整数分拆

2021 年 11 月 16 日

高斯多项式

定义

Gauss 多项式 定义为

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{cases} \dfrac{(q;q)_N}{(q;q)_M (q;q)_{N-M}} & 0 \leq M \leq N, \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

注意到

$$\lim_{q\to 1}\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \frac{N!}{M!(N-M)!} = \binom{N}{M}, \tag{1}$$

故$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}$也称为$q$-二项式系数。

当$N=6$和$M=3$,

$$\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}=1+q+2q^2+3q^3+3q^4+3q^5+3q^6+2q^7+q^8+q^9.$$

定理3

M, N 是正整数, 且 $M \leq N$. Gauss 多项式 $\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}$ 是关于 q 的次数为 $M(N-M)$ 的对称整系数多项式.

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = a_0 + a_1 q + \cdots + a_d q^d,$$

其中$d = M(N-M)$, $a_d \neq 0$, a_i是非负整数且$a_i = a_{d-i}$.

定理

$$\begin{bmatrix} N \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ N \end{bmatrix} = 1; \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ N-M \end{bmatrix}; \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N-1 \\ M \end{bmatrix} + q^{N-M} \begin{bmatrix} N-1 \\ M-1 \end{bmatrix}; \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N-1 \\ M-1 \end{bmatrix} + q^{M} \begin{bmatrix} N-1 \\ M \end{bmatrix}; \tag{5}$$

定理3

M, N 是正整数, 且 $M \le N$. Gauss 多项式 $\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}$ 是关于 q 的次数为 $M(N-M)$ 的对称整系数多项式.

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = a_0 + a_1 q + \cdots + a_d q^d,$$

其中$d = M(N-M)$, $a_d \neq 0$, a_i是非负整数且$a_i = a_{d-i}$.

注：可由(4)或者(5)的递推关系式，运用归纳法证明。

对称性：只需要证明下面这个关系:

$$q^d \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}_{q^{-1}} = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}.$$

组合解释

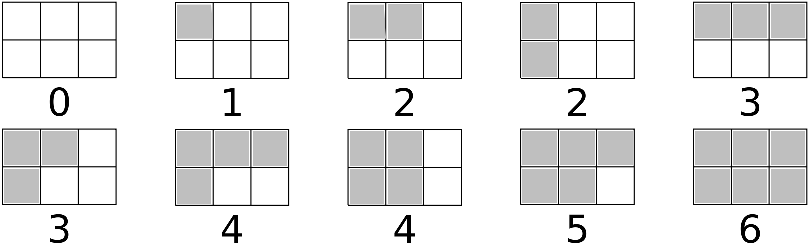
定理

设$p_{\leq M}^{\leq N-M}(n)$ 计数了n的, 最大部分小于等于$N-M$, 部分数不超过M 的分拆的个数, 则

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} p_{\leq M}^{\leq N-M}(n)q^n = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}.$$

Example

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 + q + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6.$$



$$p_{\leq M}^{\leq N-M}(n) = p_{\leq M}^{\leq N-M}(M(N-M)-n).$$

例如,

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

例如,

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = 1+q+2q^2+3q^3+3q^4+3q^5+3q^6+2q^7+q^8+q^9.$$

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + q^m \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}, \tag{6}$$

设

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = a_0(m, n-m) + a_1(m, n-m)q + \cdots + a_d(m, n-m)q^d,$$

可知,

$$a_i(m, n-m) = a_i(m-1, n-m) + a_{i-m}(m, n-m-1).$$

另一方面, 设$p_{\leq M}^{\leq N-M}(n)$ 计数了n的, 最大部分小于等于$N-M$, 部分数不超过M 的分拆的个数,, 则$p_{\leq M}^{\leq N-M}(n)$ 满足相同的递推关系式, 且$p_{\leq M}^{\leq N-M}(0) = a_0(m, n-m) = 1$.

定理

$$(-zq;q)_N = \sum_{j=0}^{N} \begin{bmatrix} N \\ j \end{bmatrix} z^j q^{j(j+1)/2}; \tag{7}$$

$$\frac{1}{(zq;q)_N} = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} N+j-1 \\ j \end{bmatrix} z^j q^j; \tag{8}$$

习题

$$\begin{bmatrix} n+m+1 \\ m+1 \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{n} q^j \begin{bmatrix} m+j \\ m \end{bmatrix} \tag{9}$$