f'(\alpha_i))$$
$$=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f(P_i)$$

2. 定义 $f'(\overrightarrow{P_0P_i})=q_i-f(P_0)$ 线性映射

构造仿射映射 $f(P_0+\alpha)=f(P_0)+f'(\alpha)$

存在性即证

设 $\exists g$ 满足 $\exists Q$ $g(Q)\neq f(Q)$

设 $\overrightarrow{P_0Q}=\lambda_1\overrightarrow{P_0P_1}+\cdots+\lambda_n\overrightarrow{P_0P_n}$ $\lambda_i\in K$.

$\Rightarrow g(Q)=g(P_0)+(\lambda_1g'(\overrightarrow{P_0P_1})+\cdots\cdots)$

$=\sum_{k=1}\lambda_k g(P_k)=f(Q)$ $\Rightarrow f=g$.

3. 设 M 为凸集 $f: M\to M'$ 为仿射映射

$\forall Q_1,Q_2\in M'$ 仅证 $\overline{Q_1Q_2}=\{Q_1+\lambda\overrightarrow{Q_1Q_2}\mid\lambda\in[0,1]\}\subseteq M'$

即 $\forall\lambda\in[0,1]$ 有 $Q_1+\lambda\overrightarrow{Q_1Q_2}\in M'$

设 $Q_1=f(P_1)$ $Q_2=f(P_2)$ $P_2=P_1+\overrightarrow{P_1P_2}$

$\Rightarrow Q_1+\lambda\overrightarrow{Q_1Q_2}=(1-\lambda)Q_1+\lambda Q_2=(1-\lambda)f(P_1)+\lambda f(P_1)$
$+\lambda f'(\overrightarrow{P_1P_2})$

$= f(p_1) + f(\lambda \overrightarrow{p_1 p_2}) = f(p_1 + \lambda \overrightarrow{p_1 p_2})$

$\Rightarrow p_1 + \lambda p_2 \in \overline{p_1 p_2} \subseteq M \Rightarrow q_1 + \lambda \overrightarrow{q_1 q_2} \in M'$

(4) (1) $\forall\, p = \lambda_0 p_0 + \cdots + \lambda_m p_m$

$\forall\, q = \lambda_0' p_0 + \cdots \lambda_m' p_m \quad \forall \lambda_i \in [0,1]$

$p + \lambda \overrightarrow{pq} = (1-\lambda) p + \lambda q = ((1-\lambda)\lambda_0 + \lambda\lambda_0') p_0$

$+ \cdots + ((1-\lambda)\lambda_m + \lambda \lambda_m') p_m$

又 $(1-\lambda)\lambda_i + \lambda \lambda_i' \geq 0$ 且 $\sum_{i=0}^{m} ((1-\lambda)\lambda_i + \lambda\lambda_i') = 1$

(2) 闭单纯形 $\overline{\Delta}(p_0, \cdots, p_m) = \{\lambda_0 p_0 + \cdots + \lambda_m p_m \mid \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\}$

可看作一个单纯形的并集

(3) 由 $\overline{\Delta}(p_0, \cdots, p_m)$ 为一闭单纯形

$\Rightarrow C(p_0, \cdots, p_m) \subseteq \overline{\Delta}(p_0, \cdots, p_m)$.

任取包含 $p_0, \cdots, p_m$ 的凸集 C

$\Rightarrow \forall i, j \ \{\lambda p_i + (1-\lambda) p_j\} = \overline{p_i p_j} \subseteq C$

$\therefore k=0$ 时 $p_0 \in C$

设小于 k 时成立. k 时 若 $\lambda_n = 0$

$\Rightarrow \lambda_0 p_0 + \cdots + \lambda_n p_n \in C$ 若 $\lambda_n = 1$ $p_n \in C$

若 $\lambda_n \neq 0, 1 \Rightarrow \frac{\lambda_0}{1-\lambda_n} p_0 + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}}{1-\lambda_n} p_{n-1}$ $p_n \in C$

$\Rightarrow (1-\lambda_n) = (\frac{\lambda_0}{1-\lambda_n} p_0 + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}}{1-\lambda_n} p_{n-1}) + \lambda_n p_n \in C$

从而 $S \subseteq C \Rightarrow \overline{\Delta} \subseteq C \Rightarrow S = C(p_0, \cdots, p_m)$.

7.4

1. 若 P 为 Q 中心 则 $\forall y \in V$

$Q(P+y)=Q(P+(-y))$ $\quad q(y)+l(y)+c=q(-y)+l(-y)+c$

而 q 为二次型 $\Rightarrow q(y)=q(-y)$

$\Rightarrow l(y)=l(-y) \Rightarrow l(y)=0$

$\Rightarrow Q(P+y)=q(y)+c=q(y)+Q(P) \quad \forall y \in V$

2. (1) $P=O+\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in A$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2+\cdots+x_n+1=0 \\ x_1+x_3+\cdots+x_n+1=0 \\ \vdots \\ x_1+\cdots+x_{n-1}+1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{1}{n-1} \\ \vdots \\ x_n=\frac{1}{n-1} \end{cases}$ 即中心为 $P=O+(-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-1}e_i)$

(2) $P=O+\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ 为 Q 中心

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2+\cdots+x_n+\frac{1}{2}=0 \\ \vdots \quad -1 \cdots +x_n=0 \\ x_1+\cdots+x_n=0 \end{cases}$ 无解 无中心

7.5

1、即 $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&t&t\\t&1&t\\t&t&1\end{pmatrix}-4t=0$

$\begin{pmatrix}1&t&t\\t&1&t\\t&t&1\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1-t^2&0\\0&0&1-t^2-\frac{(t-t^2)^2}{1-t^2}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases}t>0 & (\text{椭圆面})\\1-t^2>0\\1-t^2-\frac{(t-t^2)^2}{1-t^2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<t<1\\(1-t)^2(1+t)^2>t^2(1-t)^2\end{cases}$

$\Rightarrow\quad t\in(0,1)$

2、考虑二次曲面：

$a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2+2b_{12}x_1x_2+2b_{23}x_2x_3+2b_{13}x_1x_3+c_1x_1$
$+c_2x_2+c_3x_3+d=0$

设 $\begin{pmatrix}a_1&b_{12}&b_{13}\\ \swarrow&a_2&b_{22}\\ \swarrow&\swarrow&a_3\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}a_1'&0&0\\0&a_2'&0\\0&0&a_3'\end{pmatrix}T'$

令 $(y_1,y_2,y_3)=(x_1,x_2,x_3)T$

则二次曲面可化为

$$a_1' y_1^2 + a_2' y_2^2 + a_3' y_3^2 + \sum_{i=1}^{3} c_i y_i + d = 0 \quad (※)$$

对(※)讨论

平面：(17)　柱形：(10)—(14)

3、S_Q上点满足

$$Q(p+x) = q(x) + l(x) + Q(p) = q(x) + l(x) = 0$$

$q(v)=0$　考虑直线 $x = p + tv$ 与S_Q交点

$q(tv) + l(tv) = 0$　可化简 $t^2 q(v) + t\,l(v) = 0$

即由 $q(v)=0$ 得 $t\,l(v)=0$

$l(v)=0 \Rightarrow$ 直线在S_Q上

$l(v)\neq 0 \Rightarrow$ 仅有$t=0$一个根（一个交点）

4、$z = 2x_1 - x_2 + x_3 = 0$

$x_3 = z - 2x_1 + x_2$

代入化简

$$-7\left(x_1+\frac{3}{7}\right)^2 + 8\left(x_2+\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{5}{7}$$

双曲线.