n阶行列式(上).

定义1. 行列式. $|A| = \det A$.

定义2. 当$n=1$时. 1阶行列式 $|a_{11}| \xlongequal{\text{def}} a_{11}$

下设所有 $n-1$ 阶行列式已定义好. M_{ij}已定义好

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots\cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$$ [按第1列展开].

定义4. 若 $a_{ij}=0$. $\forall i>j$. 则$|A|$为上三角行列式. 下三角行列式同理.

性质1. 上三角行列式(下三角)等于主对角元素乘积.

证明: 当$n=1$时. $|a_{11}| = a_{11}$

设阶数结论对$n-1$阶行列式成立. 证n阶.

1°. 上三角:
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2°. 下三角:
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ & & & a_{44} \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots\cdots (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}.$$

考虑余子式 M_{k1}. 设 $M_{k1} = (b_{ij})_{(n-1)\times(n-1)}$

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{i,j+1}, & 1 \le i \le k-1 \\ a_{i+1,j+1}. & i \in [k+1, n] \end{cases}$$ 而$|A|$ 即 $a_{ij}=0$. $\forall i<j$. 所有M_{k1}均下三角

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

性质3. 行列式某一行,某一列乘以c. 则得到行列式$|B|$. $|B|= c|A|$.

证明: 当$n=1$时. $|B| = |ca_{11}| = ca_{11} = c|A|$

下设结论对$n-1$阶行列式成立 证n阶.

1° 行的情形 $|B| = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $|A|$ 余子式 M_{ij}. $|B|$ 余子式 N_{ij}.

由定义 $|B| = a_{11}N_{11} - a_{21}N_{21} + \cdots\cdots (-1)^{i+1}ca_{i1}N_{i1} + (-1)^{n+1}a_{n1}N_{n1}$.

当 $k \neq i$. $N_{k1} = cM_{k1}$ $(\forall k \neq i)$ 当 $k=i$. $N_{i1} = M_{i1}$.

从而 $|B| = c|A|$

2° 列的情形

(1). 乘以c的为第一列. $|B| = \begin{vmatrix} ca_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ca_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ ca_{n1} & & & a_{nn} \end{vmatrix} = ca_{11}N_{11} - ca_{21}N_{21} + \cdots (-1)^{n+1}ca_{n1}N_{n1}$

$= c|A|$ $N_{i1} = M_{i1}$. $\forall i$.

(2). 乘以c的为第j列. $j \geq 2$ $|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & ca_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & & \\ a_{31} & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots\cdots & ca_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$|B| = a_{11}M_{11} - a_{21}N_{21} + \cdots\cdots (-1)^{n+1}a_{n1}N_{n1}$ $\forall N_{i1} = cM_{i1}$.

$= c(a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}) = c|A|$

扫描全能王 创建

性质2. 若$|A|$有某一行或某一列为0. $|A|=0$.

证明:
$$|A| = \begin{array}{c} \\ \\ i- \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \cdot \left| \quad A \quad \right| = 0.$$

列的证明同理.

性质4. 对换$|A|$的2个不同行成为$|B|$. 则$|B|=-|A|$.

证明: 当$n=2$时. 结论成立.

假设结论对$n-1$阶成立. 证明n阶.

1° 对换相邻行. 即i行, $i+1$行.

$$|B| = \begin{array}{c} \\ \\ i- \\ i+1- \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots\cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$|B| = a_{11}N_{11} - a_{21}N_{21} + \cdots\cdots (-1)^{i+1}a_{i+1,1}N_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i1}N_{i+1,1} + \cdots (-1)^{n+1}a_{n1}N_{n1}.$$

当$k\neq i, i+1$时. N_{k1}由M_{k1}对换2行得到. 则$N_{k1}=-M_{k1}$.

当$k=i$时 $N_{i1}=M_{i+1,1}$ $N_{i+1,1}=M_{i1}$.

则 $|B| = -a_{11}M_{11} + a_{21}M_{21} + \cdots (-1)^{i+1}a_{i+1,1}M_{i+1,1} + (-1)^{i+2}a_{i1}N_{i1} + \cdots (-1)^{n+2}a_{n2}M_{n2}$

$= -|A|$

2° 对换i,j行时. 对换=相邻对换复合.
$\begin{matrix} i \\ i+1 \\ \vdots \\ j-1 \\ j \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} j \\ i+1 \\ \vdots \\ j-1 \\ i \end{matrix} \Rightarrow (2j-2i-1)$次.

$$|B| = (-1)^{(2j-2i-1)}|A| = -|A|$$

性质5. 若|A|的两行成比例(相等). |A|=0.

证:

$$
|A| = \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
\xlongequal{\text{性质3}} c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \times 0 = 0.
$$

证: |A|: 第i行=第j行.

对换i.j行后 $|B|=|A|$ 且 $|B|=-|A|$ (性质4) $\Rightarrow |A|=-|A| \Rightarrow |A|=0$.

性质6. 拆分

$$
\underset{a_{ij}}{\overset{\Downarrow}{|C|}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{r1}+b_{r1} & a_{r2}+b_{r2} & \cdots & a_{rn}+b_{rn} \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
= \underset{M_{ij}}{\overset{\Downarrow}{|A|}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
+ \underset{N_{ij}}{\overset{\Downarrow}{|B|}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

证. 当 $n=1$ 时 $|a_{11}+b_{11}| = |a_{11}| + |b_{11}|$

下设n-1阶成立.证明n阶.

$$|C| = a_{11}Q_{11} - a_{21}Q_{21} + \cdots\cdots (-1)^{r+1}(a_{r1}+b_{r1})Q_{r1} + \cdots (-1)^{n+1}a_{n1}Q_{n1}.$$

当 $k\neq r$ 时. $Q_{k1} = M_{k1} + N_{k1}$. 当 $k=r$ 时. $Q_{r1} = M_{r1} = N_{r1}$

$$|C| = a_{11}(M_{11}+N_{11}) + \cdots\cdots (-1)^{r+1}(a_{r1}M_{r1} + b_{r1}N_{r1}) + \cdots\cdots$$

$$= (a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}) + (a_{11}N_{11} + \cdots (-1)^{r+1}b_{r1}N_{r1} + \cdots (-1)^{n+1}a_{n1}N_{n1})$$

$$= |A| + |B|$$

性质7. 行列式某一行乘c加到另一行. |A|不变.

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots & a_{in} \\ a_{j1}+ca_{i1} & a_{j2}+ca_{i2} & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

证明：对第j行拆开

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{nn} \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由性质5. 后行列式$=0$. $\Rightarrow$ $|B|=|A|$.

性质5.* 若$|A|$有两列成比例(相等)，则$|A|=0$.

证明：对阶数n归纳. $n=2$ ✓

设. $n-1$阶时结论成立. 证明n阶情形.

1°. 相等两列为i.j列. $i,j>1$.

$|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots (-1)^{n+1} a_{n1}M_{n1}$

$\forall i$. M_{i1}都有2列相同. $\forall M_{i1}=0$. $\Rightarrow$ $|A|=0$.

2°. 相等2列为第1列, r列.

由$|A|$定义, 不妨设$|A|$第一列不全为0. 如$a_{s1}\neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{s1} & \cdots & a_{s1} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{性质7}} |C| = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{s1} & \cdots & a_{s1} & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & * \end{vmatrix} \text{ 且 } |A|=|C|.$$

$|C| = a_{s1}(-1)^{s+1}Q_{s1}$ 而Q_{s1}中有1列全为0. 则$Q_{s1}=0 \Rightarrow |C|=|A|=0$.

性质6* (拆分).(对列).

$$\underset{|C|\ Q_{ij}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r}+b_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r}+b_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr}+b_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \underset{|A|\ M_{ij}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} + \underset{|B|\ N_{ij}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

证明：$n=1$ 显然

设结论对 $n-1$ 成立 证明 n.

1°. $r=1$. $|C| = (a_{11}+b_{11})Q_{11} - (a_{21}+b_{21})Q_{21} + \cdots (-1)^{n+1}(a_{n1}+b_{n1})Q_{n1}$

从而 $\forall i$. $Q_{i1} = N_{i1} = M_{i1}$.

$\Rightarrow |C| = (a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} + \cdots (-1)^{n+1}M_{n1}) + (b_{11}N_{11} - b_{21}N_{21} + \cdots (-1)^{n+1}b_{n1}N_{n1})$

$= |A| + |B|$

2°. $r>1$. $|C| = a_{11}Q_{11} - a_{21}Q_{21} + \cdots (-1)^{n+1}a_{n1}Q_{n1}$

由归纳 $\forall i$. $Q_{i1} = M_{i1} + N_{i1}$. $\forall i$.

$\Rightarrow |C| = |A| + |B|$.

性质7*

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & r & & s & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1s}+ca_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2r} & & a_{2s}+ca_{2r} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nr} & & a_{ns}+ca_{nr} & & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2r} & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nr} & a_{ns} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

利用拆分法及两列成比例 $|A|=0 \Rightarrow$ 性质7.

性质4* 对换行列式不同列成为 $|B|$. 则 $|B| = -|A|$.

证明：$|B|$ 为对换 $|A|$ 的 r, s 列.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2r} & a_{2s} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nr} & a_{ns} & & a_{nn} \end{vmatrix} \to |B| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2s} & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{ns} & a_{nr} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

构造

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} & r & & s & \end{array} \\
|C| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r}+a_{1s} & \cdots & a_{1r}+a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2r}+a_{2s} & \cdots & a_{2r}+a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nr}+a_{ns} & \cdots & a_{nr}+a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
\end{array}
\xRightarrow{\text{性质5.}} |C| = 0.
$$

利用性质6与性质5 →

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & a_{2s} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nr} & a_{ns} & & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & + \cdots & a_{1s} & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2s} & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{ns} & a_{nr} & & a_{nn} \end{vmatrix} = 0
$$

从而结论得证.

[illegible]

考虑如下相邻对换. $1, 2 \cdots r-1, r \cdots n. \xRightarrow{r-1\text{次}} r, 1, 2 \cdots r-1, r+1 \cdots n.$

$$
\begin{array}{ccc} |A| & \xrightarrow{\text{由性质4. } |B| = (-1)^{r-1}|A|} & |B| \\ M_{ij}. & & N_{ij}. \end{array}
$$

则按$|B|$第一列展开: $|B| = \begin{vmatrix} a_{1r} & a_{11} \cdots & a_{1r-1} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2r} & a_{21} & a_{2r-1} & a_{2r+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nr} & a_{n1} & a_{nr-1} & a_{nr+1} & & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow |B| = a_{1r}N_{11} - a_{2r}N_{21} + \cdots\cdots (-1)^{n+1}a_{nr}N_{n1}.$$

下看 N_{i1}. $\forall i$. $N_{i1} = M_{ir}$. $\Rightarrow$ $\cancel{|B| = a_{1r}M_{1r} - a_{2r}M_{2r} + \cdots\cdots (-1)^{n+1}a_{nr}M_{nr}}$

$$|A| = (-1)^{r-1}|B| = (-1)^{r+1}a_{1r}M_{1r} + (-1)^{r+2}a_{2r}M_{2r} + \cdots\cdots (-1)^{r+n}a_{nr}M_{nr}$$

$$= a_{1r}A_{1r} + a_{2r}M_{2r} + \cdots\cdots a_{nr}M_{nr}. \quad (\text{第}r\text{列展开}).$$

行列式展开与转置.

Kronecker 符号. $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, 若 i=j. \\ 0, 若 i\neq j. \end{cases}$

定理 1. 设 $|A| = |A|_{n\times n}$. $1 \le r, s \le n$. 则 $a_{1r}A_{1s} + a_{2r}A_{2s} + \cdots a_{nr}A_{ns} = \delta_{rs}|A|$

证明: 若 $r=s$. 已证. $\delta_{ij} = 1$.

下不妨设 $r<s$.

构造新行列式

$$|C| = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & r & s & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} \cdots & a_{1r} \cdots & a_{1r} & a_{1n} \\ a_{21} \cdots & a_{2r} \cdots & a_{2r} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} \cdots & a_{nr} \cdots & a_{nr} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}$$ 由性质5 $|C| = 0$

按 s 列展开: $a_{1r}A_{1s} + a_{2r}A_{2s} + \cdots a_{nr}A_{ns} = |A|$

引理 2. $$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots & a_{1r} \cdots & a_{1n}. \\ a_{21} \cdots & a_{2r} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 \ 0 \cdots & a_{sr} \cdots 0 & 0. \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} \cdots & a_{nr} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{sr}A_{sr}.$$

证明: $|A|$ 按第 r 列展开. $a_{1r}A_{1r} + a_{2r}A_{2r} + \cdots a_{sr}A_{sr} + a_{nr}A_{nr} = |A|$.

且 $\forall i \neq s$. 为 $A_{ir} = 0 \Rightarrow |A| = a_{sr}A_{sr}$

引理 3. 行列式也可按某行展开.

$|A| = a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \cdots a_{rn}A_{rn}$. 第 r 行.

证明: 第 r 行元素拆分. $a_{r1} = a_{r1} + 0 + \cdots 0$.

$a_{r2} = 0 + a_{r2} + \cdots 0$

$a_{rn} = 0 + \cdots \cdots a_{rn}.$

$$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{r1} & 0 \cdots\cdots & 0 \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{r2} \cdots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots\cdots = a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \cdots a_{rn}A_{rn}.$$

定理4: $|A|$ 为 $|A|_{n\times n}$, $1\le r,s\le n$. 则.

$$a_{r1}A_{s1}+a_{r2}A_{s2}+\cdots a_{rn}A_{rn}=\delta_{rs}|A|.$$

证明: $r=s$ 显然

不妨设 $r<s$.

$$|C|=\begin{array}{c} \\ \\ r- \\ \\ s- \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots\cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots\cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则令 $|C|$ 按 s 行展开. $a_{r1}A_{s1}+a_{r2}A_{s2}+\cdots a_{rn}A_{sn}=|A|$

性质8. $|A|=|A^T|$. $|A^T|=|A'|$. (记法)(不同学校不同).

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad |A^T|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

M_{ij} $\qquad$ N_{ij}.

下证: 对阶数归纳. $n=1$ 成立.

设 $n-1$ 成立, 证 n.

$|A|=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+\cdots(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$. $\forall i,j$. 有 N_{ji} 为 M_{ij} 转置.

从而有 $N_{ji}=M_{ij}$. $\forall i.j$.

则. $|A|=a_{11}N_{11}-a_{21}N_{12}+a_{31}N_{31}+\cdots(-1)^{n+1}a_{n1}N_{1n}$.

而 $|A'|$ 按第一行展开. $|A'|=|A|$.

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=B_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n=B_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

设(*)有解：行列式 $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $\qquad |A_1|=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$|A_1|=\begin{vmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n & a_{12}\cdots & a_{1n}. \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots a_{nn}x_n & a_{n2}\cdots & a_{nn}. \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质7.}} \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}\cdots & a_{1n}. \\ a_{21}x_1 & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=x_1|A|$$

若(*)有解：$\Rightarrow x_1=\frac{|A_1|}{|A|}.\quad x_2=\frac{|A_2|}{|A|}\quad\cdots\cdots\quad x_n=\frac{|A_n|}{|A|}.$

定理6.(Cramer法则).

若 $|A|\neq 0$. 则(*)有唯一解 $x_1=\frac{|A_1|}{|A|}\cdots x_n=\frac{|A_n|}{|A|}$

证明：若(*)有解.则解必为如上形式.

只要证：$x_i=\frac{|A_i|}{|A|}$ 确为解即可. $|A_i|$ 为把第i列换为 $b_1, b_2\cdots b_n$

$$a_{r1}A_{s1}+a_{r2}A_{s2}+a_{r3}A_{s3}+\cdots a_{rn}A_{sn}=\delta_{rs}|A|.$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{rj}A_{sj}=\delta_{rs}|A|$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \vdots \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots\cdots & a_{mn}. \end{matrix}$$

$$\sum_{i=1}^{m}a_{i1}+\sum_{i=1}^{m}a_{i2}+\cdots+\sum_{i=1}^{m}a_{in}.=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$$

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|} = \frac{1}{|A|}\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij}.$$

(*)的第k个方程. $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = b_k$.

从而代入. $\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{|A|}a_{kj}\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij}\right) = \frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{kj} b_i A_{ij} = \frac{1}{|A|}\sum_{i=1}^{n} b_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{ij}\right)$

$= \frac{1}{|A|}\sum_{i=1}^{n} b_i \delta_{ki}|A| = b_k.$

例. 范德蒙德 (VandenMonde) 行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ & & & & & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad V_n = \prod_{1\le i\le j\le n}(x_j - x_i).$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1-x_n & x_1^2-x_1x_n & \cdots & x_1^{n-2}-x_1^{n-3}x_n & x_1^{n-1}-x_1^{n-2}x_n \\ 1 & x_2-x_n & x_2^2-x_2x_n & & x_2^{n-2}-x_2^{n-3}x_n & x_2^{n-1}-x_2^{n-2}x_n \\ \vdots & & & & & \\ 1 & x_{n-1}-x_n & \cdots & & & x_{n-1}^{n-1}-x_{n-1}^{n-2}x_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} x_1-x_n & \cdots & \\ x_2-x_n & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n-1}-x_n & \cdots & \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}(x_1-x_n)(x_2-x_n)\cdots(x_{n-1}-x_n)V_{n-1}.$$

$\Rightarrow V_n = (x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})V_{n-1}$

$\Rightarrow V_n = \prod_{1\le i\le j\le n}(x_j - x_i).$

$$\widetilde{V}_n = \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots\cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots\cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots\cdots & x_n & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{[(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots]} V_n$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} V_n$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i).$$

例：

$$F_n = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 & a_1 \end{vmatrix}$$

$$F_n = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots\cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots\cdots 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots\cdots 0 & a_{n-2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots -1 & \lambda + a_1 \end{vmatrix}$$

$$F_n = \lambda \cdot F_{n-1} + (-1)^{n+1} a_n . (-1)^{n-1} = \lambda F_{n-1} + a_n. \quad F_1 = \lambda + a_1$$

$$F_n = \lambda(\lambda F_{n-2} + a_{n-1}) + a_n.$$

$$= \cdots\cdots$$

$$= \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots\cdots a_n.$$

例

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

证明：

$$\begin{vmatrix} ax & ay+bz & az+bx \\ ay & az+bx & ax+by \\ az & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

$$= a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

例

$$|A| = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & \underline{c^2} & \underline{c^2} \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ \underline{b^2} & \underline{b^2}_{\times(-1)} & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$

$$= \begin{vmatrix} (a+b)^2-c^2 & c^2 & 0 \\ a^2-(b+c)^2 & (b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 \\ 0 & b^2 & (c+a)^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2\begin{vmatrix} a+b-c & c^2 & 0 \\ a-b-c & (b+c)^2 & a-b-c \\ 0 & b^2 & c+a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^2\begin{vmatrix} a+b-c & c^2 & 0 \\ -2b & 2bc & -2c \\ 0 & b^2 & a+c-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a+b-c & \frac{c}{2}(a+b+c) & 0 \\ -2b & 0 & -2c \\ 0 & \frac{b}{2}(a+b+c) & a+c-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^3 \begin{vmatrix} a+b-c & \frac{c}{2} & 0 \\ -2b & 0 & -2c \\ 0 & \frac{b}{2} & a+c-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3 \cdot [(a+b-c)\cdot bc + 2b(\frac{c}{2})(a+c-b)]$$

$$= (a+b+c)^3\, 2abc$$

行列式的等价定义.

定义1. 记 $1,2\cdots n$ 全体排列 S_n, $\# S_n = n!$

在一个全排中从小到大为常序排列(只有一个 $123\cdots n$).

否则称为逆序排列. 若 $j>i$. 且 j 排在 i 之前, 称为逆序对. (j,i).

对全排列 $(k_1, k_2 \cdots k_n)$, 其中逆序对总个数为逆序数. 记为 $N(k_1, k_2 \cdots k_n)$.

设全排列为 $(k_1, k_2 \cdots k_n)$.

看 k_1 后有几个数比他小. 记为 m_1 个. 看 $k_2 \cdots\cdots m_2$ 个. 看 $k_{n-1} \cdots\cdots m_{n-1}$ 个.

于是 $N(k_1, k_2 \cdots k_n) = m_1 + m_2 + \cdots\cdots m_{n-1}$

定义3. 逆序数为偶数(奇). 则为偶(奇)排列. 例 $N(4,1,3,5,2) = 5$. 为奇排列.

引理4. 对换全排列 $(k_1, k_2 \cdots k_n)$ 中任意 k_i 与 k_j. 则全排列奇偶性发生改变

证明: 1° 对换相邻元素 k_i. k_{i+1}.

(i). 若 $k_i > k_{i+1}$. $(k_1 \cdots k_{i-1}\ k_i\ k_{i+1}\ k_{i+2} \cdots k_n)$ 逆序数 -1

$$\Downarrow$$

$(k_1 \cdots k_{i-1}\ k_{i+1}\ k_i\ k_{i+2} \cdots k_n)$.

(ii). 若 $k_i < k_{i+1}$. $(k_1 \cdots k_{i-1}\ k_i\ k_{i+1}\ k_{i+2} \cdots k_n)$ 逆序数 $+1$.

$(k_1 \cdots k_{i-1}\ k_{i+1}\ k_i\ k_{i+2} \cdots k_n)$.

2°. 一般地 $\overbrace{i.\ i+1 \cdots j-1\ j}$

$\Downarrow (j-i)$次

$i+1 \cdots\cdots j-1\ j\ i.$

$\Downarrow (j-i+1)$次

$j\ i+1 \cdots\cdots j-1\ i.$

综上进行 $2(j-i)+1$ 次. 奇偶性仍改变.

引理5. 设 $n\geq 2$. 在 S_n 中 奇排列. 偶排列各占一半. 为 $\frac{n!}{2}$

证明: 设有 p个奇排列. q个偶排列. 对 $\forall (k_1, k_2 \cdots k_n)\in S_n$.

对换 k_1与k_2. $(k_1, k_2 \cdots k_n) \to (k_2, k_1 \cdots k_n)$.

(p) 奇 $\to$ 偶 $\quad p\leq q$

偶 $\to$ 奇. $\quad q\leq p \quad \Rightarrow p=q$

设 $(k_1, k_2 \cdots k_n) \neq (j_1, j_2 \cdots j_n)$.

则 $(k_2, k_1 \cdots k_n) \neq (j_2, j_1 \cdots j_n)$.

命题6. 设$(k_1, k_2 \cdots k_n)\in S_n$. 则 $(k_1, k_2 \cdots k_n)$ 经逆序数次相邻对换一定可成为顺序排列

证明: $n=1$. 成立

设$n-1$成立. 证n情形

设 $k_i=n$. $(k_1, k_2 \cdots k_{i-1}\ k_i\ k_{i+1} \cdots k_n)$. 作$\overset{m_i=n-i}{n-i}$次相邻对换 $\Rightarrow (k_1, k_2 \cdots k_{i-1}\ k_{i+1} \cdots k_n, n)$

$1^\circ (k_1 \cdots k_{i-1}\ k_{i+1}. k^{\cdot} \cdots k_n)\in S_{n-1}$. 且逆序数不变. $\forall j. \overset{j\neq i}{m_j}$ 都不变.

2°. $N(k_1, k_2 \cdots k_i \cdots k_n). = N(k_1 \cdots k_{i-1}\ k_{i+1} \cdots k_n)+n-i.$

由归纳假设. $k_1 \cdots k_{i-1}\ k_{i+1} \cdots k_n$. 经过 $N(k_1 \cdots k_{i-1}\ k_{i+1} \cdots k_n)$次相邻对换为$(1, 2 \cdots n-1)$.

从而. $(k_1, k_2 \cdots k_{i-1}\ k_{i+1} \cdots k_n, n)$ 经 $N(k_1 \cdots k_{i-1}\ k_{i+1} \cdots k_n)$ 次 $\Rightarrow (1, 2 \cdots n-1, n)$.

$\therefore (k_1 \cdots k_{i-1}\ k_i\ k_{i+1} \cdots k_n)$. $\curvearrowright (1, 2 \cdots n-1, n)$. 经$N(k_1, k_2 \cdots k_n)$次

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \\ a_{21} & \cdots & \\ 0 & \cdots & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \\ 0 & \cdots & \\ a_{31} & \cdots & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix} + \cdots\cdots$$

定理7. 设$|A|$为n阶行列式. 则 $|A| = \sum\limits_{(k_1k_2\cdots k_n)\in S_n} (-1)^{N(k_1,k_2\cdots k_n)} a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{k_nn}$.

证明: 拆分法. 设 $|A| = |\alpha_1 . \alpha_2 \cdots \alpha_n|$ $\alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$

令 $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $(1\le i\le n)$ 定义,

$$ia+bj = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a \\ b \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & i\neq j \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a+b \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & i=j \end{cases} \quad 而\ \alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \cdots a_{nj}e_n.$$

则 $|A| = \left|\sum\limits_{i=1}^n a_{i1}e_i, \alpha_2 \cdots \alpha_n\right|$

$$\xlongequal{拆分} \sum_{i=1}^n \left|a_{i1}e_i . \alpha_2 \cdots \alpha_n\right| \xlongequal{提a_{i1}} \sum_{i=1}^n a_{i1}\left|e_i . \alpha_2 . \cdots \alpha_n\right| = \sum_{i=1}^n a_{i1}\left|e_i . \sum_{k=1}^n a_{k2}e_k . \cdots \alpha_n\right|$$

$$= \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{i1}a_{k2} | \qquad | \cdots\cdots = \underbrace{\sum_{i=1}^n \cdots\cdots \sum_{m=1}^n}_{n个} a_{i1}a_{k2}\cdots |e_i . e_k \cdots e_m|.$$

$= \sum\limits_{1\le k_1\cdots k_n\le n} a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{k_nn} |e_{k_1} . e_{k_2} \cdots e_{k_n}|$. 若 $k_i = k_j\,(i\neq j)$. 则 $|e_{k_1} . e_{k_2} \cdots e_{k_n}| = 0$.

从而上式 $= \sum_{(k_1,k_2\cdots k_n)\in S_n} a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{mn}|e_{k_1},e_{k_2}\cdots e_{kn}|$

而 $(k_1,k_2\cdots k_n)\xrightarrow[N(k_1,k_2\cdots k_n)\text{次}]{}(1,2\cdots n)$

$|e_{k_1},e_{k_2}\cdots e_{k_n}|\xrightarrow[N(\quad)\text{次列对换}]{}|e_1,e_2\cdots e_n|=1$

$\therefore |e_{k_1},e_{k_2}\cdots e_{k_n}|=(-1)^{N(k_1,k_2\cdots k_n)}$.

综上. $|A|=\sum_{k_1,k_2\cdots k_n}(-1)^{N(k_1,k_2\cdots k_n)}a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{k_nn}$.

取正号: $\frac{n!}{2}$个. 取负号: $\frac{n!}{2}$个.

引理8. 设 $(i_1,i_2\cdots i_n)(j_1\cdots j_n)\in S_n$.

$a_{i_1j_1}\cdot a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$. 在$|A|$中符号 $N(i_1,i_2\cdots i_n)+N(j_1,j_2\cdots j_n)$.

证明: $(j_1,j_2\cdots j_n)\xrightarrow[\text{相邻对换}]{N(j_1\cdots j_n)}(1,2,3\cdots n)$

$\Updownarrow\ \Updownarrow\ \ \Updownarrow$

$(i_1,i_2\cdots i_n)\longrightarrow(k_1,k_2\cdots k_n)$.

$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}\longrightarrow a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{k_nn}$.

符号为 $(-1)^{N(k_1,k_2\cdots k_n)}\Rightarrow(a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$

$N(j_1,j_2\cdots j_n)+N(i_1,i_2\cdots i_n)\equiv N(k_1,\cdots k_n)\ \mathrm{mod}\ 2$.

$(-1)^{N(j_1,j_2\cdots j_n)+N(i_1\cdots i_n)}=(-1)^{N(k_1,k_2\cdots k_n)}$.

推论9: $|A|=\sum_{(k_1,k_2\cdots k_n)\in S_n}(-1)^{N(k_1,k_2\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}a_{3k_3}\cdots a_{nk_n}$.

证明: $a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$ 是$|A|$项. 由引理8. $\Rightarrow$ 其符号 $(-1)^{N(k_1,k_2\cdots k_n)}$.

拉普拉斯定理

定义1. n阶行列式$|A|$. $\{a_{ij}\}$. $k\in[1,n]$.

取定 $1\le i_1<i_2\cdots<i_k\le n$. $1\le j_1<j_2<j_3\cdots<j_k\le n$.

将$|A|$第i_1行, i_2行 … i_k行, 第j_1列, …… j_k列交叉点上元素.
按原来次序构成k阶行列式,称为$|A|$的k阶子式

记为 $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i_kj_1} & \cdots & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}$

删去第$i_1, i_2 \cdots\cdots i_k$行, $j_1, j_2 \cdots j_k$列剩下元素按原次序构成$(n-k)$阶子式,称为
其余子式 记为 $M\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$. 代数余子式 $\hat{A}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = (-1)^{i_1+i_2+\cdots i_k+j_1+\cdots j_k} M\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

定理2 (Laplace 行列式)

$|A|$中给定k行(k列)则包含于这k行(列)所有k阶子式与代数余子式乘积之和为$|A|$.

给定 $1\le i_1<i_2\cdots i_k\le n$. 则.

$$|A| = \sum_{1\le j_1<j_2\cdots j_k\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \hat{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

给定 $1\le j_1<j_2\cdots j_k\le n$. 则.

$$|A| = \sum_{1\le i_1<i_2\cdots<i_k\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \hat{A}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

扫描全能王 创建

例 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

选定1,2行.

$A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}$ $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$ $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$

$\hat{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ $\hat{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ $\hat{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$ $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

$\hat{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ $\hat{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ $\hat{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$.

(Laplace)

证明: 单项个数 $|A| = n!$ 右边. $C_n^k \cdot k!(n-k)! = n!$

$|A|_{\#} = 右_{\#}$.

只要证明: (1) (*)右侧单项为|A|单项且符号一致

(2) (*)右侧展开项互不相同.

引理4: (*)式右侧展开项为|A|单项且符号一致.

证明: 1° $i_1=1, i_2=2 \cdots i_k=k$. $j_1=1$ $j_2=2 \cdots j_k=k$.

$|A| =_k \begin{vmatrix} A_1 & * \\ * & A_2 \end{vmatrix}$ $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} = |A_1|$ $\hat{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} = |A_2|$.

$|A_1|$中单项 $(-1)^{N(r_1\cdots r_k)}a_{r_1 1}a_{r_2 2}\cdots a_{r_k k}$.
其中 $(r_1\cdots\cdots r_k)$ 为 $(1.2\cdots\cdots k)$ 全排列.

$|A_2|$ 中单项. $(-1)^{N(r_{k+1}\cdots r_n)}a_{r_{k+1}k+1}\cdots a_{mn}$.
其中 $(r_{k+1}\cdots r_n)$ 为 $(k+1\cdots n)$ 全排列.

则 $|A_1|.|A_2|$ 中任一单项:

$$(-1)^{\sigma}a_{r_1 1}\cdots a_{r_k k}a_{r_{k+1}k+1}\cdots a_{mn}.$$

其中 $(r_1\cdots\cdots r_n)$ 为 $(1.2\cdots\cdots n)$ 全排列.

$$\sigma=N(r_1.r_2\cdots r_k)+N(r_{k+1}\cdots r_n).=N(r_1\cdots\cdots r_n).$$

即 $|A_1||A_2|$ 中任一单项为 $|A|$ 单项且符号一致.

2°. 一般地. 将 i_1 行经 i_1-1 次相邻对换可变为第1行.

$i_2\cdots i_2-1\cdots\cdots$

$i_k\cdot i_k-k$ ------ k行.

将 j_1 列经 j_1-1 次 -------- 第1列

⋮

$j_k\cdots j_k-k$ -------- 第k列

最后经过 $i_1+\cdots i_k+j_1+\cdots j_k-k(k+1)$ 次相邻对换. 化为1°.

$$|A|\longrightarrow|C|=\begin{vmatrix}D & *\\ * & B\end{vmatrix}.$$

其中 $|D|=A\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_k\\ j_1\cdots\cdots j_k\end{pmatrix}$. $|B|=M\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_k\\ j_1 j_2\cdots j_k\end{pmatrix}$ 由 1°. $|D||B|$ 中任一单项为 $|C|$ 单项. 且符号一致. $p=i_1+\cdots i_k$. $q=j_1+\cdots j_k$.

$|C|=(-1)^{p+q}|A|$. $A\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_k\\ j_1\cdots\cdots j_k\end{pmatrix}\hat{A}\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_k\\ j_1\cdots\cdots j_k\end{pmatrix}=(-1)^{p+q}|D||B|$. 中任一项是 $(-1)^{p+q}|C|$ 中任意项. 即为 $|A|$ 中任意项且符号一致.

引理5. (*)式右边展开单项互不相同.

证明: $1\le j_1<j_2<\cdots j_k\le n$. 余指标 $1\le j_{k+1}<\cdots j_n\le n$.

$1\le l_1<l_2\cdots l_k\le n$. ～～ $1\le l_{k+1}<\cdots l_n\le n$.

取$(j_1,j_2\cdots j_k)$全排列$(r_1,r_2\cdots r_k)$.

$(j_{k+1}\cdots j_n)$ ～ $(r_{k+1}\cdots r_n)$. 余

取$(l_1,l_2\cdots l_k)$全排列$(s_1,s_2\cdots s_k)$

$(l_{k+1}\cdots l_n)$ ～ $(s_{k+1}\cdots s_n)$.

$$a_{l_1r_1}\cdots a_{l_kr_k}a_{l_{k+1}r_{k+1}}\cdots a_{l_nr_n}$$
$$\parallel$$
$$a_{l_1s_1}\cdots a_{l_ks_k}\cdots\cdots a_{l_ns_n}.$$

Laplace 定理证毕.

例: $|A|=\begin{vmatrix}-1&1&1&2&-1\\0&-1&0&1&2\\2&1&1&3&-1\\1&2&2&1&0\\0&3&0&1&3\end{vmatrix}$

对1列,3列用 Laplace展开.

$$|A|=\begin{vmatrix}-1&1\\2&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-1&1&2\\2&1&0\\3&1&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-1&1\\1&2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-1&1&2\\1&3&-1\\3&1&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2&-1\\-1&1&2\\3&1&3\end{vmatrix}$$

推论：设 $|A|=\begin{vmatrix} B^{k\times k} & C \\ O & D_{n-k\times n-k} \end{vmatrix}$ 或 $|A|=\begin{vmatrix} B & O \\ C & D \end{vmatrix}$

则 $|A|=|B||D|$.

证明：上三角，对前 k 列用 Laplace 展开.

此时非 0 k 阶子式为 $|B|$.

从而 $|A|=|B||D|$.

下三角，对前 k 行用 Laplace 展开.

非 0 k 阶子式为 $|B|$，从而 $|A|=|B||D|$.

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots a_1x+a_0\ (a_n\neq 0)$. $\deg(f(x))=n$

命题．设 $f(x)$ 次数 $\leq n$. 存在 $n+1$ 个不同数 $b_1\cdots\cdots b_{n+1}$. 使 $f(b_i)=0$, 则 $f(x)\equiv 0$.

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots a_1x+a_0$.

$0=a_nb_i^n+a_{n-1}b_i^{n-1}+\cdots\cdots a_1b_i+a_0$. $\forall\ 1\leq i\leq n+1$.

$x_0=a_0$. $x_1=a_1\cdots\cdots$ $x_n=a_n$ 为下列方程组解.

$$(*).\begin{cases} x_0+b_1x_1+b_1^2x_2+\cdots\cdots b_1^nx_n=0. \\ x_0+b_2x_1+b_2^2x_2+\cdots\cdots b_2^nx_n=0. \\ \\ x_0+b_{n+1}x_1+\cdots\cdots\cdots b_{n+1}^nx_n=0. \end{cases}$$

(*).系数行列式 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_1^2 & \cdots & b_1^n \\ 1 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & b_{n+1}^n \end{vmatrix}=\prod_{1\leq i<j\leq n+1}(b_j-b_i)\neq 0$.

由 Cramer 法则 (*)有且仅有唯一解

而齐次方程组必有0解. 从而0解为唯一解

$\Rightarrow a_0=a_1 \cdots\cdots =a_n=0 \Rightarrow f(x)\equiv 0$

推论: $f(x), g(x)$. 且 $\deg(f(x)), \deg(g(x)) \leq n$.

若存在 $n+1$ 个不同数 $b_1 \cdots\cdots b_{n+1}$ 使 $f(b_i)=g(b_i)$. $\forall 1\leq i\leq n+1$. 则 $f(x)\equiv g(x)$.

证明: $h(x)=f(x)-g(x)$. $h(b_i)=0$. $\forall 1\leq i\leq n+1$.

$\rightarrow h(x)\equiv 0$.

推论. 已知 $f(x)$ 次数 $=n$, 存在 $n+1$ 个数 $b_1 \cdots\cdots b_{n+1}$. 已知 $f(b_i)$. $\forall 1\leq i\leq n$.

则 $f(x)$ 唯一确定.

证明: $$g(x)=\sum_{i=1}^{n+1} f(b_i)\frac{(x-b_1)\cdots\cdots(x-b_{i-1})\cdots\cdots(x-b_{n+1})}{(b_i-b_1)\cdots\cdots(b_i-b_{i-1})(b_i-b_{i+1})\cdots\cdots(b_i-b_{n+1})}$$

$\Longrightarrow f(x)\equiv g(x)$.

矩阵

定义1. 矩阵定义……

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{ij} 称为第 (i,j) 元素. 若 $a_{ij}\in\mathbb{R}(\mathbb{C})$ 则称A为实矩阵(复矩阵)

若 $m=n$. 则称A为n阶方阵.

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. 为方阵. 则 $a_{11}, a_{22} \cdots a_{nn}$ 连成一起,称为 A 主对角线

若 $\forall i\neq j$. $a_{ij}=0$. 则称 A 为对角阵. 简记为 $\mathrm{diag}\{a_{11}, a_{22} \cdots a_{nn}\}$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

进一步 $a_{11}=a_{22}\cdots=a_{nn}=1$. 这样矩阵称为单位阵. 记为 $I_n(E_n)$

$$I_n=\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

定义2. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$. $B=(b_{ij})_{s\times t}$.

$$A=B \overset{def}{\Longleftrightarrow} m=s, n=t. \ a_{ij}=b_{ij}$$

定义3. $A=(a_{ij})_{m\times n}$. 则 $(a_{i1}, a_{i2} \cdots a_{in})$ 为第 i 行向量 $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ 为第 i 列向量

记 $M_n(R)$ 为 n 阶实方阵全体构成集合, $M_n(C)$ …… 复方阵.

映射: $\det: M_n(R) \longrightarrow R$

$$A \longmapsto |A| = \det A.$$

问题(1). n 阶方阵行列式值反映 n 阶方阵什么性质.

(2) 映射 det 具有何性质?

定义矩阵加减法. $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$

$A-B=(a_{ij}-b_{ij})$.

例 $\begin{bmatrix}1&2&0\\-1&3&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-2&1\\-1&-3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&1\\-2&0&1\end{bmatrix}$

性质：(1) 交换律：$A+B=B+A$.

(2). 结合律 $A+(B+C)=(A+B)+C$

(3) 零矩阵：$A+0=A$.

(4) 负矩阵：$A+(-A)=0$

定义5. $A=(a_{ij})_{m\times n}$. C为常.

$C\cdot A=(Ca_{ij})_{m\times n}$. $-A=(-a_{ij})_{m\times n}$.

性质：(1). 分配：$(c+d)A=cA+dA$.

(2) 分配：$C(A+B)=cA+cB$.

(3) 结合：$\cancel{A(B\cdot C)=(A\cdot B)C}$ $(cd)A=c\cdot(dA)$

(4) 单位元：$1\cdot A=A$.

(5) 零元 $0\cdot A_{m\times n}=O_{m\times n}$.

定义6. 矩阵乘法 ***

设 $A=(a_{ij})_{m\times k}$. $B=(b_{ij})_{k\times n}$. 定义. A与B乘积C为 $m\times n$ 矩阵

且 $C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots a_{ik}b_{kj}=\sum_{r=1}^{k}a_{ir}b_{rj}$.

注：(1). A的列数 = B的行数. AB才有意义.

AB行数 = A行数. AB列数 = B列数.

$\underset{m\times k}{A}\quad\underset{k\times n}{B}\longrightarrow\underset{m\times n}{AB}$.

(2) AB 第 (i,j) 元 = A的第 i 行, B第 j 列对应元素乘积之和.

(3) 矩阵乘法一般不满足交换律

性质：(1) 结合：$(AB)C = A(BC)$

(2) 分配：$(A+B)\cdot C = AC+BC$

$A\cdot(B+C) = AB+AC$

(3) 与数乘 $c(AB) = (cA)B = A(cB)$

(4) 单位元. 记 $A_{m\times n}$. $I_m\cdot A = A$ $A\cdot I_n = A$.

只证(1) $A=(a_{ij})_{m\times n}$ $B=(b_{ij})_{n\times p}$ $C=(c_{ij})_{p\times q}$

考虑 AB 的 (i,r) 元 $= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kr}$

$(AB)C$ 的 (i,j) 元. $\sum_{r=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kr}\right)c_{rj} = \sum_{r=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kr}c_{rj}$.

而 (BC) 的 (k,j) 元 $\sum_{r=1}^{p} b_{kr}c_{rj}$. $\qquad \|$

$A(BC)$ 的 (i,j) 元. $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{r=1}^{p} b_{kr}c_{rj}\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{p} a_{ik}b_{kr}c_{rj}$.

$(AB)C = A(BC)$

定义7. $A_{n\times n}$. $A\cdot A = A^2$ $A^k = \overbrace{A\cdot A\cdot A \cdots A}^{k个}$

性质：(1) $A^r\cdot A^s = A^{r+s}$ (2) $(A^r)^s = A^{rs}$

注：(1) A, B 为 $A_{n\times n}$ $B_{n\times n}$ 一般地 $(AB)^r \neq A^r\cdot B^r$.

而 $(AB)^r = ABABABAB\cdots AB \neq A^r\cdot B^r$

(2) 若 $AB=BA$，则 $(AB)^r = A^rB^r$ 进一步：

$(A+B)^m = A^m + C_m^1 A^{m-1}B^1 + \cdots\cdots C_m^{m-1} A^1B^{m-1} + B^m$

且 $A\cdot I_n = I_n\cdot A = A$.

纯量阵 $c\cdot I_n$ $A(cI_n)=(cI_n)\cdot A=c\cdot A$.

$(cI_n+A)^m=c^mI_n+C_m^1c^{m-1}A+\cdots+A^{m}$

(3). 消去律：矩阵乘法消去一般不成立. $AB=AC$, 且 $A\neq0$ $\nRightarrow$ $B=C$

整性一般不成立. $A\neq0$. $B\neq0$ $\nRightarrow$ $AB\neq0$

例：$A=B=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ $C=AB=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

定义8. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$. A转置 A^T. A'是 $n\times m$ 阵. $A'=(b_{ij})_{n\times m}$.

其中 $a_{ij}=b_{ji}$.

定义 $A'=A$. 则A为对称阵. 例：$A=\begin{bmatrix}1&3\\3&2\end{bmatrix}$

若 $A'=-A$, 则A为反对称阵. 例 $A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$

转置性质：(1) $A''=A$

(2) $(A+B)'=A'+B'$

(3). $(cA)'=c\cdot A'$

(4) $(AB)'=B'A'$

证明(4). $(AB)'$的(i,j)元 $=AB$的(j,i)元 $=A$的第j行$\cdot B$的第i列

$B'A'$的(i,j)元 $=B'$的i行$\cdot A$的第j列 $=B$的i列$\cdot A$的j行.

定义9. $A(a_{ij})_{m\times n}$. 复矩阵 $\overline{A}=(\overline{a_{ij}})_{m\times n}$.

性质：(1) $\overline{\overline{A}}=A$ (5). $(\overline{A})'=\overline{A'}$

(2) $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$

(3) $\overline{cA}=\overline{c}\cdot\overline{A}$

(4) $\overline{A\cdot B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

令 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$ $\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$

$(*) \Leftrightarrow Ax = \beta.$

定义1、$A_{n\times n}$.若存在n阶方阵B.使得. $AB = BA = I_n$. 则B为A的逆阵.

记 $B = A^{-1}$

若方阵A存在逆阵.则称为非奇异阵.可逆阵

若矩阵A不存在逆阵.则称为奇异阵

注：(1). 方阵才有逆阵，当 $m \neq n$. 无逆阵.

(2). 非0方阵不一定有逆阵.

例：$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 无逆阵

(3). 一般而言 $A^{-1}B \neq BA^{-1}$

逆阵性质：④.若n阶方阵A,B

(1). 若A存在逆阵，则逆阵必唯一

证：B.C均为A^{-1} $AB = BA = I_n$ $AC = CA = I_n$.

$B = BI_n = BAC = I_nC = C$

(2). 设A,B可逆，则AB可逆 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

证明 $(AB)(B^{-1}A^{-1})=ABB^{-1}A^{-1}=AA^{-1}=I_n.$

$\therefore (B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}A^{-1}AB=B^{-1}B=I_n.$

$\Rightarrow (AB)^{-1}=(B^{-1}A^{-1})$

推广. $A_1\cdots\cdots A_m$为n阶可逆阵.$(m\geq 2)$

$(A_1\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}A_{m-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}$

(3). 设A可逆. $C\neq 0$为常,则$C\cdot A$可逆 $(CA)^{-1}=C^{-1}A^{-1}$

(4) 设A可逆, A^T可逆. $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

证明: $(A^T)(A^{-1})^T=(A^{-1}A)^T=I_n.$

$(A^{-1})^T(A^T)=(AA^{-1})^T=I_n.$

(5). $(A^{-1})^{-1}=A$. A可逆.

(6). 对可逆阵而言,消去律成立. A可逆 $\begin{cases}AB=AC\Rightarrow B=C\\BA=CA\Rightarrow B=C\end{cases}$

(7). 整性对可逆阵成立. A可逆. $B\neq 0\Rightarrow AB\neq 0$.

$C\neq 0\Rightarrow CA\neq 0.$

定义2. 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$. A_{ij}为a_{ij}在$|A|$中代数余子式. 下列阵为A伴随A^*.

$$A^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&&&&\vdots\\A_{13}&&&&\vdots\\\vdots&&&&\vdots\\A_{1n}&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{bmatrix}$$

注: A不一定有逆阵.但任何时候A^*存在.

引理3. $A_{n\times n}$. $AA^*=A^*A=|A|\cdot I_n$.

证明:
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} |A| & 0 & & O \\ 0 & |A| & & \\ & & \ddots & \\ O & & & |A| \end{bmatrix}=|A|I_n$$

$a_{i1}A_{j1}+\cdots\cdots a_{in}A_{jn}=\delta_{ij}|A|$.

定理4 设A为n阶方阵. 若 $|A|\neq 0$.

则 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

证明: $AA^*=A^*A=|A|I_n \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

例: $Ax=\beta$. $A_{n\times n}$ $x_{n\times 1}$ $\beta_{n\times 1}$ 且 $|A|\neq 0$.

$$x=A^{-1}\beta=\frac{1}{|A|}A^*\beta$$

具体地: $x_j=\frac{1}{|A|}(b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots b_nA_{nj})$. $x_j=\frac{|A_j|}{|A|}$

定理5. 设 $A_{n\times n}$. $B_{n\times n}$. $|AB|=|A||B|$

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ $B=(b_{ij})_{n\times n}$.

$$C=\begin{bmatrix} A & O \\ -I_n & B \end{bmatrix}$$

$$|C|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & & O & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & -1 & & & \vdots & & \vdots \\ O & & \ddots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & & a_{nn} & a_{n1}b_{11} & \cdots & \cdots & a_{n1}b_{1n} \\ -1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & b & & \\ & & & -1 & & & & \end{vmatrix}$$

经过n次之后 $|C| = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \sum_r a_{1r}b_{r1} & \sum_r a_{1r}b_{r2} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \sum_r a_{nr}b_{r1} & \cdots & \sum_r a_{nr}b_{rn} \\ -1 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & AB \\ -I_n & B \end{vmatrix}$

由 Laplace 定理按前n行展开.

则 $|C| = |A||B|$. 再看上方. $|C| = |AB|(-1)^{1+\cdots+2n}|-I_n| = (-1)^{n^2+n}|AB|$

$\Rightarrow |A||B| = |AB|$

定理6. 设 $A_{n\times n}$. A可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$. 等价地 A奇异 $\Leftrightarrow |A| = 0$.

证明: 充分性. $|A| \neq 0 \Rightarrow$ A可逆

必要性. A可逆. $\exists B$. st $AB = BA = I_n$. $|AB| = 1 = |A||B|$.

从而 $|A| \neq 0$.

推论7. (1) 设 $A_1 \cdots\cdots A_m$ 为n阶方阵. $\exists i$. st A_i可逆 $A_1A_2\cdots A_m$ 为奇异阵.

证: $|A_1\cdots\cdots A_m| = |A_1||A_2|\cdots|A_i|\cdots|A_m| = 0$. $\Rightarrow A_1\cdots A_m$ 不可逆

(2). 设A可逆, $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

$1 = |A||A^{-1}| \Rightarrow |A^{-1}| = |A|^{-1}$

(3). 设 A,B 为n阶方阵. 若 $AB = I_n$ 或 $BA = I_n$. 则 $B = A^{-1}$

证明: 只证 $AB = I_n$. $|A||B| = |I_n| = 1$. $|A| \neq 0 \Rightarrow$ A可逆 $\Rightarrow A^{-1}$存在.

$B = I_nB = A^{-1}AB = A^{-1}I_n = A^{-1}$

例：

$$A=\begin{bmatrix}(a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \cdots & (a_0+b_n)^n\\ \vdots & & & \\ (a_n+b_0)^n & \cdots & \cdots & (a_n+b_n)^n\end{bmatrix}$$

$$(a_0+b_0)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i a_0^i b_0^{n-i}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & C_n^1a_0 & C_n^2a_0^2 & \cdots & C_n^na_0^n\\ 1 & C_n^1a_1 & \cdots & \cdots & C_n^na_1^n\\ 1 & C_n^1a_2 & C_n^2a_2^2 & \cdots & C_n^na_2^n\\ \vdots & & & & \\ 1 & C_n^1a_n & C_n^2a_n^2 & \cdots & C_n^na_n^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_0^n & b_1^n & \cdots & b_n^n\\ b_0^{n-1} & b_1^{n-1} & & b_n^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A|=C_n^0C_n^1C_n^2\cdots C_n^n\cdot\prod_{0\le i<j\le n}(a_j-a_i)(b_i-b_j).$$

$$\det: M_n(\mathbb{R})\longrightarrow \mathbb{R}.$$
$$A\longrightarrow |A|.$$

行列式性质. 设 $A_{n\times n}$ $B_{n\times n}$ $C\in\mathbb{R}$

(1) $|A\pm B|\neq |A|\pm|B|$ （一般）.

(2). $|CA|=C^n|A|$.

(3) $|AB|=|A|\cdot|B|$

(4) $|A^T|=|A|$

(5) $|\bar{A}|=\overline{|A|}$

(6) $|A^{-1}|=|A|^{-1}$

(7). 设 $n\geqslant 2$. $|A^*|=|A|^{n-1}$

证(7). 若A可逆. $|A^*|=\big||A|A^{-1}\big|$

$|A^*|=|A|^n|A^{-1}|=|A|^{n-1}$

若A奇异 $|A|=0$. 即证 $|A^*|=0$ 即可

假设 $|A^*|\neq 0\Rightarrow$ 则 A^* 可逆.

而 $AA^*=|A|I_n\Rightarrow A=0\Rightarrow A^*=0$ 矛盾.

矩阵与增广矩阵:

定义1. 以下三种变换为矩阵初等变换

第一类: 对换某2行或2列.

第二类: 矩阵某一行(列)×C

第三类: 行(列)倍加变换

定义2. 矩阵A可经初等变换成为B, 则A相抵于B, 或A与B相抵. $A\sim B$.

定理3. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$. 则A必相抵于 $\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m\times n}$.

称为A的相抵标准型.

注: $0\leq r\leq \min\{m,n\}$, r不依赖于初等变换选取.

证明: 对 $\min\{m,n\}$ 进行归纳.

若 $\min\{m,n\}=0$. 则归纳结束.

设 $\min\{m,n\}<k$ 成立. 证 $\min\{m,n\}=k$.

若 $A=0$ 成立. 下设 $A\neq 0$. 设 $a_{ij}\neq 0$.

第i行与第1行对换, 第j列与第1列对换, 此时 a_{ij} 变到 (1,1) 处. 以下不妨设 $a_{11}\neq 0$.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$B_{(m-1)\times(n-1)}$. $\min\{m-1,n-1\}=\min\{m,n\}-1=k-1$. 由归纳 B 可通过变换为 $\begin{bmatrix} I_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A\sim\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 得证.

定义4: 设$A=(a_{ij})_{m\times n}$. $\forall 1\le i\le m$ $k_i=\begin{cases}+\infty & 若 a_{ij}=0\ \forall 1\le j\le n.\\ \min\{j\mid a_{ij}\neq 0\} & 若\ \exists a_{ij}\neq 0.\end{cases}$

若A第i行不全为0. a_{ik_i}为i行从左到右第一个非0元.

A为阶梯形矩阵 $\Longleftrightarrow \exists\, 0\le r\le m.\ k_1<k_2\cdots\cdots<k_r.\ k_{r+1}\cdots\cdots k_m=+\infty.$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1k_1} & - & - & - & - & - & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & a_{2k_2} & - & - & - & - \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0 & & - & - & & - & & 0\ a_{rk_r} & \cdots & \\ 0 & \cdots & - & - & - & - & - & - & - & 0 \end{bmatrix}$$

定理5. 设$A=(a_{ij})_{m\times n}$. 则通过初等行变换可把A化为阶梯型.

证明: 对列归纳. 当$n=0$. 归纳已结束.

下设$<n$成立. 证n列情形

1°. A第一列元素全为0.

$$A=\left[\begin{array}{c:c} 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right]$$ $A_{1\,m\times(n-1)}$ 由归纳: A_1可通过行变换成为阶梯形

2°. A第一列不全为0. 由行对换可将非0元换至(1,1)位, 下不妨设$a_{11}\neq 0$.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & \\ \vdots & * \\ a_{m1} & \end{bmatrix}\xrightarrow{行}\left[\begin{array}{c:c} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ \hdashline 0 & \\ 0 & A_2 \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right]$$ $A_{2\,(m-1)\times(n-1)}$.

由归纳. A_2可通过行变换 $\to B_2$.(阶梯形)

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ 0 & \\ 0 & B_2 \\ \vdots & \\ 0 & \end{bmatrix}$$ 结论得证.

定义6. 对单位阵实施三类初等行变换后分别称为三类初等阵.

(I). $P_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$

(III). $T_{ij}(c) = \begin{array}{c} i \\ j \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & c & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$

(II). $P_i(c) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$

定理7. 行(列)初等变换等价于左(右)乘初等阵.

$$\overset{i}{\underset{j}{[}} A = P_{ij}A \qquad \xrightarrow{c} iA = P_i(c)A. \qquad c\,\overset{i}{\underset{j}{[}}A = T_{ij}(c)A.$$

$$ {}^{i}\overset{\frown}{A}{}^{j} = AP_{ij}. \qquad A^{i\times c} = AP_i(c) \qquad {}^{i}\overset{c}{\overset{\frown}{A}}{}^{j} = AT_{ji}(c)$$

证明
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{1i} & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2i} & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{mi} & a_{mj} & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & c \\ & & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cdots & ca_{1i}+a_{1j} \\ \cdots & ca_{2i}+a_{2j} \\ \cdots & \vdots \\ \cdots & ca_{mi}+a_{mj} \end{bmatrix}$$

引理8. (1). 初等阵可逆, 且逆阵为同类初等阵.

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij} \qquad P_i(c)^{-1} = P_i(\tfrac{1}{c}) \qquad T_{ij}(c) = T_{ij}(-c)$$

(2) $|P_{ij}| = -1 \quad |P_i(c)| = c \quad |T_{ij}(c)| = 1.$

(3) 非奇异阵经初等变换仍非奇异.

证明(3).

定理7: $\Rightarrow$ A实施初等变换,等价于 $P_1P_2\cdots AQ_1Q_2\cdots Q_s$

其中 P_i. Q_j 为初等阵, 且 P_i. Q_j 非异.

A非异 $\Rightarrow$ B非异.

A奇异 $\Rightarrow$ B奇异.

集合A、子集 $R \subseteq A \times A = \{(a,b) \mid a,b \in A\}$.

若 $(a,b) \in R$, 则称 aRb.

若R满足以下三条,则称等价关系 (1) 自反性. aRa.

(2) 对称 aRb 则 bRa.

(3) 传递 aRb $bRc \Rightarrow aRc$

定理9. 矩阵相抵为等价关系.

(1) $A \sim A$. 自反

(2) $A \sim B$ 且 $B \sim A$

(3) $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

证明: (1) $A = I_n \cdot A$. $A \sim A$.

(2). $P_1P_2\cdots P_n AQ_1Q_2\cdots Q_m = B$.

同理 $A = P_n^{-1}P_{n-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}BQ_m^{-1}Q_{m-1}^{-1}\cdots Q_1^{-1}$ 从而 $B \sim A$.

(3). $A \sim B$. $\exists P_1, Q_1$, $P_1AQ_1 = B$.

$B \sim C$ $\exists P_2, Q_2$, $P_2BQ_2 = C$. $\Rightarrow$ $P_2P_1AQ_1Q_2 = C \Rightarrow A \sim C$.

扫描全能王 创建

定理1. $A_{n\times n}$ 下列结论等价

(1) A为非异阵

(2). A相抵标准型 I_n

(3) A只通过初等行(或列)变换可变I_n.

(4). A是若干初等阵乘积.

证明: (1) → (2). 设A相抵标准型 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

由A非异 ⇒ A相抵标准型非异. 则 $r=n$ ⇒ $A \sim I_n$.

(2) → (3). 设$A \sim I_n$.

即$\exists P_1, P_2 \cdots P_r, Q_1, Q_2 \cdots Q_s$为初等.

$P_r \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_s = I_n$.

从而: $Q_1 Q_2 \cdots Q_s P_r \cdots P_1 A = I_n$. 从而(3)成立.

(3) → (4). A只通过行变换成为I_n. 即$\exists P_1 \cdots P_r$.

$P_r \cdots P_2 P_1 A = I_n$.

$\rightarrow A = (P_r \cdots P_1)^{-1} = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_r^{-1}$

(4) → (1). $A = P_1 P_2 \cdots P_n$.

$|A| = |P_1||P_2| \cdots |P_n| \neq 0$ ⇒ A非异.

推论2. $A=(a_{ij})_{m\times n}$. 则∃m阶非异阵P, n阶非异阵Q

st. $PAQ=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

证明: ∃初等阵$P_1\cdots\cdots P_r$. n阶初等阵$Q_1\cdots\cdots Q_s$

$$P_r\cdots\cdots P_1AQ_1\cdots Q_s=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow PAQ=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$ 若阶数n较大. 则较难算.

设A为非异阵. ∃初等阵 $P_r\cdots\cdots P_1A=I_n$. 则 $A^{-1}=(P_r\cdots\cdots P_1)$.

求逆阵方法. 构造n×2n矩阵 $[A\,\vdots\,I_n]$; 对其初等行变换. 左边为单位阵右侧为A^{-1}

证明: $[A\,\vdots\,I_n]\xrightarrow{}[P_1A\,\vdots\,P_1I_n]\longrightarrow[P_2P_1A\,\vdots\,P_2P_1]\longrightarrow[\underset{\Downarrow\atop I_n}{P_r\cdots P_2P_1A}\,\vdots\,\underset{\Downarrow\atop A^{-1}}{P_r\cdots P_2P_1}]$

列变换同理.

矩阵方程 $AX=B$ ($\overset{m\times n}{A}\overset{n\times 1}{X}=\overset{m\times 1}{\beta}$) 其中$|A|\neq 0$.

两侧同乘$A^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}B$

方法: $[A\,\vdots\,B]\longrightarrow[I_n\,\vdots\,A^{-1}B]$

$XA\,\vdots\,B$. A可逆 $X=BA^{-1}$

方法 $\begin{bmatrix} A \\ \hdashline B \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} I_n \\ \hline BA^{-1} \end{bmatrix}$

定义1. 用虚线将矩阵变为r块,再用竖虚线分为s块。
从而矩阵为r×s块.

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}=(A_{ij})_{r\times s}.$$

A_{ij} 称为A第(i,j)分块为 $m_i\times n_j$ 阶阵.

定义2. $A=(A_{ij})_{r\times s}$. $B=(B_{ij})_{k\times l}$

$$A=B \iff r=k,\ s=l,\ A_{ij}=B_{ij},\ \forall i\in[1,r],\ j\in[1,s].$$

定义3. 设 $A=(A_{ij})_{r\times s}$ $B=(B_{ij})_{r\times s}$. 且A,B有相同行列分块方式.

$$A\pm B=(A_{ij}\pm B_{ij})_{r\times s}.$$

定义4. 设 $A=(A_{ij})_{r\times s}$. $c\in$数

$$c\cdot A=cA_{ij}.\ \forall i\in[1,r],\ j\in[1,s].$$

定义5. $A=(A_{ij})_{r\times s}$. $B=(B_{ij})_{s\times k}$. 且A的列分块方式与B的行分块方式相同

$$C=AB=(C_{ij})_{r\times k}.\ 其中\ C_{ij}=\sum_{k=1}^{s}A_{ik}B_{kj}$$

证明: 分块矩阵乘积与普通矩阵乘积一致.

定义6. 设 $A=(A_{ij})_{r\times s}$. 则 $(A')A^T$ 为 $s\times r$.

分块矩阵 $A' = \begin{bmatrix} A_{11}' & A_{21}' & \cdots\cdots & A_{r1}' \\ A_{12}' & & & \\ & & & \\ A_{1s}' & - & - & A_{rs}' \end{bmatrix}$

定义7. 设 $A=(A_{ij})_{r\times s}$. 复分块矩阵

$$\overline{A} = (\overline{A_{ij}})_{r\times s}.$$

例. 设 $A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_K \end{bmatrix} = diag\{A_1 \cdots\cdots A_K\}$.

$B = \begin{bmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_K \end{bmatrix} = diag\{B_1 \cdots B_K\}$. A_i. B_i同阶方阵.

$AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_KB_K \end{bmatrix}$

推论: $A_1 \cdots A_K$均非异. 则A非异.

证明: 由 Laplace: $|A| = |A_1|\cdots\cdots|A_K| \neq 0$.

$$A^{-1} = diag\{A_1^{-1}\ A_2^{-1} \cdots\cdots A_K^{-1}\}.$$

例: $A=(a_{ij})_{m\times n}$ $B=(b_{ij})_{n\times p}$. A的行分块 $\Rightarrow A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$

B的列分块 $\Rightarrow [\beta_1 \cdots\cdots \beta_p]$ $\quad AB = \begin{bmatrix} \alpha_1 B \\ \vdots \\ \alpha_m B \end{bmatrix} = [A\beta_1 \cdots\cdots A\beta_p]$

定义8. 设 $A=(A_{ij})_{r\times s}$ 为分块阵.

以下称为三类分块阵的初等变换

第一类：对换分块行或分块列

第二类、用非异阵M左乘A的某一分块行.

右乘A的某一分块列.

第三类：将一个矩阵M.左乘A某一分块行加到另一分块行上.

右乘A某一分块列加到另一分块列上.

分块单位阵：
$$I=\begin{bmatrix} I_{m_1} & & & \\ & I_{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_{m_k} \end{bmatrix}$$

(I). $P_{ij}\to\begin{bmatrix} I_{m_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & I_{m_i} & & \\ & & & I_{m_j} & \\ & & & & I_{m_k} \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} I_{m_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & O & I_{m_j} & \\ & & I_{m_i} & O & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & I_{m_k} \end{bmatrix}$

(II) M可逆 $P_i(M)=\begin{bmatrix} I_{m_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & M & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I_{m_k} \end{bmatrix}$

(III). $T_{ij}(M)=\begin{bmatrix} I_{m_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & I_{m_i} & & \\ & & M & I_{m_j} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & I_{m_k} \end{bmatrix}$ M为 $m_j\times m_i$.

定理9. (1) 分块初等阵(逆)均非异

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}^{T} \quad P_i(M)^{-1} = P_i(M^{-1}) \quad T_{ij}(M)^{-1} = T_{ij}(-M)$$

(2). $|P_{ij}| = (-1)^{m_i m_j + (m_i+m_j)\sum_{i<r<j} m_r}$

$$|P_i(M)| = |M| \quad |T_{ij}(M)| = 1.$$

(3) 分块阵进行(行)列变换为(左)右乘初等阵

$$\begin{matrix} i \\ j \end{matrix} A = P_{ij}A \quad M \to iA = P_i(M)A \quad M\begin{matrix} i \\ j \end{matrix} A = T_{ij}(M)A.$$

$$\overset{i\quad j}{A} = A\cdot P_{ij}' \quad \overset{\downarrow M}{{}^{i}A} = A\cdot P_i(M) \quad \overset{M}{{}^{i}A^{j}} = A\cdot T_{ji}(M).$$

(4) 第三类初等变换不改变行列式值.

定理10. 分块阵阶 $M = \begin{bmatrix} A^{m} & B \\ C & D^{n} \end{bmatrix}$

(1) 若$|A| \neq 0$. 则$|M| = |A||D - CA^{-1}B|$.

(2) 若 $|D| \neq 0$. 则 $|M| = |D||A - BD^{-1}C|$

(3) 若 $|A| \neq 0$. $|D| \neq 0$. 则 $|A||D - CA^{-1}B| = |D|\cdot|A - BD^{-1}C|$. (矩阵降阶公式)

证明: (1). $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 将$-CA^{-1}$左乘第一分块行加到第二行。

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix} \quad |M| = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A||D-CA^{-1}B|$$

(2) 同理. 用$-BD^{-1}$左乘第二分块行加到第一行.

例:

$$M = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_na_1+1 & \cdots & \cdots & a_n^2 \end{bmatrix}$$

(i,j) 为 a_ia_j+1 (i,i) a_i^2

$$M = -I_n + (a_ia_j+1)_{n\times n}$$

$$= -I_n + \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \\ a_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -I_n - \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{bmatrix} (-I_2)^{-1} \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

构造 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ $D=-I_n.\ A=-I_2$ $C=B'=\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \\ a_n & 1 \end{bmatrix}$

$$|-I_2||M| = |-I_n|\left|-I_2 - \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}(-I_2)^{-1}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$$= (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} \Sigma a_i^2 - 1 & \Sigma a_i \\ \Sigma a_i & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n\left[(\Sigma a_i^2 - 1)(n-1) - (\Sigma a_i)^2\right]$$

例. 求 $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$ 逆阵. 其中A, D可逆.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{cc:cc} A & B & I_m & \\ 0 & D & & I_n \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc:cc} A & 0 & I_m & -BD^{-1} \\ 0 & D & 0 & I_n \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc:cc} I_m & 0 & A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & I_n & 0 & D^{-1} \end{array}\right].$$

Cauchy - Bint 公式.

定理 $|AB| = |A||B|$. $A_{n\times n}$. $B_{n\times n}$.

回顾.

证明:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & AB \\ -I_n & B \end{bmatrix}$$

由 Laplace $\Rightarrow |A||B| = |AB|$

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & AB \\ -I_n & B \end{vmatrix}$$

设 $A_{m\times n}$. $B_{n\times m}$. 矩阵.

求: $|AB|$? 显然 $|AB| \neq |A||B|$. 长方阵 $|A|$、$|B|$ 无定义

定理1.（Cauchy-Binet）设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ $B=(b_{ij})_{n\times m}$

(1) 若 $m>n$. 则 $|AB|=0$

(2) 若 $m\le n$. 则 $|AB|=\sum\limits_{1\le j_1<j_2\cdots<j_m\le n} A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & m\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}j_1 & \cdots & j_m\\ 1 & 2 & \cdots & m\end{pmatrix}$. m阶子式.

证明：构造 $m+n$ 阶方阵.

$$\begin{bmatrix}A_{m\times n} & O\\ -I_n & B\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}\overset{m\times n}{O} & \overset{m\times m}{AB}\\ -I_n & \underset{}{\overset{n\times m}{B}}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}A & O\\ -I_n & B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}O & AB\\ -I_n & B\end{vmatrix}$$

对前m行用Laplace

右侧：$|AB|(-1)^{1+2+\cdots m+(n+1)+\cdots(n+m)}|-I_n| \quad =(-1)^{n(m+1)}|AB|$.

左侧：

Case 1. 若 $m>n$. 则左侧 $=0\Rightarrow |AB|=0$.

Case 2. 若 $m\le n$. 则由Laplace定理.

左侧 $=\sum\limits_{1\le j_1\cdots<j_m\le n} A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & m\\ j_1 & \cdots & & j_m\end{pmatrix} C\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & m\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m\end{pmatrix}$ C为代数余子式.

$$C\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & m\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m\end{pmatrix}=(-1)^{1+2+\cdots m+j_1+\cdots j_m}|\overset{\nearrow N}{(e_{i_1}, e_{i_2}\cdots e_{i_{n-m}}, B)}|.$$

其中 $1\le i_1<i_2\cdots\le n$ 为 $1\le j_1<j_2\cdots j_m\le n$ 余指标. $e_i=i\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$

$|N|$ — 对前 $n-m$ 列用Laplace展开.

$$|N|=|-I_{n-m}|(-1)^{i_1+\cdots i_{n-m}+1+\cdots(n-m)} B\begin{pmatrix}j_1 & \cdots & j_m\\ 1 & 2 & \cdots & m\end{pmatrix}$$

左 $=\sum\limits_{1\le j_1<\cdots j_m\le n}(-1)^{l} A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & m\\ j_1 & \cdots & & j_m\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}j_1 & \cdots & j_m\\ 1 & 2 & \cdots & m\end{pmatrix}$. 下证 l 与 $n(m+1)$ 模2同余

即证 $l+n(m+1)$ 为偶. $1+2+\cdots+m$

$j_1+\cdots j_m+i_1+\cdots i_{n-m}=\frac{n(n+1)}{2}$ $\Longrightarrow n(n+1)$ 为偶.

$1+2+\cdots(n-m)+(n-m)$

$n(m+1)$

定理2. $A=(a_{ij})_{m\times n}$. $B=(b_{ij})_{n\times m}$. $1\le r\le m$.

(1) 若. $r>n$. $|AB|$任一r阶子式$=0$.

(2) 若 $r\le n$. 则

$$AB\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = \sum_{1\le k_1<\cdots<k_r\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ k_1 & & \cdots & k_r \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$$

证明：$AB=C_{m\times m}$

$$C\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = \left| \underset{r\times n}{\begin{bmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \cdots & a_{i_1 n} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2} & \cdots & a_{i_2 n} \\ a_{i_r 1} & a_{i_r 2} & \cdots & a_{i_r n} \end{bmatrix}} \underset{n\times r}{\begin{bmatrix} b_{1j_1} & b_{1j_2} & \cdots & b_{1j_r} \\ b_{2j_1} & b_{2j_2} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{nj_1} & b_{nj_2} & & b_{nj_r} \end{bmatrix}} \right|$$

由 Cauchy-Binet.

①. $r>n$ 时. $C\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix}=0$

②. $r\le n$ 时.

$$C\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = \sum_{1\le k_1<\cdots<k_r\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ k_1 & \cdots & k_r \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$$

定义 $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$. 若 $i_1=j_1$, $i_2=j_2$, … $i_r=j_r$. 则称之为 A 的 r 阶主子式

推论3. $A_{m\times n}$ 实矩阵. AA^T 的所有主子式大于等于0

证明: (1) 若 r 阶主子式. $r>n$. 则 AA' 任一 r 阶子式 $=0$

(2) $r\le n$. 则
$$AA'\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix}=\sum_{1\le k_1<k_2\cdots<k_r\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix} A'\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix}$$
$$=\sum_{1\le k_1<k_2\cdots<k_r\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix}^2 \geq 0.$$

推论4. (Largrange 恒等式)

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2=\sum_{1\le i<j\le n}(a_ib_j-a_jb_i)^2 \quad (n\geq 2)$$

证明:
$$左=\begin{vmatrix} \sum a_i^2 & \sum a_ib_i \\ \sum a_ib_i & \sum b_i^2 \end{vmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{bmatrix}$$

再由 Cauchy - Binet. $=\sum_{1\le i<j\le n}\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix}=\sum_{1\le i<j\le n}(a_ib_j-a_jb_i)^2=$ 右.

推论5. (Cauchy 不等式). $a_i, b_i\in R$.

则 $\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$

证明: 由 Largrange 直接得出.

推论6. 设 $A_{n\times n}$ $B_{n\times n}$. 则 $(AB)^*=B^*A^*$

证明: 比较 (i,j) 元

$(AB)^*$ 的 i,j 元. $=AB$ 的第 (j,i) 元代数余子式 $=(-1)^{j+i}AB\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \hat{j} & \cdots & n \\ 1 & \cdots & \hat{i} & \cdots & n \end{pmatrix}$

由 Cauchy - Binet. $=(-1)^{j+i}\sum_{k=1}^n A\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \hat{j} & \cdots & n \\ 1 & \cdots & \hat{k} & \cdots & n \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \hat{k} & \cdots & n \\ 1 & \cdots & \hat{i} & \cdots & n \end{pmatrix}$

$= \sum_{k=1}^{n} A_{jk} B_{ki} = A^*$ 的 j 列 $\times$ B^* 的第 i 行

$= B^*A^*$ 的 (i,j) 元素

转置

1° $(A^T)^T = A$

2° $(AB)^T = B^T A^T$

3° $(cA)^T = cA^T$

4° $|A^T| = |A|$

逆阵

1° 若逆阵存在,则必唯一

2° $(A^{-1})^{-1} = A$.

3° $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4° $(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$

5° $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

6° $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

7° 乘法叠性除去消去对可逆成立.

伴随.

1° 伴随必存在,且 $AA^* = A^*A = |A|$ $(n \geq 2)$

2° $(A^*)^* = \begin{cases} |A|^{n-2}A & n \geq 3. \\ A & n = 2 \end{cases}$

3° $(AB)^* = B^*A^*$

4° $(cA)^* = c^{n-1}A^*$

5° $|A^*| = |A^{n-1}|$.

6° $(A^T)^* = (A^*)^T$

7° $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

证明 1°✓ 3°✓ 4°✓ 6°✓

7° $A^*(A^{-1})^*=(A^{-1}A)^*=I_n \Rightarrow (A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$

下证 2°. 5° (相抵标准型)

Case1. 若A可逆. 则 $A^*=|A|A^{-1} \Rightarrow |A^*|=\big||A|A^{-1}\big|=|A|^n|A^{-1}|=|A|^{n-1}$

Case2. 若A奇异. 则只证 $|A^*|=0$. 即可. $=|A|^{n-1}$

∃非异阵P. Q. st. $PAQ=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A=P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{cases} 0 & r\le n-2 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & r=n-1 \\ I_n. & r=n. \end{cases}$$

$0\le r\le n.$

特别. 当 $r<n$. $\left|\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^*\right|=0.$ $\quad |A^*|=\left|\left[P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q\right]^*\right|$

$$=\left|Q^*\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^*P^*\right|=|Q^*|\cdot 0\cdot|P^*|=0.$$

下证 2°. 当 $n=2$. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

当 $n\ge 3$.

Case1 $|A|\ne 0$. $A^*=|A|A^{-1}$ $(A^*)^*=(|A|A^{-1})^*=|A|^{n-1}(A^{-1})^*=|A|^{n-1}(A^*)^{-1}$

Case2. $|A|=0$. 即证 $(A^*)^*=0=|A|^{n-2}A$. $\qquad =|A|^{n-2}A.$

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{**}=\begin{cases} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & n=2.\ r=1 \\ I_n. & r=n. \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$A=P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$

$A^{**}=P^{**}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{**}Q^{**}$

$=0.$

计算：$(AB)^* = B^*A^*$.

①当$|A|\neq 0$. $|B|\neq 0$.

$$(AB)^* = |AB|(AB)^{-1}$$
$$= |B|B^{-1}|A|A^{-1} = B^*A^*$$

②当$|A|=0$或$|B|=0$. (摄动法).

$[A+tI_n]$ $[B+tI_n]$

$\exists t$. st. $|A+tI_n|\neq 0$ $|B+tI_n|\neq 0$. 均关于t的n次多项式. $g(t)=0$至多n解.

$$[(A+tI_n)(B+tI_n)]^* - (B+tI_n)^*(A+tI_n)^* = 0.$$

$\varphi(t)\neq 0$有小于n解.

数域 $Z\subseteq Q\subseteq R\subseteq C$

定义1. 设k为C的子集且至少有2元素. 若k中任意2个元素的加减乘除仍属于k. 则称k为数域. 若除不满足, 则为数环。

例：$Q(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2} \mid a.b\in Q\}$为数域.

证明：$a+b\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow a=b=0$.

$(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2}) \in Q(\sqrt{2})$ $(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = (ac+2bd) + (ad+bc)\sqrt{2} \in Q(\sqrt{2})$

设$c+d\sqrt{2}\neq 0$. $c\neq 0$或$d\neq 0$. $\Leftrightarrow c-d\sqrt{2}\neq 0$.

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} = \frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})} \in Q(\sqrt{2}).$$

例：$Q(\sqrt[3]{2}) = \{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mid a.b.c\in Q\}$为数域.

$$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0 \Leftrightarrow a^3+2b^3+4c^3-6abc=0 \Leftrightarrow a=b=c=0.$$

推广1. $Q(\sqrt[n]{2}) = \{a_0+a_1\sqrt[n]{2}+\cdots a_{n-1}\sqrt[n]{2^{n-1}}\}$为数域

推广2. P为素. $Q(\sqrt{p}) = \{a+b\sqrt{p} \mid a.b\in Q\}$.为数域

例：$\left\{\dfrac{a_0\pi^n+a_1\pi^{n-1}+\cdots\cdots+a_n}{b_0\pi^m+\cdots\cdots\cdots b_m}\;\middle|\;\begin{matrix}a_i.b_j\in\mathbb{Q}\\ b_0.b_1\cdots b_m\text{不全为}0\end{matrix}\right\}$ 为数域.

证明：π为超越数.

$\alpha\in\mathbb{C}$称为代数数 $\Leftrightarrow\exists f(x)=a_nx^n+\cdots\cdots+a_0\neq0$. 且 $a_i\in\mathbb{Q}$. st $f(\alpha)=0$.

超越数 $\Leftrightarrow B_0\pi^m+B_1\pi^{m-1}+\cdots B_m=0$ 则 $b_0=\cdots b_m=0$.

定理2. 任一数域K必包含有理数域$\mathbb{Q}$

证明：$a\in K$. $0=a-a\in K$. 由定义取K非零元b. $1=\frac{b}{b}\in K$.

$\forall m\in\mathbb{Z}^+$. $m=1+1+1+\cdots 1\in K$. $-m=0-m\in K$. $\Rightarrow\mathbb{Z}\subseteq K$.

任取 $\frac{n}{m}\in\mathbb{Q}$. $n\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{Z}^+$. $n\in K$, $m\in K\Rightarrow\mathbb{Q}\subseteq K$.

$\{R^3\text{中向量}\overrightarrow{OC}\}\xleftrightarrow{1:1}\{R^3\text{中点}C\}$.

$\xleftrightarrow{1:1}\{(a.b.c)\mid a.b.c\in R\}$

定义1. 设K为数域, $a_1.a_2\cdots a_n\in K$.

$1\times n$矩阵$(a_1.a_2\cdots\cdots a_n)$称为K上n维行向量

$n\times1$矩阵 $\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$ 称为K上n维行向量

记 $K_n=\{(a_1.a_2\cdots a_n)\mid a_i\in K, 1\le i\le n\}$ K上n维向量(行).

$K^n=\left\{\begin{bmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}\middle|\, a_i\in K, 1\le i\le n\right\}$为K上n维列向量

$\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$ $\beta=\begin{bmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$ $\in K^n$ $\alpha=\beta\Leftrightarrow a_i=b_i.\forall i$

$\alpha\pm\beta\Leftrightarrow a_i\pm b_i.\forall i$.

$c\alpha\Leftrightarrow ca_i.\forall i$.

规则. $\alpha,\beta,\gamma\in K^n(K_n)$, $k,l\in K$.

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

(2). $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$

(3). 零向量 $\alpha+0=\alpha$

(4) 负向量 $-\alpha=-(\alpha)$ $\alpha+(-\alpha)=0$

(5). 单位元 $1\cdot\alpha=\alpha$ (*)

(6). 分配 $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

(7). 分配. $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$.

(8). 数乘结合. $k(l\alpha)=(k\cdot l)\cdot\alpha$

定义2. K为数域. V为非空集. $+: V\times V\to V$, $(\alpha,\beta)\mapsto\alpha+\beta$ $K\times V\to V$, $(k,\alpha)\mapsto k\alpha$

若运算满足八条(*), 则V为K上的向量空间.

例1: K^n和K_n为K上线性空间.

例2: $K[x]=\{a_nx^n+\cdots\cdots+a_0\mid a_i\in K, 0\le i\le n\}$

例3 $C[0,1]$: $[0,1]$上连续函数全体.

例4: $M_{m\times n}(K)$是数域K上$m\times n$阶矩阵全体.

例5: $K_1\subseteq K_2$. (eg. $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$)

加法: $a,b\in K_2$, $\to$ 数加. 数乘. $k\in K_1$, $a\in K_2$, $ka\leftarrow$ 数乘.

特别: K为K上线性空间.

命题: 设V为K上线性空间. ①.零向量唯一.

$\because$ 设 $0_1, 0_2$ 为零. 则 $0_1=0_1+0_2=0_2$.

② 负元唯一 $\alpha+\beta=0$. $\alpha+\gamma=0$.

$\beta=\beta+0=\beta+(\alpha+\gamma)=(\beta+\alpha)+\gamma=0+\gamma=\gamma$

③ 加法消去. $\alpha+\beta=\alpha+\gamma\Rightarrow\beta=\gamma$

$+(-\alpha)+\alpha+\beta=-\alpha+\alpha+\gamma\Rightarrow\beta=\gamma$

④. $0\cdot\alpha=0$.

$0\cdot\alpha=(0+0)\alpha=0\cdot\alpha+0\cdot\alpha$.

$\Rightarrow 0+0\cdot\alpha=0\cdot\alpha+0\cdot\alpha. \Rightarrow 0\alpha=0$

⑤. $k\cdot 0=0$

$\because k\cdot 0=k\cdot(0+0)=k0+k\cdot 0 \Rightarrow k\cdot 0=0$

⑥. $-\alpha=(-1)\cdot\alpha$.

$\because \alpha+(-1)\cdot\alpha=(1-1)\alpha=0\cdot\alpha=0$

⑦. 若 $k\cdot\alpha=0\Rightarrow k=0$ 或 $\alpha=0$.

$k=0$ 成立.

$k\neq 0$. 则 $\alpha=0$.

注：(1) 加法消去 $\Rightarrow$ 可移项.

(2) $\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_m$. 可直接写,不写括号.

线性空间关系,

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\ a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\ a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

令. $A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $\beta=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ $\Leftrightarrow Ax=\beta$.

设 $A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)$ 为列分块 $\alpha_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{bmatrix}$

$$Ax=[\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{bmatrix}=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots x_n\alpha_n.$$

$(*)\Leftrightarrow Ax=\beta\Leftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots x_n\alpha_n=\beta.$

定义1. 设 V 为 K 上线性空间. $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n,\beta\in V$

若存在 $k_1,k_2\cdots k_n\in K$ $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n.$

则称 β 为 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性组合,或 β 可由 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性表示

$(*)$ 有解 $\Leftrightarrow$ β 为 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 的线性组合.

例: $V=K_3$. $\beta=(1.1.1)$ $\alpha=(0.1.1)$ $\alpha_2=(1.0.1)$ $\alpha_3=(1.1.0)$

$\beta=\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3$

例: K_n. $e_i=(0\cdots\cdots\overset{i}{1}\cdots\cdots0)$ $1\le i\le n$. 称为标准行向量.

例: 任一行向量为标准行向量的线性组合。

$\alpha=a_1e_1+a_2e_2+\cdots a_ne_n.$

$$(**).\quad\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=0\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots a_{mn}x_n=0\end{cases}$$

$(**)\Leftrightarrow Ax=0\Leftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots x_n\alpha_n=0.$

定义. 设 V_K 线性空间. $\alpha_1\cdots\alpha_n\in V$

若 K 中存在不全为0 n个数 $k_1,\cdots k_n$ 使 $k_1\alpha_1+\cdots k_n\alpha_n=0$ 则称 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性相关.

若不存在 K 中不全为 0. n 个数 $k_1 \cdots\cdots k_n$ 使上式成立，则 $\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_n$ 为线性无关或独立。

注：(1). 线性无关等价定义.

若 $k_1, \cdots k_n \in K$. 使 $k_1\alpha_1 + \cdots\cdots k_n\alpha_n = 0$.

则必有 $k_1 = k_2 \cdots k_n = 0$

(2). 线性相关与线性无关依赖于基域 K 的选取。

例 $R \subseteq C$. C 为 R 上线性空间

断言 $\{1, i\}$ 在 R 上线性无关.

向量组 = 有限个向量构成集合.

例：包含零向量向量组必线性相关.

例： n 维标准行向量 $e_1, \cdots\cdots e_n$ 必线性无关.

证明 $k_1e_1 + k_2e_2 + \cdots\cdots + k_ne_n = 0.\ k \in K$

即 $[k_1, k_2 \cdots\cdots k_n] = \vec{0} \Rightarrow k_1 = k_2 = \cdots\cdots = k_n = 0$. 从而线性无关。

(**) 有非零解 $\Leftrightarrow \alpha_1 \cdots\cdots \alpha_n$ 线性相关.

定理3. $1 \le m \le n$.

(1) 若 $\{\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_m\}$ 线性相关，则 $\{\alpha_1 \cdots \alpha_m, \alpha_{m+1} \cdots \alpha_n\}$ 也线性相关

(2) 若 $\{\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_n\}$ 线性无关，则 $\{\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_m\}$ 线性无关。

证明：$\exists k_1 \cdots\cdots k_m$ 不全为0. st $k_1\alpha_1 + \cdots\cdots k_m\alpha_m = 0$.

只需令 $\alpha_{m+1} \cdots\cdots \alpha_n$ 系数为0. 得证.

(2). 为(1) 逆否，必成立。

定理4. 设 V_K 为线性空间 $\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_n \in V$

则 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow \exists 1 \le i \le n$. st. α_i 为 $\alpha_1 \cdots \alpha_{i-1}\alpha_{i+1} \cdots \alpha_n$ 线性组合.

证明：充分性：不妨设 α_1 为 $\alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n$ 线性组合.

即 $\exists k_2 \cdots\cdots k_n \in K$. st $\alpha_1 = k_2\alpha_2 + \cdots\cdots k_n\alpha_n$.

$(-1)\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots\cdots k_n\alpha_n = 0 \Rightarrow$ 线性相关

必要性：设$\alpha_1 \cdots \alpha_n$线性相关，即∃不全为0，$k_1 \cdots k_n$.

st. $k_1\alpha_1 + \cdots k_n\alpha_n = 0$.

不妨设$k_1 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \frac{k_3}{k_1}\alpha_3 \cdots - \frac{k_n}{k_1}\alpha_n$.

定理5. V_K为线性空间，$\alpha_1 \cdots \alpha_n, \beta \in V$

设$\alpha_1 \cdots \alpha_n$线性无关，则或有$\alpha_1 \cdots \alpha_n \beta$线性无关，或有$\beta$为$\alpha_1 \cdots \alpha_n$线性组合.

证明：1° $\alpha_1 \cdots \alpha_n \beta$线性无关

2°. $\alpha_1 \cdots \alpha_n, \beta$线性相关.

∃不全为0，$k_1 \cdots k_{n+1}$. $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots k_{n+1}\beta = 0$.

断言$k_{n+1} \neq 0$. 设$k_{n+1} = 0 \Rightarrow k_1\alpha_1 + \cdots k_n\alpha_n = 0$与已知矛盾.

由$k_{n+1} \neq 0$可知 $\beta = -\frac{k_1}{k_{n+1}}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_n}{k_{n+1}}\alpha_n$.

定理6. 设$\alpha_1 \cdots \alpha_n, \beta \in V_K$，$\beta$为$\alpha_1 \cdots \alpha_n$线性组合，即$\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n$

则线性表示系数唯一确定$\Leftrightarrow \alpha_1 \cdots \alpha_n$线性无关

证明：设$\beta = l_1\alpha_1 + \cdots l_n\alpha_n$. $l_i \in K$.

$0 = (k_1 - l_1)\alpha_1 + \cdots (k_n - l_n)\alpha_n$ 由于线性无关，$k_i - l_i = 0$. $\forall i \in [1, n], i \in \mathbb{Z} \Rightarrow k_i = l_i$

必要性：设$\alpha_1 \cdots \alpha_n$线性相关，∃$\overset{\text{不全为0}}{C_1} \cdots C_n$. st. $C_1\alpha_1 + \cdots C_n\alpha_n = 0$.

$\beta = (k_1 + C_1)\alpha_1 + \cdots (k_n + C_n)\alpha_n$，则∃$C_i$，使$k_i + C_i \neq k_i$，则$\beta$有2种表示，从而系数不唯一。

定理7.（线性组合的传递性）. $A = \{\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n\}$

$B = \{\beta_1 \cdots \beta_p\}$ $C = \{\gamma_1, \gamma_2 \cdots \gamma_q\}$

若A中任一向量均为B中向量线性组合，B中任一向量均为C中向量线性组合.

则A中任一向量为C中向量线性组合.

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\beta_j \quad \beta_j = \sum_{k=1}^{q} b_{jk}\gamma_k \Rightarrow \alpha_i = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} a_{ij}b_{jk}\gamma_k$$

$$= \sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk}\right)\gamma_k.$$

例：设 $A=\{\alpha\}$. A 线性无关 $\Leftrightarrow \alpha\neq 0$

证明：$\begin{cases} \alpha\neq 0.\ 设\ k\alpha=0,\ k\in K.\ 则\ k=0\ 即\ A\ 线性无关 \\ \alpha=0.\ 1\cdot\alpha=0.\ A\ 线性相关. \end{cases}$

例：$\alpha=(a_1,a_2\cdots a_n)$ $\beta=(b_1,b_2\cdots b_n)\in K$.

则 α 与 β 线性相关 $\Leftrightarrow$ a_i 与 b_i 成比例.

充分性：则 $a_i=kb_i$. $\forall i\in[1,n]$. $\alpha=k\beta$.

即 $\alpha-k\beta=0$. 即 α,β 线性相关.

必要性：由 α,β 线性相关. 不妨设 α 为 β 线性组合.

即 $\alpha=k\beta$. $k\in K$. 即 $a_i=kb_i$.

例：$V=R^2$. $\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2)$ $\overrightarrow{OB}=(b_1,b_2)$

$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ O, A, B 三点共线.

$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $\triangle OAB$ 不退化

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0.$$

例：$V=R^3$. $\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2,a_3)$ $\overrightarrow{OB}=(b_1,b_2,b_3)$ $\overrightarrow{OC}=(c_1,c_2,c_3)$.

$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ OABC 四点共面

$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ OABC 为非退化四面体

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

设 $\alpha_1=(a_{11},a_{12}\cdots a_{1n})$. $\alpha_2=(a_{21},a_{22},\cdots a_{2n})$ $\alpha_n=(a_{n1},a_{n2}\cdots a_{nn})$.

$$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n\ 线性无关 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

V. k上线性空间.

向量族：V中向量的集合(可无限)

向量组：V中有限个向量集合.

定义1. 设S为V的向量族.若存在S中有限向量组$\{\alpha_1,\cdots\alpha_r\}$使得.

(1) $\alpha_1,\cdots\alpha_r$线性无关

(2). S中任一向量为$\alpha_1\cdots\alpha_r$线性组合.

则称$\{\alpha_1\cdots\alpha_r\}$为$S$的极大无关组.

注：$\{\alpha_1,\cdots\alpha_r\}$线性无关

$\forall\alpha\in S$. $\{\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r,\alpha\}$线性相关.

命题2. 包含非0向量向量组必存在极大无关组.

证明：对S中向量数$\#S$进行归纳.

$\#S$. $S=\{\alpha\}$. $\alpha\neq0$. 极大无关组$\{\alpha\}$

下设$\#S<k$时成立.下证$\#S=k$.

1°. S中k个向量线性无关.此时S即为自己的极大无关组.

2°. S中k个向量线性相关. $\exists\alpha\in S$. 使得α是$\{S\}/\alpha$中向量线性组合.

$\#(S\setminus\{\alpha\})=k-1$. 断言$S\setminus\{\alpha\}$包含非0向量. 用反证$S/\{\alpha\}$都为零向量,则$\alpha=0$.

与S包含非零矛盾. 由归纳. $S\setminus\{\alpha\}$存在极大无关组$\{\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r\}$. 仅差$\alpha$.

$\underbrace{\alpha\hookrightarrow}_{\text{线性表示}} S\setminus\{\alpha\}\hookrightarrow\{\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r\}$. 故. $\{\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r\}$为$S$极大无关组.

例：$S=\{(1,0)\ (0,1)\ (1,1)\}$

解：$(1,0)+(0,1)-(1,1)=0$.

$\Rightarrow(1,1)=(1,0)+(0,1)$.

$\Rightarrow\{(1,0)\ (0,1)\}$为极大无关组.

$\{(1,1)\ (0,1)\}$为极大无关组.

$\{(1,1).\ (1,0)\}$也为极大无关组.

引理 3. 设A, B为向量组. A中任一向量为B中向量线性组合,
A中向量线性无关. 则 $\#A \leqslant \#B$.

设 $A = \{\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_r\}$ $B = \{\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_s\}$. $\#B = s$

用反证法. 设 $r > s$

由假设 $\alpha_1 = \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \cdots \lambda_s\beta_s$.

A 线性无关, 则 $\alpha_1 \neq 0$. 从而 λ_i 不全为0. 不妨设 $\lambda_1 \neq 0$.

从而 $\beta_1 = \frac{1}{\lambda_1}\alpha_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\beta_2 \cdots\cdots - \frac{\lambda_s}{\lambda_1}\beta_s$.

$\{\alpha_2 \cdots\cdots \alpha_r\}$ 都可写成 $\{\beta_1 \cdots\cdots \beta_s\}$ 组合. $\hookrightarrow \{\alpha_1, \beta_2 \cdots\cdots \beta_s\}$

$\forall i \geqslant 2$. α_i 为 $\{\alpha_1, \beta_2 \cdots \beta_s\}$ 线性组合.

下设 $\forall k < i \leq r$. α_i 为 $\{\alpha_1, \cdots \alpha_k, \beta_{k+1} \cdots \beta_s\}$ 线性组合.

$\alpha_{k+1} = \mu_1\alpha_1 \cdots\cdots \mu_k\alpha_k + \mu_{k+1}\beta_{k+1} + \cdots \mu_s\beta_s$.

若 $\mu_{k+1} = \cdots \mu_s = 0$. 则 α_{k+1} 为 $\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_k$ 线性组合, 矛盾.

不妨设 $\mu_{k+1} \neq 0$. 从而 $\beta_{k+1} = -\frac{\mu_1}{\mu_{k+1}}\alpha_1 - \cdots\cdots - \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}}\alpha_k \frac{1}{\mu_{k+1}}\alpha_{k+1} - \frac{\mu_s}{\mu_{k+1}}\beta_s$

$\{\alpha_{k+2} \cdots \alpha_r\} \hookrightarrow \{\alpha_1 \cdots \alpha_k, \beta_{k+1}, \cdots \beta_s\} \hookrightarrow \{\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_{k+1}, \beta_{k+2} \cdots \beta_s\}$.

不断替换后. $\{\alpha_{s+1}, \alpha_{s+2} \cdots \alpha_r\}$ 为 $\{\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_s\}$ 线性组合. $\forall k+1 < i \leq r$. α_i 为 $\alpha_1 \cdots \alpha_{k+1}\beta_{k+2} \cdots \beta_s$ 线性组合.

$\Rightarrow$ 与A 线性无关矛盾 $\Rightarrow r \leq s$

推论4: 若多向量组可用少向量组线性表示, 则多向量组线性相关.

引理5 设 A, B为2个线性无关向量组. A中任一向量为B中向量组合. B中向量为A中组合,
则 $\#A = \#B$.

证明: $\#A \geqslant \#B$. $\#A \leqslant \#B$.

推论6. 设A, B为S中极大无关组. 则$\#A=\#B$.

证明: A, B 线性无关 $A\subseteq S \hookrightarrow B$

$B\subseteq S\hookrightarrow A$.

由引理5 $\Rightarrow \#A=\#B$.

定义7. 向量组S中极大无关组向量个数为S的秩, 记为$rank(S)$或$r(S)$.

由推论6. 秩不依赖极大无关组选取.

规定由0向量组构成向量组秩为0.

定义8. A, B向量组, A, B向量可以相互表示. 则A, B为等价向量组.

推论9. 等价向量组必有相同秩

证明: A 等价于 B

1°. 若A或B由0向量构成.

则B或A也为0 $\Rightarrow r(A)=r(B)=0$.

2°. A, B 中至少有一个非0向量, 由命题2. A_1为A极大无关组, B_1为B极大无关组,

$A_1\subseteq A\hookrightarrow B\hookrightarrow B_1$ 且 $B_1\subseteq B\hookrightarrow A\hookrightarrow A_1 \Rightarrow \#A_1=\#B_1$

定义10. 设V_K为线性空间. 若$\exists$ V中向量组, 线性无关. 向量组$\{e_1, e_2 \cdots e_n\}$. 使得.
V中任一向量都为$\{e_1 \cdots\cdots e_n\}$线性组合. 则$\{e_1, \cdots\cdots e_n\}$为V一组基. V的维数$=n$.
($\dim_K V=n$) V为K上n维线性空间.

若不存在有限个向量构成V一组基. 则称V为无限维性空间.

例: $K^n(K_n)$ $\{e_1, e_2 \cdots\cdots e_n\}$ $e_i=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$-i. 是$K^n(K_n)$一组基. $\dim_K K^n=n=\dim_K K_n$

例 $R\subseteq C\Rightarrow C$为R上线性空间.

$\{1, \sqrt{-1}\}$ $\begin{cases}\text{在R上线性空间, 线性无关}\\ z\in C.\ z=a+bi.\ a,b\in R.\end{cases}$

例 $Q(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Q\}$. $Q\subseteq Q(\sqrt{2})$

$\Rightarrow \dim_Q Q(\sqrt{2})=2$ $\{1, \sqrt{2}\}$为Q一组基.

推论11. n维线性空间中超过n个向量的向量组线性相关

证明：$\{\alpha_1 \cdots \alpha_k \cdots \alpha_m\} \xrightarrow{m>n}$ 基 $\{e_1, e_2 \cdots e_n\}$

由推论4. $\{\alpha_1 \cdots \alpha_m\}$必线性相关.

定理12. 设V为n维线性空间. $\{e_1 \cdots e_n\}$

若下列之一成立.

(1) $\{e_1, e_2 \cdots e_n\}$线性无关

(2). V中任一向量为$e_1 \cdots e_n$线性组合.

则$\{e_1 \cdots e_n\}$为V一组基.

证明：(1)成立. $\{e_1 \cdots e_n\}$线性无关.

由于$\dim V = n$. $\forall \alpha \in V$. 则由推论11. $\{e_1 \cdots e_n, \alpha\}$必线性相关.

由前面可知：α为$e_1 \cdots e_n$线性组合.

(2)成立. 可设$\{e_1 \cdots e_r\}$为$\{e_1 \cdots e_n\}$极大无关组.

$V \hookrightarrow \{e_1 \cdots e_n\} \hookrightarrow \{e_1 \cdots e_r\}$.

$\Rightarrow \{e_1 \cdots e_r\}$为$V$的基. $\Rightarrow \dim V = r = n$.

命题13. 设V为n维线性空间 $\{v_1 \cdots v_m\}$ $(m<n)$为线性无关向量.

$\{e_1 \cdots e_n\}$为V的基, 则$\exists\, n-m$个向量$e_1 \cdots e_{n-m}$使$\{v_1 \cdots v_m, e_1 \cdots e_{n-m}\}$为$V$的基.

证明：$\exists\, 1 \le i \le m$. s.t. $v_1 \cdots v_m\, e_i$线性无关.

用反证. $\forall\, 1 \le i \le m$. $v_1 \cdots v_m\, e_i$线性相关.

由前定理e_i为$v_1 \cdots v_m$线性组合.

$\{e_1 \cdots e_n\} \hookrightarrow \{v_1 \cdots v_m\}$.

且线性无关. $\Rightarrow n \le m$与$n>m$矛盾.

不妨设$v_1 \cdots v_m\, e_1$线性无关. 若$m+1=n$. 则$\{v_1 \cdots v_m, e_1\}$为V的基.

2°若$m+1<n$. $\exists\, t$. $1 \le t \le n$. 使得. $v_1 \cdots v_m, e_1, e_t$线性无关

$\Rightarrow v_1 \cdots v_m, e_1 \cdots e_{n-m}$线性无关. 由12. 它们为基.

定理14（基扩张定理） V为n维.

(1) V中任一线性无关向量组可扩为V的一组基

(2) 子空间U的基可扩为全空间基.

定义1. 设A为$m\times n$阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}\text{行分块}=[\beta_1\cdots\cdots\beta_n]\text{列分块}$$

称$\{\alpha_1\cdots\cdots\alpha_m\}$的秩为$A$的行秩. $\{\beta_1\cdots\beta_n\}$的秩为A的列秩

命题2. 矩阵行秩,列秩在初等变换下不变.

证明：下只证列秩在初等行变换,列变换下不变.

1°. 记$r_c(A)=r\{\beta_1\cdots\cdots\beta_n\}$为$A$的列秩.

先证$r_c(A)$在列变换下不变. 设Q为初等阵.

(I). $AP_{ij}=[\beta_1\cdots\overset{i}{\beta_j}\cdots\overset{j}{\beta_i}\cdots\beta_n]$

(II). $AP_i(c)=[\beta_1\cdots\cdots c\beta_i\cdots\cdots\beta_n]$.

(III) $AP_{ji}(c)=[\beta_1\cdots\cdots\beta_i\quad\beta_j+c\beta_i\cdots\beta_n]$

AQ的列向量都为A的列向量线性组合. 同理A的列向量为AQ列向量线性组合.

$\Rightarrow$ A的列向量组与AQ列向量组等价. $r_c(A)=r_c(AQ)$.

2°. 再证$r_c(A)$在初等行变换下不改变.

设$A^{m\times n}=[\beta_1\cdots\cdots\beta_n]$列分块. $Q_{m\times m}$且非异. 若$\{\beta_{i1},\beta_{i2}\cdots\beta_{ir}\}$为$A$列向量极大无关组.

则$\{Q\beta_{i1},Q\beta_{i2}\cdots Q\beta_{ir}\}$为$QA$的列向量极大无关组.

证明：证 $Q\beta_{i1}\cdots Q\beta_{ir}$ 线性无关.

设 $\lambda_1 Q\beta_{i1}+\lambda_2 Q\beta_{i2}\cdots+\lambda_r Q\beta_{ir}=0$

$\Rightarrow Q(\lambda_1\beta_{i1}+\cdots\lambda_r\beta_{ir})=0$

$\xRightarrow{Q非异} \lambda_1\beta_{i1}+\cdots\lambda_r\beta_{ir}=0$

则 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots\lambda_r=0 \Rightarrow Q\beta_{i1}\cdots Q\beta_{ir}$ 线性无关.

证：$\forall Q\beta_j$ 为 $Q\beta_{i1}, Q\beta_{i2}\cdots Q\beta_{ir}$ 线性组合.

由 $\beta_{i1},\cdots\beta_{ir}$ 为 A 极大无关组. $\beta_j=\mu_1\beta_{i1}+\mu_2\beta_{i2}+\cdots\mu_r\beta_{ir}$

$\Rightarrow Q\beta_j=\mu_1 Q\beta_{i1}+\mu_2 Q\beta_{i2}+\cdots\mu_r Q\beta_{ir} \quad \forall 1\le j\le n.$

引理：初等行变换保持矩阵列向量极大无关组列指标.

2°. 证明：在引理中 Q 为初等阵. 从而得 $r_c(QA)=r_c(A)=r$

$A=0.\ QA=0.\ r_c(QA)=r_c(A)=0.$

定理3. 矩阵行秩 = 列秩.

证明：设 $A^{m\times n}$ 相抵于 $B=\begin{bmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \xRightarrow{命题2}$ A的行秩 = B的行秩 = r
A的列秩 = B的列秩 = r

A的行秩 = A的列秩 = r

定义：矩阵的行秩与列秩统称为A的秩，记为 rank(A) 或 r(A)

推论4. 设 $A\in M_{m\times n}(K)$. 则 $r(A)=r(A^T)$

证明 $r(A)$ = A的行秩 = A^T的列秩 = $r(A^T)$

推论5. 设 $A\in M_{m\times n}(K)$. $P_{m\times m}$ 非异. $Q_{n\times n}$ 非异. 则 $r(PAQ)=r(A)$.

证明：$PAQ=P_r\cdots P_1AQ_1\cdots Q_s$ 且 $P_i.Q_j$ 为初等阵. 代入命题2即出.

推论6. 设$A\in M_{m\times n}(K)$. $r=r(A)$ 则 ∃ 非异阵 $P_{m\times m}$ $Q_{n\times n}$ 使得.

$$PAQ=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

推论7. 设$A,B\in M_{m\times n}(K)$. 则 $A\sim B \Leftrightarrow r(A)=r(B)$.

充分性: 设 $r(A)=r(B)=r$. 由推论6. $A\sim\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B\sim\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow A\sim B$.

必要性: A可通过初等变换成为B $\Rightarrow r(A)=r(B)$.

定义. 设$A\in M_{m\times n}(K)$. 若 $r(A)=m \Leftrightarrow m$个行向量线性无关. 则A行满秩.

$r(A)=n \Leftrightarrow n$个列向量线性无关, 则A列满秩.

设 $A\in M_n(K)$ 若 $r(A)=n$. 则 n个行(列)向量线性无关. A满秩.

推论8. 设$A\in M_n(K)$. 则 A 非异 $\Leftrightarrow$ A满秩

充分 $r(A)=n \Rightarrow A\sim I_n \Rightarrow$ A非异.

必要. A非异 $\Rightarrow A=AI_n$. 由推论5. $r(A)=r(I_n)=n$.

推论9. 设A为阶梯形阵 $a_{1k_1}, a_{2k_2}, \cdots a_{rk_r}$ 为阶梯点. 则 $r(A)=r$ = 非零行个数

且阶梯点列向量构成A列向量极大无关组.

证明
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1k_1} & * & * & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{2k_2} & & \\ 0 & \cdots & & & & & a_{rk_r} & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & & & & \cdots \end{bmatrix}$$

先进行初等列变换.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \text{即为} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

从而 $r(A)=r$ = A非零行个数.

$r(A)=r$ 也是列秩.即A列向量组秩为r.

将阶梯点所在列取出

$$B=\begin{bmatrix} a_{1k_1} & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{2k_2} & \\ & & \ddots \\ & & & a_{rk_r} \end{bmatrix}$$ 为阶梯形 $r(B)=r$.即B r个列向量线性无关

命题: $r(A)=r$. $A=\{\beta_1\cdots\cdots\beta_n\}$. $\{\beta_{i1}\cdots\cdots\beta_{ir}\}$ 满足之一.

(1) $\beta_{i1}\cdots\cdots\beta_{ir}$ 线性无关 (2) $\forall\beta_j$ 为 $\beta_{i1}\cdots\cdots\beta_{ir}$ 线性组合.

由命题可知.阶梯点构成A列向量极大无关组。

(1). 用行变换将A化为阶梯阵B.记 $b_{1k_1}\cdots\cdots b_{rk_r}$ 为B阶梯点.

(2). $r(A)=r(B)=r$ $A=[\beta_1\cdots\cdots\beta_n]$ 极大无关组 $\{\alpha_{k_1}\cdots\cdots\alpha_{k_r}\}$.

定理10. 设 $A_{m\times n}(K)$. $r(A)=r$. $\Leftrightarrow$ 有一个r阶子式 $\neq 0$. $\forall$ r+1阶子式 $=0$.

证明: 设 $r(A)=r$.行向量组秩为r.不妨设前r行线性无关.

$A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}$ 即 $\{\alpha_1\cdots\cdots\alpha_r\}$ 线性无关.

设 $B=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_r\end{bmatrix}$ $r(B)=r=B$(列秩).

则B前r列线性无关.即 $C=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots\cdots & a_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{r1} & \cdots\cdots & a_{rr}\end{bmatrix}$ $r(C)=r$.即C满秩 $|C|\neq 0=A\begin{pmatrix}1\,2\cdots\cdots r\\ 1\,2\cdots\cdots r\end{pmatrix}$

证 $A\begin{pmatrix}1\,2\cdots\cdots r+1\\ 1\,2\cdots\cdots r+1\end{pmatrix}=0$. 令 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}$ 因为 $r(A)=r$.则 $\alpha_1\cdots\cdots\alpha_{r+1}$ 线性相关.

设 $\alpha=[a_1\cdots\cdots a_n]\in K_n$. $\Gamma_{\leq r}\alpha=[a_1\cdots\cdots a_r]$. $\Gamma_{\leq r+1}\alpha_1\cdots\cdots\Gamma_{\leq r+1}\alpha_2$ 线性相关.

$$C=\begin{bmatrix} \text{[}_{i\le r+1}\ \alpha_1 \\ \text{[}_{i\le r+1}\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,r+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{r+1\,1} & \cdots & \cdots & a_{r+1\,r+1} \end{bmatrix}$$

则 $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r+1 \\ 1 & 2 & \cdots & r+1 \end{pmatrix}=|C|=0$

充分性. 由 $r+1$ 阶子式全为0. 由 Laplace. 可证A 任一大于r阶子式为0.

设 $r(A)=t$. 由必要性. A 有 t 阶子式不为0. $>t$ 都为0

若 $t>r$. 则 A 有 t 阶子式 $\neq 0$ 与 $>r$ 阶子式均为0.

若 $t<r$. 则 A 有 r 阶子式 $\neq 0$ 与 $>t$ 阶子式为0. 则 $r=t=r(A)$.

例: 设 $C=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ 则 $r(C)=r(A)+r(B)$.

证明: 设 $P_1\ P_2$ 为非异. Q_1Q_2 非异. st.

$P_1AQ_1=\begin{bmatrix} I_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $P_2BQ_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{r_2} \end{bmatrix}$

则 $\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_1AQ_1 & \\ & P_2BQ_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_{r_1} & & \\ 0 & \ddots & \\ & & I_{r_2} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ 分块矩阵在初等变换下不改秩. $r(C)=r_1+r_2=r(A)+r(B)$.

例: 设 $C=\begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ D & B \end{pmatrix}$ 则 $r(C)\geqslant r(A)+r(B)$.

$$\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & D \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_1AQ_1 & P_1DQ_2 \\ 0 & P_2BQ_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_{r_1} & 0 & D_{11} & D_{12} \\ 0 & 0 & D_{21} & D_{22} \\ 0 & 0 & I_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_2 \\ 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} I_{r_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\quad r(C)=r_1+r(D_{22})+r_2\geqslant r_1+r_2=r(A)+r(B)$$

$r(A)=0\Leftrightarrow A=0$ 　　等号成立 $\Leftrightarrow AX+YB=D$ 有解 $\Leftrightarrow D_2=0$.

例3.(秩降阶). $M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 则

(1) A非异. $r(M)=r(A)+r(D-CA^{-1}B)$

(2) D非异. $r(M)=r(D)+r(A-BD^{-1}C)$

(3) A,D非异 $r(A)+r(D-CA^{-1}B)=r(D)+r(A-BD^{-1}C)$

证:(1).

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

$r(M)=r(A)+r(D-CA^{-1}B)$

例4. 设A为幂等阵. 即 $A^2=A$. $A_{n\times n}$. $\Leftrightarrow r(A)+r(I_n-A)=n$.

证明:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n-A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A & 0 \\ A & I_n-A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A & A \\ A & I_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A-A^2 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

$$r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n-A \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A-A^2 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \Rightarrow r(A)+r(I_n-A)=r(A-A^2)+r(I_n).$$

充分性: $r(A-A^2)=0 \Rightarrow A=A^2$.

必要性 $A^2=A \Rightarrow r(A-A^2)=0$.

例5. $A\in M_{m\times n}(K)$. $B\in M_{n\times m}(K)$. 则

$r(A)+r(B)-n \le r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$

证明:先证上界. $r(AB)\le r(B)$. $B=[\beta_1 \cdots\cdots \beta_p]$. 设 $[\beta_{i1} \cdots\cdots \beta_{ir}]$ 为列向量极大无关组.

断言 $\forall 1\le j\le p$. $A\beta_j$ 为 $A\beta_{i1} \cdots\cdots A\beta_{ir}$ 线性组合.

$A\beta_j=\lambda_1 A\beta_{i1}+\cdots\cdots \lambda_r A\beta_{ir}$.

$AB=[A\beta_1. A\beta_2 \cdots\cdots A\beta_p]$.的每一个列向量均可由 $\{A\beta_{i1} \cdots\cdots A\beta_{ir}\}$ 线性表示.

$r(AB)\le r(B)$.

$r(AB) = r(B'A') \leq r(A') = r(A). \Rightarrow r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}.$

再证 $r(A)+r(B)-n \leq r(AB)$.

$$\begin{bmatrix} A^{m\times n} & O \\ -I_n & B^{n\times p} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & AB \\ -I_n & B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & AB \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

$$r(AB) + n = r\begin{bmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{bmatrix} \geq r(A) + r(B).$$

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.$$

引理 1. 设 V_K 为 n 维线性空间. $\{e_1 \cdots e_n\}$ 为基. 若 $\alpha \in V$ 且

$\alpha = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots a_ne_n = b_1e_1 + b_2e_2 + \cdots b_ne_n.$

则 $a_i = b_i$. $\forall 1 \leq i \leq n$.

证: $(a_1-b_1)e_1 + (a_2-b_2)e_2 + \cdots (a_n-b_n)e_n = 0$.

由线性无关. $a_i = b_i$.

V_K 为线性空间. 固定基 $\{e_1 \cdots e_n\}$ 及其顺序

定义映射. $\phi: V \longrightarrow K^n$.

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_ie_i \to \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$ 称为 α 在 给定基下坐标向量

验证: ϕ 为单射. ($\alpha \neq \beta \Rightarrow \phi(\alpha) \neq \phi(\beta)$)

$\phi(\alpha) = \phi(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta$.

设 $\phi(\alpha) = \phi(\beta) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, 由定义 $\alpha = \beta = a_1e_1 + \cdots a_ne_n$.

ϕ 为满射. $\forall x \in K^n$. $\exists \alpha \in V$. st $\phi(\alpha) = x$.

$x = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in K^n$. 令 $\alpha = a_1e_1 + \cdots a_ne_n$. 则 $\phi(\alpha) = x$.

定义2. 设 V, U 为 K 上线性空间 $\phi: V \to U$ 为双射.

若 $\forall \alpha, \beta \in V$, $k \in K$ 且

(1) $\phi(\alpha+\beta)=\phi(\alpha)+\phi(\beta)$ (2) $\phi(k\cdot\alpha)=k\cdot\phi(\alpha)$.

则称 $\phi: V \to U$ 为线性同构. 简称 V 同构于 U. $V \cong U$.

定理3. 前定义 $\phi: V \to K^n$ 为线性同构.

证明: 设 $\alpha, \beta \in V$. $\alpha=\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ $\beta=\sum_{i=1}^{n} b_i e_i$.

$$\phi(\alpha)=\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \phi(\beta)=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\alpha+\beta=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)e_i \Rightarrow \phi(\alpha+\beta)=\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}=\phi(\alpha)+\phi(\beta).$$

$$\forall k \in K.\ k\alpha=\sum_{i=1}^{n} k a_i e_i \quad \phi(k\alpha)=\begin{bmatrix} ka_1 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}=k\phi(\alpha)$$

则 ϕ 为线性同构

线性同构保持向量组线性关系.

定理4(1) $\phi: V \to U$ 为线性同构. 则 $\begin{cases} \phi \text{将向量线性组合映为对应向量线性组合.} \\ \phi \text{将 线性相关 ... 线性相关} \\ \phi \text{将 线性无关 ... 线性无关.} \end{cases}$

(2). 定理3中 $\phi: V \to K^n$. $\{\alpha_1 \cdots \alpha_n\} \in V$, 定义 $\tilde{\alpha}_i := \phi(\alpha_i)$. 则 $\{\alpha_1 \cdots \alpha_m\}$ 与

$\{\tilde{\alpha}_1 \cdots \tilde{\alpha}_m\}$ 有相同秩.

证明: (1) 先证 $\phi(0)=0$. 令 $\alpha=\beta=0 \Rightarrow \varphi(0+0)=\varphi(0)+\varphi(0)=\varphi(0) \Rightarrow \varphi(0)=0$.

进一步 $\varphi^{-1}(0)=0$. $\varphi^{-1}(0)=\{\alpha \in V \mid \phi(\alpha)=0\}=\{0\}$

(i). 设 $\beta=\lambda_1\alpha_1+\cdots\lambda_m\alpha_m$

$\phi(\beta)=\lambda_1\phi(\alpha_1)+\cdots\lambda_m\phi(\alpha_m)$.

定义2. (1)与(2) $\Leftrightarrow$ 线性组合.

(ii) 设 $\lambda_1\alpha_1+\cdots\lambda_m\alpha_m=0$. λ_i 不全为0. $0=\phi(0)=\lambda_1\phi(\alpha_1)+\cdots\lambda_m\phi(\alpha_m)$.

(iii). 设 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 线性无关.

设: $\lambda_1\phi(\alpha_1) + \cdots \lambda_m\phi(\alpha_m) = 0$

即. $0 = \phi(\lambda_1\alpha_1 + \cdots \lambda_m\alpha_m) = \phi(0)$.

$\Rightarrow \lambda_1\alpha_1 + \cdots \lambda_m\alpha_m = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \Rightarrow$ 线性无关.

(2). 设 $\{\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_r}\}$ 为 $\{\alpha_1 \cdots \alpha_m\}$ 极大无关组.

则 $\{\tilde{\alpha}_{i_1}, \tilde{\alpha}_{i_2} \cdots \tilde{\alpha}_{i_r}\}$ 为 $\{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 \cdots \tilde{\alpha}_m\}$ 极大无关组.

由(1)即得.

$\Longrightarrow$ 秩相同, 且极大无关组指标同.

~~例: 取基 $\{e_1, e_2, e_3\}$~~

定义. 设 V_K 为线性空间, $\{e_1 \cdots e_n\}$ $\{f_1 \cdots f_n\}$ 两组基, 则有.

$$\begin{cases} f_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots a_{n1}e_n \\ \vdots \\ f_n = a_{1n}e_1 + \cdots\cdots a_{nn}e_n \end{cases}$$ 转置.

e_i 前方阵转置 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为从 e 到 f 过渡矩阵.

形式行向量. $[\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_n]$. 其中 α_i 为向量 $\in V$.

$[\alpha_1 \cdots \alpha_n] = [\beta_1 \cdots \beta_n] \overset{def}{\Longleftrightarrow} \alpha_i = \beta_i$, $\forall 1 \le i \le n$.

$[\alpha_1 \cdots \alpha_n] + [\beta_1 \cdots\cdots \beta_n] \overset{def}{\Longleftrightarrow} [\alpha_1+\beta_1, \cdots \alpha_n+\beta_n]$.

$k \in K$. $k[\alpha_1 \cdots \alpha_n] \overset{def}{\Longleftrightarrow} [k\alpha_1 \cdots k\alpha_n]$

$$[\alpha_1, \cdots \alpha_n]A \Longleftrightarrow [\sum_{i=1}^n a_{i1}\alpha_i, \cdots \sum_{i=1}^n a_{im}\alpha_i]$$

则 $[f_1 \cdots f_n] = [e_1 \cdots e_n] \cdot A$. (*).

过渡矩阵.

扫描全能王 创建

引理2. 设 $\{e_1 \cdots e_n\}$ 为V一组基. $A=(a_{ij})_{n\times m}$ $B=(b_{ij})_{n\times m}$

$[e_1 \cdots e_n]A = [e_1 \cdots e_n]B$ 则 $A=B$. (直接计算).

V_K 线性空间. $\{e_1 \cdots e_n\}$ $\{f_1 \cdots f_n\}$ 为基.
旧 新.

$\forall \alpha \in V$

$$\alpha = \lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_n e_n \to \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{bmatrix} \text{旧}$$

$$\alpha = \mu_1 f_1 + \cdots \mu_n f_n \to \begin{bmatrix}\mu_1\\ \vdots \\ \mu_n\end{bmatrix} \text{新}.$$

设 $[f_1 \cdots f_n] = [e_1 \cdots e_n]A$. (*)

$$\alpha = [e_1 \cdots e_n]\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{bmatrix}$$

$$= [f_1 \cdots f_n]\begin{bmatrix}\mu_1\\ \vdots \\ \mu_n\end{bmatrix} = [e_1, e_2 \cdots e_n]A\begin{bmatrix}\mu_1\\ \vdots \\ \mu_n\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}\mu_1\\ \vdots \\ \mu_n\end{bmatrix}$$

引理2. $\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}\mu_1\\ \vdots \\ \mu_n\end{bmatrix} \cdots\cdots$ (**)

(**) $\Rightarrow$ (*)

f_i 新坐标向量 $\begin{bmatrix}0\\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0\end{bmatrix}$ 由(**). 则 f_i 旧坐标 $A\begin{bmatrix}0\\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{1i}\\ \vdots \\ a_{ni}\end{bmatrix}$

$\Rightarrow f_i = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \cdots a_{ni}e_n$. 即(*)成立.

命题3. 设 V_K 为线性空间 $\{\alpha_1 \cdots \alpha_n\}$ $\{f_1 \cdots f_n\}$ $\{g_1 \cdots g_n\}$ 三组基.

$[f_1 \cdots f_n] = [e_1 \cdots e_n]A$ $[g_1 \cdots g_n] = [f_1 \cdots f_n]B$ 则

(1) A 非异

(2) $[g_1 \cdots g_n] = [e_1 \cdots e_n]AB$.

(1) 设. $[f_1 \cdots f_n] = [e_1 \cdots e_n]A$.

$[e_1 \cdots e_n] = [f_1 \cdots f_n]P$.

$\Rightarrow AP = I_n \Rightarrow A$ 可逆.

(2). 直接代入. $[g_1 \cdots g_n] = [f_1 \cdots f_n]B = [e_1 \cdots e_n]AB$.

注. 用行向量表示坐标向量.

$(*)'$ $\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$

$\Downarrow$

$(**)'$ $[\lambda_1 \cdots \lambda_n] = [\mu_1 \cdots \mu_n]A$.

定义1. V_K 为线性空间. V_0 为 V 子集. 若 $\forall\, \alpha, \beta \in V_0, k \in K$. 有 $\alpha + \beta \in V$. $k\alpha \in V_0$.
则称 V_0 为 V 线性子空间, 简称子空间.

引理2. V_0 在 V 的加法, 数乘构成了 K 上线性空间.

① $+ \cdot V_0 \times V_0 \to V_0$. $\quad \cdot\ K \times V_0 \to V_0$

$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta$ $\quad (k \cdot \alpha) \mapsto k\alpha$.

② $V_0 \subseteq V$. 加法交换, 结合成立. (1) (2).

(3) $\forall\, \alpha \in V_0$. $0_V = \alpha + (-1)\alpha \Rightarrow 0_V \in V_0$.

(4). V 中: $-\alpha = (-1)\alpha \in V_0$

(5). $V_0 \subseteq V$ (5)(6)(7)(8) ✓

$V_0 \subseteq V$ 子空间

性质：$\forall \alpha_1 \cdots \alpha_m \in V_0 \quad \lambda_1 \cdots \lambda_m \in K$.

$\lambda_1\alpha_1 + \cdots \lambda_m\alpha_m \in V_0$.

V_K 线性空间.

$\left.\begin{array}{l}\{0\}：\text{零子空间} \\ V：\text{全子空间}.\end{array}\right\} \begin{array}{l}\dim 0=0. \\ \text{平凡子空间}.\end{array}$

引理：设 V_0 为 n 维线性空间 V 一子空间.

$0 \leq \dim V_0 \leq \dim V$

进一步，非平凡 $\quad 0 < \dim V_0 < \dim V$

证明：设 V_0 为 V 非0子空间. $\dim V_0 = m$. 取 V_0 基 $\{e_1 \cdots e_m\}$

从而 $e_1 \cdots e_m$ 为 V 上线性无关. 添加 $n-m$ 个扩张为全空间基 $\{e_1 \cdots e_n\}$

$0 \leq \dim V_0 \leq \dim V$

若 $\dim V_0 = \dim V = n \Rightarrow V_0 = V$

取 V_0 基 $\{e_1 \cdots e_n\}$ 从而 $\{e_1 \cdots e_n\}$ 为 V 中线性无关

又 $\dim V = n. \Rightarrow \{e_1 \cdots e_n\}$ 为 V 一组基.

$\forall \alpha \in V. \quad \alpha = \lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_n e_n \in V_0. \Rightarrow V_0 = V$

定义+命题2. 设 V_1, V_2 为 V 子空间. 定义 V_1 与 V_2 交为集合交 $V_1 \cap V_2 = \{\alpha \mid \alpha \in V_1. \alpha \in V_2\}$

V_1 与 V_2 和 $V_1 + V_2 = \{\alpha + \beta \mid \alpha \in V_1, \beta \in V_2\}$.

则 $V_1 \cap V_2$. $V_1 + V_2$ 为 V 的子空间.

证明：$V_1 \cap V_2$. $\forall \alpha, \beta \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow \alpha + \beta \in V_1. \ \alpha + \beta \in V_2 \Rightarrow \alpha + \beta \in V_1 \cap V_2$.

$\forall k \in K. \ \alpha \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow k\alpha \in V_1. k\alpha \in V_2 \Rightarrow k\alpha \in V_1 \cap V_2$ 从而为子空间

$V_1 + V_2$. $\forall \alpha, \beta \in V_1 + V_2$. $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. $\quad \alpha_1, \beta_1 \in V_1$. $\alpha_2, \beta_2 \in V_2$

$\beta = \beta_1 + \beta_2$.

$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) \in V_1 + V_2 \qquad k\alpha = k\alpha_1 + k\alpha_2 \in V_1 + V_2$

推广. $V_1 \cdots V_m$ 为 V 一子空间.

$V_1 \cap V_2 \cdots V_m$

$V_1 + V_2 + \cdots V_m$

定义3. 设 S 为 V 非空子集. 记 $L(S)$ 为 S 中向量所有可能线性组合构成集合.

即 $L(S) = \left\{ \lambda_1\alpha_1 + \cdots \lambda_m\alpha_m \,\middle|\, \begin{array}{l} \lambda_1 \cdots \lambda_m \in K \\ \alpha_1 \cdots \alpha_m \in S \\ m > 0 \end{array} \right\}$

易证 $L(S)$ 在加法数乘下封闭为 V 子空间. 称为由 S (张成) 子空间.

例: $V = \mathbb{R}^3$. ~~[illegible]~~

$\vec{OA}, \vec{OB}$ 线性无关. $L(\{\vec{OA}\}) = \vec{OA}$ 所在直线.

$L\{\vec{OA}, \vec{OB}\} = OAB$ 平面

$\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ 线性无关 $L(\{\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}\}) = R^3$

命题4. (1) $L(S)$ 为包含 S, V 最小子空间

(2) 若 S 极大无关组 $\{\alpha_1 \cdots \alpha_r\}$ 且 $\{\alpha_1 \cdots \alpha_r\}$ 为 $L(S)$ 基 $\dim L(S) = r(S)$.

(1). $L(S) \supseteq S$. 任取 $V_0 \supseteq S$.

$\forall L(S)$ 中 $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots \lambda_m\alpha_m$, $\alpha_i \in S \Rightarrow \alpha_i \in V_0 \Rightarrow \lambda_1\alpha_1 + \cdots \lambda_m\alpha_m \in V_0$.

$\Rightarrow L(S) \subseteq V_0$. 取 $V_0 = S \Rightarrow L(S) = S$.

(2). $L(S) \hookrightarrow S \hookrightarrow \{\alpha_1 \cdots \alpha_m\}$

$\Rightarrow L(S) = L(\alpha_1 \cdots \alpha_r)$. 由 $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 线性无关. $\Rightarrow L(S)$ 基.

$\dim L(S) = r = r(S)$.

例：V_1,V_2 为 V 子空间，则

$L(V_1\cup V_2)=V_1+V_2$.

证明：$\forall \alpha\in V_1+V_2$ $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$. $\alpha_i\in V_i$.

从而 $\alpha\in L(V_1\cup V_2)\Rightarrow$ 右 $\subseteq$ 左.

$V_1\subseteq V_1+V_2$. $\alpha_1\in V_1$. $\alpha_1=\alpha_1+0\in V_1+V_2$

$V_2\subseteq V_1+V_2$.

由最小性：$L(V_1\cup V_2)\subseteq V_1+V_2$.

推广 $V_1\cdots V_m$ 为子空间. $L(V_1\cup\cdots\cup V_m)=V_1+\cdots+V_m$

定理6（维数公式）. V_1,V_2 为 V 子空间

$\dim(V_1+V_2)=\overset{m}{\dim V_1}+\overset{n}{\dim V_2}-\overset{r}{\dim(V_1\cap V_2)}$

证明：取 $V_1\cap V_2$ 基 $\{\alpha_1\cdots\alpha_r\}$. $V_1\cap V_2\subseteq V_1$

基扩张 $\{\alpha_1\cdots\alpha_r,\beta_1\cdots\beta_{m-r}\}$ 为 V_1 基.

基扩张 $\{\alpha_1\cdots\alpha_r,\gamma_1\cdots\gamma_{n-r}\}$. 为 V_2 基

$\alpha_1\cdots\alpha_r.\beta_1\cdots\beta_{m-r}.\gamma_1\cdots\gamma_{n-r}$ 共 $m+n-r$ 个.

只证它们为 V_1+V_2 基.

$\forall v\in V_1+V_2$ $v=v_1+v_2$ $v_1\in V_1$. $v_2\in V_2$.

v_1 写成所有 α,β 线性组合. 同理 v_2 写成 α,γ 组合. $\Rightarrow$ ✓

$\lambda_1\alpha_1+\cdots\lambda_r\alpha_r+\mu_1\beta_1+\cdots\mu_{m-r}\beta_{m-r}+k_1\gamma_1+\cdots k_{n-r}\gamma_{n-r}=0$

$\lambda_1\alpha_1+\cdots\lambda_r\alpha_r+\mu_1\beta_1+\cdots\mu_{m-r}\beta_{m-r}=-k_1\gamma_1-\cdots-k_{n-r}\gamma_{n-r}=l_1\alpha_1+\cdots l_r\alpha_r$

左 $\in V_1$. 右 $\in V_2$. $\Rightarrow$ 左右都 $\in V_1\cap V_2$.

$\Rightarrow k_1\gamma_1+\cdots k_{n-r}\gamma_{n-r}+l_1\alpha_1+\cdots l_r\alpha_r=0\Rightarrow k_1=k_{n-r}=l_1=\cdots l_r=0$.

$\Rightarrow \lambda_1\alpha_1+\cdots\lambda_r\alpha_r+\mu_1\beta_1+\cdots\mu_{m-r}\beta_{m-r}=0$

且 $\lambda_1=\lambda_r=\cdots\mu_1\cdots\mu_{m-r}=0$. $\Rightarrow$ 线性无关.

当 $V_1\cap V_2=0$ 时. $=\{0\}$ 则有 $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$

定义7. 设 $V_1\cdots V_m$ 为 V 的子空间. 若 $\forall 1\le i\le m$.

$V_i\cap(V_1+\cdots V_{i-1}+\cdots V_m)=0$. 成立.

则称 $V_1+\cdots V_m$ 为直和. 记为 $V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m$.

例 $m=2$. $V_1\cap V_2=0 \Leftrightarrow V_1+V_2$ 为直和.

$V=R^3$ 则 $V=V_1\oplus V_{23}$.

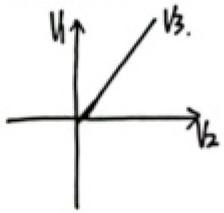
$m\geq 3$. $V_1\oplus V_2\oplus V_3$ 直和 $\Leftrightarrow$ $V_1\cap(V_2+V_3)=0$

$V_2\cap(V_1+V_3)=0$

$V_3\cap(V_1+V_2)=0$.

$V=V_1\oplus V_2\oplus V_3$.

注: V_i 两两之交为0不得直和. $V_3\cap(V_1+V_2)=V_3\neq 0$.



定理8. 设 $V_1\cdots V_m$ 为 V 子空间. $V_0=V_1+\cdots\cdots V_m$.

则下面等价.

(1) $V_0=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m$

(2). $\forall i\in[2,m]$. $V_i\cap(V_1+\cdots V_{i-1})=0$.

(3). $\dim(V_1+\cdots V_m)=\dim V_1+\dim V_2\cdots\dim V_m$.

(4). V_i 的一组基可拼成 V_0 基.

(5). 分块表示唯一 $V_0=V_1+\cdots V_m$

$v=v_1+v_2\cdots v_m \quad v_i\in V_i$

$=u_1+u_2\cdots u_m \quad u_i\in V_i$

$\Rightarrow u_i=v_i$.

扫描全能王 创建

证明：(1) $\Rightarrow$ (2)

$V_i \cap (V_1 + \cdots V_{i-1}) \subseteq V_i \cap (V_1 + \cdots V_{i-1} + \cdots V_m) = 0$

$\Rightarrow V_i \cap (V_1 + \cdots V_{i-1}) = 0 \quad \forall 2 \le i \le m$.

(2) $\Rightarrow$ (3). $V_m \cap (V_1 + \cdots V_{m-1}) = 0$.

$\rightarrow \dim V_m + \dim(V_1 + \cdots V_{m-1}) = \dim(V_1 + \cdots V_m)$

多次应用 (3) 即得

(3) $\Rightarrow$ (4). $\dim V_i = n_i$. $\dim V_0 = n_1 + \cdots n_m = n$

取 V_i 基 $\{e_{i1} \cdots e_{in_i}\}$. $1 \le i \le m$.

将拼于一起 $\{e_{11}\ e_{12} \cdots e_{1n_1}, e_{21}, e_{22} \cdots e_{2n_2} \cdots e_{m1}\ e_{m2} \cdots e_{mn_m}\}$, 共 n 个.

$\forall \alpha \in V_0 = V_1 + V_2 + \cdots V_m$.

$\Rightarrow \alpha = \alpha_1 + \cdots \alpha_m$. $\alpha_i \in V_i$. 则 $\alpha_i = \lambda_{i1} e_{i1} + \cdots \lambda_{in_i} e_{in_i}$. $\forall 1 \le i \le m$.

$\Rightarrow \alpha$ 可由这些基表示。

(4) $\Rightarrow$ (5).

(5) $\Leftrightarrow$ (5') 零向量分块表示唯一. (5) $\Rightarrow$ (5') ✓ (5') $\Rightarrow$ (5).

$0 = (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \cdots (u_m - v_m)$. $\Rightarrow u_i = v_i$.

(4) $\Rightarrow$ (5') $0 = v_1 + v_2 + \cdots v_m$. $v_i \in V_i$.

设 $v_i = \lambda_{i1} e_{i1} + \cdots \lambda_{in_i} e_{in_i}$. $\forall i$. $\rightarrow$ 0 可由基拼成, 从而 $\forall \lambda_{ij} = 0$.

$\Rightarrow v_i = 0$ 则 (5') 成立.

(5') $\Rightarrow$ (1). $\forall \alpha \in V_i \cap (V_1 + \cdots V_{i-1} + V_{i+1} + \cdots V_m)$.

$\alpha = \alpha_1 + \cdots \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \cdots \alpha_m$.

$0 = \alpha_1 + \cdots \alpha_{i-1} - \alpha + \alpha_{i+1} \cdots \alpha_m$.

(5') $\Rightarrow \alpha_i = -\alpha = 0$. $\Rightarrow \alpha = 0$ 即 $V_i \cap (V_1 + \cdots V_{i-1} \cdot V_m) = 0$. $\forall 1 \le i \le n$.

定理1.(判定定理)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (*)$$

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$. $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $\beta=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ $\tilde{A}=(A \vdots \beta)$

$(*) \Longleftrightarrow Ax=\beta$.

(1) 若 $r(A)=r(\tilde{A})=n$. 则(*)有唯一解.

(2). 若 $r(A)=r(\tilde{A})<n$. 则(*)有无穷解.

(3) 若 $r(A)\neq r(\tilde{A})$, 则(*)无解.

证明: (*)有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\tilde{A})$

证: $A=[\alpha_1 \cdots \alpha_n]$. $Ax=\beta \Leftrightarrow x_1\alpha_1+\cdots x_n\alpha_n=\beta$.

(*)有解 $\Leftrightarrow \beta$为$\alpha_1 \cdots \alpha_n$线性组合.

必要性. (*)有解, 则β为$\alpha_1\cdots\alpha_n$线性组合.

设$\alpha_{i1}\cdots\alpha_{ir}$为$\alpha_1\cdots\alpha_n$极大无关组 $\Rightarrow \beta$为$\alpha_{i1}\cdots\alpha_{ir}$线性组合

于是$\alpha_{i1}\cdots\alpha_{ir}$为$\tilde{A}$列向量极大无关组 $r(\tilde{A})=r=r(A)$

充分性: 设$r(A)=r(\tilde{A})=r$ $\{\alpha_{i1}\cdots\alpha_{ir}\}$为A列向量极大无关组

从而$\alpha_{i1}\cdots\alpha_{ir}$为$\tilde{A}$列向量中线性无关向量, 又$\because r(\tilde{A})=r \Rightarrow \alpha_{i1}\cdots\alpha_{ir}$为$\tilde{A}$极大无关组.

则β可成$\alpha_{i1}\cdots\alpha_{ir}$线性组合, 则$\beta$也为$\alpha_1\cdots\alpha_n$线性组合.

若$r(A)=r(\tilde{A})=n$. 则$\alpha_1\cdots\alpha_n$线性无关. 由定理, β可唯一表示为$\alpha_1\cdots\alpha_n$线性组合.

即(*)有唯一解

若$r(A)=r(\tilde{A})<n$. 则$\alpha_1\cdots\alpha_n$线性相关. $\exists$不全为0 $c_1\cdots c_n$. $0=c_1\alpha_1+\cdots c_n\alpha_n$

(*)有解 $\exists k_1,\cdots,k_n\in K$.

则. $\beta=k_1\alpha_1+\cdots k_n\alpha_n$.

$\beta=(k_1+c_1k)\alpha_1+\cdots\cdots(k_n+kc_n)\alpha_n$.

即 $x_1=k_1+kc_1\ \cdots\ x_n=k_n+kc_n$. $\forall k\in K$. 无穷解.

引理2. 设 γ 为 $Ax=\beta$ 一个解.(特解). 则 α 为 $Ax=\beta$ 解 $\Leftrightarrow$ $\alpha-\gamma$ 为相伴的齐次方程组 $Ax=0$ 解.

证明:"$\Longrightarrow$" $A(\alpha-\gamma)=A\alpha-A\gamma=\beta-\beta=0$.

"$\Longleftarrow$" $0=A(\alpha-\gamma)=A\alpha-A\gamma=A\alpha-\beta\Rightarrow A\alpha=\beta$. α 为 $Ax=\beta$ 解.

下面考虑齐次方程组 $Ax=0\cdots(**)$.

$r(\tilde{A})=r(A\,\vdots\,0)=r(A)\Rightarrow(**)$必有解.[平凡非0解?].

令 $V_A=\{x\in K^n\mid Ax=0\}$ (**)解集.

断言: V_A 为 K^n 线性子空间

证: $\forall\alpha,\beta\in V_A$. $A\alpha=A\beta=0\Rightarrow A(\alpha+\beta)=0$

$\forall k\in K$. $A(k\alpha)=kA\alpha=0.\Rightarrow k\alpha\in V_A$.

定理3. 齐次方程组解结构定理.

若 $r(A)=r$, 则 V_A 为 K^n 的 $n-r$ 维子空间. 从而 $\exists$ 一组基 $\{\eta_1\cdots\eta_{n-r}\}$. 使所有 $Ax=0$ 解都可写成 $\eta_1\cdots\eta_{n-r}$ 线性组合. 称 $\{\eta_1\cdots\eta_{n-r}\}$ 为齐次方程基础解系.

证明: 对(**)在同解基础上化简 $\Leftrightarrow$ 对A进行初等行变换

由行对换可将A行向量极大无关组调至前r行. 不妨 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}$ 前r行为极大无关组.

则 $\alpha_{r+1}=c_1\alpha_1+\cdots c_r\alpha_r$. 可利用前r行把后 $m-r$ 行消为0.

则 $A\longrightarrow\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_r\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$ 令 $A_1=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_r\end{bmatrix}$ $r(A_1)=r$. 在允许列对换情形下(等价于交换未知元)

不妨设 A_1 列向量极大无关组为前r列. $A_1=\begin{array}{cc} r\times r & r\times(n-r)\\ \end{array}\begin{bmatrix}B_1 & B_2\end{bmatrix}$ $r(B_1)=r$ B_1 为非异阵.

$A_1=[B_1,B_2]\xrightarrow{行}[I_r,C]$

总2. A通过行变换及必要列对换变为 $\begin{bmatrix} I_r & C \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

从而(**)与下列方程组同解. $C=(C_{ij})_{r\times(n-r)}$

$$\begin{cases} x_1+C_{1r+1}x_{r+1}+\cdots C_{1n}x_n=0. \\ x_2+C_{2r+1}x_{r+1}+\cdots C_{2n}x_n=0. \\ x_3+C_{3r+1}x_{r+1}+\cdots C_{3n}x_n=0 \\ \quad x_r+C_{rr+1}x_{r+1}+\cdots=0. \end{cases} \quad (\#)$$

依次取: $x_{r+1}=1.\ x_{r+2}=\cdots x_n=0.\Rightarrow \eta_1=\begin{bmatrix}-C_{1r+1}\\-C_{2r+1}\\-C_{rr+1}\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$

令 $x_{r+2}=1.\ x_{r+1}=x_{r+3}=\cdots x_n=0.\Rightarrow \eta_2=\begin{bmatrix}-C_{1r+2}\\-C_{2r+2}\\\vdots\\0\\1\\0\end{bmatrix}$

令 $x_n=1\quad x_{r+1}=\cdots\ x_{n-1}=0.\Rightarrow \eta_{n-r}=\begin{bmatrix}-C_{1n}\\-C_{2n}\\-C_{rn}\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$

断言 $\{\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_{n-r}\}$ 为(\#\#)解空间一组基.

令 $\lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 + \cdots \lambda_{n-r}\eta_{n-r} = 0 = \begin{bmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n-r} \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \cdots \lambda_{n-r} = 0$

再证：$\forall$ (\#\#) 解 $\eta = [a_1 \cdots a_n]'$

$$\eta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{1r+1}a_{r+1} \cdots - c_{1n}a_n \\ -c_{rr+1}a_{r+1} \cdots - c_{rn}a_n \\ a_{r+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_{r+1}\eta_1 + a_{r+2}\eta_2 + \cdots a_n\eta_{n-r}$$

于是 $\{\eta_1 \cdots \eta_{n-r}\}$ 为 (**) 解空间一组基础解系.

从而 $\dim_K V_A = n - r = n - r(A)$.

定理4（结构定理）. 设 $r(A) = r(\tilde{A}) = r$. γ 为(*)特解.

$\{\eta_1 \cdots \eta_{n-r}\}$ 为相伴齐次方程组基础解系.

则 $Ax=\beta$ 通解. $\gamma + k_1\eta_1 + \cdots k_{n-r}\eta_{n-r}$. $k_i \in K$.

任取 $Ax=\beta$ 解 α.

$\Rightarrow$ $\alpha - \gamma$ 为 $Ax=0$ 的解. 且 $\alpha - \gamma = k_1\alpha_1 + \cdots k_{n-r}\alpha_{n-r}$ $\quad \alpha = \gamma + k_1\alpha_1 + \cdots k_{n-r}\alpha_{n-r}$

线性方程组求解方式.

(1) $\tilde{A} = (A \mid \beta)$ 化为阶梯形. $r(A) \overset{?}{=} r(\tilde{A})$.

(2). 基础解系.

齐次 $Ax=0$ 解空间 $V_A \subseteq K^n$ 子空间．

且 $\dim V_A = n - r(A)$.

非齐次．$Ax=\beta$. 其中 $\beta \neq 0$.　仿射空间

结构定理：$x = \gamma + k_1\eta_1 + \cdots k_{n-r}\eta_{n-r}$　$\{\eta_1 \cdots \eta_{n-r}\}$ 为 $Ax=0$ 基础解系.

实则 $Ax=0$ 的解空间平移了 γ

推论6. 设 $Ax=\beta(\beta\neq 0)$ 特解 γ. 相伴齐次方程组 $Ax=0$ 基础解系 $\eta_1 \cdots \eta_{n-r}$

(1). γ. $\gamma+\eta_1 \cdots\cdots \gamma+\eta_{n-r}$ 线性无关

(2) $Ax=\beta$ 任一解可写成 $c_0(\gamma) + c_1(\gamma+\eta_1) + \cdots c_{n-r}(\gamma+\eta_{n-r})$

且 $\sum_{i=0}^{n-r} c_i = 1$

(1). 设 $\lambda_0\gamma + \lambda_1(\gamma+\eta_1) + \cdots \lambda_{n-r}(\gamma+\eta_{n-r}) = 0$

$(\sum_{i=0}^{n-r}\lambda_i)\gamma + \lambda_1\eta_1 + \cdots \lambda_{n-r}\eta_{n-r} = 0.$

左乘 $A \Rightarrow (\sum_{i=0}^{n-r}\lambda_i)\beta = 0$，由 $\beta\neq 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-r}\lambda_i = 0.$

$\Rightarrow \lambda_1\eta_1 + \cdots \lambda_{n-r}\eta_{n-r} = 0$，由基,线性无关 $\Rightarrow \lambda_i = 0$. $\forall\ 1 \leq i \leq n-r$

(2). $\forall\ \alpha = \gamma + k_1\eta_1 + \cdots k_{n-r}\eta_{n-r}$. $k_i \in K$

$$= \underbrace{(1-k_1-\cdots k_{n-r})\gamma}_{c_0} + \underbrace{k_1}_{c_1}(\gamma+\eta_1) + \cdots \underbrace{k_{n-r}}_{c_{n-r}}(\gamma+\eta_{n-r})$$

$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-r} c_i = 0.$

扫描全能王 创建

$Ax=0$. V_A 解空间 $\Rightarrow \dim_K V_A + r(A) = n$.

应用一. $A_{n\times n}$. $|A|\neq 0 \Leftrightarrow Ax=0$ 仅有0解.

例: 求证 $A-2I_n$ 非异(可逆) $A^2-A-3I_n=0$.

① 证 $(A-2I_n)X=0$ 仅0解. 设其解 x_0. $Ax_0=2x_0$. $A^2x_0=2Ax_0=4x_0$

$(A^2-A-3)x_0=-x_0=0 \Rightarrow x_0=0$. 得证.

② . $(A-2I_n)(A+I_n)=I_n$.

应用二. 利用 $r(A)$ 求 V_A.

例: $\lambda_1 \cdots \lambda_n \in K$. 且不同.

(I). $\begin{cases} x_1+x_2+\cdots x_n=0. \\ \lambda_1 x_1+\cdots\cdots \lambda_n x_n=0. \\ \vdots \\ \lambda_1^{k-1}x_1+\cdots\cdots \lambda_n^{k-1}x_n=0. \end{cases}$ (II) $\begin{cases} \lambda_1^k x_1+\lambda_2^k x_2+\cdots \lambda_n^k x_n=0. \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1}x_1+\lambda_2^{n-1}x_2+\cdots \lambda_n^{n-1}x_n=0. \end{cases}$

设 (I) 解空间 V_1. (II) 空间 V_2. 即 $K^n=V_1\oplus V_2$.

证明: $V_1\cap V_2$ 为(I)与(II)联立后解空间. 则 (III). $\begin{cases} x_1+\cdots x_n=0. \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1}x_1+\cdots \lambda_n^{n-1}x_n=0. \end{cases}$ 系数阵为 A.

$|A|=\prod_{1\le i<j\le n}(\lambda_j-\lambda_i)\neq 0$. $r(A)=n \Rightarrow V_1\cap V_2=V_3=0$.

$A=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ $r(A)=n. \Rightarrow r(A_1)=k. r(A_2)=n-k$.

$\dim V_1=n-r(A_1)=n-k$. $\dim V_2=n-r(A_2)=k$.

$\dim(V_1\oplus V_2)=\dim V_1+\dim V_2=n-k+k=n$.

应用三. 用 V_A 求 $r(A)$

例: $A\in M_{m\times n}(R)$. 证 $r(AA^T)=r(A^TA)=r(A)$.

证明: $Ax=0$　　$A^TAx=0$

V_A　　V_{A^TA}

$V_A\subseteq V_{A^TA}$.

任取 $x_0\in V_{A^TA}$. 此时 $x_0\in R^n$. 且 $A^TAx_0=0$.

令 $Ax_0=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{bmatrix}\in R^m$.　$(Ax_0)^T(Ax_0)=0$.

$\Rightarrow\ [a_1\cdots a_m]\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{bmatrix}=0\Rightarrow\sum_{i=1}^m a_i^2=0\Rightarrow a_i=0\Rightarrow Ax_0=0.$

则 $V_{A^TA}\subseteq V_A\Rightarrow V_A=V_{A^TA}\Rightarrow r(A)=r(A^TA)$.

定义: A.B. 映射 $f: A\to B$. 对应

$\forall\ a\longmapsto b=f(a)$.

$\mathrm{Im}f=f(A)=\{f(a)\,|\,a\in A\}$ 称为 $f(a)$ 像集.

若 $\mathrm{Im}f=B$. 则 f 为满射. 若 $a_1\neq a_2$ 则 $f(a_1)\neq f(a_2)$. 则 f 为单射.

若 f 既单又满. 则 f 为双射(一一对应).

例: $f.g: A\to B$ 映射　$f=g\Leftrightarrow\forall a\in A.\ f(a)=g(b)$.

$f: A\to B$.　$g: B\to C$.　$g\circ f: A\to C$　$\forall a\in A\ g\circ f(a)=g(f(a))$

$h. C\to D$. 此时有复合结合律　$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$

设 $f: A\to B$. 若 $\exists\, g: B\to A$ 使得 $g\circ f=1_A$, $f\circ g=1_B$ 则称 g 为 f 逆映射, 记为 f^{-1}

引理: $f: A\to B$ 则 f^{-1} 有在 $\Leftrightarrow$ f 为双射

证: 充分性: 设 f 为双射. 对 B 中 $\forall b\in B$. 由满性 $\exists a\in A$. 使 $f(a)=b$.
再由单性. 满足 $f(a)=b$ 的 a 唯一 (反证法).
构造 $g\ B\to A$.
$\forall\, b\mapsto a$. 唯一的满足 $f(a)=b$.
易证 $f^{-1}=g$.

必要性: 设 $g: B\to A$, 为 f 逆. 即 $g\circ f=1_A$ $f\circ g=1_B$.

单: $\forall a_1, a_2\in A$. $f(a_1)=f(a_2)$. $\Rightarrow g(f(a_1))=g(f(a_2))\Rightarrow a_1=a_2$ 单射.

满射: $\forall b\in B$. $f\circ g=1_B$ $f(g(b))=b$. 则 $g(b)$ 为 f 下的原像. 满射.

定义2. 设 V, U 为 K 上线性空间: $\phi: V\to U$. $\forall \alpha,\beta\in V$. $k\in K$. 满足.

(1) $\phi(\alpha+\beta)=\phi(\alpha)+\phi(\beta)$

(2). $\phi(k\cdot\alpha)=k\cdot\phi(\alpha)$.

则称 $\phi: V\to U$ 为线性映射. $\phi: V - V$ 线性映射为线性变换.

若进一步 ϕ 为单射(满射), 则称 ϕ 为单(满)线性映射.

ϕ 为双射. 则为线性同构: $V\cong U$

例: $\phi: V\to U$. 为零线性映射. 记为 0.
$\forall\,\alpha\mapsto 0_U$

例2: $1_V: V\to V$ 为线性同构, 称为恒等映射.
$\alpha\mapsto\alpha$. . .

例3. 设 $A\in K_{m\times n}(K)$. 构造 $\phi_A: K^n\longrightarrow K^m$, 映射.
$\alpha\longmapsto A\alpha$.

由矩阵性质. ϕ_A 为线性映射.

例4. $\phi: K_n \longrightarrow K^n$ 是线性同构.

$$[a_1 \cdots a_n] \mapsto \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

例5. V_K的基$\{e_1 \cdots e_n\}$. $\phi: V \longrightarrow K^n$, 为线性同构

$$\alpha = \sum a_i e_i \mapsto \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

例6. V_K为线性空间. 固定$k \in K$. $\phi: V \longrightarrow V$ 为线性变换(数乘变换)

$$\alpha \mapsto k\alpha.$$

例7. 求导映射 $\frac{d}{dx}: C^\infty[0.1] \to C^\infty[0.1]$

$$f(x) \mapsto f'(x)$$

是一个线性映射.

命题 3. $\phi: V \to U$为线性映射. 则

(1) $\phi(0_V) = 0_U$

$\because \phi(0_V) = \phi(0_V + 0_V) = \phi(0_V + 0_V) \Rightarrow \phi(0_V) = 0_U$.

(2). $\forall \alpha, \beta \in V$. $l, k \in K$. $\phi(k\alpha + l\beta) = k\phi(\alpha) + l\phi(\beta) \Leftrightarrow$ 加法. 数乘.

(3). 若$\phi: V \to U$ 同构. $\phi^{-1}\ U \to V$ 也同构.

$\because \phi$为双射$\Leftrightarrow \phi^{-1}$也为双射. 只证$\phi^{-1}$保持加法数乘.

$\forall x, y \in U$. $k, l \in K$. 证 $\phi^{-1}(kx + ly) = k\phi^{-1}(x) + l\phi^{-1}(y)$

$$\phi(\phi^{-1}(kx + ly) - k\phi^{-1}(x) - l\phi^{-1}(y)) = (kx + ly) - kx - ly = 0_U.$$

由ϕ单性 $\Rightarrow$ 成立.

(4) $\psi: U \to W$为线性映射. $\phi: V \to U$为线性映射. 则$\psi \circ \phi: V \to W$ 映射线性.

$\because \phi$双射. ψ双射 $\Rightarrow \psi\phi$为双射.

只证映射 $\psi \cdot \phi(k\alpha + l\beta) = \psi(k\phi(\alpha) + l\phi(\beta)) = k\psi \circ \phi(\alpha) + l\psi \circ \phi(\beta)$

推论4. (1) 线性空间同构为等价关系

(2) 线性空间之间存在线性同构 $\Leftrightarrow \dim A = \dim B$

证 (1) $1_V: V \to V$ 线性同构. $V \cong V$

自反成立.

传递成立. 等价关系成立.

(2). 必要性: 任取 $\phi: V \to U$. V 基 $\{e_1 \cdots e_n\}$. 从而 $\{\phi(e_1) \cdots \phi(e_n)\}$ 线性无关

任取 $x \in U$. $\exists \alpha \in V$, 使 $\phi(\alpha) = x$. 设 $\alpha = a e_1 + \cdots a_n e_n$.

$\Rightarrow \phi(\alpha) = x = a_1\phi(e_1) + \cdots a_n\phi(e_n)$. 则 $\{\phi(e_1) \cdots \phi(e_n)\}$ 为 U 的基

充分性: 设 $\dim V = \dim U = n$. V 基 $\{e_1 \cdots e_n\}$ U 基 $\{f_1 \cdots f_n\}$.

$\phi_V: V \to K^n$ 为线性同构 $\phi_U: U \to K^n$ 为线性同构.

$\sum a_i e_i \mapsto \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ $\phi_U^{-1}: K^n \cong U$.

则 $\phi_U^{-1}\phi_V: V \cong U$.

$\phi: V \to U$ 为线性同构, 推不出 $\forall \psi: V \to U$ 为线性同构.

设. $V-U$ 为 K 上线性空间 $\mathcal{L}(V,U)$ 为 $V \to U$ 上所有线性映射.

加: $\forall \phi, \psi \in \mathcal{L}(V,U)$ $(\phi+\psi)(\alpha) = \phi(\alpha) + \psi(\alpha)$.

数: $\forall k \in K$. $(k\cdot\phi)(x) = k\cdot\phi(x)$.

定理5. $\mathcal{L}(V,U)$ 在上述加法数乘下成为 K 上线性空间.

当 $U=K$. $\mathcal{L}(V,K)$ 称为 V 上线性函数全体构成线性空间 $= V^*$ (称为 V 的共轭空间(对偶))

当 $U=V$. $\mathcal{L}(V)$: V 上线性变换构成空间.

$\phi: V \to V$ $\psi: V \to V$ $\psi\phi: V \to V$

定义7. A为K上线性空间: 运算: $\cdot : A\times A \to A$

$(a\cdot b) \mapsto ab$.

若$\forall a.b.c\in A. k\in K$.

满足: (1) 乘法结合: $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

(2). 乘法单位. $\exists e\in A$ $ea=ae=a$

(3) 乘法交换 $a(b+c)=ab+ac$. $(b+c)a=ba+bc$

(4) 乘法数乘 $k(a\cdot b)=(k\cdot a)\cdot b=a\cdot(k\cdot b)$

称A为K上代数.

例 $V=C[0,1]$.

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$. 则V为R代数

例: $K_1\subseteq K_2 \Rightarrow K_2$是$K_1$-线性空间. K_2为K_1代数.

例: $M_n(K)$为K-线性空间. 乘法为矩阵乘法.

$\Rightarrow$ $M_n(K)$为K-代数

定理6. $\mathcal{L}(V)$为K-代数.

证明: (1) 复合. (2)恒 (3) 成立 (4) 成立.

$\forall \phi\in \mathcal{L}(V)$. $\forall n\in Z^+$. $\phi^n=\phi\circ\phi\circ\phi\cdots\phi$.

(1) $\phi^n\circ\phi^m=\phi^{n+m}$ (2) $(\phi^n)^m=\phi^{nm}$

ϕ自同构 $\phi^{-n}=(\phi^{-1})^n=(\phi^n)^{-1}$

注: (1). 设$\phi\cdot\psi\in\mathcal{L}(V)$. $\phi\circ\psi\neq\psi\circ\phi$ (一般)

因此 $(\phi\circ\psi)^n\neq\phi^n\circ\psi^n$

(2) $\psi\cdot\phi$自同构 $\Rightarrow$ $\phi\psi$ 自同构 $(\phi\psi)^{-1}=\psi^{-1}\phi^{-1}$.

$k\phi$ 自同构. $(k\phi)^{-1}=k^{-1}\phi^{-1}$

定理1.（线性扩张）.

设V.U为数域K上线性空间 $\{e_1\cdots e_n\}$为V的基. $\{\beta_1\cdots\beta_n\}$为U中一组向量.

则$\exists$唯一线性映射 $\phi: V\to U$

$$\phi(e_i)\mapsto\beta_i.\ 1\le i\le n.$$

证明：存在性. 因为ϕ在基向量下取值确定.所以可以线性扩张到整个空间V

$\forall\alpha\in V.\ \alpha=\lambda_1e_1+\cdots\lambda_ne_n=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ie_i$

定义 $\phi(\alpha)=\lambda_1\beta_1+\cdots\lambda_n\beta_n.\Rightarrow\phi V\to U$为映射.

任取$\gamma\in V$ $\gamma=b_1e_1+\cdots b_ne_n$.

$\alpha+\gamma=(a_1+b_1)e_1+\cdots(a_n+b_n)e_n$ $\phi(\alpha+\gamma)=(a_1+b_1)\beta_1+\cdots(a_n+b_n)\beta_n$

$\forall k\in K.$ $\phi(k\alpha)=k\phi(\alpha)$ $\qquad=\phi(\alpha)+\phi(\gamma)$

$\phi: V\to U$上线性映射.满足$\phi(e_i)=\beta_i$.

唯一性：若$\exists\psi: V\to U$为线性映射 $\psi(e_i)=\beta_i$.

$\psi(\alpha)=\psi(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\cdots\lambda_ne_n)=\lambda_1\psi(e_1)+\cdots\lambda_n\psi(e_n)=\lambda_1\beta_1+\cdots\lambda_n\beta_n.$

故而$\phi(\alpha)=\psi(\alpha)$.故$\phi$唯一

定义2.设$\phi: V^n\to U^m$为线性映射.

设$\{e_1\cdots e_n\}$为V的基. $\{f_1\cdots f_m\}$为U的基.

设 $\begin{cases}\varphi(e_1)=a_{11}f_1+\cdots a_{m1}f_m\\ \vdots\qquad\qquad\vdots\\ \varphi(e_n)=a_{1n}f_1+\cdots a_{mn}f_m.\end{cases}$ $\cdots(*)$ $\Leftrightarrow$ $\underbrace{[\varphi(e_1).\varphi(e_2)\cdots\varphi(e_n)]}^{1\times n}=\overbrace{[f_1,f_2\cdots f_m]}^{1\times m}\overbrace{\begin{bmatrix}A\end{bmatrix}}^{m\times n}$

则称矩阵A为ϕ在给定基下表示矩阵

任取$\alpha\in V$设$\alpha=\lambda_1e_1+\cdots\lambda_ne_n\mapsto\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{bmatrix}\in K^n$.

$\phi(\alpha)\in U.$ $\phi(\alpha)=\mu_1f_1+\mu_2f_2+\cdots\mu_mf_m\mapsto\begin{bmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_m\end{bmatrix}\in K^m$

$$\phi(\alpha)=\phi(\lambda_1 e_1+\cdots\cdots\lambda_n e_n)$$

$$=\lambda_1\phi(e_1)+\cdots\cdots\lambda_n\phi(e_n)$$

$$=[\phi(e_1),\phi(e_2)\cdots\phi(e_n)]\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{bmatrix}=[f_1\cdot f_2\cdots f_m]A\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{bmatrix}=[f_1\cdots f_m]\begin{bmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_m\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_m\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{bmatrix}$$

映射 $T:\mathcal{L}(V^n,U^m)\longrightarrow M_{m\times n}(K)$.

$\phi\longmapsto A$. ϕ在给定基下表示矩阵.

满性：给定$A=(a_{ij})_{m\times n}\in M_{m\times n}(K)$.

定义ϕ在V基上取值如下 $\begin{cases}\phi(e_1)=a_{11}f_1+\cdots a_{m1}f_m\\ \phi(e_2)=a_{12}f_1+\cdots a_{m2}f_m\\ \vdots\end{cases}$

由线性扩张定理.上述定义$\phi:V\to U$为线性映射.由定义$\cdot\phi$的表示矩阵为A.

单性：$\phi,\psi\in\mathcal{L}(V,U)$.使表示矩阵为A. 从而$\phi,\psi$都满足(*).由线性扩张定理

$\psi=\phi$.

~~定理2~~ V^n. $\{e_1\cdots\cdots e_n\}$为基. $\eta_V:V\to K^n$ 坐标向量线性同构.

U^m：$\{f_1\cdots f_m\}$基. $\eta_U:U\to K^m$

$A\in M_{m\times n}(K)$. $\phi_A:K^n\longrightarrow K^m$ 线性映射.

$x\longmapsto Ax$.

定理3：(1) $T:\mathcal{L}(V,U)\longrightarrow M_{m\times n}(K)$为同构.

(2) $\forall\phi\in\mathcal{L}(V,U)$. $A=T(\phi)$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\eta_V"'] & U \arrow[d, "\eta_U"] \\ K^n \arrow[r, "\phi_A"] & K^m \end{tikzcd}$$

$\eta_U\circ\phi=\phi_A\circ\eta_V$

证明：设 $\phi, \psi \in \mathcal{L}(V,U)$，$T(\phi) = A = (a_{ij})_{m\times n}$

$T(\psi) = B = (b_{ij})_{m\times n}$.

即 $\phi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i \quad \forall j \in [1,n]$.

$\psi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} f_i$.

$(\phi+\psi)(e_j) = (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} + b_{ij}) f_i \quad \forall j \in [1,n]$.

$\Rightarrow T(\phi+\psi) = (a_{ij}+b_{ij})_{m\times n} = A+B = T(\phi)+T(\psi)$.

$(k\phi)(e_j) = k\phi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} k a_{ij} f_i$

$T(k\phi) = (k a_{ij})_{m\times n} = kA = kT(\phi)$.

(2) $\forall \alpha \in V \xrightarrow{\phi} \phi(\alpha) \in U \xrightarrow{\eta_U} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix} \in K^m$.

$\eta_V \downarrow$

$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in K^n \xrightarrow{\phi_A} A\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ 且 $A\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix}$

设 $\phi \in \mathcal{L}(V)$，取定 V 的基 $\{e_1 \cdots e_n\}$

设 $\begin{cases} \phi(e_1) = a_{11}e_1 + \cdots\cdots a_{n1}e_n \\ \vdots \\ \phi(e_n) = a_{1n}e_1 + \cdots a_{nn}e_n \end{cases} \Leftrightarrow [\phi(e_1) \cdots \phi(e_n)] = [e_1, e_2 \cdots e_n] A$. $A = (a_{ij})_{n\times n}$

称 A 为线性变换 ϕ 在给定基下表示矩阵

定理 3 (1) $\Rightarrow T: \mathcal{L}(V) \longrightarrow M_n(K)$. 为线性同构

$\phi \longmapsto A$

命题4: $\phi: V^n \to U^m$ $\psi: U^m \to W^p$ 线性映射.

则 $\psi\circ\phi: V^n \to W^p$ 的线性映射. 则 $\overset{p\times n}{T(\psi\circ\psi)} = \overset{p\times m}{T(\psi)} \cdot \overset{m\times n}{T(\phi)}$

证明: V 基 $\{e_1 \cdots e_n\}$. U 基 $\{f_1 \cdots f_m\}$. W 基 $\{g_1 \cdots g_p\}$

$T(\phi) = A = a_{ij\,m\times n}$. $T(\psi) = B = (b_{ij})_{p\times m}$.

$[\phi(e_1) \cdots \phi(e_n)] = [f_1 \cdots f_m]A$.

$$\phi(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i.$$

$$\psi(\phi(e_j)) = \psi(\sum_{i=1}^m a_{ij} f_i) = \sum_{i=1}^m a_{ij}\psi(f_i) \quad \forall 1\le j\le n.$$

$\Rightarrow [\psi(\phi(e_1)) \cdots \psi(\phi(e_n))] = [\psi(f_1) \cdots \psi(f_m)]A = [g_1 \cdots g_p]BA$.

$[\psi(f_1) \cdots \psi(f_m)] = [g_1 \cdots g_p]B$.

$\Rightarrow T(\psi\phi) = BA = T(\psi)T(\phi)$

推论5. $T: \mathcal{L}(V) \to M_n(K)$. 保持乘法. 从而 T 为一个 K-代数同构

推论6. (1) $T(I_V) = I_n$.

(2). $\phi\in\mathcal{L}(V)$. ϕ 为自同构 $\leftrightarrow T(\phi)$ 可逆.

且 ϕ^{-1} 的表示: $T(\phi^{-1}) = T(\phi)^{-1}$

(1) V 基 $\{e_1 \cdots e_n\}$. $I_V(e_i) = e_i \Rightarrow T(I_V) = I_n$.

(2). 必要: 设 ϕ 自同构. $I_V = \phi\cdot\phi^{-1} = \phi^{-1}\phi$.

$I_n = T(I_V) = T(\phi\cdot\phi^{-1}) = T(\phi)\cdot T(\phi^{-1}) \Rightarrow T(\phi)$ 可逆. 且 $T(\phi)^{-1} = T(\phi^{-1})$.

充分: 设 $T(\phi)$ 可逆. $T(\phi)^{-1}$ 存在.

$T: \mathcal{L}(V) \to M_n(K)$ 双射.

$\exists\, \psi \mapsto T(\phi)^{-1}$

即 $T(\psi) = T(\phi)^{-1}$ 即 $I_n = T(\phi)T(\psi) = T(\psi)T(\phi)$.

$T(I_V) = T(\psi\circ\phi) = T(\phi\circ\psi) \overset{\text{单}}{\Rightarrow} I_V = \phi\psi = \psi\phi \Rightarrow \varphi = \psi^{-1}$ 自同构

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, equal, "\eta_V"'] & U \arrow[d, equal, "\eta_U"] \\ K^n \arrow[r, "\varphi_A"] & K^m \end{tikzcd}$$

几何化为代数

定理7. 设 $\varphi\in\mathcal{L}(V)$. V基 $\{e_1\cdots\cdots e_n\}$ $\{f_1\cdots\cdots f_n\}$

从基e到f过渡阵P. φ在基e下表示阵为A. φ在f下表示阵为B. 则$B=P^{-1}AP$

证明 $[f_1\cdots f_n]=[e_1\cdots\cdots e_n]P$

$[\varphi(e_1)\cdots\varphi(e_n)]=[e_1\cdots\cdots e_n]A$

$[\varphi(f_1)\cdots\varphi(f_n)]=[f_1\cdots\cdots f_n]B$

由于φ线性: $(\varphi(f_1),\varphi(f_2)\cdots\cdots\varphi(f_n))=(\varphi(e_1)\cdots\cdots\varphi(e_n))P$

$=[e_1\cdots\cdots e_n]AP$

$(\varphi(f_1),\varphi(f_2)\cdots\cdots\varphi(f_n))=[f_1\cdots\cdots f_n]B=[e_1\cdots\cdots e_n]PB$

$\Rightarrow AP=PB \Rightarrow B=P^{-1}AP$

定义8. 设 $A,B\in M_n(K)$. 若存在非异阵$P\in M_n(K)$使 $B=P^{-1}AP$, 则称A与B相似

记$A\sim B$.

命题9. 相似为等价关系.

(1) 相似: $A=I_n^{-1}AI_n\Rightarrow A\approx A$

(2) 对称 $B=P^{-1}AP$, $A\approx B$. 且 $A=PBP^{-1}=(P^{-1})^{-1}BP^{-1}$, 故 $B\approx A$.

(3) 传递: $B=P^{-1}AP$ $C=Q^{-1}BQ$. $C=Q^{-1}P^{-1}APQ$

$A\approx B$ $B\approx C$ $=(PQ)^{-1}A(PQ)$

$\Rightarrow A\approx C$

线性映射的像与核

总设：$\phi: V^n \to U^m$ 线性映射

定义1. $\mathrm{Im}\phi = \{\phi(v) \mid v \in V\}$ Image（像）

$\ker\phi = \{v \in V \mid \phi(v) = 0_U\}$ kernel（核）

引理2. $\mathrm{Im}\phi$ 为 U 子空间，$\ker\phi$ 为 V-子空间.

证明：任取 $\phi(u), \phi(v) \in \mathrm{Im}\phi$.

$\phi(u)+\phi(v) = \phi(u+v) \in \mathrm{Im}\phi$.

$\forall k \in K$. $k\phi(u) = \phi(ku) \in \mathrm{Im}\phi$.

$\forall u, v \in \ker\phi$. 即 $\phi(u) = \phi(v) = 0_U$

$\phi(u+v) = \phi(u)+\phi(v) = 0_U + 0_U = 0_U$

$\phi(ku) = k\phi(u) = k0_U = 0_U$.

命题3：$\phi: V \to U$.

(1) ϕ 满 $\Leftrightarrow \dim\mathrm{Im}\phi = \dim U$　(2) ϕ 单 $\Leftrightarrow \ker\phi = 0_V \Leftrightarrow \dim\ker\phi = 0$

(1). ϕ 满 $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\phi = U \Leftrightarrow \dim\mathrm{Im}\phi = \dim U$.

$\because \mathrm{Im}\phi$ 为 U 子空间，若维数相同，必为全子空间.

(2) $\Rightarrow$. 设 ϕ 为单射. 任取 $v \in \ker\phi$. 即 $\phi(v) = 0_U = \phi(0_V)$

且 ϕ 单 $\Rightarrow 0_V = v$ 则 $\ker\phi = 0_V$

"$\Leftarrow$" 设 $\phi(u) = \phi(v)$. $u, v \in V$.

$\phi(u-v) = 0_U$. 即 $u-v \in \ker\phi = 0_V \Rightarrow u-v = 0$. 即 $u = v$.

定义4. 称 $\dim \mathrm{Im}\,\phi$ 为 ϕ 的秩 $r(\phi)$. 称 $\dim\ker\phi$ 为 ϕ 的零度.

定义 + 引理5.

设 $\phi: V \to U$ 为线性映射. V' 为 V 的子空间. U' 为 U 子空间. 且 $\phi(V') \subseteq U'$

则可通过定义域限制得线性映射 $\phi': V' \to U'$.

使得 ϕ' 与 ϕ 有相同映射法则. 这样的 ϕ' 称为 ϕ 在 V' 上限制

若 ϕ 为单射. ϕ' 为单射.

证明：$\phi': V' \to U'$.

$$v' \longmapsto \phi(v').$$

ϕ' 与 ϕ 有相同映射法则.

任取 $v_1', v_2' \in V'$, $k \in K$. $\phi'(v_1'+v_2') = \phi(v_1'+v_2') = \phi(v_1') + \phi(v_2') = \phi'(v_1') + \phi'(v_2')$.

同理: $\phi'(kv_1') = \phi(kv_1') = k\phi(v_1') = k\phi'(v_1')$ 则 ϕ' 是线性映射.

设 ϕ 为单射 $\Rightarrow \ker\phi = 0$.

$$\ker\phi' = \{v' \in V' \mid \phi'(v') = 0\}.$$

则 $= \{v' \in V' \mid \phi(v') = 0\}$

$= \ker\phi \cap V' = 0$. 则 ϕ' 为单射.

定理6. $\phi: V^n \to U^m$. 线性. $V\ \{e_1 \cdots e_n\}$ $U\ \{f_1 \cdots f_m\}$.

ϕ 在给定基下表示 $A \in M_{m\times n}(K)$. 则 $r(\phi) = r(A)$. $\dim\ker\phi = n - r(A)$.

证明

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\eta_V"', "\cong"] & U \arrow[d, "\eta_U", "\cong"'] \\
K^n \arrow[r, "\phi_A"] & K^m
\end{tikzcd}
\qquad \eta_U \cdot \phi = \phi_A \cdot \eta_V$$

证 $\ker\phi\cong\ker\phi_A$. $\mathrm{Im}\phi\cong\mathrm{Im}\phi_A$

step1 $\eta_V(\ker\varphi)\subseteq\ker\varphi_A$. $\eta_U(\mathrm{Im}\varphi)\subseteq\mathrm{Im}\varphi_A$.

(1) $\forall\, v\in\ker\varphi$ 证 $\eta_V(v)\in\ker\varphi_A$.

$\because \varphi_A(\eta_V(v))=\eta_U(\varphi(v))=\eta_U(0)=0\Rightarrow\eta_V(v)\in\ker\varphi_A$.

(2) $\forall\,\phi(v)\in\mathrm{Im}\phi$. $v\in V$. 证 $\eta_U(\mathrm{Im}\varphi)\in\mathrm{Im}\phi_A$.

$\eta_U(\phi(v))=\phi_A(\eta_V(u))\in\mathrm{Im}\phi_A$

step2. 作限制. $\left.\begin{array}{l}\eta_V:\ker\phi\rightarrow\ker\phi_A.\\ \eta_U:\mathrm{Im}\phi\rightarrow\mathrm{Im}\phi_A.\end{array}\right\}$ 单射

证它们为满射.

(1) 证 $\eta_V:\ker\phi\rightarrow\ker\phi_A$ 满.

$\forall x\in\ker\phi_A$. 即 $\phi_A(x)=0$. $x\in\ker\phi_A\subseteq K^n$ 且 $\eta_V:V\rightarrow K^n$ 满.

从而 $\exists\, v\in V$. $\eta_V(v)=x$. 下证. $\phi(v)=0$.

而 $\eta_U(\phi(v))=\phi_A(\eta_V(v))=\phi_A(x)=0$. $\Rightarrow\phi(v)=0$. $\Rightarrow x\in\ker\phi$ 为满

(2) 证 $\eta_U:\mathrm{Im}\phi\rightarrow\mathrm{Im}\phi_A$ 满

$\forall\,\phi_A(x)\in\mathrm{Im}\phi_A$. $x\in K^n$. 取 $v\in V$. 使 $\eta_V(v)=x$.

$\eta_U(\phi(v))=\phi_A(\eta_V(v))=\phi_A(x)$. $\Rightarrow\exists\,\phi(v)$ 使 $\eta_U(\phi(v))=\phi_A(x)$.

step3. $\ker\phi_A=\{x\in K^n\mid Ax=0\}$. $\ker\phi_A$ 为 $Ax=0$ 解空间.

$\ker\phi\cong\ker\phi_A\Rightarrow\dim\ker\phi=\dim\ker\phi_A=\dim V_A=n-r(A)$

A作列分块 $A=[\alpha_1\cdots\alpha_n]$. $\alpha_i\in K^m$

$\mathrm{Im}\phi_A=\{Ax\mid x\in K^n\}$. $x=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$ $=\{x_1\alpha_1+\cdots x_n\alpha_n\mid x_i\in K\}$

$=L(\alpha_1\cdots\alpha_n)$.

$\mathrm{Im}\phi\cong\mathrm{Im}\phi_A$. $\Rightarrow r(\phi)=\dim\mathrm{Im}\phi=\dim\mathrm{Im}\phi_A=\dim L(\alpha_1\cdots\alpha_n)=r(A)$.

推论7. $\phi: V^n \to U^m$. 线性映射

则 $\dim\ker\varphi + \dim\mathrm{Im}\varphi = \dim V$

$n - r(A) + r(A) = n. = \dim V$

推论8. $\varphi: V^n \to U^m$ (线性映射) 在某基下表示A.

(1). ϕ满射 $\Leftrightarrow$ A行满秩. $r(A)=m$

(2) ϕ单 $\Leftrightarrow$ A列满秩 $r(A)=n$.

证明: ϕ满 $\Leftrightarrow \dim\mathrm{Im}\phi = \dim U = m. \Leftrightarrow r(A)=m$

ϕ单 $\Leftrightarrow \ker\phi = 0. \Leftrightarrow \dim\ker\varphi = 0 \Leftrightarrow n - r(A) = 0$

推论9. 设 $\phi: V^n \to U^n$ 为线性映射. 且 $\dim V^n = \dim U = n$.

则 ϕ同构 $\Leftrightarrow$ ϕ单 $\Leftrightarrow$ ϕ满

(1). 设ϕ单 $\Rightarrow$ ϕ满

$0 = \dim\ker\phi = \dim V - \dim\mathrm{Im}\varphi. \Rightarrow \dim\mathrm{Im}\varphi = \dim V = \dim U$

$\to \mathrm{Im}\varphi = U \Rightarrow$ 满

(2). 设ϕ满 $\Rightarrow$ ϕ单

$\mathrm{Im}\phi = U \Rightarrow \dim\mathrm{Im}\varphi = \dim U = \dim V \Rightarrow \dim\ker\phi = 0 \Rightarrow$ 单.

特别 $\phi \in \mathcal{L}(V^n)$. ϕ自同构 $\Leftrightarrow$ ϕ单 $\Leftrightarrow$ ϕ满.

推论10. 设 $\phi \in \mathcal{L}(V^n)$ 则 ϕ单(满) $\Leftrightarrow$ ϕ在某一(任一组)基矩阵可逆

ϕ单(满) $\Leftrightarrow$ ϕ自同构 $\Leftrightarrow$ 矩阵可逆.

ϕ单. $\Rightarrow$ 行满秩 $\Leftrightarrow$ A非异.

$\phi: V^n \longrightarrow U^m$ 线性映射.

$V\{e_1 \cdots e_n\}$. U基. $\{f_1 \cdots f_n\}$.

计算法 (1). 对表示阵 初等行变换(列).

得到 A 列向量极大无关 $\{\alpha_{i1} \cdots\cdots \alpha_{ir}\}$ $r = r(A)$.

得到 $Ax=0$ 基础解系 $\beta_1 \cdots\cdots \beta_{n-r}$

(2) $\ker\phi = k_1\eta_V^{-1}(\beta_1) + k_2\eta_V^{-1}(\beta_2) \cdots\cdots \quad k_{n-r}\eta_V^{-1}(\beta_{n-r})\ k_i \in K$.

$\mathrm{Im}\phi = l_1\eta_U^{-1}(\alpha_{i1}) + \cdots\cdots l_r\eta_U^{-1}(\alpha_{ir})$.

例子: $\phi: V^5 \longrightarrow U^4$.

$\{e_1 \cdots\cdots e_5\}$ $\{f_1 \cdots f_4\}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -5 & -17 & 10 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & \frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$.

$\mathrm{Im}\phi = k_1(f_1+2f_2+f_3+2f_4) + k_2(2f_1+f_2+f_3+3f_4) + k_3(f_1+f_2+2f_3-5f_4)$

$\beta_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ -11 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\ker\phi = l_1(-e_1 + 3e_2 - 2e_3 + e_4) + l_2(9e_1 - 11e_2 + 5e_3 + 4e_5)$.

不变子空间

定义：$\phi\in\mathscr{L}(V)$，U为V的子空间.

若$\phi(U)\subseteq U$，则称U为ϕ-不变子空间.

进一步：通过定义域限制可得U上线性变换$\phi_U: U\to U$

称为ϕ在U上的限制.

例：$\phi\in\mathscr{L}(V)$，则$0, V, \ker\phi, \mathrm{Im}\phi$为$\phi$-不变子空间.

$\because \phi(0)=0\subseteq 0$　$\phi(V)=\mathrm{Im}\phi\subseteq V$.

$\phi(\ker\phi)=0\subseteq\ker\phi$.　$\phi(\mathrm{Im}\phi)\subseteq\phi(V)=\mathrm{Im}\phi$.

例：$V=R^2$　ϕ：逆时针θ角旋转. $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta. & \cos\theta\end{bmatrix}$

设L为一维ϕ不变子空间$\phi(L)\subseteq L$　则$\theta=k\pi, k\in Z$

例. 设$\phi\in\mathscr{L}(V)$纯量. $\phi(\alpha)=k\alpha$. $k\in K$. 则V任一子空间都是φ不变子空间

引理2. $\phi\in\mathscr{L}(V)$. $U=L(\alpha_1\cdots\alpha_m)$. 其中$\alpha_i\in V$. 则$U$为$\phi$-不变子空间$\Leftrightarrow\phi(\alpha_i)\in U$.

必要性为定义.

充分性：设$\varphi(\alpha_i)\in U$. $1\le i\le m$. 任取$\alpha\in U$.

$\alpha=\lambda_1\alpha_1+\cdots\cdots\lambda_m\alpha_m$. $\forall i$.

$\varphi(\alpha)=\lambda_1\varphi(\alpha_1)+\cdots\cdots\lambda_m\varphi(\alpha_m).\in U$.

定理3：设$\phi\in\mathscr{L}(V)$. U为ϕ不变子空间.

取U的基$\{e_1\cdots\cdots e_r\}$. 扩张为V基$\{e_1\cdots\cdots e_r, e_{r+1}\cdots e_n\}$.

则ϕ在上述基下表示为$\begin{bmatrix}A & B\\ O & D\end{bmatrix}$

由U为ϕ的不变性. $\phi(e_i)\in U\ (1\le i\le r)$. $\phi(e_1)=a_{11}e_1+\cdots\cdots a_{r1}e_r$

$\vdots$

$\phi(e_r)=a_{1r}e_1+\cdots\cdots a_{rr}e_r$

则 $[\varphi(e_1)\cdots\varphi(e_n)]=[e_1\cdots e_n]\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}$

注：定理3逆命题也对.

设 $\phi\in\mathcal{L}(V)$. ϕ 在 $\{e_1\cdots e_n\}$ 下表示为上三角阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}$，令 $U=L(e_1\cdots e_r)$

则 U 为 ϕ-不变子空间.

由 2 $\Rightarrow$ 只证 $\phi(e_i)\in U$. $1\le i\le r$.

$[\varphi(e_1)\cdots\varphi(e_r)\cdots\varphi(e_n)]=[e_1\cdots e_r\cdots]\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}$.

$\forall\ \varphi(e_i)\in U$.

推论4. $\phi\in\mathcal{L}(V^n)$. $V=V_1\oplus V_2$. V_1. V_2 都为 ϕ 不变子空间.
则可取 V_1. V_2 基拼成 V 基. 使 ϕ 在该基下矩阵 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & D \end{bmatrix}$

取 V_1 基 $\{e_1\cdots e_r\}$ V_2 $\{e_{r+1}\cdots e_n\}$.

$\phi(e_i)\in V_1\ (1\le i\le r)$ $\phi(e_j)\in V_2\ (r+1\le j\le n)$.

进一步推广 $\phi\in\mathcal{L}(V^n)$ $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots V_m$. V_i 为 ϕ-不变子空间.
每个 V_i 取一组基. 设 $\phi|_{V_i}$ 在给定基下表示阵 $A_i\ (1\le i\le m)$. V_i 基拼成 V 基
ϕ 表示为 $\mathrm{diag}\{A_1\cdots\cdots A_m\}$.

例：V^3 基 $\{e_1 \cdots e_3\}$ $\phi \in \mathcal{L}(V)$ 表示 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

证 $U = L(e_3, e_1+e_2+2e_3)$ 为 ϕ 不变子空间.

由引理2. $\Rightarrow$ $\phi(e_3) \in U$. $\phi(e_1+e_2+2e_3) \in U$.

$\eta: V \longrightarrow K^3$ 线性同构.

$\alpha \longmapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

只要验证坐标向量

$e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $e_1+e_2+2e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\phi(e_3) = A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\phi(e_1+e_2+2e_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

再证 $\phi(e_3)$. $\phi(e_1+e_2+2e_3)$ 可由 $e_3, e_1+e_2+2e_3$ 线性表出.

第四章核心.

$$\begin{tikzcd} V^n \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\eta_V"', "\cong"] & V^m \arrow[d, "\cong"', "\eta_U"] \\ K^n \arrow[r, "\phi_A"] & K^m \\ x \arrow[r, mapsto] & Ax \end{tikzcd}$$

$T: \mathcal{L}(V, U) \longrightarrow M_{m\times n}(K)$ $\phi \longmapsto A$. 线性同构.

$T: \mathcal{L}(V) \longrightarrow M_n(K)$ 保持乘法线性同构.

几何→代数.

例1. 设$\phi\in\mathcal{L}(V,U)$. $r(\phi)=r\geq 1$

证明: 存在$\phi_i\in\mathcal{L}(V,U)$. $r(\phi_i)=1$. 且$\phi=\phi_1+\cdots+\phi_r$

证明: 转为代数. 设$A\in M_{m\times n}(K)$. $r(A)=r\geq 1$

证 $\exists A_i\in M_{m\times n}(K)$. $r(A_i)=1$. 且$A=A_1+\cdots\cdots+A_r$.

$\exists$ 非异P,Q. $A=P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$

令$A_i=P\begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & 1 & \\ & & \end{bmatrix}Q$. $1\leq i\leq r$. 则$r(A_i)=1$. 且$A=A_1+\cdots A_r$.

例2. 设$\phi\in\mathcal{L}(V^n)$. $\phi^m=0$. $n=mq+1$. 证明: $r(\phi)\leq n-q-1$.

证明: 转为代数. 设$A\in M_n(K)$. $A^m=0$. $n=mq+1$.

用反证. $r(A)\geq n-q$. $0=r(A^m)=r(A^{m-1}\cdot A)\geq r(A^{m-1})+r(A)-n\geq r(A^{m-1})-q$.

$\Rightarrow$ $r(A^{m-1})\leq q$.

$q\geq r(A^{m-2})+r(A)-n$. $r(A^{m-2})\leq 2q$.

$\Rightarrow$. $r(A)\leq (m-1)q$. 与$r(A)\geq n-q$矛盾.

扫描全能王 创建

代数 $\Rightarrow$ 几何

35. $A\in M_n(K)$. $r(A^n)=r(A^{n+1})=\cdots\cdots$

转为几何：设 $\phi\in\mathcal{L}(V^n)$ 则，$\exists\, m\in[0,n]$ 使 $\operatorname{Im}\phi^m=\operatorname{Im}\phi^{m+1}=\cdots$

$\ker\phi^m=\ker\phi^{m+1}=\cdots$

且 $V=\ker\phi^m\oplus\operatorname{Im}\phi^m$

证明：$V\supseteq\operatorname{Im}\phi\supseteq\operatorname{Im}\phi^2\supseteq\cdots\cdots$

$\ker\phi\subseteq\ker\phi^2\subseteq\ker\phi^3\cdots\cdots\subseteq V$

$V\supseteq\operatorname{Im}\phi\cdots\cdots\supseteq\operatorname{Im}\phi^n\supseteq\operatorname{Im}\phi^{n+1}\geqslant 0$.

dim $n.\geqslant\cdots\cdots\cdots\cdots\geqslant 0$.

则 $n+2$ 个空间，必然 $\exists\, m\in[0,n]$，使 $\dim\operatorname{Im}\phi^m=\dim\operatorname{Im}\phi^{m+1}\Rightarrow\operatorname{Im}\phi^m=\operatorname{Im}\phi^{m+1}$

下证：$\forall k\geqslant m$. $\operatorname{Im}\phi^k=\operatorname{Im}\phi^{k+1}$.

显然 $\operatorname{Im}\phi^{k+1}\subseteq\operatorname{Im}\phi^k$. 任取 $\phi^k(v)\in\operatorname{Im}\phi^k$.

$\phi^m(v)\in\operatorname{Im}\phi^m=\operatorname{Im}\phi^{m+1}$ ∴ $\exists\, u\in V$. st $\phi^m(v)=\phi^{m+1}(u)$.

$\phi^k(v)=\phi^{k-m}(\phi^m(v))=\phi^{k-m}(\phi^{m+1}(u))\in\operatorname{Im}\phi^{k+1}$.

$\dim\ker\phi^k+\dim\operatorname{Im}\phi^k=\dim V=n$. $\forall k\geqslant m$，$\dim\operatorname{Im}\phi^k$ 不变. 则 $\forall k\geqslant m$, $\dim\ker\phi^k$ 不变.

则 $\ker\phi^m=\ker\phi^{m+1}\cdots\cdots$

① $\ker\phi^m\cap\operatorname{Im}\phi^m=0$.

$\forall\,\alpha\in\ker\phi^m\cap\operatorname{Im}\phi^m$. $\phi^m(\alpha)=0$ $\alpha=\phi^m(\beta)$.

$\Rightarrow 0=\phi^m(\alpha)=\phi^{2m}(\beta)$ $\beta\in\ker\phi^{2m}=\ker\phi^m\Rightarrow\alpha=\phi^m(\beta)=0$.

②. $V=\ker\phi^m+\operatorname{Im}\phi^m$. $\forall\,\alpha\in V$.

$\phi^m(\alpha)\in\operatorname{Im}\phi^m=\operatorname{Im}\phi^{2m}$ $\exists\,\beta\in V$. $\phi^m(\alpha)=\phi^{2m}(\beta)$

$\phi^m(\underbrace{\alpha-\phi^m(\beta)}_{\gamma})=0$. $\gamma\in\ker\phi^m$. $\Rightarrow\alpha=\gamma+\phi^m(\beta)\in\ker\phi^m+\operatorname{Im}\phi^m$

线性映射维数公式. $\phi\in\mathcal{L}(V^n,U^m)$, 则

$\dim\ker\phi+\dim\mathrm{Im}\phi=\dim V=n$.

$\Downarrow$ k. 只证 $\dim\mathrm{Im}\phi=n-k$.

证明: 任取 $\ker\phi$ 基. $\{e_1\cdots e_k\}$. 扩张为 V 的基. $\{e_1\cdots e_k,e_{k+1}\cdots e_n\}$.

$\forall\alpha\in V$. 设 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i$.

$\phi(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\phi(e_i)=\sum_{i=k+1}^{n}\lambda_i\phi(e_i)$.

$\Rightarrow\mathrm{Im}\phi=L[\phi(e_{k+1}),\cdots\cdots\phi(e_n)]$

证明: $c_{k+1}\phi e_{k+1}\cdots\cdots c_n\phi_n=0$.

$0=\phi(c_{k+1}e_{k+1}\cdots\cdots c_ne_n)\Rightarrow e_{k+1}c_{k+1}+\cdots\cdots e_nc_n\in\ker\phi$.

$c_{k+1}e_{k+1}+\cdots\cdots+c_ne_n=-c_1e_1-c_2e_2-\cdots\cdots c_ke_k\in\ker\phi$.

$\sum_{i=1}^{n}c_ie_i\Leftarrow 0=0\Rightarrow c_1\cdots\cdots=c_n=0.\Rightarrow\phi(e_{k+1})\cdots\phi(e_n)$ 为 $\mathrm{Im}\phi$ 基.

$A,B\in M_{m\times n}(K)$. $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解 $\Leftrightarrow\exists P_{m\times m}$ 非异. $B=PA$.

证明: $\phi,\psi\in\mathcal{L}(V^n,U^m)$. $\ker\phi=\ker\psi\Leftrightarrow\exists$ 自同构 $\xi\in\mathcal{L}(U)$ st. $\psi=\xi\phi$.

$V=U=R^3$.

定义1. 设K为数域. x为未定元.

称下形式表达式：$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots a_1x+a_0$. $a_i\in K.(0\le i\le n)$

为未定元x的一元多项式. 全体一元多项式为$K[x]$

若$a_n\neq 0$. $f(x)$次数$\deg(f(x))=n$. 此时a_nx^n为$f(x)$首项. a_n为首项系数.

a_ix^i为$f(x)$第i项. a_0称为常数项.

若$f(x)=a\in K$. 则$f(x)$为常数多项式.

若$a\neq 0$. 则$\deg(f(x))=0$. 若$a=0$. 则$f(x)$为零多项式. $\deg(f(x))=-\infty$

$K[x]$在加法数乘下成为K—线性空间.

乘法：(1)交换 (2)结合 (3)分配. (4)乘法数乘相容

(5)乘法单位元

$\longmapsto K[x]$是K上交换代数. 一元多项式环.

整除. $K[x]$ ～～～～ $\mathbb{Z}$ 整数环.

定义1. 设$f(x),g(x)\in K[x]$. 若$\exists\, h(x)\in K[x]$ 则. $f(x)=g(x)h(x)$. 则$g(x)$为$f(x)$因式.

记$g(x)$可整除$f(x)$. 记为$g(x)\mid f(x)$. 反之若上述$h(x)$不存在. 记$g(x)\nmid f(x)$.

命题2. $f(x),g(x),h(x)\in K[x]$. $c\neq 0\in K$.

(1) 若$f(x)\mid g(x)$. 则$cf(x)\mid g(x)$. (2) $f(x)\mid f(x)$. (3) $f(x)\mid g(x)$. $g(x)\mid h(x)\Rightarrow f(x)\mid h(x)$.

(4). $f(x)\mid g(x)$. $f(x)\mid h(x)$. $\forall\, u(x),v(x)\in K[x]$. $f(x)\mid g(x)u(x)+h(x)v(x)$.

(5). 若$f(x)\mid g(x)$. 且$g(x)\mid f(x)$. 则$\exists\, 0\neq k\in K$. 则$f(x)=kg(x)$.

$g(x)=f(x)p(x)$. $f(x)=q(x)g(x)$. 则 $f(x)=f(x)p(x)q(x)$

1°. 若$f(x)=0\Rightarrow g(x)=0$.

2°. 若$f(x)\neq 0\Rightarrow p(x)q(x)=1$. $p(x),q(x)\neq 0$.

$0=\deg(1)=\deg(p(x))+\deg(q(x))\Rightarrow \deg(p(x))+\deg(q(x))=0$

定义：$f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid f(x)$，$f(x)$与$g(x)$相伴，$f(x)\sim g(x)$.

定理3（带余除法）. 设$f(x)$，$g(x)\neq 0\in K[x]$，则$\exists$唯一的$q(x)$，$r(x)\in K[x]$.

使 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$，其中 $\deg r(x)<\deg(g(x))$

证明：若$\deg(f(x))<\deg(g(x))$　$q(x)=0$，$r(x)=f(x)$

若 $\deg(f(x))\geq \deg g(x)\geq 0$

对$f(x)$次数来归纳.

$\deg(f(x))=\deg(g(x))=0\Rightarrow f(x)=a\neq 0$，$g(x)=b\neq 0$ 成立

下设 $\deg(f(x))<n$，结论成立，证$\deg f(x)=n$.

$f(x)=a_nx^n+\cdots\cdots a_1x+a_0$，$a_n\neq 0$.　$g(x)=b_mx^m+\cdots b_0$，$b_m\neq 0$，$n\geq m$.

$\cancel{f(x)=a_nb_m^{-1}g(x)+f_1(x)}$.　$f_1(x)=f(x)-a_nb_m^{-1}g(x)x^{n-m}$，且 $\deg f_1(x)<n$.

由归纳，$\exists q(x)$，$r(x)$，$f_1(x)=g(x)q(x)+r_1(x)$，$\deg(r_1(x))<\deg(g(x))$.

则 $f(x)=g(x)[a_nb_m^{-1}x^{n-m}+q(x)]+r(x)$ 存在性得证.

再证唯一性：$f(x)=g(x)p(x)+t(x)$，$\deg(t(x))<\deg g(x)$

$$g(x)(p(x)-q(x))=r(x)-t(x).$$

断言 $p(x)=q(x)$.

若$p(x)\neq q(x)$，则 $p(x)-q(x)\neq 0$，$\deg(p(x)-q(x))\geq 0$，而$\deg$左 $>\deg$右恒成立，矛盾.

则 $p(x)=q(x)$，$r(x)=t(x)$ 唯一性得证.

推论4. 设 $f(x), 0 \neq g(x) \in K[x]$, 则

$g(x) \mid f(x) \Leftrightarrow r(x)=0$

充分: $f(x)=g(x)q(x)+r(x)=g(x)q(x)$

必要. $f(x)=q(x)g(x)=q(x)g(x)+0 \quad \deg 0<\deg(g(x))$

由唯一性, $r(x)=0$

$f(x)=3x^4-4x^3+5x-1$, $g(x)=x^2-x+1$. 求 $q(x), r(x)$

$3x^4-4x^3+5x-1 \mid x^2-x+1$

$q(x)=3x^2-x-4$

$-x^3-3x^2+5x-1$

$-4x^2+6x-1$

$2x+3$.

$f(x)=(3x^2-x-4)g(x)+(2x+3)$

定义1. 设 $f(x), g(x) \in K[x]$ 若 $d(x) \mid f(x)$, 且 $d(x) \mid g(x)$,
则称 $d(x)$ 为 $f(x), g(x)$ 公因式. 若 $d(x)$ 为公因式, 且 $\forall h(x)$ 为 $f(x), g(x)$ 公因式, $h(x) \mid d(x)$,
则 $d(x)$ 为最大公因式. 则 $d(x)=(f(x), g(x))=\gcd(f(x), g(x))$

若 $f(x) \mid m(x)$, $g(x) \mid m(x)$. 则称 $m(x)$ 为 $f(x), g(x)$ 公倍式. 若 $\forall l(x)$ 为 $f(x) g(x)$ 公倍式, $m(x) \mid l(x)$.
则 $m(x)$ 为最小公倍式. $m(x)=[f(x), g(x)]=\operatorname{lcm}(f(x), g(x))$.

定理2(辗转相除). 设 $f(x), g(x) \in K[x]$ 不全为0. 则 $f(x), g(x)$ 最大公因式必存在 $(d(x))$
且 $\exists u(x), v(x) \in K[x]$. $d(x)=f(x)u(x)+g(x)v(x)$.

证明: 若 $f(x)=0$. 则 $(f(x), g(x))=g(x)$. 若 $g(x)=0$. 则 $(f(x), g(x))=f(x)$

设 $f(x) \neq 0$. $g(x) \neq 0$. 作带余除法:

$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x) \quad \deg r_1(x) < \deg g(x)$

$g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x) \cdots \deg r_2(x) < \deg r_1(x).$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$r_{s-2}(x) = r_{s-1}(x)q_s(x) + r_s(x) \quad \deg r_s(x) < \deg r_{s-1}(x).$

$r_{s-1}(x) = r_s(x)q_{s+1}(x) + r_{s+1}(x). \quad \deg r_{s+1}(x) < \deg r_s(x).$

由于余数次数严格减，从而∃某余式$=0$. 不妨设$r_{s+1}(x)=0$. $r_s \neq 0$.

断言$r_s(x)$为最大公因式。$r_s(x)=(f(x),g(x))$.

$r_{s-1}(x) = r_s(x)q_{s+1}(x). \quad r_s(x) \mid r_{s-1}(x).$

$\Rightarrow r_s(x) \mid r_{s-2}(x) \cdots\cdots r_s(x) \mid f(x).\ r_s(x) \mid g(x). \quad f(x) = r_{-1}(x) \quad g(x) = r_0(x).$

对$f(x)$, $g(x)$任一公因式$h(x)$.

由一. $h(x) \mid r_1(x)$. 由二 $h(x) \mid r_2(x) \cdots\cdots h(x) \mid r_s(x)$. $\Rightarrow r_s(x)$为$(f(x),g(x))$. 存在性.

$r_s(x) = r_{s-2}(x) - r_{s-1}(x)q_s(x).$

$r_{s-1}(x) = r_{s-3}(x) - r_{s-2}(x)q_{s-1}(x).$

$\Rightarrow r_s(x) = r_{s-2}(x) - (r_{s-3}(x) - r_{s-2}(x)q_{s-1}(x))\,q_s(x).$

$\quad = r_{s-3}(x)(-q_s(x)) + (1 + q_{s-1}(x)q_s(x))r_{s-2}(x).$

$\Rightarrow \cdots\cdots \Rightarrow r_s(x) = r_{-1}(x)u(x) + r_0(x)v(x). = u(x)f(x) + v(x)g(x).$

注: 设$d_1(x)$. $d_2(x)$为$f(x)$最大公因式.

$d_2(x) \mid d_1(x)$ 且 $d_1(x) \mid d_2(x). \Rightarrow d_1(x) = cd_2(x).\ c \neq 0.$

首一多项式 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 首项系数为1. 约定: 最大公因数首一 (最小公倍式首一)

在此基础上最大公因式存在且唯一. 同理最小公倍式

例：$f(x)=x^4-x^3-x^2+2x-1$. $g(x)=x^3-2x+1$ 求 $d(x)$.

	$f(x)$	$g(x)$	
	$x^4-x^3-x^2+2x-1$	x^3-2x+1	
$q_1(x)=x-1$	$x^4-\quad -2x^2+x$	x^3-x^2	$q_2(x)=x+1$
	$-x^3+x^2+x-1$	x^2-2x+1	
$q_3(x)=-x$	$-x^3\quad -2x+1$	x^2-x	
	$r_1(x)=x^2-x$	$r_2(x)=-x+1$	
	x^2-x		
	$r_3(x)=0$		

从而 $d(x)=(f(x),g(x))=x-1$

$$
\begin{aligned}
r_2(x)&=g(x)-r_1(x)q_2(x)\\
&=g(x)-[f(x)-q_1(x)g(x)]q_2(x)\\
&=f(x)(-q_2(x))+g(x)(1+q_1(x)q_2(x))
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ $u(x)=q_2(x)=x+1$. $v(x)=-x^2$.

定义. 设 $f_1(x)\cdots\cdots f_m(x)\in K[x]$. $(m\geqslant 2)$

若 $d(x)|f_i(x)$ $\forall i$. 则 $d(x)$ 为 $f_1\cdots\cdots f_m$ 公因式. 最大公因式同理.

记 $d(x)=(f_1(x),f_2(x)\cdots\cdots f_s(x))$.

命题：设 $f_1(x)\cdots\cdots f_m(x)\in K[x]$ 则 $\underbrace{(f_1(x)\cdots\cdots f_m(x))}_{d(x)}=(\underbrace{(f_1(x),f_2(x))}_{d_{12}(x)}f_3(x)\cdots\cdots f_m(x))$.

证明：证 $d(x)=(d_{12}(x),f_3(x)\cdots f_m(x))$.

一方面 $d(x)|f_i(x)$.$(\forall i)$. $d(x)|d_{12}(x)$. $d(x)|f_i(x)$ $(\forall i\geqslant 3)$.

另一方面 $\forall$ $d_{12}(x)\cdots\cdots f_m(x)$ 公因式 $h(x)$. 证 $h(x)|d(x)$

$h(x)|d_{12}(x)$. $h(x)|f_i(x)$. $\forall i$ 且由 $d(x)$ 最大, 则 $h(x)|d(x)$.

定义4. 若 $(f(x),g(x))=1$，则称 $f(x),g(x)$ 互素.

定理5. 设 $f(x),g(x)\in K[x]$. $(f(x),g(x))=1 \Leftrightarrow \exists\, u(x),v(x)$. $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$.

证明：必要性显然

充分. 设 $d(x)=(f(x),g(x))$

$\Rightarrow d(x)\mid f(x)u(x)+g(x)v(x)=1 \Rightarrow d(x)=C$ 且 $C\neq 0$. 而且 $d(x)=1$.

推论6. 设 $f_1(x)\mid g(x)$, $f_2(x)\mid g(x)$, 且 $(f_1(x),f_2(x))=1 \Rightarrow f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$.

证明：$\exists\, u(x),v(x) \Rightarrow f_1(x)u(x)+f_2(x)v(x)=1$.

$f_1(x)u(x)g(x)+f_2(x)v(x)g(x)=g(x)$.

$\cancel{f_1(x)u(x)g(x)}$ $\quad f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$

推论7. $f(x)\mid g(x)h(x)$. 且 $(f(x),g(x))=1$. 则 $f(x)\mid h(x)$

证：$\exists\, u(x),v(x)$ $\quad f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$

$f(x)u(x)h(x)+g(x)v(x)h(x)=h(x) \Rightarrow f(x)\mid h(x)$

推论8. $(f_1(x),g(x))=1$, $(f_2(x),g(x))=1$, $(f_1(x)f_2(x),g(x))=1$.

证明：$f_1(x)u_1(x)+g(x)v_1(x)=1$

$f_2(x)u_2(x)+g(x)v_2(x)=1$

$\Rightarrow 1=f_1(x)f_2(x)u_1(x)u_2(x)+g(x)[f_2v_1u_2+f_1u_1v_2+gv_1v_2]$.

推论9. $d(x)=(f(x),g(x))$ $\quad f(x)=f_1(x)d(x)$. $g(x)=g_1(x)d(x)$. 则 $(f_1(x),g_1(x))=1$.

证 $\exists\, u(x),v(x)$. $f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$.

$\Longrightarrow \quad f_1(x)u(x)+g_1(x)v(x)=1$.

推论10. 设 $d(x)=(f(x),g(x))$, $t(x)\in K[x]$. 则 $(f(x)t(x),g(x)t(x))=d(x)t(x)$.

证. $d(x)t(x)\mid f(x)t(x)$. $\quad d(x)t(x)\mid g(x)t(x)$.

$\exists\, u(x),v(x)$. $f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$

$f(x)t(x)u(x)+g(x)t(x)v(x)=d(x)t(x)$.

又取 $h(x)$ 为 $f(x)t(x)$ 与 $g(x)t(x)$ 公因式. $h(x)\mid d(x)t(x)$. 则最大公因式得证.

定理11. $f(x)\neq 0$. $g(x)\neq 0$. 则 $f(x)g(x)\sim (f(x),g(x))[f(x),g(x)]$.

证：设 $d(x)=(f(x),g(x))$ $f(x)=f_1(x)d(x)$ $g(x)=g_1(x)d(x)$.

且 $(f_1(x),g_1(x))=1$.

$$\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}=f_1(x)d(x)g_1(x).$$

断言：$f_1(x)d(x)g_1(x)$ 也 $f(x),g(x)$ 最小公倍式.

$f(x)=f_1d\mid f_1dg_1$. $g(x)=g_1d\mid f_1dg_1$ 公倍式得证.

$\forall f(x),g(x)$ 公倍式 $l(x)$. 证. $f_1(x)d\,g_1(x)\mid l(x)$.

$l(x)=f(x)u(x)=g(x)v(x)$.

$=f_1(x)d(x)u(x)=g_1(x)d(x)v(x)$.

$f_1(x)u(x)=g_1(x)v(x)$. 且 $g_1(x)\mid f_1(x)u(x)$. 且 $(g_1(x),f_1(x))=1\Rightarrow g_1(x)\mid u(x)$.

设 $u(x)=g_1(x)p(x)$.

$l(x)=f_1(x)d(x)g_1(x)p(x)$.

中国剩余定理（孙子定理）.

设 $g_1(x)\cdots\cdots g_m(x)$ 两两互素.

$r_1(x)\cdots\cdot r_m(x)\in K[x]$. 则 $\exists f(x)\in K[x]$. 使 $f(x)=g_i(x)q_i(x)+r_i(x)$. $\forall 1\le i\le m$.

构造 $f_i(x)$. $1\le i\le m$. st. $f_i(x)=g_i(x)q_i(x)+1$. 且 $g_j(x)\mid f_i(x)$ $(i\neq j)$.

$f(x)=r_1(x)f_1(x)+\cdots\cdots r_m(x)f_m(x)$.

下面构造 $f_1(x)$ $f_1(x)\equiv 1$. $\mathrm{mod}\, g_1(x)$. $f_1(x)\equiv 0$ $\mathrm{mod}\, g_j(x)$. $(j>1)$.

$(g_1(x),g_j(x))=1$ $\forall j>1$. $\exists u_j,v_j$. $g_1(x)u_j(x)+g_j(x)v_j(x)=1$. $(2\le j\le m)$.

$f_1(x)=g_2(x)u_2(x)\cdots\cdot g_m(x)u_m(x)=[1-g_1u_2]\cdots\cdots[1-g_1u_m]\equiv 1\ \mathrm{mod}\, g_1(x)$

$0\ \mathrm{mod}\, g_j(x)$

因式分解:

例: $120 = 2\times 3\times 5$

P为素数 $\Longleftrightarrow$ 因子仅有$\pm 1, \pm P$.

定义: $f(x)\in K[x]$. $\deg f(x)\geq 1$. 若$\exists\, g(x), h(x)\in K[x]$, $\deg g(x) < \deg f(x)$, $\deg h(x) < \deg f(x)$

使 $f(x)=g(x)h(x)$, 则称 $f(x)$为 K上可约多项式

反之称为不可约多项式。

注: (1) 等价定义: $\deg f(x)\geq 1$

$f(x)$可约 $\Longleftrightarrow \exists\, g(x), h(x)\in K[x]$. $\deg g(x)>0$. $\deg h(x)>0$. $f(x)=g(x)h(x)$.

$f(x)$不可约 $\Longleftrightarrow$ $f(x)$因式只有 $c\neq 0$ 和 $cf(x)$.

(2) 多项式可约不可约依赖于数域.

例 $f(x) = x^2-2\in Q[x]$ 在Q上不可约.

$f(x) = x^2-2\in R[x]$ 在R上可约.

例: 一次多项式在任何域不可约.

引理2. 设 $p(x)\in K[x]$. 不可约. $f(x)\in K[x]$

则或者 $(p(x), f(x))=1$ 或 $p(x)\mid f(x)$.

设 $d(x)=(p(x), f(x))$ $\quad d(x)\mid p(x)$. $\Rightarrow d(x)=1$. 或 $d(x)=p(x)$者一

$d(x)=1 \Rightarrow (p(x), f(x))=1$.

$d(x)=cp(x) \Rightarrow p(x)\mid f(x)$.

定理3. $p(x)\in K[x]$不可约. $f(x), g(x)\in K[x]$. 且 $p(x)\mid f(x)g(x)$ 则 $p(x)\mid f(x)$或 $p(x)\mid g(x)$.

证: ① $p(x)\mid f(x)$,

② $p(x)\nmid f(x)$. 引理2 $\Rightarrow (p(x), f(x))=1 \Rightarrow p(x)\mid g(x)$

推论4. $p(x)$不可约. $p(x)\mid f_1(x)\cdots f_m(x)$. 则 $\exists\, 1\leq i\leq m$. 使 $p(x)\mid f_i(x)$.

证明：对 m 归纳 $m=2$ ✓

$p(x) \mid (f_1(x) \cdots f_{m-1}(x)) f_m(x)$

$p(x) \mid f_m(x)$ ✓ 或 $p(x) \mid f_1(x) \cdots f_{m-1}(x)$ ✓

定理5（因式分解）设 $f(x) \in K[x]$，$\deg f(x) \geq 1$

(1) $f(x)$ 可分为不可约多项式乘积

(2) 设 $f(x) = p_1 \cdots p_s = q_1 \cdots q_t$ 二个分解且 p_i, q_j 不可约.

$s = t$ 且调换次序后 $p_i \sim q_i$.

证明：存在性. 对 n 归纳，$n=1$ ✓

设 $\deg < n$ 成立，证 $\deg f(x) = n$.

若 $f(x)$ 不可约，则成立.

下设 $f(x)$ 可约，即 $f(x) = g(x)h(x)$，$g(x)h(x) \in K[x]$，且 $\deg(g(x))$ $\deg(h(x)) < n$.

$g(x) = p_1 \cdots p_s$ $h(x) = q_1 \cdots q_t$.

$f(x) = p_1 \cdots p_s q_1 \cdots q_t$. 存在性得证

(2). 对不可约因式数 s 归纳.

当 $s=1$. $f(x) = p_1(x) = q_1(x) \cdots q_r(x)$.

若 $r \geq 2$，则 $p_1(x) = q_1(x) \cdots q_r(x)$. $p_1(x)$ 可约. 从而 $r=1$. 于是 $p_1(x) = q_1(x)$.

当 $s > 1$. 已设小于 s 成立. 证等于 s.

$f(x) = p_1(x) \cdots p_s(x) = q_1(x) \cdots q_t(x)$

$p_1(x) \mid q_1(x) \cdots q_t(x)$. 从而 $\exists 1 \leq i \leq t$. $p_1(x) \mid q_i(x)$. 不妨设 $i=1$. $p_1(x) \mid q_1(x)$.

$q_1(x) = p_1(x)h(x)$，而 $q_1(x)$ 不可约，则 $h(x) = c \neq 0$. $\Rightarrow$ $p_2(x) \cdots p_s(x) = c\, q_2(x) \cdots q_t(x)$.

$s-1 = t-1 \Rightarrow s = t$.

并且调序后 $p_i(x) \sim q_i(x)$ $(2 \leq i \leq s)$. 且 $p_1(x) \sim q_1(x)$.

多项式标准因式分解. $f(x)\in K[x]$. $\deg f(x)\geq 1$

$f(x)=cP_1(x)^{e_1}\cdots\cdots P_m(x)^{e_m}$.

$c\neq 0$. $P_i(x)$ 为互异首一不可约多项式. $e_i\geq 1$. $1\leq i\leq m$.

(1) 对首一不可约多项式 互异 $\Leftrightarrow$ 互素.

设 $P_i(x)\neq P_j(x)$. 反证. 设 $P_i(x)$ 与 $P_j(x)$ 不互素.

$P_i(x)\mid P_j(x)$. 即. $P_j(x)=P_i(x)h(x)$. $\Rightarrow \deg h(x)=0$. $\Rightarrow h(x)=c\neq 0$.

$P_j(x)=cP_i(x)$. 由首一 $\therefore P_i=P_j$. 矛盾.

推论7. 公共因式分解. 设 $f(x),g(x)\in K[x]$, 则添加不可约分解0次.

$f(x)=c_1P_1(x)^{e_1}P_2(x)^{e_2}\cdots\cdots P_n(x)^{e_n}$.

$g(x)=c_2P_1(x)^{f_1}P_2(x)^{f_2}\cdots\cdots P_n(x)^{f_n}$.

(1). $f(x)\mid g(x)\Leftrightarrow e_i\leq f_i$. $\forall 1\leq i\leq n$

(2). $k_i=\min\{e_i,f_i\}$. $l_i=\max\{e_i,f_i\}$.

$(f(x),g(x))=P_1(x)^{k_1}P_2(x)^{k_2}\cdots\cdots P_n(x)^{k_n}$.

$[f(x),g(x)]=P_1(x)^{l_1}\cdots\cdots P_n(x)^{l_n}$.

(3). $f(x)g(x)\sim(f(x),g(x))[f(x),g(x)]$.

证明 (1) $\Leftarrow$ 显然

设 $f(x)\mid g(x)$. 设 $e_1>f_1$.

$P_1(x)^{e_1}\cdots\cdots P_n(x)^{e_n}\mid P_1(x)^{f_1}\cdots\cdots P_n(x)^{f_n}$.

$P_1(x)\mid P_1(x)^{e_1-f_1}\mid P_2(x)^{f_2}\cdots\cdots P_n(x)^{f_n}$.

$\exists\ 2\leq i\leq m$. $P_1(x)\mid P_i(x)$. 但 $(P_1(x),P_i(x))=1$. $\Rightarrow e_1\leq f_1$.

定义8. $f(x)=cP_1(x)^{e_1}\cdots P_m(x)^{e_m}$ 标准.

若 $e_i>1$. $P_i(x)$ 为 $f(x)$ 重因式. 若 $e_i=1$. $P_i(x)$ 为 $f(x)$ 单因式.

定义9. $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_0\in K[x]$.

下列多项式称为 $f(x)$ 形式导数.

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1.$$

性质: (1) $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$

(2) $(cf(x))'=cf'(x)$

(3). 莱布尼兹.

(4) $[f(x)^m]'=mf(x)^{m-1}f'(x)$

(5). $\deg f(x)\geq 1$. 则 $\deg f'(x)=\deg f(x)-1$

从而 $f(x)\nmid f'(x)$.

命题10. $f(x)\in K[x]$, $\deg f(x)\geq 1$. $d(x)=(f(x),f'(x))$.

则 $d(x)$ 无重因式且与 $f(x)$ 有相同不可约因子.

$f(x)=cP_1(x)^{e_1}\cdots P_m(x)^{e_m}$. 其中 $c\neq 0$. $P_i(x)$ 互异首一不可约. $e_i\geq 1$. $1\leq i\leq m$.

$f'(x)=$

$P_1(x)^{e_1-1}P_2(x)^{e_2-1}\cdots\cdots P_m(x)^{e_m-1}$ 为 $f(x)$, $f'(x)$ 公因式 且最大.

设 $d(x)=(f(x),f'(x)).=P_1(x)^{k_1}\cdots P_m(x)^{k_m}$.

$e_i-1\leq k_i\leq e_i$. $\forall 1\leq i\leq m$.

断言. $k_i=e_i-1$. 设. $k_1=e_1$ (反). 即 $P_1(x)^{e_1}\mid f'(x)$.

$\Rightarrow P_1(x)^{e_1}\mid P_1(x)^{e_1-1}\cdots P_m(x)^{e_m}P_1'(x)$.

$P_1(x)\mid P_2(x)^{e_2}\cdots\cdots P_1'(x)$. $\Rightarrow P_1(x)\mid P_1'(x)$ 矛盾 $\Rightarrow k_i=e_i-1$.

$d(x)=P_1(x)^{e_1-1}\cdots P_m(x)^{e_m-1}$.

$\Rightarrow \dfrac{f(x)}{d(x)}=cP_1(x)P_2(x)\cdots\cdots P_m(x)$ 与 $f(x)$ 有相同不可约因式

定理11. $f(x)\in K[x]$. $\deg f(x)\geq 1$

$f(x)$ 无重因式 $\Longleftrightarrow (f(x), f'(x))=1$.

证：$\Rightarrow$ $f(x)=cP_1(x)^{e_1}P_2(x)^{e_2}\cdots P_m(x)^{e_m}$.

$\Rightarrow (f(x), f'(x)) = P_1(x)^{e_1-1}\cdots P_m(x)^{e_m-1}=1$.

$f(x)=a_nx^n+\cdots a_1x+a_0\in K[x]$.

$\Rightarrow$ 函数、$f\ K\to K$.

$b\to f(b)=a_nb^n+\cdots a_0$.

定义1. 设 $f(x)\neq 0\in K[x]$. $b\in K$. $f(b)=0$. 则称 b 为 $f(x)$ 根或零点

定理2.(余数定理). 设 $f(x)\in K[x]$. $b\in K$. 则 $\exists\, q(x)\in K[x]$. 则 $f(x)=(x-b)q(x)+f(b)$.

$f(b)=0\Longleftrightarrow (x-b)\mid f(x)$.

$f(x)=(x-b)q(x)+r(x)$, $\deg r(x)<1$. 且 $f(b)=r(x)$.

定义3. $f(x)\in K[x]$. $b\in K$. 若 $\exists\, k\in Z^+$ 使 $(x-b)^k\mid f(x)$. 但 $(x-b)^{k+1}\nmid f(x)$

则 $(x-b)$ 为 f 的 k 重根. $k=1$ 为单根.

引理4. $f(x)$ 为 K 上不可约多项式且 $\deg f(x)\geq 2$. 则 $f(x)$ 在 K 无根

证明：$b\in K$ 为 $f(x)$ 根. 从而 $(x-b)\mid f(x)$. 即 $\overset{\geq 2}{f(x)}=\overset{1}{(x-b)}\overset{\geq 1}{q(x)}$ 可约.

定理5. 设 $f(x)\neq 0\in K[x]$. $\deg f(x)=n$. 则 $f(x)$ 在 K 上至多 n 个根(重根按重数)

证明：$f(x)=cP_1(x)^{e_1}P_2(x)^{e_2}\cdots P_m(x)^{e_m}$.

$=c(x-b_1)^{n_1}\cdots(x-b_r)^{n_r}P_1(x)^{e_1}\cdots P_s(x)^{e_s}$. 其中 $c\neq 0$. $b_1\cdots b_r$ 互不同

$P_i(x)$ 互异首一. $\deg(P_i(x))\geq 2$

$\Rightarrow f(x)$ 根 $b_1\cdots b_r$. $n=\deg f(x)=n_1+\cdots n_s+e_1\deg P_1(x)+\cdots e_s\deg P_s(x)$.

$f(x)$ 在 K 中根个数 $n_1+n_2+\cdots n_r\leq n$.

推论6. $f(x), g(x)\in K[x]$. $\deg f(x)\leq n$. $\deg g(x)\leq n$. $\exists\, n+1$ 个 $b_1\cdots b_{n+1}$. 使 $f(b_i)=g(b_i)$

则 $f(x)=g(x)$.

证明：设 $h(x)=f(x)-g(x)\neq 0$. $\deg h(x)\leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}\leq n$.

则 $h(x)$ 在 K 中至多 n 根. 而有 $n+1$ 个根. $h(x)=0$. 矛盾 $\Rightarrow f(x)=g(x)$.

数域K上不可约多项式？

$$C \supseteq R \supseteq Q$$

定理1.(代数基本定理).任意次数大于等于1复系数多项式至少有一复根.

证明: 设 $f(z) = a_n z^n + \cdots a_0 \in C[z]$ $a_n \neq 0$. $n \geq 1$.

Step 1. 存在 $z_0 \in C$. 使 $|f(z)| \geq |f(z_0)|$ $\forall z \in C$

设 $z = x + yi$. 其中 x, y 为实变元.

$f(z) = f(x+yi) = P(x,y) + Q(x,y)i$. $|f(z)| = \sqrt{P^2+Q^2}$ 为二元连续函数.

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

$$\begin{aligned}|f(z)| = |a_n z^n + \cdots + a_0| &\geq |a_n||z|^n - |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots a_1 + a_0| \\ &\geq |a_n||z|^n - (|a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots |a_0|) \\ &= z^n\left(|a_n| - \left(\frac{|a_{n-1}|}{|z|} + \cdots \frac{a_0}{|z^n|}\right)\right) \geq \frac{1}{2}|a_n||z^n| \to \infty \quad |z| \to \infty\end{aligned}$$

$\forall z_1 \in C$. $|f(z_1)|$. $\exists R$. $|z| > R$. $|f(z)| > |f(z_1)|$.

$|f(z)|$ 在D上取min.不妨设.

推论2. $n \geq 1$. 等价:

(1) 任意 n 次复多项式至少有一复根.

(2) 复系数不可约必1次.

(3) 复系数多项式为一次多项式乘积.

(4) n 次复 $\Rightarrow$ n 复根.

(1) $\Rightarrow$ (2). 设 b 为根.

则 $(x-b) \mid p(x)$ $p(x) = (x-b)q(x) \Rightarrow q(x) = c$.

$\therefore p(x) = c(x-b)$.为一次.

(2) $\Rightarrow$ (3). 因式分解.

(3) $\Rightarrow$ (4). $f(x) = c(x-b_1)\cdots\cdots(x-b_n)$.恰 n 复根.

(4) $\Rightarrow$ (1). ✓

定理3(韦达).

设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots a_{n-1}x+a_n\in K[x]$.

且 $f(x)$ n个复根 $x_1\cdots x_n$

$$\begin{cases} x_1+\cdots x_n=-\dfrac{a_1}{a_0} \\ \sum\limits_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n} x_{i_1}\cdots x_{i_r}=(-1)^r\dfrac{a_r}{a_0} \\ \vdots \\ x_1\cdots x_n=\dfrac{a_n}{a_0}(-1)^n \end{cases}$$

deg=3. Cardan.公式. deg≥5. Galois.

deg=4. F解法.

$Q\subseteq R\subseteq C$

不可约多项式.

C: $ax+b.(a\neq0)$.

R: ? $ax+b$ ax^2+bx+c.

Q: ? 任次数.

引理1. $f(x)=a_nx^n+\cdots a_0\in R[x]$.

$z=a+bi$ 为 $f(x)$ 一个复根 $\bar{z}$ 也为 $f(x)$ 一根.

$f(\bar{z})=\overline{a_n}\bar{z}^n+\cdots\overline{a_1}\bar{z}+\overline{a_0}.=\overline{a_nz^n+\cdots a_0}=\overline{f(z)}=0.$

定理2. 实数域不可约多项式为一次或判别式<0二次

证明: 任R上不可约多式 $f(x)$

(1) $\deg f(x)=1$.

(2) $\deg f(x)=2$. $f(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq0)$. $f(x)$ 可约 $\Leftrightarrow\Delta\geq0\Leftrightarrow$ 有实根.

(3) $\deg f(x)\geq3$.

1°. $f(x)$ 有1实 $x_0\in R$. $(x-x_0)\mid f(x)$. 即 $f(x)=(x-x_0)g(x)$. $\deg(g(x))\geq2$. $f(x)$ 可约.

2°. $f(x)$ 有一复根 $a+bi$. 则又有 $a-bi$. $[x-(a+bi)][x-(a-bi)]\mid f(x)$.

$\Rightarrow (x-a)^2+b^2 \mid_{R} f(x)$. 即 $f(x)=[(x-a)^2+b^2]g(x) \Rightarrow f(x)$可约

另证：带余除法：

$f(x)=[(x-a)^2+b^2]q(x)+r(x)$. $\deg r(x)<2$

代入 $a+bi \Rightarrow r(a+bi)=0. \Rightarrow r(x)=0$

推论3. 实系数多项式为一次多项式与二次多项式($\Delta<0$)乘积.

定理4. 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots\cdots a_0$为整系数多项式 $a_n\neq 0$. p与q为互素整.

若 $\frac{p}{q}$为 $f(x)$ 根. 则 $p\mid a_0$. 且 $q\mid a_n$.

证明： $0=f(\frac{p}{q})=a_n(\frac{p}{q})^n+\cdots\cdots\ a_0$.

$0=a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\cdots\cdots\ a_0q^n$.

$\Rightarrow p\mid a_0q^n$. 但$(p,q)=1 \Rightarrow p\mid a_0$. $q\mid a_n$同理.

例：证明：$f(x)=x^4-12x^3+36x+12$ 无有理根.

证明：反设 $\frac{p}{q}$为$f(x)$根. $p\mid 12$. $q\mid 1$. 从 $\frac{p}{q}=\pm1\ \pm2\ \pm3\ \pm4\ \pm6\ \pm12$.

注：设 $f(x)\in Q[x]$. $\deg f(x)\geqslant 2$.

则 $f(x)$有有理根 $\Rightarrow f(x)$在Q可约.

"$\Rightarrow$" $x_0\in Q$. $(x-x_0)\mid f(x)$. $\overset{\geq 2}{f(x)}=\overset{1}{(x-x_0)}\overset{\geq 1}{g(x)}$ 可约.

"$\not\Leftarrow$" $f(x)=(x^2-2)(x^2-3)$. 无有理根.

设：$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots a_0\in Q[x]$.

通分：$f(x)=\frac{1}{N}\underset{整}{(Nf(x))}$ 有理性与整数性.

本原化：把系数最大公因数提出.

定义5：(本原多项式) $f(x)=a_nx^n+\cdots\cdots a_0$为整系数多项式

若$(a_n\ a_{n-1}\cdots\cdots a_0)=1$ 则 $f(x)$为本原多项式.

例：首一整系数多项式

引理6. Gauss引理，本原多项式之积仍本原

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots a_0$

$g(x)=b_mx^m+\cdots\cdots b_1x+b_0$

$f(x)g(x).=C_{n+m}x^{n+m}+C_{n+m-1}x^{n+m-1}+\cdots C_1x+C_0.$

$$C_k=\sum_{i+j=k}a_ib_j.$$

用反证，$f(x)g(x)$不本原. $C_{n+m}.\ C_{n+m-1}\cdots C_1\ C_0$ 公因数为p.

$p|C_k.\ \forall 0\le k\le n+m.$

$f(x)$本原 $\Leftrightarrow \exists\, 0\le i\le n.\ p|a_0\cdots p|a_{i-1}\ p\nmid a_i.$

$g(x)$本原 $\Rightarrow \exists\, 0\le j\le m.\ p|b_0\cdots p|b_{j-1}\ p\nmid b_j.$

$C_{i+j}=\cdots\cdots+a_{i-2}b_{j+2}+a_{i-1}b_{j+1}+a_ib_j+\cdots\cdots$ $p\nmid C_{i+j}$ 矛盾.

则 $f(x)g(x)$本原.

定理7. $f(x)$为整系数多项式.
则 $f(x)$在$\mathbb{Q}$上可约 $\Leftrightarrow$ $f(x)$在$\mathbb{Z}$上可约.

即 $f(x)=g(x)h(x).\ g(x),h(x)\in\mathbb{Z}[x]$.且 $\deg g(x)\geq 1.\ \deg h(x)\geq 1.$

证明：充分性. $f(x)=g(x)h(x).\ g(x),h(x)\in\mathbb{Z}[x]$.且次数$\geq 1$.

将$g(x).h(x)$看为$\mathbb{Q}[x]$上. 则$f(x)$在$\mathbb{Q}[x]$可约.

必要性：$f(x)$在$\mathbb{Q}$上可约.即 $f(x)=g(x)h(x)$.且 $g(x),h(x)\in\mathbb{Q}[x]$. 次数$\geq 1$

设$g(x)=ag_1(x)$. $g_1(x)$本原. 同理 $h(x)=bh_1(x)$. ~~$f(x)=cf_1(x)$~~

$f(x)=abg_1(x)h_1(x)$. ~~而$f(x)=g_1(x)h_1(x)$上~~

断言 $ab\in\mathbb{Z}$.

设 $ab.=\frac{p}{q}.(p,q)=1$.且 $q>1$. $f(x)=\frac{p}{q}\underbrace{g_1(x)h_1(x)}_{\text{本原}}\notin\mathbb{Z}[x]$ 矛盾 $\Rightarrow ab\in\mathbb{Z}$.

$f(x)=[abg_1(x)]h_1(x)$. $f(x)$在$\mathbb{Z}[x]$上可约.

$f(x)$ 整系数, 且 f 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约 $\Longleftrightarrow$ f 在 $\mathbb{Z}$ 上不可约.

定理: (Eisenstein)

设 $f(x)=a_nx^n+\cdots a_0$ 整系数, p 满足. $p|a_i$. $(0\le i\le n-1)$ $p\nmid a_n$. $p^2\nmid a_0$.

则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证明: 证 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}$ 上不可约.

用反证法: $f(x)=g(x)h(x)$. $\left.\begin{array}{l} g(x)=b_mx^m+\cdots b_1x+b_0. \\ h(x)=c_tx^t\cdots\cdots c_1x+c_0. \end{array}\right\}$ 整.

且 $m+t=n$. $m\geq 1$ $t\geq 1$.

$a_n=b_mc_t$. $a_0=b_0c_0$.

$p\nmid a_n\Rightarrow p\nmid b_m$ 且 $p\nmid c_t$. $p|a_0\Rightarrow p|b_0$ 或 $p|c_0$. 则. $p^2\nmid a_0\Rightarrow$ 仅一个成立.

设 $p|b_0$ 但 $p\nmid c_0$.

$\Rightarrow\exists\, 0\le j\le m$. $p|b_0\cdots\cdots p\nmid b_j$.

$a_j=b_0c_j+b_1c_{j-1}+\cdots b_jc_0$. $p|a_j$ 但 $p\nmid b_j$. $p\nmid c_0$. 矛盾.

综上 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}$ 上不可约.

例1. $f(x)=x^n-2\,(n\geq 1)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

取 $p=2$. $p\nmid a_n$ $p|a_0$. $p^2\nmid a_0$.

例2. $f(x)=x^{p-1}+\cdots+x+1$. p 素. 在 $\mathbb{Q}$ 不可约.

令 $x=y+1$. $f(x)=\dfrac{x^p-1}{x-1}=\dfrac{(y+1)^p-1}{y}=y^{p-1}+C_p^1y^{p-2}+\cdots C_p^{p-1}$

$p\nmid a_n$. $p|a_i$. $p^2\nmid a_0$. 不可约. $g(y)$ 在 $\mathbb{Q}$ 不可约 $\Rightarrow f(x)$ 不可约.

例3. $f(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots\dfrac{x^p}{p!}$ p 素. (在 $\mathbb{Q}$ 不可约).

证 $p!f(x)=x^p+px^{p-1}+\cdots\cdots p!$. $p\nmid a_n$ $p|a_i$. $p^2\nmid a_0$.

定理9. (Osada)

$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots a_0$ 整.

且 $|a_0|>1+\sum_{i=1}^{n-1}|a_i|$ $|a_0|$为素. $f(x)$在$\mathbb{Q}$不可约.