21世纪保险精算系列教材

Actuarial Science

21世纪保险精算系列教材
中国人民大学风险管理与精算中心主编

Fundamentals of Actuarial Science

精算学基础

孟生旺　张连增　刘乐平　编著

中国人民大学出版社

Actuarial Science

21世纪保险精算系列教材

中国人民大学风险管理与精算中心主编

Fundamentals of Actuarial Science

精算学基础

孟生旺　张连增　刘乐平　编著

中国人民大学出版社

· 北京 ·

图书在版编目（CIP）数据

精算学基础/孟生旺等编著. —北京：中国人民大学出版社，2016.1
21 世纪保险精算系列教材
ISBN 978-7-300-22289-9

Ⅰ.①精… Ⅱ.①孟… Ⅲ.①保险-计算方法-教材 Ⅳ.①F840.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 316600 号

21 世纪保险精算系列教材
中国人民大学风险管理与精算中心主编
精算学基础
孟生旺　张连增　刘乐平　编著
Jingsuanxue Jichu

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京鑫丰华彩印有限公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本	版　　次	2016 年 1 月第 1 版
印　　张	11.75 插页 1	印　　次	2016 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	243 000	定　　价	28.00 元

总　序

自1775年英国公平人寿最早将运用数学工具为产品定价的专门人员命名为精算师以来，精算师职业在国际上已有200多年的发展历史。这一职业最早在人寿和养老金业务中发挥作用，之后逐步向非寿险、社会保障等领域扩展。20世纪以后，精算师的职业进一步延伸到银行、投资、公司财务、金融工程等领域。精算师职业领域的扩展与精算职业组织的发展和精算教育水平的提高密切相关。1848年后欧美一些国家陆续成立的精算师协会以及国际精算师协会，为提高全球精算教育标准做出了贡献。例如，国际精算师协会早在1998年就公布了初级精算教育标准，要求2005年后加入国际精算师协会的成员在精算教育标准上符合国际教育标准。2007年，国际精算师协会再次公布了重新修订的初级精算教育标准及教育大纲。国际上著名的精算师职业组织，包括北美寿险精算师协会、北美非寿险精算师协会、英国精算师协会等，也从2000年后陆续对其精算教育标准和精算师考试体系进行改革，强调精算学与统计学、金融学、投资学、会计学、经济学等学科的融合，强调精算学科培养复合型风险管理人才的目标。

我国精算教育和精算师职业发展起步较晚，1992年后才陆续引入北美寿险精算师考试、英国精算师考试、日本精算师考试、北美非寿险精算师考试等，2000年后，中国精算师考试体系逐步建立起来。目前，中国精算师考试的考点已增加到15个。2006年12月，民政部批准中国精算师协会正式筹备成立。中国精算师协会的成立，必将进一步推动中国精算教育和精算师职业的发展，也迫切要求对当前的精算教育体系和精算师考试体系进行必要的改革，以尽快向国际精算师协会发布的精算教育标准看齐。

中国人民大学统计学院是国内较早开展风险管理与精算教育的大学学院之一。1992年就开始招收风险管理与精算专业方向的硕士研究生，1993年开始招收该方向的本科生，1996年招收了该专业方向的第一批博士研究生。2004年，经教育部批准备案，统计学院设立了独立的风险管理与精算学硕士学位点和博士

学位点，标志着在风险管理与精算人才培养上，形成了学士、硕士、博士多层次、专业化的人才培养教育体系。其专业课程设置完全与国际接轨，涵盖了北美、英国和中国精算师初级课程考试的基本内容，教学大纲紧跟国际精算师协会公布的精算教育指南，同时根据学科发展的国际趋势，每年重新修订课程和教学大纲。在研究方面，设立了中国人民大学风险管理与精算中心。多年来，在寿险风险管理与精算、非寿险特别是汽车保险风险管理与精算、养老金、社会保障等领域取得了很多有影响的成果，进一步促进了风险管理与精算教育的发展。为适应我国精算教育改革与发展的需要，并与国际精算师协会的精算教育标准接轨，中国人民大学风险管理与精算中心精心组织编写了一套精算学系列教材，分两个阶段完成。第一阶段涵盖精算师考试初级课程的全部专业课内容，包括《金融数学》、《风险理论》、《寿险精算学》、《非寿险精算学》、《精算中常用的统计模型》5 本教材和配套的学习辅导书，共 10 本。第二阶段涵盖精算师考试高级课程的全部内容，分寿险、非寿险、养老金、健康保险、社会保障、投资等不同系列。这套教材一方面可以满足各高校精算专业的教学需求，另一方面也可以作为参加各类精算师资格考试学员的学习参考资料，同时，也可以作为对精算学科有兴趣的同仁了解和学习精算的参考书。

这套教材的特点，一是在内容上涵盖了北美寿险、北美非寿险、英国、中国精算师考试最新的内容，同时紧跟国际精算师协会提出的精算教育标准，涵盖了国际精算教育大纲的基本内容；二是为了便于读者自学和教师讲授，我们为每本教材编写了学习辅导书，辅导书中包括学习要点、教材习题解答和一部分补充练习题及其解答等；三是在写法上，力求把精算学的数理理论与实务结合起来，注意精算学背后的实践意义，努力从实际意义上解释各种数学关系。

本套教材凝结了中国人民大学风险管理与精算中心全体教师的心血，特别是王晓军、孟生旺、黄向阳、王燕、肖争艳、肖宇谷等老师，他们为本套教材的编写付出了极大的艰辛，统计学院部分硕士研究生和本科生对辅导书中的习题解答进行了验证，感谢他们为本套教材做出的贡献，同时也感谢中国人民大学出版社的编辑们为本套教材的出版付出的辛勤劳动。

袁卫

前　言

保险是对未来可能发生的不确定性损失提供经济补偿的一种风险管理手段。保险公司在为被保险人提供经济保障的同时，需要收取一定的保险费，也就是为保险产品定价。厘定保险产品的价格是精算学的核心内容之一。保险产品的一个重要特点是收取保费在先，提供损失赔偿或支付保险金在后，时间延迟可能长达数年甚至数十年，因此，保险公司在收取的保费中，要预留足够的资金用于应对未来的赔付支出，即需要计提保险准备金，以确保保险公司具有充足的偿付能力。计提保险准备金是精算学的另一个重要内容。

保险定价和准备金评估是保险公司经营管理活动的核心工作，也是保险精算学的基础内容。作为保险专业的学生，掌握保险产品的定价原理和准备金评估的基本方法，对于深刻理解保险公司的运行机理、确保保险公司的稳健经营和偿付能力都具有十分重要的意义。

保险专业毕竟不同于精算专业，所以对保险定价和准备金评估的学习内容在深度和广度上都应该与精算专业有所区别。本书是专门为保险专业的本科生编写的一本精算学基础教材，主要讲解寿险精算和非寿险精算的基本概念和基本方法。在写作过程中，力求用通俗的语言和简明的示例来介绍保险定价和准备金评估的基本原理和方法，删除了不必要的数学推导，回避了较为复杂的数学概念。使用本书的读者仅需掌握概率统计的基础知识。

任何精算问题的解决都离不开计算工具。作为精算学的基础教材，本书涉及的计算问题并不复杂，大多可以通过 Excel 来完成。在解决一些比较复杂的保险定价或准备金评估等问题时，就需要使用更加高级的统计软件，如 R 或 SAS 等，但这不属于本书的教学内容。

全书共分 12 章，前 6 章是寿险精算，后 6 章是非寿险精算，由中国人民大学统计学院孟生旺教授、南开大学金融学院张连增教授和天津财经大学统计学院刘乐平教授共同完成。为本书编写做出贡献的还有王选鹤、王明高、刘新红、陈

静仁、李政宵和杨亮，在此向他们表示衷心感谢。

本书的三位作者有10多年精算教学的经验，为精算专业的学生编写过《金融数学》、《寿险精算学》、《非寿险精算学》等教材，积累了丰富的教学材料，这为本书的编写奠定了良好的基础。尽管如此，书中还是难免存在疏漏之处，望读者批评指正。

与本书相关的教学资源可从 http://blog. sina. com. cn/mengshw 下载。

孟生旺

目　录

第1章 复利理论

Chapter 1

复利理论是寿险精算学的重要基础。本章主要介绍利息的度量工具，如实际利率、名义利率、贴现率和利息力等，以及年金现值和终值的计算。

1.1 累积函数和实际利率

累积函数（accumulation function）是指期初的1单位本金在时刻 t 的累积值，记为 $a(t)$。根据累积函数的定义，显然有 $a(0)=1$。

实际利率（effective rate of interest）是指1单位本金在一个时期末所赚取的利息金额，通常用百分数表示，如5%的实际利率表示1元本金在一个时期末赚取的利息是0.05元。

如果用累积函数表示实际利率，则从时刻 $t-1$ 到时刻 t 的实际利率为：

$$i_t=\frac{a(t)-a(t-1)}{a(t-1)} \tag{1.1}$$

式中，分母是在时刻 $t-1$ 的累积值；分子是该累积值在时期（$t-1$，t）赚取的利息金额。时期（$t-1$，t）表示从时刻 $t-1$ 到时刻 t 的时间区间。

显然，在时期（0，1）的实际利率可以表示为：

$$i_1=\frac{a(1)-a(0)}{a(0)}=a(1)-1$$

【例1—1】

已知累积函数为 $a(t)=1.2^t+0.05t$，计算 $t=2$ 时的500万元在 $t=3$ 时的价值。

【解】 根据累积函数的定义，1单位本金在 $t=2$ 时的累积值为 $a(2)$，在 $t=3$

时的累积值为 $a(3)$，也就是说，从 $t=2$ 到 $t=3$，资金的价值增长了 $a(3)/a(2)$ 倍，所以 $t=2$ 时的 500 万元在 $t=3$ 时的价值为：

$$500\times\frac{a(3)}{a(2)}=500\times\frac{1.2^3+0.05\times3}{1.2^2+0.05\times2}=609.74(\text{万元})$$

1.2 复 利

复利的累积函数为：

$$a(t)=(1+i)^t,\ t\geqslant0 \tag{1.2}$$

在复利条件下，累积值的增长过程可以如下解释：

假设年利率为 i，那么 1 元本金在第一年末的累积值为 $(1+i)$；

将第一年末的累积值作为第二年的本金进行投资，可赚取利息 $i(1+i)$，再加上年初的本金 $(1+i)$，即得第二年末的累积值为 $(1+i)^2$；

将第二年末的累积值作为第三年的本金进行投资，可赚取利息 $i(1+i)^2$，再加上年初的本金 $(1+i)^2$，即得第三年末的累积值为 $(1+i)^3$。

依此类推，即得以后各年末的累积值。

在复利条件下，若记 i 为复利利率，则在时期 $(t-1,\ t)$ 的实际利率 i_t 可以表示为：

$$\begin{aligned}i_t&=\frac{a(t)-a(t-1)}{a(t-1)}\\&=\frac{(1+i)^t-(1+i)^{t-1}}{(1+i)^{t-1}}\\&=i\end{aligned}$$

由此可见，在复利条件下，实际利率恒等于复利利率。

【例 1—2】

设复利的年利率为 5%，初始本金为 20 000 元，计算：

(1) 在 9 个月末的累积值；

(2) 在 2 年零 3 个月末的累积值。

【解】

(1) 9 个月相当于 $t=9/12=0.75$ 年，所以在 9 个月末的累积值为：

$$20\,000\times(1+0.05)^{0.75}=20\,745.4(\text{元})$$

(2) 2 年零 3 个月相当于 $t=2+3/12=2.25$ 年，所以在 2 年零 3 个月末的累积值为：

$$20\,000\times(1+0.05)^{2.25}=22\,320.6(\text{元})$$

1.3 名义利率和利息力

实际利率是指每年末复利一次的利率，也就是说，在每年末将当年的利息结转为下一年的本金。名义利率是指在一年内复利多次或多年复利一次的利率。

例如，设年利率为6%，每个季度复利一次，那么在每个季度末，被计入的利息就是6%/4=1.5%。这等价于把1年划分成4个周期，每个周期的利率为1.5%。因此当初始资本为1时，一年后会增加到$(1.015)^4=1.061\,36$，由此可见，对于按季度计息的年名义利率6%，等价的实际利率为6.136%。

设i为给定的年实际利率，记$i^{(m)}$为与i等价的每年计息m次的名义利率，每个计息周期的实际利率为$i^{(m)}/m$。设初始资本为1，为使在两种利率下的累积值相等，就得到如下等价式

$$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m=1+i \tag{1.3}$$

从而得到

$$i^{(m)}=m[(1+i)^{1/m}-1] \tag{1.4}$$

当$m\to\infty$时，对应于连续计息，此时有

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}i^{(m)}&=\lim_{m\to\infty}m[(1+i)^{1/m}-1]\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(1+i)^x-1}{x}(\text{令 } x=1/m)\\&=\ln(1+i)\\&=\delta\end{aligned}$$

即

$$\delta=\ln(1+i) \tag{1.5}$$

$$e^\delta=1+i \tag{1.6}$$

式中，δ称为与i等价的利息力。

【例1—3】

令$i=6\%$，求与$m=1,2,3,4,6,12,\infty$相对应的名义利率$i^{(m)}$。

【解】 当$m=1$时，$i^{(m)}=i=6\%$。

当$m=2$时，$i^{(2)}=2\times[(1+6\%)^{1/2}-1]=5.913\%$。

其他计算结果如表1—1所示。

表1—1 名义利率

m	1	2	3	4	6	12	∞
$i^{(m)}$	0.060 00	0.059 13	0.058 84	0.058 70	0.058 55	0.058 41	0.058 27

1.4 贴现函数和实际贴现率

累积函数表示资金随着时间的推移而增长变化的过程，用于计算累积值（accumulated value）或终值（future value），即资金在未来时刻的价值。贴现函数是累积函数的倒数，用于计算现值（present value），即未来的一笔资金在当前的价值。

根据累积函数的定义，在时刻 0 的 1 元本金在时刻 t 的累积值为 $a(t)$。如果在时刻 t 希望获得 1 元的累积值，在时刻 0 的本金应该是多少？这是一个求现值的过程，即贴现过程。贴现过程与累积过程是互逆的。如果在时刻 t 希望获得 1 元的累积值，在时刻 0 的本金应该是 $a^{-1}(t)=1/a(t)$。$a^{-1}(t)$ 就是所谓的贴现函数（discount function）。

复利的贴现函数为：

$$a^{-1}(t)=(1+i)^{-t} \tag{1.7}$$

【例 1—4】

假设复利的年利率为 5%，投资者希望：(1) 在 9 个月末获得 20 000 元；(2) 在 2 年零 3 个月末获得 20 000 元。在上述两种情况下分别计算投资者在期初应该投入到基金中的本金为多少。

【解】 应用复利的贴现函数，投资者在期初应该投入的本金分别为：

(1) $20\,000\times(1+0.05)^{-0.75}=19\,281.4$（元）

(2) $20\,000\times(1+0.05)^{-2.25}=17\,920.7$（元）

实际利率是一定时期内产生的利息与期初本金的比率，而实际贴现率（effective rate of discount）是一定时期内产生的利息与期末累积值的比率。

在时期 $(t-1,\ t)$ 的实际贴现率定义为：

$$d_t=\frac{a(t)-a(t-1)}{a(t)} \tag{1.8}$$

式中，分母是期末的累积值；分子是期初的利息收入。

如果使用复利的累积函数，则时期 $(t-1,\ t)$ 的实际贴现率是一个常数，可以表示为：

$$d=\frac{(1+i)^t-(1+i)^{t-1}}{(1+i)^t}=\frac{i}{1+i} \tag{1.9}$$

根据实际利率和实际贴现率的关系，复利条件下的累积函数也可以用实际贴现率表示如下：

$$a(t)=(1-d)^{-t} \tag{1.10}$$

由此可得，$a(0)=1$，$a(1)=1/(1-d)$。这就意味着，期初的 1 元相当于期末的 $1/(1-d)$ 元，也就是期初的 $1-d$ 元相当于期末的 1 元。

期初的 $1-d$ 元累积到期末为 1 元，表明当期的利息为 d 元，利率为：

$$i=\frac{d}{1-d} \tag{1.11}$$

上式就是用实际贴现率表示的实际利率。

1.5 名义贴现率

名义贴现率（nominal rate of discount）用于度量不足一年的一个时间区间内的实际贴现率。例如，如果年名义贴现率为 6%，每月贴现 1 次，那么每月的实际贴现率为 6%/12=0.5%。在已知每月的实际贴现率的情况下，也可以计算出年实际贴现率。不妨假设年实际贴现率为 d，则根据月实际贴现率计算的现值应该等于根据年实际贴现率计算的现值，即

$$(1-0.5\%)^{12}=1-d$$

由此可得年实际贴现率为 $d=1-(1-0.5\%)^{12}=5.8\%$。

如果用 $d^{(m)}$ 表示年名义贴现率，每 $1/m$ 年贴现一次，则每 $1/m$ 年的实际贴现率为 $d^{(m)}/m$，因此年末的 1 元在年初的现值为 $(1-d^{(m)}/m)^m$，它应该等于按年实际贴现率 d 计算的现值 $(1-d)$，即

$$(1-d^{(m)}/m)^m=1-d$$

故由年名义贴现率表示的年实际贴现率为：

$$d=1-(1-d^{(m)}/m)^m \tag{1.12}$$

由年实际贴现率表示的年名义贴现率为：

$$d^{(m)}=m[1-(1-d)^{1/m}] \tag{1.13}$$

【例 1—5】

如果每月复利一次的年名义利率为 6%，请计算当每个季度贴现一次的名义贴现率为多少时，名义利率与名义贴现率是等价的。等价的含义是指无论按名义利率计算还是按名义贴现率计算，期末的 1 元在期初的现值是相等的，或期初的 1 元在期末的累积值是相等的。

【解】根据题意，有

$$(1+0.06/12)^{12}=(1-d^{(4)}/4)^{-4}$$

等式左边是期初的 1 元按名义利率计算的期末累积值，右边是按名义贴现率计算的期末累积值。解上述方程即得每个季度贴现一次的名义贴现率为

$d^{(4)}=5.94\%$。

【例 1—6】

令 $i=6\%$，求与 $m=1, 2, 3, 4, 6, 12, \infty$ 相对应的名义贴现率 $d^{(m)}$ 的值。

【解】当 $m=1$ 时，$d=i/(1+i)=5.66\%$。

当 $m=2$ 时，$d^{(2)}=2\left[1-(1-d)^{1/2}\right]=5.743\%$。

其他计算结果如表 1—2 所示。

表 1—2　名义贴现率

m	1	2	3	4	6	12	∞
$d^{(m)}$	0.056 60	0.057 43	0.057 71	0.057 85	0.057 99	0.058 13	0.058 27

1.6 年金的现值

年金有等额年金和变额年金之分。等额年金是指定期付款一次，每次支付相等金额的现金流。本节仅介绍等额年金的现值和终值。

年金的现值是指年金的一系列付款在期初时的价值。

如果年金的支付期限是 n 个时期，在每个时期末支付 1 元，那么这种年金就是期末付定期年金（annuity-immediate）。

期末付定期年金的现值用符号 $a_{\overline{n}|}$表示。期末付定期年金的现值计算公式为：

$$a_{\overline{n}|}=\frac{1-v^n}{i} \tag{1.14}$$

证明：

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}|}&=v+v^2+\cdots+v^n \\ &=\frac{v(1-v^n)}{1-v} \\ &=\frac{1-v^n}{i} \end{aligned}$$

【例 1—7】

一笔年金在 20 年内每年末支付 4，另一笔年金在 10 年内每年末支付 5。如果年实际利率为 i，则这两笔年金的现值相等。如另一笔款项在 n 年内以利率 i 投资则可以翻番，求 n。

【解】根据题意有等式：

$$4a_{\overline{20}|}=5a_{\overline{10}|}$$

故有

$$4 \cdot \frac{1-v^{20}}{i}=5 \cdot \frac{1-v^{10}}{i}$$

$$4v^{20}-5v^{10}+1=0$$

$$v^{10}=0.25$$

$$i=0.148\,698$$

假设另一笔款项的投资额为 x，则有 $x(1+i)^n=2x$，由此可解得 $n=5$。

如果年金的支付期限是 n 个时期，在每个时期初支付 1 元，那么这种年金就是期初付定期年金（annuity-due）。期初付定期年金的现值用符号 $\ddot{a}_{\overline{n}|}$表示。

期初付年金的每 1 元款项都比期末付年金提前了一个时期，而期初的 1 元相当于期末的（$1+i$）元，因此将期末付年金的现值乘以（$1+i$）即可得到期初付年金的现值，即

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}=(1+i)a_{\overline{n}|}=\frac{1-v^n}{d} \tag{1.15}$$

【例 1—8】

企业租用了一间仓库，一次性支付 50 000 元的租金后可以使用 8 年，假设年实际利率为 6%，计算如果每年初支付租金，该仓库的年租金应该是多少。

【解】设每年初的租金为 x，则根据题意，可以建立下述方程：

$$50\,000=x\ddot{a}_{\overline{8}|6\%}$$

因此每年初的租金应为：

$$A=\frac{50\,000}{\ddot{a}_{\overline{8}|6\%}}=\frac{50\,000}{6.582\,4}=7\,596(\text{元})$$

永续年金（perpetuity）是指无限期地支付的年金，因此，其现值等于定期年金的现值在支付期限 $n\rightarrow\infty$时的极限。若用 $a_{\overline{\infty}|}$表示期末付永续年金的现值，则有

$$a_{\overline{\infty}|}=\lim_{n\rightarrow\infty}a_{\overline{n}|}=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1-v^n}{i}=\frac{1}{i}$$

永续年金的计算公式表明，如果在期初将 $1/i$ 的本金按利率 i 投资，那么在本金保持不变的情况下，可以无限期地在每期末获得 1 元的利息。

如用 $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}$表示期初付永续年金的现值，则有

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|}=\lim_{n\rightarrow\infty}\ddot{a}_{\overline{n}|}=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1-v^n}{d}=\frac{1}{d}$$

1.7 年金的终值

终值（future value）也称累积值（accumulated value），是指现金流在未来

时刻的价值。对于等额年金而言，定期年金存在终值，而永续年金不存在终值。

期末付定期年金在时刻 n 的终值用符号 $s_{\overline{n}|}$ 表示。期末付定期年金终值的计算公式为：

$$s_{\overline{n}|}=\frac{(1+i)^n-1}{i} \tag{1.16}$$

证明：把现值 $a_{\overline{n}|}$ 按照利率 i 累积到第 n 年末即得终值为：

$$\begin{aligned}s_{\overline{n}|}&=(1+i)^n a_{\overline{n}|}\\&=(1+i)^n\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\\&=\frac{(1+i)^n-1}{i}\end{aligned}$$

【例 1—9】

投资者在前 5 年的每年末存入基金 2 万元，在随后的 5 年，每年末存入 4 万元。已知基金的年实际利率为 5%，求投资者在第 10 年末的累积值。

【解】存入基金的款项相当于两个期末付年金，一个是每年末支付 2 万元的 10 年期年金，一个是从第 6 年开始每年末支付 2 万元的 5 年期年金。这两个年金的终值之和为：

$$\begin{aligned}2s_{\overline{10}|}+2s_{\overline{5}|}&=2\times\frac{(1+0.05)^{10}-1}{0.05}+2\times\frac{(1+0.05)^5-1}{0.05}\\&=36.21(\text{万元})\end{aligned}$$

期初付定期年金的终值用符号 $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ 表示。期初付定期年金的终值公式为：

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}=\frac{(1+i)^n-1}{d} \tag{1.17}$$

证明：期初付年金是期末付年金的（$1+i$）倍，所以有

$$\begin{aligned}\ddot{s}_{\overline{n}|}&=s_{\overline{n}|}(1+i)\\&=\frac{(1+i)^n-1}{i}(1+i)\\&=\frac{(1+i)^n-1}{d}\end{aligned}$$

【例 1—10】

投资者在每年初都存入 1 000 元，持续 20 年。如果年实际利率为 4%，请计算这些存款在 20 年末的累积值。

【解】累积值为：

$$1\,000\ddot{s}_{\overline{20}|}=1\,000\,\frac{(1+i)^{20}-1}{d}=1\,000\,\frac{(1+i)^{20}-1}{i/(1+i)}=30\,970(\text{元})$$

1.8 每年支付 m 次的年金

1.8.1 每年支付 m 次的期末付年金

设年实际利率为 i，每年支付 m 次，每次支付 $1/m$ 元，一共支付 n 年的期末付年金的现值记为 $a_{\overline{n}|}^{(m)}$，计算公式如下：

$$a_{\overline{n}|}^{(m)}=\frac{1-v^n}{i^{(m)}}=\frac{i}{i^{(m)}}a_{\overline{n}|} \tag{1.18}$$

证明：

$$\begin{aligned}
a_{\overline{n}|}^{(m)}&=\frac{1}{m}\cdot(v^{\frac{1}{m}}+v^{\frac{2}{m}}+\cdots+v^{\frac{mn-1}{m}}+v^{\frac{mn}{m}})\\
&=\frac{1}{m}\cdot\frac{v^{1/m}-v^{(mn+1)/m}}{1-v^{1/m}}\\
&=\frac{1-v^n}{m[(1+i)^{1/m}-1]}\\
&=\frac{1-v^n}{i^{(m)}}\\
&=\frac{i}{i^{(m)}}a_n
\end{aligned}$$

在 $a_{\overline{n}|}^{(m)}$ 的计算公式中，假设每次付款 $1/m$ 元，每年付款 m 次，每年的付款总额为1元。因此，在应用上述公式时，要注意它是以每年的付款总额为单位1计算的。

类似地，设年实际利率为 i，每年支付 m 次，每次支付 $1/m$ 元，一共支付 n 年的期末付年金的终值可表示为：

$$s_{\overline{n}|}^{(m)}=\frac{(1+i)^n-1}{i^{(m)}}=\frac{i}{i^{(m)}}s_{\overline{n}|} \tag{1.19}$$

证明：

$$\begin{aligned}
s_{\overline{n}|}^{(m)}&=(1+i)^n a_{\overline{n}|}^{(m)}\\
&=(1+i)^n\frac{i}{i^{(m)}}a_{\overline{n}|}\\
&=\frac{i}{i^{(m)}}s_{\overline{n}|}\\
&=\frac{(1+i)^n-1}{i^{(m)}}
\end{aligned}$$

【例 1—11】

投资者在每月末向基金存入1 000元，如果基金的年实际利率为5%，计算

该投资者在第 5 年末的累积值是多少。

【解】 这是一项每年支付 12 次的期末付年金，$m=12$，$i=5\%$，每年的支付额为 12 000 元，因此有

$$12\,000s_{\overline{5}|}^{(12)}=12\,000\frac{i}{i^{(12)}}s_{\overline{5}|}=67\,813.74(\text{元})$$

1.8.2 每年支付 m 次的期初付年金

设年实际利率为 i，每年支付 m 次，每次支付 $1/m$ 元，一共支付 n 年的期初付年金的现值记为 $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}$，可以如下计算：

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}=\frac{1-v^n}{d^{(m)}}=\frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_{\overline{n}|} \tag{1.20}$$

证明：期初付年金比期末付年金早 $1/m$ 个时期，所以有

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}&=(1+i)^{1/m}a_{\overline{n}|}^{(m)}\\&=(1+i)^{1/m}\frac{1-v^n}{i^{(m)}}\\&=\frac{1-v^n}{(1+i)^{-1/m}\cdot i^{(m)}}\\&=\frac{1-v^n}{d^{(m)}}\\&=\frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_{\overline{n}|}\end{aligned}$$

类似地，设年实际利率为 i，每年支付 m 次，每次支付 $1/m$ 元，一共支付 n 年的期初付年金的终值可表示为：

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)}=\frac{d}{d^{(m)}}\ddot{s}_{\overline{n}|}=\frac{(1+i)^n-1}{d^{(m)}} \tag{1.21}$$

证明：

$$\begin{aligned}\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)}&=(1+i)^n\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}\\&=(1+i)^n\frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_{\overline{n}|}\\&=\frac{d}{d^{(m)}}\ddot{s}_{\overline{n}|}\\&=\frac{(1+i)^n-1}{d^{(m)}}\end{aligned}$$

1.8.3 每年支付 m 次的永续年金

设年实际利率为 i，每年支付 m 次，每次支付 $1/m$ 元的期末付永续年金的现

值可表示为：

$$a_{\overline{\infty}|}^{(m)}=\frac{1}{i^{(m)}} \tag{1.22}$$

证明：$a_{\overline{\infty}|}^{(m)}=\lim\limits_{n\to\infty}a_{\overline{n}|}^{(m)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{i}{i^{(m)}}a_{\overline{n}|}=\frac{1}{i^{(m)}}$

类似地，设年实际利率为 i，每年支付 m 次，每次支付 $1/m$ 元的期初付永续年金的现值可表示为：

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)}=\frac{1}{d^{(m)}} \tag{1.23}$$

证明：

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)}=\lim_{n\to\infty}\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_{\overline{n}|}=\frac{1}{d^{(m)}}$$

期初付永续年金 $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)}$ 与期末付永续年金 $a_{\overline{\infty}|}^{(m)}$ 相差 $1/m$ 年，因此它们之间存在下述关系：

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)}=(1+i)^{1/m}a_{\overline{\infty}|}^{(m)} \tag{1.24}$$

【例 1—12】

投资者现在投资 24 000 元，希望在今后的每月末领取 100 元，且无限期地领下去，问：年实际利率应为多少？

【解】 这是一笔永续年金。根据题意可知，$m=12$，每年领取的金额为 1 200 元。假设年实际利率为 i，则有下述方程：

$$1\,200\,\frac{1}{i^{(m)}}=24\,000\Rightarrow i^{(m)}=0.05$$

将名义利率转换为年实际利率，则有

$$i=(1+0.05/12)^{12}-1=0.051\,16$$

□ 习 题

1.1 设利息力为 7.6%，时刻 0 的初始资本为 1，计算半年末的累积值。

1.2 给定每年计息两次的名义年利率 j，在每两年末的支付额为 1，构成一个永续年金，该年金的现值为 5.89，计算 j。

1.3 一个永续年金的首次支付额是 $(1+k)$，在第一年末支付，以后每年末的支付额分别是 $(1+k)^2$，$(1+k)^3$，…。给定实际年利率 4%，该年金在时刻 0 的现值为 51，计算 k。

1.4 假设贷款额为 1 000，每年计息 12 次的名义年利率为 12%。现分 6 次

偿还，在每个月末支付。假设前 3 次支付量为 x，后 3 次支付量为 $3x$，计算 x。

1.5 一份寿险保单的死亡给付可由以下 4 种方式来支付，每种方式都有相同的现值。

(1) 每个月末支付 120 的永续年金，第一次支付发生在死亡之后 1 个月。

(2) 每个月末支付 365.47，持续 n 年，第一次支付发生在死亡之后 1 个月。

(3) 在死亡之后第 n 年末支付 17 866.32。

(4) 在死亡时刻支付 X。

计算 X。

第2章 Chapter 2 剩余寿命

本章采用概率论中随机变量和分布函数的概念，对个体的未来剩余寿命进行描述，这是了解生命表的基础。本章是寿险精算的概率论基础。

2.1 剩余寿命模型

用符号（x）来表示一个年龄为 x 岁的个体，用 T 或更具体的 $T(x)$ 来表示该个体的未来剩余寿命。因此，$x+T$ 就是该个体的死亡年龄。

剩余寿命 $T(x)$ 是一个随机变量，其概率分布函数为：

$$G(t)=Pr(T\leqslant t),\ t\geqslant 0 \tag{2.1}$$

对给定的 t，函数 $G(t)$ 表示个体在 t 年内死亡的概率。假设 T 的分布函数$G(t)$是连续的，有概率密度函数 $g(t)=G'(t)$，那么就有

$$g(t)\mathrm{d}t=Pr(t<T<t+\mathrm{d}t) \tag{2.2}$$

式（2.2）是从 t 到$t+\mathrm{d}t$ 无限小时间内死亡发生的概率（或者说（x）的死亡年龄在 $x+t$ 和 $x+t+\mathrm{d}t$ 之间）。

我们感兴趣的概率和期望值可通过 g 和G 表示出来。按精算惯例，国际精算界采用了一套经过很长时间检验的精算符号体系。例如，记${}_tq_x$ 为 x 岁的个体在 t 年内死亡的概率。因此就有以下等式

$${}_tq_x=G(t) \tag{2.3}$$

类似地，还有

$${}_tp_x=1-G(t) \tag{2.4}$$

式（2.4）表示 x 岁的个体在 t 年后仍然生存的概率。另一个常用的符号如下：

$$ {}_{s|}q_x = Pr(s<T<s+t) = G(s+t) - G(s) = {}_{s+t}q_x - {}_{s}q_x \tag{2.5}$$

式（2.5）表示 x 岁的个体生存了 s 年，并在之后 t 年内死亡的概率。

记 ${}_tp_{x+s}$ 为 x 岁的个体在生存至 $x+s$ 岁之后，又生存了 t 年的条件概率，因此

$$ {}_tp_{x+s} = Pr(T>s+t \mid T>s) = \frac{1-G(s+t)}{1-G(s)} \tag{2.6}$$

类似地，定义

$$ {}_tq_{x+s} = Pr(T\leqslant s+t \mid T>s) = \frac{G(s+t)-G(s)}{1-G(s)} \tag{2.7}$$

式（2.7）表示 x 岁的个体生存至 $x+s$ 岁之后，在之后 t 年内死亡的条件概率。

这里需要说明的是，比较一下式（2.4）和式（2.6），可见对 ${}_tp_x$ 和 ${}_tp_{x+s}$ 的定义有点微妙的差异。直观上，${}_tp_{x+s}$ 的定义应从 $x+s$ 岁开始考虑，但在式（2.6）中是从 x 岁开始考虑的。按照选择生命表的概念（见 2.5 节），这两种考虑应有差别。这里假设这种差别很小，可忽略不计。

两个常用的等式是

$$ {}_{s+t}p_x = 1-G(s+t) = [1-G(s)]\frac{1-G(s+t)}{1-G(s)} = {}_sp_x\,{}_tp_{x+s} \tag{2.8}$$

$$ {}_{s|}q_x = G(s+t)-G(s) = [1-G(s)]\frac{G(s+t)-G(s)}{1-G(s)} = {}_sp_x\,{}_tq_{x+s} \tag{2.9}$$

称 (x) 的未来生存时间的期望 $E(T)$ 为预期剩余寿命，记为 $\mathring{e}_x$。按定义就有

$$ \mathring{e}_x = \int_0^\infty t g(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.10}$$

如用分布函数表示，就是

$$ \mathring{e}_x = \int_0^\infty [1-G(t)]\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty {}_tp_x\,\mathrm{d}t \tag{2.11}$$

式（2.11）的一般形式是概率论中的一个公式，可描述如下：设连续随机变量 $Y\geqslant 0$ 的期望存在，那么就有

$$ E[Y] = \int_0^\infty Pr(Y\geqslant y)\,\mathrm{d}y \tag{2.12}$$

式（2.12）可由分部积分验证。

特别地，当 $t=1$ 时，按惯例，${}_tq_x$，${}_tp_x$，${}_{s|t}q_x$ 中的 t 通常可以略去。因此 q_x 表示在 1 年内死亡的概率，${}_{s|}q_x$ 表示 x 岁的人生存了 s 年，并在之后 1 年内死亡的概率。

最后指出，对新生儿（即 $x=0$）来讲，按惯例，把相应的变量 $T(0)$ 记为 X，相应的生存概率 ${}_xp_0$ 记为生存函数 $s(x)$。引入分布函数 $F_X(x)=Pr(X\leqslant x)$，那么

$$s(x)=1-F_X(x)=Pr(X>x),\ x\geqslant 0$$

2.2 死亡力

2.1 节表明（x）的未来剩余寿命 T 是随机变量，由该随机变量可定义（x）在 $x+t$ 时的死亡力为：

$$\mu_{x+t}=\frac{g(t)}{Pr(T(x)>t)}=\frac{g(t)}{1-G(t)}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln[1-G(t)] \tag{2.13}$$

注意到由式（2.2），$g(t)\mathrm{d}t$ 是从 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 无限小时间内死亡发生的概率，因此由式（2.13）可知，$\mu_{x+t}\mathrm{d}t$ 是（x）活到 $x+t$，并在未来 $\mathrm{d}t$ 段时间内死亡的条件概率。

结合式（2.2）和式（2.4），由式（2.13）可得个体在 $x+t$ 之后 $\mathrm{d}t$ 段时间内死亡概率的另一种表达式：

$$Pr(t<T<t+\mathrm{d}t)={}_tp_x\mu_{x+t}\mathrm{d}t \tag{2.14}$$

因此（x）的未来生存时间的期望可表示为：

$$\mathring{e}_x=\int_0^{\infty}t\,{}_tp_x\mu_{x+t}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}{}_tp_x\mathrm{d}t \tag{2.15}$$

式（2.15）右边第二个等式可直接应用式（2.12）得到。或者注意到由式（2.4），两边对 t 求导数，即得 $({}_tp_x)'=-{}_tp_x\mu_{x+t}$，对式（2.15）右边第一个积分应用分部积分技巧，也可得到第二个积分。

如采用精算符号，死亡力也可定义为：

$$\mu_{x+t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln{}_tp_x \tag{2.16}$$

对式（2.16）两边积分，变形即得

$${}_tp_x=\exp\left(-\int_0^t\mu_{x+s}\mathrm{d}s\right) \tag{2.17}$$

变量 T 的二阶矩有如下表示：

$$E[T^2]=\int_0^{\infty}t^2\,{}_tp_x\mu_{x+t}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}2t\,{}_tp_x\mathrm{d}t \tag{2.18}$$

上式右边第二个等式由分部积分得到。

【例 2—1】

已知${}_tp_{40}=(60-t)/60$（$0<t<60$），计算μ_{40+t}及变量$T(40)$的密度函数。为表明年龄40和时间t的区别，μ_{40+t}可记为$\mu_{40}(t)$。

【解】由式（2.16）得

$$\mu_{40}(t)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln{}_tp_{40}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\ln(60-t)-\ln 60]=\frac{1}{60-t}$$

$T(40)$的密度函数为：

$${}_tp_{40}\mu_{40+t}=\frac{60-t}{60}\cdot\frac{1}{60-t}=\frac{1}{60}$$

即$T(40)$服从$[0,60]$上的均匀分布。

【例 2—2】

已知$\mu(x)=0.001$（$20\leqslant x\leqslant 25$），计算${}_{2|2}q_{20}$。

【解】由式（2.9）及式（2.17）得

$$\begin{aligned}{}_{2|2}q_{20}&={}_2p_{20}\cdot{}_2q_{22}=\exp\left(-\int_{20}^{22}\mu(s)\mathrm{d}s\right)\left\{1-\exp\left(-\int_{22}^{24}\mu(s)\mathrm{d}s\right)\right\}\\&=\mathrm{e}^{-0.002}(1-\mathrm{e}^{-0.002})=0.002\end{aligned}$$

【例 2—3】

定义随机变量$T^*(x)$如下：

$$T^*(x)=\begin{cases}T(x), & 0<T(x)\leqslant n\\ n, & T(x)>n\end{cases}$$

相应地记$\mathring{e}_{x:\overline{n|}}=E[T^*(x)]$。给出$\mathring{e}_{x:\overline{n|}}$的表达式。

【解】按定义可得

$$\mathring{e}_{x:\overline{n|}}=\int_0^n t\,{}_tp_x\mu_{x+t}\mathrm{d}t+n\int_n^\infty{}_tp_x\mu_{x+t}\mathrm{d}t=\int_0^n t\,{}_tp_x\mu_{x+t}\mathrm{d}t+n\cdot{}_np_x$$

应用分部积分方法，可得

$$\mathring{e}_{x:\overline{n|}}=-n\cdot{}_np_x+\int_0^n{}_tp_x\mathrm{d}t+n\cdot{}_np_x=\int_0^n{}_tp_x\mathrm{d}t$$

2.3 剩余寿命的解析分布

如果函数G可用简单的公式来表达，那么就称变量T有解析分布。对变量T假设它有某个解析分布，有不同的原因。

在过去，类似于物理学中的规律，人们对人口学中的剩余寿命变量付出了很

多努力，期望从某些特定假设出发，得到普遍有效的关于 $G(t)$ 的解析表达式。从 21 世纪的观点来看，这些努力显得非常天真，并充斥着某些令人费解的因素。

解析公式的优势在于 $G(t)$ 可通过较少的参数计算出来。当仅有几个参数需要估计时，统计推断显得特别方便。当已有的数据量很少时，这可能是一个很重要的考虑因素。

解析公式也有一些很吸引人的理论性质。解析公式的受欢迎程度类似于正态分布在统计学中的受欢迎程度。正态分布模型很常用，部分原因是来自中心极限定理的支持，但更多的还是它在数学上容易处理。

De Moivre (1724) 假设人类存在最大年龄 ω，并假设 T 服从 0 到 $\omega-x$ 之间的均匀分布，即当 $0<t<\omega-x$ 时，$g(t)=1/(\omega-x)$。此时死亡力有如下形式：

$$\mu_{x+t}=\frac{1}{\omega-x-t},\ 0<t<\omega-x \tag{2.19}$$

由式 (2.19)，死亡力是关于 t 的增函数。

Gompertz (1824) 假设死亡力是指数增长的：

$$\mu_{x+t}=Bc^{x+t},\ t>0 \tag{2.20}$$

它比 De Moivre 死亡律更好地反映了个体变老的过程，而且取消了存在最大年龄 ω 的假设。

式 (2.20) 由 Makeham (1860) 推广如下：

$$\mu_{x+t}=A+Bc^{x+t},\ t>0 \tag{2.21}$$

与式 (2.20) 相比，Makeham 死亡律增加了一个与年龄无关的常数 A ($A>0$)。

作为死亡力模型的特例，如在式 (2.20) 中取 $c=1$ 或在式 (2.21) 中取 $B=0$，就得到死亡力为常数的模型。此时 T 的概率分布就是指数分布。尽管该分布在数学上非常简单，但它并不能准确地反映人类的死亡力。

由式 (2.21) 和式 (2.17)，记 $m=B/\ln c$，那么在 Makeham 模型下生存概率可写为：

$${}_tp_x=\exp[-At-mc^x(c^t-1)] \tag{2.22}$$

Weibull (1939) 建议死亡力以关于 t 的多项式方式增长：

$$\mu_{x+t}=k\,(x+t)^n \tag{2.23}$$

式中，参数 $k>0$，$n>0$。此时生存概率为：

$${}_tp_x=\exp\left(-\frac{k}{n+1}[(x+t)^{n+1}-x^{n+1}]\right) \tag{2.24}$$

2.4 整数剩余寿命

回到 2.1 节和 2.2 节介绍的一般模型，这里定义随机变量 $K=K(x)$，$S=$

$S(x)$，$S^{(m)}=S^{(m)}(x)$，它们都和随机变量 T 密切相关。

(1) 定义 $K=[T]$，即 (x) 的未来剩余寿命的整数部分。随机变量 K 的概率分布由下式给出：

$$Pr(K=k)=Pr(k\leqslant T<k+1)={}_kp_xq_{x+k},\ k=0,1,\cdots \tag{2.25}$$

变量 K 的期望称为预期整数剩余寿命，用符号 e_x 表示。因此按定义就有

$$_tp_x=e_x=\sum_{k=1}^{\infty}kPr(K=k)=\sum_{k=1}^{\infty}k\ {}_kp_xq_{x+k} \tag{2.26}$$

计算 e_x 的另一个表达式为：

$$e_x=\sum_{k=1}^{\infty}Pr(K\geqslant k)=\sum_{k=1}^{\infty}{}_kp_x \tag{2.27}$$

式 (2.27) 的一般形式是概率论中的一个公式，可描述如下：设取非负整数值的随机变量 Y 的期望存在，那么就有

$$E[Y]=\sum_{k=1}^{\infty}Pr(Y\geqslant k) \tag{2.28}$$

下面顺便给出变量 K 的二阶矩计算公式，有关证明略去。

$$E[K^2]=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\ {}_{k-1}p_xq_{x+k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)_{k+1}p_x \tag{2.29}$$

(2) 定义 S 为 (x) 在死亡年内活过的时间，因此

$$T=K+S \tag{2.30}$$

随机变量 S 取值于 $0\sim1$ 之间，S 的期望值近似为 $1/2$，由式 (2.30) 可得

$$\mathring{e}_x\approx e_x+\frac{1}{2} \tag{2.31}$$

上式可用于近似计算 (x) 的预期剩余寿命 $\mathring{e}_x$。

假设 K 与 S 是独立的，而且 S 服从 $0\sim1$ 之间的均匀分布，那么式 (2.31) 就是等式。进一步，由式 (2.30) 及独立性假设，可得 T 的方差为：

$$\mathrm{Var}(T)=\mathrm{Var}(K)+\frac{1}{12} \tag{2.32}$$

(3) 对于正整数 m，定义随机变量 $S^{(m)}$ 如下：

$$S^{(m)}=\frac{1}{m}[mS+1] \tag{2.33}$$

与 S 相比，$S^{(m)}$ 近似描述了死亡年内的死亡时刻。例如，把每年分成 12 个月，如死亡在第一个月内发生，那么 $0<S<1/12$，但此时对应的 $S^{(12)}=1/12$。可以验证，$S^{(m)}$ 的取值为 $1/m$，$2/m$，…，m/m。注意到如果 K 和 S 独立，就可

得到 K 和 $S^{(m)}$ 相互独立。进一步，如果 S 服从 0～1 之间的均匀分布，那么 $S^{(m)}$ 服从离散型均匀分布。

【例 2—4】

定义随机变量 $K^*(x)$ 如下

$$K^*(x)=\begin{cases}K(x), & K(x)=0,1,\cdots,n-1\\ n, & K(x)=n,n+1,\cdots\end{cases}$$

相应地记 $e_{x:\overline{n}|}=E[K^*(x)]$。给出 $e_{x:\overline{n}|}$ 的表达式。

【解】按定义可得

$$e_{x:\overline{n}|}=\sum_k K^*(k)Pr(K=k)=\sum_{k=0}^{n-1}k\cdot{}_{k|}q_x+\sum_{k=n}^{\omega-x-1}n\cdot{}_{k|}q_x$$

注意到 ${}_np_x=\sum\limits_{k=n}^{\omega-x-1}{}_{k|}q_x$，可得

$$\begin{aligned}e_{x:\overline{n}|}&=\sum_{k=0}^{n-1}k\cdot{}_{k|}q_x+n\cdot{}_np_x=\sum_{k=0}^{n-1}k\cdot({}_kp_x-{}_{k+1}p_x)+n\cdot{}_np_x\\&=({}_1p_x-{}_2p_x)+2({}_2p_x-{}_3p_x)+\cdots+(n-1)({}_{n-1}p_x-{}_np_x)+n\cdot{}_np_x\\&=p_x+{}_2p_x+\cdots+{}_np_x\end{aligned}$$

2.5 生命表

在本章前面几节，我们考虑了年龄为 x 岁的个体。采用适当的生命表，就可以构造出该个体未来寿命的概率分布。

生命表可通过给出的 l_x（$0\leqslant x<\omega$）表示，其中 ω 为最大年龄，l_0 表示新生儿的个数，l_x 表示 l_0 个新生儿存活到 x 岁的个数。记 $s(x)=l_x/l_0$ 为活过 x 岁的概率。这些符号与 2.1 节生存概率的关系如下：

$${}_tp_x=Pr(T(0)>x+t\,|\,T(0)>x)=\frac{s(x+t)}{s(x)}=\frac{l_{x+t}}{l_x}\tag{2.34}$$

另一个常用的符号就是 $d_x=l_x-l_{x+1}$，它表示在（x，$x+1$）内死亡的个数。类似地，可定义 ${}_nd_x=l_x-l_{x+n}$。

本质上，生命表是一年期死亡概率 q_x 的列表，它完整地决定了 K 的分布。本章下一节将说明如何对生命表进行插值，来近似描述 T 的概率分布。

生命表是由统计数据构造的，具体细节这里不展开。生命表的构造涉及估计、修匀、外推等技术（后者用于考虑随着时间推移带来的死亡力模式的变化）。

生命表是为某些特定群体构造的，由于性别、种族、年代及险种等因素的不

同，生命表也有所不同。初始年龄 x 在这些生命表中会有显著的影响。举例来说，假设 x 为投保人购买保险时的年龄。由于保险只限于提供给身体健康（有时候体检之后决定）的个体，因此有理由预期，在其他因素（尤其是年龄）相同的条件下，一个刚买过保险的人要比几年前买过保险的人更健康。考虑到这一现象，就产生了选择生命表。在选择生命表中，死亡率根据进入年龄加以区分。因此，$q_{[x]+t}$ 是将 x 作为进入年龄生存 t 年后到达年龄 $x+t$ 在下一年的死亡率。选择性通常会导致以下不等式：

$$q_{[x]}<q_{[x-1]+1}<q_{[x-2]+2}<\cdots \tag{2.35}$$

通常选择效应经过几年（如 r 年）之后就消失了，从而可假设

$$q_{[x-r]+r}=q_{[x-r-1]+r+1}=q_{[x-r-2]+r+2}=\cdots=q_x \tag{2.36}$$

在式（2.36）中，r 称为选择期，选择期结束之后使用的生命表称为终极生命表。

某人在 x 岁时购买了一份保单，设选择期为 3 年，为计算 K 的概率分布，需要以下概率：

$$q_{[x]},q_{[x]+1},q_{[x]+2},q_{x+3},q_{x+4},q_{x+5},\cdots \tag{2.37}$$

如果生命表仅随到达年龄 x 变化，那么该生命表就称为综合表。综合生命表只有一个变元，而选择生命表有两个变元。在综合生命表中，(x) 的一年期死亡率通常是选择生命表和终极生命表中相应概率的加权平均。

虽然选择生命表用起来也较容易，如式（2.37）所示，但是为了简便，以下将使用综合生命表。

【例 2—5】

已知 $s(x)=[1-(x/100)]^{1/2}$ $(0<x<100)$。计算 ${}_{17}p_{19}$，$\mu(36)$，$E[T(36)]$。

【解】 由式（2.34）即得

$${}_{17}p_{19}=\frac{s(36)}{s(19)}=\frac{0.8}{0.9}=\frac{8}{9}$$

由式（2.34）及式（2.16），即得

$$\mu(36)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln s(t)\Big|_{t=36}=-\frac{s'(36)}{s(36)}=\frac{1/(20\sqrt{64})}{0.8}=\frac{1}{128}$$

由式（2.15），即得

$$E[T(36)]=\int_0^{64}{}_tp_{36}\mathrm{d}t=\int_0^{64}\frac{s(36+t)}{s(36)}\mathrm{d}t=\int_0^{64}\sqrt{1-t/64}\,\mathrm{d}t=\frac{128}{3}$$

【例 2—6】

假设 $s(x)=(1-x/\omega)^{\alpha}$ $(0<x<\omega,\ \alpha>0)$。计算 $\mu(x)$，$\mathring{e}_x$。

【解】沿用例 2—5 的方法，即得

$$\mu(x)=-\frac{s'(x)}{s(x)}=\frac{\alpha\,(1-x/\omega)^{\alpha-1}\cdot(1/\omega)}{(1-x/\omega)^{\alpha}}=\frac{\alpha}{\omega-x}$$

$$_tp_x=\frac{s(x+t)}{s(x)}=\left(\frac{\omega-x-t}{\omega-x}\right)^{\alpha}$$

$$\mathring{e}_x=\int_0^{\omega-x}{}_tp_x\,\mathrm{d}t=\frac{1}{(\omega-x)^{\alpha}}\int_0^{\omega-x}(\omega-x-t)^{\alpha}\,\mathrm{d}t=\frac{\omega-x}{\alpha+1}$$

特别地，当 $\alpha=1$ 时即得 De Moivre 律。

【例 2—7】

假设 $s(x)=1-x/\omega$ $(0<x<\omega,\ \alpha>0)$。此时 $\mu(x)$，$\mathring{e}_x$，及 $_tp_x$，$_tq_x$ 如下所示。

$$\mu(x)=\frac{1}{\omega-x};\ \mathring{e}_x=\frac{\omega-x}{2}$$

$$_tp_x=1-\frac{t}{\omega-x};\ _tq_x=\frac{t}{\omega-x}$$

【例 2—8】

给定如下选择—终极生命表的部分，其中选择期为 2 年。

$[x]$	$1\,000q_{[x]}$	$1\,000q_{[x]+1}$	$1\,000q_{x+2}$	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	$x+2$
30	0.222	0.330	0.422	9 906.738	9 904.538	9 901.270	32
31	0.234	0.352	0.459	9 902.894	9 900.576	9 897.091	33
32	0.250	0.377	0.500	9 898.754	9 896.280	9 892.549	34
33	0.269	0.407	0.545	9 894.290	9 891.628	9 887.602	35
34	0.291	0.441	0.596	9 889.451	9 886.574	9 882.214	36

由上表，计算 $_2q_{[32]+1}$ 和 $_2p_{[31]+1}$。

【解】$_2q_{[32]+1}=1-\dfrac{l_{35}}{l_{[32]+1}}=1-\dfrac{9\,887.602}{9\,896.280}=0.000\,88$

$$_2p_{[31]+1}=\frac{l_{34}}{l_{[31]+1}}=\frac{9\,892.549}{9\,900.576}=0.999\,19$$

2.6 分数年内的死亡率

K 的分布及其相关量可通过生命表计算出来。例如，由式（2.8）可得

$$_kp_x=p_xp_{x+1}p_{x+2}\cdots p_{x+k-1},\ k=1,2,3,\cdots \qquad (2.38)$$

为使用插值法得到 T 的分布，需要对死亡率 $_uq_x$ 或死亡力 μ_{x+u} 的变化模式

（这里 x 是整数，$0<u<1$）给出一些假设。以下讨论三种常见的假设。

假设 1：${}_uq_x$ 的线性假设。

假设${}_uq_x$ 是 u 的线性函数

$$ {}_uq_x=uq_x \tag{2.39}$$

此时就有

$$ {}_up_x=1-uq_x \tag{2.40}$$

由式（2.16）可得

$$\mu_{x+u}=\frac{q_x}{1-uq_x} \tag{2.41}$$

假设 2：μ_{x+u}常数假设。

一个常用的假设是死亡力在每个单位区间上都是常数。记 μ_{x+u}（$0<u<1$）的常数值是 $\mu_{x+0.5}$。由式（2.17）可得

$$\mu_{x+0.5}=-\ln p_x \tag{2.42}$$

$$ {}_up_x=e^{-u\mu_{x+0.5}}=(p_x)^u \tag{2.43}$$

假设 3：${}_{1-u}q_{x+u}$的线性假设。

该假设也称为 Balducci 假设，具体如下：

$$ {}_{1-u}q_{x+u}=(1-u)q_x \tag{2.44}$$

由式（2.8）和式（2.44）可得

$$ {}_up_x=\frac{p_x}{{}_{1-u}p_{x+u}}=\frac{1-q_x}{1-(1-u)q_x} \tag{2.45}$$

由式（2.45）和式（2.16），可得

$$\mu_{x+u}=\frac{q_x}{1-(1-u)q_x} \tag{2.46}$$

在以上三种假设下，死亡力作为年龄的函数，在整数点都是不连续的。另外，在 Balducci 假设下，死亡力在相邻的两个整数之间是单调递减的，这似乎不太合理。

【例 2—9】

假设 $q_{70}=0.04$，$q_{71}=0.05$，分别在本节假设 1 和假设 3 下计算（70）在（70.5，71.5）内死亡的概率。

【解】所求概率为：

$$ {}_{0.5}p_{70}\cdot{}_{0.5}q_{70.5}+p_{70}\cdot{}_{0.5}q_{71}$$

注意到${}_{0.5}p_{70}\cdot{}_{0.5}p_{70.5}=p_{70}$，所以${}_{0.5}p_{70.5}=p_{70}/{}_{0.5}p_{70}$。在${}_uq_x$ 的线性假设下，由式（2.39）和式（2.40）可得

$$(1-0.5\times 0.04)\frac{0.5\times 0.04}{1-0.5\times 0.04}+0.96\times 0.5\times 0.05=0.044\,0$$

而在${}_{1-s}q_{x+s}$的线性假设下，由式（2.44）和式（2.45）可得

$$\frac{0.96}{1-0.5\times 0.04}\times 0.5\times 0.04+0.96\times\frac{0.5\times 0.05}{1-0.5\times 0.05}=0.044\,2$$

习 题

2.1 已知在 $0\leqslant x<100$，$0\leqslant t\leqslant 100-x$ 时

$${}_tp_x=\frac{100-x-t}{100-x}$$

计算 μ_{45} 的值。

2.2 已知${}_tp_x=1-(t/100)^{1.5}$（$x=60$，$0<t<100$）。计算 $E[T(x)]$。

2.3 已知 $\mu_{x+t}=\dfrac{1}{85-t}+\dfrac{3}{105-t}$（$0\leqslant t<85$）。计算${}_{20}p_x$。

2.4 已知：(1) 当 $0\leqslant t<1$ 时，μ_{x+t}是常数；(2) $q_x=0.16$。计算 t 值，使得${}_tp_x=0.95$。

2.5 已知死亡力服从 De Moivre 律，$E[T(16)]=36$。计算 $\mathrm{Var}(T(16))$。

2.6 给定下表

x	e_x
75	10.5
76	10.0
77	9.5

计算${}_2p_{75}$的值（提示：应用递推关系 $e_x=p_x(1+e_{x+1})$）。

2.7 下表是选择和终极生命表的一部分，选择期为 2 年。

x	$100q_{[x]}$	$100q_{[x]+1}$	$100q_{x+2}$
30	0.438	0.574	0.699
31	0.453	0.599	0.734
32	0.472	0.634	0.790
33	0.510	0.680	0.856
34	0.551	0.737	0.937

计算 $100({}_{1|}q_{[30]+1})$。

2.8 已知：(1) $l_x=1\,000(\omega^3-x^3)$（$0\leqslant x\leqslant\omega$）；(2) $E[T(0)]=3\omega/4$。计

算 Var[$T(0)$]。这里 $l_x=l_0 \cdot {}_xp_0$，而 l_0 是事先给定的基数。

2.9 已知 $l_x=(121-x)^{1/2}$ ($0\leqslant x\leqslant 121$)。计算 21 岁的人在 40 岁之后 57 岁之前死亡的概率。

2.10 以 $\mathring{e}_{x:\overline{n}|}$ 表示 (x) 在年龄 x 与 $x+n$ 之间的期望剩余寿命。证明

$$\mathring{e}_{x:\overline{n}|}=\int_0^n t\,{}_tp_x\mu_{x+t}\mathrm{d}t+n\,{}_np_x=\int_0^n {}_tp_x\mathrm{d}t$$

第3章 人寿保险

Chapter 3

在人寿保单中，保险给付是一次性支付的。给付的时间和金额可以是随机变量 T（见第2章）的函数。因此，保险给付的时间和金额也是随机变量。

记 Z 为保险给付的现值变量，它是基于一个固定利率（又称为技术利率）计算的。称 $E(Z)$ 为趸缴净保费，$E(Z)$ 不能够反映保险人承担的风险。为评价保险人承担的风险，需要考虑变量 Z 的分布的其他特征（如方差）。

3.1 寿险的基本类型

1. 终身寿险和定期寿险

终身寿险的投保期限直到死亡为止，在被保险人死亡年末给付1个单位。因此给付金额是固定的，而给付时间 $K+1$ 是随机的。给付的现值变量为：

$$Z=v^{K+1} \tag{3.1}$$

变量 Z 的分布取决于 K 的分布，Z 的分布如下：

$$Pr(Z=v^{k+1})=Pr(K=k)={}_kp_xq_{x+k},\ k=0,1,2,\cdots \tag{3.2}$$

记 A_x 为终身寿险的趸缴净保费，按定义它是现值变量 Z 的均值，就有

$$A_x=E[v^{K+1}]=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}{}_kp_xq_{x+k} \tag{3.3}$$

现值变量 Z 的均值又称为精算现值。

变量 Z 的方差可由下式计算

$$\mathrm{Var}(Z)=E(Z^2)-(A_x)^2 \tag{3.4}$$

代人 $v=e^{-\delta}$，从而 $v^2=e^{-2\delta}$，可得

$$E(Z^2)=E(v^{2(K+1)})=E[e^{-2\delta(K+1)}] \tag{3.5}$$

式（3.5）等价于在计算趸缴净保费时，把利息力变为原来的 2 倍，即得 $E(Z^2)$。由于这个原因，有时采用符号${}^2A_x=E(Z^2)$。

n 年期定期保险只对 n 年内的死亡有 1 个单位给付，给付时间仍是死亡年末。此时

$$Z=\begin{cases}v^{K+1}, & K=0,1,\cdots,n-1\\ 0, & K=n,n+1,n+2,\cdots\end{cases} \tag{3.6}$$

记 $A^1_{x:\overline{n}|}$为 n 年期定期寿险的趸缴净保费，就有

$$A^1_{x:\overline{n}|}=\sum_{k=0}^{n-1}v^{k+1}{}_kp_xq_{x+k} \tag{3.7}$$

对定期寿险，$E(Z^2)$ 就是利息力变为原来 2 倍的趸缴净保费，其中

$$Z^2=\begin{cases}e^{-2\delta(K+1)}, & K=0,1,\cdots,n-1\\ 0, & K=n,n+1,n+2,\cdots\end{cases} \tag{3.8}$$

2. 生存保险

n 年期生存保险以 n 年后被保险人生存为给付条件，此时现值变量为：

$$Z=\begin{cases}0, & K=0,1,\cdots,n-1\\ v^n, & K=n,n+1,n+2,\cdots\end{cases} \tag{3.9}$$

记 $A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$为 n 年期生存保险的趸缴净保费，就有

$$A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}=v^n{}_np_x \tag{3.10}$$

容易看出，Z 可以写成某个贝努里变量的 v^n 倍，从而就有

$$\mathrm{Var}(Z)=v^{2n}{}_np_x{}_nq_x \tag{3.11}$$

3. 两全保险

对于 n 年期两全保险，如果被保险人在 n 年内死亡，则在死亡年末给付 1 个单位。如果被保险人活过 n 年，那么就在 n 年末给付 1 个单位。此时

$$Z=\begin{cases}v^{K+1}, & K=0,1,\cdots,n-1\\ v^n, & K=n,n+1,n+2,\cdots\end{cases} \tag{3.12}$$

记 $A_{x:\overline{n}|}$为 n 年期两全保险的趸缴净保费。将 n 年期定期寿险和 n 年期生存保险的现值变量分别记作 Z_1 和 Z_2，从而有

$$Z=Z_1+Z_2 \tag{3.13}$$

对式（3.13）两边取期望和方差，就得

$$A_{x:\overline{n}|}=A^1_{x:\overline{n}|}+A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \tag{3.14}$$

$$\mathrm{Var}(Z)=\mathrm{Var}(Z_1)+2\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)+\mathrm{Var}(Z_2) \tag{3.15}$$

注意到乘积 $Z_1Z_2=0$，因此

$$\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)=E(Z_1Z_2)-E(Z_1)E(Z_2)=-A^1_{x:\overline{n}|}A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \tag{3.16}$$

所以 Z 的方差为：

$$\mathrm{Var}(Z)=\mathrm{Var}(Z_1)+\mathrm{Var}(Z_2)-2A^1_{x:\overline{n}|}A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \tag{3.17}$$

由式（3.17）可见，如果用给付现值变量的方差来衡量保险人的风险，那么卖出一份两全保险的风险要比分别向两人卖出一份定期寿险和一份生存保险的风险要小。

至此，为了简便，假设保险金额为1。如果保险金额为 C，那么趸缴净保费需要乘以 C，而给付现值变量的方差需乘以 C^2。

下面考虑 m 年延期的终身寿险，其现值变量为：

$$Z=\begin{cases}0, & K=0,1,\cdots,m-1\\ v^{K+1}, & K=m,m+1,m+2,\cdots\end{cases} \tag{3.18}$$

记 ${}_{m|}A_x$ 为 m 年延期的终身寿险的趸缴净保费，它有如下计算公式：

$${}_{m|}A_x={}_mp_xv^mA_{x+m} \tag{3.19}$$

$${}_{m|}A_x=A_x-A^1_{x:\overline{m}|} \tag{3.20}$$

此时 $E(Z^2)$ 等于利息力变为原来2倍时的趸缴净保费。

【例3—1】

已知 $l_x=100-x$（$0\leqslant x\leqslant 100$），$i=0.05$，计算 $A_{40:\overline{25}|}$。

【解】 ${}_{k|}q_x={}_kp_xq_{x+k}=\dfrac{l_{x+k}-l_{x+k+1}}{l_x}=\dfrac{1}{100-x}$，特别地，${}_{k|}q_{40}=\dfrac{1}{60}$。

$$\begin{aligned}A_{40:\overline{25}|}&=\sum_{k=0}^{24}(1.05)^{-(k+1)}\frac{1}{60}+v^{25}{}_{25}p_{40}=\frac{1}{60}a_{\overline{25}|0.05}+v^{25}\frac{35}{60}\\&=\frac{1}{60}\times 14.093\,95+\frac{7}{12}\times 0.295\,308=0.407\,2\end{aligned}$$

【例3—2】

假设 $A_x=0.25$，$A_{x+20}=0.40$，$A_{x:\overline{20}|}=0.55$。计算 $A^1_{x:\overline{20}|}$ 和 $A_{x:\overline{20}|}^{\ \ 1}$。

【解】 首先按定义容易验证 $A_x=A^1_{x:\overline{20}|}+A_{x:\overline{20}|}^{\ \ 1}\cdot A_{x+20}$。注意到 $A_{x:\overline{20}|}=A^1_{x:\overline{20}|}+A_{x:\overline{20}|}^{\ \ 1}$，就有

$$\begin{aligned}A_x&=A^1_{x:\overline{20}|}+A_{x:\overline{20}|}^{\ \ 1}\cdot A_{x+20}=A_{x:\overline{20}|}-A_{x:\overline{20}|}^{\ \ 1}+A_{x:\overline{20}|}^{\ \ 1}\cdot A_{x+20}\\&=A_{x:\overline{20}|}-(1-A_{x+20})A_{x:\overline{20}|}^{\ \ 1}\end{aligned}$$

即 $0.25=0.55-0.60A_{x:\overline{20}|}^{\ \ 1}$，由此可得 $A_{x:\overline{20}|}^{\ \ 1}=0.50$。

最后，$A^1_{x:\overline{20}|}=A_{x:\overline{20}|}-A_{x:\overline{20}|}^{\ \ \ 1}=0.05$。

3.2 保额在死亡时刻支付

在3.1节里，假设保额在被保险人死亡年末给付。这个假设的优点在于可直接利用生命表进行计算，缺点在于不能准确反映保险实践。

这里假设保额在死亡时刻支付，即在时刻 T 给付。对终身寿险，在死亡时刻，1个单位给付的现值为：

$$Z=v^T \tag{3.21}$$

记 $\overline{A}_x$ 为趸缴净保费。利用第2章的式（2.14），就有

$$\overline{A}_x=\int_0^\infty v^t\,{}_tp_x\mu_{x+t}\,\mathrm{d}t \tag{3.22}$$

从2.6节的假设1，可得到一个实用的近似。为此注意到

$$T=K+S=(K+1)-(1-S) \tag{3.23}$$

假设 K 和 S 是独立的，而且 S 有均匀分布，那么

$$E[(1+i)^{1-S}]=\int_0^1(1+i)^u\,\mathrm{d}u=\bar{s}_{\overline{1}|}=\frac{i}{\delta} \tag{3.24}$$

从而就有

$$\overline{A}_x=E[v^{K+1}]E[(1+i)^{1-S}]=\frac{i}{\delta}A_x \tag{3.25}$$

对于定期寿险，类似的公式也成立。但对于两全保险，因子 i/δ 仅用于定期寿险部分：

$$\overline{A}_{x:\overline{n}|}=\overline{A}^1_{x:\overline{n}|}+A_{x:\overline{n}|}^{\ \ \ 1}=\frac{i}{\delta}A^1_{x:\overline{n}|}+A_{x:\overline{n}|}^{\ \ \ 1} \tag{3.26}$$

进一步考虑如下情形：把一年等分成 m 个区间，假设保险金额在被保险人死亡时刻对应的那个区间末支付，即在时刻 $K+S^{(m)}$ 支付（见2.4节）。因此，1个单位给付的现值变量为：

$$Z=v^{K+S^{(m)}} \tag{3.27}$$

为计算趸缴净保费，继续采用2.6节的假设1。注意到

$$K+S^{(m)}=(K+1)-(1-S^{(m)}) \tag{3.28}$$

假设 K 和 $S^{(m)}$ 是独立的，而且 $S^{(m)}$ 有均匀分布，那么

$$E[(1+i)^{1-S^{(m)}}]=s_{\overline{1}|}^{(m)}=\frac{i}{i^{(m)}} \tag{3.29}$$

从而得到

$$A_x^{(m)}=E[Z]=E[v^{K+1}]E[(1+i)^{1-S^{(m)}}]=\frac{i}{i^{(m)}}A_x \tag{3.30}$$

如在式（3.30）中令 m 趋于无穷，可得式（3.25）。

【例 3—3】

已知 $l_x=100-x$ （$0\leqslant x\leqslant 100$），$\delta=0.05$，计算：(1) $\bar{A}^1_{40:\overline{25}|}$；(2) 签发给 (40) 的 25 年期定期寿险，在时刻 t 的保险给付 $b_t=e^{0.05t}$，计算该寿险的精算现值。

【解】${}_tp_x=\dfrac{100-x-t}{100-x}$，$\mu_x(t)=-(\ln{}_tp_x)'=\dfrac{1}{100-x-t}$，${}_tp_x\mu_x(t)=\dfrac{1}{100-x}$。

(1) $\bar{A}^1_{40:\overline{25}|}=\dfrac{1}{60}\displaystyle\int_0^{25}e^{-0.05t}dt=\dfrac{1}{60}[20-20e^{-1.25}]=0.2378$

(2) $\dfrac{1}{60}\displaystyle\int_0^{25}e^{0.05t}\cdot e^{-0.05t}dt=\dfrac{25}{60}=0.4167$

【例 3—4】

已知 $l_x=100-x$ （$0\leqslant x\leqslant 100$），$i=0.10$。计算：(1) $\bar{A}^1_{30:\overline{10}|}$；(2) 现值变量的方差。

【解】 首先，如例 3—3 所示，${}_tp_x\mu_x(t)=\dfrac{1}{100-x}$。

(1) $\bar{A}^1_{30:\overline{10}|}=\dfrac{1}{70}\displaystyle\int_0^{10}(1.10)^{-t}dt=\dfrac{1}{70}\left\{\dfrac{1}{\ln 1.1}[1-(1.1)^{-10}]\right\}=0.0921$

(2) ${}^2\bar{A}^1_{30:\overline{10}|}=\dfrac{1}{70}\displaystyle\int_0^{10}(1+j)^{-t}dt$，其中 $\ln(1+j)=\delta_j=2\delta_{0.10}=2\ln(1.10)=\ln(1.10)^2$，所以 $1+j=(1.10)^2$，$(1+j)^{-10}=(1.10)^{-20}$。

$${}^2\bar{A}^1_{30:\overline{10}|}=\frac{1}{70}\int_0^{10}(1+j)^{-t}dt=\frac{1}{70}\left\{\frac{1}{\ln(1.1)^2}[1-(1.1)^{-20}]\right\}=0.0638$$

现值变量的方差就是

$${}^2\bar{A}^1_{30:\overline{10}|}-(\bar{A}^1_{30:\overline{10}|})^2=0.0553$$

3.3 人寿保险的一般类型

现在考虑保险金额随时间变化的寿险，假设保额于被保险人死亡年末给付。用 c_j 表示保单签发后第 j 年的保险金额，那么就有

$$Z=c_{K+1}v^{K+1} \tag{3.31}$$

容易计算 Z 的分布、趸缴净保费，更一般地，Z 的矩为：

$$E[Z^h]=\sum_{k=0}^{\infty}c_{k+1}^{h}v^{h(k+1)}{}_{k}p_{x}q_{x+k} \tag{3.32}$$

如果保额在被保险人死亡时刻给付，而且保额为 t 的函数 $c(t)$ $(t\geqslant 0)$，就有

$$Z=c(T)v^{T} \tag{3.33}$$

趸缴净保费为：

$$E(Z)=\int_{0}^{\infty}c(t)v^{t}{}_{t}p_{x}\mu_{x+t}\mathrm{d}t \tag{3.34}$$

有了寿险的一般类型的概念和结构后，下一节就可以考虑一些特殊类型的寿险。

3.4 变额寿险的标准类型

(1) 首先考虑保额于死亡年末给付的变额寿险的标准类型。

标准的递增终身寿险，此时 $c_j=j$。现值变量为：

$$Z=(K+1)v^{K+1} \tag{3.35}$$

记 $(IA)_x$ 为增额终身寿险的趸缴净保费，那么就有

$$(IA)_x=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}{}_{k}p_{x}q_{x+k} \tag{3.36}$$

相应地，对于 n 年定期保险，现值变量为：

$$Z=\begin{cases}(K+1)v^{K+1}, & K=0,1,\cdots,n-1\\ 0, & K=n,n+1,n+2,\cdots\end{cases} \tag{3.37}$$

记 $(IA)_{x:\overline{n}|}^{1}$ 为 n 年期增额寿险的趸缴净保费，它可由式 (3.36) 的前 n 项求和得到。注意 $(IA)_{x:\overline{n}|}^{1}$ 和 $(IA)_{x:\overline{n}|}$ 的区别，后者等于前者加上一个 n 年期生存保险的趸缴净保费。

减额定期寿险的给付从 n 到 0 线性减少，因此有

$$Z=\begin{cases}(n-K)v^{K+1}, & K=0,1,\cdots,n-1\\ 0, & K=n,n+1,n+2,\cdots\end{cases} \tag{3.38}$$

趸缴净保费为：

$$(DA)_{x:\overline{n}|}^{1}=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^{k+1}{}_{k}p_{x}q_{x+k} \tag{3.39}$$

(2) 假设保额在死亡时刻支付，保额是逐年增加的，$c(t)=[t+1]$，此时有

$$Z=(K+1)v^{T} \tag{3.40}$$

记 $(I\bar{A})_x$ 为趸缴净保费。现值变量为：

$$Z=(K+1)v^{K+1}(1+i)^{1-S} \tag{3.41}$$

假设 K 和 S 是独立的，S 有均匀分布，应用式（3.24），可得

$$(I\bar{A})_x=\frac{i}{\delta}(IA)_x \tag{3.42}$$

现在考虑保额每年增加 q 次，每次增加 $1/q$ 的情况，此时现值变量为：

$$Z=(K+S^{(q)})v^T \tag{3.43}$$

相应地，记$(I^{(q)}\bar{A})_x$ 为趸缴净保费。为计算趸缴净保费，应用独立性及均匀分布假设。以下只给出结论，细节略去。

$$(I^{(q)}\bar{A})_x=\frac{i}{\delta}(IA)_x-\frac{i}{\delta}A_x+\frac{i-d^{(q)}}{d^{(q)}\delta}A_x \tag{3.44}$$

（3）保额连续增长的情形，$c(t)=t$，现值变量为：

$$Z=Tv^T \tag{3.45}$$

记$(\bar{I}\bar{A})_x$ 为趸缴净保费，它可通过在式（3.44）中令 q 趋于无穷得到：

$$(\bar{I}\bar{A})_x=\frac{i}{\delta}(IA)_x-\frac{i}{\delta}A_x+\frac{i-\delta}{\delta^2}A_x \tag{3.46}$$

【例 3—5】

已知 $l_x=100-x$（$0\leqslant x\leqslant 100$），$i=0.05$，求$(IA)_{40}$。

【解】 如例 3—1 所示，${}_{k|}q_x={}_kp_xq_{x+k}=\dfrac{l_{x+k}-l_{x+k+1}}{l_x}=\dfrac{1}{100-x}$，特别地，${}_{k|}q_{40}=\dfrac{1}{60}$。

$$(IA)_x=\sum_{k=0}^{100-x-1}(k+1)v^{k+1}{}_{k|}q_x$$

$$(IA)_{40}=\frac{1}{60}\sum_{k=0}^{59}(k+1)v^{k+1}=\frac{1}{60}(Ia)_{\overline{60}|}=\frac{1}{60}\left[\frac{\ddot{a}_{\overline{60}|}-60v^{60}}{0.05}\right]=5.554\,5$$

3.5 递推公式

递推公式可用于编写算法，同时也有一些有趣的理论含义。

先考虑在死亡年末支付 1 个单位的终身寿险，此时

$$A_x=vq_x+vp_xA_{x+1} \tag{3.47}$$

因此，A_x 的值可从最大年龄开始，通过递推计算得到。式（3.47）的代数证明用到下式

$$ {}_kp_x = p_x \, {}_{k-1}p_{x+1} \tag{3.48} $$

把式（3.48）代入式（3.3）除第一项外的所有各项，就得到式（3.47）。式（3.47）的概率证明要用到下式：

$$ E[v^{K+1}] = vPr(K=0) + vE[v^{(K-1)+1} \mid K \geqslant 1]Pr(K \geqslant 1) \tag{3.49} $$

注意到（x）的整数剩余寿命为 K，那么（$x+1$）的整数剩余寿命就为 $K-1$。式（3.47）有一个直观解释。x 岁时的趸缴净保费是一个随机变量的期望值，在未来一年内分两种情况考虑：若死亡就对应于式（3.47）右边第 1 项；若生存就考虑在 $x+1$ 岁时的趸缴净保费，再贴现到 x 岁。

把式（3.47）改写为如下形式，可给出其另外一种解释

$$ A_x = vA_{x+1} + v(1-A_{x+1})q_x \tag{3.50} $$

因此，在第一年末，无论生存或死亡，都要留出 A_{x+1}。在死亡情形下，需要额外的 $1-A_{x+1}$，与 A_{x+1} 相加得到死亡给付 1。保额为 $1-A_{x+1}$ 的一年期定期保险的趸缴净保费就是 $v(1-A_{x+1})q_x$。

把式（3.50）应用到年龄 $x+k$，就有

$$ A_{x+k} - vA_{x+k+1} = v(1-A_{x+k+1})q_{x+k},\ k=0,1,2,\cdots \tag{3.51} $$

上式两边乘以 v^k，再对所有的 k 求和，就得

$$ A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k v(1-A_{x+k+1})q_{x+k} \tag{3.52} $$

因此 x 岁时的趸缴净保费是一系列一年期定期寿险的趸缴净保费之和（考虑到现值）。

式（3.50）也可写成

$$ dA_{x+1} = (A_{x+1} - A_x) + v(1-A_{x+1})q_x \tag{3.53} $$

式（3.53）的解释如下：已赚利息有两个效应，一方面从 x 到 $x+1$ 岁时，它使得趸缴净保费增加；另一方面它提供了虚构的一年期定期寿险的保费。

□ 习 题

3.1 已知：(1) 生存函数 $s(x)=1-x/100$ $(0\leqslant x\leqslant 100)$；(2) 利息力 $\delta=0.10$。计算 $5\,000\bar{A}_{30}$。

3.2 验证 $\dfrac{(IA)_x - A^1_{x:\overline{1|}}}{(IA)_{x+1}+A_{x+1}} = vp_x$。

3.3 设 Z_1 是关于（x）的保额为 1 的 n 年期连续型两全保险的现值变量。Z_2 是关于（x）的保额为 1 的 n 年期连续型定期寿险的现值变量。已知 $\mathrm{Var}(Z_2)=0.01$，$v^n=0.30$，${}_np_x=0.8$，$E[Z_2]=0.04$。计算 $\mathrm{Var}(Z_1)$。

3.4　已知 $A_{x:\overline{n}|}=u$，$A^{1}_{x:\overline{n}|}=y$，$A_{x+n}=z$。用 u，y，z 表示 A_x。

3.5　假设死亡力和利息力分别为常数 μ 和 δ，用 μ 和 δ 表示 $\mathrm{Var}(v^T)$。

3.6　已知：(1) 生存函数 $s(x)=1-x/100$ $(0\leqslant x\leqslant 100)$；(2) 利息力 $\delta=0.10$；(3) 保额在死亡时刻支付。计算关于 (50) 的保额 5 000 期限 10 年的两全保险的趸缴净保费。

3.7　关于 (x) 的在死亡年末给付 1 个单位的 2 年期定期寿险，已知 $q_x=0.50$，$i=0$，$\mathrm{Var}(Z)=0.177\,1$。计算 q_{x+1}。

3.8　关于 (x) 的 3 年期定期寿险，已知：

年份 t	死亡给付	q_{x+t}
0	3	0.20
1	2	0.25
2	1	0.50

假设 $v=0.9$，保额在死亡年末给付，记 Π 为死亡给付现值的期望，计算实际给付的现值超过 Π 的概率。

3.9　有 100 个 x 岁的社团成员，每人均向基金缴费 w，基金年利率为 $i=10\%$，该基金在每个成员去世时刻给付 1 000，并有 95% 的概率能够履行这项给付义务。假设各个成员的生存状况相互独立，已知 $\bar{A}_x=0.06$，${}^2\bar{A}_x=0.01$，计算 w。

3.10　关于 (x) 的保险规定：(1) 如果被保险人在 20 年后仍生存，给付 10 000；(2) 如果被保险人在 20 年内死亡，在死亡年末给付趸缴净保费 Π。给出计算 Π 的表达式。

第4章 生命年金

Chapter 4

生命年金是受益人生存时得到的一系列给付。因此，生命年金可视为期限为未来寿命 T 的年金，其现值为随机变量，记为 Y。生命年金的趸缴净保费是 $E(Y)$；更一般地，Y 的分布及矩也有其价值。

一方面，生命年金可看成一系列生存保险的组合；另一方面，分期缴纳的保费也可视为生命年金。

4.1 生命年金的基本类型

1. 终身年金

考虑期初终身生命年金，该年金在受益人生存时提供1个单位的年给付额，给付发生在时点0，1，…，K。这一系列给付的现值变量为：

$$Y=1+v+v^2+\cdots+v^K=\ddot{a}_{\overline{K+1}|} \tag{4.1}$$

Y 的概率分布为：

$$Pr(Y=\ddot{a}_{\overline{k+1}|})=Pr(K=k)={}_kp_xq_{x+k},\ k=0,1,2,\cdots \tag{4.2}$$

记 $\ddot{a}_x$ 为趸缴净保费

$$\ddot{a}_x=\sum_{k=0}^{\infty}\ddot{a}_{\overline{k+1}|}\,{}_kp_xq_{x+k} \tag{4.3}$$

另外，式（4.1）也可表示为：

$$Y=\sum_{k=0}^{\infty}v^kI_{(K\geq k)} \tag{4.4}$$

式中，I_A 为事件 A 的示性函数。对式（4.4）取期望得到

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_kp_x \tag{4.5}$$

因此，对于期初终身生命年金的趸缴净保费，可有两种表达式。在表达式(4.3)中，我们把整个年金作为一个整体来考虑，而在表达式(4.5)中，我们把年金视为一系列生存保险。顺便指出，一个常用的精算符号为${}_nE_x = v^n {}_np_x$，称为精算贴现因子。

期初终身生命年金的趸缴净保费也可以用终身寿险的趸缴净保费来表示，后者就是第3章的式(3.1)与式(3.3)。式(4.1)表示为：

$$Y = \frac{1-v^{K+1}}{d} = \frac{1-Z}{d} \tag{4.6}$$

对式(4.6)两边取期望，可得

$$\ddot{a}_x = \frac{1-A_x}{d} \tag{4.7}$$

变形就是

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x \tag{4.8}$$

对式(4.8)可以这样理解：对于1个单位的债务，在生存时每年初支付利息d，在死亡年末支付1个单位，就可偿还债务。Y的高阶矩可由式(4.6)得到，例如

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{\mathrm{Var}(Z)}{d^2} = \frac{{}^2A_x - (A_x)^2}{d^2} \tag{4.9}$$

2. 定期年金

n年期期初生命年金的现值变量为：

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & K=0,1,\cdots,n-1 \\ \ddot{a}_{\overline{n}|}, & K=n,n+1,n+2,\cdots \end{cases} \tag{4.10}$$

类似于式(4.3)和式(4.5)，趸缴净保费有两种形式

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_kp_x q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|}\, {}_np_x \tag{4.11}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_kp_x \tag{4.12}$$

注意到

$$Y = \frac{1-Z}{d} \tag{4.13}$$

式中，Z由第3章式(3.12)定义。从而

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=\frac{1-A_{x:\overline{n}|}}{d} \tag{4.14}$$

$$1=d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}+A_{x:\overline{n}|} \tag{4.15}$$

另外，在式（4.13）两边取方差，可得到与式（4.9）类似的公式，只需把那里的 A_x 换成 $A_{x:\overline{n}|}$ 即可。

延期 1 年的期初生命年金在时点 1，2，…，K 给付，现值变量为：

$$Y=v+v^2+\cdots+v^K=a_{\overline{K}|} \tag{4.16}$$

式（4.1）和式（4.16）只差 1 项，因此

$$a_x=\ddot{a}_x-1 \tag{4.17}$$

延期 m 年的期初生命年金，年度给付为 1 个单位，其现值变量为：

$$Y=\begin{cases}0, & K=0,1,\cdots,m-1\\ v^m+v^{m+1}+\cdots+v^K, & K=m,m+1,\cdots\end{cases} \tag{4.18}$$

显然，趸缴净保费有以下两种表示：

$${}_{m|}\ddot{a}_x={}_mp_xv^m\ddot{a}_{x+m} \tag{4.19}$$

$${}_{m|}\ddot{a}_x=\ddot{a}_x-\ddot{a}_{x:\overline{m}|} \tag{4.20}$$

【例 4—1】

证明以下等式：

(1) ${}^2A_x=1-(2d-d^2)\,{}^2\ddot{a}_x$；

(2) $\mathrm{Var}(v^{K+1})=2d(\ddot{a}_x-{}^2\ddot{a}_x)-d^2(\ddot{a}_x^2-{}^2\ddot{a}_x)$；

(3) $\mathrm{Var}(\ddot{a}_{\overline{K+1}|})=\dfrac{2}{d}(\ddot{a}_x-{}^2\ddot{a}_x)-(\ddot{a}_x^2-{}^2\ddot{a}_x)$。

【证明】 由 $A_x=1-d\ddot{a}_x$ 即得 ${}^2A_x=1-d'\,{}^2\ddot{a}_x$，其中 d' 对应于 2δ，d 对应于 δ。

由于 $\delta=-\ln(1-d)$，所以 $2\delta=-2\ln(1-d)=-\ln(1-d)^2=-\ln(1-2d+d^2)$，即 $d'=2d-d^2$。由此即证等式（1）。

为证等式（2），注意到

$$\mathrm{Var}(v^{K+1})={}^2A_x-A_x{}^2=1-(2d-d^2)\,{}^2\ddot{a}_x-(1-d\ddot{a}_x)^2$$

展开化简即证等式（2）。

为证等式（3），注意到

$$\mathrm{Var}(\ddot{a}_{\overline{K+1}|})=\frac{\mathrm{Var}(v^{K+1})}{d^2}$$

把等式（2）的结论代入并化简即证等式（3）。

4.2 年内给付次数多于一次的生命年金

考虑一年给付 m 次，每次给付 $1/m$ 的生命年金。只要受益人生存，就在时

刻 0，$1/m$，$2/m$，…有给付。该生命年金的趸缴净保费记作 $\ddot{a}_x^{(m)}$。类似于式（4.8）和式（4.15），可得

$$1=d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)}+A_x^{(m)} \tag{4.21}$$

由式（4.21）即得

$$\ddot{a}_x^{(m)}=\frac{1}{d^{(m)}}-\frac{1}{d^{(m)}}A_x^{(m)} \tag{4.22}$$

式（4.22）可以这样理解：一年给付 m 次的生命年金可视为两个永续年金之差，其中一个永续年金从时刻 0 开始，另一个从时刻 $K+S^{(m)}$ 开始，取期望就得到式（4.22）。

为使用 $\ddot{a}_x$ 表示 $\ddot{a}_x^{(m)}$，需要 2.6 节的假设 1，从而得到第 3 章的式（3.30），即 $A_x^{(m)}$ 通过 A_x 表示，再把 A_x 换成 $1-d\ddot{a}_x$，那么式（4.22）就变为：

$$\ddot{a}_x^{(m)}=\frac{di}{d^{(m)}i^{(m)}}\ddot{a}_x-\frac{i-i^{(m)}}{d^{(m)}i^{(m)}} \tag{4.23}$$

引入符号

$$\alpha(m)=\frac{di}{d^{(m)}i^{(m)}},\beta(m)=\frac{i-i^{(m)}}{d^{(m)}i^{(m)}} \tag{4.24}$$

那么式（4.22）可简记为：

$$\ddot{a}_x^{(m)}=\alpha(m)\ddot{a}_x-\beta(m) \tag{4.25}$$

举例来说，当 $i=5\%$，$m=12$ 和 $m=\infty$时，$\alpha(m)$ 和 $\beta(m)$ 的取值如下：

m	$\alpha(m)$	$\beta(m)$
12	1.000 197	0.466 51
∞	1.000 198	0.508 23

在实践中经常使用的近似如下：

$$\alpha(m)\approx 1,\beta(m)\approx\frac{m-1}{2m} \tag{4.26}$$

上述近似可通过函数 $\alpha(m)$ 和 $\beta(m)$ 在 $\delta=0$ 附近的泰勒展开得到

$$\alpha(m)=1+\frac{m^2-1}{12m^2}\delta^2+\cdots \tag{4.27}$$

$$\beta(m)=\frac{m-1}{2m}+\frac{m^2-1}{6m^2}\delta+\cdots \tag{4.28}$$

显然，上述近似仅在利息力较小时适用。

一年给付 m 次的期初定期生命年金的趸缴净保费也可使用 $\alpha(m)$ 和 $\beta(m)$ 来计算：

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}&=\ddot{a}_x^{(m)}-{}_np_xv^n\ddot{a}_{x+n}^{(m)}\\&=\alpha(m)\ddot{a}_x-\beta(m)-{}_np_xv^n\{\alpha(m)\ddot{a}_{x+n}-\beta(m)\}\\&=\alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-\beta(m)\{1-{}_np_xv^n\}\end{aligned}\tag{4.29}$$

一年给付 m 次的期末生命年金的趸缴净保费有如下表示：

$$a_{x:\overline{n}|}^{(m)}=\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}-\frac{1}{m}+\frac{1}{m}{}_np_xv^n\tag{4.30}$$

再次回到 $\ddot{a}_x^{(m)}$ 的计算。利用式（4.8）和式（4.22），变形得到

$$\ddot{a}_x^{(m)}=\frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_x-\frac{1}{d^{(m)}}\{A_x^{(m)}-A_x\}\tag{4.31}$$

式（4.31）可以这样理解：等号左边的生命年金在时刻 0，$1/m$，…，$K+S^{(m)}-1/m$ 均给付 $1/m$，这可视为两个定期年金之差，第一个定期年金在时刻 0，$1/m$，…，$K+1-1/m$ 给付，第二个定期年金在时刻 $K+S^{(m)}$，$K+S^{(m)}+1/m$，…，$K+1-1/m$ 给付。进一步，第二个定期年金可视为两个永续年金之差（一个从时刻 $K+S^{(m)}$ 开始；另一个从时刻 $K+1$ 开始）。而第一个定期年金与提供 $K+1$ 次年给付为 $d/d^{(m)}$ 的期初生命年金有相同的现值。取期望即得式（4.31）。

在 2.6 节的假设 1 下，利用第 3 章式（3.30），由式（4.31）可得

$$\ddot{a}_x^{(m)}=\frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_x-\beta(m)A_x\tag{4.32}$$

顺便指出，在式（4.21）中令 m 趋于无穷，可得如下等式

$$1=\delta\bar{a}_x+\bar{A}_x$$

【例 4—2】

已知 $i=0.06$，$\ddot{a}_{65}=9.896\,9$，计算从 65 岁开始，每月初支付 1 000 元的生存年金的精算现值。

【解】 首先

$$\alpha(12)=s_{\overline{1}|}^{(12)}\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(12)}=1.000\,281,\ \beta(12)=\frac{s_{\overline{1}|}^{(12)}-1}{d^{(12)}}=0.468\,119\,5$$

$$A_{65}=1-d\ddot{a}_{65}=0.439\,796$$

所求的精算现值为 $12\,000\ddot{a}_{65}^{(12)}$。由式（4.25）可得

$$12\,000\ddot{a}_{65}^{(12)}=12\,000[\alpha(12)\ddot{a}_{65}-\beta(12)]=113\,179$$

【例 4—3】

已知 $i=0.06$，$\ddot{a}_{40}=14.816\,61$，$\ddot{a}_{70}=8.569\,25$，${}_{30}E_{40}=0.123\,689$，计算 $\ddot{a}_{40:\overline{30}|}^{(12)}$。

【解】 引用例 4—2 中的结论。由式（4.29），可得

$$\begin{aligned}\ddot{a}^{(12)}_{40:\overline{30}|}&=\alpha(12)\ddot{a}_{40:\overline{30}|}-\beta(12)(1-{}_{30}E_{40})\\&=\alpha(12)(\ddot{a}_{40}-{}_{30}E_{40}\ddot{a}_{70})-\beta(12)(1-{}_{30}E_{40})\\&=13.350\,38\end{aligned}$$

【例 4—4】

证明 $\mathrm{Var}(\bar{a}_{\overline{T}|})$ 可表示如下：

$$\frac{2}{\delta}(\bar{a}_x-{}^2\bar{a}_x)-\bar{a}_x^2$$

【证明】 由 $\bar{a}_{\overline{T}|}=\dfrac{1-v^T}{\delta}$ 可得

$$\mathrm{Var}(\bar{a}_{\overline{T}|})=\frac{\mathrm{Var}(v^T)}{\delta^2}=\frac{1}{\delta^2}[{}^2\bar{A}_x-\bar{A}_x^2]=\frac{1}{\delta^2}[1-2\delta^2\bar{a}_x-(1-\delta\bar{a}_x)^2]$$

化简整理后即证。

【例 4—5】

已知 $i=0.06$，$A_{20}=0.065\,284\,8$，$A_{50}=0.249\,047\,5$。假设在每年内死亡均匀分布，计算 $\bar{a}_{20}$ 和 $\bar{a}_{50}$。

【解】 对 $i=0.06$，$\delta=\ln(1+0.06)=0.058\,268\,9$，$i/\delta=1.029\,708\,7$。

由 $1=\delta\bar{a}_x+\bar{A}_x$，得到

$$\bar{a}_x=\frac{1}{\delta}\left(1-\frac{i}{\delta}A_x\right)$$

代入相应的数值，就得到 $\bar{a}_{20}=16.008\,12$，$\bar{a}_{50}=12.760\,73$。

4.3 变额生命年金

先考虑在时刻 0，1，…，K 给付 r_0，r_1，r_2，…的生命年金，其现值变量为：

$$Y=\sum_{k=0}^{\infty}v^k r_k I_{(K\geq k)} \tag{4.33}$$

趸缴净保费为：

$$E(Y)=\sum_{k=0}^{\infty}v^k r_k\,{}_kp_x \tag{4.34}$$

再考虑一个在时刻 0，$1/m$，$2/m$，…，$K+S^{(m)}-1/m$ 给付 z_0，$z_{1/m}$，$z_{2/m}$，…的生命年金。趸缴净保费的形式与式（4.34）类似。

连续给付的生命年金可通过令 m 趋于无穷得到。记时刻 t 的年金支付率为

$r(t)$，那么年金现值为：

$$Y=\int_0^T v^t r(t)\mathrm{d}t \tag{4.35}$$

趸缴净保费为：

$$E(Y)=\int_0^\infty v^t r(t)\,{}_tp_x\mathrm{d}t \tag{4.36}$$

4.4 生命年金的标准类型

在式（4.33）中令 $r_k=k+1$，相应的生命年金的趸缴净保费记为$(I\ddot{a})_x$，应用式（4.34）很容易计算。

$(I\ddot{a})_x$和$(IA)_x$可通过一个简单的恒等式联系在一起。为此需要下式（证明略去）：

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}=d(I\ddot{a})_{\overline{n}|}+nv^n \tag{4.37}$$

在式（4.37）中把 n 换成 $K+1$，再取期望就得

$$\ddot{a}_x=d(I\ddot{a})_x+(IA)_x \tag{4.38}$$

现考虑一年给付 m 次，而给付额按年度递增的情况

$$z_{k+j/m}=\frac{k+1}{m},\ j=0,1,\cdots,m-1 \tag{4.39}$$

该生命年金的趸缴净保费记为$(I\ddot{a})_x^{(m)}$。可把该年金表示成为一系列延期年金之和，再由式（4.25），可得

$$\begin{aligned}(I\ddot{a})_x^{(m)}&=\sum_{k=0}^\infty {}_kp_x v^k\ddot{a}_{x+k}^{(m)}\\&=\sum_{k=0}^\infty {}_kp_x v^k\{\alpha(m)\ddot{a}_{x+k}-\beta(m)\}\\&=\alpha(m)\sum_{k=0}^\infty {}_kp_x v^k\ddot{a}_{x+k}-\beta(m)\sum_{k=0}^\infty {}_kp_x v^k\\&=\alpha(m)(I\ddot{a})_x-\beta(m)\ddot{a}_x\end{aligned} \tag{4.40}$$

在式（4.40）中令 m 趋于无穷，就得到相应的连续生命年金（支付率 $r(t)=[t+1]$）的趸缴净保费：

$$\begin{aligned}(I\bar{a})_x&=\int_0^\infty [t+1]v^t\,{}_tp_x\mathrm{d}t\\&=\alpha(\infty)(I\ddot{a})_x-\beta(\infty)\ddot{a}_x\end{aligned} \tag{4.41}$$

而支付率 $r(t)=t$ 的连续生命年金的现值变量为：

$$Y=\int_0^T tv^t\,\mathrm{d}t=(\bar{I}\bar{a})_{\overline{T}|}=\frac{\bar{a}_{\overline{T}|}-Tv^T}{\delta} \tag{4.42}$$

对式 (4.42) 两边取期望就得

$$(\bar{I}\bar{a})_x=\frac{\bar{a}_x-(\bar{I}\bar{A})_x}{\delta} \tag{4.43}$$

由式 (4.25)，令 m 趋于无穷，就得 $\bar{a}_x$ 的表示，再由第 3 章的式 (3.46)，即可计算上式。

4.5 递推公式

本节仅限于讨论函数 $\ddot{a}_x$。在式 (4.5) 中用 $p_{x\,k-1}p_{x+1}$ 代换除第一项之外的所有项中的 ${}_kp_x$，即得

$$\ddot{a}_x=1+v\ddot{a}_{x+1}p_x \tag{4.44}$$

因此从生命表的最大年龄开始就可以递推算出 $\ddot{a}_x$ 的值。

与式 (4.44) 等价的表达式是

$$\ddot{a}_x=1+v\ddot{a}_{x+1}-v\ddot{a}_{x+1}q_x \tag{4.45}$$

可见趸缴净保费等于在 x 岁的给付 1，加上 $x+1$ 岁的趸缴净保费的现值，再减去预期的死亡所得。

在式 (4.45) 中令 $x=x+k$，就得

$$\ddot{a}_{x+k}-v\ddot{a}_{x+k+1}=1-v\ddot{a}_{x+k+1}q_{x+k} \tag{4.46}$$

在上式两边都乘以 v^k，再对 k 求和，就得

$$\ddot{a}_x=\ddot{a}_{\overline{\infty}|}-\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}\ddot{a}_{x+k+1}q_{x+k} \tag{4.47}$$

因此趸缴净保费可视为一项永续年金的现值减去每年内的死亡所得。

把式 (4.45) 写成

$$d\ddot{a}_{x+1}=1+(\ddot{a}_{x+1}-\ddot{a}_x)-v\ddot{a}_{x+1}q_x \tag{4.48}$$

由式 (4.48)，已赚利息的作用就变得明显了。

□ 习 题

4.1 已知 $\ddot{a}_{40:\overline{30}|}=15.140\,4$，$v^{30}{}_{30}p_{40}=0.164\,4$，$i=5\%$，计算 $\ddot{a}^{(2)}_{40:\overline{30}|}$。

4.2 验证 $\dfrac{(I\ddot{a})_x-\ddot{a}_{x:\overline{1}|}}{(I\ddot{a})_{x+1}+\ddot{a}_{x+1}}=a_{x:\overline{1}|}$。

4.3 关于 (x) 的 3 年期期初生命年金的信息如下。已知 $v=0.9$，计算年金现值变量的方差。

t	年金给付	p_{x+t}
0	2	0.80
1	3	0.75
2	4	0.50

4.4 已知：(1) $l_x=100-x$ $(0\leqslant x\leqslant 100)$；(2) $i=0$。计算 $(I\bar{a})_{95}$。

4.5 设 Y 是关于 (x) 的年给付为 1 个单位的期初终身生命年金的现值变量。已知：当 $i=1/24=e^{\delta}-1$ 时，$\ddot{a}_x=10$；当 $i=e^{2\delta}-1$ 时，$\ddot{a}_x=6$。计算 Y 的方差。

4.6 已知 $i=0.03$，根据下表计算 p_{73}。

x	72	73	74	75
$\ddot{a}_x$	8.06	7.73	7.43	7.15

4.7 关于 (x) 的 3 年期期初生命年金的信息如下，假设 $i=0.10$。计算年金的给付现值超过 4 的概率。

t	年金给付	p_{x+t}
0	2	0.80
1	3	0.75
2	4	0.50

4.8 已知 $l_x=100-x$ $(0\leqslant x\leqslant 100)$，$i=0$。关于 (80) 的终身生命连续年金第 1 年内支付率为 1，之后各年内支付率为 2。计算该年金的现值。

4.9 已知 $\delta=0$，$\int_0^{\infty} t\,{}_tp_x\,\mathrm{d}t=g$，$\mathrm{Var}(\bar{a}_{\overline{T|}})=h$。用 g 和 h 表示 $E[T]$。

4.10 给定利息力 $\delta>0$，$E(\bar{a}_{\overline{T|}})=10$；当利息力为 2δ 时，$E(\bar{a}_{\overline{T|}})=7.375$。另外 $\mathrm{Var}(\bar{a}_{\overline{T|}})=50$。计算 $\bar{A}_x$。

第 5 章 寿险净保费

Chapter 5

一份保单一方面指定保险人所支付的保险给付（保险给付可能是一次性支付，也可能由一系列支付构成）；另一方面指定被保险人所缴纳的保费。当保费缴纳满足等价原理时，就称为净保费。保费缴纳方式可分为三种：

（1）趸缴保费，即一次性缴纳。

（2）分期缴纳保费，每期缴费相同（也称为水平保费、均衡保费）。

（3）分期缴纳保费，每期缴费可不同。

分期缴纳保费的金额、期限以及保费支付频率须在保单中指明。一般而言，保费要提前缴纳。

5.1 净保费

对于一份保单而言，定义损失变量 L 为保险人保险给付现值减去未来保费收入现值。损失必须从代数意义上考虑：可接受的保费必须使得随机变量 L 既可取正值也可取负值。通常净保费由等价原理确定，即损失变量的期望为 0，也就是以下等式：

$$E(L)=0 \tag{5.1}$$

当保费为趸缴方式时，第 3 章和第 4 章所定义的净保费满足等式（5.1）。当保费以相同额度分期支付时，式（5.1）唯一确定了净保费。而当每期保费不同时，为确定净保费，需要式（5.1）和另外的条件。

例如，假设年龄为 40 岁的人投保定期寿险，保险期间为 10 年，保险金额为 C，在死亡年末支付，当被保险人生存时，在每年初支付保费 Π，支付期限最多 10 年。此时保险人的损失变量 L 为：

$$L=\begin{cases}Cv^{K+1}-\Pi\ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & K=0,1,\cdots,9\\ -\Pi\ddot{a}_{\overline{10}|}, & K\geqslant 10\end{cases} \tag{5.2}$$

式中，K 表示 40 岁的人整数剩余寿命。随机变量 L 有离散分布，取 11 个不同的值：

$$Pr(L=Cv^{k+1}-\Pi\ddot{a}_{\overline{k+1}|})={}_kp_{40}q_{40+k},\ k=0,1,\cdots,9$$
$$Pr(L=-\Pi\ddot{a}_{\overline{10}|})={}_{10}p_{40} \tag{5.3}$$

由式（5.1）得

$$CA^1_{40:\overline{10}|}-\Pi\ddot{a}_{40:\overline{10}|}=0 \tag{5.4}$$

解得

$$\Pi=C\frac{A^1_{40:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{10}|}} \tag{5.5}$$

现给出数值演示。假设利率 $i=4\%$，（40）的死亡率满足 De Moivre 律，最大年龄 $\omega=100$。该假设有些不符合实际情况，但读者可使用计算器来计算。此时有

$$A^1_{40:\overline{10}|}=\frac{1}{60}v+\frac{1}{60}v^2+\cdots+\frac{1}{60}v^{10}=\frac{1}{60}a_{\overline{10}|}=0.135\,2 \tag{5.6}$$

$$A_{40:\overset{1}{\overline{10}|}}=\frac{5}{6}v^{10}=0.563\,0 \tag{5.7}$$

从而

$$A_{40:\overline{10}|}=0.698\,2 \tag{5.8}$$
$$\ddot{a}_{40:\overline{10}|}=(1-A_{40:\overline{10}|})/d=7.847\,6 \tag{5.9}$$

再由式（5.5）可得到年缴净保费

$$\Pi=0.017\,2C \tag{5.10}$$

当然，在保险实践中，净保费的计算通常是基于对未来利率和死亡率的保守假设，隐含了反映承保风险的安全附加。

5.2 人寿保险的基本类型

1. 终身寿险与定期寿险

考虑保额为 1 个单位的终身寿险，保险给付在死亡年末支付，年缴净保费用 P_x 来表示。保险人的损失变量为：

$$L=v^{K+1}-P_x\ddot{a}_{\overline{K+1}|} \tag{5.11}$$

由式（5.11）及等价原理可得

$$P_x=\frac{A_x}{\ddot{a}_x} \tag{5.12}$$

如把保费支付视为两个永续年金之差（一个从时刻0开始支付；另一个从时刻$K+1$开始支付），注意到保费在损失变量中的符号，可得

$$L=v^{K+1}-\left(\frac{P_x}{d}-v^{K+1}\frac{P_x}{d}\right)=\left(1+\frac{P_x}{d}\right)v^{K+1}-\frac{P_x}{d} \tag{5.13}$$

从而

$$\mathrm{Var}(L)=\left(1+\frac{P_x}{d}\right)^2\mathrm{Var}(v^{K+1}) \tag{5.14}$$

式（5.14）表明，与趸缴保费方式相比，当采用年缴净保费方式时，保险人承受更大的风险。这里的风险表示为损失变量的方差。

由式（5.12）可推出两个关于P_x的公式，每个公式都有直观解释。首先，由恒等式$d\ddot{a}_x+A_x=1$可得下式：

$$\frac{1}{\ddot{a}_x}=d+P_x \tag{5.15}$$

式（5.15）可这样解释：1个单位的债务可通过每年初支付$1/\ddot{a}_x$的方式来分期偿还；另一种偿还方式是在每年初支付利息d，最后在$K+1$时刻支付1个单位来偿还，而后者对应的寿险的年缴净保费就是P_x。式（5.15）就是说这两种分期偿还方式的年偿还额相等。

式（5.15）类似于复利数学中的一个恒等式

$$\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}=d+\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} \tag{5.16}$$

其次，用$(1-A_x)/d$代替式（5.12）中的$\ddot{a}_x$，可得

$$P_x=\frac{dA_X}{1-A_x} \tag{5.17}$$

上式等价于

$$P_x=dA_x+P_xA_x \tag{5.18}$$

式（5.18）可这样解释：对保额为1个单位的寿险，每年初缴纳保费P_x；假设借入A_x用于支付寿险的趸缴净保费，为此债务A_x的利息dA_x在每年初支付，而债务A_x在死亡年末偿还，后者对应的寿险的年缴净保费为P_xA_x。式（5.18）表明这两种方式下年支付额相等。

有时候缴费期仅限于前n年，那么对应的年缴净保费符号就记为${}_nP_x$。

现考虑一份保险期限为n，保额为1个单位，保险给付在死亡年末支付的定期寿险，用$P^1_{x:\overline{n}|}$表示年缴净保费。保险人的损失变量为：

$$L=\begin{cases} v^{K+1}-P^{1}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & K=0,1,\cdots,n-1 \\ -P^{1}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{\overline{n}|}, & K\geqslant n \end{cases} \tag{5.19}$$

年缴净保费为：

$$P^{1}_{x:\overline{n}|}=\frac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{5.20}$$

2. 生存保险

考虑保额为 1 个单位，保险期限为 n 的生存保险，年缴净保费用 $P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$来表示。保险人的损失变量为：

$$L=\begin{cases} -P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & K=0,1,\cdots,n-1 \\ v^{n}-P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\ddot{a}_{\overline{n}|}, & K\geqslant n \end{cases} \tag{5.21}$$

年缴净保费为：

$$P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}=\frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{5.22}$$

3. 两全保险

记 $P_{x:\overline{n}|}$为两全保险的年缴净保费，那么就有

$$P_{x:\overline{n}|}=\frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{5.23}$$

由于 $A_{x:\overline{n}|}=A^{1}_{x:\overline{n}|}+A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$，因此由式（5.23）即得

$$P_{x:\overline{n}|}=P^{1}_{x:\overline{n}|}+P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \tag{5.24}$$

保险人的损失变量是式（5.19）与式（5.21）之和。

类似于式（5.15）和式（5.18），有以下两式

$$\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}=d+P_{x:\overline{n}|} \tag{5.25}$$

$$P_{x:\overline{n}|}=dA_{x:\overline{n}|}+P_{x:\overline{n}|}A_{x:\overline{n}|} \tag{5.26}$$

4. 延期生命年金

设保费在延期内缴纳，年金给付从时刻 n 开始，年给付额为 1 个单位，那么该延期生命年金在时刻 $x+n$ 的精算现值为 $\ddot{a}_{x+n}$，从而年缴净保费为 $P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\ddot{a}_{x+n}$。

【例 5—1】

已知 ${}_{k|}q_x=c\,(0.96)^{k+1}$（$k=0,1,2,\cdots$），其中 $c=0.04/0.96$，$i=0.06$。计算 P_x 和 $\mathrm{Var}(L)$。

【解】 由定义

$$A_x = c\sum_{k=0}^{\infty}(1.06)^{-k-1}(0.96)^{k+1} = 0.40,\ \ddot{a}_x = \frac{1-A_x}{d} = 10.60$$

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = 0.0377$$

为计算 $\mathrm{Var}(L)$，需要计算

$${}^2A_x = c\sum_{k=0}^{\infty}[(1.06)^2]^{-k-1}(0.96)^{k+1} = 0.2445$$

由式（5.14）和式（5.15），即得

$$\mathrm{Var}(L) = \frac{{}^2A_x-(A_x)^2}{(d\ddot{a}_x)^2} = \frac{0.2445-0.16}{(10.6\times 0.06/1.06)^2} = 0.2347$$

更一般的结论见下面的例 5—2。

【例 5—2】

已知 ${}_{k|}q_x=(1-r)r^k$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$，$i=0.06$，计算 A_x，$\ddot{a}_x$，P_x 和 $\mathrm{Var}(L)$。

【解】 由定义可得

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}\,{}_{k|}q_x = v(1-r)\sum_{k=0}^{\infty}(vr)^k = \frac{1-r}{1+i-r}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{1-A_x}{d} = \left(1-\frac{1-r}{1+i-r}\right)\left(\frac{1+i}{i}\right) = \frac{1+i}{1+i-r}$$

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{1-r}{1+i}$$

在计算 ${}^2A_x$ 时，需要用到 $\delta'=2\delta$ 对应的利率 i'，即 $(1+i')=(1+i)^2$，因此 ${}^2A_x=\frac{1-r}{(1+i)^2-r}$。最后化简得到

$$\mathrm{Var}(L) = \frac{{}^2A_x-(A_x)^2}{(d\ddot{a}_x)^2} = \frac{(1-r)r}{(1+i)^2-r}$$

【例 5—3】

验证下式成立（注：左下角的 20 表示保费最多缴纳 20 次）。

$${}_{20}P^1_{x:\overline{30}|} - P^1_{x:\overline{20}|} = {}_{20}P({}_{20|10}A_x)$$

【证明】 由定义

$${}_{20}P^1_{x:\overline{30}|} - P^1_{x:\overline{20}|} = \frac{A^1_{x:\overline{30}|}-A^1_{x:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}} = \frac{{}_{20|10}A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}} = {}_{20}P({}_{20|10}A_x)$$

【例 5—4】

已知 ${}_{15}P_{45}=0.038$，$P_{45:\overline{15}|}=0.056$，$A_{60}=0.625$。计算 $P^1_{45:\overline{15}|}$。

【解】 由定义得

$$
\begin{aligned}
{}_{15}P_{45}&=\frac{A_{45}}{\ddot{a}_{45:\overline{15}|}}=\frac{A^1_{45:\overline{15}|}+{}_{15}E_{45}\cdot A_{60}}{\ddot{a}_{45:\overline{15}|}}=P^1_{45:\overline{15}|}+P_{45:\overset{1}{\overline{15}|}}\cdot A_{60}\\
&=P^1_{45:\overline{15}|}+(P_{45:\overline{15}|}-P^1_{45:\overline{15}|})A_{60}
\end{aligned}
$$

$$0.038=P^1_{45:\overline{15}|}+(0.056-P^1_{45:\overline{15}|})\times 0.625$$

求解得到 $P^1_{45:\overline{15}|}=0.008$。

5.3 一年支付多次保费

当每年等额缴纳 m 次保费时，可通过符号里的上标 (m) 表示。年缴净保费符号包括下面列出的一些：

$$P_x^{(m)},\ P^{(m)}_{x:\overline{n}|},\ P^{1(m)}_{x:\overline{n}|},\ P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}^{\ (m)}$$

它们分别用 $\ddot{a}_x^{(m)}$，$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}$来代替式（5.12），（5.23），（5.20），（5.22）中的分母 $\ddot{a}_x$，$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$得到。例如保额为 1 个单位的两全保险的年缴净保费为：

$$P^{(m)}_{x:\overline{n}|}=A_{x:\overline{n}|}/\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}\tag{5.27}$$

应用第 4 章的式（4.29），容易计算上式。

为比较 $P^{(m)}_{x:\overline{n}|}$与 $P_{x:\overline{n}|}$，在式（5.27）中代入以下两式

$$A_{x:\overline{n}|}=P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\tag{5.28}$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}=\frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-\beta(m)A^1_{x:\overline{n}|}\tag{5.29}$$

从而得到

$$P^{(m)}_{x:\overline{n}|}=\frac{P_{x:\overline{n}|}}{d/d^{(m)}-\beta(m)P^1_{x:\overline{n}|}}\tag{5.30}$$

把式（5.30）改写如下：

$$P_{x:\overline{n}|}=\ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}P^{(m)}_{x:\overline{n}|}-\beta(m)P^{(m)}_{x:\overline{n}|}P^1_{x:\overline{n}|}\tag{5.31}$$

类似的等式对其他类型保险也适用，例如

$$P_x=\ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}P_x^{(m)}-\beta(m)P_x^{(m)}P_x\tag{5.32}$$

$$P^1_{x:\overline{n}|}=\ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}P^{1(m)}_{x:\overline{n}|}-\beta(m)P^{1(m)}_{x:\overline{n}|}P^1_{x:\overline{n}|}\tag{5.33}$$

$$P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}=\ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}^{\ (m)}-\beta(m)P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}^{\ (m)}P^1_{x:\overline{n}|}\tag{5.34}$$

式（5.32）由式（5.31）令 $n\to\infty$得到。式（5.31）可由式（5.33）与式（5.34）相加得到。

如果保额在死亡时刻支付，而每年内保费支付次数趋于无穷大，就得到完全连续的寿险模型。完全连续的年缴净保费符号为 $\overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n}|})=\overline{A}_{x:\overline{n}|}/\overline{a}_{x:\overline{n}|}$，$\overline{P}(\overline{A}_x)=\overline{A}_x/\overline{a}_x$。

【例 5—5】

已知 $\ddot{a}_{50:\overline{20}|}=11.2918$，${}_{20}E_{50}=0.2304735$，$i=0.06$。计算 $P_{50:\overline{20}|}$ 和 $P^{(2)}_{50:\overline{20}|}$。

【解】首先 $\alpha(2)=s^{(2)}_{\overline{1}|}\ddot{a}^{(2)}_{\overline{1}|}=1.0002122$，$\beta(2)=(s^{(2)}_{\overline{1}|}-1)/d^{(2)}=0.257391$。

$$P_{50:\overline{20}|}=\frac{A_{50:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{50:\overline{20}|}}=\frac{1-d\ddot{a}_{50:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{50:\overline{20}|}}=\frac{1}{\ddot{a}_{50,20}}-d=0.031956$$

$$\ddot{a}^{(2)}_{50:\overline{20}|}=\alpha(2)\ddot{a}_{50:\overline{20}|}-\beta(2)(1-{}_{20}E_{50})=11.096127$$

$$P^{(2)}_{50:\overline{20}|}=\frac{A_{50:\overline{20}|}}{\ddot{a}^{(2)}_{50:\overline{20}|}}=0.032519$$

【例 5—6】

已知 $P_{x:\overline{20}|}=0.040$，$P^{1(12)}_{x:\overline{20}|}/P^{1}_{x:\overline{20}|}=1.032$。计算 $P^{(12)}_{x:\overline{20}|}$。

【解】注意到

$$\frac{P^{1(12)}_{x:\overline{20}|}}{P^{1}_{x:\overline{20}|}}=\frac{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}}{\ddot{a}^{(12)}_{x:\overline{20}|}},\ \frac{P^{(12)}_{x:\overline{20}|}}{P_{x:\overline{20}|}}=\frac{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}}{\ddot{a}^{(12)}_{x:\overline{20}|}}$$

直接就得

$$P^{(12)}_{x:\overline{20}|}=P_{x:\overline{20}|}\times1.032=0.04128$$

5.4 人寿保险的一般类型

回到 3.3 节介绍的人寿保险的一般类型。记 c_j 为保单签发后第 j 年的保险给付，假设每年缴纳的保费为 Π_0，Π_1，Π_2，…，其中，Π_k 表示时刻 k 的保费。保险人的损失变量为：

$$L=c_{K+1}v^{K+1}-\sum_{k=0}^{K}\Pi_k v^k \tag{5.35}$$

满足以下等式的保费即为净保费

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_{k+1}v^{k+1}{}_kp_xq_{x+k}=\sum_{k=0}^{\infty}\Pi_k v^k{}_kp_x \tag{5.36}$$

上述模型有一般性。如果允许 Π_k 取负值，该模型就包含了生存保险和生命年金。例如，在 5.2 节介绍的两全保险，对应的保险给付及保费如下：

$$\begin{aligned}&c_1=c_2=\cdots=c_n=1,\ c_{n+1}=c_{n+2}=\cdots=0\\&\Pi_0=\Pi_1=\cdots=\Pi_{n-1}=P_{x:\overline{n}|},\ \Pi_n=-1,\ \Pi_{n+1}=\Pi_{n+2}=\cdots=0\end{aligned} \tag{5.37}$$

式（5.37）中的 $\Pi_n=-1$ 对应于满期给付（即 1 个单位）。

【例 5—7】

记 π 为关于 (x) 的 n 年期定期寿险的年缴净保费，假设 $b_h=\ddot{a}_{\overline{n+1-h}|}$ $(h=1, \cdots, n)$。证明：$\pi=\dfrac{\ddot{a}_{\overline{n}|}-\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$。

【证明】由等价原理可得

$$\begin{aligned}\pi \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{h=1}^{n}\ddot{a}_{\overline{n-h}|}v^{h}\ {}_{h-1|}q_x = \frac{1}{d}\sum_{h=1}^{n}(1-v^{n-h})v^{h}\ {}_{h-1|}q_x \\ &= \frac{1}{d}\sum_{h=1}^{n}(v^{h}\ {}_{h-1|}q_x - v^{n}\ {}_{h-1|}q_x) = \frac{1}{d}[A^{1}_{x:\overline{n}|} - v^{n}{}_{n}q_x] \\ &= \frac{1}{d}[1-d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_{n}E_x - v^{n} + v^{n}{}_{n}p_x] = \frac{1-v^{n}}{d} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \\ &= \ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}\end{aligned}$$

从而 $\pi=\dfrac{\ddot{a}_{\overline{n}|}-\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$。

5.5 保费返还的保单

在保险实践中，保险给付形式和保费缴纳方式有很多种。因此，明确地给出每一种可能的组合所对应的趸缴净保费意义不大。对给定的情况，需遵循的基本规则就是明确保险人的损失变量 L，然后应用式（5.1）进行计算。下面举例说明。

设有两全保险，满期保额为 1 个单位，期限为 n 年。如果被保险人在 n 年内死亡，已缴保费就无息返还，那么年缴净保费应为多少？

令 P 为年缴净保费，保险人的损失变量为：

$$L=\begin{cases}(K+1)Pv^{K+1}-P\ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & K=0,1,\cdots,n-1 \\ v^{n}-P\ddot{a}_{\overline{n}|}, & K\geqslant n\end{cases} \tag{5.38}$$

保险人的期望损失为：

$$P(IA)^{1}_{x:\overline{n}|}+A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}-P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \tag{5.39}$$

应用式（5.1），就得到年缴净保费为：

$$P=\frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-(IA)^{1}_{x:\overline{n}|}} \tag{5.40}$$

【例 5—8】

对 (x) 考虑 n 年期的定期寿险，如死亡发生在第 $k+1$ 年内，那么第 $k+1$ 年末的给付为 $\ddot{s}_{\overline{k+1}|}$，求该寿险的趸缴净保费。

【解】由定义，保险给付的现值变量为：

$$L=v^{K+1}\ddot{s}_{\overline{K+1}|}=\ddot{a}_{\overline{K+1}|},K=0,1,\cdots,n-1$$

与期初支付的终身生命年金比较，可见

$$E(L)=\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-{}_{n}p_{x}\ddot{a}_{\overline{n}|}$$

【例 5—9】

对 (x) 考虑 20 年期的定期寿险，保额为 5 000 元。另外，如死亡发生，就返还保费。分以下两种情况分别计算该寿险的年缴净保费。

(1) 无利息返还保费。

(2) 有利息返还保费。

【解】(1) 记 π_1 为年缴净保费，那么按等价原理就得

$$\pi_1\ddot{a}_{x:\overline{20}|}=5\,000A^{1}_{x:\overline{20}|}+\pi_1\,(IA)^{1}_{x:\overline{20}|}$$

$$\pi_1=5\,000\frac{A^{1}_{x:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}-(IA)^{1}_{x:\overline{20}|}}$$

(2) 记 π_2 为年缴净保费，那么

$$\pi_2\ddot{a}_{x:\overline{20}|}=5\,000A^{1}_{x:\overline{20}|}+\pi_2(\ddot{a}_{x:\overline{20}|}-{}_{20}p_{x}\ddot{a}_{\overline{20}|})$$

$$\pi_2=5\,000\frac{A^{1}_{x:\overline{20}|}}{{}_{20}p_{x}\ddot{a}_{\overline{20}|}}$$

【例 5—10】

对 (x) 考虑 n 年期的延期年金，每年给付为 1 个单位，首次支付出现在 $x+n$。年缴净保费在前 n 年内支付。如死亡发生在前 n 年内，那么死亡给付为有利息返还已缴保费。计算年缴净保费。

【解】记 π 为年缴净保费，那么按等价原理就得

$$\pi\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=v^{n}{}_{n}p_{x}\ddot{a}_{x+n}+\pi(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-{}_{n}p_{x}\ddot{a}_{\overline{n}|})$$

求解就得

$$\pi=\frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$$

□ 习　题

5.1　已知 ${}_{20}P_{25}=0.046$，$P_{25:\overline{20}|}=0.064$，$A_{45}=0.640$，计算 $P^{1}_{25:\overline{20}|}$。

5.2　关于 (x) 的一份终身寿险保额为 1 个单位，在死亡年末支付。保费 G 在每个生存年初支付。已知：(1) 当 $G=P_x$ 时，保险人的损失变量记为 L；(2) 当 G 使得 $E[L^*]=-0.20$ 时，保险人的损失变量记为 L^*；(3) $\mathrm{Var}[L]=0.30$。计

算 $\mathrm{Var}[L^*]$。

5.3 当 $d=0.08$ 时，两份终身寿险保单信息如下：

	死亡给付	保费	Var (L)
保单 A	4	0.18	3.25
保单 B	6	0.22	

保费在年初缴纳，死亡给付在年末支付。计算保单 B 对应的损失变量的方差。

5.4 关于 (x) 的终身寿险在第 j 年末的保险给付为 $b_j=1\,000\,(1.06)^j$，缴纳等额保费。已知 $1\,000P_x=10$，$i=0.06$。计算年缴净保费。

5.5 已知 $A_x=0.25$，$A_{x+20}=0.40$，$A_{x:\overline{20}|}=0.55$，$i=0.03$，死亡在每年内均匀分布。计算 $1\,000P(\overline{A}_{x:\overline{20}|})$。

5.6 关于 (x) 的完全连续终身寿险，已知：(1) 保险人的损失变量为 $L=v^T-\overline{P}(\overline{A}_x)\bar{a}_{\overline{T}|}$；(2) 利息力 δ 为常数；(3) 死亡力 μ 为常数。验证 $\mathrm{Var}(L)=\mu/(2\delta+\mu)$。

5.7 已知 $i=0.10$，$a_{30:\overline{9}|}=5.6$，$v^{10}{}_{10}p_{30}=0.35$。计算 $1\,000P^1_{30:\overline{10}|}$。

5.8 已知 $\dfrac{P^{1(12)}_{x:\overline{20}|}}{P^1_{x:\overline{20}|}}=1.032$，$P_{x:\overline{20}|}=0.040$。计算 $P^{(12)}_{x:\overline{20}|}$。

5.9 验证

$$1-\frac{(P_{30:\overline{15}|}-{}_{15}P_{30})\ddot{a}_{30:\overline{15}|}}{v^{15}{}_{15}p_{30}}=A_{45}$$

5.10 已知 ${}_{15}P_{45}=0.038$，$P_{45:\overline{15}|}=0.056$，$A_{60}=0.625$。计算 $P^1_{45:\overline{15}|}$。

5.11 关于 (x) 的 2 年定期完全离散寿险，损失变量为 L，净均衡保费根据等价原理得到。已知 $q_x=0.1$，$q_{x+1}=0.2$，$v=0.9$。计算 $\mathrm{Var}(L)$。

5.12 已知 $\overline{A}^1_{x:\overline{n}|}=0.427\,5$，$\delta=0.055$，$\mu_{x+t}=0.45$。计算 $1\,000\overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n}|})$。

第6章 寿险责任准备金

Chapter 6

考虑一份缴纳净保费的保单。在保单签发之时，未来保费的期望现值与未来保险给付的期望现值相等，保险人的预期损失 L 为 0。

但在保单签发之后的时刻，未来保费与未来保险给付的期望现值一般并不相等。假设 $T>t$，定义随机变量 ${}_tL$ 为在时刻 t 未来保险给付现值减去未来保费现值的差额，假设 ${}_tL$ 不恒为 0，${}_tL$ 的期望就是在时刻 t 的净保费责任准备金，记为 ${}_tV$。该定义也可视为责任准备金的前瞻公式。

人寿保单的设计通常要求净保费责任准备金为正，或至少为非负。直观上讲，这意味着前期保费不要太少。未来保险给付的期望总要大于未来保费的期望，为此保险人应该准备足够的资金来弥补两者的差额，该差额就是净保费责任准备金 ${}_tV$。

6.1 两全保险与定期保险的比较

给定一份保险期限为 n，保额为 1 个单位的两全保险，在第 k 年末的净保费责任准备金记为 ${}_kV_{x:\overline{n|}}$，表示如下：

$${}_kV_{x:\overline{n|}}=A_{x+k:\overline{n-k|}}-P_{x:\overline{n|}}\ddot{a}_{x:\overline{n|}},\ k=0,1,\cdots,n-1 \tag{6.1}$$

由净保费的定义，显然 ${}_0V_{x:\overline{n|}}=0$。

相应地，定期寿险第 k 年末的净保费责任准备金记为 ${}_kV^1_{x:\overline{n|}}$。

$${}_kV^1_{x:\overline{n|}}=A^1_{x+k:\overline{n-k|}}-P^1_{x:\overline{n|}}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k|}} \tag{6.2}$$

例如，假设保额为 1 000 单位，初始年龄 $x=40$，保险期限 $n=10$，净保费责任准备金为 $1\,000{}_kV_{40:\overline{10|}}$（或 $1\,000{}_kV^1_{40:\overline{10|}}$）（$k=0,1,\cdots,9$）。假设 $i=4\%$，死亡率满足 De Moivre 律，$\omega=100$。

首先，经计算得到两全保险的年缴净保费为 88.96，定期寿险的年缴净保费为 17.23。净保费责任准备金的变化如表 6—1 所示。虽然 De Moivre 律并不十分符合实际，但计算得到的净保费责任准备金呈现一些特征模式。

表 6—1　　　　净保费责任准备金

k	$\ddot{a}_{40+k,\overline{10-k}\rvert}$	$A_{40+k,\overline{10-k}\rvert}\times 1\,000$	${}_kV_{40,\overline{10}\rvert}\times 1\,000$	$A^1_{40+k,\overline{10-k}\rvert}\times 1\,000$	${}_kV^1_{40,\overline{10}\rvert}\times 1\,000$
0	7.848 05	698.15	0.00	135.18	0.00
1	7.242 69	721.44	77.14	126.02	1.27
2	6.604 33	745.99	158.48	116.08	2.33
3	5.930 76	771.89	244.31	105.30	3.16
4	5.219 56	799.25	334.93	93.61	3.73
5	4.468 13	828.15	430.68	80.94	4.01
6	3.673 65	858.71	531.92	67.22	3.98
7	2.833 06	891.04	639.03	52.36	3.61
8	1.943 05	925.27	752.44	36.27	2.86
9	1.000 00	961.54	872.61	18.85	1.62

由表 6—1 可见，两全保险的责任准备金稳定增加，最后趋近于保险金额。第 9 年末的责任准备金为 872.61，加上最后年度的保费 88.96，两者之和再乘以利率，就足够支付最后一年的保额 1 000。

而定期保险的责任准备金非常小，几乎没有变化。在开始几年，由于保费略多于相应的一年期定期寿险的保费，因此责任准备金逐渐增加。由于被保险人生存时保险人没有给付义务，因此在接近保险期末时，责任准备金逐渐减少。第 9 年末的净保费责任准备金（1.62）加上最后年度的保费（17.23）之和，正好是 49 岁的被保险人一年期定期寿险的保费。

6.2 递推关系

回到 5.4 节介绍的人寿保险的一般类型。按定义，第 k 年末的净保费责任准备金记为：

$$ {}_kV=\sum_{j=0}^{\infty}c_{k+j+1}v^{j+1}\,{}_jp_{x+k}q_{x+k+j}-\sum_{j=0}^{\infty}\Pi_{k+j}v^{j}\,{}_jp_{x+k} \tag{6.3} $$

为了推出${}_kV$ 与${}_{k+h}V$ 的关系，把下式代入式（6.3）中除了前 h 项之外的各项

$$ {}_jp_{x+k}={}_hp_{x+k}\,{}_{j-h}p_{x+k+h} \tag{6.4} $$

记 $j'=j-h$ 作为求和下标，最后得到${}_kV$ 与${}_{k+h}V$ 之间的关系：

$$ {}_kV+\sum_{j=0}^{h-1}\Pi_{k+j}v^{j}\,{}_jp_{x+k}=\sum_{j=0}^{h-1}c_{j+k+1}v^{j+1}\,{}_jp_{x+k}q_{x+k+j}+{}_hp_{x+k}v^{h}\,{}_{k+h}V \tag{6.5} $$

式（6.5）可解释如下：如果被保险人在第 k 年末生存，那么式（6.5）左边表示第 k 年末责任准备金与未来 h 年保费的期望现值之和，右边表示未来 h 年的定期寿险保费与 $k+h$ 年末保额为 ${}_{k+h}V$ 的生存保险的保费之和。左边可视为保险人的收入资源，右边可视为保险人的支出负担。

令 $h=1$，可得到净保费责任准备金的递推关系：

$$ {}_kV+\Pi_k=v[c_{k+1}q_{x+k}+{}_{k+1}Vp_{x+k}] \tag{6.6}$$

因此净保费责任准备金可从两个方向递推计算：(1) 从初值 ${}_0V=0$ 开始，递推计算 ${}_1V$，${}_2V$，…。(2) 如给定保险期限为 n，可以从已知值 ${}_nV$ 开始，递推计算 ${}_{n-1}V$，${}_{n-2}V$，…。例如在 6.1 节对两全保险有 ${}_{10}V=1\,000$，对定期寿险有 ${}_{10}V=0$。

式（6.6）表示在时刻 k，净保费责任准备金与保费之和等于年末所需资金的期望现值（在死亡情况下为 c_{k+1}，在生存情况下 ${}_{k+1}V$），该式也可写成如下形式：

$$ {}_kV+\Pi_k=v[{}_{k+1}V+(c_{k+1}-{}_{k+1}V)q_{x+k}] \tag{6.7}$$

因此，在每种情况下都需要额度为 ${}_{k+1}V$ 的资金。如被保险人死亡，则需要额外的额度为 $c_{k+1}-{}_{k+1}V$ 的资金，称为在险净保额（net amount at risk）。

回到式（6.7），它表明保费可以分解成两部分，$\Pi_k=\Pi_k^s+\Pi_k^r$，其中

$$\Pi_k^s={}_{k+1}Vv-{}_kV \tag{6.8}$$

为储蓄保费，用于增加净保费责任准备金，从年初的 ${}_kV$ 变到年末的 ${}_{k+1}V$。另一部分

$$\Pi_k^r=(c_{k+1}-{}_{k+1}V)vq_{x+k} \tag{6.9}$$

为风险保费，它是一年期定期寿险的保费，保险金额为在险净保额。从而在第 $k+1$ 年内的运行状况可解释为储蓄与一年期定期寿险的组合。当然，这里假设被保险人在时刻 k 生存。

在式（6.8）两边同乘以 $(1+i)^{j-k}$ 并对 $k=0$，1，…，$j-1$ 求和，可得

$${}_jV=\sum_{k=0}^{j-1}(1+i)^{j-k}\Pi_k^s \tag{6.10}$$

上式表明净保费责任准备金是从保单签发开始以前各年度的储蓄保费的累积值。

引用 6.1 节的数值实例，表 6—2 给出了净保费的分解，分为储蓄保费和风险保费。

表 6—2　　**净保费的分解**

k	两全保险		定期寿险	
	Π_k^s	Π_k^r	Π_k^s	Π_k^r
0	74.17	14.79	1.22	16.01
1	75.24	13.72	0.97	16.26
2	76.43	12.53	0.70	16.53

续前表

k	两全保险		定期寿险	
	Π_k^s	Π_k^r	Π_k^s	Π_k^r
3	77.74	11.22	0.42	16.81
4	79.18	9.78	0.12	17.10
5	80.77	8.18	−0.19	17.42
6	82.53	6.43	−0.52	17.75
7	84.47	4.49	−0.87	18.10
8	86.60	2.36	−1.24	18.47
9	88.96	0.00	−1.62	18.85

把式（6.7）写成

$$\Pi_k+d_{k+1}V=({}_{k+1}V-{}_kV)+\Pi_k^r \tag{6.11}$$

可见，保费与责任准备金产生的利息之和用于调整（增大或减小）责任准备金，并提供风险保费。式（6.11）是第3章的式（3.53）的推广。

在式（6.7）两边乘以（$1+i$），得到与式（6.11）类似的等式：

$$\Pi_k+i({}_kV+\Pi_k)=({}_{k+1}V-{}_kV)+(c_{k+1}-{}_{k+1}V)q_{x+k} \tag{6.12}$$

式（6.11）和式（6.12）的不同在于评估时刻的选择，在式（6.11）中选取时刻k，而在式（6.12）中选取时刻$k+1$。

以下给出三个例子，说明式（6.7）的应用。

【例 6—1】

考虑（x）从$x+n$岁开始，年给付为1的延期年金，等额年缴净保费在前n年内支付，并在$x+n$岁之前死亡时，死亡给付额为净保费责任准备金。确定年缴净保费及第k年末的责任准备金。

【解】由式（6.7）及$c_k={}_kV$（$k=1$，2，…，n），那么年缴净保费为：

$$\Pi=v_{k+1}V-{}_kV$$

上式两边乘以v^k，并对$k=0$，…，$n-1$求和，得到

$$v^n{}_nV-v^0{}_0V=\Pi\sum_{k=1}^{n}v^{k-1}=\Pi\ddot{a}_{\overline{n}|}$$

将${}_0V=0$，${}_nV=\ddot{a}_{x+n}$代入上式，得到

$$\Pi=\frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$$

为求第k年末的准备金，可在前面求和时，先把下标k改成h，再对$h=0$，…，$k-1$求和，即得$v^k{}_kV=\Pi\ddot{a}_{\overline{k}|}$，从而

$${}_kV=\Pi\ddot{s}_{k}，1\leqslant k\leqslant n$$

【例 6—2】

关于 (x) 的某种保险，当 (x) 在 n 年内死亡时，年末给付 1 个单位再加上净保费责任准备金。假设期满时责任准备金为 1，给出等额年缴净保费公式及第 k 年末的责任准备金。

【解】此时 $c_k=1+{}_kV$，由式 (6.7)，可得

$$v_{k+1}V-{}_kV=\Pi-vq_{x+k}$$

上式两边乘以 v^k，并对 $k=0,\cdots,n-1$ 求和，得到

$$\Pi=\frac{v^n+\sum\limits_{k=1}^{n}v^kq_{x+k-1}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$$

为求第 k 年末的准备金，可在前面求和时，先把下标 k 改成 h，再对 $h=0,\cdots,k-1$ 求和，即得

$${}_kV=\Pi\ddot{s}_{\overline{k}|}-\sum_{h=1}^{k}(1+i)^{k-h}q_{x+h-1}$$

【例 6—3】

关于 (x) 的某种保险，假设 $c_{h+1}={}_{h+1}V$，${}_0V=0$，$\Pi_h=\pi$，$h=0,1,\cdots,k-1$。证明${}_kV=\pi\ddot{s}_{\overline{k}|}$。

【证明】由式 (6.7)

$${}_kV+\Pi_k=v[{}_{k+1}V+(c_{k+1}-{}_{k+1}V)q_{x+k}]$$

由这里给定的条件，可得

$$\pi=v\cdot{}_hV-{}_{h-1}V$$

变形可得

$${}_hV=({}_{h-1}V+\pi)(1+i)$$

再由${}_0V=0$，递推得到

$${}_1V=\pi(1+i)$$

$${}_2V=[\pi(1+i)+\pi](1+i)=\pi\ddot{s}_{\overline{2}|}$$

最后得到${}_kV=\pi\ddot{s}_{\overline{k}|}$。

6.3　终身寿险与两全保险的净保费责任准备金

考虑 5.2 节介绍的终身寿险。第 k 年末的净保费责任准备金记为${}_kV_x$，由定义

$$ {}_kV_x=A_{x+k}-P_x\ddot{a}_{x+k} \tag{6.13}$$

下面给出一些等价的公式。

首先，用$1-d\ddot{a}_{x+k}$代换A_{x+k}，可得

$$ {}_kV_x=1-(P_x+d)\ddot{a}_{x+k} \tag{6.14}$$

再用$1/\ddot{a}_x$代换P_x+d，就得

$$ {}_kV_x=1-\frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x} \tag{6.15}$$

在式（6.15）中用$(1-A_x)/d$代换$\ddot{a}_x$，用$(1-A_{x+k})/d$代换$\ddot{a}_{x+k}$，可得

$$ {}_kV_x=\frac{A_{x+k}-A_x}{1-A_x} \tag{6.16}$$

在式（6.13）中应用$P_{x+k}\ddot{a}_{x+k}=A_{x+k}$，可得

$$ {}_kV_x=\left(1-\frac{P_x}{P_{x+k}}\right)A_{x+k} \tag{6.17}$$

$$ {}_kV_x=(P_{x+k}-P_x)\ddot{a}_{x+k} \tag{6.18}$$

最后，用$1/(P_{x+k}+d)$代换$\ddot{a}_{x+k}$，可得

$$ {}_kV_x=\frac{P_{x+k}-P_x}{P_{x+k}+d} \tag{6.19}$$

各种不同的公式看上去眼花缭乱。除式（6.13）外，式（6.14）、式（6.17）、式（6.18）都很容易解释，而且可推广到其他类型的寿险，因此也比较重要。

式（6.14）表明，净保费责任准备金等于保额减去未来保费及未赚利息的期望现值。式（6.14）类似于$A_x=1-d\ddot{a}_x$，相应的解释也类似。

式（6.17）可以这样解释：对（$x+k$）来说，未来的保费P_x可用于购买保额为P_x/P_{x+k}的终身寿险，而责任准备金则用于购买保额为$1-(P_x/P_{x+k})$的终身寿险。两者之和可用于购买保额为1的终身寿险。

如果在$x+k$岁时购买终身寿险，那么所需要的净保费为P_{x+k}。保费差公式（6.18）表明净保费责任准备金是未来保费不足部分的期望现值。

式（6.15）、式（6.16）、式（6.19）显得不是很重要，也没有明显的直观解释。但它们可推广到两全保险。两全保险在k年末的净保费责任准备金记为${}_kV_{x:\overline{n}|}$。相应的公式分别如下：

$$ {}_kV_{x:\overline{n}|}=1-\frac{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$$ {}_kV_{x:\overline{n}|}=\frac{A_{x+k:\overline{n-k}|}-A_{x:\overline{n}|}}{1-A_{x:\overline{n}|}}$$

$$ {}_kV_{x:\overline{n}|}=\frac{P_{x+k:\overline{n-k}|}-P_{x:\overline{n}|}}{P_{x+k:\overline{n-k}|}+d}$$

在本节最后，提及一下责任准备金的回溯公式。设 (x) 的保单在开始的 h 年内保额都是 1 个单位，保费为 P，这里 h 小于或等于保单缴费期，那么准备金的回溯公式为：

$$ {}_hV = P\ddot{s}_{x:\overline{h}|} - {}_hk_x = P\frac{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}{{}_hE_x} - \frac{A^1_{x:\overline{h}|}}{{}_hE_x} \tag{6.20}$$

式中，${}_hk_x$ 为保险成本累积值。

作为式 (6.20) 的一个应用，现考虑 (x) 的两份保单，保费分别为 P_1 和 P_2，那么就有

$$ {}_hV_1 = P_1\ddot{s}_{x:\overline{h}|} - {}_hk_x $$
$$ {}_hV_2 = P_2\ddot{s}_{x:\overline{h}|} - {}_hk_x $$

从而

$$ {}_hV_1 - {}_hV_2 = (P_1 - P_2)\ddot{s}_{x:\overline{h}|} \tag{6.21}$$

注意到

$$ \frac{1}{\ddot{s}_{x:\overline{h}|}} = \frac{{}_hE_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} = P_{x:\overline{h}|}^{\ \ 1} $$

因此

$$ P_1 - P_2 = P_{x:\overline{h}|}^{\ \ 1}({}_hV_1 - {}_hV_2) \tag{6.22}$$

特别地，考虑两全保险和缴费 n 次的终身寿险，按定义对两全保险，${}_nV_{x:\overline{n}|} = 1$，而对终身寿险，${}_n^nV_x = A_{x+n}$，所以得到

$$ P_{x:\overline{n}|} - {}_nP_x = P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}(1 - A_{x+n}) \tag{6.23}$$

如比较定期保险和终身寿险，注意到对定期保险，${}_nV^1_{x:\overline{n}|} = 0$，就有下式成立

$$ P_x - P^1_{x:\overline{n}|} = P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\,{}_nV_x \tag{6.24}$$

【例 6—4】

假设 $k < n/2$，${}_kV_{x:\overline{n}|} = 1/6$，$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \ddot{a}_{x+2k:\overline{n-2k}|} = 2\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$。计算 ${}_kV_{x+k:\overline{n-k}|}$。

【解】 对两全保险，类似于式 (6.15) 的结论成立。

${}_kV_{x:\overline{n}|} = 1 - \dfrac{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = 1/6$，由此 $\dfrac{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \dfrac{5}{6}$。

$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \ddot{a}_{x+2k:\overline{n-2k}|} = 2\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$，$\dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}} + \dfrac{\ddot{a}_{x+2k:\overline{n-2k}|}}{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}} = 2$，从而 $\dfrac{\ddot{a}_{x+2k:\overline{n-2k}|}}{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}} = 2 - \dfrac{6}{5} = \dfrac{4}{5}$。

最后，${}_kV_{x+k:\overline{n-k}|} = 1 - \dfrac{\ddot{a}_{x+2k:\overline{n-2k}|}}{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}} = 1 - \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{5}$。

【例 6—5】

假设$_nV_x=0.080$，$P_x=0.024$，$P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}=0.2$。计算$P_{x:\overline{n}|}^{1}$。

【解】直接由式（6.24）即得$P_{x:\overline{n}|}^{1}=0.008$。或者由$_nV_x=P_x\ddot{s}_{x:\overline{n}|}-{}_nk_x$，两边同乘以$_nE_x$，就得$_nE_x\cdot{}_nV_x=P_x\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-A_{x:\overline{n}|}^{1}$，进一步得$P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\cdot{}_nV_x=P_x-P_{x:\overline{n}|}^{1}$，此为式（6.24）。

【例 6—6】

假设$_{10}V_{35}=0.150$，$_{20}V_{35}=0.354$。计算$_{10}V_{45}$。

【解】由式（6.15）可得

$$_{10}V_{35}=1-\frac{\ddot{a}_{45}}{\ddot{a}_{35}}=0.150,\ \frac{\ddot{a}_{45}}{\ddot{a}_{35}}=0.850$$

$$_{20}V_{35}=1-\frac{\ddot{a}_{55}}{\ddot{a}_{35}}=0.354,\ \frac{\ddot{a}_{55}}{\ddot{a}_{35}}=0.646$$

$$\frac{\ddot{a}_{55}}{\ddot{a}_{45}}=\frac{0.646}{0.850}=0.760,\ {}_{10}V_{45}=1-\frac{\ddot{a}_{55}}{\ddot{a}_{45}}=0.24$$

6.4 总损失在各保单年度的分摊

这里继续讨论寿险的一般类型。对于$k=0,1,\cdots$，记Λ_k为保险人在第$k+1$年内发生的损失，选择年初时刻k作为参考点，分三种情况考虑：(1) 被保险人在时刻k之前死亡；(2) 被保险人在第$k+1$年内死亡；(3) 被保险人在第$k+1$年之后仍生存。随机变量Λ_k为：

$$\Lambda_k=\begin{cases}0, & K\leqslant k-1\\ c_{k+1}v-({}_kV+\Pi_k), & K=k\\ {}_{k+1}Vv-({}_kV+\Pi_k), & K\geqslant k+1\end{cases}\tag{6.25}$$

用$\Pi_k^s+\Pi_k^r$代换Π_k，应用式（6.8），可得

$$\Lambda_k=\begin{cases}0, & K\leqslant k-1\\ -\Pi_k^s+(c_{k+1}-{}_{k+1}V)v, & K=k\\ -\Pi_k^s, & K\geqslant k+1\end{cases}\tag{6.26}$$

因此，如果被保险人在时刻k生存，那么Λ_k是保额为在险净保额的一年期定期寿险导致的损失。

保险人的总损失由 5.4 节的式（5.35）给出，它可表示成

$$L=\sum_{k=0}^{\infty}\Lambda_kv^k\tag{6.27}$$

上式可通过式（6.25）直接验证。另外，上式的求和范围为从 0 到K。

由式（6.26）和式（6.9）可得

$$E[\Lambda_k | K \geqslant k]=0 \tag{6.28}$$

结合式（6.25），由式（6.28）推出

$$E[\Lambda_k]=E[\Lambda_k | K \geqslant k]Pr(K \geqslant k)=0 \tag{6.29}$$

经典的 Hattendorff 定理如下：

$$\mathrm{Cov}(\Lambda_k, \Lambda_j)=0,\ k \neq j \tag{6.30}$$

$$\mathrm{Var}(L)=\sum_{k=0}^{\infty} v^{2k}\mathrm{Var}(\Lambda_k) \tag{6.31}$$

式（6.31）表明保险人总损失变量的方差可以分摊到每个保单年度，它由式（6.30）和式（6.27）得到。

为了证明式（6.30），不失一般性假设 $k<j$，那么

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\Lambda_k, \Lambda_j)&=E[\Lambda_k \cdot \Lambda_j]\\&=E[\Lambda_k \cdot \Lambda_j | K \geqslant j]Pr(K \geqslant j)\\&=-\Pi_k E[\Lambda_j | K \geqslant j]Pr(K \geqslant j)\\&=0\end{aligned} \tag{6.32}$$

注意到在最后一步用到式（6.28）。由式（6.30）和式（6.27），容易得到式（6.31）。

因此，由式（6.31），为计算 $\mathrm{Var}(L)$，就需要计算 $\mathrm{Var}(\Lambda_k)$，结论如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\Lambda_k)&=E[\Lambda_k^2]\\&=E[\Lambda_k^2 | K \geqslant k]Pr(K \geqslant k)\\&=\mathrm{Var}(\Lambda_k | K \geqslant k)Pr(K \geqslant k)\\&=(c_{k+1}-{}_{k+1}V)^2 v^2 p_{x+k} q_{x+k} Pr(K \geqslant k)\\&=(c_{k+1}-{}_{k+1}V)^2 v^2\ {}_{k+1}p_x q_{x+k}\end{aligned} \tag{6.33}$$

把式（6.33）代入式（6.31）就得

$$\mathrm{Var}(L)=\sum_{k=0}^{\infty} v^{2k+2}(c_{k+1}-{}_{k+1}V)^2\ {}_{k+1}p_x q_{x+k} \tag{6.34}$$

现在假设被保险人在时刻 h（h 为整数）生存，考虑第 6 章定义的损失变量，即未来保险给付现值减去未来保费现值的差额。与式（6.34）类似，就有

$$\mathrm{Var}({}_hL)=\sum_{k=0}^{\infty} v^{2k+2}(c_{h+k+1}-{}_{h+k+1}V)^2\ {}_{k+1}p_{x+h} q_{x+h+k} \tag{6.35}$$

为证明上式，只需考虑一份在 $x+h$ 岁签发的保险，保费可选为：

$$\widetilde{\Pi}_0=\Pi_h+{}_hV;\ \widetilde{\Pi}_k=\Pi_{h+k},\ k=1,2,\cdots \tag{6.36}$$

由式（6.34）容易计算 $\mathrm{Var}(L)$，对于 6.1 节的例子，可得如表 6—3 所示的

结论。

表 6—3　　Var(L) 的值

k	两全保险	定期寿险
0	12 905	15 114
1	9 918	13 940
2	7 393	12 864
3	5 292	11 876
4	3 584	10 970
5	2 240	10 140
6	1 231	9 379
7	535	8 682
8	131	8 043
9	0	7 457
合计	43 229	108 465

由表 6—3 可知两全保险的 Var(L)（43 229）远小于定期寿险的 Var(L)（108 465）。

初看上去，本节的主要结论式（6.34）和式（6.35）形式比较复杂，但了解背后的思路后，还是比较容易理解的。下面给出两个例子。

【例 6—7】

25 岁的人投保终身寿险，保额为 1 个单位，保费最多缴纳 20 次。已知 $i=0.06$，${}_{20}P_{25}=0.006\ 799\ 4$，$A_{44}=0.192\ 607\ 1$，$A_{45}=0.201\ 202\ 4$，${}^2A_{45}=0.068\ 019\ 3$，$q_{43}=0.003\ 442\ 7$，$q_{44}=0.003\ 707\ 0$。计算：(1) ${}^{20}_{19}V_{25}$，${}^{20}_{20}V_{25}$。(2) $\mathrm{Var}[{}_{20}L \mid K(25)\geqslant 20]$；(3) $\mathrm{Var}[{}_{18}L \mid K(25)\geqslant 18]$。

【解】（1）经过 19 年后，还剩最后一次保费。而经过 20 年后，就不再有保费。按准备金的定义，可得

$$ {}^{20}_{19}V_{25}=A_{44}-{}_{20}P_{25}=0.192\ 607\ 1-0.006\ 799\ 4=0.185\ 807\ 7 $$
$$ {}^{20}_{20}V_{25}=A_{45}=0.201\ 202\ 4 $$

（2）$\mathrm{Var}[{}_{20}L \mid K(25)\geqslant 20]={}^2A_{45}-(A_{45})^2=0.027\ 536\ 9$

（3）为计算 $\mathrm{Var}[{}_{18}L \mid K(25)\geqslant 18]$，应用式（6.35），得

$$ \begin{aligned} \mathrm{Var}({}_{18}L)&=v^2(1-{}_{19}V)^2 p_{43}q_{43}+v^4(1-{}_{20}V)^2\ {}_2p_{43}q_{44}+v^6(1-{}_{21}V)^2\ {}_3p_{43}q_{45}+\cdots \\ &=v^2(1-{}_{19}V)^2 p_{43}q_{43}+v^4(1-{}_{20}V)^2\ {}_2p_{43}q_{44}+v^4\ {}_2p_{43}(v^2(1-{}_{21}V)^2 \\ &\quad p_{45}q_{45}+\cdots) \\ &=v^2(1-{}_{19}V)^2 p_{43}q_{43}+v^4(1-{}_{20}V)^2\ {}_2p_{43}q_{44}+v^4\ {}_2p_{43}\cdot \mathrm{Var}({}_{20}L) \end{aligned} $$

把给定条件代入计算，最后得到

$$ \mathrm{Var}({}_{18}L)=0.025\ 540\ 6 $$

【例6—8】

关于 (x) 的3年期的两全保险，保额为3个单位，年缴净保费为0.94个单位。当 $i=0.20$ 时，计算得到各年度准备金如下：

年度	年末准备金
1	0.66
2	1.56
3	3.00

计算：(1) q_x 和 q_{x+1}；(2) $\mathrm{Var}({}_0L)$；(3) $\mathrm{Var}({}_1L)$。

【解】注意到

$$P_{x:\overline{3}|}=\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{3}|}}-d,\ \ddot{a}_{x:\overline{3}|}=\frac{1}{P_{x:\overline{3}|}+d}=\frac{1}{(0.94/3)+(0.2/1.2)}=2.083$$

$${}_1V_{x:\overline{3}|}=1-\frac{\ddot{a}_{x+1:\overline{2}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{3}|}}=\frac{0.66}{3},\ \ddot{a}_{x+1:\overline{2}|}=0.78\ddot{a}_{x:\overline{3}|}=1.625$$

(1) $\ddot{a}_{x:\overline{3}|}=1+vp_x\ddot{a}_{x+1:\overline{2}|},\ q_x=1-\dfrac{1.2\times1.083}{1.625}=0.2$

$$\ddot{a}_{x+1:\overline{2}|}=1+vp_{x+1},\ q_{x+1}=1-1.2\times0.625=0.25$$

(2) 由式 (6.33) 和式 (6.34) 得

$$\mathrm{Var}(\Lambda_k)=v^2\ (c_{k+1}-{}_{k+1}V)^2p_{x+k}q_{x+k\ k}p_x$$
$$\mathrm{Var}(\Lambda_0)=(1.2)^{-2}\times(3-0.66)^2\times0.8\times0.2=0.608\ 4$$
$$\mathrm{Var}(\Lambda_1)=(1.2)^{-2}\times(3-1.56)^2\times0.75\times0.25\times0.8=0.216$$

注意到对两全保险最后一年，没有随机性，所以 $\mathrm{Var}(\Lambda_2)=0$。最后

$$\mathrm{Var}({}_0L)=\mathrm{Var}(\Lambda_0)+v^2\mathrm{Var}(\Lambda_1)=0.758\ 4$$

(3) 把式 (6.35) 与式 (6.33) 比较，可见

$$\mathrm{Var}(\Lambda_1)=v^2\ (c_2-{}_2V)^2p_{x+1}q_{x+1}p_x$$

$$\mathrm{Var}({}_1L)=\sum_{k=0}^{\infty}v^{2k+2}\ (c_{k+2}-{}_{k+2}V)^2\ {}_{k+1}p_{x+1}q_{x+1+k}=v^2\ (c_2-{}_2V)^2p_{x+1}q_{x+1}$$

即 $\mathrm{Var}({}_1L)$ 只取对应于 $k=0$ 的一项。由以上两式，即得

$$\mathrm{Var}({}_1L)=\mathrm{Var}(\Lambda_1)/p_x=0.216/0.8=0.27$$

□ 习　题

6.1　已知 ${}_{10}V_{25}=0.1$，${}_{10}V_{35}=0.2$。计算 ${}_{20}V_{25}$。

6.2 已知${}_nV_x=0.080$，$P_x=0.024$，$P_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}=0.2$。计算$P_{x:\overline{n|}}^{1}$。

6.3 关于（x）的一份特殊的3年期完全离散两全保险，具体信息如下：

k	c_{k+1}	q_{x+k}
0	2	0.20
1	3	0.25
2	4	0.50

设$i=1/9$。当（x）生存时每年初缴纳1个单位的净保费。这份两全保险的保额与第3年末的净保费责任准备金相等。从${}_0V=0$出发，应用式${}_kV+\Pi_k=v[c_{k+1}q_{x+k}+{}_{k+1}Vp_{x+k}]$递推计算每年末的责任准备金。

6.4 已知$i=0.06$，$q_x=0.65$，$q_{x+1}=0.85$，$q_{x+2}=1.00$。计算${}_1V_x$。

6.5 假设${}_{k|}q_x=(0.5)^{k+1}$（$k=0, 1, 2, \cdots$），验证关于（x）的完全离散终身寿险的损失随机变量L的方差为$\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{2-v^2}\right)$，其中$v=(1+i)^{-1}$。

6.6 关于（x）的一份特殊的2年期完全离散两全保险，到期给付1 000，净保费等额缴纳。每年末的死亡给付为1 000与净保费责任准备金之和。已知$i=0.10$及下表信息：

k	q_{x+k}	c_{k+1}	${}_kV$
0	0.10	$1\,000+{}_1V$	0
1	0.11	2 000	?
2			1 000

计算责任准备金${}_1V$。

6.7 已知下表信息：

k	$\ddot{a}_{\overline{k|}}$	${}_{k-1|}q_x$
1	1.000	0.33
2	1.930	0.24
3	2.795	0.16
4	3.600	0.11

计算${}_2V_{x:\overline{3|}}$。

6.8 已知$i=4\%$，${}^{20}_{23}V_{15}=0.585$，${}^{20}_{24}V_{15}=0.600$。计算p_{38}。

6.9 关于（x）的一份完全离散终身寿险，已知$P_x=4/11$，${}_tV_x=0.5$，$\ddot{a}_{x+t}=1.1$。计算i。

6.10 关于（75）的一份保额为1 000的特殊的完全离散终身寿险，在时刻k的保费为Π_k（$k=0, 1, 2, \cdots$）。已知：(1) $\Pi_k=\Pi_0(1.05)^k$；(2) 死亡率遵循De Moivre律，$\omega=105$；(3) $i=5\%$。计算第5年末的净保费责任准备金。

6.11　关于 (x) 的一份完全离散终身寿险，保费等额缴纳，保额为1 500。已知：(1) $i=0.05$；(2) 第 h 年末的责任准备金为205；(3) 第 $h-1$ 年末的责任准备金为179；(4) $\ddot{a}_x=16.2$。计算 $1\,000q_{x+h-1}$。

6.12　已知 $q_{31}=0.002$，$\ddot{a}_{32:\overline{13}|}=9$，$i=0.05$。计算 ${}_1V_{31:\overline{14}|}$。

第 7 章 Chapter 7 损失模型

许多精算问题，如保险事故的发生时间、每次事故的损失金额、每年发生的事故次数和每年的累积损失等，都可以通过随机变量来描述。在非寿险精算中，两个最重要的随机变量是损失次数和损失金额。本章主要介绍损失次数和损失金额随机变量的统计性质。

7.1 基本概念

7.1.1 随机变量

随机变量是指其取值依赖于随机现象的观察结果的变量，通常用大写字母（如 X，N）来表示。精算学中的许多研究对象都是随机变量，如被保险人的死亡年龄、从投保到死亡的时间、从保险事故发生到报案的时间、从报案到理赔的时间、发生保险事故的次数、赔款金额等。在非寿险精算中，最常见的两个随机变量就是损失金额（用 X 表示）和损失次数（用 N 表示）。

由于随机变量的取值是随机的，因此通常用其分布函数描述其取值特性。对于随机变量 X，其分布函数 $F(x)$ 是指随机变量 X 的取值不超过实数 x 的概率，即

$$F(x)=Pr(X\leqslant x) \tag{7.1}$$

分布函数可以描述随机变量的统计规律，如损失 X 不超过 1 000 元的概率可表示为 $F(1\,000)$，损失在 1 000～2 000 元之间的概率可表示为 $F(2\,000)-F(1\,000)$。

随机变量可分为离散型随机变量和连续型随机变量两种。所谓离散型随机变量，是指只能取有限个或可列个值的随机变量，如保单的索赔次数 N 就是一个

离散型随机变量。所谓连续型随机变量，是指其取值布满一个区间的随机变量，如损失金额 X 的取值范围是区间（0，$+\infty$），所以是一个连续型随机变量。

7.1.2 随机变量的数字特征

虽然随机变量的分布函数完全可以描述随机变量的分布规律，但为了描述随机变量在某一方面的特征，如平均水平、分散程度等，就需要计算随机变量的一些数字特征。

1. 均值

随机变量的均值也称作期望值，描述了随机变量的平均取值，代表其取值的平均水平。随机变量 X 的均值通常用 $E(X)$ 表示。如果 X 为离散型随机变量，其取值为 x_i 的概率为 p_i（$i=1, 2, \cdots$），则其均值可以表示为：

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \tag{7.2}$$

如果 X 为连续型随机变量，其取值范围为（$-\infty$，$+\infty$），$f(x)$ 为其密度函数，则其均值可以表示为：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d} x \tag{7.3}$$

密度函数 $f(x)$ 与分布函数 $F(x)$ 具有下述关系：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t) \mathrm{d} t$$

两个随机变量 X 和 Y 的均值具有下述关系：

(1) $E(kX)=kE(X)$，其中 k 为常数；

(2) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$；

(3) 若 X 与 Y 相互独立，则 $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$。

2. 方差、标准差和变异系数

方差描述了随机变量取值的分散程度，用 $\operatorname{Var}(X)$ 表示，即

$$\operatorname{Var}(X)=E[X-E(X)]^2=E(X^2)-[E(X)]^2 \tag{7.4}$$

两个随机变量 X 和 Y 的方差具有下述关系：

(1) $\operatorname{Var}(kX)=k^2\operatorname{Var}(X)$，其中 k 为常数；

(2) 若 X 与 Y 相互独立，则 $\operatorname{Var}(X+Y)=\operatorname{Var}(X)+\operatorname{Var}(Y)$。

随机变量 X 的标准差 σ_X 是其方差的平方根，即

$$\sigma_X=\sqrt{\operatorname{Var}(X)} \tag{7.5}$$

随机变量 X 的变异系数 CV 是标准差与均值的比率，即

$$CV=\frac{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}{E(X)} \tag{7.6}$$

n 个独立同分布的随机变量之和的变异系数是单个随机变量的变异系数的 $\frac{1}{\sqrt{n}}$，即

$$\frac{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1+\cdots+X_n)}}{E(X_1+\cdots+X_n)}=\frac{\sqrt{n}\sigma_X}{nE(X)}=\frac{CV}{\sqrt{n}}$$

变异系数通常用来描述风险的相对大小，因此，风险集合中所包含的相互独立的个体风险越多，其相对风险越小。

3. 原点矩和中心矩

随机变量 X 的 k 阶原点矩是指随机变量的 k 次幂的均值，即

$$\mu_k=E(X^k) \tag{7.7}$$

显然，均值为随机变量的一阶原点矩。

随机变量 X 的 k 阶中心矩定义为：

$$\nu_k=E[X-E(X)]^k \tag{7.8}$$

显然，方差为随机变量的二阶中心矩。

4. 偏度系数

随机变量 X 的偏度系数定义为：

$$\gamma=\nu_3/\sigma^3 \tag{7.9}$$

式中，$\nu_3=E[X-E(X)]^3$ 是 X 的三阶中心矩；σ 为 X 的标准差。对于对称分布（如正态分布），偏度系数为零；对于右偏分布，偏度系数大于零；对于左偏分布，偏度系数小于零。非寿险中的大多数损失分布是属于右偏型的，即有较长较厚的右尾。

n 个独立同分布的随机变量之和的偏度系数是单个随机变量的偏度系数的 $1/\sqrt{n}$。这是因为 n 个独立同分布的随机变量之和的三阶中心矩为：

$$\begin{aligned}\nu_3\left(\sum X_i\right) &= E\left[\sum X_i-E\left(\sum X_i\right)\right]^3\\ &= E\left\{\sum[X_i-E(X_i)]\right\}^3\\ &= \sum E[X_i-E(X_i)]^3\\ &= n\nu_3\end{aligned}$$

式中，$\sum$ 表示从 1 到 n 求和。在 $E\left\{\sum[X_i-E(X_i)]\right\}^3$ 的展开式中，除三次方项 $E[X_i-E(X_i)]^3$ 以外，其余各项的均值为零。因此 n 个独立同分布的随机变

量之和的偏度系数为：

$$\gamma_n=\frac{nv_3}{\left(\sqrt{\operatorname{Var}(\sum X_i)}\right)^3}$$

$$=\frac{nv_3}{(\sigma\sqrt{n})^3}$$

$$=\frac{\gamma}{\sqrt{n}}$$

由此可见，n 个独立同分布的随机变量之和的偏度系数随着 n 的变化呈反方向变化，这一结果与变异系数类似。这就说明，风险集合包含的相互独立的个体风险越多，其损失分布的变异性和非对称性就越弱，从而对保险公司的经营稳定性就越有利。

7.2 损失次数模型

严格地讲，损失次数和索赔次数是两个不同的概念，损失次数通常是指因为发生保险事故而给被保险人造成经济损害的次数，而索赔次数是指被保险人根据保险合同向保险人提出索赔请求的次数。但是，描述损失次数和索赔次数的理论分布模型是类似的，因此下面对这两个概念不作严格区分。换言之，本节的损失次数模型也可以用于拟合索赔次数数据。

7.2.1 泊松分布

假设损失次数 N 服从参数为 λ 的泊松分布，则发生 k 次损失的概率为：

$$p_k=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\ k=0,1,2,\cdots \tag{7.10}$$

泊松分布的均值和方差相等，都等于泊松分布的参数，即

$$E(N)=\operatorname{Var}(N)=\lambda \tag{7.11}$$

泊松分布的变异系数为：

$$CV=\lambda^{-1/2} \tag{7.12}$$

泊松分布的偏度系数为：

$$\gamma=\lambda^{-1/2} \tag{7.13}$$

当 $\lambda\to\infty$ 时，泊松分布的偏度系数趋于零。这就意味着当泊松参数很大时，泊松分布接近于对称分布。

此外，泊松分布的偏度系数与变异系数相等，这是泊松分布区别于其他损失

次数分布的一个重要特征。

泊松分布具有下述性质：

(1) 可加性。如果 N_1 和 N_2 分别是参数为 λ_1 和 λ_2 的相互独立的泊松随机变量，则 $N=N_1+N_2$ 是参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松随机变量。

(2) 可分解性。假设两种保险责任的总索赔次数 N 服从参数为 λ 的泊松分布，而两种保险责任发生的概率分别为 a_1 和 a_2，且 $a_1+a_2=1$，则两种保险责任的索赔次数 N_1 和 N_2 是相互独立的泊松随机变量，参数分别为 λa_1 和 λa_2。

(3) 如果保险事故发生的时间间隔服从指数分布，则在一个固定的时间区间内发生的保险事故次数服从泊松分布。

(4) 当参数 λ 较大时，泊松分布趋于对称分布，所以可以用正态分布近似，如图 7—1 所示。

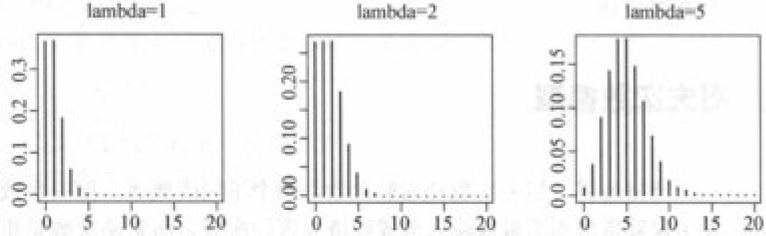


图 7—1 泊松分布的概率函数

7.2.2 二项分布

假设损失次数 N 服从参数为 m 和 q 的二项分布，则发生 k 次损失的概率为：

$$p_k=\binom{m}{k}q^k(1-q)^{m-k},\ k=0,1,2,\cdots,m,\ \text{其中 } m \text{ 为整数},\ 0<q<1 \tag{7.14}$$

二项分布的均值和方差分别为：

$$E(N)=mq \tag{7.15}$$

$$\mathrm{Var}(N)=mq(1-q) \tag{7.16}$$

二项分布的变异系数为：

$$CV=\sqrt{\frac{1-q}{mq}} \tag{7.17}$$

二项分布的偏度系数为：

$$\gamma=\frac{1-2q}{\sqrt{mq(1-q)}} \tag{7.18}$$

二项分布的偏度系数与变异系数之比小于 1，即

$$\frac{\gamma}{CV}=1-\frac{q}{1-q}<1$$

可见，二项分布的偏度系数小于变异系数。这表明在给定均值和方差的情况下，二项分布更适合描述尾部较短的损失次数。

二项分布具有下述性质：

（1）当二项分布的 m 足够大，q 充分小，从而使得 mq 保持适当的大小时，二项分布近似于参数为 $\lambda=mq$ 的泊松分布。

（2）二项分布的方差小于其均值，这是它与泊松分布和负二项分布在实际应用中的主要区别。泊松分布的方差等于均值，而负二项分布的方差大于均值。

（3）假设每个风险发生损失的概率均为 q，则二项分布可以描述 m 个独立同分布的风险所组成的风险集合的损失次数。

（4）如果用二项分布描述损失次数，则意味着损失次数存在一个最大值，这就是二项分布的参数 m。如一次交通事故造成的伤亡人数就不会超过某个最大值。

二项分布的概率函数如图 7—2 所示。当固定参数 q 时，二项分布随着参数 m 的增大趋于对称分布；而当固定参数 m 时，二项分布随着参数 q 的增大趋于对称分布。

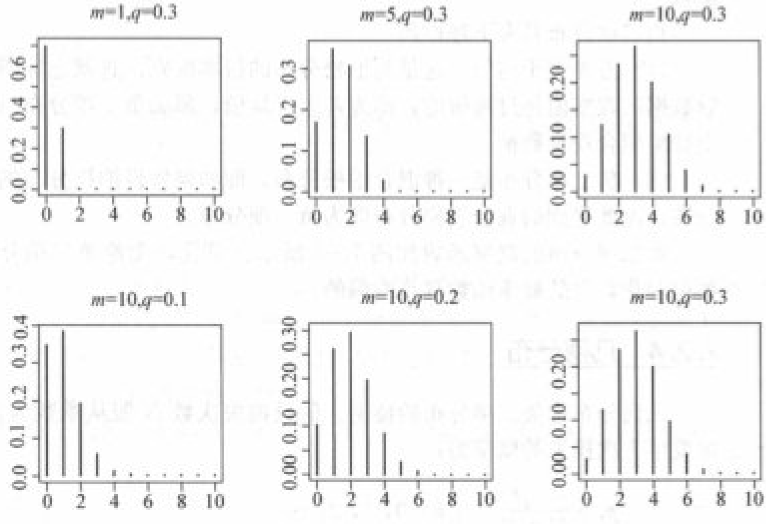


图 7—2 二项分布的概率函数

7.2.3 负二项分布

假设损失次数 N 服从参数为 r 和 β 的负二项分布，则发生 k 次损失的概率为：

$$p_k=\frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r)\Gamma(k+1)}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k,k=0,1,2,\cdots \tag{7.19}$$

负二项分布的均值和方差分别为：

$$E(N)=r\beta \tag{7.20}$$

$$\mathrm{Var}(N)=r\beta(1+\beta) \tag{7.21}$$

容易证明，负二项分布的变异系数为：

$$CV=\sqrt{\frac{1+\beta}{r\beta}} \tag{7.22}$$

负二项分布的偏度系数为：

$$\gamma=\frac{2\beta+1}{\sqrt{r\beta(1+\beta)}} \tag{7.23}$$

因此，负二项分布的偏度系数与变异系数之比大于1，即

$$\frac{\gamma}{CV}=1+\frac{\beta}{1+\beta}>1$$

注意，泊松分布的偏度系数等于变异系数。这表明在给定均值和方差的情况下，负二项分布的偏度系数大于泊松分布，因此更加适合描述尾部较长的损失次数。

负二项分布具有下述性质：

(1) 方差大于均值。这是与泊松分布的根本区别。这就意味着，如果损失次数数据的观察值是过离散的，即方差大于均值，那么负二项分布可以比泊松分布更好地拟合观察数据。

(2) 负二项分布是一种混合泊松分布，即如果假设泊松分布的参数服从伽玛分布，由此得到的混合泊松分布即为负二项分布。

负二项分布的概率函数如图7—3所示。可见，无论负二项分布的两个参数如何变化，它的概率函数都是右偏的。

7.2.4 几何分布

几何分布是负二项分布的特例。假设损失次数 N 服从参数为 β 的几何分布，则发生 k 次损失的概率为：

$$p_k=\frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+1}},\ k=0,1,2,\cdots \tag{7.24}$$

几何分布的均值和方差分别为：

$$E(N)=\beta \tag{7.25}$$

$$\mathrm{Var}(N)=\beta(1+\beta) \tag{7.26}$$

几何分布的变异系数为：

$$CV=\sqrt{\frac{1+\beta}{\beta}} \tag{7.27}$$

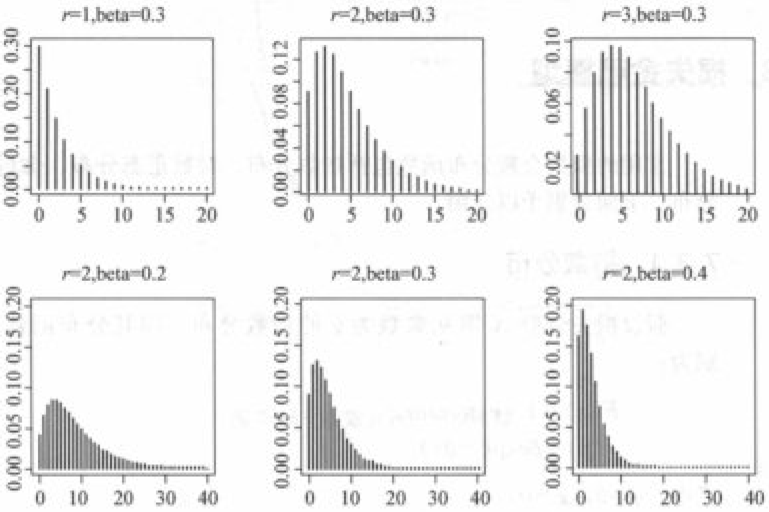


图 7—3　负二项分布的概率函数

几何分布的偏度系数为：

$$\gamma=\frac{2\beta+1}{\sqrt{\beta(1+\beta)}} \tag{7.28}$$

与负二项分布相同，几何分布的偏度系数与变异系数之比也大于 1，即

$$\frac{\gamma}{CV}=1+\frac{\beta}{1+\beta}>1$$

几何分布具有下述性质：

（1）几何分布具有无记忆性。如果用几何分布描述损失次数，则在给定发生了 m 次损失的情况下，以后的损失次数分布与 m 无关。换言之，如果损失次数服从几何分布，则未来损失次数的分布不受已经发生损失次数的影响。

（2）几何分布的众数恒为零。

几何分布的概率函数如图 7—4 所示。参数 β 的值越大，尾部越短。

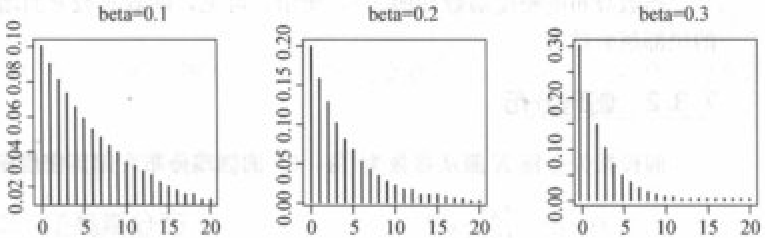


图 7—4　几何分布的概率函数

7.3 损失金额模型

常用的损失金额分布函数包括指数分布、对数正态分布、伽玛分布和帕累托分布。下面分别予以介绍。

7.3.1 指数分布

假设损失金额 X 服从参数为 θ 的指数分布，则其分布函数和密度函数分别为：

$$F(x)=1-\exp(-\theta x) \tag{7.29}$$

$$f(x)=\theta\exp(-\theta x) \tag{7.30}$$

式中，$q>0$，$x>0$。

指数分布的均值和方差分别为：

$$E(X)=1/\theta \tag{7.31}$$

$$\mathrm{Var}(X)=1/\theta^2 \tag{7.32}$$

指数分布的变异系数为 $CV=1$，偏度系数为 $\gamma=2$，偏度系数是变异系数的 2 倍，即 $\gamma=2CV$。

指数分布还具有下述性质：

（1）如果在单位时间内损失次数服从参数为 θ 的泊松分布，则相邻两次损失之间的时间间隔服从参数为 θ 的指数分布。如果单位时间内平均发生 θ 次损失（泊松分布的均值），则相邻两次损失之间的平均时间间隔为 $1/\theta$（指数分布的均值）。

（2）指数分布具有无记忆性。如果用指数分布描述保单持有人的损失金额，则免赔额 d 的使用不会影响保险公司对每次事故的期望赔款，它始终是一个与 d 无关的常数，但期望赔款次数会减少。

（3）指数分布的众数恒为零。

指数分布的密度函数如图 7—5 所示。可见，随着参数 θ 的增大，指数分布的尾部越来越短。

7.3.2 伽玛分布

假设损失金额 X 服从参数为（α，θ）的伽玛分布，则其密度函数为：

$$f(x)=\frac{\theta^{\alpha}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{e}^{-\theta x} \tag{7.33}$$

式中，$\alpha>0$，$q>0$，$x>0$。

伽玛分布的均值和方差分别为：

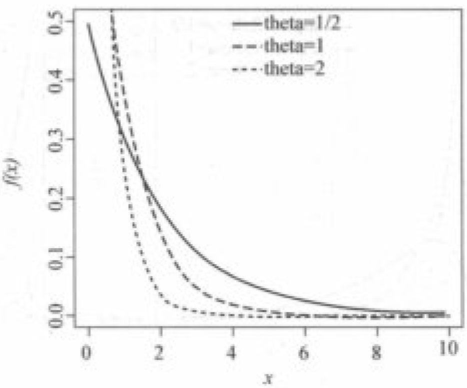


图 7—5　指数分布的密度函数

$$E(X)=\alpha/\theta \tag{7.34}$$

$$\mathrm{Var}(X)=\alpha/\theta^2 \tag{7.35}$$

伽玛分布的变异系数为：

$$CV=\alpha^{-1/2} \tag{7.36}$$

伽玛分布的偏度系数为：

$$\gamma=2\alpha^{-1/2} \tag{7.37}$$

可见，伽玛分布的偏度系数是变异系数的 2 倍，即 $\gamma=2CV$。

伽玛分布还具有下述性质：

（1）伽玛分布是右偏的。

（2）当形状参数 α 趋于无穷大时，伽玛分布近似于正态分布。

（3）当形状参数 $\alpha=1$ 时，伽玛分布就是参数为 θ 的指数分布。

（4）当尺度参数 θ 相同时，伽玛分布具有可加性，即如果 X_1 服从参数为（α_1，θ）的伽玛分布，X_2 服从参数为（α_2，θ）的伽玛分布，且 X_1 和 X_2 相互独立，则（X_1+X_2）服从参数为（$\alpha_1+\alpha_2$，θ）的伽玛分布。

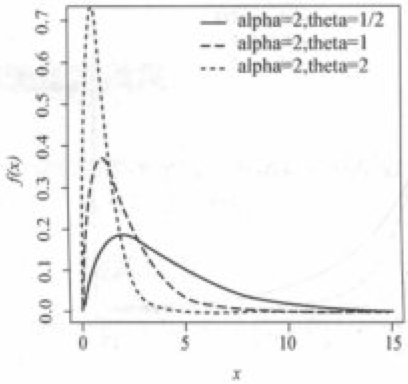
（5）伽玛分布变量乘以正常数 r 以后，仍然服从伽玛分布，参数变为（α，θ/r）。

（6）当 $\alpha>1$ 时，伽玛分布有非零的众数 $\frac{\alpha-1}{\theta}$；当 $\alpha\leqslant 1$ 时，伽玛分布的众数为零。

伽玛分布的密度函数如图 7—6 所示。

7.3.3　逆高斯分布

假设损失金额 X 服从参数为（α，θ）的逆高斯分布，则其密度函数和分布函数可以分别表示为：



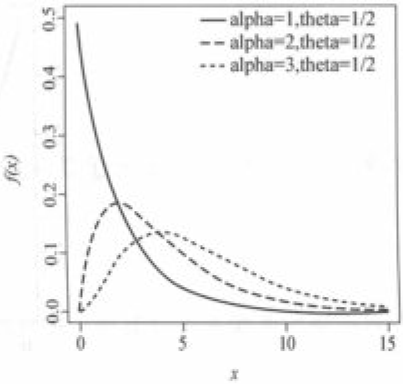


图 7—6 伽玛分布的密度函数

$$f(x)=\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\theta x^3}}\exp\left[\frac{-(\alpha-\theta x)^2}{2\theta x}\right] \tag{7.38}$$

$$F(x)=\Phi\left(\frac{-\alpha}{\sqrt{\theta x}}+\sqrt{\theta x}\right)+\exp(2\alpha)\Phi\left(\frac{-\alpha}{\sqrt{\theta x}}-\sqrt{\theta x}\right) \tag{7.39}$$

式中，$\Phi(\cdot)$ 是标准正态分布的分布函数。

逆高斯分布的均值和方差分别为：

$$E(X)=\alpha/\theta \tag{7.40}$$

$$\mathrm{Var}(X)=\alpha/\theta^2 \tag{7.41}$$

因此逆高斯分布的变异系数为：

$$CV=\alpha^{-1/2} \tag{7.42}$$

容易证明，逆高斯分布的偏度系数为：

$$\gamma=3\alpha^{-1/2} \tag{7.43}$$

可见，逆高斯分布的偏度系数是变异系数的 3 倍，即 $\gamma=3CV$。因此在给定均值和方差的情况下，逆高斯分布的尾部比伽玛分布更长。

逆高斯分布的密度函数如图 7—7 所示。

7.3.4 对数正态分布

假设损失金额 X 服从参数为（μ，σ）的对数正态分布，则其分布函数和密度函数分别为：

$$F(x)=\Phi(z) \tag{7.44}$$

$$f(x)=\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-z^2/2)=\varphi(z)/(\sigma x) \tag{7.45}$$

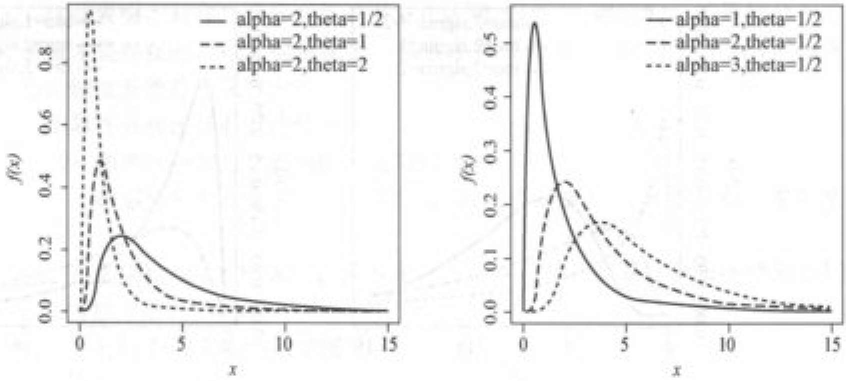


图 7—7 逆高斯分布的密度函数

式中，Φ 为标准正态分布的分布函数；φ 为标准正态分布的密度函数；$z=\dfrac{\ln(x)-\mu}{\sigma}$，$-\infty<\mu<+\infty$，$\sigma>0$，$x>0$。

对数正态分布的均值和方差分别为：

$$E(X)=\exp(\mu+0.5\sigma^2) \tag{7.46}$$

$$\mathrm{Var}(X)=\exp(2\mu+2\sigma^2)-\exp(2\mu+\sigma^2) \tag{7.47}$$

对数正态分布的变异系数为：

$$CV=(\exp(\sigma^2)-1)^{1/2} \tag{7.48}$$

对数正态分布的偏度系数为：

$$\gamma=(CV)^3+3CV \tag{7.49}$$

由此可以看出，在给定均值和方差的情况下，对数正态分布的偏度系数大于逆高斯分布的偏度系数，当然更大于伽玛分布的偏度系数，因此适用于长尾损失数据的拟合。

对数正态分布还具有下述性质：

(1) 正态分布经指数变换后即为对数正态分布；对数正态分布经对数变换后即为正态分布。

(2) 设 r，t 为正实数，X 服从参数为 (μ,σ) 的对数正态分布，则 $Y=rX^t$ 仍然服从对数正态分布，参数为 $(t\mu+\ln(r),t\sigma)$。

(3) 对数正态分布总是右偏的。

(4) 对数正态分布的均值和方差是其参数 (μ,σ) 的增函数。

(5) 对给定的参数 μ，当 σ 趋于零时，对数正态分布的均值趋于 $\exp(\mu)$，方差趋于零。

(6) 对数正态分布具有非零众数 $\exp(\mu-\sigma^2)$。

对数正态分布的密度函数如图 7—8 所示。

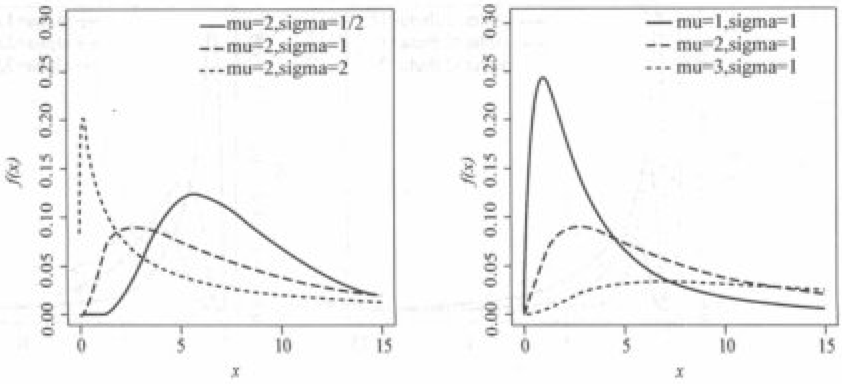


图 7—8 对数正态分布的密度函数

7.3.5 帕累托分布

假设损失金额 X 服从参数为（α，θ）的帕累托分布，则其分布函数和密度函数分别为：

$$F(x)=1-\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^{\alpha} \tag{7.50}$$

$$f(x)=\frac{\alpha\theta^{\alpha}}{(x+\theta)^{\alpha+1}} \tag{7.51}$$

式中，$\alpha>0$，$\theta>0$，$x>0$。

帕累托分布的均值和方差分别为：

$$E(X)=\frac{\theta}{\alpha-1},\ \alpha>1 \tag{7.52}$$

$$\mathrm{Var}(X)=\frac{\alpha\theta^{2}}{(\alpha-1)^{2}(\alpha-2)},\ \alpha>2 \tag{7.53}$$

帕累托分布的变异系数为：

$$CV=\left(\frac{\alpha}{\alpha-2}\right)^{1/2} \tag{7.54}$$

帕累托分布的偏度系数为：

$$\gamma=\frac{2(\alpha+1)}{\alpha-3}\left(\frac{\alpha-2}{\alpha}\right)^{1/2}=\frac{2}{CV}\frac{1-3(CV)^{2}}{(CV)^{2}-3} \tag{7.55}$$

在上式中，由于帕累托分布的变异系数大于 1，即 $CV>1$，因此上式第二项的分子小于零，而偏度系数应该是大于零的值，所以上式第二项的分母也应该小于零，即

$$(CV)^{2}<3$$

这就表明，只有当变异系数的平方在区间（1，3）取值时，帕累托分布的偏度系数才是存在的，在其他情况下，偏度系数不存在。当$(CV)^2\rightarrow 3$时，帕累托分布的偏度系数趋于无穷大。

帕累托分布还具有下述性质：

（1）帕累托分布总是右偏的，众数恒为0。

（2）帕累托分布变量乘以正常数r以后，仍然服从帕累托分布，参数变为$(\alpha, r\theta)$。

（3）如果均值$\mu=E(X)$保持不变，当$\alpha\rightarrow\infty$时，帕累托分布收敛到参数为$1/\mu$的指数分布。

帕累托分布的密度函数如图7—9所示。

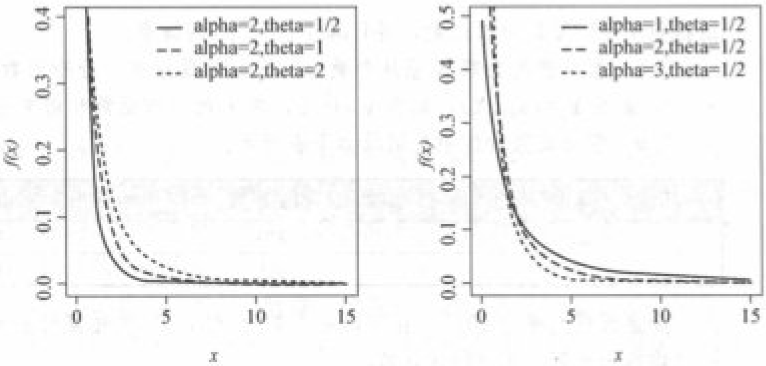


图7—9　帕累托分布的密度函数

□习　题

7.1　某团体保单在过去10年发生的索赔次数数据如下：10，35，7，20，30，12，68，42，46，38。请计算该保单索赔次数的均值和方差，并据此初步判断该保单每年的索赔次数可能服从下述哪种分布：泊松分布，二项分布，负二项分布。

7.2　某保单在过去8年发生的索赔次数数据如下：2，3，4，2，1，3，3，3。请计算该保单索赔次数的均值和方差，并据此初步判断该保单每年的索赔次数可能服从下述哪种分布：泊松分布，二项分布，负二项分布。

7.3　某保单在过去15年发生的索赔次数数据如下：1，3，4，1，0，3，2，3，5，0，1，2，1，2，1。请计算该保单索赔次数的均值和方差，并据此初步判断该保单每年的索赔次数是否可能服从泊松分布，并估计该保单在任意一年不会发生索赔的概率。

7.4　某保单在过去发生了10次损失，每次损失的损失金额如下：9.940，

1.852，0.363，2.011，0.280，3.079，0.383，4.376，10.006，6.216。假设损失金额服从指数分布，请用矩估计法估计指数分布的参数，并计算任意一次损失大于10的概率。

7.5 假设损失服从对数正态分布，过去10次损失的观察值如下：3.19，29.50，2.11，7.93，40.91，4.04，4.61，3.91，5.55，8.48。请计算：(1) 任意一次损失超过20的概率；(2) 任意一次损失小于4的概率。

7.6 已知保单A每年的索赔次数服从参数为0.5的泊松分布，保单B每年的索赔次数服从参数为0.8的泊松分布。如果把这两份保单合并为一份新保单，请计算合并后的新保单每年发生的索赔次数大于或等于2次的概率。

7.7 假设损失金额X服从帕累托分布，分布函数为$F(x)=1-\left(\frac{2}{x+2}\right)^3$，请推导$Y=1/X$的分布函数，并计算$y$大于10的概率。

7.8 假设损失金额X服从参数为0.5的指数分布，分布函数为$F(x)=1-\mathrm{e}^{-0.5x}$，若令$Y=\exp(X)$，则当$y>0$时，求$Y$的分布函数和密度函数。

7.9 假设某险种的损失记录如下表所示：

年度	损失次数	平均损失金额
2005	200	1 200
2006	400	1 500

如果折现利率为10%，且可以用参数为(3，θ)的帕累托分布拟合2004年的平均损失金额，求θ的估计值。

7.10 假设某险种的损失记录如下表所示：

年份	损失次数	平均损失额
2004	100	500
2005	200	600
2006	200	700

如果每年的通货膨胀率为5%，且可以用参数为(2，θ)的帕累托分布拟合2007年的平均损失金额，求θ的估计值。

第 8 章 Chapter 8 非寿险费率厘定基础

非寿险费率厘定的传统方法是基于保险成本的，所以，非寿险产品的费率厘定过程就是根据保单的经验损失和其他相关信息建立模型，并对其未来的保险成本进行预测的过程。当然，保险公司实际上使用的费率还会受到市场供求关系和公司自身发展战略的影响。

保险产品的成本主要包括赔款、代理人佣金、管理费用、理赔费用，以及支持该业务所需的资本金的成本，相应地，非寿险产品的费率主要由三部分构成：纯保费、费用附加及利润附加（或安全附加）。纯保费用于补偿保险公司在未来的期望赔款；费用附加用于补偿保险公司经营保险业务的各种必要的费用支出；而利润附加是对经营保险业务所占用的资本金成本的补偿。

8.1 基本概念

在非寿险的费率厘定中，有一些十分重要的基本概念，如风险单位、赔款、费用、保费和赔付率等。它们构成了非寿险定价的基本元素。为便于理解和应用非寿险定价的基本方法和基本原理，本章首先对这些基本概念进行解释，然后介绍厘定总平均费率的两种基本方法，即纯保费方法和赔付率方法。

8.1.1 风险基础和风险单位

当保单持有人将其潜在损失转移给保险人时，保险人需要收取保险费。保险费应该与保单持有人的潜在损失成比例，而度量潜在损失大小的一个基本工具就是风险基础（exposure base），它近似量化了风险的大小，因此，风险基础也就是保费基础（premium base），它的大小决定保费的高低。

真实的风险是很复杂的，且处于不断变化之中，譬如，在汽车第三者责任保

险中，如果汽车经常处于停驶状态，其第三者责任风险几乎为零，但如果行驶在人口稠密的繁华街道上，其第三者责任风险会明显上升。尽管如此，为了计算保费，我们必须选择一个近似度量风险大小的基础，即风险基础。选择风险基础是非寿险定价的一个基本环节。譬如在汽车第三者责任保险中，保险人通常使用的风险基础是车年数，即根据车年数的大小收取保险费，如果一个车年的保费是1 000元，那么两个车年的保费就是2 000元。每一个车年称作一个风险单位（exposure unit），可见，风险单位是度量风险基础的基本单位，因此在很多情况下，风险基础也称作风险单位数（number of exposures）。

最常用的风险单位数统计量有承保风险单位数（written exposures）、到期风险单位数（earned exposures）、未到期风险单位数（unearned exposures）和有效风险单位数（in-force exposures）。承保风险单位数是指在一定时期内保险人已经签订了保险合同的风险单位数。到期风险单位数是指在一定时期内保险人已经提供了保险保障的风险单位数。未到期风险单位数是指在承保的风险单位数中，截至某个时点，保险公司尚未提供保险保障的风险单位数。有效风险单位数是指在某一时点上保险人正在承担保险责任的风险单位数。需要注意的是，承保风险单位数、到期风险单位数和未到期风险单位数都是时期指标，而有效风险单位数则是一个时点指标。

为了更直观地说明这4个统计量，表8—1给出了4份保险期限均为12个月的汽车保险单以及它们相应的各种风险单位数统计量。

表8—1　　风险单位数统计量的比较

生效日期	承保风险单位数		到期风险单位数		未到期风险单位数		有效风险单位数
	2012	2013	2012	2013	2012	2013	2013-01-01
2012-01-01	1.00	0.00	1.00	0.00	0	0	0.00
2012-04-01	1.00	0.00	0.75	0.25	0.25	0	1.00
2012-07-01	1.00	0.00	0.50	0.50	0.50	0	1.00
2012-10-01	1.00	0.00	0.25	0.75	0.75	0	1.00
合计	4.00	0.00	2.50	1.50	1.50	0	3.00

从理论上讲，一个好的风险基础应该满足下述三个条件：

（1）风险基础应该是对潜在损失的准确度量，这样才能确保费率厘定结果的准确性。

（2）风险基础应该便于保险人使用和核实，否则无法用于费率厘定。

（3）风险基础应该不易受到人为操纵。

事实上，风险基础并不等于真实的风险，只是真实风险的一种近似。真实风险通常是未知的，因为它经常处于不断变化之中，而且受许多因素的影响。譬如，当汽车停在车库时，汽车碰撞风险为零，而当一个醉汉驾驶汽车时，碰撞风险将会很高。可见，汽车碰撞保险的风险基础（车年）仅仅反映风险的平均情况，并不能反映实际风险的各种变化。

保费不仅与风险基础有关，而且与费率因子有关。风险基础与期望损失（纯

保费）是一致的、连续的乘法关系，而费率因子与期望损失是离散的、非线性的关系。譬如，在汽车保险中，车年数是风险基础，而车龄是费率因子，因此，10个车年的纯保费是1个车年的10倍；而5年车龄的纯保费可能仅仅是1年车龄的1.1倍。

在许多险种中，影响被保险人潜在损失的因素有很多，但并非所有的影响因素都可以作为费率因子使用，其中的主要原因是：

（1）某些影响因素难以确定，过于主观，或波动很大。譬如，在汽车保险的费率厘定中不会使用驾驶员的性格因素，尽管容易发怒的人更容易引起交通事故。

（2）不被社会接受，如种族和宗教，即使损失数据可以证明它们与索赔频率有关，保险公司也不会使用这类变量厘定保险费率。

在影响期望损失的所有可以使用和量化的因素中，与期望损失最具有一致性关系的因素可以确定为风险基础，而其他因素则可以作为费率因子使用。

在不同的保险业务中，影响期望损失的因素千差万别，譬如，在财产保险中，建筑物的内部结构、使用情况、所处地点、外部风险状况、保护措施、保险金额等都会影响期望损失；在汽车责任保险中，驾驶人的年龄、性别、婚姻状况、驾驶记录、车辆用途、行驶里程、停放地点、汽车重量、投保车辆数、历史索赔经验等都是影响期望损失的重要因素；在车损险中，汽车的车型、出厂日期、车龄、行驶区域、免赔额、历史索赔经验等都是主要的风险因素；在公众责任保险中，影响期望损失的因素有地区、行业、保险金额、营业面积、工资额或销售额等。

可见，在各种保险业务中，影响期望损失的因素很多，但只有一个可以作为风险基础使用。下面是一些主要保险业务常用的风险基础：

在财产保险中，玻璃破碎保险通常使用建筑物面积作为风险基础，而对于其他保险，通常使用保险金额作为风险基础。

在房主保险中，财产保险部分通常使用保险金额作为风险基础，而责任保险部分通常使用房屋个数作为风险基础。

在海上保险中，通常使用保险金额作为风险基础。

在航空保险中，机身保险通常使用保险金额，而责任保险通常使用元公里（货物运输）或人公里（客运）作为风险基础。

在盗窃保险中，通常使用保险金额作为风险基础。

在机器设备保险中，通常使用机器设备的台数作为风险基础。

在信用保险中，通常使用债务额作为风险基础。

在忠诚保险中，通常使用人数作为风险基础。

在保证保险中，通常使用合同金额作为风险基础。

在汽车保险中，通常使用车年数作为风险基础，也可以使用耗油量或年行驶里程数作为风险基础。

在劳工补偿保险中，通常使用工资额或工时作为风险基础。

在医疗责任保险中，医院责任保险通常使用占用的病床数或门诊人数作为风险基础，而医生责任保险通常使用医生年（每个医生工作一年）作为风险基础。

在公众责任保险中，通常使用的风险基础有营业额、工资额或营业面积。

在再保险中，临时再保险（facultative reinsurance）的风险基础与原保险的风险基础相同；而在合同再保险（treaty reinsurance）中，通常使用原保险费作为风险基础。

8.1.2 赔款和费用

赔款是指根据保险合同的约定应当由保险公司支付给索赔人的款项，包括已付赔款和未决赔款两部分。已付赔款是指已经支付给索赔人的款项，而未决赔款是指保险公司预期需要支付给索赔人的款项。未决赔款包括个案准备金（case reserve）、已发生未完全报案赔款（incurred but not enough reported，IBNER）和已发生未报案赔款（incurred but not reported，IBNR）。个案准备金是保险公司根据已经报案的事故而估计在未来将要支付的赔款。已付赔款与个案准备金之和称作已报案赔款（reported loss）或已发生赔款（incurred loss），即

$$\text{已报案赔款}=\text{已付赔款}+\text{个案准备金}$$

已发生未完全报案赔款是指考虑到个案准备金可能存在不足而对个案准备金进行的调整。如果在已报案赔款的基础上增加已发生未完全报案赔款和已发生未报案赔款，就得到了最终赔款（ultimate loss），即

$$\text{最终赔款}=\text{已报案赔款}+\text{IBNR 准备金}+\text{IBNER 准备金}$$

最终赔款是指保险公司向索赔人最终支付的赔款。

索赔频率（claim frequency）是指在一定时期内（通常为一年）每个风险单位的索赔次数，通常用索赔总次数与风险单位数之比进行估计。譬如，一个汽车保单组合在 2014 年有 5 000 个车年的风险单位数，而在该年发生的索赔次数为 800 次，那么在 2014 年平均每个风险单位的索赔频率估计值为 $800/5\,000=16\%$。索赔频率既可以用于一组保单，也可以用于一份保单，譬如一份汽车保险单在 5 年内发生了 6 次索赔，那么这份保单的索赔频率估计值为 1.2，即每年发生 1.2 次索赔。

索赔次数既可以按照事故日期（accident date）统计，也可以按照报案日期（report date）统计。事故日期是指保险事故发生的日期，而报案日期是指保险人收到索赔申请的日期。譬如，2014 年 12 月 25 日发生的一次保险事故，被保险人在 2015 年 1 月 5 日提出索赔，如果按事故日期统计，这次事故应记入 2014 年的索赔次数；如果按报案日期统计，则应记入 2015 年的索赔次数。因此，在使用索赔频率这个概念时，应该明确索赔次数的统计含义。

需要注意的是，在一定时期内发生的索赔次数需要在保险期限结束后再经过一段时间才能确切统计出来，因为保险事故从发生到报案通常存在时间延迟。不

同险种的报案延迟时间长短不一，一般而言，财产保险的报案延迟时间较短，而责任保险的报案延迟时间较长。因此，在费率厘定实务中，通常需要根据已经报案的索赔次数来预测最终的索赔次数，并根据预测的索赔次数计算索赔频率。

索赔强度（claim severity）是指每次索赔的赔款，通常用赔款总额与索赔次数之比进行估计。严格地讲，这里的赔款应该是最终赔款，索赔次数也应该是最终索赔次数。由于报案延迟和理赔延迟的影响，最终赔款数据通常需要在保险期限结束以后经过较长时间才能得到。某些险种（如责任保险）的理赔延迟可能比较严重，有时需要经历旷日持久的诉讼程序，因此在费率厘定实务中，最终赔款也需要根据已付赔款或已报案赔款进行预测。显然，除了报案延迟的影响外，最终赔款的预测还受到理赔延迟的影响，所以相对于最终索赔次数的预测而言，最终赔款的预测难度更大。

在保险业务的经营过程中，保险公司除了需要支付各种赔款之外，还会发生各种各样的费用，如承保费用和理赔费用。

承保费用包括代理人佣金、一般管理费用、广告费用和税金等。代理人佣金是保险公司支付给保险代理人的费用，通常按照承保保费的一定比例计算。在计算代理人佣金时，也可能会考虑代理人所招揽的业务质量，并区分新业务和续保业务。在费率厘定中，承保费用通常区分为固定费用和变动费用两大类。固定费用是指与纯保费的大小无关的费用，变动费用是指与纯保费的变动直接相关的费用。

理赔费用是保险公司在结案过程中发生的费用，一般分为两种：直接理赔费用和间接理赔费用。直接理赔费用（allocated loss adjustment expense，ALAE）是指与具体案件的理赔直接相关的费用，如勘查费和诉讼费等；间接理赔费用（unallocated loss adjustment expense，ULAE）是指理赔部门的整体运营费用，包括理赔部门的薪金、办公费用和数据处理费用等，不能分摊给具体的赔案。在厘定保险费率时，通常将直接理赔费用与赔款合并在一起处理，而将间接理赔费用按赔款的一定百分比进行分配。

8.1.3 保费及其构成

保费（premium）是投保人购买保险产品向保险人所支付的价格，由纯保费和附加保费构成。纯保费用于支付保险公司在未来的期望赔款，而附加保费用于支付保险人的各种费用并给保险人提供承保利润。保险费率（premium rate）简称费率，是指每一个风险单位的保费。

纯费率（pure premium rate）是指保险公司对每一风险单位的平均赔款金额，通常用赔款总额与风险单位数之比进行估计，其计算公式如下：

$$P=\frac{L}{E} \tag{8.1}$$

式中，P 表示纯费率；L 表示赔款总额；E 表示风险单位数。

如果用 N 表示索赔次数，则纯费率也可以表示为：

$$P=\frac{N}{E}\cdot\frac{L}{N} \tag{8.2}$$

式中，N/E 是索赔次数与风险单位数之比，表示每个风险单位的索赔次数，即索赔频率；L/N 是赔款总额与索赔次数之比，表示对每次索赔的赔款金额，简称索赔强度。由此可见，纯费率就是索赔频率与索赔强度的乘积。正因如此，在费率厘定中，我们通常要分别预测索赔频率和索赔强度。

与风险单位数的统计量类似，在保费的统计中，也区分承保保费（written premium）、已赚保费（earned premium）、未赚保费（unearned premium）和有效保费（in-force premium）。承保保费是指保险人在一定时期内因承保业务而收取的保险费。已赚保费也称作满期保费，是指在保险人所收取的保费中，已尽保险责任的那部分保费。未赚保费也称作未到期保费，是指在保险人所收取的保费中，未尽保险责任的那部分保费。譬如，假设某保单的承保日期是 2013 年 7 月 1 日，保险期限是 12 个月，保险费是 1 000 元，那么到 2013 年 12 月 31 日时，这份保单在 2013 年的承保保费是 1 000 元，已赚保费是 500 元，未赚保费是 500 元。有效保费是指在某个时点上全部有效保单在整个保险期间的保费之和。

总保费与总的风险单位数之比就是总平均保费，它可以反映业务构成的变化，譬如，当高风险的业务所占比重增加时，总平均保费就会上升。费率厘定的通常方法是首先确定总平均保费，然后通过各种费率因子对总平均保费进行调整，得到各个风险类别的保费。厘定总平均保费的方法主要有纯保费法和赔付率法，我们将在本章后面介绍。

如前所述，除了补偿保险公司支付的赔款和费用之外，保费中还应该包含合理的利润附加。传统上通常将利润附加表示为保费的一定百分比。

由此可见，我们可以将保费表示为下述四项之和，即

保费＝赔款＋理赔费用＋承保费用＋利润附加

上述等式也称作保险方程（insurance equation）。保险定价的目标就是要使上式达到平衡，即保险公司收取的保费应该足以补偿其预期的赔款和费用支出，同时可以实现保险公司的承保利润目标。

更具体地讲，保险公司收取的保费应该足以补偿下述各项成本和费用：

（1）赔款，即支付给被保险人的保险赔偿金；

（2）直接理赔费用，即可以直接分配到特定赔案的理赔费用；

（3）间接理赔费用，即不能直接分配到特定赔案的理赔费用；

（4）佣金和手续费，即支付给保险代理人和经纪人的报酬；

（5）其他展业费用，即除了佣金和手续费之外的展业费用；

（6）营业税及附加；

（7）保险保障基金；

（8）保险监管费用；

(9) 可能产生的应收保费等坏账损失；

(10) 一般管理费用；

(11) 承保利润和风险附加。

费率厘定过程是一种前瞻性预测，因此在应用经验数据对当前费率的充足性进行评价时，应该考虑到许多因素都会影响保险方程右边的各个项目，如经验期的费率变化、经营管理水平的变化、业务构成的变化、有关法律法规的变化和通货膨胀等，都有可能对赔款和费用等造成影响。因此，在应用经验数据厘定保险费率时，必须对这些数据进行适当的调整，即将它们都调整到未来新费率的使用时期。

在对当前的费率进行充足性评价时，还应该注意上述保险方程应当在两个层次上达到平衡，即总体水平上的平衡和个体水平上的平衡。所谓总体水平上的平衡，是指保险公司收取的总保费应该足以支付其赔款和费用，并实现公司的总体利润目标。如果当前的费率水平不能实现保险公司的利润目标，或者实际利润超过了目标利润水平，就应该提高或降低当前的总平均费率水平。关于总平均费率水平的计算或调整方法（纯保费法和赔付率法），将在下文介绍。所谓在个体水平上的平衡，是指对于不同的个体风险或不同类别的风险，它们的保费应该与其风险水平成比例，风险越高，保费也应该越高。关于个体风险或分类风险的定价方法将在后面各章介绍。

8.1.4 赔付率和其他比率

赔付率（loss ratio）是指在每单位保费中用于支付赔款的部分，通常用赔款与保费之比进行估计。更严格地讲，为了实现保费和赔款之间的配比关系，应该用最终赔款与已赚保费之比进行估计。在实际应用中，由于实际数据的限制，赔款有可能采用已付赔款、已报案赔款或预测的最终赔款，而保费也有可能采用承保保费或已赚保费。显然，对于保费和赔款的不同选择将导致不同的赔付率估计值。例如，基于已付赔款和承保保费计算的赔付率与基于最终赔款和已赚保费计算的赔付率，它们的含义完全不同，尽管二者都可以简称为赔付率。最常使用的可能是基于已报案赔款和已赚保费估计的赔付率。此外，某些保险公司在计算赔付率时将理赔费用也包含在赔款之中，此时的赔付率称作赔款和理赔费用比率（loss and LAE ratio）。传统上，许多保险公司通过赔付率的高低来评价当前费率水平的充足性。

在保险和精算实务中，除了赔付率之外，还有一些比率指标比较常用，如理赔费用率、承保费用率、经营费用率、综合成本率、续保率和签约率等，下面分别予以介绍。

理赔费用率（loss adjustment expense ratio）是理赔费用与赔款之比，其中理赔费用包括直接理赔费用和间接理赔费用。注意，理赔费用率的分母是赔款，而不是保费，因此，赔款和理赔费用率不等于赔付率和理赔费用率之和，而等于赔付率乘以（1＋理赔费用比率），即

赔款和理赔费用率＝赔付率×(1＋理赔费用率)

承保费用率（underwriting expense ratio）是每单位保费中用于支付承保费用的部分，可以用承保费用和保费之比进行估计。保险公司通常将承保费用分解为两部分，一部分是在保单签发时发生的承保费用（如代理人佣金、广告费用和保费税等）；另一部分是在整个保险期间发生的承保费用（如一般管理费用）。为了满足配比原则，在计算承保费用率时，第一部分承保费用通常与承保保费相比，而第二部分承保费用与已赚保费相比。将这两部分比值相加就可以得到承保费用率的估计值。通过这个比率，保险公司可以监控承保费用的变化情况，并与其他保险公司进行对比。

经营费用率（operational expense ratio）是每单位保费中用于支付理赔费用和承保费用的部分，等于承保费用率加上理赔费用与已赚保费之比，即

经营费用率＝承保费用率＋理赔费用÷已赚保费

经营费用率可以用于监控公司的经营费用及其变化情况，是决定保险公司总体利润水平的关键因素之一。

综合成本率（combined ratio）是赔款和费用之和在保费中所占的比率，是衡量保险业务利润水平的主要指标，传统上用下述公式计算：

$$综合成本率＝赔付率＋\frac{理赔费用}{已赚保费}＋\frac{承保费用}{承保保费}$$

在计算综合成本率时，赔付率中不能包含理赔费用，否则会造成重复计算。

如前所述，在计算承保费用率时，对于发生在整个保险期间的承保费用，有些保险公司会在分母上使用已赚保费，此时，可以按以下公式计算综合成本率：

综合成本率＝赔付率＋经营费用率

在非寿险费率厘定和经营管理中，另外两个常用的比率指标是续保率和签约率。续保率（retation ratio）是指现有被保险人在保单到期时续保的比率，其计算公式为：

$$续保率＝\frac{实际的续保保单数}{潜在的可续保保单数}$$

譬如，保险公司在某月有 100 万份保单到期，从而可以进行续保，结果只有 80 万份保单进行了续保，则当月的续保率就是 80%。续保率的定义在不同公司之间存在较大差异，譬如，有些公司在计算续保率时可能会剔除因为被保险人死亡而没有续保的保单，而另一些公司可能并不剔除这类保单。

续保率可以反映当前费率水平的市场竞争力，也可以用于预测未来的业务规模。

签约率（close ratio，conversion rate）是指在收到保险公司报价的潜在投保人中实际上与公司签订保险合同的比率，其计算公式如下：

$$签约率=\frac{实际签订合同的人数}{收到公司报价的人数}$$

譬如，在某月有100万人收到了保险公司的报价，结果有50万人签订了保险合同，则签约率就为50%。与续保率一样，签约率在不同公司之间的定义也可能是不同的。譬如，如果一个人收到了多次报价，则有些公司可能会作为一次报价计算签约率，而有些公司可能会作为多次报价计算签约率。

签约率可以反映新费率的市场竞争力。

8.2 总平均费率

财产保险公司在承保业务时需要支付的各种税金和费用主要包括佣金、营业税、监管费、保险保障基金和一般管理费用等，由于这些费用主要发生在承保环节，所以将其统称为承保费用（underwriting expense）。

在费率厘定中，通常将保险公司的承保费用分为两大类：固定费用（fixed expenses）和变动费用（variable expenses）。固定费用是与保费大小无关的费用，如保单的印刷和邮寄费用就是典型的固定费用，无论该保单项下的保费是多少，保单的印刷和邮寄费用是相同的。变动费用是指随着保费的大小而变化的费用，可以表示为保费的一个百分比，譬如佣金和税金就属于典型的变动费用。

由于我国的营业税、城建税、监管费和保险保障基金都是按照保费的一个百分比计算的，所以可以统称为保费税。

总平均费率是指平均每个风险单位的保费水平。总平均费率的厘定可以采取两种基本方法，即纯保费法和赔付率法。

8.2.1 纯保费法

纯保费法（pure premium method）通过在纯保费上附加各种必要的费用和利润得到毛保费，因此，用纯保费法厘定的保费不仅能够满足预期的赔款和费用支出，而且能够提供预期的利润。

纯保费法的费率厘定公式可以通过下面的基本保险方程（fundamental insurance equation）推导而来，即

$$保费=赔款+理赔费用+承保费用+承保利润$$

其中，承保费用具体包括下述四类：

(1) 佣金和经纪人手续费；

(2) 税金和保险保障基金等（下面简称为保费税）；

(3) 其他展业费用；

(4) 一般管理费用。

在费率厘定中，上述各类承保费用又可进一步划分为固定费用和变动费用两

大类。固定费用与保费的多少相互独立，对于每个风险单位或每份保单而言是一个常数；变动费用随着保费的变化而变化，与保费成比例。

若令：

R 表示每个风险单位的保费（即费率）；

P 表示每个风险单位的纯保费；

F 表示每个风险单位的固定费用；

V 表示变动费用率，即单位保费中用于支付变动费用的比率；

Q 表示单位保费中的利润附加比率，

则上述保险方程可以表示为：

$$R=P+(F+RV)+RQ \tag{8.3}$$

对上述公式进行变形，即可得到下面的保费计算公式：

$$R=\frac{P+F}{1-V-Q} \tag{8.4}$$

譬如，假设每个风险单位的纯保费、固定费用、变动费用率和利润附加比率如下：

纯保费（含理赔费用）：	$P=700$ 元
每个风险单位的固定费用：	$F=100$ 元
变动费用率：	$V=15\%$
利润附加比率：	$Q=5\%$

则根据以上条件，可以计算出每个风险单位的保费为：

$$R=\frac{700+100}{1-15\%-5\%}=1\,000$$

8.2.2 赔付率法

赔付率法（loss ratio method）首先根据赔付率计算费率的调整幅度（即费率调整因子），然后对当前的费率进行调整得到新费率。赔付率法是一种应用更为广泛的费率厘定方法。在赔付率法中，新费率等于费率调整因子与当前费率的乘积，用公式可以表示为：

$$R=AR_0$$

式中，R 表示新厘定的费率；R_0 表示当前的费率；A 表示费率调整因子。

由此可见，在赔付率法中，关键在于计算费率调整因子。费率调整因子可以用公式表示如下：

$$\text{费率调整因子}(A)=\frac{\text{赔款和理赔费用率}+\text{固定费用率}}{1-\text{变动费用率}-\text{利润附加比率}}$$

式中，赔款和理赔费用率是单位保费中用于支付赔款和理赔费用的比率；固定费

用率（fixed expense ratio）是单位保费中用于支付固定费用的比率。

在费率调整因子的计算公式中，分子上是单位保费中用于支付赔款、理赔费用和固定费用的金额，而分母上是从单位保费中扣除变动费用和利润附加之后理论上可以用于支付赔款、理赔费用和固定费用的金额。如果分子和分母相等，说明在当前费率水平下，实际需要的金额和可以使用的金额相等，因此费率水平无须调整；反之，就需要对当前的费率水平进行调整。

上述费率调整因子可以通过基本保险方程求得。将前述的基本保险方程变形，当前费率水平下的利润附加比率可以表示为：

$$Q_0=1-\frac{P+F}{R_0}-V \tag{8.5}$$

费率厘定的最终目标是确保公司目标利润的实现。这里具体表现为利润附加比率应该达到目标水平。如果当前费率水平下的利润附加比率低于（或高于）目标水平，就应该相应地提高（或降低）当前费率，即将其乘上一个费率调整因子。换言之，如果用 Q 表示目标利润附加比率，则应有

$$Q=1-\frac{P+F}{A\times R_0}-V$$

上式经变形，即可求得实现目标利润附加比率的费率调整因子为：

$$A=\frac{P/R_0+F/R_0}{1-V-Q}$$

式中，分子上的第一项是经验赔付率，即赔款和理赔费用在保费中所占的比率；第二项是固定费用率，即固定费用在保费中所占的比率。上式中各个项目都可以根据经验数据计算求得。

譬如，假设某险种的经验数据如表 8—2 所示。

表 8—2　　某险种的经验数据

经验赔付率（即赔款和理赔费用在保费中的比率）	65%
固定费用率	6%
变动费用率	25%
利润附加比率	5%

根据表 8—2 中的数据，容易求得费率调整因子为：

$$A=\frac{P/R_0+F/R_0}{1-V-Q}=\frac{65\%+6\%}{1-25\%-5\%}=1.014\,3$$

即为了实现目标利润附加比率，当前费率水平应该上调 1.43%。

8.2.3　纯保费法与赔付率法的比较

前面介绍了厘定总平均费率的两种方法，即纯保费法和赔付率法。从实际应

用的角度看，这两种方法是不同的，但从理论上讲，赔付率法只是纯保费法的另一种表现形式，它们在本质上是等价的，只是所需数据不同而已。

如果所有数据都是已知的，则上述两种计算方法会得出完全相同的结果。事实上，在赔付率方法中，用费率调整因子乘以当前费率，即可得到纯保费法中的费率计算公式。但在实际应用中，由于可获得的数据会受到一定限制，因此需要注意它们的不同特点：

第一，纯保费法基于每个风险单位的纯保费（赔款和理赔费用）计算保费，因此，如果风险单位的确定比较困难或者风险单位在不同个体风险之间难以保持一致（如商业火灾保险），就不宜使用纯保费法。

第二，应用赔付率法需要已知当前的费率水平，因此赔付率法不适用于新业务的费率厘定。对于新业务，最好在预测期望赔款（纯保费）的基础上，应用纯保费法厘定其保费。

第三，应用赔付率法需要计算经验赔付率，而经验赔付率是经验期的赔款和当前费率水平下的已赚保费之比。当前费率水平下的已赚保费是指把经验期的已赚保费调整到当前的费率水平而得到的已赚保费。譬如，如果 2014 年的已赚保费是 100 万元，当前的费率水平是 2014 年的 1.2 倍，则根据当前费率水平计算 2012 年的已赚保费就是 120 万元。如果一个保险产品在经验期的费率变化较大，计算当前费率水平下的已赚保费很困难，最好使用纯保费法。譬如，在个人汽车保险中，保险公司通常使用奖惩系统，即根据保单持有人的索赔经验调整其续期保费，而且使用的费率因子较多，这就使得计算当前费率水平下的已赚保费比较困难。但是，汽车保险的风险单位数比较容易确定，因此采用纯保费法厘定费率更为方便。

□习　题

8.1　已知 2014 年已赚保费为 20 亿元，已发生损失为 12 亿元，理赔费用率为 10%，承保费用率为 20%。计算综合成本率。

8.2　两份 2 年期保单的有关信息如下：

保单	保单生效日	保单到期日	承保车辆数
A	2010 年 1 月 1 日	2011 年 12 月 31 日	5
B	2010 年 7 月 1 日	2012 年 6 月 30 日	8

(1) 计算 2011 日历年的已赚车年数（到期车年数）。

(2) 假设保单 B 于 2011 年 1 月 1 日撤销，计算 2010 日历年承保的车年数。

8.3　假设每一个风险单位的纯保费是 175 元，固定费用是 12.5 元，可变费用率是 17.5%，利润附加比率是 5%，计算每一个风险单位的保费。

8.4　假设附加费用占保费的比例如下：佣金 15.0%，税金 2.25%，其他营

销费用5.6%，一般管理费用6.8%，预期利润率0.00%。理赔费用占赔款的6.42%，如果理赔费用不列为附加费用，而是作为纯保费的一部分，计算目标赔付率。

8.5　假设某险种的保险期限为1年，新费率的生效日期是2015年7月1日，目标赔付率为60%。如果赔款每年按5%的速度增长，请根据下表的数据，计算费率的调整幅度。

保单年度	根据当前费率计算的保费	最终赔款	业务量比重
2013	2 000	1 000	0.40
2014	3 000	2 000	0.60

8.6　假设保险业务在一年内是均匀分布的，保险期限为1年，各日历年的已赚保费如下：2010年为200万元，2011年为250万元，2012年为300万元。最近几次的费率调整如下表所示：

费率调整日期	调整幅度
2008年7月1日	10%
2009年7月1日	8%
2011年7月1日	10%

计算以该表中最新的费率水平表示的2010—2012年的已赚保费。

8.7　假设每个风险单位的纯保费、固定费用、变动费用率和利润附加比率如下：

纯保费（含理赔费用）：　$P=500$ 元

每个风险单位的固定费用：　$F=60$ 元

变动费用率：　$V=20\%$

利润附加比率：　$Q=10\%$

计算每个风险单位的保费。

8.8　已知某保险产品的经验赔付率为70%，固定费用率为10%，变动费用率为25%，利润附加比率为5%，计算该产品的保险费率应该如何调整。

第9章 分类费率

Chapter 9

在非寿险业务中，尤其是在个人非寿险业务中，如果被保险人数较多，通常需要根据个体风险的特征对其进行分类，并在分类的基础上厘定各个风险类别的费率。对个体风险进行分类的原因主要在于个体风险自身的损失经验有限，数据的可信度不足，所以将其与类似风险合并之后，可以提高经验数据的可信度，进而使得定价结果更加合理。

对个体风险进行分类的这些特征通常称作分类变量或费率因子（rating factor）。譬如在汽车保险中，保险公司通常使用的费率因子有被保险人的性别、年龄、驾龄、车辆用途和索赔经验等信息。在这些费率因子中，既有连续变量（如年龄和车龄），也有离散变量（如性别和行驶区域）。在分类费率厘定中，通常会对连续变量进行离散化处理，譬如把年龄区分为25岁以下、25～40岁和40岁以上等类别。这里需要说明的是，费率因子不同于风险因子（risk factor）。风险因子对索赔频率或索赔强度虽然具有更加直接的影响，但有可能不易度量，所以通常用费率因子来代替。譬如，交通密度是影响汽车保险索赔频率的一个风险因子，但在费率厘定中，很难对其进行准确度量，因此通常采用行驶区域来代替。

在一个风险分类体系中，各个类别的费率通常表示为相对关系的形式，可以是相乘关系，也可以是相加关系。在相乘关系中，假设基准费率为A，而其他类别的费率是基准费率的若干倍；在相加关系中，假设基准费率为B，而其他类别的费率在此基础上增加一定数量。因此，分类费率也称作相对费率。相对费率可以使得费率的表现形式更加简洁，譬如，假设汽车保险的被保险人可以根据地区（10个水平）和车型（10个水平）分成100个类别，如果给每个类别厘定保费，则需要制定100个不同的费率，但是，通过基准费率和相对费率的形式，只需要确定一个基准费率和20个相对费率即可（2个费率因子，每个因子有10个水平，给每个水平确定一个相对费率），从而大大简化了费率的表现形式。

常用的分类费率模型主要有两种：乘法模型和加法模型。乘法模型假设各个

费率因子之间是相乘的关系，而加法模型假设各个费率因子之间是相加的关系。当然，根据实际需要也可以构造加法和乘法的混合模型。

在厘定分类费率（相对费率）之前，首先需要确定基准费率。基准费率有两种形式，一种是使用整个风险集合的总平均费率；另一种是使用某个特定风险类别的费率。如果使用整个风险集合的总平均费率作为基准费率，基准费率就等于风险集合的总赔款除以总的风险单位数。如果使用某个特定风险类别的费率作为基准费率，基准费率就等于该风险类别的总赔款除以总风险单位数。为了保持费率厘定结果的稳定性，选定的基准风险类别通常是包含风险单位数较多的风险类别。

为了说明分类费率的表现形式，不妨假设只有两个分类变量，第一个分类变量有 2 个水平，其相对费率分别表示为 α_1 和 α_2；第二个分类变量有 3 个水平，其相对费率分别表示为 β_1，β_2 和 β_3。整个风险集合将被划分为 $2\times3=6$ 个风险类别。如果假设风险集合的总平均费率为 μ，且将其作为基准费率使用，则 6 个风险类别的费率可以分别表示为：

$$
\begin{aligned}
&\mu_{11}=\mu\alpha_1\beta_1,\ \mu_{12}=\mu\alpha_1\beta_2,\ \mu_{13}=\mu\alpha_1\beta_3\\
&\mu_{21}=\mu\alpha_2\beta_1,\ \mu_{22}=\mu\alpha_2\beta_2,\ \mu_{23}=\mu\alpha_2\beta_3
\end{aligned}
\tag{9.1}
$$

式中，总平均费率 μ 可以应用观察数据直接求得，所以分类费率厘定的主要任务是计算相对费率因子 α_1 和 α_2，以及 β_1，β_2 和 β_3。在精算实务中，有多种方法可以用于计算相对费率因子，本章主要介绍比较传统的两种方法，即单变量分析法和边际总和法。

在分类费率厘定实务中，首先要对个体风险进行分类，因此下面讨论风险的分类问题，然后介绍单变量分析法和边际总和法在分类费率厘定中的应用。

9.1 风险分类

风险分类是通过分类变量将所有个体风险划分为若干个风险集合的过程。所谓分类变量，是指个体风险的一些基本风险特征，根据这些特征，可以将风险集合区分成若干风险子集，属于同一个风险子集的个体风险具有近似相同的潜在损失。分类变量既可以是数量特征的指标，也可以是属性特征的指标。譬如在汽车保险中，根据被保险人的性别、驾驶年龄、汽车的行驶区域、车辆类型、使用性质等对被保险人进行分类。

风险分类的目的是获得相对同质的风险子集，从而使得费率厘定结果有利于消除逆选择和道德风险。但是，风险分类的目的不能仅仅局限于分类结果的同质性，还必须使分类结果便于实际应用，而这两个目标往往是相互冲突的。

将风险集合区分成相对同质的风险子集，并对每一个风险子集的损失经验进行独立分析是有限度的，不能走向极端，否则会陷入困境。譬如将一个包含

50 000 份保单的集合划分为 7 000 个风险子集是没有任何意义的，因为许多风险子集将是空集或者只包含少数几份保单，从而使得分析结果失去了可靠的统计基础。

在实际选择分类变量时，需要从精算、经营、社会和法律等不同角度进行考虑，使得所选择的分类变量可以满足不同方面的要求。

9.1.1 精算角度的考虑

精算角度的考虑实际上就是考察分类变量的统计显著性，换言之，分类变量应该使得各个风险类别的潜在损失（或保险成本）具有显著的统计差异，而属于同一个风险类别的个体风险应该具有较高的同质性。此外，每个风险类别的个体风险应该足够多，从而确保分类数据的可信度。

保险成本受赔付成本、理赔费用、投资收益等各种因素的影响。赔付成本是索赔频率和索赔强度的函数，不同的索赔频率或索赔强度会导致赔付成本出现差异，而影响索赔频率或索赔强度的因素有很多，如汽车保险中的驾驶员年龄、性别、驾龄、职业、居住区域等都有可能对索赔频率或索赔强度产生影响。理赔费用的高低和投资收益的大小与险种的性质密切相关，譬如，在机器设备保险中，通常会发生大量的检测费用，因此涉及机器设备的保险项目往往具有较高的理赔费用；而在医疗责任保险中，相对于其他医生而言，外科医生的医疗责任容易认定，理赔延迟较短，所以保费的投资收益较低。总之，保险成本的高低与许多因素有关，分类变量的选择必须与保险成本相关，应该尽可能准确地反映不同风险类别在保险成本上的差异。如果分类变量与保险成本毫无关系，那么分类变量的应用只是增加管理费用而已。当然，不同风险类别在保险成本上的差异应该具有统计显著性，不会随着时间的变化而出现毫无规律的随机波动。

恰当选择分类变量是市场机制和公平性的必然要求。在市场经济中，能够准确地厘定保险费率的公司其成功的可能性也最大。不妨假设保险公司承保 A 组被保险人的成本是 100 元，承保 B 组被保险人的成本是 200 元。如果某家保险公司对这两组被保险人都收取相同的保险费 150 元，那么 A 组的被保险人将会因为保费太高而退出这家保险公司，而 B 组的被保险人会因为保费便宜而留在这家保险公司。结果是该保险公司因收取的保费不足以弥补其成本而出现亏损。这是一个简单的逆选择问题，但足以说明准确的保险费率对保险公司是何等重要。

精确的保险费率也能体现公平性。在上例中，为了体现公平性，保险公司应该将 A 组和 B 组的被保险人区分开来，分别收取不同的保险费，让 A 组的被保险人缴纳 100 元的保险费，而让 B 组的被保险人缴纳 200 元的保险费。此时，被保险人缴纳的保险费就是公平的。这个例子也表明，分类变量的选择应该使得各个风险类别具有较高的同质性。换言之，属于同一个风险类别的个体风险应该具有相同的期望损失，而属于不同风险类别的个体风险应该具有明显不同的期望损失。在评价一个风险类别的同质性时，应该区分期望损失和实际损失的差异，因为在一个特定的保险年度，一个期望损失较大的个体风险有可能不发生保险事

故，而一个期望损失较小的个体风险也有可能发生保险事故。

同质性的要求也不是绝对的。精算师在考虑风险同质性的同时，还应该注意分类数据的可信度。保险公司将被保险人划分成的类别越多，想要获得每一类别的损失资料就越困难。如果数据太少，厘定各个类别的保险费率就失去了可靠的统计基础。因此，即使不考虑管理成本问题，保险公司也不可能将被保险人进行无限制的划分。譬如，如果某个类别只有 2 个被保险人，他们在一个保险年度一共发生了 2 次保险事故，我们就很难有足够的把握说这个类别的索赔频率就是 100%。反之，如果一个类别包含 100 000 个被保险人，他们在一个保险年度一共发生了 10 000 次保险事故，我们就有足够的把握说该类别的索赔频率是 10%。当然，这个 10%可能仍然不是真实的索赔频率，但与前一个 100%相比，所产生的误差已经相当小了。总之，精算师一方面要考虑风险的同质性；另一方面也要考虑分类数据的可信度，确保基于分类数据的估计结果具有足够的稳定性。

9.1.2　经营角度的考虑

分类变量满足精算方面的要求仅仅是一种理想状态，事实上还要考虑其现实可行性，也就是从经营角度来评价分类变量的选择和使用。从经营的角度考虑，分类变量应该能够客观度量，使用成本不会过高，且能够进行验证。

分类变量首先应该清晰明了，避免模棱两可，便于客观度量。譬如，在汽车保险中，承保人通常会用“责任心”和“成熟”等词汇描述被保险人的风险状况，但这些变量都是无法客观度量的，因此很难作为分类变量使用，而只能使用其他一些易于度量的变量，如被保险人的性别、年龄、婚姻状况等，尽管这些变量在反映被保险人的风险水平方面可能不是最有效的。

此外，某些变量虽然可以精确度量，但度量它们的费用可能会超出保险人愿意承受的水平。换言之，当使用这些变量所能带来的收益小于度量它们的费用支出时，使用这些变量对保险人是没有意义的。譬如，在汽车保险中，可以将驾驶员根据某个变量划分成三类，假设三个类别的期望损失分别为 800 元、1 000 元和 1 200 元，而保险人获取并处理该变量的费用是每个被保险人 200 元，那么在应用该变量的场合，这三组的保费支出分别为：

第一组：1 000 元（期望损失 800 元+额外费用 200 元）

第二组：1 200 元（期望损失 1 000 元+额外费用 200 元）

第三组：1 400 元（期望损失 1 200 元+额外费用 200 元）

如果不使用该变量，这三组的期望损失将被认为是相同的，因此他们都按平均损失支付保费，此时，他们的保费支出都是 1 000 元。

如果保险公司使用该变量作为分类变量，这三组被保险人的保费支出都将超过不使用该变量的保费支出，没有任何一组被保险人因为使用了这个分类变量而从中受益！这个例子尽管比较极端，但确实说明如果使用某些分类变量的成本太高，保险人和被保险人都有可能得不偿失。

保险人在选择分类变量时，需要考虑的另一个实际问题是如何核实被保险人

所提供的数据是真实的。如果被保险人得知，某些变量的取值与其保费支出有关，那么总会有一部分被保险人蓄意欺骗保险人，试图减少保费支出，其结果是损害了诚实被保险人的利益，因为在他们的保费负担中将包含不诚实被保险人少缴纳的一部分保险费。如果保险人选择的分类变量仅仅用于保险之目的，那么这些变量会更多地受到人为操纵，并且核实起来更加困难。为了克服这一困难，保险人应该尽可能选择用于其他目的的变量。譬如，工资额和销售额是纳税的基本依据，一般不会受到人为操纵，因此选择这类变量用于厘定保险费率，就无须一一核实。

保险人在使用分类变量时应该避免不同类别之间的费率差异过大。如果A组的费率是1 000元，而B组的费率是3 000元，那么B组的被保险人就会有十分强烈的动机欺骗保险人，试图证明他属于A组，应该缴纳A组的保险费。

最后还需注意的一点是，费率结构的调整尤其是分类变量的增减，往往牵涉到管理体系的重大变化，因此不宜年年进行。如果费率结构的调整使得部分老客户的保费有所上升，情况会变得更糟，因为他们极有可能失去次年续保的意愿。

9.1.3 社会角度的考虑

一个好的分类变量还应得到社会的认可。从社会的角度来评价一个分类变量，就要考虑对被保险人隐私的保护、分类变量的取值与保险事故之间的因果关系、被保险人对分类变量取值的可控性，以及社会的支付能力等各个方面。

个人隐私是社会公众普遍关心的问题。人们一般不太愿意向外界透露个人隐私。如果分类变量涉及被保险人的个人隐私，其精确性就会大打折扣，保险公司的管理费用也会有所增加。譬如，在汽车保险中，被保险人的心理或行为习惯与其风险水平高度相关，但要获得这些变量的取值却十分困难。即使有一家保险公司在厘定保险费率时采用了这种变量，从而使其保险费率更加精确，它的业务量也可能会因此而减少。这是因为许多被保险人为了保护自己的隐私不被泄露，宁可支付相对较高的保险费。

如果一个分类变量的取值与保险事故的发生没有明显的因果联系，那么在费率厘定中使用这个变量就有可能遭到社会的抵抗。譬如，对某些实际数据的分析结果表明，信用等级较低的被保险人，其损失也相对较高，因此某些保险公司把信用等级作为分类变量使用，但信用等级的高低与保险事故的发生与否似乎缺乏必然的因果关系，所以该变量的使用遭到了一些被保险人的反对。

可控性是分类变量的一个理想特征。所谓可控性，是指分类变量的取值取决于被保险人本身的主观努力。譬如在汽车保险中，被保险人是否安装防盗设施是他自己可以控制的。因此，安装防盗设施的被保险人应该享受费率上的优惠。选择具有可控性的分类变量可以在一定程度上预防保险事故的发生。但是，满足可控性要求的分类变量在实际中不是很多。譬如在汽车保险中，“是否参加了驾驶培训”是一个可控性变量，但由于大多数被保险人都可以证明自己参加过驾驶培训，因此选择这一变量厘定保险费率就失去了意义。应用可控性变量的一个缺陷是

有可能增加保险人的管理费用。如果被保险人可以通过控制变量的取值来影响保险费率，那么保险人就必须增加一定的管理费用对被保险人提供的数据进行核实。

从社会的角度考虑，当然希望所有的被保险人都有能力支付其所必需的保险，因此在选择分类变量时还应注意公众的承受能力，尤其是当某个险种属于强制性保险时更应如此。如果根据某个变量厘定的保险费率使得一部分被保险人无力支付保险费，那么这种变量是不会为社会所接受的。

9.1.4 法律角度的考虑

分类变量的选择不能违反宪法、法律和法规。一般而言，宪法的规定比较笼统，对分类变量的选择影响不大，而有关保险的法律和法规可以明确限制保险人把某些变量作为厘定保险费率的依据。譬如，在许多国家，保险人不能根据被保险人的种族或宗教信仰厘定其费率，因为这会被认为是一种歧视行为。而对于另外一些分类变量的使用，在不同国家或地区可能存在较大差异，譬如在中国，性别可以作为汽车保险的分类变量使用，但在美国的某些州是禁止使用的。又如，在美国的某些州，保险公司可以使用被保险人的信用等级厘定新保单的费率，但是不能基于被保险人信用等级的下降而提高续保保单的费率。

9.2 单变量分析法

所谓单变量分析法（one-way analysis），是指每次仅计算一个分类变量的不同水平所对应的相对费率。譬如，在汽车保险中，如果仅仅考虑车型和地区这两个分类变量，那么在采用单变量分析法厘定分类费率时，可以首先计算车型的相对费率，然后再计算地区的相对费率。

下面通过一个简例来说明单变量分析法的基本原理。假设对一组汽车保单根据车型和地区两个变量进行了分类，每个类别的风险单位数和赔付率数据如表9—1所示，其中赔付率的合计值是各类别赔付率的加权平均数。譬如，地区A的赔付率合计为：

$$(2\,000\times40\%+8\,000\times80\%)/(2\,000+8\,000)=72\%$$

表9—1　　汽车保单的经验赔付率数据

	车型1		车型2		合计	
	风险单位数	赔付率	风险单位数	赔付率	风险单位数	赔付率
地区A	2 000	40%	8 000	80%	10 000	72%
地区B	8 000	40%	2 000	80%	10 000	48%
合计	10 000	40%	10 000	80%	20 000	60%

假设把车型1和地区A作为基准类别，它们的相对费率为1，则车型2的相对费率为2(=80%÷40%)，地区B的相对费率为0.666 7(=48%÷72%)。

由此可以得到各个风险类别的相对费率如表 9—2 所示。由车型 2 和地区 B 形成的类别，其相对费率是车型 2 的相对费率与地区 B 的相对费率的乘积，即为$2\times0.6667=1.3334$。

表 9—2　应用单变量分析法计算的相对费率

	车型 1	车型 2
地区 A	1	2
地区 B	0.666 7	1.333 4

如果进一步假设根据经验数据求得基准类别（车型 1 和地区 A）的保费为 800 元，则其他各个风险类别的保费分别可以计算如下：

车型 1 和地区 B 的保费$=800\times1\times0.6667=533.36$(元)

车型 2 和地区 A 的保费$=800\times2\times1=1600$(元)

车型 2 和地区 B 的保费$=800\times2\times0.6667=1066.72$(元)

前例是根据各个风险类别的经验赔付率厘定的相对费率，如果给出各个类别的经验纯保费（最终赔款与风险单位数之比），也可以应用纯保费厘定各个类别的相对费率。

单变量分析法虽然简单、直观，但很有可能产生偏差。譬如，在上例中，单变量分析的结果表明，地区 B 的赔付率（48%）低于地区 A 的赔付率（72%），因此其费率是地区 A 的 66.67%。但是，如果考虑到不同地区的车型分布并不相同，结果就会发生变化。对于车型 1，地区 A 和地区 B 的赔付率均为 40%，对于车型 2，地区 A 和地区 B 的赔付率均为 80%。可见，如果将车型因素考虑在内，地区 A 和地区 B 的赔付率并无差异，因此它们的费率也应该是相同的。在单变量分析中，之所以得出了地区 A 的赔付率高于地区 B 的结论，根本原因在于没有考虑到不同地区的车型分布是不同的。在地区 A，赔付率为 80%的高风险车型（即车型 2）较多，占 80%；而在地区 B，赔付率为 40%的低风险车型（即车型 1）较多，占 80%。因此在本例中，导致地区 A 的赔付率高于地区 B 的真正原因是车型，而非其他。由于地区 A 和地区 B 的实际赔付率是相同的，因此它们的相对费率也应该是相同的。换言之，表 9—2 中用单变量分析法计算的相对费率是不恰当的。

由此可见，单变量分析法的结果往往会受到其他分类变量的影响，因此，除非各个分类变量之间是相互独立的，否则，在应用单变量分析法厘定相对费率时应该特别注意风险分布不均匀产生的影响。

在应用单变量分析法时，既可以从赔付率出发计算相对费率（简称为赔付率法），也可以从纯保费出发计算相对费率（简称为纯保费法）。下面分别介绍它们在分类费率厘定中的应用。

9.2.1　赔付率法

为了说明赔付率法的应用，下面假设汽车保险中使用两个分类变量，即车型

和地区，其中车型分为 A，B 和 C 三个水平，地区分为甲和乙两个水平。

首先分析如何厘定车型的相对费率。假设可以获得的数据是各车型在过去两年的已赚保费和最终赔款。在过去的两年，车型之间的相对费率是不同的，当前的费率水平也不同于历史水平。有关数据如表 9—3 所示。

表 9—3 车型相对费率的调整系数（赔付率法）

车型	A	B	C	合计或平均
第一年的已赚保费（1）	75 000	25 000	15 000	115 000
第一年各车型的费率（2）	1 000	800	600	
第二年的已赚保费（3）	85 000	26 000	24 000	135 000
第二年各车型的费率（4）	1 200	900	700	
当前各车型的费率（5）	1 300	900	800	
当前费率水平下前两年的已赚保费（6）	189 583	541 25	474 29	291 137
前两年的最终赔款（7）	110 106	32 527	273 53	169 986
经验赔付率（8）	0. 580 8	0. 601 0	0. 576 7	0. 583 9
费率调整系数（9）	0. 994 7	1. 029 3	0. 987 7	

说明：(6)＝(1)×(5)/(2)＋(3)×(5)/(4)，(8)＝(7)/(6)，(9)＝(8)/(8)的平均值。

应用赔付率法的第一步是对过去两年的已赚保费按当前费率水平进行调整，计算当前费率水平下的已赚保费和经验赔付率。这里假设已知每种车型在过去两年的费率，然后根据费率的变化幅度把每种车型在过去两年的已赚保费调整为当前费率水平下的已赚保费。譬如，车型 A 在第一年的费率为 1 000，已赚保费为 75 000，在第二年的费率为 1 200，已赚保费为 85 000，而车型 A 在当前的费率为 1 300，因此在当前费率水平下，车型 A 在前两年的已赚保费为 75 000×1 300÷1 000＋850 000×1 300÷1 200＝189 583。其他计算参见表 9—3 的第（6）行。经验赔付率是前两年的最终赔款与当前费率水平下的已赚保费之比。如果当前的相对费率是合理的，那么各个车型的经验赔付率应该相等，都等于所有车型平均的经验赔付率。

第二步是根据经验赔付率计算费率调整系数，等于各车型的经验赔付率除以所有车型平均的经验赔付率，譬如车型 A 的经验赔付率为 0. 580 8，所有车型平均的经验赔付率为 0. 583 9，所以车型 A 的费率调整系数为 0. 580 8/0. 583 9＝0. 994 7。

表 9—3 给出的 A，B 和 C 三个车型在当前的费率为 1 300，900 和 800，所以经过调整以后的费率分别为：

A 型车：1 300×0. 994 7＝1 293. 1

B 型车：900×1. 029 3＝926. 4

C 型车：800×0. 987 7＝790. 2

如果以 A 型车为基准水平，则调整以后的相对费率为：

A 型车：1；

B 型车：926.4/1 293.1=0.716 4

C 型车：790.2/1 293.1=0.611 1

应用与表 9—3 类似的方法，可以计算出地区相对费率的调整系数如表 9—4 所示。

表 9—4　　地区相对费率的调整系数（赔付率法）

地区	甲	乙	合计或平均
第一年的已赚保费（1）	45 000	70 000	115 000
第一年的费率（2）	1 000	1 200	
第二年的已赚保费（3）	51 000	84 000	135 000
第二年的费率（4）	1 200	1 300	
当前的费率（5）	1 300	1 400	
当前费率水平下前两年的已赚保费（6）	113 750	172 128	285 878
前两年的最终赔款（7）	75 643	94 343	169 986
经验赔付率（8）	0.665 0	0.548 1	0.594 6
费率调整系数（9）	1.118 4	0.921 8	

说明：(6)=(1)×(5)/(2)+(3)×(5)/(4)，(8)=(7)/(6)，(9)=(8)/(8)的平均值。

表 9—4 给出甲、乙两个地区当前的费率为 1 300 和 1 400，所以经过调整以后的费率分别为：

甲地区：1 300×1.118 4=1 453.9

乙地区：1 400×0.921 8=1 290.5

如果以甲地区为基准水平，则调整以后的相对费率为：

甲地区：1

乙地区：1 290.5/1 453.9=0.887 5

9.2.2 纯保费法

赔付率法基于最终赔款与已赚保费之比计算相对费率，而纯保费法基于最终赔款与风险单位数之比计算相对费率。如果数据的可获得性没有问题，即可以获得任何所需要的数据，那么这两种方法将产生完全相同的结果。

在纯保费法中，一个十分重要的概念是“基本风险单位数”，它等于保险公司承保的自然风险单位数（如车年）乘以每个分类变量在经验期的相对费率。譬如，在表 9—5 中，车型 A 在甲地区的一个车年就等于一个基本风险单位数，因为车型 A 和甲地区的相对费率都是 1；而车型 B（相对费率为 0.692 3）在乙地区（相对费率为 1.076 9）的一个车年等于 0.692 3×1.076 9=0.745 5 个基本风险单位数。之所以要把自然的风险单位数折合为基本风险单位数，目的是在计算平均纯保费时消除业务构成的影响，从而为纯保费在同一个数量级上进行比较创造条件。譬如，如果在一个风险集合中高风险的被保险人所占比重较高，那么根据自

然风险单位数计算的平均纯保费也会较高，但是，如果根据基本风险单位数计算平均纯保费，风险集合的平均纯保费就不会因为风险构成而发生变化。也就是说，如果当前的相对费率是合理的，那么根据基本风险单位数计算的各个类别的纯保费应该相等，都等于总平均的纯保费，否则就应该对当前的相对费率进行调整。

表 9—5　**车型相对费率的调整系数**（纯保费法）

车型	A	B	C	合计或平均
甲地区在经验期的风险单位数（1）	600	200	100	900
乙地区在经验期的风险单位数（2）	650	300	450	1 400
甲地区的相对费率（3）	1	0.692 3	0.615 4	
乙地区的相对费率（4）	1.076 9	0.745 5	0.662 7	
经验期的基本风险单位数（5）	1 300	362	360	2 022
经验期的最终赔款（6）	1 101 060	325 270	273 530	1 699 860
经验纯保费（7）	847	898.2	760.3	840.7
费率调整系数（8）	1.007 4	1.068 4	0.904 3	

说明：(5)＝(1)×(3)＋(2)×(4)，(7)＝(6)/(5)，(8)＝(7)/(7)的平均值。

在赔付率法中，费率调整系数是根据赔付率的相对大小确定的，而在纯保费法中，费率调整系数是根据纯保费的相对大小确定的。纯保费是最终赔款与基本风险单位数的比率。

表 9—5 是用纯保费法计算的车型相对费率的调整系数。在本例中，纯保费法的计算结果不同于赔付率法，其原因是在赔付率法中，需要估计当前保费水平下前两年的已赚保费，这会产生一些估计误差。如果在赔付率法中各个类别的风险单位数是已知的，从而无须对已赚保费进行估计，则赔付率法和纯保费法将会产生相同的结果。

在表 9—5 中，经验期的最终赔款除以基本风险单位数就是经验期的纯保费。每个车型的经验纯保费与总平均的经验纯保费相比，就是各个车型的费率调整系数，譬如车型 A 的经验纯保费为 847，总平均的纯保费为 840.7，所以车型 A 的费率调整系数为 847/840.7＝1.007 4。

由表 9—5 可知，车型 A，B 和 C 在当前的相对费率分别为 1，0.692 3 和 0.615 4，其中车型 A 是基准水平。用第（8）行的费率调整系数对当前的相对费率进行调整，得到三个新的相对费率为：

车型 A：1.007 4

车型 B：0.692 3×1.068 4

车型 C：0.615 4×0.904 3

如果以车型 A 为基准水平，将其相对费率表示为 1，则新的相对费率可以表示为：

车型 A：1

车型 B：0.692 3×1.068 4/1.007 4=0.734 2

车型 C：0.615 4×0.904 3/1.007 4=0.552 4

表 9—6 是用纯保费法计算的地区相对费率的调整系数。经验纯保费是经验期的最终赔款与基本风险单位数之比。用每个地区的经验纯保费除以总平均的纯保费即得费率调整系数。譬如，甲地区的经验纯保费是 945.5，总平均的纯保费是 840.7，所以甲地区的费率调整系数为 945.5/840.7=1.124 7。

由表 9—6 可知，甲地区和乙地区的当前相对费率为 1 和 1.076 9，用费率调整系数对其进行调整，可以得到新的相对费率为：

甲地区：1.124 7

乙地区：1.076 9×0.918 4

如果以甲地区为基准水平，则新的相对费率也可以表示为：

甲地区：1

乙地区：1.076 9×0.918 4/1.124 7=0.879 4

表 9—6 地区相对费率的调整系数（纯保费法）

地区	甲	乙	合计或平均
车型 A 在经验期的风险单位数（1）	600	650	1 250
车型 B 在经验期的风险单位数（2）	200	300	500
车型 C 在经验期的风险单位数（3）	100	450	550
车型 A 的相对费率（4）	1	1.076 9	
车型 B 的相对费率（5）	0.692 3	0.745 5	
车型 C 的相对费率（6）	0.615 4	0.662 7	
经验期的基本风险单位数（7）	800	1 222	2 022
经验期的最终赔款（8）	756 430	943 430	1 699 860
经验纯保费（9）	945.5	772.1	840.7
费率调整系数（10）	1.124 7	0.918 4	

说明：(7)=(1)×(4)+(2)×(5)+(3)×(6)，(9)=(8)/(7)，(10)=(9)/(9)的平均值。

9.3 边际总和法

一个理想的费率结构应该具有这样的特点，即对于那些保单数量很大的类别，其纯保费应该等于该组实际的经验赔款。特别地，在分类体系中，每一个分类变量的不同水平所对应的纯保费之和应该等于相对应的经验赔款之和，即估计值和观察值的边际总和应该相等。根据保费和赔款的边际总和相等的原则厘定相对费率的方法就是所谓的边际总和法（marginal total method），也称作平衡法（balance principle method）。

边际总和是指一个分类变量的每一个水平所对应的赔款之和。譬如，表 9—7 中有两个分类变量，分别是地区和车型，其中地区有 A 和 B 两个水平，车型有 3

个水平，这两个分类变量把所有保单划分为6个风险类别。地区A的边际总和为1 100元，地区B的边际总和为1 400元。同样，三个车型的边际总和分别为1 500元、400元和600元。

表9—7 赔款观察值的边际总和

	地区A	地区B	合计
车型1	800	700	1 500
车型2	100	300	400
车型3	200	400	600
合计	1 100	1 400	

如果把总平均费率表示为μ，且假设地区的两个相对费率因子分别为α_1和α_2，车型的三个相对费率因子分别为β_1，β_2和β_3，则各个风险类别的期望赔款可以表示为表9—8所示的形式。注意，总平均费率μ可以根据经验数据直接求得，所以可以认为是已知的。

表9—8 期望赔款的边际总和

	地区A	地区B	合计
车型1	$\mu\alpha_1\beta_1$	$\mu\alpha_2\beta_1$	$\mu\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\beta_1$
车型2	$\mu\alpha_1\beta_2$	$\mu\alpha_2\beta_2$	$\mu\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\beta_2$
车型3	$\mu\alpha_1\beta_3$	$\mu\alpha_2\beta_3$	$\mu\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\beta_3$
合计	$\mu\sum_{j=1}^{3}\alpha_1\beta_j$	$\mu\sum_{j=1}^{3}\alpha_2\beta_j$	

在表9—8中，两个地区所对应的期望赔款的边际总和分别为$\mu\sum_{j=1}^{3}\alpha_1\beta_j$和$\mu\sum_{j=1}^{3}\alpha_2\beta_j$，三个车型所对应的期望赔款的边际总和分别为$\mu\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\beta_1$，$\mu\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\beta_2$和$\mu\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\beta_3$。

令赔款观察值的边际总和等于相应的期望赔款的边际总和，就可以建立求解相对费率因子$\alpha_i(i=1,2)$和$\beta_j(j=1,2,3)$的方程组。

下面给出边际总和法的迭代公式。为简化表述，假设只有2个分类变量，每个分类变量的相对费率因子分别为$\alpha_i(i=1,\cdots,I)$和$\beta_j(j=1,\cdots,J)$。用n_{ij}表示各个风险类别的风险单位数，用C_{ij}表示各个风险类别的总赔款，用y_{ij}表示各个风险类别的经验纯保费，用μ表示总平均费率。$\mu_{ij}=\mu\alpha_i\beta_j$为各个风险类别的期望纯保费（期望赔款）。为了使得纯保费的边际总和等于经验赔款的边际总和，可令

$$\sum_{i=1}^{I} n_{ij} y_{ij} = \sum_{i=1}^{I} C_{ij} = \mu \sum_{i=1}^{I} n_{ij} \alpha_i \beta_j$$
$$\sum_{j=1}^{J} n_{ij} y_{ij} = \sum_{j=1}^{J} C_{ij} = \mu \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \alpha_i \beta_j \tag{9.2}$$

在上式中，第一个方程组表示观察值（经验赔款）的列和等于估计值（纯保费）的列和，第二个方程组表示观察值的行和等于估计值的行和。对上述方程组进行简单变形，即可得到求解相对费率的下述递推公式：

$$\alpha_i = \frac{\sum_{j=1}^{J} n_{ij} y_{ij}}{\mu \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \beta_j} = \frac{\sum_{j=1}^{J} C_{ij}}{\mu \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \beta_j}, i = 1,2,\cdots,I$$
$$\beta_j = \frac{\sum_{i=1}^{I} n_{ij} y_{ij}}{\mu \sum_{i=1}^{I} n_{ij} \alpha_i} = \frac{\sum_{i=1}^{I} C_{ij}}{\mu \sum_{i=1}^{I} n_{ij} \alpha_i}, j = 1,2,\cdots,J \tag{9.3}$$

在上述迭代公式中，可以令一个分类变量的初始相对费率为1，如 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 1$，并将其代入第二个方程组求解 β_j；把得到的 β_j 代入第一个方程组，可以求得一组新的 α_i；然后再将其代入第二个方程组求解 β_j，如此不断循环下去，最终可以得到收敛的结果。

【例 9—1】

假设某保险公司承保的 40 000 份汽车保险单根据“地区”和“车型”两个变量分组统计的有关损失数据如表 9—9、表 9—10 和表 9—11 所示，其中经验纯保费就是总赔款与风险单位数之比。下面用边际总和法厘定各个风险类别的纯保费。

表 9—9　　风险单位数（车年数）

	地区 A	地区 B	地区 C	合计
车型 1	8 000	5 200	2 000	15 200
车型 2	13 600	6 000	2 400	22 000
车型 3	400	800	1 600	2 800
合计	22 000	12 000	6 000	40 000

表 9—10　　总赔款　　单位：元

	地区 A	地区 B	地区 C	合计
车型 1	8 400 000	7 020 000	3 600 000	19 020 000
车型 2	17 340 000	7 200 000	4 590 000	29 130 000
车型 3	825 000	1 140 000	2 640 000	4 605 000
合计	26 565 000	15 360 000	10 830 000	52 755 000

表 9—11　　经验纯保费　　单位：元

	地区 A	地区 B	地区 C
车型 1	1 050	1 350	1 800
车型 2	1 275	1 200	1 913
车型 3	2 063	1 425	1 650

根据已知数据，容易求得总平均费率为：

$$\mu=52\ 755\ 000/40\ 000=1\ 318.875$$

令地区的初始相对费率为：$\beta_1=\beta_2=\beta_3=1$，则车型的相对费率为：

$$\alpha_1=\frac{19\ 020\ 000}{1\ 318.875\times(8\ 000\times1+5\ 200\times1+2\ 000\times1)}=0.948\ 8$$

$$\alpha_2=\frac{29\ 130\ 000}{1\ 318.875\times(13\ 600\times1+6\ 000\times1+2\ 400\times1)}=1.004\ 0$$

$$\alpha_3=\frac{4\ 605\ 000}{1\ 318.875\times(400\times1+800\times1+1\ 600\times1)}=1.247\ 0$$

$$\beta_1=\frac{26\ 565\ 000}{1\ 318.875\times(8\ 000\times0.948\ 8+13\ 600\times1.004\ 0+400\times1.247\ 0)}$$
$$=0.926\ 4$$

$$\beta_2=\frac{15\ 360\ 000}{1\ 318.875\times(5\ 200\times0.948\ 8+6\ 000\times1.004\ 0+800\times1.247\ 0)}$$
$$=0.974\ 2$$

$$\beta_3=\frac{10\ 830\ 000}{1\ 318.875\times(2\ 000\times0.948\ 8+6\ 000\times1.004\ 0+1\ 600\times1.247\ 0)}$$
$$=1.303\ 0$$

以后各次的迭代结果如表 9—12 所示。

表 9—12　　边际总和法的迭代过程

	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次
车型 α_1	0.948 8	0.956 2	0.956 9	0.956 9	0.957 0
车型 α_2	1.004 0	1.023 9	1.026 6	1.027 0	1.027 0
车型 α_3	1.247 0	1.079 4	1.058 4	1.055 8	1.055 4
地区 β_1	0.926 4	0.915 3	0.913 9	0.913 7	0.913 7
地区 β_2	0.974 2	0.972 2	0.972 0	0.971 9	0.971 9
地区 β_3	1.303 0	1.346 9	1.352 5	1.353 3	1.353 4

可以看出，迭代 5 次即可获得满意的结果。因此“车型”和“地区”这两个分类变量的相对费率为：

车型：$\alpha_1=0.957\ 0$，$\alpha_2=1.027\ 0$，$\alpha_3=1.055\ 4$

地区：$\beta_1=0.913\ 7$，$\beta_2=0.971\ 9$，$\beta_3=1.353\ 4$

由此可得各风险类别的纯保费如表 9—13 所示。如“地区 A”与“车型 1”所对应类别的纯保费为：

$$1\,318.875\times0.957\,0\times0.913\,7=1\,153(\text{元})$$

表 9—13　　边际总和法的纯保费　　单位：元

	地区 A	地区 B	地区 C
车型 1	1 153	1 227	1 708
车型 2	1 238	1 317	1 833
车型 3	1 272	1 353	1 884

边际总和法也适用于有三个或三个以上分类变量的情形。不妨假设有 3 个分类变量，每个分类变量的相对费率分别记为 α_i（$i=1, \cdots, I$），β_j（$j=1, \cdots, J$），γ_k（$k=1, \cdots, K$），n_{ijk} 为各个类别的风险单位数，C_{ijk} 为各个类别的总赔款，y_{ijk} 为各个类别的经验纯保费，即 $y_{ijk}=C_{ijk}/n_{ijk}$。

若 $\mu_{ijk}=\mu\alpha_i\beta_j\gamma_k$ 为各个风险类别的纯保费（期望赔款），则为了使得纯保费的边际总和等于经验赔款的边际总和，可令

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{I}n_{ijk}y_{ijk}&=\sum_{i=1}^{I}C_{ijk}=\sum_{i=1}^{I}n_{ijk}\mu\alpha_i\beta_j\gamma_k\\ \sum_{j=1}^{J}n_{ijk}y_{ijk}&=\sum_{j=1}^{J}C_{ijk}=\sum_{j=1}^{J}n_{ijk}\mu\alpha_i\beta_j\gamma_k\\ \sum_{k=1}^{K}n_{ijk}y_{ijk}&=\sum_{k=1}^{K}C_{ijk}=\sum_{k=1}^{K}n_{ijk}\mu\alpha_i\beta_j\gamma_k\end{aligned}\tag{9.4}$$

对上述方程组进行简单变形，即可得到求解相对费率的下述递推公式：

$$\begin{aligned}\alpha_i&=\frac{\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}n_{ijk}y_{ijk}}{\mu\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}n_{ijk}\beta_j\gamma_k}=\frac{\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}C_{ijk}}{\mu\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}n_{ijk}\beta_j\gamma_k},\ i=1,2,\cdots,I\\ \beta_j&=\frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K}n_{ijk}y_{ijk}}{\mu\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K}n_{ijk}\alpha_i\gamma_k}=\frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K}C_{ijk}}{\mu\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K}n_{ijk}\alpha_i\gamma_k},\ j=1,2,\cdots,J\\ \gamma_k&=\frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}n_{ijk}y_{ijk}}{\mu\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}n_{ijk}\alpha_i\beta_j}=\frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}C_{ijk}}{\mu\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}n_{ijk}\alpha_i\beta_j},\ k=1,2,\cdots,K\end{aligned}\tag{9.5}$$

在上述迭代公式中，μ 可以解释为总平均纯保费，可以从经验数据中直接求得。

【例 9—2】

表 9—14 中是一组保单的索赔次数数据，其中 A，B 和 C 是三个分类变量，各有 2 个水平。

表 9—14 经验数据

变量 A 的水平	变量 B 的水平	变量 C 的水平	索赔次数的观察值（n_{ijk}）	车年数的观察值（C_{ijk}）	索赔频率的观察值（y_{ijk}）
A1	B1	C1	120	420	0.285 7
A1	B1	C2	200	600	0.333 3
A1	B2	C1	100	240	0.416 7
A1	B2	C2	400	1 200	0.333 3
A2	B1	C1	130	450	0.288 9
A2	B1	C2	290	480	0.604 2
A2	B2	C1	210	640	0.328 1
A2	B2	C2	800	2 460	0.325 2
合计			2 250	6 490	0.346 7

应用边际总和法计算每个风险类别的索赔频率和索赔次数的预测值。

【解】总平均索赔频率等于所有保单的索赔次数之和除以车年数之和，即

$$\mu=\frac{2\ 250}{6\ 490}=0.346\ 7$$

为了减少迭代步骤，可以根据已知数据求得分类变量 A 的两个水平 A1 和 A2 的索赔频率初始估计值如下：

$$A_1=\frac{120+200+100+400}{420+600+240+1\ 200}=0.333\ 3$$

$$A_2=\frac{130+290+210+800}{450+480+640+2\ 460}=0.354\ 8$$

所以，分类变量 A 的两个水平基于总索赔频率的相对索赔频率为：

$$\alpha_1=\frac{0.333\ 3}{0.346\ 7}=0.961\ 5$$

$$\alpha_2=\frac{0.354\ 8}{0.346\ 7}=1.023\ 5$$

用类似的方法，可以求得分类变量 B 的两个水平 B1 和 B2 的索赔频率初始估计值分别如下：

$$B_1=\frac{120+200+130+290}{420+600+450+480}=0.379\ 5$$

$$B_2=\frac{100+400+210+800}{240+1\ 200+640+2\ 460}=0.332\ 6$$

分类变量 B 的两个水平基于总索赔频率的相对索赔频率为：

$$\beta_1=\frac{0.3795}{0.3467}=1.0946$$

$$\beta_2=\frac{0.3326}{0.3467}=0.9594$$

在已知 A 和 B 的相对索赔频率的条件下，应用边际总和法的迭代公式，分类变量 C 的两个水平 C1 和 C2 的相对索赔频率估计值可以如下计算：

$$\begin{aligned}\gamma_1&=\frac{120+100+130+210}{\mu\times(420\times0.9615\times1.0946+240\times0.9615\times0.9594+450\times1.0235\times1.0946+640\times1.0235\times0.9594)}\\&=0.8994\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2&=\frac{200+400+290+800}{\mu\times(600\times0.9615\times1.0946+1200\times0.9615\times0.9594+480\times1.0235\times1.0946+2460\times1.0235\times0.9594)}\\&=1.0390\end{aligned}$$

类似地，在已知 B 和 C 的最新相对索赔频率估计值的条件下，分类变量 A 的两个水平 A1 和 A2 的相对索赔频率估计值可以更新如下：

$$\begin{aligned}\alpha_1&=\frac{120+200+100+400}{\mu\times(420\times1.0946\times0.8994+600\times0.9594\times1.0390+240\times0.9594\times0.8994+1200\times0.9594\times1.0390)}\\&=0.9464\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_2&=\frac{120+290+210+800}{\mu\times(450\times1.0946\times0.8994+480\times0.9594\times1.0390+640\times0.9594\times0.8994+2460\times0.9594\times1.0390)}\\&=1.0329\end{aligned}$$

在已知 A 和 C 的最新相对索赔频率估计值的条件下，分类变量 B 的两个水平 B1 和 B2 的相对索赔频率估计值可以更新如下：

$$\begin{aligned}\beta_1&=\frac{120+200+130+290}{\mu\times(420\times0.9464\times0.8994+600\times0.9464\times1.0390+450\times1.0329\times0.8994+480\times1.0329\times1.0390)}\\&=1.1349\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_2&=\frac{100+400+210+800}{\mu\times(240\times0.9464\times0.8994+1200\times0.9464\times1.0390+640\times1.0329\times0.8994+2460\times1.0329\times1.0390)}\\&=0.9430\end{aligned}$$

将上述过程不断重复，直至最终收敛，就可以求得各个风险类别的索赔频率估计值，如表 9—15 最后一列所示。表 9—15 表明，经过 5 次迭代以后，边际总和法的结果收敛。

表 9—15　边际总和法的迭代过程

	第 1 次迭代	第 2 次迭代	第 3 次迭代	第 4 次迭代	第 5 次迭代	第 6 次迭代
A1	0.961 5	0.946 4	0.940 3	0.939 6	0.939 6	0.939 5
A2	1.023 5	1.032 9	1.036 8	1.037 2	1.037 3	1.037 3
B1	1.094 6	1.134 9	1.139 3	1.139 7	1.139 8	1.139 8
B2	0.959 4	0.943 0	0.941 2	0.941 0	0.941 0	0.941 0
C1	0.899 4	0.889 4	0.888 3	0.888 2	0.888 2	0.888 2
C2	1.039 0	1.042 9	1.043 3	1.043 3	1.043 3	1.043 4

根据表 9—15 求得的相对索赔频率，就可以求得各个风险类别的索赔频率预测值。譬如，对于 A1，B2 和 C2 构成的风险类别，索赔频率的预测值为：

$$\mu\alpha_1\beta_2\gamma_2=0.346\,7\times0.939\,5\times0.941\,0\times1.043\,4=0.319\,8$$

其他各个风险类别的索赔频率预测值也可类似计算，结果如表 9—16 所示。

表 9—16　索赔频率的预测值

A1	B1	C1	0.329 7
A1	B1	C2	0.387 4
A1	B2	C1	0.272 2
A1	B2	C2	0.319 8
A2	B1	C1	0.364 0
A2	B1	C2	0.427 7
A2	B2	C1	0.300 6
A2	B2	C2	0.353 1

习　题

9.1　某汽车保险业务在前两年的有关损失数据如下表所示。请根据该表的数据，应用纯保费法计算甲、乙两个地区的费率调整系数。其中车型 A，B 和 C 在当前的相对费率分别为 1，0.75 和 0.65，甲地区和乙地区在当前的相对费率分别为 1 和 0.85。

	甲地区	乙地区
车型 A 的风险单位数	1 000	1 500
车型 B 的风险单位数	2 000	3 000
车型 C 的风险单位数	1 200	2 500
前两年的赔款	2 750 000	2 950 000

9.2　某汽车保险业务在前两年的有关损失数据如下表所示。请根据该表的数据，应用赔付率法计算甲、乙两个地区的费率调整系数。

地区	甲地区	乙地区
第一年的已赚保费	50 000	70 000
第一年的费率	100	120
第二年的已赚保费	60 000	80 000
第二年的费率	120	130
当前的费率	130	140
前两年的赔款	75 643	94 343

9.3 某保险公司承保的汽车保险单根据“地区”和“车型”两个变量分组统计的车年数和赔款金额数据如下表所示。请用边际总和法厘定各风险类别的纯保费。

风险单位数（车年数）

类别	地区 A	地区 B	地区 C
车型 1	4 000	4 500	2 000
车型 2	12 000	6 000	2 400
车型 3	500	800	1 600

总赔款 单位：元

类别	地区 A	地区 B	地区 C
车型 1	5 400 000	5 020 000	2 600 000
车型 2	8 340 000	6 200 000	3 590 000
车型 3	525 000	1 140 000	1 640 000

9.4 某保险公司承保的汽车保险单根据“地区”和“车型”两个变量分组统计的车年数和赔款金额数据如下表所示。请用边际总和法厘定各风险类别的纯保费。

风险单位数（车年数）

	地区 A	地区 B	地区 C
车型 1	3 000	3 200	1 200
车型 2	2 000	5 600	2 500

总赔款 单位：元

	地区 A	地区 B	地区 C
车型 1	3 100 000	4 021 000	2 600 000
车型 2	1 200 000	6 200 000	3 590 000

9.5 下表中是一组保单的赔款数据，其中 A，B 和 C 是三个分类变量，各有 2 个水平。请选定合适的初始值，应用边际总和法计算每个风险类别的纯保费。

变量 A 的水平	变量 B 的水平	变量 C 的水平	赔款（万元）	风险单位数
A1	B1	C1	230	450
A1	B1	C2	380	770
A1	B2	C1	1 050	2 470
A1	B2	C2	760	2 430
A2	B1	C1	180	460
A2	B1	C2	190	370
A2	B2	C1	390	1 670
A2	B2	C2	240	1 380

第 10 章 经验费率

Chapter 10

在分类费率厘定中，我们通常假设属于同一个风险类别的个体风险具有相同的潜在损失，即每个风险类别都是同质的，因此对它们收取相同的保险费率。但事实上，任何一个风险类别都不可能完全同质，为此，就需要根据个体风险自身的损失经验对其分类费率进行调整，这个过程也就是对个体风险进行定价的过程。在个体风险的定价中，对个体风险损失经验的处理通常有两种方法，一种是基于个体风险过去若干年的损失经验对其分类费率进行调整，从而得到未来保险期间的费率；另一种是基于个体风险在当期的损失经验对当期的保险费率进行调整。本章主要介绍如何基于个体风险的历史损失经验调整分类费率，并由此得到所谓的经验费率。

厘定经验费率的主要理论模型是信度模型，具体包括有限波动信度模型和最大精确信度模型。最大精确信度模型的两种主要形式是 Bühlmann 信度模型和 Bühlmann-Straub 信度模型。本章主要介绍信度模型在经验费率厘定中的应用。

10.1 有限波动信度模型

在费率厘定中，精算师通常需要根据被保险人的历史损失数据预测其未来的保险成本，而损失数据又来源于随机发生的保险事故，因此应用历史损失的平均值估计被保险人未来的保险成本，未必可以得到一个准确的估计值。事实上，用个体风险的历史平均值估计其保险成本的准确性如何，与损失数据中的随机波动有很大关系。受到随机波动高度干扰的历史损失数据，其本身就不宜用于厘定保险费率。

譬如在个人汽车第三者责任保险中，保险人通常会有一个很大的保单组

合，该保单组合的损失经验表明，平均每辆汽车的索赔频率为每年 0.2 次，即一般的被保险人平均每 5 年发生一次第三者责任险索赔。假设有一份保单在过去 2 年发生了 1 次保险事故，即该被保险人的经验索赔频率为 0.5。现在的问题是，应该如何估计该被保险人在未来的索赔频率？是 0.2，还是 0.5，或者其他？

如果没有被保险人的任何信息，则对其索赔频率的估计只能是 0.2，即用整个风险集合的平均索赔频率作为其估计值。现在，我们已知该保单的经验索赔频率为 0.5，这就在一定程度上表明 0.2 低估了该保单的索赔频率。但是，直接用 0.5 估计该保单在未来的索赔频率似乎也有不妥之处，因为任何一份保单的经验索赔频率都会受到随机波动的影响，一个真实索赔频率很低的被保险人也会发生保险事故，而一个真实索赔频率较高的被保险人也可能在某个保险期间不发生任何保险事故。因此，对上述保单索赔频率的最好估计值似乎应该是 0.2 和 0.5 的某种加权平均。那该如何确定权数呢？对 0.5 的权数应该取决于它对保单未来索赔频率的预测能力，通常用 Z 表示，称作经验数据的可信度或信度因子（credibility factor），在 0～1 之间取值；而对 0.2 的权数就是（$1-Z$）。在本例中，0.5 反映了保单自身的索赔经验，称作保单的损失经验，而 0.2 是一个保单组合的平均索赔频率，称作信度补项（complement of credibility），因此对该保单索赔频率的估计值可以表示为：

$$\begin{aligned}\text{估计值}&=Z\times\text{个体风险自身的损失经验}+(1-Z)\times\text{信度补项}\\&=Z\times 0.5+(1-Z)\times 0.2\end{aligned}$$

在上述公式中，如果用 $\overline{X}$ 表示基于个体风险自身损失经验计算的索赔频率，用 μ 表示个体风险所属的风险类别的平均索赔频率（信度补项），则个体风险索赔频率的估计值可以表示为：

$$\text{索赔频率的估计值}=Z\overline{X}+(1-Z)\mu$$

在有限波动信度模型中，需要确定当经验数据达到多大规模时才可以对其赋予 100%的可信度，而这个数据规模也称作完全可信度标准。如果经验数据的规模达到或超过这个标准，则经验数据的信度因子 $Z=1$；否则，其信度因子小于 1。小于 1 的信度因子称作部分可信度。下面分别介绍估计索赔频率、索赔强度和纯保费的完全可信度标准，以及当数据规模较小时，部分可信度的计算方法。

1. 索赔频率的完全可信度标准

索赔频率的估计值是索赔次数与风险单位数之比，即

$$\text{索赔频率}=\frac{\text{索赔次数}}{\text{风险单位数}}$$

索赔次数的观察值在本质上是一个随机变量，具有随机波动性，所以上式关

于索赔频率的估计值从本质上讲也是一个随机变量。这就意味着，只有当索赔次数的观察值与期望值相差不大时，应用上式估计的索赔频率才会接近于期望索赔频率。

现在的问题是，在什么条件下我们可以用很高的概率（如 90%）保证索赔次数的观察值与期望值之间的相对差异较小，譬如不超过 5%？为了回答这个问题，下面假设个体风险的索赔次数服从泊松分布。

泊松分布的方差等于其均值，且当泊松分布的参数（均值）比较大时，可以用正态分布近似。譬如，如果个体风险的索赔次数服从参数为 100 的泊松分布，那么该个体风险的索赔次数观察值将在 100 附近变化，且可以用均值为 100，方差为 100 的正态分布近似，如图 10—1 所示，其中竖线表示参数为 100 的泊松分布的概率，曲线表示均值和方差都等于 100 的正态分布的概率密度函数，两者高度吻合。

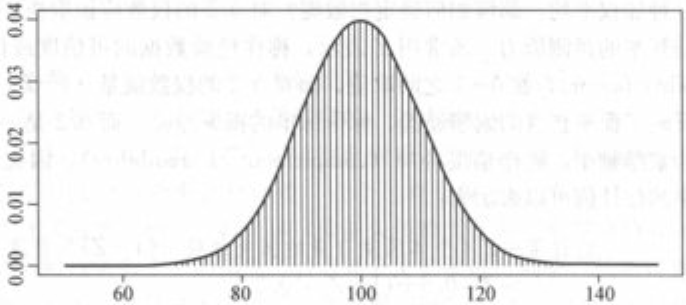


图 10—1 泊松分布的正态近似

因为正态分布的概率更容易计算，所以当泊松参数较大时，可以用正态分布的概率近似计算泊松分布的概率。譬如，如果泊松参数为 100，则损失次数落在区间（80，120）的概率可以用正态分布近似计算如下：

$$\begin{aligned}Pr(80<N<120)&=Pr\left(\frac{80-100}{10}<\frac{N-\mu}{\sigma}<\frac{120-100}{10}\right)\\&=Pr(-2<U<2)\\&=\Phi(2)-\Phi(-2)\\&=0.977\,25-0.022\,75\\&=0.954\,5\end{aligned}$$

式中，$U=\dfrac{N-\mu}{\sigma}$服从标准正态分布，其分布函数用 $\Phi(\cdot)$ 表示。

上述结果表明，如果索赔次数服从参数为 100 的泊松分布，则索赔次数的观察值落在区间（80，120）的概率为 95.45%，所以用索赔次数的观察值估计期望索赔次数时，我们有 95.45%的把握保证估计的偏差不会超过 20%。

可以进一步验证，如果索赔次数服从参数为 900 的泊松分布，则索赔次数的

观察值落在区间（855，945）的概率为：

$$
\begin{aligned}
Pr(855<N<945)&=Pr\left(\frac{855-900}{30}<\frac{N-\mu}{\sigma}<\frac{945-900}{30}\right)\\
&=Pr(-1.5<U<1.5)\\
&=\Phi(1.5)-\Phi(-1.5)\\
&=0.9332-0.06681\\
&=0.8664
\end{aligned}
$$

上式表明，如果索赔次数服从参数为900的泊松分布，则索赔次数的观察值落在区间（855，945）的概率为86.64%，所以用索赔次数的观察值估计期望索赔次数时，我们有86.64%的把握保证估计的偏差不会超过5%。

由此可见，当泊松参数很大时，我们就可以用很高的概率保证用索赔次数的观察值估计期望索赔次数时的相对偏差比较小。

假设索赔次数 N 服从均值为 n 的泊松分布，标准差为$\sqrt{n}$，则索赔次数的观察值 N 落在期望值 n 附近一个小区间（$n-rn$，$n+rn$）的概率为：

$$
\begin{aligned}
Pr(n-rn<N<n+rn)&=Pr\left(-r\sqrt{n}<\frac{N-n}{\sqrt{n}}<r\sqrt{n}\right)\\
&=Pr(-r\sqrt{n}<U<r\sqrt{n})
\end{aligned}
\tag{10.1}
$$

式中，r 是一个很小的比率（如5%），区间（$n-rn$，$n+rn$）表示以均值 n 为中心上下浮动 r 倍；$U=\dfrac{N-n}{\sqrt{n}}$是标准正态分布随机变量。

如果索赔次数的观察值 N 落在区间（$n-rn$，$n+rn$）的概率很高，如达到90%，则用索赔次数的观察值 N 估计期望索赔次数 n 时的偏差不会超过 r。

假设我们要求式（10.1）中的概率不小于 $1-\alpha$，则应有 $r\sqrt{n}\geqslant U_{1-\alpha/2}$，即

$$
n\geqslant\left(\frac{U_{1-\alpha/2}}{r}\right)^2 \tag{10.2}
$$

式中，$U_{1-\alpha/2}$是标准正态分布的 $1-\alpha/2$ 分位数。

由此可见，如果假设索赔次数服从参数为 n 的泊松分布，且要求索赔次数的观察值落在区间（$n-rn$，$n+rn$）的概率不小于 $1-\alpha$，则期望索赔次数 n 应该满足式（10.2），这个条件也就是索赔频率的完全可信度标准，也就是说，当期望索赔次数满足式（10.2）时，个体风险的经验索赔频率就具有完全的可信度，即可以用 $1-\alpha$ 的概率来保证，用个体风险的经验索赔频率代替期望索赔频率的偏差不会超过 r。

表10—1是在给定 α 和 r 的条件下，索赔频率的完全可信度标准。可见，完全可信度标准不是唯一的，它依赖于 α 和 r 的取值。

表 10—1　　索赔频率的完全可信度标准

可靠性	α	r					
		10%	5%	4%	3%	2%	1%
80%	20%	164	657	1 026	1 825	4 106	16 424
90%	10%	271	1 082	1 691	3 006	6 764	27 055
95%	5%	384	1 537	2 401	4 268	9 604	38 415
99%	1%	663	2 654	4 147	7 372	16 587	66 349

对应于 $\alpha=10\%$，$r=5\%$的期望索赔次数为 1 082，这是在实际中经常使用的一个完全可信度标准。

前面关于完全可信度的讨论基于这样一种假设，即索赔次数服从泊松分布。如果实际的索赔次数并非服从泊松分布，而是服从二项或负二项等其他分布，则完全可信度标准可以表示为：

$$n\geqslant\left(\frac{U_{1-\alpha/2}}{r}\right)^2\cdot\frac{\sigma_f^2}{\mu_f}\tag{10.3}$$

式中，μ_f 和σ_f 分别为索赔次数的均值和标准差。对于泊松分布，其均值和方差相等，因此上式的后一项为 1。

对于二项分布，其均值大于方差，因此完全可信度标准所要求的期望索赔次数较小；而对于负二项分布，其均值小于方差，因此完全可信度标准所要求的期望索赔次数较大。

完全可信度标准可表示为个体风险的期望索赔次数，但在实际应用中，个体风险的期望索赔次数是未知的，所以通常用观察到的索赔次数代替。换言之，当个体风险的索赔次数观察值达到完全可信度标准时，就可以直接用索赔次数的观察值与风险单位数之比估计个体风险的索赔频率。

【例 10—1】

假设个体风险的索赔次数服从负二项分布，均值为 200，方差为 400，请计算在 $\alpha=10\%$，$r=5\%$条件下的完全可信度标准。

【解】 完全可信度标准所要求的索赔次数为：$n=1\,082\times\frac{400}{200}=2\,164$。

2. 索赔强度的完全可信度标准

假设个体风险在保险期间发生了 n 次索赔，每次索赔的赔付额分别为 X_1，X_2，…，X_n，它们独立同分布，均值为 μ_X，方差为 σ_X^2，则索赔强度（即平均赔付额）的观察值为：

$$\overline{X}=(X_1+X_2+\cdots+X_n)/n\tag{10.4}$$

上述观察值的方差为：

$$\mathrm{Var}(\overline{X})=\mathrm{Var}[(X_1+X_2+\cdots+X_n)/n]=\frac{\sigma_X^2}{n}\tag{10.5}$$

索赔强度的观察值 $\overline{X}$ 落入期望值附近一个小区间（$\mu_X - r\mu_X$，$\mu_X + r\mu_X$）的概率为：

$$p = Pr(\mu_X - r\mu_X \leqslant \overline{X} \leqslant \mu_X + r\mu_X) = Pr\left[\frac{-r\sqrt{n}\mu_X}{\sigma_X} \leqslant \frac{\overline{X}-\mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}} \leqslant \frac{r\sqrt{n}\mu_X}{\sigma_X}\right] \tag{10.6}$$

根据中心极限定理，当索赔次数足够大时，索赔强度的观察值 $\overline{X}$ 将近似服从正态分布。因此，如果要求上述概率不小于 $1-\alpha$，则应有

$$\frac{r\sqrt{n}\mu_X}{\sigma_X} \geqslant U_{1-\alpha/2} \tag{10.7}$$

即

$$n \geqslant \left(\frac{U_{1-\alpha/2}}{r}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sigma_X}{\mu_X}\right)^2 \tag{10.8}$$

此即索赔强度的完全可信度标准。

注意，上式右边的第一项正好是索赔次数服从泊松分布时的完全可信度标准，而第二项是赔付额的变异系数的平方。

【例 10—2】

假设个体风险的索赔次数服从泊松分布，每次索赔额的变异系数为 2，$\alpha=10\%$，$r=5\%$，当个体风险的索赔次数为多大时，用样本赔付额数据估计索赔强度的可信度为 100%？

【解】 当 $\alpha=10\%$，$r=5\%$时，索赔频率的完全可信度标准为 1 082，因此索赔强度的完全可信度标准为 $1\,082\times 2^2=4\,328$，即当个体风险的索赔次数大于 4 328 时，用样本赔付额数据估计索赔强度的可信度为 100%。

3. 纯保费的完全可信度标准

纯保费是赔款与风险单位数之比。譬如，50 辆汽车在一年内发生了 25 000 元的赔款，则纯保费的观察值为每车年 25 000/50＝500（元）。纯保费也可以表示为索赔频率与索赔强度的乘积。由于纯保费受到索赔次数和赔付额的共同影响，所以其波动性更大。

假设一份保单在一个保险期间发生了 N 次索赔，每次索赔的赔付额为 X_1，X_2，…，X_N，则该保单纯保费的观察值可以表示为：

$$P = X_1 + X_2 + \cdots + X_N \tag{10.9}$$

如果假设索赔次数和赔付额相互独立，用 μ_f 和 σ_f^2 分别表示索赔次数的均值和方差，用 μ_X 和 σ_X^2 分别表示赔付额的均值和方差，则 P 的均值可以表示为：

$$\mu_P = E(P) = \mu_f \mu_X \tag{10.10}$$

而其方差为：

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= \mathrm{Var}(P) = E_N[\mathrm{Var}_P(P|N)] + \mathrm{Var}_N[E_P(P|N)] \\ &= E_N(N\sigma_X^2) + \mathrm{Var}_N(\mu_X N) \\ &= \mu_f\sigma_X^2 + \mu_X^2\sigma_f^2 \end{aligned} \tag{10.11}$$

如果假设个体风险的索赔次数服从泊松分布，其均值 μ_f 等于方差 σ_f^2，则上述纯保费观察值的方差可以简化为：

$$\mathrm{Var}(P) = \mu_f(\sigma_X^2 + \mu_X^2) \tag{10.12}$$

上式括号内是赔付额的二阶原点矩。

因此纯保费的观察值 P 落入其均值附近一个小区间 $[\mu_P - r\mu_P, \mu_P + r\mu_P]$ 的概率为：

$$p = Pr(\mu_P - r\mu_P \leqslant P \leqslant \mu_P + r\mu_P) = Pr\left(\frac{-r\mu_P}{\sigma_P} \leqslant \frac{P-\mu_P}{\sigma_P} \leqslant \frac{r\mu_P}{\sigma_P}\right) \tag{10.13}$$

当个体风险的索赔次数足够大时，P 将近似服从正态分布，而 $U = \frac{P-\mu_P}{\sigma_P}$ 将近似服从标准正态分布。因此，如果要求上述概率不小于 $1-\alpha$，则应有

$$\frac{r\mu_P}{\sigma_P} \geqslant U_{1-\alpha/2} \tag{10.14}$$

如果进一步假设索赔次数服从均值为 n 的泊松分布，则有

$$\mu_P = n\mu_X \tag{10.15}$$

$$\sigma_P = [n(\sigma_X^2 + \mu_X^2)]^{0.5} \tag{10.16}$$

将它们代入前面的不等式并经适当整理，则有

$$n \geqslant \left(\frac{U_{1-\alpha/2}}{r}\right)^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{\sigma_X}{\mu_X}\right)^2\right] \tag{10.17}$$

此即纯保费的完全可信度标准，其中不等式右边的第一项是在泊松分布假设下索赔频率的完全可信度标准，方括号内的第二项是赔付额变异系数的平方，而赔付额变异系数的平方乘以索赔频率的完全可信度标准，就是索赔强度的完全可信度标准，因此，上式也表明，纯保费的完全可信度标准等于索赔频率的完全可信度标准加上索赔强度的完全可信度标准。

值得注意的是，如果对每次的赔付额进行限制，则赔付额的变异系数会变小。因此，限额赔款的完全可信度标准要低于无限额赔款的完全可信度标准。有鉴于此，在费率厘定实践中，通常采取设置限额的方法来提高索赔数据的可信度。

如果索赔次数并不服从前面假设的泊松分布，则纯保费的完全可信度标准为：

$$n \geqslant \left(\frac{U_{1-\alpha/2}}{r}\right)^2 \cdot \left[\frac{\sigma_f^2}{\mu_f} + \left(\frac{\sigma_X}{\mu_X}\right)^2\right] \tag{10.18}$$

在此式中，如果假设索赔频率服从泊松分布，则方括号中的第一项等于 1。如果赔付额是一个常数，其方差为零，则上式就是索赔频率的完全可信度标准。总之，此式囊括了前面所有的完全可信度标准，它们都可以看作此式的特殊形式。

【例 10—3】

假设个体风险的索赔次数服从负二项分布，均值为 200，方差为 400。每次的索赔金额服从伽玛分布，变异系数为 1.5。请计算在 $\alpha=10\%$，$r=5\%$ 条件下的完全可信度标准。

【解】完全可信度标准所要求的索赔次数为：

$$n=1\,082\times\left(\frac{400}{200}+1.5^2\right)=4\,599$$

4. 部分可信度

如果个体风险的损失经验达不到完全可信度的标准，就可以给其赋予部分可信度。部分可信度通过平方根原则确定，即令 n 为已知的（期望）索赔次数，n_F 是完全可信度所要求的最小索赔次数（完全可信度标准），$n<n_F$，则部分可信度可以通过下述平方根原则确定，即

$$Z=\sqrt{n \div n_F} \tag{10.19}$$

下面以索赔频率为例，说明如何得到部分可信度的平方根原则。

令 X_1 表示用部分可信度的数据计算出的经验索赔频率，X_2 表示用完全可信度的数据计算出的经验索赔频率。显然，X_1 和 X_2 的均值应该相等，不妨记作 μ。由于计算 X_1 的样本较小，所以 X_1 的标准差要大于 X_2 的标准差。不妨用 σ_1 和 σ_2 分别表示 X_1 和 X_2 的标准差。

对于满足完全可信度标准的数据，对索赔频率的估计值直接等于 X_2，而对于部分可信度的数据，对索赔频率的估计值应为：

$$ZX_1+(1-Z)(\text{信度补项})$$

式中，Z 为信度因子；信度补项是一个常数。

无论是采用部分可信度的数据对索赔频率进行估计，还是采用完全可信度的数据对索赔频率进行估计，这两个估计值应该具有相同的方差。由于信度补项为常数，因此基于部分可信度数据的索赔频率估计值的方差为 $\mathrm{Var}(ZX_1)$，令其等于 $\mathrm{Var}(X_2)$，则有

$$Z^2\sigma_1^2=\sigma_2^2 \tag{10.20}$$

上式表明，信度因子 Z 可以表示为两个估计值的标准差之比，即

$$Z=\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \tag{10.21}$$

进一步假设我们在估计一个同质性风险类别的索赔频率 μ，样本不满足完全可信度标准，样本中只包含 k 个风险单位，则由样本数据计算得到的索赔频率为：

$$X_1=\frac{M_1+\cdots+M_k}{k} \tag{10.22}$$

式中，M_i 表示第 i 个风险的索赔次数。假设每个风险的索赔次数服从参数为 μ 的泊松分布，且相互独立，则上述估计值的方差为：

$$\sigma_1^2=\frac{\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Var}(M_i)}{k^2}=\frac{k\mu}{k^2}=\frac{\mu}{k} \tag{10.23}$$

如果上述风险类别的期望索赔次数为 n，则有 $n=k\mu$，即 $k=n/\mu$，将其代入上式，即得 X_1 的标准差为：

$$\sigma_1=\mu/\sqrt{n} \tag{10.24}$$

同理，如果用 σ_F 表示满足完全可信度标准时的期望索赔次数，则 X_2 的标准差为：

$$\sigma_2=\mu/\sqrt{n_F} \tag{10.25}$$

将上述两式代入前面的信度因子公式，即得下述平方根原则：

$$Z=\sigma_2/\sigma_1=\sqrt{n/n_F} \tag{10.26}$$

虽然在上述信度因子公式的推导中应用了泊松分布假设，但对于索赔强度和纯保费的部分可信度，上述平方根原则也适用。

【例 10—4】

某团体意外伤害保险业务的总平均索赔频率为 20%。假设一份团体保单承保了 120 名雇员的意外伤害保险，在过去的一个保险期间有 30 名雇员发生了索赔。请估计该团体保单的索赔频率。

【解】 如果使用 1 082 次索赔作为完全可信度标准，则该保单经验索赔次数的可信度为：

$$Z=\sqrt{30/1\,082}=16.65\%$$

所以索赔频率的估计值为：

$$Z\times\frac{30}{120}+(1-Z)\times 20\%=20.83\%$$

10.2 Bühlmann 信度模型

Bühlmann 信度模型是最大精确信度模型之一，它的一个重要假设前提是：个体风险的规模保持不变，也就是个体风险所包含的风险单位数保持不变。譬如，对于一份团体保单，如果保费是基于雇员人数计算的，则假设该团体的雇员人数保持不变，如果保费是基于工资总额计算的，则假设该团体的工资总额保持不变；对于一份汽车保单，则假设其承保的车辆数不变。这种假设在某些情况下显然不符合实际，但由于其他信度模型是在 Bühlmann 信度模型的基础上发展起来的，因此仍然有必要首先介绍 Bühlmann 信度模型。

在 Bühlmann 信度模型中，信度保费可以表示为：

$$P=Z\overline{X}+(1-Z)\mu \tag{10.27}$$

式中，Z 是信度因子；μ 是个体风险所属的风险集合的纯保费；$\overline{X}$ 是个体风险的平均经验损失，即

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}X_t \tag{10.28}$$

式中，X_t 是个体风险在第 t 年的经验损失；n 表示经验期，即经验数据的观察年数。

Bühlmann 信度因子的计算公式为：

$$Z=\frac{n}{n+K}=\frac{n}{n+v/a} \tag{10.29}$$

式中，K 称作 Bühlmann 参数，它是过程方差的均值（expected value of the process variance，用 v 表示）与假设均值的方差（variance of the hypothetical means，用 a 表示）之比，即

$$K=\frac{v}{a} \tag{10.30}$$

可以看出，当观察年数 n 不断增加时，信度因子 Z 将趋于 1，但永远不会等于 1。

对于随机的个体风险，其损失 X 的方差可以分解为过程方差的均值 v 和假设均值的方差 a。事实上，任何一个随机变量 X 的方差都可以分解为：

$$\mathrm{Var}(X)=E[\mathrm{Var}(X|\Theta)]+\mathrm{Var}[E(X|\Theta)] \tag{10.31}$$

其中，过程方差的均值 v 和假设均值的方差 a 分别为：

$$\begin{aligned} v&=E[\mathrm{Var}(X|\Theta)]\\ a&=\mathrm{Var}[E(X|\Theta)] \end{aligned} \tag{10.32}$$

上述方差分解公式表明，在一个风险集合中，不同的个体风险之间存在差异，这种差异可以用一个随机变量 Θ 表示，Θ 的不同取值代表不同的风险水平。一旦确定了随机变量 Θ 的取值，个体风险也就随之确定了。

对于一个给定的个体风险（风险参数为 $\Theta=\theta$），其观察值也会随机波动，这种波动就是过程方差：

$$v(\theta)=\mathrm{Var}(X|\Theta=\theta) \tag{10.33}$$

如果把所有个体风险的过程方差进行平均，即可得到整个风险集合的过程方差的均值为：

$$v=E[\mathrm{Var}(X|\Theta)]=E[v(\Theta)] \tag{10.34}$$

过程方差的均值反映了个体风险自身的不确定性。不难想象，个体风险自身的不确定性越大，其经验数据的可信度就越差，因此在估计经验费率时，对经验数据所赋予的权重也就越小。这也可以从 Bühlmann 信度因子的计算公式中得到验证，因为 v 越大，K 会越大，从而信度因子 Z 会越小。

对于给定的个体风险 $\Theta=\theta$，其观察值的期望值（亦即假设均值）为：

$$\mu(\theta)=E(X|\Theta=\theta) \tag{10.35}$$

因此假设均值的方差为：

$$a=\mathrm{Var}[E(X|\Theta)]=\mathrm{Var}[\mu(\Theta)] \tag{10.36}$$

假设均值的方差反映了不同个体风险之间的差异性。显然，不同个体风险之间的差异性越大，用整个风险集合的平均值估计个体风险的期望值就越不准确，因此，相对而言，个体风险自身的经验数据也就越可信，从而在估计经验费率时，就应该给个体风险的经验数据赋予较大的权重。

Bühlmann 信度模型假设，对于给定的个体风险 $\Theta=\theta$，其规模不会随着时间而变化，且在各年的经验损失 X_1，…，X_n 独立同分布，因此，对于给定的个体风险，它在各年的经验损失具有相同的条件均值和条件方差，与时间无关，即对于 $t=1$，…，n，假设均值为：

$$E(X_t|\Theta=\theta)=\mu(\theta) \tag{10.37}$$

过程方差为：

$$\mathrm{Var}(X_t|\Theta=\theta)=v(\theta) \tag{10.38}$$

对于给定的个体风险 $\Theta=\theta$，假设均值 $\mu(\theta)$ 就是其期望损失，但它是未知的，可以用该个体风险的平均经验损失 $\overline{X}$ 进行估计。对于给定的个体风险 $\Theta=\theta$，$\overline{X}$ 是 $\mu(\theta)$ 的无偏估计。

对于给定的个体风险 $\Theta=\theta$，由于假设其经验损失 X_1，…，X_n 相互独立，故平均经验损失 $\overline{X}$ 的条件方差可以表示为：

$$\mathrm{Var}(\overline{X} \mid \Theta=\theta)=\left(\frac{1}{n}\right)^{2} \sum_{t=1}^{n} \mathrm{Var}(X_{t} \mid \Theta=\theta)=\frac{v(\theta)}{n} \tag{10.39}$$

因此，对于一个随机个体风险，应用方差分解公式，其平均经验损失 $\overline{X}$ 的方差（即无条件方差）可以表示为：

$$\mathrm{Var}(\overline{X})=\mathrm{Var}[E(\overline{X}|\Theta)]+E[\mathrm{Var}(\overline{X}|\Theta)]=a+\frac{v}{n} \tag{10.40}$$

应用上述结果，我们可以从另外一个角度对 Bühlmann 信度因子进行解释。对 Bühlmann 信度因子的分子和分母同时乘以 a/n，则 Bühlmann 信度因子可以表示为：

$$Z=\frac{a}{a+v/n}=\frac{\mathrm{Var}[\mu(\Theta)]}{\mathrm{Var}(\overline{X})} \tag{10.41}$$

上式的分子度量了在一个风险集合中，不同个体风险之间的差异，而分母是随机个体风险平均经验损失 $\overline{X}$ 的方差。由此可见，信度因子就是在随机个体风险平均经验损失 $\overline{X}$ 的方差中，个体风险之间的变异性所占的比重。换言之，个体风险之间的差异越大，个体风险自身的经验损失对纯保费的影响越大。

在前面的介绍中，我们将 Bühlmann 信度模型用于估计个体风险的纯保费或索赔频率，其中 n 表示对个体风险的观察年数，X_t 表示个体风险在第 t 年的经验损失或经验索赔次数，$\overline{X}$ 表示个体风险的经验纯保费或经验索赔频率，μ 表示风险集合的纯保费或索赔频率，$P=Z\overline{X}+(1-Z)\mu$ 表示纯保费或索赔频率的信度估计值。

事实上，我们还可以把 Bühlmann 信度模型用于估计个体风险的索赔强度。此时，可以把 n 解释为个体风险的索赔次数，把 X_t 解释为第 t 次的索赔金额，而 $\overline{X}$ 为个体风险的经验索赔强度，μ 为风险集合的索赔强度，$P=Z\overline{X}+(1-Z)\mu$ 就是索赔强度的信度估计值。

【例 10—5】

假设风险集合中只包含 A 和 B 两类风险，A 类风险发生损失的概率是 B 类风险的两倍，它们的损失金额分布如表 10—2 所示。如果某个风险在某次事故中的损失额为 300，求该风险下次损失额的 Bühlmann 信度估计值。

表 10—2　　损失金额的分布

损失额	风险 A 的概率	风险 B 的概率
300	0.4	0.8
400	0.3	0.1
500	0.3	0.1

【解】 如果没有该风险的任何经验损失数据，我们只能用风险集合的期望损失来估计该风险的损失。在已知该风险发生了一次 300 的损失后，就可以应用信度模型通过经验损失和总平均损失的加权平均来估计其下次的损失额。

A 类风险的期望损失 $\mu_A=300\times0.4+400\times0.3+500\times0.3=390$

B 类风险的期望损失 $\mu_B=300\times0.8+400\times0.1+500\times0.1=330$

风险集合的期望损失 $\mu=390\times\frac{2}{3}+330\times\frac{1}{3}=370$

因此，假设均值的方差为：

$$a=\frac{2}{3}\times(390-370)^2+\frac{1}{3}\times(330-370)^2=800$$

A 类风险的过程方差为：

$$(300-390)^2\times0.4+(400-390)^2\times0.3+(500-390)^2\times0.3=6\,900$$

B 类风险的过程方差为：

$$(300-330)^2\times0.8+(400-330)^2\times0.1+(500-330)^2\times0.1=4\,100$$

因此，过程方差的均值为：

$$v=\frac{2}{3}\times6\,900+\frac{1}{3}\times4\,100=5\,966.67$$

个体风险只有一次损失观察值，即 $n=1$，$\overline{X}=300$，所以 Bühlmann 信度因子为：

$$Z=\frac{n}{n+v/a}=0.118\,2$$

该个体风险损失金额的 Bühlmann 信度估计值为：

$$Z\overline{X}+(1-Z)\mu=0.118\,2\times300+(1-0.118\,2)\times370=361.73$$

在信度模型的实际应用中，必须确定风险集合的总均值、过程方差的均值和假设均值的方差，即参数 μ，v 和 a 的取值。在上一节的几个例子中，由于给出了损失的具体分布，因此可以精确计算出这三个参数的取值。在许多情况下，我们可能无法确知损失的具体分布形式，此时，只能对这三个参数进行估计。

在 Bühlmann 信度模型中，我们假设风险集合中包含 r 个风险，每个风险的规模相等，不会随着时间发生变化，且它们的观察年数相等，均为 n。

对于 Bühlmann 信度模型，总均值的一个无偏估计为：

$$\hat{\mu}=\overline{X}=\frac{1}{rn}\sum_{i=1}^{r}\sum_{t=1}^{n}X_{it} \tag{10.42}$$

对于风险参数为 $\Theta=\theta_i$ 的第 i 个风险，其损失观察值 X_{i1}，…，X_{in} 相互独立，故 $\hat{v}_i=\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(X_{it}-\overline{X}_i)^2$ 是过程方差 $v(\theta_i)=\mathrm{Var}(X_{it}|\Theta=\theta_i)$ 的无偏估计，其中 $\overline{X}_i=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}X_{it}$ 是个体风险 i 的平均损失观察值。对 $\hat{v}_i$ 求平均，可以得到过程

方差的均值 v 的一个无偏估计为：

$$\hat{v} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \hat{v}_i \tag{10.43}$$

假设均值的方差 a 的一个无偏估计为：

$$\hat{a} = \frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r} (\overline{X}_i - \overline{X})^2 - \frac{\hat{v}}{n} \tag{10.44}$$

式中，$\hat{v}$ 是过程方差的均值的无偏估计。

【例 10—6】

假设风险集合中只有两个规模相等的个体风险，对每个风险的观察期均为 3 年，第一个风险的经验损失为（6，5，7）；第二个风险的经验损失为（9，12，9）。请计算这两个风险在下一年度损失金额的信度估计值。

【解】 两个个体风险的平均经验损失分别为：

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{3}\times(6+5+7)=6$$

$$\overline{X}_2 = \frac{1}{3}\times(9+12+9)=10$$

因此风险集合的平均经验损失为：

$$\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{2}\times(6+10)=8$$

两个个体风险的过程方差分别为：

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{3-1}\times[(6-6)^2+(5-6)^2+(7-6)^2]=1$$

$$\hat{v}_2 = \frac{1}{3-1}\times[(9-10)^2+(12-10)^2+(9-10)^2]=3$$

因此在风险集合中，过程方差的均值为：

$$\hat{v} = \frac{1}{2}\times(1+3)=2$$

相应地，在风险集合中，假设均值的方差为：

$$\hat{a} = \frac{1}{2-1}[(6-8)^2+(10-8)^2]-\frac{1}{3}\hat{v} = \frac{22}{3}$$

故而 Bühlmann 参数和信度因子分别为：

$$\hat{K} = \frac{\hat{v}}{\hat{a}} = \frac{3}{11}$$

$$\hat{Z} = \frac{3}{3+\hat{K}} = \frac{11}{12}$$

由此可得这两个风险在下一年度损失金额的信度估计值：

$$\hat{Z}\overline{X}_1+(1-\hat{Z})\hat{\mu}=\frac{37}{6}=6.17$$

$$\hat{Z}\overline{X}_2+(1-\hat{Z})\hat{\mu}=\frac{59}{6}=9.83$$

□ 习 题

10.1 某保单的损失额为常数，请在正态分布假设下计算信度因子为0.5的期望索赔次数。假设要求可靠程度达到90%，波动幅度控制在5%以内。

10.2 假设个体风险每次索赔额的变异系数为1，$\alpha=10\%$，$r=10\%$，请计算当索赔次数为多大时，用样本赔付额数据估计索赔强度的可信度为100%。

10.3 已知两份保单在过去各年的损失经验数据如下表所示。请估计保单B的Bühlmann信度保费。

保单持有人	年份			
	2010	2011	2012	2013
A	73	80	65	70
B	65	65	63	75

10.4 已知两份保单在过去三年的损失数据如下表所示。假设每份保单的被保险人数在年度间保持不变，且为常数，请计算：

(1) 每份保单年度损失的过程方差的均值。

(2) 每份保单年度损失的假设均值的方差。

(3) 每份保单年度损失的信度估计值。

保单	年度损失		
	第一年	第二年	第三年
A	6	5	4
B	6	7	8

第 11 章 Chapter 11 非寿险准备金

对于经营非寿险业务的保险公司来说，非寿险准备金是资产负债表上金额最大的负债项目。非寿险准备金的合理评估，一方面能够保证产品定价准确，提高保险公司的市场竞争力；另一方面，可以增强保险公司的偿付能力，降低经营风险，提高风险管理水平。本章主要介绍非寿险准备金的概念、分类和基本的评估方法。

11.1 非寿险准备金概述

在不同的领域，准备金的概念有不同的内涵和外延。本章所讨论的“非寿险准备金”是“保险公司非寿险业务准备金”的简称。

保险公司的非寿险业务是指除人寿保险业务以外的保险业务，包括财产损失保险业务、责任保险业务、信用保险业务、短期健康保险业务和意外伤害保险业务以及上述业务的再保险业务。所以，简单来说，“非寿险准备金”就是指经营非寿险业务的保险公司根据保险合同用于支付未来赔付所应预留或准备的资金。

关于非寿险准备金的分类，不同的国家有不同的分类方式。本章主要讨论未到期责任准备金、未决赔款准备金和理赔费用准备金这三类非寿险准备金的评估方法。

未到期责任准备金也称作保费准备金，是指当年承保的业务在会计年度末尚未到期，在下一年度仍然有效的保险合同按照未到期的时间提存的准备金。从财务会计的角度来看，在年内承保时收取的保险费，只能叫作入账保险费，它是针对承保危险的全部责任的。事实上，在会计年度末，当年承保的保单可能还有一部分未到期，保险公司对它们还负有保险赔偿责任，因此需要在入账保险费中对这一部分未了责任划出一部分保险费，留待以后年度支付未到期的保单可能发生

的赔款。这部分保险费称为保费准备金，也就是未到期责任准备金。

例如，保险公司签发了一份一年期的保单，保险费为 1 200 元，保单从约定的生效日（2014 年 9 月 1 日）开始，一年后（2015 年 8 月 31 日）期满结束。2014 年 12 月 31 日，到了该保险公司的会计评估日，如果保单尚未发生保险事故，保险公司应该如何处置已经收取的保费收入呢？因为评估日正好处于保单有效期之内，所以不能将这张保单的全部保费（1 200 元）都确认为当年收入。按照会计核算的权责发生制原则，可将这张保单的保费分为两部分，一部分覆盖从保单生效日到评估日这 4 个月的时间，计为“已赚保费”，为 400 元；另一部分覆盖从评估日至保单到期日这段时间，称为“未赚保费”，为 800 元。将“未赚保费”作为对保单持有人的负债入账，称为“责任准备金”。这 800 元责任准备金的作用就是“准备”用来承担未来 8 个月内，一旦发生保险事故，保险公司所要承担的保险“责任”。

在每个会计年度末，保险公司都会有一定数量的未决赔案。发生未决赔案的原因是在保险事故的发生、报告和理赔之间存在时间“延迟”。这种延迟可分为“报案延迟”和“理赔延迟”两种主要形式，延迟时间少则几天，多则数年。车损险和家财险结案周期通常较短，一般在数周内均可结案。责任险类案件拖延的时间则相对较长，通常从出险到报案就需要 2～3 年的时间，例如，机动车辆第三者人身伤害责任保险和医疗事故责任保险的理赔周期通常较长，对于这类案件，精算师在估计未决赔款时有较大的难度。

未决赔款主要包括下述两方面的内容：

（1）被保险人已经提出索赔，且保险公司经过调查已经确定应该赔付，但在年终结算时尚未支付的赔款；或被保险人已经提出索赔，但保险公司尚未作出理赔结论的赔案。理赔延迟的原因可能是索赔人和保险公司对于赔案的责任范围或赔付金额存有争议，或是在接近年终时才发生的赔案来不及调查和定损。某些险种如海上保险，当发生共同海损时往往需要几年的时间才能理算清楚。

（2）已经发生但尚未报告的赔案（IBNR）。由于没有任何信息，所以对这类赔案的估计最为困难。

综上所述，未决赔款准备金是指在会计年度末，已经发生的赔案由于尚未处理（包括尚未报告）或赔付而必须提存的责任准备金。由于一些当年发生的赔案要经历较长的时间才能结清，因此有必要从案发当年的收入中提存适当的准备金，以保证将来有足够的资金支付这些赔款。

例如，保险公司签发的一份一年期的保单，保单的有效期是从 2014 年 9 月 1 日开始，到 2015 年 8 月 31 日期满结束。但是，在 2014 年 10 月 20 日，这张保单发生了保险事故，到了 2014 年 12 月 31 日，该保险公司该如何处置保费收入呢？首先，该保单在年末尚未到期，所以保险公司必须预留“未到期责任准备金”。其次，这份保单已经发生了保险事故，所以保险公司就要向保单持有人按保险合同履行赔付责任，给予赔款。但是，如果发生的保险事故没有及时报告，或虽然及时报告了，但保险公司由于各种原因在年末没有及时赔付，那么保险公司就必

须预留准备金，用来赔付这“未决的赔款”，即所谓的未决赔款准备金。

理赔费用准备金是指对尚未结案的赔案可能发生的理赔费用而提取的准备金。对于保险事故，保险公司除应支付给被保险人按照合同约定的赔偿外，还应支付结案过程中发生的理赔费用。所以，保险公司在提取赔款准备金的同时，也要提取理赔费用准备金。

理赔费用准备金一般分为两种：直接理赔费用准备金和间接理赔费用准备金。直接理赔费用是指与具体案件的理赔直接相关的费用，如专家勘查费、诉讼费和独立理算人的理算费用等；间接理赔费用是指理赔部门的整体运营费用，包括理赔部门的薪金、办公费用和数据处理费用等，不能分摊给具体的赔案。

注意，按照《保险公司非寿险业务准备金管理办法（试行）》第七条的规定，保险公司的未决赔款准备金包括已发生已报案未决赔款准备金、已发生未报案未决赔款准备金和理赔费用准备金，该规定将理赔费用准备金当作未决赔款准备金的一部分。由于本书将分别讨论未决赔款准备金和理赔费用准备金的评估方法，所以，本书以下内容的未决赔款准备金只包括已发生已报案未决赔款准备金和已发生未报案未决赔款准备金两部分。

11.2　未到期责任准备金评估

未到期责任准备金是将已收保费中的一部分确认为准备金负债，用于支付有效保单从评估日到保单到期日这段时间发生的赔款。

未到期责任准备金对应于保险合同期未经历部分的保费，意味着保险公司可根据保险期未经历部分的比例计算保单的准备金。例如，保单有 20%的风险在评估日前，有 80%的风险在评估日后，那么在评估日就有 80%的保费未被赚取，这份保单的未到期责任准备金为 80%×保费。然而逐单计算准备金成本太高，因此，保险公司通常采用一些近似的方法从总体上计算未到期责任准备金。在保费收取、风险分布均匀的假设下，通常采用比例法。

比例法的假设条件为：保费收入在一年（季、月）中是均匀流入的，与之相对应的风险在保险期内也是均匀分布的，从而未到期责任准备金与未经历的保险合同期长度成正比。比例法根据假设的不同，具体可分为年比例法（1/2 法）、季比例法（1/8 法）、月比例法（1/24 法）和日比例法（1/365 法）。在计算技术比较落后，或者公司数据库信息不完善的情况下，可以采用年比例法（1/2 法）、季比例法（1/8 法）或月比例法（1/24 法）。目前，保险公司在实务中应用比较普遍的是日比例法（1/365 法）。

采用月比例法（1/24 法）评估未到期责任准备金时，假设在保险期内各月份的承保服从均匀分布，这样可以近似地认为所有保单都从月中开始生效，即每份保单在承保当月只能赚得半月保费，一年被分为 24 个半月，承保当月只能赚得年保费的 1/24。

例如，对于1月份生效的保单，在年末的未赚保费（即未到期责任准备金）是保费收入的1/24；对于2月份生效的保单，在年末的未赚保费是保费收入的3/24……对于12月份生效的保单，在年末的未赚保费是保费收入的23/24。

1/24法是评估未到期责任准备金比较常用的一种方法，但当保险业务集中于每月的某一时段时（如月初或月末），其评估结果的准确性会受到较大质疑。

日比例法（1/365法）是根据实际业务的承保期限逐单对未到期责任准备金进行评估的一种方法，不需要任何假设。在逐单评估时，以其未满期日数占保险期限的比例来计算未到期责任准备金。采用的公式为：

$$未到期责任准备金=\frac{保单到期日-准备金评估日}{保单到期日-保单生效日}\times保费收入$$

式中，(保单到期日－准备金评估日)/(保单到期日－保单生效日）为该保单未赚保费的比例，乘以保费收入就是该保单的未到期责任准备金。

年比例法、季比例法和月比例法均要求保费收入满足均匀分布的假设，只有在满足各自的假设条件时，才能准确评估未到期责任准备金。然而在实务中，这些条件通常很难满足，方法的准确性随着假设条件对现实情况背离程度的提高而下降。

一般说来，假设条件越严格，偏离现实的可能性越大，偏离程度越大，从而评估的准确性越差。换句话说，年比例法、季比例法和月比例法所要求的假设条件依次更为宽松，从而其评估准确性也依次增强。相比之下，日比例法没有要求保费收入满足均匀分布的假设，能更真实地反映现实，因而评估精确性最高。然而，日比例法的计算量最大，同时对公司的IT系统要求较高，它需要数据系统及时记录并更新保单的各项信息，如保费金额、保险期限、保单的有效性等。所以，只有IT系统比较完善的保险公司才可采用1/365法计提未到期责任准备金。

如果保单的风险分布在整个保险期间是不均匀的，在评估未到期责任准备金时还可以根据实际的风险分布情况进行计算。譬如，假设对于保费是780元的一年期保单，如果它在每个月的风险分布是递增的，每月的占比分别为1/78，2/78，3/78，…，11/78，12/78，相加正好是100%，则保单生效满1个月时的未到期责任准备金为：

$$780\times(1-1/78)=770(元)$$

满2个月时的未到期责任准备金为：

$$780\times(1-1/78-2/78)=750(元)$$

$$\vdots$$

满11个月时的未到期责任准备金为：

$$780\times(1-1/78-2/78-\cdots-11/78)=780\times12/78=120(元)$$

11.3 未决赔款准备金评估

未决赔款准备金是指保险公司为尚未结案的赔案提取的准备金，包括已发生已报案未决赔款准备金、已发生未报案未决赔款准备金。未决赔款准备金是非寿险公司在财务上最为重要的一项负债。

未决赔款准备金评估方法可以分为确定性方法和随机性方法。确定性方法包括链梯法、案均赔款法、准备金进展法和 B-F 等方法。确定性方法只能求得准备金的均值，而随机性可以求得未决赔款准备金的概率分布。

本章仅介绍两种最常用的准备金评估的确定性方法，即链梯法和 B-F 法。案均赔款法和准备金进展法的基本原理与链梯法相同，只是使用的数据有所差异，故省略。

11.3.1 流量三角形

在进行非寿险准备金评估之前，通常需要将赔款数据整理成流量三角形的形式。

流量三角形（run-off triangle）是一种将赔款数据按照事故发生年和赔款支出年交叉分组而形成的数据表格，是各种准备金评估方法最基本的数据组织形式。下面通过一个简例来说明流量三角形的构成。

【例 11—1】

已知保险公司在 2014 年对某项非寿险业务的赔款支出数据如表 11—1 所示。

表 11—1　　保险公司在 2014 年的赔款支出数据　　单位：千元

事故发生年度	2014	2013	2012	2011	2010	2009	2008
在 2014 年的赔款	4 522	4 890	3 182	2 060	1 180	466	286

在表 11—1 中，4 522 表示事故发生在 2014 年，保险公司在 2014 年当年赔付的金额；4 890 表示事故发生在上一年，即 2013 年，延迟 1 年后，在 2014 年赔付的金额；同理类推，466 表示事故发生在 2009 年，延迟 5 年后于 2014 年赔付的金额；286 表示事故发生在 2008 年，延迟 6 年后于 2014 年赔付的金额（可能包括 2008 年之前的赔案）。

由于每年都有类似的赔款支出数据，为便于记录和分析，可以将表 11—1 中的数据按表 11—2 的形式进行记录，将赔付支出数据依次对应到表 11—2 的一条对角线上，这样就容易看出事故发生年度和延迟年数的情况。表 11—2 的形式简单明了，信息量丰富，便于进行数据分析。例如，如果想知道 2014 年的总赔款，只需将这条对角线上的所有元素相加即可。

表 11—2　　保险公司在 2014 年的赔款支出数据　　单位：千元

事故年	进展年						
	0	1	2	3	4	5	6+
2008							**286**
2009						**466**	
2010					**1 180**		
2011				**2 060**			
2012			**3 182**				
2013		**4 890**					
2014	**4 522**						

如果保险公司的历史赔款数据记录完整，则对于每个年份，我们都可以在相应的对角线上填人数据，形成表 11—3。

表 11—3　　已付赔款　　单位：千元

事故年	进展年						
	0	1	2	3	4	5	6+
2003						29	14
2004					200	78	154
2005				568	226	186	22
2006			700	620	314	82	204
2007		1 172	756	700	290	202	182
2008	1 310	1 566	1 170	504	336	308	**286**
2009	1 264	1 380	1 160	1 282	818	**466**	
2010	1 090	1 362	1 184	1 510	**1 180**		
2011	1 382	1 452	1 976	**2 060**			
2012	2 246	2 752	**3 182**				
2013	3 428	**4 890**					
2014	**4 522**						

在准备金评估时，只使用该表中的一部分数据，如表 11—4 所示，这就是保险公司已付赔款的流量三角形。

表 11—4　　增量已付赔款　　单位：千元

事故年	进展年						
	0	1	2	3	4	5	6+
2008	1 310	1 566	1 170	504	336	308	**286**
2009	1 264	1 380	1 160	1 282	818	**466**	
2010	1 090	1 362	1 184	1 510	**1 180**		
2011	1 382	1 452	1 976	**2 060**			
2012	2 246	2 752	**3 182**				
2013	3 428	**4 890**					
2014	**4 522**						

在流量三角形中，列表示事故发生年（accident year）；行表示进展年（development year），即事故发生年至赔款支出年的延迟（进展）年数；表中交叉项的元素表示在第 i 事故年发生的赔案到第 j 进展年的赔款，流量三角形从左下角到右上角的对角线上的元素代表在每一日历年度的赔款。

在表 11—4 中，每个事故年和进展年所对应的赔款数据为增量的形式，所以称这种流量三角形为增量已付赔款流量三角形（the incremental run-off triangle）。

以表 11—4 的第 1 列（即第 0 进展年）为基础，将第 1 列（第 0 进展年）的数据加到第 2 列（第 1 进展年）对应的数据之上，可得第 2 列（第 1 进展年）的累积数据；再将第 2 列的累积数据加到第 3 列（第 2 进展年）对应的数据之上，可得第 3 列（第 2 进展年）的累积数据；从前往后，以此类推，以第一行（2008 年）的计算为例：1 310＋1 566＝2 876；2 876＋1 170＝4 046……可得表 11—5。因为这时每个事故年和进展年所对应的已付赔款数据为累积形式，所以称表 11—5 为累积已付赔款流量三角形（the cumulative run-off triangle）。

表 11—5 累积已付赔款 单位：千元

事故年	进展年						
	0	1	2	3	4	5	6+
2008	1 310	2 876	4 046	4 550	4 886	5 194	**5 480**
2009	1 264	2 644	3 804	5 086	5 904	**6 370**	
2010	1 090	2 452	3 636	5 146	**6 326**		
2011	1 382	2 834	4 810	**6 870**			
2012	2 246	4 998	**8 180**				
2013	3 428	**8 318**					
2014	**4 522**						

上述流量三角形是以保险公司的已付赔款（paid claims）为例进行说明的。实际上，还可以用其他数据组成流量三角形，如已报案赔款（the reported claim）、已报案案件数（number reported）、已结案案件数（number settled）、案均赔款（average payments）等。将这些数据按照保险事故发生的年度和赔款支出的年度进行交叉排列可以构成各种类型数据的流量三角形。在下面的计算中，流量三角形的数据又可以按增量（incremental）和累积（cumulative）的形式组成增量流量三角形和累积流量三角形。

流量三角形估计技术的最终目的是要在已知数据的基础上，估计出流量三角形右下角的数据，换言之，准备金评估就是一个“从三角形到长方形”的过程。

11.3.2 链梯法

链梯法（chain-ladder method）是应用最为广泛的准备金评估方法之一。链梯法具有“平均”和“稳定”的基本思想，它依据流量三角形中各列的比例关系来外推未来的赔款数据。泰勒（Taylor，2000）对链梯法作出了精彩的解释：链梯法中的“链”是由后一年与前一年的比率逐年构成的，而“梯”则是指精

算人员可以通过这个“链”向上攀登，从历史数据中一步步预测出未来的最终赔款。

链梯法的重要假设是保险公司的赔款支出具有稳定的延迟（进展）模式。链梯法通常采用的是累积数据。下面通过一个例子来介绍应用链梯法的具体步骤。

【11—2】

已知保险公司累积已付赔款流量三角形的历史数据如表 11—5 所示。下面利用链梯法，对保险公司截至 2014 年末的未决赔款准备金进行估计。

【解】 用链梯法评估未决赔款准备金可分为以下四个步骤。

步骤一：计算逐年进展因子。在累积已付赔款流量三角形中，将第 2 列（第 1 进展年）的数据除以第 1 列（第 0 进展年）对应的数据，如 2 876/1 310＝2.195 4，2 644/1 264＝2.091 8，2 452/1 090＝2.249 5……即可得到表 11—6 第 1 列“0—1”的逐年进展因子，称为“第 0 进展年到第 1 进展年的逐年进展因子”，简记为“0—1”进展因子。

类似地，将第 3 列（第 2 进展年）的数据除以第 2 列（第 1 进展年）对应的数据，可得到第 2 列“1—2”的逐年进展因子数据。以此类推，最终计算的逐年进展因子如表 11—6 所示。

表 11—6 逐年进展因子

事故年	逐年进展					
	0—1	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6+
2008	2.195 4	1.406 8	1.124 6	1.073 8	1.063 0	1.055 1
2009	2.091 8	1.438 7	1.337 0	1.160 8	1.078 9	
2010	2.249 5	1.482 9	1.415 3	1.229 3		
2011	2.050 7	1.697 2	1.428 3			
2012	2.225 3	1.636 7				
2013	2.426 5					
平均值	2.206 5	1.532 5	1.326 3	1.154 6	1.071	1.055 1

步骤二：计算逐年进展因子的平均值。从表 11—6 可以看出，第 1 列“0—1”逐年进展因子共有 6 个不同的值，但都处于一个比较小的区间［2.0，2.5］之内，其他列的情形也类似。所以可以假定各进展年之间具有稳定的延迟模式，进展具有相似的规律，因此可以通过表 11—6 确定一个逐年进展因子的平均值，通过这个平均值来对未来的赔款进行预测。

怎样从各列不同的逐年进展因子值中得到一个平均值是链梯法的关键所在，下文将介绍多种计算方法。现在先假设已计算出的逐年进展因子的平均值如表 11—6 的最后一行所示。

下一步是将这些平均值作为衡量相邻两个进展年已付赔款的比率关系的标准，用来预测累积已付赔款流量三角形中下三角部分的数值。

注意：“累积进展因子”表示上述逐年进展因子的平均值的乘积。如“5—

UL”表示 1.055 1，“4—UL”表示 1.071×1.055 1，“3—UL”表示 1.154 6×1.071×1.055 1，等等。

步骤三：预测流量三角形中下三角部分的数值。下面以表 11—5 中最后一行（事故年 2014 年所在行）未知数值的预测为例说明具体的计算过程。表 11—5 中最后一行一共有 7 个数，第一个数已知，为 4 522，后面 6 个数均未知。

先估计第 1 个未知数值（最后一行第 2 个元素），因为“0—1”逐年进展因子的平均值为 2.206 5，这就表示 4 522 到这个“未知数值”的进展因子也为 2.206 5，所以第 1 个未知数值的预测值为 4 522×2.206 5＝9 978。

又由于“1—2”逐年进展因子的平均值为 1.532 5，因此第 2 个未知数值（最后一行第 3 个元素）为 9 978×1.532 5＝15 291；这等价于以 4 522 为标准，连乘两个进展因子的结果：4 522×2.206 5×1.532 5＝15 291。以此类推，其他计算结果如表 11—7 所示。

表 11—7 累积已付赔款的预测值 单位：千元

事故年	进展年						
	0	1	2	3	4	5	6+
2008	1 310	2 876	4 046	4 550	4 886	5 194	**5 480**
2009	1 264	2 644	3 804	5 086	5 904	**6 370**	6 721
2010	1 090	2 452	3 636	5 146	**6 326**	6 775	7 148
2011	1 382	2 834	4 810	**6 870**	7 932	8 495	8 963
2012	2 246	4 998	**8 180**	10 849	12 527	13 416	14 155
2013	3 428	**8 318**	12 747	16 906	19 521	20 906	22 058
2014	**4 522**	9 978	15 291	20 280	23 416	25 078	26 459

步骤四：估计未决赔款准备金。表 11—7 的最后一列是对应每个事故年的最终赔款估计值，2014 年对应的主对角线（表 11—7 中的黑体数据）为截至评估日的累积已付赔款。未决赔款可以根据每个事故年的最终赔款估计值（最后一列）减去截至评估日的累积已付赔款进行估计。应用前述的赔款数据，未决赔款的估计结果如表 11—8 所示。

表 11—8 未决赔款的估计值 单位：千元

事故年	最终赔款 （1）	已付赔款 （2）	未决赔款准备金 （3）＝（1）－（2）
2008	5 480	5 480	0
2009	6 721	6 370	351
2010	7 148	6 326	822
2011	8 963	6 870	2 093
2012	14 155	8 180	5 975
2013	22 058	8 318	13 740
2014	26 459	4 522	21 937
合计	90 984	46 066	44 918

从以上计算过程可以看出，计算逐年进展因子的平均值是应用链梯法的关键，因为它确定了逐年进展因子的大小，它的微小变动可能给未决赔款的估计值带来很大的影响。

计算逐年进展因子的平均值可以采取不同的方法，如简单平均、加权平均和几何平均等，也可以采用最近若干个事故年的简单平均或加权平均，有时还可以使用中位数。在实际应用时，精算师可以根据保险业务的实际情况，并结合自己的经验判断选择计算合适的平均值。表 11—9 是根据表 11—6 的逐年进展因子计算的一些估计值。

表 11—9　　逐年进展因子的平均值

事故年	逐年进展					
	0—1	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6+
2008	2.195 4	1.406 8	1.124 6	1.073 8	1.063 0	1.055 1
2009	2.091 8	1.438 7	1.337 0	1.160 8	1.078 9	
2010	2.249 5	1.482 9	1.415 3	1.229 3		
2011	2.050 7	1.697 2	1.428 3			
2012	2.225 3	1.636 7				
2013	2.426 5					
简单平均	2.206 5	1.532 5	1.326 3	1.154 6	1.071 0	1.055 1
几何平均	2.203 3	1.528 3	1.320 4	1.152 9	1.070 9	1.055 1
加权平均	2.250 2	1.548 7	1.328 7	1.157 9	1.071 7	1.055 1
中位数	2.210 4	1.482 9	1.376 2	1.160 8	1.071 0	1.055 1

以“0—1”进展因子为例，各种平均值的计算过程如下。

简单平均：$(2.195\,4+2.091\,8+2.249\,5+2.050\,7+2.225\,3+2.426\,5)/6=2.206\,5$

几何平均：$(2.195\,4\times 2.091\,8\times 2.249\,5\times 2.050\,7\times 2.225\,3\times 2.426\,5)^{1/6}=2.203\,3$

加权平均：$\dfrac{2.195\,4\times 1\,310+2.091\,8\times 1\,264+\cdots+2.426\,5\times 3\,428}{1\,310+1\,264+1\,090+1\,382+2\,246+3\,428}=2.250\,2$

在计算加权平均值时，通常采取下述更加简单的方法：

$$\frac{2\,876+2\,644+2\,452+2\,834+4\,998+8\,318}{1\,310+1\,264+1\,090+1\,382+2\,246+3\,428}=2.250\,2$$

上式实际上就是表 11—5 中第一个进展年的赔款之和除以第 0 个进展年的对应赔款之和。注意，分母上删除了 2014 事故年的赔款 4 522。

值得注意的是，已付赔款代表赔案的实际支付额，客观性较强，但它的不足之处是没有利用已报案未决赔款准备金的信息。同时已付赔款受理赔速度的影响，理赔部门处理赔案的速度每年都可能发生变化，从而导致赔付延迟模式和进展因子波动较大。因此，基于已付赔款数据的准备金评估会因为理赔速度的变化而被歪曲。在准备金评估实务中，也可利用已报案赔款数据按以上方法预测未决

赔款准备金。

11.3.3 B-F 法

未决赔款准备金的评估方法，从定量与定性的角度来看可以分成两大类，一类偏重于定量，以数据、方法和模型为主，链梯法就属于这种类型，在索赔数据充足且具有统计稳定性的条件下，即使理赔过程十分缓慢，也可以应用这类评估方法对未来赔付责任做出比较合理的估计。

另一类评估方法偏重于定性，它更多依赖于精算师的经验和判断。赔付率法是这类方法的一个代表。赔付率法是一种根据历史赔付率，结合精算师的经验确定最终赔付率，从而估计最终赔款的准备金评估方法。在精算实务中，除了科学的定量评估模型，精算师的从业经验同样具有不可替代的重要作用。尽管实际中的赔付率具有不确定性，精算师也不可能完全把握未来的赔付率信息，但是承保人和定价精算师基于历史数据经验确定的预期赔付率对未来赔款的估计仍然具有很大帮助。

当索赔数据不多时（譬如在保单生效的最初几年），仅仅依靠历史赔款数据来估计最终赔款的定量预测方法对统计数据中的任何变化都十分敏感，很容易导致偏高或偏低的估计结果，稳健性较差。但是，如果完全依赖定性方法而不对历史数据中的规律进行把握也容易导致估计结果失真。

1972 年，鲍休特尔（Bornhuetter）和弗格森（Ferguson）将这两类方法进行了融合，提出了一种解决统计数据不充足时估计未决赔款准备金的方法，这种方法以他们名字的首字母命名，称作 B-F 法。

B-F 法的基本原理是将链梯法和赔付率法进行结合。应用 B-F 法估计未决赔款准备金的基本步骤如下：

（1）计算期望最终赔款。在计算期望最终赔款前，首先要估计期望最终赔付率，它可以根据行业平均水平、本公司的赔付率进展趋势等因素进行估计。如果本公司的数据比较有限，应根据其可信度对结果进行调整。用期望最终赔付率的估计值乘以事故年的已赚保费，即可求得期望最终赔款的一个估计值。

（2）对上述期望最终赔款进行修正。根据已付赔款（或已报案赔款）流量三角形，对上述期望最终赔款的估计值进行修正，修正方法如下：

$$\text{修正后的最终赔款}=\text{已付赔款}+\text{期望最终赔款}\times(1-1/f)$$

式中，f 为已付赔款的累积进展因子，即

$$\text{已付赔款}\times f=\text{最终赔款}$$

由此可见，$1/f$ 表示已付赔款在最终赔款中所占的比例，而 $(1-1/f)$ 表示未付赔款在最终赔款中所占的比例。

对上式变形即得

$$
\begin{aligned}
\text{修正后的最终赔款} &= \text{已付赔款} + \text{期望最终赔款} \times \left(1-\frac{1}{f}\right) \\
&= \text{已付赔款} \times f \times \frac{1}{f} + \text{期望最终赔款} \times \left(1-\frac{1}{f}\right) \\
&= \text{链梯法估计的最终赔款} \times \frac{1}{f} + \text{期望最终赔款} \times \left(1-\frac{1}{f}\right)
\end{aligned}
$$

由此可见，修正后的最终赔款是两种最终赔款估计值的加权平均，一种是基于链梯法估计的最终赔款；另一种是基于期望赔付率估计的最终赔款。

如果已知的是已报案赔款流量三角形，则上述的 f 应为已报案赔款的累积进展因子，即根据已报案赔款，并应用链梯法估计上式中的第一个最终赔款。

(3) 从修正后的最终赔款中减去累积已付赔款，即得未决赔款准备金。从前述公式中不难看出，任何一个事故年的未决赔款准备金都可以表示为：

$$
\begin{aligned}
\text{未决赔款准备金} &= \text{期望最终赔款} \times \text{未付赔款比例} \\
&= \text{已赚保费} \times \text{期望赔付率} \times (1-1/f)
\end{aligned}
$$

下面通过一个例子说明 B-F 方法的计算步骤。

【例 11—3】

假设保险公司各个事故年的累积已报案赔款及其进展因子的选定值如表 11—10 和表 11—11 所示。下面用 B-F 法估计未决赔款准备金。

表 11—10　累积已报案赔款　单位：千元

事故年	进展年						
	0	1	2	3	4	5	6
2008	3 937	4 745	4 876	4 901	5 045	5 119	**5 124**
2009	4 192	4 981	5 189	4 275	5 413	**5 375**	
2010	3 594	4 418	4 496	4 491	**4 517**		
2011	3 012	4 405	4 762	**4 903**			
2012	3 795	5 021	**5 403**				
2013	3 178	**3 885**					
2014	**2 445**						

表 11—11　累积已报案赔款进展因子

事故年	进展年							累积进展因子
	0—1	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—最终	
2008	1.205	1.028	1.005	1.029	1.015	1.001	1.010	1.010
2009	1.188	1.042	0.824	1.266	0.993	1.000	1.010	1.010
2010	1.229	1.018	0.999	1.006	1.000	1.000	1.010	1.010
2011	1.462	1.081	1.030	1.020	1.000	1.000	1.010	1.030
2012	1.323	1.076	1.020	1.020	1.000	1.000	1.010	1.051
2013	1.222	1.095	1.020	1.020	1.000	1.000	1.010	1.151
2014	1.350	1.095	1.020	1.020	1.000	1.000	1.010	1.553

表 11—12 给出了应用 B-F 法对未决赔款准备金进行估计的过程。在表 11—12 中，已赚保费和期望赔付率是假设值；累积进展因子来自表 11—11 的最后 1 列；累积已报案赔款来自表 11—10 的对角线；累积已付赔款是假设值。

表 11—12　　B-F 法对未决赔款准备金的估计值

事故年	已赚保费 (1)	期望赔付率 (2)	期望最终赔款 (3)=(1)×(2)	已报案赔款的累积进展因子 (4)	未报案赔款在最终赔款中所占比率 (5)=1−1/(4)
2008	6 106	80%	4 885	1.010	1.0%
2009	6 589	80%	5 271	1.010	1.0%
2010	5 983	80%	4 786	1.010	1.0%
2011	6 134	78%	4 785	1.030	2.9%
2012	6 336	78%	4 942	1.051	4.8%
2013	5 235	78%	4 083	1.151	13.1%
2014	3 876	78%	3 023	1.553	35.6%

事故年	期望未报案赔款 (6)=(5)×(3)	累积已报案赔款 (7)	修正最终赔款 (8)=(6)+(7)	累积已付赔款 (9)	未决赔款准备金 (10)=(8)−(9)
2008	48	5 124	5 172	4 967	205
2009	52	5 375	5 427	5 065	362
2010	47	4 517	4 564	4 321	243
2011	140	4 903	5 043	4 323	720
2012	239	5 403	5 642	4 123	1 519
2013	535	3 885	4 420	2 989	1 431
2014	1 077	2 445	3 522	1 998	1 524
合计					6 005

表 11—12 中已报案赔款的累积进展因子的倒数就是已报案赔款在最终赔款中所占的比例，即

$$已报案赔款\times f=最终赔款$$

上式经变形即得

$$已报案赔款/最终赔款=1/f$$

由此可见，累积进展因子的倒数就是已报案赔款在最终赔款中所占的比例，1 减去累积进展因子的倒数就是未报案赔款在最终赔款中所占的比例。

B-F 法的一个主要优点是不易受到异常损失的影响。譬如，假设 2014 事故年的累积已报案赔款不是 2 445 而是 3 000，那么用已报案赔款链梯法对最终赔款的估计值将是 3 000×1.553=4 659，这个值远远超过了期望最终赔款 3 023。可见，已报案赔款链梯法容易受到异常损失的影响。但是，如果 2014 事故年的已报案赔款变为 3 000，用 B-F 法得到的最终赔款的估计值受异常值的影响则相对较小，这是因为 B-F 法对最终赔款的估计值是链梯法的估计值和期望最终赔款的

一种加权平均数，权数就是累积进展因子的倒数。仍以 2014 事故年为例，B-F 法对最终赔款的估计值为：

$$4\,659\times(1/1.553)+3\,023\times(1-1/1.553)=4\,076$$

式中，4 659 是链梯法的估计值；3 023 是期望最终赔款。从上式可以看出，B-F 法对期望最终赔款的权数随着累积进展因子的增大而增大，而事故年越靠近当前时期，累积进展因子就越大。这就意味着，事故年越靠近当前时期，B-F 法对期望最终赔款赋予的权数越大，而对链梯法的估计值赋予的权数越小。

11.4 理赔费用准备金评估

理赔费用准备金是指对尚未结案的索赔可能发生的理赔费用所提取的准备金。对于保险事故，保险公司除应支付给被保险人按照合同约定的赔偿外，还应支付结案过程中将要发生的理赔费用。所以保险公司在提取赔款准备金的同时，也要提取理赔费用准备金，其中直接发生于具体赔案的专家费、律师费和损失检验费等为直接理赔费用，应提取直接理赔费用准备金；不是直接发生于具体赔案的理赔费用为间接理赔费用，应提取间接理赔费用准备金。

11.4.1 直接理赔费用准备金

评估直接理赔费用准备金的常用方法可以分成两种。一种是将直接理赔费用合入未决赔款准备金中，用未决赔款准备金的评估方法进行估计；另一种是对直接理赔费用准备金进行单独评估，常用的方法是链梯法和比率法。

一般来说，保险公司对每件赔案都会有详细的记录，如保险事故发生时间、发生地点、风险等级、理赔范围、赔付金额和赔付时间等。我们可以从中了解直接理赔费用的信息，当理赔费用模式与赔案赔付模式具有相同的规律时，适用于未决赔款准备金的评估方法同样可用来评估直接理赔费用准备金。具体的做法是将所有的已付理赔费用支出加入到赔款中，这种做法可减少工作量。

但是，当理赔费用延迟模式与赔案赔付延迟模式差别较大时，或者是直接理赔费用很大，比如出现法律费用数额较大的责任险时，就需要对理赔费用进行单独评估。

评估直接理赔费用准备金的链梯法，是以已付直接理赔费用准备金流量三角形为基础的，通过链梯法的基本步骤，对未来直接理赔费用准备金进行估计。链梯法的优点在于简单、直观，适用于早期事故年直接理赔费用准备金的评估；不足之处在于早期费用的剧烈波动会对评估结果的准确性造成较大影响。这种方法也称为已付 ALAE 链梯法，其中 ALAE 表示直接理赔费用。

评估直接理赔费用准备金的另一种方法是比率法，或称已付直接理赔费用与已付赔款比率法。该方法综合考虑直接理赔费用和赔款之间的关系，假设已付直

接理赔费用与相应的已付赔款之间存在一种相对稳定的比率关系，而且该比率关系的发展规律在过去和未来是一致的。由此可以得到直接理赔费用与赔款之间的最终比率关系，将此比率应用于最终赔款的估计值，通过链梯技术，即可求得直接理赔费用准备金的估计值。

下面通过一个例子来说明估计直接理赔费用准备金的比率法。

【例 11—4】

假设某保险公司按事故年统计的累积已付赔款和累积已付直接理赔费用如表 11—13 和表 11—14 所示。

表 11—13 累积已付赔款 单位：千元

事故年	进展年						
	0	1	2	3	4	5	6
2008	1 130	2 003	2 715	3 206	3 563	3 798	3 911
2009	1 103	2 199	2 937	3 592	3 904	4 064	
2010	1 008	1 957	2 566	3 021	3 320		
2011	965	1 868	2 520	3 117			
2012	1 028	2 145	3 142				
2013	850	1 678					
2014	567						

表 11—14 累积已付直接理赔费用 单位：千元

事故年	进展年						
	0	1	2	3	4	5	6
2008	28	56	106	162	211	209	271
2009	24	62	113	179	228	260	
2010	22	55	99	149	189		
2011	20	48	90	145			
2012	19	51	108				
2013	18	42					
2014	11						

用表 11—14 的累积已付直接理赔费用除以表 11—13 中对应的累积已付赔款，例如，28/1 130=0.024 8……即可求得它们之间的比率关系，如表 11—15 所示。

表 11—15 累积已付直接理赔费用与累积已付赔款的比率（%）

事故年	进展年						
	0	1	2	3	4	5	6
2008	2.48	2.80	3.90	5.05	5.92	5.50	6.93
2009	2.18	2.82	3.85	4.98	5.84	6.40	
2010	2.18	2.81	3.86	4.93	5.69		

续前表

事故年	进展年						
	0	1	2	3	4	5	6
2011	2.07	2.57	3.57	4.65			
2012	1.85	2.38	3.44				
2013	2.12	2.50					
2014	1.94						

根据表 11—15 中的比率关系可以计算出该比率的进展因子及其平均值，如表 11—16 所示。

表 11—16　　累积直接理赔费用与累积已付赔款之比的进展因子

事故年	进展年						
	0—1	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7+
2008	1.129 0	1.392 9	1.294 9	1.172 3	0.929 1	1.260 0	
2009	1.293 6	1.365 2	1.293 5	1.172 7	1.095 9		
2010	1.289 0	1.373 7	1.277 2	1.154 2			
2011	1.241 5	1.389 1	1.302 5				
2012	1.286 5	1.445 4					
2013	1.179 2						
平均值	1.236 5	1.393 3	1.292 0	1.166 4	1.012 5	1.260 0	
选定值	1.300	1.400	1.295	1.160	1.025	1.010	1.010

假设精算师根据表 11—16 中的平均值，结合自己的经验判断和行业数据，选择的进展因子如表 11—16 的最后一行所示。

将表 11—16 中的进展因子选定值应用于表 11—13 即可求得如表 11—17 所示的每 100 元已付赔款所导致的已付直接理赔费用，即 1.94×1.300=2.52……

表 11—17　　每 100 元已付赔款的已付直接理赔费用　　单位：元

事故年	进展年							
	0	1	2	3	4	5	6	7+
2008	2.48	2.80	3.90	5.05	5.92	5.50	6.93	7.00
2009	2.18	2.82	3.85	4.98	5.84	6.40	6.46	6.53
2010	2.18	2.81	3.86	4.93	5.69	5.84	5.89	5.95
2011	2.07	2.57	3.57	4.65	5.40	5.53	5.59	5.64
2012	1.85	2.38	3.44	4.45	5.16	5.29	5.35	5.40
2013	2.12	2.50	3.50	4.54	5.26	5.40	5.45	5.50
2014	1.94	2.52	3.53	4.57	5.30	5.44	5.49	5.55

表 11—18 给出了直接理赔费用准备金的估计过程，其中最终赔款是根据表 11—13 中的累积已付赔款估计出来的。

表 11—18 直接理赔费用准备金的估计值

事故年	每百元已付赔款的最终直接理赔费用（元）(1)	最终赔款（千元）(2)	最终直接理赔费用（千元）(3)＝(1)×(2)÷100	已付直接理赔费用（千元）(4)	直接理赔费用准备金（千元）(5)＝(3)－(4)
2008	7.00	4 160	291	271	20
2009	6.53	4 414	288	260	28
2010	5.95	3 537	210	189	21
2011	5.64	4 015	226	145	81
2012	5.40	4 621	250	108	142
2013	5.50	3 311	182	42	140
2014	5.55	2 237	124	11	113
合计					546

11.4.2 间接理赔费用准备金

间接理赔费用与业务流程联系密切，所以在对间接理赔费用准备金进行评估时，精算师必须熟悉保险公司的业务流程。在特定情况下，需要分业务类型来评估间接理赔费用准备金，譬如根据各险种的业务规模加权评估间接理赔费用准备金。

一般而言，保险公司对间接理赔费用的记录不如对直接理赔费用的记录详细，因此需要通过一定的方法将其分配给各个险种。当然，在间接理赔费用的分配过程中，应该考虑导致费用发生的各种因素，如各险种在当年发生的案件数、已决案件数、未决案件数、赔款支付次数等。精算师应该熟悉间接理赔费用在各个险种之间的分配方式及其变化情况。当间接理赔费用分配到各险种以后，就可以进行准备金的评估工作。现举例说明如下。

假设某险种以前几个日历年度的已付间接理赔费用和已付赔款数据如表 11—19 所示。

表 11—19 已付间接理赔费用 单位：千元

日历年度	已付间接理赔费用 (1)	已付赔款 (2)	每百元已付赔款所导致的已付间接理赔费用 (3)＝(1)÷(2)×100
2008	617	4 598	13.42
2009	691	5 029	13.74
2010	774	5 577	13.88
2011	867	6 535	13.27
2012	971	7 294	13.31
2013	1 088	8 203	13.26
2014	1 218	8 570	14.21
合计（或平均）	6 226	45 806	13.59

可以看出，每发生 100 元的已付赔款平均对应 13.59 元的间接理赔费用支

出，即间接理赔费用占已付赔款的经验比率为0.135 9。需要注意的是，每个日历年度的已付赔款和间接理赔费用是由当年新赔案和往年未决赔案共同引发的。

不难理解，间接理赔费用在赔案的整个理赔期间都会发生。但是，在间接理赔费用准备金的评估过程中，一种常用的简单假设是，间接理赔费用在立案时发生50%，其余50%在剩余的理赔过程中发生。按照上述假设，就可以根据下面的公式估计间接理赔费用准备金：

$$\begin{matrix}\text{间接理赔}\\\text{费用准备金}\end{matrix}=\left(\begin{matrix}\text{逐案估计}\\\text{准备金}\end{matrix}\times 50\%+\begin{matrix}\text{IBNR}\\\text{准备金}\end{matrix}\right)\times\begin{matrix}\text{间接理赔费用占}\\\text{已付赔款的百分比}\end{matrix}$$

在上式中，之所以对逐案估计准备金乘以50%，是因为假设在立案时已经发生了50%的间接理赔费用，还剩余50%的间接理赔费用会在未来发生。这里的逐案估计准备金也称作已发生已报案未决赔款准备金。

在实际评估间接理赔费用准备金时，应该对上述假设的合理性在理赔部门进行验证。如果验证的结果表明，40%的间接理赔费用在立案时发生，而其余60%在后面的理赔过程中发生，则可以根据下面的公式估计间接理赔费用准备金：

$$\begin{matrix}\text{间接理赔}\\\text{费用准备金}\end{matrix}=\left(\begin{matrix}\text{逐案估计}\\\text{准备金}\end{matrix}\times 60\%+\begin{matrix}\text{IBNR}\\\text{准备金}\end{matrix}\right)\times\begin{matrix}\text{间接理赔费用占}\\\text{已付赔款的百分比}\end{matrix}$$

上述方法假设赔案发生的时间不影响间接理赔费用与已付赔款之间的比例关系，同时假设间接理赔费用与赔款支付的时间和速度基本相同。如果保险公司的大多数业务已经稳定经营了多年以上，且通货膨胀率较低，则该方法的适用性还是比较强的。

为了提高上述评估方法的准确性，可以考虑将上面公式中的"IBNR准备金"改为"纯IBNR准备金"。纯IBNR准备金是指已经发生但尚未报告赔案的准备金，不包括诸如重立案件或对逐案估计准备金的调整等。对于纯IBNR准备金，因为未曾立案，没有进行任何理赔工作，所以在提取准备金时无须乘以任何系数（如同前述公式中对IBNR准备金的处理）；而对于其他的IBNR准备金，因为事实上已经进行了一部分理赔工作，所以应该与逐案估计准备金作同样的处理，即通过一个系数进行调整。此时，间接理赔费用准备金的评估公式为：

$$\begin{matrix}\text{间接理赔}\\\text{费用准备金}\end{matrix}=\left[\left(\begin{matrix}\text{逐案估计}\\\text{准备金}\end{matrix}+\begin{matrix}\text{其他 IBNR}\\\text{准备金}\end{matrix}\right)\times 50\%+\begin{matrix}\text{纯 IBNR}\\\text{准备金}\end{matrix}\right]\times\begin{matrix}\text{间接理赔费用占}\\\text{已付赔款的百分比}\end{matrix}$$

上式假设立案时发生了50%的间接理赔费用。

□ 习 题

11.1 某公司2014年四个季度财产保险的保费收入依次为300万元、200万

元、240 万元、180 万元，假定保险期限均为 1 年，保费收入在各个季度均匀分布，请分别按照下列方法计提 2014 年末的未到期责任准备金。

(1) 季比例法 (1/8 法)；

(2) 年比例法 (1/2 法)。

11.2 设某险种各事故年的增量已付赔款如下表所示。请应用链梯法估计各个事故年的未决赔款准备金。进展因子使用加权平均方法计算。

事故年	进展年				
	1	2	3	4	5+
2010	52	28	9	7	6
2011	62	36	11	8	
2012	72	41	13		
2013	86	42			
2014	97				

11.3 某险种在各个事故年的增量索赔次数如下表所示。请应用链梯法估计各个事故年的最终索赔次数。进展因子使用加权平均方法计算。

事故年	进展年				
	1	2	3	4	5+
2010	101	102	98	53	32
2011	113	122	87	65	
2012	112	135	89		
2013	119	140			
2014	112				

11.4 2010 年发生的保险事故在第 2 个进展年末的未决赔款是 1 500 万元，而在第 2 个进展年末已支付的赔款是最终赔款的 20%，在第 3 个进展年末已支付的赔款是最终赔款的 50%，在第 4 个进展年末已支付的赔款是最终赔款的 70%。请计算 2010 年发生的保险事故在第 4 个进展年的赔款支出。

11.5 下表是某业务 2010—2013 年已付赔款的部分信息，各年的预期赔付率均为 80%，请用链梯法和 B-F 法分别估计 2013 年末的未决赔款准备金。进展因子使用加权平均方法计算。

发生年	已赚保费	2010 年	2011 年	2012 年	2013 年
2010	25 000	10 000	5 000	2 000	0
2011	30 000		12 000	6 000	2 400
2012	33 000			14 000	7 000
2013	38 000				17 000

11.6 已知某业务的累积已付赔款和累积已付直接理赔费用如下面两表所示。假设在进展期 48 月之后，赔款和直接理赔费用都不再有进展。试估计 2014

年12月31日的直接理赔费用准备金。

累积已付赔款 单位：千元

事故年	进展年				
	1	2	3	4	最终赔款
2011	8 000	8 900	9 060	9 060	9 060
2012	9 200	9 900	9 980		9 980
2013	8 300	9 400			9 520
2014	9 500				10 680

累积已付直接理赔费用 单位：千元

事故年	进展年				
	1	2	3	4	最终值
2011	500	760	853	861	
2012	550	650	710		
2013	555	770			
2014	630				

第12章 再保险

Chapter 12

12.1 再保险概述

再保险是保险人在原保险合同的基础上，通过签订分保合同，将其所承担的部分风险和责任向其他保险人进行转移的行为。通俗地讲，也就是对保险人的保险。

在再保险交易中，分出业务的保险公司称为原保险人，而接受再保险业务的公司称为再保险人。如果再保险人又将接受的业务分保给另一家保险公司，这种做法称为转分保。

按照责任限制方式，再保险可以分为比例再保险和非比例再保险。

比例再保险以保险金额为基础确定每一风险的自留额和分保额，原保险人的自留额和分入公司的分保额均是按照保险金额的一定比例确定的。比例再保险又可细分为成数再保险和溢额再保险。成数再保险按照保险金额的一定比例计算自留额和分保额；溢额再保险则先将保险金额的一定金额作为自留额，余下的部分作为分保额。

在成数再保险中，原保险人将每一风险的保险金额均按约定比例向再保险人投保。在成数再保险中，不论原保险人承保的每一风险的保额大小，只要是在合同规定的范围之内，都按双方约定的比例来分担责任，每一风险的保费和赔款也按双方约定的比例进行分摊。

在溢额再保险中，原保险人按照自身财力确定自留额，以自留额的一定线数（即倍数）作为分保额，并分别按照自留额和分保额占保险金额的比例来分配保费，分摊赔款。溢额再保险也以保险金额为基础确定分保关系，但它与成数再保险不同的是，原保险人并非必须分出他所接受的每一风险，只有当保险

金额超出他的自留额时，才将溢额分给再保险人。也就是说，溢额再保险的自留额是确定的，不随保险金额的大小而变动，而成数再保险的自留额表现为保险金额的固定百分比，随保险金额的大小而变动。譬如某保险人的自留额为40万元，现有三笔保险业务，保险金额分别为40万元、50万元和100万元。由于第一笔业务的保险金额在自留额之内，因此无须分保；第二笔业务自留40万元，分出10万元；第三笔业务自留40万元，分出60万元。溢额（分保额）与保险金额的比例即为分保比例。如第二笔业务的分保比例为20%，第三笔业务的分保比例为60%。

非比例再保险以赔款金额确定原保险人的自负额和再保险人分赔额。非比例再保险主要有超额赔款再保险和赔付率超赔再保险，其中超额赔款再保险包括险位超赔再保险和事故超赔再保险。

险位超赔再保险以每一风险实际发生的赔款来计算原保险人和再保险人分别应该承担的赔款。在险位超赔再保险中，如果损失金额不超过原保险人应该承担的自负额，全部损失由原保险人赔付；如果总赔款金额超过了自负额，则超过部分由再保险人赔付。譬如，原保险人的自负额为500万元，如果实际损失为900万元，则原保险人承担500万元的赔款，再保险人承担400万元的赔款；如果实际损失为350万元，则全部由原保险人承担。险位超赔再保险可以显著削减原保险人承担赔款的变异性。

事故超赔再保险以一次巨灾事故所造成的许多保单发生的赔款总和来计算原保险人和再保险人分别应该承担的赔款。在事故超赔再保险中，一次事故的划分至关重要。譬如，可以规定台风、飓风、暴风连续48小时为一次事故，地震、洪水连续72小时为一次事故，其他巨灾连续168小时为一次事故。从精算的角度看，事故超赔再保险与险位超赔再保险没有本质区别。一次巨灾事故会导致大量保单同时索赔，因此事故超赔再保险要求再保险人具有应对高额赔款的能力。以每次事故为基础计算的赔款往往具有极度右偏的分布函数，因此，在事故超赔再保险中，原保险人支出的每一单位的再保险费对其自负赔款变异性的削减比险位超赔再保险来得显著。

赔付率超赔再保险是以赔付率确定原保险人和再保险人各自承担赔款的一种非比例再保险，也称作止损再保险。所谓赔付率，是指保险公司已付赔款与已赚保费之比。在某一特定时期（通常为一年），当原保险人的赔付率超过事先约定的标准时，所有超过部分的赔款由再保险人负责。在赔付率超赔再保险中，再保险人的责任通常有一个以赔付率表示的最高限额，同时还有一个以金额表示的最高限额。譬如，再保险人负责赔付率超过80%～120%的赔款，但最高不得超过500万元，两者以先达到者为准。因此，赔付率在120%以上的部分，以及赔付率虽在80%～120%之间，但金额超过500万元以上的部分，仍归原保险人负责。赔付率超赔再保险可以将原保险人在某一年度的赔付率控制在一定范围之内。

12.2　再保险定价

与原保险相比，再保险的定价面临更大的不确定性，这主要是因为再保险保单大多是个性化保单，而非标准化保单；其次，再保险公司的损失数据来自于原保险人，因此有可能存在扭曲，不能反映损失的实际情况；再次，再保险公司承保的风险大多是低频高额损失，即损失发生的可能性较小，而损失一旦发生，损失金额都会比较高；最后，再保险的 IBNR 和个案准备金的进展时间很长，需要经过很多年以后才能得到最终的损失数据。

与原保险一样，再保险的保费也由纯保费和附加保费构成，只不过在再保险的保费构成中，附加保费所占比重更高。下面首先介绍再保险期望赔款的计算方法，然后再讨论如何在此基础上计算再保险的总保费。

12.2.1　再保险期望赔款

如前所述，再保险的类型较多，本节仅以非比例再保险中的事故超赔再保险为例，说明再保险期望赔款的计算方法。在已知损失分布的情况下，再保险期望赔款的计算比较容易，只需应用风险模型中的有关结论即可。

假设在某个事故超赔再保险合同中，损失金额 X 的分布函数为 $F(x)$，密度函数为 $f(x)$，原保险人的自负额为 r。假设 X_N 是原保险人承担的赔款，X_R 是再保险人承担的赔款，则原保险人承担的期望赔款为：

$$E(X_N)=\int_0^r xf(x)\mathrm{d}x+r[1-F(r)] \tag{12.1}$$

再保险人对每次事故承担的期望赔款（包含零赔款在内）为：

$$E(X_R)=\int_r^{\infty}(x-r)f(x)\mathrm{d}x=\int_r^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x-r[1-F(r)] \tag{12.2}$$

【例 12—1】

假设某项保险业务的索赔频率为 0.05。每次的赔款金额服从均值为 1 000 万元，标准差为 1 500 万元的帕累托分布 Pareto(α, θ)，请计算再保险公司的期望赔款。

【解】 帕累托分布的密度函数和分布函数分别为：

$$f(x)=\frac{\alpha\theta^{\alpha}}{(\theta+x)^{\alpha+1}}$$

$$F(x)=1-\left(\frac{\theta}{\theta+x}\right)^{\alpha},\quad x,\alpha,\theta>0$$

帕累托分布的均值和方差分别为：

$$E(X)=\frac{\theta}{\alpha-1}=1\ 000$$

$$\mathrm{Var}(X)=\frac{\alpha\theta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}=1\ 500^2$$

由上述两个方程可以解得 $\alpha=3.6$，$\theta=2\ 600$。

如果事故超赔再保险合同规定，再保险公司承担损失超过 2 000 万元的赔付责任，则再保险人对每次事故承担的期望赔款为：

$$\begin{aligned}E(X_R)&=\int_r^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x-r[1-F(r)]\\&=\int_{2\,000}^{\infty}x\frac{3.6\times 2\ 600^{3.6}}{(2\ 600+x)^{3.6+1}}\mathrm{d}x-2\ 000\times\left(\frac{2\ 600}{2\ 600+2\ 000}\right)^{3.6}\\&=226.86(\text{万元})\end{aligned}$$

由于索赔频率为 0.05，所以再保险公司的期望赔款为 $226.86\times 0.05=11.34$（万元）。

12.2.2 再保险费

在求得再保险期望赔款的基础上，可以应用下面的公式计算再保险的总保费：

$$\text{再保费}=\frac{\text{再保险期望赔款的现值}}{(1-\text{分保佣金率}-\text{经纪人佣金率})\times(1-\text{内部费用率})\times(1-\text{利润附加比率})}$$

上式包含许多概念，下面逐一进行说明。

再保险期望赔款的现值是再保险人在未来赔款的期望现值，对于短尾业务，可以不必计算现值。

分保佣金是再保险公司支付给原保险人的费用，属于外部费用，根据再保费的一定比例计算。分保佣金并不是必需的，譬如在事故超赔再保险合同中，就没有分保佣金。

经纪人佣金也属于再保险的外部费用，根据再保费的一定比例计算，支付给再保险的中介机构。

由于分保佣金和经纪人佣金根据再保费计算，故

$$\text{再保险人的实际现金保费收入}=\text{再保费}\times(1-\text{分保佣金率}-\text{经纪人佣金率})$$

内部费用根据再保险公司实际收到的现金保费的一定比例计算，随着再保险业务而变化。其计算公式为：

$$\text{内部费用}=\text{再保费}\times(1-\text{分保佣金率}-\text{经纪人佣金率})\times\text{内部费用率}$$

利润附加比率表示为纯再保费的一定比例，其大小取决于再保险公司的资本收益率和再保险业务的相对风险。

纯再保费是再保险人用于支付赔款、获取利润的保费。注意，这里关于纯再

保费的定义与原保险的纯保费略有不同，其中包含利润附加。纯再保费可以通过下面两个公式进行计算：

(1) 纯再保费＝再保费×(1－分保佣金率－经纪人佣金率)×(1－内部费用率)

(2) 纯再保费＝再保险期望赔款的现值/(1－利润附加比率)

不难证明，上述两个公式是等价的。

【例 12—2】

假设再保险人的期望赔款为 100 000 元，再保险利润附加比率为 20%，再保险公司的内部费用率为 10%，分保佣金率为 25%，经纪人佣金率为 5%，请计算再保费。

【解】应用前述再保费的计算公式：

$$\begin{aligned}\text{再保费}&=\frac{\text{再保险期望赔款}}{(1-\text{分保佣金率}-\text{经纪人佣金率})\times(1-\text{内部费用率})\times(1-\text{利润附加比率})}\\&=\frac{100\,000}{(1-25\%-5\%)\times(1-10\%)\times(1-20\%)}\\&=198\,413(\text{元})\end{aligned}$$

在实际应用中，再保费通常表现为原保费的一定比例。譬如，如果假设本例的原保费为 5 000 000 元，则再保费可以近似表示为原保费的 4%。此时，实际的再保费将成为 200 000 元，略大于前面的计算结果 198 413 元。如果实际收取的再保费为 200 000 元，则再保费扣除外部费用后的余额（即实际现金保费收入）为 200 000×(1－25%－5%)＝140 000（元），再保险人的利润附加将为：

$$\begin{aligned}\text{再保险利润附加}&=\text{实际现金保费收入}-\text{内部费用}-\text{再保险期望赔款}\\&=140\,000-13\,889-100\,000\\&=26\,111(\text{元})\end{aligned}$$

12.3 再保险准备金评估

一般而言，再保险公司提存的准备金种类与非寿险公司一致，即包括未决赔款准备金和未到期保费准备金。未决赔款准备金主要包括下述五个方面的内容：(1) 原保险人已报案的未决赔款准备金；(2) 对某些个案提存的额外准备金；(3) 上述两种准备金的未来进展；(4) 纯 IBNR 准备金；(5) 不利偏差准备金。在精算实务中，由于受数据的限制，许多再保险公司会把 (3) 和 (4) 合并处理，形成所谓的广义 IBNR 准备金。本节主要介绍再保险 IBNR 准备金的评估方法。

12.3.1 再保险准备金评估的特点

再保险 IBNR 准备金的评估过程比一般准备金评估更复杂，这是由再保险业

务的下述特点决定的：

（1）报案延迟时间较长。报案延迟是指从事故发生之日起到向再保险公司报告之日止的时间间隔。与原保险相比，再保险的报案延迟更加显著。譬如，对于一起车祸引起的人身伤亡事故，如果当事人受伤十分严重，可能需要经过很长一段时间后才向保险公司提出索赔，而当保险公司接到索赔请求后，如果在责任认定过程中出现分歧，可能还会导致较长时期的法律诉讼。只有在原保险公司最终认定了损失之后，才可以确定损失是否达到了再保险合同的起赔点。

（2）缺乏充足的数据。再保险准备金评估的另一个困难是缺乏充足的数据。这是由再保险业务本身的特点所决定的。譬如：1）大多数比例再保险合同只要求原保险人提供总的赔款信息，且数据是按日历年度或保单年度统计的，而没有按照事故年度统计的数据。2）再保险人无法获得所有的损失信息，原保险人一般只报告超过起赔点的赔案信息。3）再保险人承保的风险千差万别，很难获得大量同质的数据。这也使得再保险人很难使用行业统计数据。4）再保险人与原保险人在 IT 系统上的兼容问题，也会使再保险公司难以获得所需要的数据。

（3）受赔付膨胀的影响十分显著。对于财产保险，可能因物价上涨、工资上涨而引起赔付膨胀。对于人身伤害索赔，可能由于法律环境的变化、公众态度的变化以及医疗技术的进步等导致赔付膨胀。由于杠杆效应的存在，赔付膨胀对超额赔款再保险的影响更加明显。

（4）具有更大的不确定性。原保险人分出的风险主要是高风险的业务，因此相对于原保险人而言，再保险人承保的业务具有更大的波动性。不同类型的再保险合同所带来的波动性也是不同的，譬如，对于事故超赔再保险合同，尽管其发生索赔的可能性很小，但一旦发生，就是一次巨灾索赔，从而有可能导致再保险公司的业绩出现大幅波动。

12.3.2 再保险准备金评估方法

再保险准备金评估方法的选择要考虑再保险业务的具体特点。一般而言，再保险业务根据其尾部特征可以划分为短尾业务、中尾业务和长尾业务。

短尾业务是指事故发生以后可以很快理赔结案的业务，如大多数的财产再保险业务就属于短尾业务。对于短尾业务，可以根据已赚保费的某个百分比或应用赔付率方法估计准备金，没有必要采用复杂的评估方法。当然，对于短尾业务中的一些特殊情况，如最近发生的巨灾，应该给予特别关注，因为巨灾损失很难在短期内理赔完毕。

中尾业务是指那些平均索赔延迟在 2 年以内，且全部索赔可以在 5 年内处理完毕的再保险业务。典型的中尾业务有赔偿限额很高的财产再保险、建筑安装工程再保险、忠诚保证再保险、海洋运输再保险等。对于中尾业务，可以采用链梯法评估准备金。

长尾业务的索赔延迟平均在两年以上，而且需要很长时间才能全部理赔结案。长尾再保险业务主要是一些责任保险业务，如石棉、污染等风险的再保险。

这些类型的风险事故一旦发生，很有可能涉及法律诉讼等程序，因此往往需要很多年才能处理完毕。对于长尾业务的准备金评估，由于最近年份的索赔数据有限，所以链梯法往往不适用。这里介绍一种比较适合长尾业务的准备金评估方法，即Standard-Bühlmann方法（简称S-B方法），也称作Cape-Cod方法。

在S-B方法中，保险公司在第k个事故年的IBNR准备金表示为：

$$\begin{pmatrix}\text{第}k\text{年的}\\\text{IBNR}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{期望}\\\text{赔付率}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\text{第}k\text{年经调整的}\\\text{风险纯保费}\end{pmatrix}\times\left[1-\begin{pmatrix}\text{第}k\text{年累积}\\\text{已报案赔款比例}\end{pmatrix}\right]$$

式中，累积已报案赔款比例是链梯法中累积进展因子的倒数。因为已报案赔款×累积进展因子=最终赔款，故累积进展因子的倒数就是已报案赔款在最终赔款中所占的比例。风险纯保费是从再保险费中扣除分保佣金、经纪人佣金和再保险人的内部费用后的余额。在上式中，之所以对各个事故年的风险纯保费进行调整，是为了消除不同年度在费率方面的差异，使得各个事故年具有相同的期望赔付率。这种调整类似于计算等水平已赚保费（on-level earned premium）。当然，进行这种调整比较困难，而且结果不稳定，但这种调整又是必不可少的。

在上式中，由于对各个事故年的风险纯保费进行了调整，所以各个事故年的期望赔付率是相等的，但又是未知的，需要进行估计。

为便于表述，定义下述符号：用r表示期望赔付率，用P表示经调整的已赚风险纯保费，用F表示已报案赔款比例，用C表示累积已报案赔款。于是，期望赔付率可以表示为：

$$r=\frac{\sum(C_k+\text{IBNR}_k)}{\sum P_k} \tag{12.3}$$

式中，求和号$\sum$表示对所有事故年求和。

第k个事故年的IBNR可以表示为：

$$\text{IBNR}_k=r\cdot P_k\cdot(1-F_k) \tag{12.4}$$

把此式代入前一式即得

$$r=\frac{\sum[C_k+r\cdot P_k\cdot(1-F_k)]}{\sum P_k} \tag{12.5}$$

对上式进行变形，即可从中求得期望赔付率r的表达式为：

$$r=\frac{\sum C_k}{\sum P_kF_k}=\frac{\sum\text{第}k\text{年累积已报案赔款}}{\sum\text{第}k\text{年累积已报案赔款所对应的保费}} \tag{12.6}$$

【例12—3】

假设某业务的有关数据如表12—1所示，且在第6年末，累积已报案赔款比例可以达到100%。请用S-B方法估计该业务的IBNR准备金。

【解】首先计算期望赔付率：

$$r=\frac{\sum C_k}{\sum P_k F_k}=\frac{\sum \text{第}\,k\,\text{年累积已报案赔款}}{\sum \text{第}\,k\,\text{年累积已报案赔款所对应的保费}}$$

$$=\frac{12\,100}{13\,900}=87\%$$

然后应用 S-B 方法，即可求得各个事故年的 IBNR 估计值，如表 12—1 的第（7）栏所示。

表 12—1　S-B 方法的准备金评估以及与链梯法的比较

事故年 (1)	已赚风险纯保费 (2)	经调整的已赚风险纯保费 (3)	累积已报案赔款 (4)	累积已报案赔款比例 (5)	已报案赔款对应的保费 (6)=(3)×(5)
2 000	2 000	2 500	1 500	100%	2 500
2 001	2 500	2 500	1 600	95%	2 375
2 002	3 000	2 500	1 700	85%	2 125
2 003	3 500	3 000	2 000	75%	2 250
2 004	4 000	4 000	2 500	60%	2 400
2 005	4 500	4 500	2 800	50%	2 250
合计	19 500	19 000	12 100		13 900

事故年	S-B 方法的 IBNR (7)=r×(3)×[1−(5)]	S-B 方法的赔付率 (8)=[(4)+(7)]/(3)	链梯法的 IBNR (9)=(4)/(5)−(4)	链梯法的赔付率 (10)=[(4)+(9)]/(3)
2000	0	60%	0	60%
2001	109	68%	84	67%
2002	326	81%	300	80%
2003	653	88%	667	89%
2004	1 393	97%	1 667	104%
2005	1 959	106%	2 800	124%
合计	4 440	87%	5 518	93%

表 12—1 也应用链梯法对各个事故年的 IBNR 准备金进行了估计，并对 S-B 方法和链梯法估计的最终赔付率进行了比较。可以看出，链梯法对最近两个事故年的赔付率估计偏高，而 S-B 方法的估计结果更加合理。事实上，对于尾部越长的保险业务，S-B 方法的估计结果会越合理。

在某些情况下，如果对 S-B 方法中的费率调整没有十足的把握，就可以应用加权平均的方法把链梯法和 S-B 方法的估计结果综合起来使用，计算所谓的信度 IBNR。由于越是早期的事故年，累积已报案赔款的比例就越高，链梯法估计的结果就越准确，因此，在确定权重时，对于早期的事故年，应该给链梯法的评估结果赋予相对较大的权重，而对于近期的事故年，应该给 S-B 方法的评估结果赋予相对较大的权重。譬如，在上例中，赋予链梯法的权重可以确定为 Z=累积已

报案赔款的比例乘以一个系数（如 0.5）。此时，信度 IBNR 估计值可以表示为：

$$信度\ IBNR=Z\times 链梯法的\ IBNR+(1-Z)\times S\text{-}B\ 方法的\ IBNR$$

譬如，对于 2001 年，累积已报案赔款比例为 95%，而链梯法的 IBNR 估计值为 84，S-B 方法的 IBNR 估计值为 109，故信度 IBNR 估计值为：

$$信度\ IBNR=0.5\times 0.95\times 84+(1-0.5\times 0.95)\times 109=97$$

其他各个事故年的信度 IBNR 估计值如表 12—2 所示。

表 12—2　　信度 IBNR 的估计

事故年	累积已报案赔款比例	S-B 方法的 IBNR	链梯法的 IBNR	信度 IBNR
2000	100%	0	0	0
2001	95%	109	84	97
2002	85%	326	300	315
2003	75%	653	667	658
2004	60%	1 393	1 667	1 475
2005	50%	1 959	2 800	2 169
合计		4 440	5 518	4 714

□ 习　题

12.1　一家保险公司某险种的损失额 X 服从均值为 200 的指数分布。当损失额为 $0\leqslant x\leqslant 2\,000$ 时，免赔额为 400；当损失额为 $2\,000\leqslant x<6\,000$ 时，免赔额是 1 000；当损失额为 $6\,000\leqslant x$ 时，免赔额是 2 000。求保险公司在该险种上的期望赔款。

12.2　根据再保险合同的规定，原保险人承担 2 000 元以内的赔款，再保险人承担超过 2 000 元的赔款，无最高限额。假设损失随机变量 X 服从均值为 5、标准差为 3 的对数正态分布。请计算：

（1）原保险人支付赔款的均值；

（2）再保险人支付赔款的均值；

（3）再保险人支付的非零赔款的均值。

12.3　保险人与再保险人签订超赔分保合同，再保险人承担超过 1 000 元的赔款，最高限额为 1 000 元。假设损失随机变量 X 服从 0～3 000 元之间的均匀分布，请计算再保险人的期望赔款。

12.4　已知原保险人与再保险人签订了以下再保险合同，合同的最高承保能力为 50 万元：

（1）若赔款 x 小于等于 5 万元，由原保险人承担。

（2）若赔款 x 在 5 万～10 万元，超过 5 万元的赔款由再保险人承担。

(3) 若赔款 x 在 10 万～35 万元，赔款由双方各承担一半。

(4) 若赔款 $x>35$ 万元，再保险人承担 20 万元。

请回答下述问题：

(1) 原保险人的赔款金额函数 $f(x)$；

(2) 再保险人的赔款金额函数 $g(x)$；

(3) 如果损失 x 服从 (0, 50) 上的均匀分布，请计算再保险人的期望赔款金额。

12.5 假设某业务的有关数据如下表所示，且在第 6 年末，累积已报案赔款比例可以达到 100%。请应用 S-B 方法和链梯法分别估计该业务的 IBNR 准备金。

事故年 (1)	已赚风险纯保费 (2)	经调整的已赚风险纯保费 (3)	累积已报案赔款 (4)	累积已报案赔款比例 (5)
2001	400	500	300	100%
2002	500	500	320	95%
2003	600	500	340	85%
2004	700	600	400	75%
2005	800	800	500	60%
2006	900	900	560	50%

12.6 假设再保险人的期望赔款为 500 万元，再保险利润附加比率为 20%，再保险公司的内部费用率为 10%，分保佣金率为 25%，经纪人佣金率为 5%，请计算再保费。

参考答案

第 1 章

1.1　$e^{0.038}=1.0387$

1.2　记 i 为实际年利率，那么 $(1+i)=(1+j/2)^2$，价值方程为：

$$5.89=v^2+v^4+\cdots=\frac{v^2}{1-v^2}$$

从而 $(1+j/2)^4=1+1/5.89$，$j=8\%$。

1.3　记 $u=(1+k)/1.04$，则有

$$51=\frac{1+k}{1.04}+\left(\frac{1+k}{1.04}\right)^2+\cdots=u+u^2+\cdots=\frac{u}{1-u}=\frac{1+k}{0.04-k}$$

解得 $k=2\%$。

1.4　价值方程为：

$$1\,000=x(v+v^2+v^3)+3x(v^4+v^5+v^6)=x(3a_{\overline{6}|}-2a_{\overline{3}|})=11.504\,46x$$

式中，年金符号中利率为 1%。求解得到 $x=86.92$。

1.5　由 (1) 和 (2) 可得 $12\times(120)a_{\overline{2n}|}^{(12)}=12\times(365.47)a_{\overline{n}|}^{(12)}$，解得 $v^n=0.671\,66$。再应用 (3) 和 (4) 解得 $X=12\,000$。

第 2 章

2.1　利用式 (2.16)，先计算 $\ln {}_tp_x$ 关于 t 的导数

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left(\frac{100-x-t}{100-x}\right)=\frac{1}{100-x-t}$$

再令 $t=45-x$，得到 $\mu_{45}=1/55$。

2.2　利用式 (2.11)

$$E[T(x)]=\int_0^{\infty}{}_tp_x\mathrm{d}t=\int_0^{100}[1-(t/100)^{1.5}]\mathrm{d}t=\left[t-\frac{1}{1\,000}\left(\frac{t^{2.5}}{2.5}\right)\right]\Bigg|_0^{100}=60$$

2.3　利用式 (2.16)

$$\int_0^{20}\mu_{x+t}\mathrm{d}t=[-\ln(85-t)-3\ln(105-t)]\Big|_0^{20}=-\ln\left[\frac{65}{85}\times\left(\frac{85}{105}\right)^3\right]$$

$${}_{20}p_x=\frac{65}{85}\times\left(\frac{85}{105}\right)^3=0.405\,7$$

2.4 利用式（2.16）。$e^{-\mu}=p_x=1-0.16=0.84$，${}_tp_x=e^{-t\mu}=(0.84)^t=0.95$。

$t=\ln(0.95)/\ln(0.84)=0.294$

2.5 在 De Moivre 律下，$T(16)$ 服从（0，$\omega-16$）上的均匀分布，从而 $E[T(16)]=(\omega-16)/2$，$\mathrm{Var}[T(16)]=(\omega-16)^2/12$。由 $\omega-16=36\times2=72$，可得 $\mathrm{Var}[T(16)]=432$。

2.6 首先验证 $e_x=p_x(1+e_{x+1})$，从而 $p_x=e_x/(1+e_{x+1})$。${}_2p_{75}=p_{75}p_{76}=0.909$。

2.7 按定义

$$\begin{aligned}100({}_{1|}q_{[30]+1})&=100(p_{[30]+1})(q_{[30]+2})=(1-q_{[30]+1})(100q_{32})\\&=(1-0.005\,74)\times0.699=0.695\end{aligned}$$

2.8 $E[T^2]=2\int_0^\omega x_xp_0\,\mathrm{d}x=3\omega^2/5$

$$\mathrm{Var}(T)=(3\omega^2/5)-(3\omega/4)^2=3\omega^2/80$$

2.9 $\dfrac{l_{40}-l_{57}}{l_{21}}=\dfrac{81^{1/2}-64^{1/2}}{100^{1/2}}=0.10$

2.10 第 1 个等式是显然成立的，第 2 个等式用到分部积分，过程略。

第 3 章

3.1 $5\,000\bar{A}_{30}=5\,000E[Z]=5\,000\int_0^{70}v^t\dfrac{1}{70}\mathrm{d}t=(5\,000/70)(1-e^{-7})/(0.10)$

$$=713.6$$

3.2 利用 $(IA)_x=A^1_{x:\overline{1}|}+vp_x(A_{x+1}+(IA)_{x+1})$ 可证。

3.3 设 Z_3 为生存保险的现值变量，那么 $Z_1=Z_2+Z_3$。

$$\mathrm{Var}(Z_1)=\mathrm{Var}(Z_2)+2\mathrm{Cov}(Z_2,Z_3)+\mathrm{Var}(Z_3)$$

因为 $Z_2Z_3=0$，所以 $\mathrm{Cov}(Z_2,Z_3)=-E[Z_2]E[Z_3]$。

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Z_1)&=0.01+2(-E[Z_2]E[Z_3])+\mathrm{Var}(Z_3)\\&=0.01-2\times0.04\times0.24+(0.3)^2\times0.8\times(1-0.8)=0.005\,2\end{aligned}$$

3.4 根据 $A_x=A^1_{x:\overline{n}|}+v^n\,{}_np_xA_{x+n}$ 和 $A_{x:\overline{n}|}=A^1_{x:\overline{n}|}+v^n\,{}_np_x$，就得 $A_x=y+v^n\,{}_np_xz$，$u=y+v^n\,{}_np_x$，最后得到 $A_x=y+(u-y)z=(1-z)y+uz$。

3.5 $E[v^T]=\int_0^\infty e^{-\delta t}e^{-\mu t}\mu\,\mathrm{d}t=A_x=\dfrac{\mu}{\mu+\delta}$

$$E[v^{2T}]={}^2A_x=\frac{\mu}{\mu+2\delta}$$

$$\mathrm{Var}[v^T]={}^2A_x-A_x^2=\cdots=\frac{\mu\delta^2}{(\mu+2\delta)(\mu+\delta)^2}$$

3.6 趸缴净保费为：

$$5\,000\left[\int_0^{10} v^t g(t)\mathrm{d}t + v^{10}\,{}_{10}p_{50}\right] = 5\,000\left[0.02\int_0^{10} v^t\mathrm{d}t + 0.8\mathrm{e}^{-0.1\times 10}\right] = 2\,104$$

3.7　因为 $i=0$，所以 $Z=0$ 或 $Z=1$。

$Pr(Z=1)=Pr(K\leqslant 1)={}_2q_x=q_x+p_xq_{x+1}=0.5+0.5q_{x+1}$

$Pr(Z=0)=Pr(K>1)=0.5-0.5q_{x+1}$

$\mathrm{Var}(Z)=(0.5+0.5q_{x+1})(0.5-0.5q_{x+1})=0.177\,1$

$q_{x+1}=0.54$

3.8　现值变量 Z 的取值、对应的概率及 $E(Z)$ 的计算见下表。

t	$c(t)$	q_{x+t}	Z	$f(t)$	$Z\times f(t)$
0	3	0.2	2.700	0.2	0.540 0
1	2	0.25	1.620	0.2	0.324 0
2	1	0.5	0.729	0.3	0.218 7
$\geqslant 3$	0			0.3	

$\Pi=1.082\,7$，$Pr(Z>\Pi)=0.2+0.2=0.4$。

3.9　$0.95=Pr[1\,000(Z_1+Z_2+\cdots+Z_{100})\leqslant 100w]$

随机变量 $Y=(1/100)\sum_{k=1}^{100}Z_k$ 近似服从正态分布，Y 的均值为 $E[Z]=0.06$，方差为 $(1/100)\mathrm{Var}(Z)=(1/100)\times[0.01-0.06^2]$，$0.95=Pr(Y\leqslant w/1\,000)$，$w=1\,000\times(0.06+1.645\times 0.008)=73.16$。

3.10　$\Pi=\Pi A^1_{x:\overline{20}|}+10\,000v^{20}\,{}_{20}p_x$。

第 4 章

4.1　$\alpha(2)=1.000\,15$，$\beta(2)=0.256\,17$，由式（4.29）得，$\ddot{a}^{(2)}_{40:\overline{30}|}=14.928\,6$。

4.2　由递推式$(I\bar{a})_x=\bar{a}_{x:\overline{1}|}+vp_x[\bar{a}_{x+1}+(I\bar{a})_{x+1}]$化简即得。

4.3　具体计算如下：

$K=k$	$Pr(K=k)$	PV	$(PV)Pr(K=k)$	$(PV)^2Pr(K=k)$
$K=0$	0.2	2.00	0.400	0.800
$K=1$	0.2	4.70	0.940	4.418
$K\geqslant 2$	0.6	7.94	4.764	37.826

方差为 $E[PV^2]-E^2[PV]=43.044-6.104^2=5.785$。

4.4　$(I\bar{a})_{95}=\bar{a}_{95}+{}_{1|}\bar{a}_{95}+{}_{2|}\bar{a}_{95}+{}_{3|}\bar{a}_{95}+{}_{4|}\bar{a}_{95}$

$\bar{a}_{95}=E[T(95)]=2.5$，${}_{1|}\bar{a}_{95}=p_{95}\bar{a}_{96}=1.6$，${}_{2|}\bar{a}_{95}={}_2p_{95}\bar{a}_{97}=0.9$，${}_{3|}\bar{a}_{95}={}_3p_{95}\bar{a}_{98}=0.4$，${}_{4|}\bar{a}_{95}={}_4p_{95}\bar{a}_{99}=0.1$，$(I\bar{a})_{95}=5.5$。

4.5　$\mathrm{Var}(Y)=\mathrm{Var}\left(\dfrac{1-v^{K+1}}{d}\right)=\dfrac{\mathrm{Var}(v^{K+1})}{d^2}=\dfrac{E[\mathrm{e}^{-2\delta(K+1)}]-\{E[\mathrm{e}^{-\delta(K+1)}]\}^2}{d^2}$

应用 $A_x=1-d\ddot{a}_x$，把给定条件代入，就得 $A_x=0.6$，$E[\mathrm{e}^{-2\delta(K+1)}]={}^2A_x=0.529\,6$，最后得到 $\mathrm{Var}(Y)=106$。

4.6 利用 $\ddot{a}_x=1+vp_x\ddot{a}_{x+1}$，得 $p_{73}=0.93$。

4.7 Y 可取 2，$2+3v=4.73$，$2+3v+4v^2=8.03$，分别对应于 $K=0$，$K=1$，$K\geqslant 2$。因此 $Pr(Y>4)=Pr(K\geqslant 1)=1-0.2=0.8$。

4.8 该年金可视为两个连续年金之和，支付率都是 1，第 1 个年金从 80 岁开始，第 2 个年金从 81 岁开始。$E(Y)=\bar{a}_{80}+vp_{80}\bar{a}_{81}=E[T(80)]+0.95E[T(81)]=10+0.95\times 9.5=19.025$。

4.9 因为 $i=0$，所以 $h=\mathrm{Var}(T)=E(T^2)-[E(T)]^2$。同样 $E(T^2)=\int_0^\infty t^2g(t)\mathrm{d}t=2\int_0^\infty t_tp_x\mathrm{d}t=2g$。最后得 $E(T)=\sqrt{2g-h}$。

4.10 $Z=\mathrm{e}^{-\delta T}$，$Y=\bar{a}_{\overline{T|}}=\delta^{-1}(1-Z)$，由给定条件得到

$$E(Z)=1-10\delta,\quad E(Z^2)=1-14.75\delta,\quad \mathrm{Var}(Y)=\delta^{-2}[E(Z^2)-E^2(Z)]=50$$

求解得到 $\delta=3.5\%$，$\bar{A}_x=1-\delta\bar{a}_x=1-0.035\times 10=0.65$。

第 5 章

5.1 $P_{25,\overline{20|}}=P^1_{25,\overline{20|}}+P_{25,\overline{20|}}^{\ \ \ 1}=0.064$

$${}_{20}P_{25}=P^1_{25,\overline{20|}}+P_{25,\overline{20|}}^{\ \ \ 1}A_{45}=P^1_{25,\overline{20|}}+P_{25,\overline{20|}}^{\ \ \ 1}\times 0.640=0.046$$

联立可得 $P_{25,\overline{20|}}^{\ \ \ 1}=0.05$，从而 $P^1_{25,\overline{20|}}=0.014$。

5.2 $L^*=v^{K+1}-G\ddot{a}_{\overline{K+1|}}=-G/d+(1+G/d)v^{K+1}$

$$\mathrm{Var}[L^*]=(d+G)^2d^{-2}\mathrm{Var}[v^{K+1}],\quad \mathrm{Var}[L]=(d+P_x)^2d^{-2}\mathrm{Var}[v^{K+1}]=0.30$$

$E[L]=0$，$E[L^*]=-0.2$，即得 $1-(d+P_x)\ddot{a}_x=0$，$1-(d+G)\ddot{a}_x=-0.2$

最后得到 $\mathrm{Var}[L^*]=0.432$。

5.3 $L_A=4v^{K+1}-0.18\ddot{a}_{\overline{K+1|}}=-2.25+6.25v^{K+1}$

$L_B=6v^{K+1}-0.22\ddot{a}_{\overline{K+1|}}=-2.75+8.75v^{K+1}$

$\mathrm{Var}[L_A]=3.25=(6.25)^2\mathrm{Var}[v^{K+1}]$

$\mathrm{Var}[L_B]=(8.75)^2\mathrm{Var}[v^{K+1}]=6.37$

5.4 每年度保险给付的现值均为 $1\,000\,(1.06)^kv^k=1\,000$，所以保险给付的现值变量期望也是 1 000。设净保费为 Q，每年净保费现值为 $Q\ddot{a}_x$。$Q=1\,000/\ddot{a}_x=66.60$。

5.5 $A_x=A^1_{x,\overline{20|}}+v^{20}{}_{20}p_xA_{x+20}=A^1_{x,\overline{20|}}+v^{20}{}_{20}p_x(0.40)=0.25$

$$A_{x,\overline{20|}}=A^1_{x,\overline{20|}}+v^{20}{}_{20}p_x=0.55$$

由以上两式得到 $A^1_{x,\overline{20|}}=0.05$，$v^{20}{}_{20}p_x=0.5$。

$A_{x,\overline{20|}}+d\ddot{a}_{x,\overline{20|}}=1$，得到 $\ddot{a}_{x,\overline{20|}}=15.45$。

$$\begin{aligned}1\,000P(\bar{A}_{x,\overline{20|}})&=1\,000(\bar{A}^1_{x,\overline{20|}}+v^{20}{}_{20}p_x)/\ddot{a}_{x,\overline{20|}}\\&=1\,000[(i/\delta)A^1_{x,\overline{20|}}+v^{20}{}_{20}p_x]/\ddot{a}_{x,\overline{20|}}=35.65\end{aligned}$$

5.6 $\mathrm{Var}[L]=\mathrm{Var}(v^T)/(\delta\bar{a}_x)^2$；直接验证

$\mathrm{Var}(v^T)=E[v^{2T}]-(E[v^T])^2=\dfrac{\mu\delta^2}{(2\delta+\mu)(\delta+\mu)^2}$，$\bar{a}_x=1/(\delta+\mu)$，代入即得。

5.7　由于 $\ddot{a}_{30:\overline{10}|}=1+a_{30:\overline{9}|}=6.6$，因此 $A_{30:\overline{10}|}=1-d\ddot{a}_{30:\overline{10}|}=0.4$。

$$1\,000P^1_{30:\overline{10}|}=1\,000A^1_{30:\overline{10}|}/\ddot{a}_{30:\overline{10}|}=1\,000(A_{30:\overline{10}|}-v^{30}{}_{10}p_{30})/\ddot{a}_{30:\overline{10}|}=7.58$$

5.8　注意到 $\dfrac{P^{1(12)}_{x:\overline{20}|}}{P^1_{x:\overline{20}|}}=\dfrac{A^1_{x:\overline{20}|}/\ddot{a}^{(12)}_{x:\overline{20}|}}{A^1_{x:\overline{20}|}/\ddot{a}_{x:\overline{20}|}}=\dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}}{\ddot{a}^{(12)}_{x:\overline{20}|}}=1.032$，同样 $\dfrac{P^{(12)}_{x:\overline{20}|}}{P_{x:\overline{20}|}}=\dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}}{\ddot{a}^{(12)}_{x:\overline{20}|}}=1.032$，$P_{x:\overline{20}|}=0.040$。所以 $P^{(12)}_{x:\overline{20}|}=P_{x:\overline{20}|}\times 1.032=0.041\,28$。

5.9　$1-\dfrac{(P_{30:\overline{15}|}-{}_{15}P_{30})\ \ddot{a}_{30:\overline{15}|}}{v^{15}{}_{15}p_{30}}=1-\dfrac{A_{30:\overline{15}|}-A_{30}}{A_{30:\overline{15}|}^{\;\;1}}=\dfrac{A_{30:\overline{15}|}^{\;\;1}-A_{30:\overline{15}|}+A_{30}}{A_{30:\overline{15}|}^{\;\;1}}$

$$=\frac{A_{30}-A^1_{30:\overline{15}|}}{A_{30:\overline{15}|}^{\;\;1}}=A_{45}$$

5.10　直接由定义得

$$\begin{aligned}{}_{15}P_{45}&=\frac{A_{45}}{\ddot{a}_{45:\overline{15}|}}=\frac{A^1_{45:\overline{15}|}+{}_{15}E_{45}\cdot A_{60}}{\ddot{a}_{45:\overline{15}|}}=P^1_{45:\overline{15}|}+P_{45:\overline{15}|}^{\;\;1}\cdot A_{60}\\&=P^1_{45:\overline{15}|}+(P_{45:\overline{15}|}-P^1_{45:\overline{15}|})A_{60}\end{aligned}$$

把已知条件代入，得到 $P^1_{45:\overline{15}|}=0.008$。

5.11　保费 $P=(vq_x+v^2p_xq_{x+1})/(1+vp_x)=0.130\,276\,21$。

$\mathrm{Var}[L]=E[L^2]=(-0.247\,5)^2\times(0.72)+(0.562\,5)^2\times(0.18)+(0.769\,7)^2\times(0.1)=0.160$。

5.12　$0.427\,5=\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}=\int_0^n\mu e^{-(\delta+\mu)t}\mathrm{d}t=0.45(1-e^{-0.1n})$，因此 $e^{-0.1n}=0.05$。

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}=\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}+{}_nE_x=0.427\,5+0.05=0.477\,5,\quad \bar{a}_{x:\overline{n}|}=(1-\bar{A}_{x:\overline{n}|})/\delta=9.5$$

$$1\,000\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})=1\,000\bar{A}_{x:\overline{n}|}/\bar{a}_{x:\overline{n}|}=1\,000\times 0.477\,5/9.5=50.26$$

第6章

6.1　$1-{}_{20}V_{25}=\dfrac{\ddot{a}_{45}}{\ddot{a}_{25}}=\dfrac{\ddot{a}_{35}}{\ddot{a}_{25}}\dfrac{\ddot{a}_{45}}{\ddot{a}_{35}}=(1-{}_{10}V_{25})(1-{}_{10}V_{35})=0.72$，${}_{20}V_{25}=0.28$。

6.2　由式（6.24）得，$P_x-P^1_{x:\overline{n}|}=P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}{}_nV_x$，代入条件得 $0.024-P^1_{x:\overline{n}|}=0.2\times 0.08$，$P^1_{x:\overline{n}|}=0.008$。

6.3　直接计算即可，结果如下：

k	0	1	2
${}_{k+1}V$	0.888 9	1.798 4	2.218 7

6.4　${}_1V_x=1-\dfrac{\ddot{a}_{x+1}}{\ddot{a}_x}$，$\ddot{a}_{x+2}=1$，$\ddot{a}_{x+1}=1+vp_{x+1}\ddot{a}_{x+2}=1+(1/1.06)\times(0.15)\times 1=1.141\,5$，$\ddot{a}_x=1+vp_x\ddot{a}_{x+1}=1+(1/1.06)\times(0.35)\times(1.141\,5)=1.376\,9$，${}_1V_x=0.171$。

6.5 $\mathrm{Var}[L]=\mathrm{Var}\left[v^{K+1}-P_x\dfrac{1-v^{K+1}}{d}\right]=(1+P_x/d)^2\mathrm{Var}[v^{K+1}]$

$$=\frac{1}{(1-A_x)^2}(E[\mathrm{e}^{-(K+1)2\delta}]-(E[\mathrm{e}^{-(K+1)\delta}])^2)$$

$$A_x=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(k+1)\delta}{}_{k|}q_x=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}(0.5)^{k+1}=\frac{2}{2-v}$$

$$^2A_x=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-2(k+1)\delta}{}_{k|}q_x=\sum_{k=0}^{\infty}v^{2(k+1)}(0.5)^{k+1}=\frac{v^2}{2-v^2}$$

代人化简即得。

6.6 应用式（6.7），${}_kV+\Pi_k=v[{}_{k+1}V+(c_{k+1}-{}_{k+1}V)q_{x+k}]$，此时 $\Pi_k=\Pi$。分别把 $k=0$ 和 $k=1$ 代人，代换后得${}_1V\times2.1=1\,010$，所以${}_1V=480.95$。

6.7 按定义计算 $\ddot{a}_{x,\overline{4}|}=1\times0.33+1.93\times0.24+2.795\times0.16+3.6\times(0.27)=2.212\,4$

注意到${}_2p_xq_{x+2}={}_{2|}q_x$，$q_{x+2}={}_{2|}q_x/{}_2p_x$，$\ddot{a}_{x+2,\overline{2}|}=1\times q_{x+2}+1.93\times(1-q_{x+2})=1.583\,95$

$${}_2V_{x,\overline{4}|}=1-\frac{\ddot{a}_{x+2,\overline{2}|}}{\ddot{a}_{x,\overline{4}|}}=0.284\,1$$

6.8 因为保费仅限于前 20 次，之后没有保费，由递推公式得

$0.585\times1.04=0.600p_{38}+q_{38}$，$p_{38}=[1-1.04\times0.585]/(0.4)=0.979$

6.9 由${}_tV_x=1-(P_x+d)\ddot{a}_{x+t}$解得 $d=1/11$，从而 $i=0.10$。

6.10 首先确定 Π_0，由等价原理可得

$$\sum_{k=0}^{29}\Pi_0\,(1.05)^k(1-k/30)\,(1.05)^{-k}=1\,000\,\frac{v+\cdots+v^{30}}{30}$$

$$15.5\Pi_0=1\,000\times\frac{15.372\,45}{30},\quad \Pi_0=33.059$$

第 5 年末准备金为：

$$1\,000\,\frac{v+\cdots+v^{25}}{25}-\sum_{k=0}^{24}\Pi_0\,(1.05)^{k+5}(1-k/25)\,(1.05)^{-k}$$

$$=563.757\,8-\Pi_0\,(1.05)^5\times(13)=15.25$$

6.11 应用式（6.7），${}_kV+\Pi_k=v[{}_{k+1}V+(c_{k+1}-{}_{k+1}V)q_{x+k}]$，此时 $\Pi_k=\Pi=1\,500P_x$。

按条件得

$$(1\,500P_x+179)\times1.05=205+(1\,500-205)q_{x+k-1}$$

$$P_x=1/\ddot{a}_x-d=(1/16.2)-(1/21),\quad 1\,000q_{x+k-1}=3.99$$

6.12 $\ddot{a}_{31,\overline{14}|}=1+vp_{31}\ddot{a}_{32,\overline{13}|}=1+(1/1.05)\times(0.998)\times9=9.554\,2$

$${}_1V_{31,\overline{14}|}=1-\frac{\ddot{a}_{32,\overline{13}|}}{\ddot{a}_{31,\overline{14}|}}=1-\frac{9}{9.554\,2}=0.058$$

第 7 章

7.1 均值=30.8，方差=364.4，可能服从负二项分布。

7.2 均值=2.625，方差= 0.839，可能服从二项分布。

7.3 均值=1.93，方差=2.07，可能服从泊松分布。不发生索赔的概率=$\exp(-1.93)=0.145$

7.4 参数的矩估计$=1/[(9.940+\cdots+6.216)/10]=0.26$，任意一次损失大于 10 的概率$=1-F(10)=0.075$

7.5 任意一次损失超过 20 的概率为 0.118，任意一次损失小于 4 的概率为 0.278。

7.6 新保单的索赔次数服从 0.5+0.8=1.3 的泊松分布。新保单每年发生的索赔次数大于或等于 2 的概率为 $1-p_0-p_1=0.373$。

7.7
$$\begin{aligned}F_Y(y)&=Pr(Y\leqslant y)=Pr(X^{-1}\leqslant y)=Pr(X\geqslant y^{-1})\\&=1-F_X(y^{-1})=\left(\frac{2}{y^{-1}+2}\right)^3\end{aligned}$$

$$Pr(Y>10)=1-\left(\frac{2}{10^{-1}+2}\right)^3=0.136$$

7.8 Y 的分布函数为：

$$F_Y(y)=Pr(e^X\leqslant y)=Pr(X\leqslant \ln y)=F_X(\ln y)=1-e^{-0.5\ln y}$$

对上式两边求导数即得 Y 的密度函数为：

$$f_Y(y)=\frac{0.5}{y}e^{-0.5\ln y}$$

7.9 将 2005 年和 2006 年的损失折现到 2004 年中：

2005 年平均损失金额的折现值为：$1\,200/(1+10\%)=1\,090.9$

2006 年平均损失金额的折现值为：$1\,500/(1+10\%)^2=1\,239.7$

2004 年的平均损失金额为：$E(x)=\frac{1}{3}\times 1\,090.9+\frac{2}{3}\times 1\,239.7=1\,190.1$

而帕累托分布的期望 $E(x)=\theta/(\alpha-1)=\theta/2$，所以 $\theta=2\,380.2$。

7.10 2007 年平均损失额的期望值为：

$$\frac{1}{5}\times 500\times 1.05^3+\frac{2}{5}\times 600\times 1.05^2+\frac{2}{5}\times 700\times 1.05=674.36$$

故有 $E(x)=\theta/(\alpha-1)=\theta=674.36$。

第 8 章

8.1 $\frac{12}{20}\times(1+10\%)+20\%=86\%$

8.2 (1) 5+8=13 个车年；(2) 5×2+8×0.5=14 个车年。

8.3 $R=\dfrac{P+F}{1-V-Q}=\dfrac{175+12.5}{1-17.5\%-5\%}=241.94$

8.4 如果把理赔费用作为纯保费的一部分，目标赔付率为：

$$1-15\%-2.25\%-5.6\%-6.8\%=70.35\%$$

如果把理赔费用作为附加费用处理，则目标赔付率为：

$$\frac{1-15\%-2.25\%-5.6\%-6.8\%}{1+6.42\%}=66.11\%$$

8.5 2013 年签发的保单，其赔款平均在 2014 年 1 月 1 日支出。2015 年 7 月 1 日开始签发的新保单，其赔款平均在 2016 年 7 月 1 日支出。因此，把 2013 保单年度的最终赔款调整到 2016 年 7 月 1 日的水平即为：$1\,000\times1.05^{2.5}=1\,129.73$。同样，把 2014 保单年度的最终赔款调整到 2016 年 7 月 1 日的水平即为：$2\,000\times1.05^{1.5}=2\,151.86$。

保单年度	根据当前费率计算的保费	最终赔款	权重	经趋势调整后的最终赔款	经验赔付率
2013	2 000	1 000	0.4	1 129.73	0.564 9
2014	3 000	2 000	0.6	2 151.86	0.717 3

$$平均经验赔付率=0.564\,9\times0.4+0.717\,3\times0.6=0.656\,3$$
$$费率上调幅度=0.656\,3/0.6-1=9.383\,3\%$$

8.6 把 2008 年 7 月 1 日生效后的费率看作 1，则 2009 年 7 月 1 日生效的费率为 1.08，2011 年 7 月 1 日生效的费率为 $1.08\times1.1=1.188$。已赚保费的计算如下：

年度	平均费率 (1)	等水平因子 (2)=1.188/(1)	保费 (3)	等水平保费 (4)=(3)×(2)
2010	$1.07=1\times0.125+1.08\times0.875$	1.110 3	200	222.056 1
2011	$1.093\,5=1.08\times0.875+1.188\times0.125$	1.086 4	250	271.604 9
2012	$1.174\,5=1.08\times0.125+1.188\times0.875$	1.011 5	300	303.448 3
合计				797.109 3

8.7 $R=\dfrac{500+60}{1-20\%-10\%}=800$

8.8 $A=\dfrac{P/R_0+F/R_0}{1-V-Q}=\dfrac{70\%+10\%}{1-25\%-5\%}=1.142\,8$，即费率需要上调 14.28%。

第 9 章

9.1 费率调整系数的计算过程和计算结果如下：

地区	甲	乙	合计
车型 A 的风险单位数	1 000	1 500	2 500
车型 B 的风险单位数	2 000	3 000	5 000
车型 C 的风险单位数	1 200	2 500	3 700
前两年的风险单位数	4 200	7 000	11 200

续前表

地区	甲	乙	合计
车型 A 的相对费率	1.000 0	0.850 0	
车型 B 的相对费率	0.750 0	0.637 5	
车型 C 的相对费率	0.650 0	0.552 5	
前两年的基本风险单位数	3 280	4 569	7 849
前两年的赔款	2 750 000	2 950 000	5 700 000
经验纯保费	838.41	645.66	726.21
费率调整系数	1.154 5	0.889 1	

9.2　费率调整系数的计算过程和计算结果如下：

地区	甲地区	乙地区	合计
第一年的已赚保费	50 000	70 000	120 000
第一年的费率	100	120	
第二年的已赚保费	60 000	80 000	140 000
第二年的费率	120	130	
当前的费率	130	140	
按当前费率折算的前两年的已赚保费	130 000	167 821	297 821
前两年的赔款	75 643	94 343	169 986
经验赔付率	0.581 9	0.562 2	0.570 8
费率调整系数	1.019 5	0.984 9	

9.3　边际总和法的迭代过程如下：

车型 α_1		0.899 7	0.886 2	0.885 0	0.884 9	0.884 9
车型 α_2		0.644 8	0.665 7	0.667 9	0.668 1	0.668 1
车型 α_3		0.826 9	0.744 0	0.734 6	0.733 5	0.733 4
地区 β_1	1.000 0	0.880 9	0.869 4	0.868 2	0.868 1	0.868 0
地区 β_2	1.000 0	1.045 3	1.045 6	1.045 6	1.045 6	1.045 6
地区 β_3	1.000 0	1.216 5	1.245 8	1.249 1	1.249 5	1.249 5

各个风险类别的纯保费如下：

	地区 A	地区 B	地区 C
车型 1	1 059	1 275	1 524
车型 2	799	963	1 151
车型 3	877	1 057	1 263

9.4　应用边际总和法求得的相对费率如下表所示。

车型 α_1		0.710 4	0.749 5	0.751 2	0.751 3
车型 α_2		0.588 4	0.562 5	0.561 4	0.561 3

地区 β_1	1.000 0	0.702 9	0.689 3	0.688 7	0.688 7
地区 β_2	1.000 0	0.992 6	0.996 2	0.996 4	0.996 4
地区 β_3	1.000 0	1.440 6	1.451 9	1.452 4	1.452 4

各个风险类别的纯保费如下：

	地区 A	地区 B	地区 C
车型 1	957	1 384	2 018
车型 2	715	1 034	1 508

9.5 边际总和法的迭代过程和求得的相对费率如下：

A1	1.000 0	1.160 9	1.165 8	1.165 9	1.165 9	1.165 9
A2	1.000 0	0.748 9	0.741 3	0.741 2	0.741 2	0.741 2
B1	1.000 0	1.422 4	1.428 3	1.428 5	1.428 5	1.428 5
B2	1.000 0	0.893 4	0.892 0	0.891 9	0.891 9	0.891 9
C1	1.071 2	1.101 2	1.101 9	1.102 0	1.102 0	1.102 0
C2	0.927 4	0.898 5	0.897 8	0.897 8	0.897 8	0.897 8

应用边际总和法求得的纯保费如下表所示：

A	B	C	纯保费
A1	B1	C1	6 276
A1	B1	C2	5 114
A1	B2	C1	3 919
A1	B2	C2	3 193
A2	B1	C1	3 990
A2	B1	C2	3 251
A2	B2	C1	2 491
A2	B2	C2	2 030

第 10 章

10.1 在索赔额为常数的情况下，信度因子仅与索赔次数有关。

$$n_F=1\,082,\quad n=Z^2n_F=(0.5)^2\times1\,082=270.5$$

10.2 当 $\alpha=10\%$，$r=10\%$时，索赔频率的完全可信度标准为 271，因此索赔强度的完全可信度标准为 $271\times1^2=271$。

10.3

$$\bar{X}=\frac{73+80+65+70}{4}=72,\quad \bar{Y}=\frac{65+65+63+75}{4}=67,\quad \mu=\frac{72+67}{2}=69.5$$

$$\sigma_X^2=\frac{(73-72)^2+(80-72)^2+(65-72)^2+(70-72)^2}{4-1}=39.33$$

$$\sigma_Y^2=\frac{(65-67)^2+(65-67)^2+(63-67)^2+(75-67)^2}{4-1}=29.33$$

$$v=\frac{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}{2}=\frac{39.33+29.33}{2}=34.33,$$

$$a=\frac{(72-69.5)^2+(67-69.5)^2}{2-1}-\frac{v}{3}=1.056$$

$$Z=\frac{4}{4+34.33/1.056}=0.11$$

B 的信度保费为：$Z\overline{Y}+(1-Z)\mu=0.11\times67+0.89\times69.5=69.23$

10.4

$$\overline{X}_1=\frac{6+5+4}{3}=5,\quad \overline{X}_2=\frac{6+7+8}{3}=7,\quad \overline{X}=\frac{5+7}{2}=6$$

$$\sigma_1^2=\frac{1}{2}(1+0+1)=1,\quad \sigma_2^2=\frac{1}{2}(1+0+1)=1$$

$$v=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}=\frac{1+1}{2}=1$$

$$a=\frac{1}{1}[(5-6)^2+(7-6)^2]-\frac{v}{3}=\frac{5}{3}$$

$$K=\frac{v}{a}=\frac{1}{5/3}=0.6,\quad Z=\frac{n}{n+K}=\frac{3}{3+0.6}=\frac{5}{6}$$

估计值 1：$Z\overline{X}_1+(1-Z)\overline{X}=\frac{5}{6}\times5+\frac{1}{6}\times6=\frac{31}{6}$

估计值 2：$Z\overline{X}_2+(1-Z)\overline{X}=\frac{5}{6}\times7+\frac{1}{6}\times6=\frac{41}{6}$

第 11 章

11.1

（1）季比例法：

$$300\times\frac{1}{8}+200\times\frac{3}{8}+240\times\frac{5}{8}+180\times\frac{7}{8}=420$$

（2）年比例法：

$$(300+200+240+180)\times\frac{1}{2}=460$$

11.2

事故年	最终赔款	准备金
2010	102	0
2011	124	7

续前表

事故年	最终赔款	准备金
2012	144	18
2013	163	35
2014	190	93
合计		153

11.3

事故年	最终索赔次数
2010	386
2011	422
2012	436
2013	470
2014	431
合计	2 145

11.4 $1\,500\times\frac{70\%-50\%}{80\%}=375$

11.5

累积已付赔款的预测值

事故年	已赚保费	0	1	2	3
2010	25 000	10 000	15 000	17 000	17 000
2011	30 000	12 000	18 000	20 400	20 400
2012	33 000	14 000	21 000	23 800	23 800
2013	38 000	17 000	25 500	28 900	28 900

最终赔款和准备金的预测值（B-F 法）

事故年	已赚保费	预期赔付率	预期最终赔款	累积已付赔款	修正最终赔款	未决赔款准备金
2010	25 000					0
2011	30 000	80%	24 000	20 400	20 400	0
2012	33 000	80%	26 400	21 000	24 106	3 106
2013	38 000	80%	30 400	17 000	29 518	12 518
未决赔款准备金合计						15 624

11.6 用累积已付直接理赔费用除以累积已付赔款，求得每百元累积已付赔款对应的累积已付直接理赔费用，结果如下表所示。

事故年	进展年			
	1	2	3	4
2011	6.25	8.54	9.42	9.50
2012	5.98	6.57	7.11	
2013	6.69	8.19		
2014	6.63			

对上表中的数据应用链梯法，可以求得每百元已付赔款对应的最终直接理赔费用如下表中的第（1）列所示。

事故年	每百元已付赔款的最终直接理赔费用（元）(1)	最终赔款（千元）(2)	最终直接理赔费用（千元）(3)=(1)×(2)÷100	已付直接理赔费用（千元）(4)	直接理赔费用准备金（千元）(5)=(3)−(4)
2012	7.181	9 980	716.7	710	6.7
2013	9.048	9 520	861.4	770	91.4
2014	9.022	10 680	963.5	630	333.5
合计					431.6

第 12 章

12.1 假设保险公司的赔款额为 y：

$$\begin{aligned}E(y) &= \int_{400}^{2\,000}(x-400)f(x)\mathrm{d}x+\int_{2\,000}^{6\,000}(x-1\,000)f(x)\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{6\,000}^{+\infty}(x-2\,000)f(x)\mathrm{d}x\\&=200\mathrm{e}^{-2}-1\,800\mathrm{e}^{-10}+1\,200\mathrm{e}^{-10}-5\,200\mathrm{e}^{-30}+4\,200\mathrm{e}^{-30}\\&=27.07-0.027-0.00=27.04\end{aligned}$$

12.2 (1) $X_A=\begin{cases}X, & X\leqslant 2\,000\\ 2\,000, & X>2\,000\end{cases}$，$X_R=\begin{cases}0, & X\leqslant 2\,000\\ X-2\,000, & X>2\,000\end{cases}$

$$\begin{aligned}E(X_A)&=\int_0^{2\,000}\frac{x}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x+2\,000Pr(\ln x>\ln 2\,000)\\&=\int_0^{2\,000}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x+2\,000\left[1-\Phi\left(\frac{\ln 2\,000-5}{3}\right)\right]\\&=602\end{aligned}$$

(2) $E(X_R)=E(X)-E(X_A)=\mathrm{e}^{\mu+0.5\sigma^2}-602=12\,758$

(3) $$\frac{E(X_R)}{Pr(X>2\,000)}=\frac{E(X_R)}{Pr(\ln X>7.600\,9)}=\frac{E(X_R)}{1-\Phi\left(\frac{7.600\,9-5}{3}\right)}$$

$$=\frac{12\,758}{1-0.81}=67\,147$$

12.3 再保险人的赔付随机变量设为 Y，依题意有

$$y=\begin{cases}0, & x\leqslant 1\,000\\ x-1\,000, & 1\,000\leqslant x\leqslant 2\,000\\ 1\,000, & 2\,000<x\leqslant 3\,000\end{cases}$$

$$E(Y)=\int_0^{1\,000}0\times f(x)\mathrm{d}x+\int_{1\,000}^{2\,000}(x-1\,000)f(x)\mathrm{d}x+\int_{2\,000}^{3\,000}1\,000f(x)\mathrm{d}x=500$$

12.4 (1) 原保险人的赔付函数：

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 5\\ 5, & 5<x\leqslant 10\\ 0.5x, & 10<x\leqslant 35\\ x-20, & x>35\end{cases}$$

(2) 再保险人的赔付函数为：

$$g(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 5\\ x-5, & 5<x\leqslant 10\\ 0.5x, & 10<x\leqslant 35\\ 20, & x>35\end{cases}$$

(3) $E[g(x)]=\int_5^{10}(x-5)\frac{1}{50}\mathrm{d}x+\int_{10}^{35}0.5x\times\frac{1}{50}\mathrm{d}x+\int_{35}^{50}20\times\frac{1}{50}\mathrm{d}x=11.875$

12.5

事故年	已赚风险纯保费	经调整的已赚风险纯保费	累积已报案赔款	累积已报案赔款比例	已报案赔款对应的保费	期望赔付率	S-B 方法的 IBNR	链梯法的 IBNR
2001	400	500	300	100%	500		—	—
2002	500	500	320	95%	475		22	17
2003	600	500	340	85%	425		65	60
2004	700	600	400	75%	450		131	133
2005	800	800	500	60%	480		279	333
2006	900	900	560	50%	450		392	560
合计	3 900	3 800	2 420		2 780	87.1%	888	1 104

12.6 $\dfrac{500}{(1-20\%)\times(1-10\%)\times(1-25\%-5\%)}=992$

附录　生命表

基本函数及净保费（$i=5\%$）

x	l_x	d_x	$1\,000q_x$	$\ddot{a}_x$	$1\,000A_x$	$1\,000\,{}^2A_x$	x
0	10 000 000	204 200	20. 42	19. 642 724	64. 63	28. 72	0
1	9 795 800	13 126	1. 34	19. 982 912	48. 43	11. 47	1
2	9 782 674	11 935	1. 22	19. 958 801	49. 58	11. 33	2
3	9 770 739	10 943	1. 12	19. 931 058	50. 90	11. 28	3
4	9 759 796	10 150	1. 04	19. 899 898	52. 39	11. 33	4
5	9 749 646	9 555	0. 98	19. 865 552	54. 02	11. 46	5
6	9 740 091	9 058	0. 93	19. 828 262	55. 80	11. 67	6
7	9 731 033	8 661	0. 89	19. 788 078	57. 71	11. 95	7
8	9 722 372	8 458	0. 87	19. 745 056	59. 76	12. 29	8
9	9 713 914	8 257	0. 85	19. 699 446	61. 93	12. 69	9
10	9 705 657	8 250	0. 85	19. 651 122	64. 23	13. 15	10
11	9 697 407	8 243	0. 85	19. 600 339	66. 65	13. 66	11
12	9 689 164	8 333	0. 86	19. 546 971	69. 19	14. 23	12
13	9 680 831	8 422	0. 87	19. 491 083	71. 85	14. 84	13
14	9 672 409	8 608	0. 89	19. 432 543	74. 64	15. 50	14
15	9 663 801	8 794	0. 91	19. 371 410	77. 55	16. 21	15
16	9 655 007	8 979	0. 93	19. 307 550	80. 59	16. 98	16
17	9 646 028	9 164	0. 95	19. 240 821	83. 77	17. 81	17
18	9 636 864	9 348	0. 97	19. 171 075	87. 09	18. 70	18
19	9 627 516	9 628	1. 00	19. 098 154	90. 56	19. 67	19
20	9 617 888	9 906	1. 03	19. 022 085	94. 19	20. 71	20
21	9 607 982	10 184	1. 06	18. 942 699	97. 97	21. 82	21
22	9 597 798	10 558	1. 10	18. 859 825	101. 91	23. 02	22
23	9 587 240	10 929	1. 14	18. 773 468	106. 03	24. 31	23
24	9 576 311	11 300	1. 18	18. 683 440	110. 31	25. 69	24
25	9 565 011	11 669	1. 22	18. 589 547	114. 78	27. 17	25
26	9 553 342	12 133	1. 27	18. 491 584	119. 45	28. 77	26
27	9 541 209	12 690	1. 33	18. 389 518	124. 31	30. 49	27
28	9 528 519	13 245	1. 39	18. 283 311	129. 37	32. 33	28
29	9 515 274	13 892	1. 46	18. 172 737	134. 63	34. 30	29

续前表

x	l_x	d_x	$1\,000q_x$	$\ddot{a}_x$	$1\,000A_x$	$1\,000^2A_x$	x
30	9 501 382	14 537	1.53	18.057 738	140.11	36.41	30
31	9 486 845	15 274	1.61	17.938 070	145.81	38.67	31
32	9 471 571	16 102	1.70	17.813 654	151.73	41.09	32
33	9 455 469	16 925	1.79	17.684 401	157.89	43.68	33
34	9 438 544	17 933	1.90	17.550 034	164.28	46.45	34
35	9 420 611	18 935	2.01	17.410 616	170.92	49.40	35
36	9 401 676	20 120	2.14	17.265 850	177.82	52.56	36
37	9 381 556	21 390	2.28	17.115 771	184.96	55.93	37
38	9 360 166	22 745	2.43	16.960 229	192.37	59.52	38
39	9 337 421	24 277	2.60	16.799 062	200.04	63.35	39
40	9 313 144	25 891	2.78	16.632 259	207.99	67.41	40
41	9 287 253	27 676	2.98	16.459 630	216.21	71.74	41
42	9 259 577	29 631	3.20	16.281 129	224.71	76.34	42
43	9 229 946	31 751	3.44	16.096 696	233.49	81.23	43
44	9 198 195	34 125	3.71	15.906 249	242.56	86.41	44
45	9 164 070	36 656	4.00	15.709 844	251.91	91.90	45
46	9 127 414	39 339	4.31	15.507 365	261.55	97.71	46
47	9 088 075	42 350	4.66	15.298 671	271.49	103.86	47
48	9 045 725	45 590	5.04	15.083 893	281.72	110.36	48
49	9 000 135	49 141	5.46	14.862 997	292.24	117.23	49
50	8 950 994	52 990	5.92	14.636 061	303.04	124.46	50
51	8 898 004	57 125	6.42	14.403 131	314.14	132.08	51
52	8 840 879	61 621	6.97	14.164 220	325.51	140.10	52
53	8 779 258	66 547	7.58	13.919 449	337.17	148.53	53
54	8 712 711	71 793	8.24	13.669 034	349.09	157.36	54
55	8 640 918	77 423	8.96	13.413 011	361.29	166.63	55
56	8 563 495	83 494	9.75	13.151 498	373.74	176.33	56
57	8 480 001	90 058	10.62	12.884 699	386.44	186.47	57
58	8 389 943	97 156	11.58	12.612 883	399.39	197.05	58
59	8 292 787	104 655	12.62	12.336 384	412.55	208.08	59
60	8 188 132	112 669	13.76	12.055 342	425.94	219.56	60
61	8 075 463	121 213	15.01	11.770 064	439.52	231.49	61
62	7 954 250	130 291	16.38	11.480 898	453.29	243.87	62
63	7 823 959	139 892	17.88	11.188 205	467.23	256.69	63
64	7 684 067	149 993	19.52	10.892 369	481.32	269.94	64
65	7 534 074	160 626	21.32	10.593 780	495.53	283.63	65
66	7 373 448	171 728	23.29	10.292 913	509.86	297.73	66
67	7 201 720	183 212	25.44	9.990 230	524.27	312.23	67
68	7 018 508	195 044	27.79	9.686 158	538.75	327.11	68

续前表

x	l_x	d_x	$1\,000q_x$	$\ddot{a}_x$	$1\,000A_x$	$1\,000\,{}^2A_x$	x
69	6 823 464	207 229	30. 37	9. 381 167	553. 28	342. 37	69
70	6 616 235	219 527	33. 18	9. 075 861	567. 82	357. 96	70
71	6 396 708	231 945	36. 26	8. 770 664	582. 35	373. 88	71
72	6 164 763	244 248	39. 62	8. 466 182	596. 85	390. 08	72
73	5 920 515	256 358	43. 30	8. 162 908	611. 29	406. 56	73
74	5 664 157	267 971	47. 31	7. 861 452	625. 65	423. 25	74
75	5 396 186	278 929	51. 69	7. 562 297	639. 89	440. 15	75
76	5 117 257	288 972	56. 47	7. 265 989	654. 00	457. 21	76
77	4 828 285	297 809	61. 68	6. 973 063	667. 95	474. 39	77
78	4 530 476	305 218	67. 37	6. 683 979	681. 72	491. 66	78
79	4 225 258	310 810	73. 56	6. 399 299	695. 27	508. 98	79
80	3 914 448	314 330	80. 30	6. 119 411	708. 60	526. 30	80
81	3 600 118	315 514	87. 64	5. 844 708	721. 68	543. 60	81
82	3 284 604	314 041	95. 61	5. 575 590	734. 50	560. 83	82
83	2 970 563	309 770	104. 28	5. 312 277	747. 03	577. 97	83
84	2 660 793	302 506	113. 69	5. 055 031	759. 28	594. 97	84
85	2 358 287	292 168	123. 89	4. 803 941	771. 24	611. 83	85
86	2 066 119	278 802	134. 94	4. 558 938	782. 91	628. 52	86
87	1 787 317	262 539	146. 89	4. 319 797	794. 30	645. 04	87
88	1 524 778	243 675	159. 81	4. 085 982	805. 43	661. 42	88
89	1 281 103	222 592	173. 75	3. 856 599	816. 35	677. 72	89
90	1 058 511	199 815	188. 77	3. 630 178	827. 13	694. 02	90
91	858 696	175 973	204. 93	3. 404 320	837. 89	710. 51	91
92	682 723	151 749	222. 27	3. 175 241	848. 80	727. 49	92
93	530 974	127 890	240. 86	2. 936 743	860. 15	745. 48	93
94	403 084	105 096	260. 73	2. 678 823	872. 44	765. 39	94
95	297 988	84 006	281. 91	2. 384 461	886. 45	788. 76	95
96	213 982	74 894	350. 00	2. 024 369	903. 60	818. 42	96
97	139 088	66 067	475. 00	1. 654 770	921. 20	849. 71	97
98	73 021	49 289	675. 00	1. 309 539	937. 64	879. 62	98
99	23 732	23 732	1000. 00	1. 000 000	952. 38	907. 03	99

参考文献

[1] Finger, R.J. Risk Classification. New York: The Casualty Actuarial Society, 2004.

[2] Gerber, H.U. Life Insurance Mathematics. Third Edition. Springer-Verlag, 1997.

[3] Hart, D.G., Buchanan, R.A., Howe, B.A. The Actuarial Practice of General Insurance. Sydney: The Institute of Actuaries of Australia, 1996.

[4] Klugman, S.A., Panjer, H.H., Willmot, G.E. Loss Models: From Data to Decisions. John Willey & Sons, Inc., 2012.

[5] Sherwood, M.T. Individual Risk Rating. New York: The Casualty Actuarial Society, 2004.

[6] Tse, Y.K. Nonlife Actuarial Models: Theory, Methods and Evaluation. Cambridge University Press, 2009.

[7] Wiser, R.F. Loss Reserving. New York: The Casualty Actuarial Society, 2004.

[8] 韩天雄. 非寿险精算. 北京：中国财政经济出版社，2010.

[9] 孟生旺. 非寿险定价. 北京：中国财政经济出版社，2011.

[10] 孟生旺. 金融数学基础. 北京：中国人民大学出版社，2014.

[11] 孟生旺，刘乐平. 非寿险精算学（第三版）. 北京：中国人民大学出版社，2015.

[12] 谢志刚，周晶晗. 非寿险准备金评估. 北京：中国财政经济出版社，2006.

[13] 张连增. 寿险精算. 北京：中国财政经济出版社，2011.

▶ 精算学基础

金融数学（第五版）

精算模型（第二版）

寿险精算学（第二版）

非寿险精算学（第三版）

21世纪保险精算系列教材

策划编辑　王伟娟
责任编辑　王　前　张佳佳
封面设计　三众工作室／耿中虎
版式设计　赵星华

ISBN 978-7-300-22289-9

9 787300 222899 >

定价：28.00 元