天津大学数学系

泛函分析学习参考

许 跟 起

2015年 9月16日

目　录

第一章　线性空间和线性算子

§1.1 第一讲　线性空间

教学目的:
本节介绍线性空间的定义, 线性子空间, 线性空间基与维数。
本节要点:
线性空间, 线性相关与线性无关, 由集合张成的子空间, 基

§1.1.1 内容提要

定义 1.1.1 设 $\mathbb{X}$ 是一个非空集合, $\mathbb{K}$ 是数域. 若存在一个 $\mathbb{X}\times\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ 的二元映射(称为加法运算,记为"+"), 使得对任意的 $x,y\in\mathbb{X}$ 都有 $x+y\in\mathbb{X}$,且满足性质:

(1). 对称性: $x+y=y+x,\quad \forall x,y\in\mathbb{X}$;

(2). 结合律: $(x+y)+z=x+(y+z),\quad \forall x,y,z\in\mathbb{X}$;

(3). 零元存在: 存在一个元 $\theta\in\mathbb{X}$ (称为零元),使得对任意的 $x\in\mathbb{X}$ 有 $x+\theta=x$;

(4). 负元存在: 对任意的 $x\in\mathbb{X}$,都存在一个元 $(-x)\in\mathbb{X}$ 使得 $x+(-x)=\theta$.

若存在一个在数域 $\mathbb{K}\times\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{X}$ 的映射(称为数乘运算, 记为" · "), 使得对任意的 $x\in\mathbb{X},\alpha\in\mathbb{K}$ 都有 $\alpha\cdot x\in\mathbb{X}$, 并满足下列条件:

(5). $1\cdot x=x$;

(6). 结合律: $\alpha\cdot(\beta\cdot x)=(\alpha\beta)\cdot x,\quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{K},\quad x\in\mathbb{X}$;

(7). 数乘对加法的分配律:

$$\alpha\cdot(x+y)=a\cdot x+a\cdot y.$$

(8). 分配律:

$$(\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x.$$

则 $(\mathbb{X},\mathbb{K},+,\cdot)$ 称为数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间,当 $\mathbb{K}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 时, $\mathbb{X}$ 称为实线性空间; $\mathbb{K}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 时, $\mathbb{X}$ 称为复线性空间.

$\mathbb{X}$ 上的加法运算和数乘运算统称为线性运算.

线性空间中的加法与数乘是一种抽象符号,尽管记号上与通常意义下的加法与数乘相同,但必需记住它是两个映射, 并不是真正意义上的加法与数乘.

定义 1.1.2　设 $(\mathbb{X},\mathbb{K},+,\cdot)$ 是线性空间, $\mathbb{Y}\subset\mathbb{X}$ 是非空子集, 如果 $\mathbb{Y}$ 按照 $\mathbb{X}$ 上的线性运算也构成数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间,即有

$$x+y\in\mathbb{Y},\quad \alpha x\in\mathbb{Y},$$

则称 $\mathbb{Y}$ 是线性空间 $\mathbb{X}$ 的线性子空间,简称为 $\mathbb{X}$ 的子空间.

前面给出了一些具体的函数与数列空间(或者子空间), 问题是如何从线性空间的一个集合去 构造一个线性子空间.

定义 1.1.3　设 $\mathbb{X}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间, $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{X}$, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{K}$,

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k := \alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n \tag{1.1.1}$$

称为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性组合.

$M\subset\mathbb{X}$ 是非空子集, M 中的任意有限个元素的线性组合的全体

$$\mathrm{span}M := \left\{x=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k x_k \;\middle|\; \lambda_k\in\mathbb{K}, x_k\in M, m\in\mathbb{N}\right\} \tag{1.1.2}$$

称为由 M 生成(张成)的子空间,记为 $\mathrm{span}M$.

命题 1.1.1　$\mathrm{span}M$ 是 $\mathbb{X}$ 的包含 M 的最小子空间.

定义 1.1.4　设 M_1,M_2 是线性空间 $\mathbb{X}$ 的两个子空间

(1). 记

$$M_1+M_2=\left\{x_1+x_2 \;\middle|\; x_1\in M_1, x_2\in M_2\right\}, \tag{1.1.3}$$

M_1+M_2 称为 M_1 与 M_2 的和.

(2). 若对 $\forall x\in M_1+M_2$, 存在唯一的 $x_1\in M_1, x_2\in M_2$ 使得

$$x=x_1+x_2.$$

则称 M_1 与 M_2 的和为直和,记为 $M_1\oplus M_2$.

特别地,当 $\mathbb{X}=M_1\oplus M_2$ 时, M_1 与 M_2 互称为补子空间.

若 M_1, M_2 都是 $\mathbb{X}$ 的子空间时, M_1+M_2 也是 $\mathbb{X}$ 的子空间,且可证 $\mathbb{X}$ 的子空间 M_1 与 M_2 的和是直和充分必要条件是 $M_1\cap M_2=\{0\}$.

定义 1.1.5　设 $\mathbb{X}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{X}$,若

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n=\theta,\quad (\lambda_i\in\mathbb{K},\ i=1,2,\cdots,n) \tag{1.1.4}$$

仅当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$ 时才成立, 则称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是线性无关的;

一般地,设 M 是线性空间 $\mathbb{X}$ 的非空子集(不一定是有限集),若 M 的任何有限个元都是线性无关的, 则称集合 M 为线性无关的,若 M 不是线性无关的,则集合 M 称为线性相关的.

线性无关性与相关性说明了元之间的关系,利用线性无关性可以说明线性空间的生成个数问题

定义 1.1.6　设 $\mathbb{X}$ 是线性空间,若有一个正整数 n ,存在一组元 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{X}$ 它们是线性无关的, 任意 $n+1$ 个元都是线性相关的,则这组元 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 称为 $\mathbb{X}$ 的一个,称正整数 n 为 $\mathbb{X}$ 的维数,记为 $\dim \mathbb{X} = n$.

规定 $\dim\{\theta\} = 0$, 若 $\mathbb{X}$ 的维数为正整数 n 或 0 时,则 $\mathbb{X}$ 称为有限维的, 若 $\mathbb{X}$ 不是有限维的,则称 $\mathbb{X}$ 是无限维的,记为 $\dim \mathbb{X} = \infty$.

下面的定理给出了有限维空间的基本性质.

定理 1.1.1　设 $\mathbb{X}$ 是 n 维线性空间, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset \mathbb{X}$ 是 $\mathbb{X}$ 的一组基,则

1) 对任意的 $x \in \mathbb{X}$,存在唯一的一组数 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ 使得 $x = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k$;

2) $\mathbb{X}$ 的任何真子空间 $\mathbb{Y}$ 的维数都小于 n .

定义 1.1.7　设 $\mathbb{X}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, $B \subset \mathbb{X}$,若 B 是线性无关的, 若对任意的 $x \in \mathbb{X}$ 都存在 B 中的有限个元 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 使得

$$x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{K},$$

则称 B 是 $\mathbb{X}$ 的一个Hamel基,当 B 为有限集时,称 B 是有限基,否则称 B 为无限基.

§1.1.2 常用的一些序列空间与函数空间

1). 所有有界数列组成的集合 ℓ^∞ :

$$\ell^\infty = \{\{\xi_n\} \,\Big|\, \sup_{n\geq 1} |\xi_n| < \infty\}$$

2). 所有收敛数列组成的集合 c:

$$c = \{\{\xi_n\} \,\Big|\, \lim_{n\to\infty} \xi_n = x_\infty\}$$

3). 所有收敛于零的数列组成的集合 c_0 :

$$c_0 = \{\{\xi_n\} \,\Big|\, \lim_{n\to\infty} \xi_n = 0\}$$

4). 所有 $p\ (0 < p < \infty)$ 次可和数列组成的集合 ℓ^p :

$$\ell^p = \left\{ \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \,\Big|\, \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < +\infty \right\}.$$

5). 所有 $n \times m$ 矩阵组成的空间 $\mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$:

$$\mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{K}) = \{A = (a_{ij})_{n\times m} \,\Big|\, a_{ij} \in \mathbb{K}\}.$$

6). 闭区间 $[a,b]$ 上的所有多项式组成的空间 $P[a,b]$:

$$P[a,b]=\{p(x)\,\big|\,p(x)\text{在 } [a,b] \text{ 上是个多项式函数}\}.$$

7). 闭区间 $[a,b]$ 上的所有连续函数组成的空间 $C[a,b]$:

$$C[a,b]=\{f(x)\,\big|\,f(x)\text{是 } [a,b] \text{ 上的连续函数}\}.$$

8). 闭区间 $[a,b]$ 上的所有有界变差函数组成的空间 $BV[a,b]$:

$$BV[a,b]=\{f(x)\,\big|\,f(x)\text{是 } [a,b] \text{ 上的有界变差函数}\}.$$

9). 闭区间 $[a,b]$ 上的所有有界函数组成的空间 $M[a,b]$:

$$BM[a,b]=\{f(x)\,\big|\,f(x)\text{是 } [a,b] \text{ 上的有界函数}\}.$$

10). 闭区间 $[a,b]$ 上的所有 p 次幂 L 可积函数组成的空间 $L^p[a,b]$:

$$L^p[a,b]=\left\{f(x)\,\middle|\,f(x)\text{是 } [a,b] \text{ 上的可测函数,且 } \int_a^b |f(x)|^p dm<\infty\right\}.$$

11).闭区间 $[a,b]$ 上的所有本性有界可测函数组成的空间 $L^\infty[a,b]$:

$$L^\infty[a,b]=\left\{f(x)\,\middle|\,f(x)\text{在 } [a,b] \text{ 上可测,且存在零 测集E}, m(E)=0, \sup_{[a,b]\setminus E}|f(x)|<\infty\right\}.$$

12). 闭区间 $[a,b]$ 上的所有 n 次连续可函数组成的空间 $C^n[a,b]$:

$$C^n[a,b]=\left\{f(x)\,\middle|\,f^{(k)}(x)\text{在 } (a,b) \text{ 内存在, 在左右端点单边极限都存在 } k=1,2,\cdots,n\right\}.$$

§1.1.3 典型例题

线性空间是一个非空集合 $\mathbb{X}$, 一个数域 $\mathbb{K}$ 以及两个映射:加法映射“ + ” 和数乘映射“ · ”的综合体 $(\mathbb{X},\mathbb{K},+,\cdot)$。

1) 定义加法映射时应对所有的 $x,y\in\mathbb{X}$, $x+y$ 在 $\mathbb{X}$ 中都有意义;

2) 定义数乘映射时, 对所有的 $\alpha\in\mathbb{K}$, $x\in\mathbb{X}$, $\alpha\cdot x$ 在 $\mathbb{X}$ 中都有意义;

3) 线性相关与线性无关是线性空间中的重要概念, 特别是线性无关集以及基在实际中有重要应用;

4) 由集张成的子空间

例 1.1.1 设 $\mathbb{X}=(0,1)$ 为基本集, 数域为实数域 $\mathbb{R}$. 在 $\mathbb{X}$ 上定义加法运算 $\oplus$ 和数乘运算 $*$ 为

$$a\oplus b:=\frac{2}{\pi}\arctan(\tan\frac{a\pi}{2}\tan\frac{b\pi}{2}),\quad \forall a,b\in\mathbb{X}$$

$$k*a:=\frac{2}{\pi}\arctan(\tan\frac{a\pi}{2})^k,\quad k\in\mathbb{R}.$$

上面定义中的右端为通常数的运算。

验证: $\mathbb{X}$ 按照上述定义构成线性空间。

首先, 映射 $\oplus$ 对任何的 $a, b \in \mathbb{X}$, $a \oplus b \in \mathbb{X}$ 都有意义, $*$ 对任何的 $k \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{X}$, $k * a \in \mathbb{X}$.

加法运算 $\oplus$:

(1) $a \oplus b := \frac{2}{\pi}\arctan(\tan\frac{a\pi}{2}\tan\frac{b\pi}{2}) = b \oplus a$,

(2) $a \oplus b \oplus c := \frac{2}{\pi}\arctan(\tan\frac{a\pi}{2}\tan\frac{b\pi}{2}\tan\frac{c\pi}{2}) = a \oplus (b \oplus c)$.

(3) 零元 $\theta = \frac{1}{2}$: $a \oplus \theta := \frac{2}{\pi}\arctan(\tan\frac{a\pi}{2}\tan\frac{\pi}{4}) = a$,

(4) 负元存在 $(-a) = \arctan(\frac{1}{\tan\frac{a\pi}{2}})$:

$a \oplus (-a) := \frac{2}{\pi}\arctan(\tan\frac{a\pi}{2}\frac{1}{\tan\frac{a\pi}{2}}) = \frac{2}{\pi}\arctan 1 = \frac{1}{2} = \theta$,

所以 $\oplus$ 是加法映射.

数乘运算 $*$:

(1) $1 * a := \frac{2}{\pi}\arctan(\tan\frac{a\pi}{2})^1 = a$,

(2) $\alpha * (\beta * a) := \alpha * (\frac{2}{\pi}\arctan(\tan\frac{a\pi}{2})^\beta) = \frac{2}{\pi}\arctan(\tan\frac{a\pi}{2})^{\alpha\beta} = (\alpha\beta) * a$.

(3) 分配律: $\alpha*(a+b) = \frac{2}{\pi}\arctan(\tan\frac{a\pi}{2}\tan\frac{b\pi}{2})^\alpha = \frac{2}{\pi}\arctan(\tan\frac{a\pi}{2})^\alpha(\tan\frac{b\pi}{2})^\alpha = \alpha*a+\alpha*b$.

(4)分配律: $(\alpha+\beta) * a = \frac{2}{\pi}\arctan(\tan\frac{a\pi}{2})^{\alpha+\beta} = \frac{2}{\pi}\arctan(\tan\frac{a\pi}{2})^\alpha(\tan\frac{a\pi}{2})^\beta = \alpha * a + \beta * a$

所以 $*$ 是数乘映射. 因此, $(\mathbb{X}, \mathbb{R}, \oplus, *)$ 是线性空间.

例 1.1.2 设平面上不在同一直线上三点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$,构造一个函数

$$Z = ax + by + c$$

使得 Z 在 P_k 点值为 $h_k, k = 1, 2, 3$.

解 采用基函数方法构造问题的解。

1) 构造基函数 $e_j(x, y), j = 1, 2, 3$ 满足条件

$$e_i(P_j) = \delta_{ij}, \quad ,i, j = 1, 2, 3.$$

设 $\ell_1(x, y)$ 是 P_2 , P_3 两点所确定的直线, $\ell_2(x, y)$ 表示由 P_1 , P_3 两点所确定的直线, $\ell_3(x, y)$ 是 P_1 , P_2 两点所确定的直线。由于 P_1 , P_2 , P_3 不在同一直线上, $\ell_1(P_1) \neq 0$, $\ell_1(P_2) = \ell_1(P_3) = 0$, 所以可构造函数

$$e_1(x, y) = \frac{\ell_1(x, y)}{\ell_1(P_1)};$$

类似地, $\ell_2(P_2) \neq 0$, $\ell_2(P_1) = \ell_1(P_3) = 0$; 可构造函数

$$e_2(x, y) = \frac{\ell_2(x, y)}{\ell_2(P_2)};$$

以及 $\ell_3(P_3) \neq 0$, $\ell_3(P_2) = \ell_3(P_1) = 0$, 可构造函数

$$e_3(x, y) = \frac{\ell_3(x, y)}{\ell_3(P_3)}.$$

明显地, $e_j(x,y), j=1,2,3$ 是三个二元一次函数,线性无关,满足条件 $e_i(P_j)=\delta_{ij}$.

2) 构造满足条件的函数 $Z=Z(x,y)$ 。

函数 $Z=Z(x,y)$

$$Z=h_1e_1(x,y)+h_2e_2(x,y)+h_3e_3(x,y)$$

是一次函数,满足给定条件. □

§1.1.4 练习题一解答

1. 设 $M=\{(1,1,1),(0,0,2)\}$, 试说明 $\mathrm{span}M$ 的几何意义。

解　M 是由两个向量组成的集合。记 $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(0,0,2)$, 那么

$$\mathrm{span}M=\{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\mid\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=\{(\alpha,\alpha,\alpha+2\beta)\mid\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$$

就是由这两个向量确定的平面. 在三维直角坐标系中, 其几何意义是由直线 $x=y=z$ 与 z 轴所确定的平面。 □

2. 证明线性空间 $\mathbb{X}$ 的任意多个子空间的交仍然是 $\mathbb{X}$ 的子空间。 但是 $\mathbb{X}$ 的两个子空间的并不一定是 $\mathbb{X}$ 的子空间, 试举例说明.

证明　设 D 是一非空指标集, 对每个 $i\in D$, $\mathbb{X}_i$ 是 $\mathbb{X}$ 的子空间, 为证

$$\mathbb{X}_0=\bigcap_{i\in D}\mathbb{X}_i$$

也是 $\mathbb{X}$ 是子空间, 只而证明 $\mathbb{X}_0$ 关于 $\mathbb{X}$ 中的线性运算是封闭的.

对任意的 $x,y\in\mathbb{X}_0$, $\alpha\in\mathbb{K}$, 由于 $x,y\in\mathbb{X}_0=\bigcap\limits_{i\in D}\mathbb{X}_i$, 对每个 $i\in D$, $x,y\in\mathbb{X}_i$, 而 $\mathbb{X}_i$ 是 $\mathbb{X}$ 的线性子空间, 则有

$$x+y\in\mathbb{X}_i,\quad \alpha x\in\mathbb{X}_i,\quad \forall i\in D.$$

因此有

$$x+y\in\bigcap_{i\in D}\mathbb{X}_i=\mathbb{X}_0,\quad \alpha x\in\bigcap_{i\in D}\mathbb{X}_i=\mathbb{X}_0.$$

所以 $\mathbb{X}_0$ 也是 $\mathbb{X}$ 的子空间, 即任意多个子空间的交是 $\mathbb{X}$ 的子空间.

但是 $\mathbb{X}$ 的两个子空间的并不一定是 $\mathbb{X}$ 的子空间. 例如设 $\mathbb{X}=\mathbb{R}^3$, 设 $\mathbb{X}_1=\{x=\xi(1,0,0)\mid\xi\in\mathbb{R}\}$, $\mathbb{X}_2=\{y=\xi(0,1,0)\mid\xi\in\mathbb{R}\}$,明显地, 它们都是 $\mathbb{X}$ 的子空间. 但 $\mathbb{X}_1\cup\mathbb{X}_2$ 不是 $\mathbb{X}$ 的子空间, 这是因为 $(\xi_1,\xi_2,0)=\xi_1(1,0,0)+\xi_2(0,1,0)\notin\mathbb{X}_1\cup\mathbb{X}_2,\xi_1,\xi_2\neq 0$. □

3. 集合 ℓ^∞ 定义如下

$$\ell^\infty=\left\{\{x_n\}\,\middle|\,\sup_{n\geq 1}|x_n|<\infty\right\}.$$

在 ℓ^∞ 上定义加法运算和数乘运算为通常序列的加法与数乘, 验证 ℓ^∞ 是线性空间。

解 对任意的 $x=\{x_n\}, y=\{y_n\}\in\ell^\infty$, 由于 $|x_n+y_n|\le|x_n|+|y_n|\le\sup_n|x_n|+\sup_n|y_n|$, 所以

$$x+y=\{x_n+y_n\}\in\ell^\infty$$

对任意的数 $\alpha\in\mathbb{K}$,

$$\alpha\{x_n\}=\{\alpha x_n\}\in\ell^\infty$$

因此, 加法映射和数乘映射限制在子集 ℓ^∞ 是封闭的. 由于我们已经证明 $M(N)$ 加法映射与数乘映射的性质. 所以 $(\ell^\infty, K, +, \cdot)$ 是线性空间. □

4. 给定有限区间 $[a,b]$,设 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 是区间 $[a,b]$ 一组点,令

$$e_0(x)=\begin{cases}\frac{x_1-x}{x_1-x_0}, & x\in[x_0,x_1]\\ 0, & x\notin[x_0,x_1],\end{cases}\qquad e_n(x)=\begin{cases}\frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}, & x\in[x_{n-1},x_n]\\ 0, & x\notin[x_{n-1},x_n]\end{cases}$$

$$e_k(x)=\begin{cases}\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}, & x\in[x_{k-1},x_k]\\ \frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}, & x\in[x_k,x_{k+1}]\\ 0, & x\notin[x_{k-1},x_{k+1}]\end{cases}\qquad 1\le k\le n-1.$$

证明函数组 $\{e_0(x),e_1(x),e_2(x),\cdots,e_n(x)\}$ 是线性无关的,并画出 $f(x)\in\mathrm{span}\{e_j(x),1\le j\le n\}$ 的曲线.

解 设 $e_j(x)$ 如上定义, 设 $\alpha_j\in\mathbb{R}$ 满足

$$\alpha_0e_0(x)+\alpha_1e_1(x)+\cdots+\alpha_ne_n(x)=\theta(x)$$

由于 $\theta(x)$ 是零函数,所以上式对所有的 x 都成立。

取 $x=x_j$, 由上式得到 $\alpha_j=0$, $j=0,1,2,\cdots,n$. 所以函数组 $\{e_0(x),e_1(x),e_2(x),\cdots,e_n(x)\}$ 是线性无关的. $f\in\mathrm{span}\{e_0(x),e_1(x),e_2(x),\cdots,e_n(x)\}$,

$$f(x)=\alpha_0e_0(x)+\alpha_1e_1(x)+\cdots+\alpha_ne_n(x)$$

其曲线为联结点 $P_j(x_j,\alpha_j)$, $j=0,1,2,\cdots,n$ 的折线.

5. 设 $\mathbb{Y}$ 是线性空间 $\mathbb{X}$ 的子空间. 对每一个 $x\in\mathbb{X}$, 令

$$[x]=x+\mathbb{Y}=\{x+y\,\big|\,y\in\mathbb{Y}\}$$

它称为 x 的傍集(coset). 定义集合

$$\mathbb{X}/\mathbb{Y}=\{[x]\,\big|\,x\in\mathbb{X}\}.$$

在集合 $\mathbb{X}/\mathbb{Y}$ 上定义线性运算如下

$$[x_1]+[x_2]=[x_1+x_2]=(x_1+x_2)+\mathbb{Y}$$

$$a \cdot [x] = ax + \mathbb{Y}.$$

证明 $\mathbb{X}/\mathbb{Y}$ 按上述线性运算成为一个线性空间. 此空间称为 $\mathbb{X}$ 关于 $\mathbb{Y}$ 的商空间(quotient space).

证明 只需验证 $\mathbb{X}/\mathbb{Y}$ 按 上述定义的运算成为一个线性空间. 注意到 $\mathbb{Y}$ 是线性空间,总有 $\mathbb{Y}+\mathbb{Y}=\mathbb{Y}$. 首先验证加法的性质:

(1). 交换性.

$$(x_1+\mathbb{Y})+(x_2+\mathbb{Y})=(x_1+x_2)+\mathbb{Y}=(x_2+x_1)+\mathbb{Y}=(x_2+\mathbb{Y})+(x_1+\mathbb{Y}).$$

(2). 结合律:

$$\begin{aligned}
&((x_1+\mathbb{Y})+(x_2+\mathbb{Y}))+(x_3+\mathbb{Y})\\
=\ &((x_1+x_2)+\mathbb{Y})+(x_3+\mathbb{Y})=(x_1+x_2+x_3)+\mathbb{Y}\\
=\ &(x_1+\mathbb{Y})+((x_2+x_3)+\mathbb{Y})=(x_1+\mathbb{Y})+((x_2+\mathbb{Y})+(x_3+\mathbb{Y})).
\end{aligned}$$

(3). 零元存在. 零元为 $\mathbb{Y}$, 这是因为

$$(x_1+\mathbb{Y})+\mathbb{Y}=(x_1+\mathbb{Y})+(0+\mathbb{Y})=(x_1+\mathbb{Y}).$$

(4). 负元存在. 对于任意的 $x+\mathbb{Y}$, 加法逆元素为 $-x+\mathbb{Y}$, 这时 $(x+\mathbb{Y})+(-x+\mathbb{Y})=\mathbb{Y}$;

数乘法的性质:

(5). 结合律:

$$\alpha(\beta(x+\mathbb{Y}))=\alpha(\beta x+\mathbb{Y})=\alpha\beta x+\mathbb{Y}.$$

(6). 数1不变性:

$$1(x+\mathbb{Y})=1x+\mathbb{Y}=x+\mathbb{Y};$$

(7). 数乘对加法的分配律:

$$\begin{aligned}
&\alpha((x_1+\mathbb{Y})+(x_2+\mathbb{Y}))=\alpha((x_1+x_2)+\mathbb{Y})\\
=\ &\alpha(x_1+x_2)+\mathbb{Y}=(\alpha x_1+\alpha x_2)+\mathbb{Y}\\
=\ &\alpha(x_1+\mathbb{Y})+\alpha(x_2+\mathbb{Y}).
\end{aligned}$$

(8). 分配律:

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta)(x+\mathbb{Y}) &= (\alpha+\beta)x+\mathbb{Y}\\
&= (\alpha x+\beta x)+\mathbb{Y}=\alpha(x+\mathbb{Y})+\beta(x+\mathbb{Y}).
\end{aligned}$$

由上述验证可知 $\mathbb{X}/\mathbb{Y}$ 是一个线性空间. □

注记 1.1.1 注意在商空间表示时，有时也采用下面的方式 $\forall x \in \mathbb{X}$,用 $[x]$ 表示傍集 $[x] := x + \mathbb{Y}$,对任意的 $x, z \in \mathbb{X}$,

$$[x] = [z] \Leftrightarrow x - z \in \mathbb{Y}.$$

在这种记法之下商空间写成 $\mathbb{X}/\mathbb{Y} = \{[x] \,\big|\, \forall x \in \mathbb{X}\}$.

6. 设平面上四边形的四个顶点为 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$, $P_4(x_4, y_4)$, 构造一个二次函数

$$Z = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$$

使得 Z 在 P_k 点值为 $h_k, k = 1, 2, 3, 4.$

解 由于要求的函数是二次函数, 采用二次基函数方法构造问题的解。

1) 构造二次基函数 $e_j(x, y), j = 1, 2, 3$ 满足条件

$$e_i(P_j) = \delta_{ij}, \quad , i, j = 1, 2, 34.$$

设 $\ell_{23}(x, y)$ 是 P_2 , P_3 两点所确定的直线, $\ell_{14}(x, y)$ 表示由 P_1 , P_4 两点所确定的直线, $\ell_{12}(x, y)$ 是 P_1 , P_2 两点所确定的直线, 设 $\ell_{34}(x, y)$ 是 P_3 , P_4 两点所确定的直线,。

为获得两次函数,作直线的两两乘积

$$\ell_{23}(x, y)\ell_{34}(x, y), \quad \ell_{14}(x, y)\ell_{34}(x, y), \quad \ell_{12}(x, y)\ell_{14}(x, y), \quad \ell_{12}(x, y)\ell_{23}(x, y)$$

两次函数 $\ell_{23}(x, y)\ell_{34}(x, y)$ 含有 P_2 , P_3 , P_4 的信息,但不含 P_1 的信息,所以

$$\ell_{23}(P_2)\ell_{34}(P_2) = \ell_{23}(P_3)\ell_{34}(P_3) = \ell_{23}(P_4)\ell_{34}(P_4) = 0$$

但 $\ell_{23}(P_1)\ell_{34}(P_1) \neq 0$ 。

所以可构造函数

$$e_1(x, y) = \frac{\ell_{23}(x, y)\ell_{34}(x, y)}{\ell_{23}(P_1)\ell_{34}(P_1)};$$

类似地, $\ell_{14}(x, y)\ell_{34}(x, y)$ 含有 P_1 , P_3 , P_4 的信息,但不含 P_2 的信息, 可构造函数

$$e_2(x, y) = \frac{\ell_{14}(x, y)\ell_{34}(x, y)}{\ell_{14}(P_2)\ell_{34}(P_2)};$$

$\ell_{12}(x, y)\ell_{14}(x, y)$ 含有 P_1 , P_2 , P_4 的信息,但不含 P_3 的信息, 以及 $\ell_3(P_3) \neq 0$, $\ell_3(P_2) = \ell_3(P_1) = 0$, 设

$$e_3(x, y) = \frac{\ell_{12}(x, y)\ell_{14}(x, y)}{\ell_{12}(P_3)\ell_{14}(P_3)}.$$

$\ell_{12}(x, y)\ell_{23}(x, y)$ 含有 P_1 , P_2 , P_3 的信息,但不含 P_4 的信息, 设

$$e_4(x, y) = \frac{\ell_{12}(x, y)\ell_{23}(x, y)}{\ell_{12}(P_4)\ell_{23}(P_4)}.$$

明显地, $e_j(x,y), j=1,2,3,4$ 是四个二次函数, 线性无关, 满足条件 $e_i(P_j)=\delta_{ij}$.

2) 构造满足条件的函数 $Z=Z(x,y)$ 。

函数 $Z=Z(x,y)$

$$Z=h_1e_1(x,y)+h_2e_2(x,y)+h_3e_3(x,y)+h_4e_4(x,y)$$

是满足给定条件的二次函数.

7. 设 Σ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个无穷曲面. 假定存在一条直线 ℓ , 曲面 Σ 与 ℓ 平行的直线相交只有一点. 在 Σ 上定义线性运算(运算后依然在曲面 Σ 上)使之成为线性空间.

解 选择直线 ℓ 作为 z 轴,与 ℓ 垂直的平面作为 xy 平面。 依假定条件, 曲面 Σ 与 ℓ 平行的直线相交只有一点, 则曲面 Σ 可写成 $z=z(x,y)$,且曲面上的点 $(x,y,z(x,y))$ 与平面上的点 (x,y) 一一对应。 定义曲面上点的运算如下

加法映射 $\oplus$: $(x_1,y_1,z(x_1,y_1))\oplus(x_2,y_2,z(x_2,y_2)):=(x_1+x_2,y_1+y_2,z(x_1+x_2,y_1+y_2))$

数乘映射 $*$ ： $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha(x,y,z(x,y)):=(\alpha x,\alpha y,z(\alpha x,\alpha y))$.

直接验证可知映射 $\oplus$ 满足性质

(1) $(x_1,y_1,z(x_1,y_1))\oplus(x_2,y_2,z(x_2,y_2))=(x_2,y_2,z(x_2,y_2))\oplus(x_1,y_1,z(x_1,y_1))$;

(2)

$$\begin{aligned}&((x_1,y_1,z(x_1,y_1))\oplus(x_2,y_2,z(x_2,y_2)))\oplus(x_3,y_3,z(x_3,y_3))\\=\;&(x_1,y_1,z(x_1,y_1))\oplus((x_2,y_2,z(x_2,y_2))\oplus(x_3,y_3,z(x_3,y_3)))\end{aligned}$$

(3) $(0,0,z(0,0))$ 是零元, $(0,0,z(0,0))\oplus(x,y,z(x,y))=(x,y,z(x,y))$;

(4) $(-x,-y,z(-x,-y))$ 是 $(x,y,z(x,y))$ 的负元.

数乘映射 $*$ 满足性质

(5) $1*(x,y,z(x,y))=(x,y,z(x,y))$

(6) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha*(\beta*(x,y,z(x,y)))=(\alpha\beta)*(x,y,z(x,y))$;

(7) $\alpha*((x_1,y_1,z(x_1,y_1))\oplus(x_2,y_2,z(x_2,y_2))=\alpha*(x_1,y_1,z(x_1,y_1))\oplus\alpha*(x_2,y_2,z(x_2,y_2))$;

(8) $(\alpha+\beta)*(x,y,z(x,y))=\alpha*(x,y,z(x,y))\oplus\beta*(x,y,z(x,y))=(x,y,z(x,y))$.

因此, $(\Sigma,R,\oplus,*)$ 是一线性空间

注记 1.1.2　这里构造运算的主要依据是 $\Psi:\Sigma\to\mathbb{R}^2$, $\Psi(x,y,z)=(x,y)$ 是一一对应。由此建立起 Σ 与 $\mathbb{R}^2$ 的双射, 通过已知空间$\mathbb{R}^2$上的线性运算, 导出 Σ 上的运算.

§1.2 第二讲　线性算子与线性同构

教学目的:
本节研究一类特殊类型的映射–线性算子, 线性同构映射.
本节要点:
线性算子的特性,线性同构观念的应用

§1.2.1 内容提要

定义 1.2.1　设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的两个线性空间, 若映射 $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ 满足条件: $\forall x,y\in\mathbb{X},\alpha\in\mathbb{K}$,有

$$\begin{aligned} T(x+y) &= Tx+Ty, \\ T(\alpha x) &= \alpha Tx, \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

则称 T 是由 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{Y}$ 的线性算子.当 $\mathbb{Y}=\mathbb{X}$ 时, T 称为线性变换, 当 $\mathbb{Y}=\mathbb{K}$ 时, T 称为线性泛函.

通常用 $\mathcal{R}(T)$ 表示算子 T 的象集, 即 $\mathcal{R}(T)=\{y\in\mathbb{Y}\,\big|\,y=Tx,\forall x\in\mathbb{X}\}$. $\mathcal{R}(T)$ 称为算子 T 的值域.

显然, 映射 $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ 是线性算子, 当且仅当

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty,\quad \forall x,y\in\mathbb{X},\quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}. \tag{1.2.2}$$

线性算子的特点在于它保持空间 $\mathbb{X}$ 中的运算到 $\mathbb{Y}$ 中.

定义 1.2.2　设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ 是线性算子, 记

$$\mathcal{N}(T)=\left\{x\in\mathbb{X}\,\middle|\,Tx=0\right\} \tag{1.2.3}$$

$\mathcal{N}(T)$ 称为算子 T 的零空间(或算子 T 的核).

直接验证可知, 线性算子 T 的零空间 $\mathcal{N}(T)$ 是 $\mathbb{X}$ 的线性子空间. 算子 T 的值域 $\mathcal{R}(T)$ 是空间 $\mathbb{Y}$ 的线性子空间.

引理 1.2.1　设 $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$. 若有映射 $S:\mathbb{Y}\to\mathbb{X}$ 满足

$$ST=I_{\mathbb{X}},\quad TS=I_{\mathbb{Y}},$$

则 $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ 是双射, 且 $T^{-1}=S$.

容易验证关于逆映射的如下运算性质成立。

引理 1.2.2　在下面的符号有意义的情况下

(1). $(T^{-1})^{-1}=T$;

(2). $(T_2T_1)^{-1}=T_1^{-1}T_2^{-1}$.

对于线性空间的线性算子 T , 由于它具有特殊的性质, 它的逆算子存在的判定仅决定于算子零空间 $\mathcal{N}(T)$. 这一结论包含在下面的引理中.

引理 1.2.3　设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是在同一数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ 是线性算子, 则

(1). $T^{-1}:\mathcal{R}(T)\to\mathbb{X}$ 存在,当且仅当若 $Tx=0$ 则 $x=0$;

(2). 若 T^{-1} 存在,则 T^{-1} 是线性的.

作为上面结果的直接应用, 有下面的结论.

命题 1.2.1　设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是在同一数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ 是线性算子, 则 $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ 是双射的充要条件是 $\mathcal{N}(T)=\{\theta\}$, $\mathcal{R}(T)=\mathbb{Y}$.

定义 1.2.3　设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的两个线性空间, $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ 是一个映射.

(1). 若 T 是双射,又是线性算子,则 T 称为是 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{Y}$ 的线性同构映射;

(2). 若存在一个 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{Y}$ 的线性同构映射, 则 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 称为是线性同构的.

定理 1.2.1　在同一数域上两个有限维线性空间是线性同构的, 当且仅当它们有相同的维数.

§1.2.2 典型例题

线性算子是线性空间中一类特殊的映射, 其重要特征是将空间 $\mathbb{X}$ 中的线性运算保持到 $\mathbb{Y}$ 中。线性算子的零空间与值域在线性方程可解性理论中起重要作用。

线性同构是空间 $\mathbb{X}$ 与 $\mathbb{Y}$ 之间的一一对应, 并保持线性运算.

例 1.2.1　已知平面上的点 $(x_0,0),(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots(x_n,y_n),(x_{n+1},0)$, 证明, 如果相邻两点用直线段连结, 则连结这些点的折线可表示成

$$y=\sum_{k=1}^{n}y_ke_k(x)$$

其中

$$e_k(x)=\begin{cases}\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}, & x\in[x_{k-1},x_k]\\ \frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}, & x\in[x_k,x_{k+1}]\\ 0, & x\notin[x_{k-1},x_{k+1}]\end{cases}$$

证明　对任意两点 $(x_k,y_k),(x_{k+1},y_{k+1})$, 它们间的连结折线方程为

$$y=y_k+\frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k}(x-x_k).$$

将其变形为

$$y=y_k\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}+y_{k+1}\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}=y_ke_k(x)+y_{k+1}e_{k+1}(x).$$

因此有

$$y=\sum_{k=1}^{n}y_ke_k(x),\quad \forall x\in[x_0,x_{n+1}].$$

在上面意义下, 折线 y 与数组 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 构成一一对应. 从而映射

$$\Phi(y) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

将成为 $\mathbb{R}^n$ 与折线族的线性同构映射. □

§1.2.3 练习题二解答

1. 设 $C[a,b]$ 是实线性空间. 定义 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的映射

$$T(f)(x) = \int_0^x f^2(t)dt, \quad f \in C[a,b]$$

T 不是是线性算子.

解 对任意的 $f \in C[a,b]$, 积分 $\int_a^x f^2(f)dt$ 作为变上限的函数是连续函数, 所以 $T(f) \in C[a,b]$.

对任意的 $f, g \in C[a.b]$,

$$T(f+g) = \int_a^x (f(t)+g(t))^2 dt = \int_a^x f^2(t)dt + \int_a^x g^2(t)dt + 2\int_a^x f(t)g(t)dt \neq Tf(x) + T(g)(x)$$

所以 T 不是线性算子. □

2. 设 $C[a,b]$ 是实线性空间. $t_0 \in [a,b]$ 是固定的一点, 定义 $C[a,b]$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射

$$\delta(f) = f(t_0), \quad f \in C[a,b]$$

δ 是线性算子(泛函).

解 对任意的 $f \in C[a,b]$, $\delta(f) = f(t_0)$ 有意义, 所以 $\delta(f)$ 是 $C[a,b]$ 上定义的泛函。

对任意的 $f, g \in C[a.b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$\delta(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(t_0)) = \alpha f(t_0) + \beta g(t_0) = \alpha\delta(f) + \beta\delta(g)$$

所以 δ 是线性泛函. □

3. 设 $C[a,b]$ 是实线性空间. 定义 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的线性算子

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad f \in C[a,b]$$

确定算子 T 的零空间和值域.

解 对任意的 $f \in C[a,b]$, $T(f) = \int_a^x f(t)dt \in C[a,b]$. 对任意的 $f, g \in C[a.b]$,

$$T(\alpha f + \beta g)(x) = \int_a^x (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha\int_a^x f(t)dt + \beta\int_a^x g(t)dt = \alpha Tf(x) + \beta T(g)(x)$$

所以 T 是线性算子. 其零空间为

$$\mathcal{N}(T)=\{f\in C[a,b]\,\big|\,T(f)=0\}=\{0\}$$

其值域为

$$\mathcal{R}(T)=\{y=\int_a^x f(t)dt\,\big|\,y(a)=0,y\text{ 连续可微}\}$$

□

4. 设 $\mathbb{X}$ 是线性空间, f_j 是 $\mathbb{X}$ 上的非零线性泛函, $j=1,2,\cdots,m$. 记

$$\mathcal{N}(f_j)=\{x\in\mathbb{X}\,\big|\,f_j(x)=0\}$$

证明 $\mathcal{N}(f_j)$ 是 $\mathbb{X}$ 的子空间. 进一步证明 $\bigcap_{j=1}^m\mathcal{N}(f_j)$ 也是 $\mathbb{X}$ 的子空间.

解 由于 f_j 是 $\mathbb{X}$ 上的非零线性泛函, $j=1,2,\cdots,m$, 则存在 $x_j\in\mathbb{X}$ 使得 $f_j(x_j)=1$.

1) $\mathcal{N}(f_j)$ 是 $\mathbb{X}$ 的线性子空间;

事实上, 若 $x,y\in\mathcal{N}(f_j)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, 由泛函 f_j 的线性性有

$$f_j(\alpha x+\beta y)=\alpha f_j(x)+\beta f_j(y)=0,$$

所以 $\alpha x+\beta y\in\mathcal{N}(f_j)$, 即 $\mathcal{N}(f_j)$ 是 $\mathbb{X}$ 的线性子空间。

2) $\bigcap_{j=1}^m\mathcal{N}(f_j)$ 也是 $\mathbb{X}$ 的子空间.

对任意的 $x,y\in\bigcap_{j=1}^m\mathcal{N}(f_j)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, 则对所有的 j , $f_j(x)=f_j(y)=0$ 。

对任意的 f_j ,由线性性有

$$f_j(\alpha x+\beta y)=\alpha f_j(x)+\beta f_j(y)=0,$$

所以 $\alpha x+\beta y\in\bigcap_{j=1}^m\mathcal{N}(f_j)$, 即 $\mathcal{N}(f_j)$ 是 $\mathbb{X}$ 的线性子空间。

5. 设 T 是线性空间 $\mathbb{X}$ 到线性空间 $\mathbb{Y}$ 的线性算子, 证明

(1). T 的值域 $\mathcal{R}(T)$ 是 $\mathbb{Y}$ 的线性子空间;

(2). 若 $\dim\mathbb{X}=n$, 则 $\dim\mathcal{R}(T)\le n$.

证明 对于任意 $y_1,y_2\in\mathcal{R}(T)$, 总是存在 $x_1,x_2\in\mathbb{X}$ 使得 $Tx_1=y_1$, $Tx_2=y_2$. 从而利用 T 是线性算子有 $T(x_1+x_2)=Tx_1+Tx_2\in\mathcal{R}(T)$ 及 $T(\alpha x_1)=\alpha T(x_1)$, 所以由子空间定义可得 $\mathcal{R}(T)$ 是 $\mathbb{Y}$ 的一个线性子空间.

下面证明当 $\dim\mathbb{X}=n$ 时有 $\dim\mathcal{R}(T)\le n$. 取 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subset\mathbb{X}$ 是一个线性无关组，则对任何的 $x\in\mathbb{X}$, 存在 $\alpha_k\in\mathbb{K},k=1,2,\cdots,n$ 使得 $x=\sum\limits_{k=1}^n\alpha_kx_k$. 由于 T 是线性算子, 则有 $Tx=T(\sum\limits_{k=1}^n\alpha_kx_k)=\sum\limits_{k=1}^n\alpha_kT(x_k)$, 因此

$$\mathcal{R}(T)\subset\operatorname{span}\{Tx_1,Tx_2,\cdots,Tx_n\}.$$

由于 $\operatorname{span}\{Tx_1,Tx_2,\cdots,Tx_n\}\le n.$ 故 $\dim\mathcal{R}(T)\le n$. □

第二章　赋范线性空间和Banach空间

§2.1 第三讲　赋范线性空间与Banach空间

教学目的: 本节将向量的模的概念推广到一般线性空间,使线性空间上具有度量性质。进一步引入收敛的概念,讨论点列的收敛性以及空间的完备性 本节要点: 赋范线性空间, 收敛点列, Cauchy点列, Banach空间.

§2.1.1 内容提要

定义 2.1.1　设 $\mathbb{X}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间. 在 $\mathbb{X}$ 上定义实值泛函 $\varphi : \mathbb{X} \to [0, +\infty)$, 对每一个 $x \in \mathbb{X}$ 其对应的值 $\varphi(x)$ 记为 $\|x\|$. 若 φ 满足下列性质: 对任意的 $x, y \in \mathbb{X}, \alpha \in \mathbb{K}$,

(1) 正定性: $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = \theta$;

(2) 绝对齐性: $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

(3) 三角不等式: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

则称 $\|x\|$ 为 x 的范数(norm), $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ 称为赋范线性空间(normed linear space)或者简称为赋范空间(normed space). 条件(1)–(3)称为范数公理.

赋范线性空间是一个线性空间与一个范数的统称,一般提到赋范线性空间时应当指明线性空间上范数的定义形式. 对于某些具体的空间,可能有约定的范数,在不至于混淆的情况下,简记 $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ 为 $\mathbb{X}$.

引理 2.1.1　对任意 $f \in L^p[a, b]$, $g \in L^q[a, b]$,这里 $p > 1, q > 1$,且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,则下面的Hölder不等式

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.1.1}$$

成立。由此可知 $fg \in L^1[a, b]$,即 $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

引理 2.1.2　对任意 $f, g \in L^p[a, b] (p \geq 1)$,则有Minkowski不等式

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.1.2}$$

成立。即有 $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

定理 2.1.1　$\|\cdot\|_p$ 是 $L^p[a,b]$ 上的范数, 从而 $\left(L^p[a,b], \|\cdot\|_p\right)$ 是赋范线性空间.

定义 2.1.2　设 $\{x_n\}$ 是赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 中的序列,若存在 $x \in \mathbb{X}$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$,则称序列 $\{x_n\}$ 是收敛的, x 称为 $\{x_n\}$ 的极限,记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, 或者简记为 $x_n \to x$. 若对序列 $\{x_n\}$,不存在这样的 $x \in \mathbb{X}$,则称 $\{x_n\}$ 不收敛.

在赋范线性空间上,定义了序列的收敛概念,同时也定义了不收敛. 不收敛意味着不存在元 $x \in \mathbb{X}$,使得 $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. 这里的不收敛还不同于数学分析中的发散, 比如在空间 $P[0,1]$ 中,函数列

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

有 $p_n \in P[0,1]$,我们知道指数函数有级数展开式 $e^t = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$. 尽管有

$$\lim_{n\to\infty} \|p_n - e^t\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \max_{t\in[0,1]} |p_n(t) - e^t| = 0.$$

但由于 $e^t \notin P[0,1]$, 所以也称 $\{p_n\}$ 在 $P[0,1]$ 中不收敛.

命题 2.1.1　设 $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间,则

(1) 若 $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{X}$ 中收敛的序列,则它是有界点列,即 $\{\|x_n\|\}$ 是有界数列;

(2) 若 $\{x_n\}$ 在 $\mathbb{X}$ 中收敛,则其极限唯一.

定义 2.1.3　设 $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}}), (\mathbb{Y}, \|\cdot\|_{\mathbb{Y}})$ 是两个赋范线性空间, $f: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是一映射.

(1) 设 $x_0 \in \mathbb{X}$. 若对任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得 $\mathbb{X}$ 中所有满足 $\|x - x_0\|_{\mathbb{X}} < \delta$ 的 x 有

$$\|f(x) - f(x_0)\|_{\mathbb{Y}} < \varepsilon$$

则称 f 在点 x_0 连续.

(2) 若 f 在 $\mathbb{X}$ 中的每一点连续,则称 f 在 $\mathbb{X}$ 上连续.

命题 2.1.2　设 $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间. 若在 $\mathbb{X}$ 中 $x_n \to x, y_n \to y$, 则 $\|x_n - y_n\| \to \|x - y\|$. 特别地,若 $x_n \to x$,则 $\|x_n - y\| \to \|x - y\|$.

命题 2.1.3　设 $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间,则 $\mathbb{X}$ 上的线性运算是连续的.

定义 2.1.4　设 $\{x_n\}$ 是 $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ 中的序列. 若对任给的 $\varepsilon > 0$, 都存在正整数 N , 使得对一切 $m, n > N$ 都有

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon, \quad \forall n, m > N,$$

则称 $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{X}$ 中的Cauchy序列,或称基本序列.

基本序列具有下面的性质.

命题 2.1.4　设 $\{x_n\}$ 是 $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ 中的序列, 则下面的结论成立:

(1) 若 $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{X}$ 中的收敛序列,则 $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{X}$ 中的Cauchy序列;

(2) 若 $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{X}$ 中的Cauchy序列,则 $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{X}$ 中的有界序列;

(3) 若 $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{X}$ 中的Cauchy序列,且存在 $\{x_n\}$ 的一个子列收敛, 则 $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{X}$ 中的收敛序列.

定义 2.1.5 设 $\mathbb{X}$ 为赋范线性空间,如果 $\mathbb{X}$ 中的任意Cauchy序列都收敛,则称 $\mathbb{X}$ 是完备的赋范线性空间, 简称 $\mathbb{X}$ 为Banach空间.

定义 2.1.6 设 $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间,若 $\mathbb{Y}$ 是 $\mathbb{X}$ 的线性子空间, 若 $\mathbb{Y}$ 按照 $\mathbb{X}$ 中的范数 $\|\cdot\|$ 成为赋范线性空间 $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|)$, 则称 $\mathbb{Y}$ 为赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 的子空间.

若 $\mathbb{Y}$ 为赋范空间 $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ 子空间,且 $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|)$ 为Banach空间, 则称 $\mathbb{Y}$ 是 $\mathbb{X}$ 的一个完备子空间.

这里需要强调线性空间的子空间与赋范线性空间子空间的区别. 赋范线性空间的子空间,必须是依空间 $\mathbb{X}$ 的范数而不是其它范数.

对于Banach空间 $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ 是 $\mathbb{X}$ 的子空间是指 $\mathbb{Y}$ 作为赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 的子空间. 因此,Banach空间的子空间不必是完备的.而一个不完备的赋范线性空间可以存在完备的子空间.

§2.1.2 常用的一些赋范线性空间

例 2.1.1 数域 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 都是Banach空间

例 2.1.2 空间 $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$. 对 $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$,通常范数定义如下

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p \le \infty,$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |\xi_k|, \quad p = \infty,$$

则 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ 是Banach空间.

例 2.1.3 空间 $\ell^p(1 \le p < \infty)$. 对 $x = \{\xi_k\} \in \ell^p$, 范数定义如下

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

则 $(\ell^p, \|\cdot\|_p)(1 \le p < \infty)$ 是Banach空间.

例 2.1.4 ℓ^∞ 是所有有界(实或复)数列构成的线性空间, 对 $x = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$,定义如下范数

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|.$$

则 $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 是Banach空间.

例 2.1.5 $C[a,b]$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的所有连续函数构成的线性空间. 对 $x \in C[a,b]$, 定义如下范数:

$$\|x\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

则 $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ 是Banach空间.

例 2.1.6 在Lebesque测度 (m) 意义下, p 次幂可积函数空间,

$$L^p[a,b] = \left\{ f(x) \;\middle|\; \int_a^b |f(x)|^p dm < \infty \right\}, \quad (1 \le p < \infty)$$

在通常函数的加法与数乘意义下成为线性空间. 在 $L^p[a,b]$ 中规定:若 $f(x) \doteq g(x), (a.e.)$ (几乎处处相等), 则规定它们相等. 并定义泛函

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dm \right)^{1/p}$$

则 $\|f\|_p$ 是 $L^p[a,b]$ 上的一个范数. 从而 $(L^p[a,b], \|\cdot\|_p)$ 是Banach空间.

例 2.1.7 $L^\infty[a,b]$ 是闭区间 $[a,b]$ 上所有本性有界可测函数构成集合, 按照函数的加法与数乘成为线性空间. 在 $L^\infty[a,b]$ 中规定:几乎处处相等为相等. 对 $x \in L^\infty[a,b]$, 定义如下范数:

$$\|x\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} |x(t)| = \inf_{E\subset[a,b], m(E)=0} \sup_{t\in[a,b]\setminus E} |x(t)|.$$

则 $(L^\infty[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ 是Banach空间.

例 2.1.8 闭区间 $[a,b]$ 上有界变差函数组成的空间 $BV[a,b]$:

$$BV[a,b] = \left\{ f(x) \;\middle|\; \bigvee_a^b (f) < \infty \right\},$$

在通常函数的加法与数乘意义下成为线性空间. 在 $BV[a,b]$ 上定义泛函

$$\|f\| = |f(a)| + \bigvee_a^b (f)$$

则 $\|f\|$ 是 $BV[a,b]$ 上的一个范数. $(BV[a,b], \|\cdot\|)$ 是Banach空间.

不完备空间的例子

例 2.1.9 $P[a,b]$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的所有多项式构成的线性空间. 对 $x \in P[a,b]$, 定义如下范数:

$$\|x\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

则 $(P[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ 是赋范线性空间,但不完备.

例 2.1.10 $C[a,b]$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的所有连续函数构成的线性空间. 对 $x \in C[a,b]$, 定义如下泛函

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)| dt.$$

则 $(C[a,b], \|\cdot\|_1)$ 也是赋范线性空间,但不完备.

§2.1.3 典型例题

赋范线性空间是线性空间与满足范数公理的泛函的综合体, 不同的范数代表不同的度量意义。 赋范线性空间的收敛性都是在特定范数意义下进行的。同理空间的完备性也是在指定范数意义下的。

证明空间完备通常有三步: (1)对任给的基本点列,找出形式极限; (2)证明形式极限在设定的空间中; (3)证明在指定范数意义下基本点列收敛于形式 极限。

证明空间不完备也有三步: (1)找到一个基本点列; (2) 其形式极限不在设定的空间中; (3)证明在指定范数意义下基本点列收敛于形式极限。

在具体的函数空间中,不同的范数代表不同的度量意义, 所以依不同的范数收敛也具有不同的意义.

例 2.1.11 $(C[a,b],\|\cdot\|_\infty)$ 中的收敛性等价于函数列的一致收敛.

例 2.1.12 $(L^p[a,b],\|\cdot\|_p)$ 中的收敛性可推出可测函数列的依测度收敛.

例 2.1.13 设线性空间 $C[a,b]$. $x\in C[a,b]$,定义如下范数:

$$\|x\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$$

则 $(C[a,b],\|\cdot\|_\infty)$ 是Banach空间.

证明 要证 $\mathbb{X}=C[a,b]$ 是Banach空间,类似于前面, 设 $\{x_n\}\subset\mathbb{X}$ 是一Cauchy列,需要找出它的极限.

证明分成三步:第一步找出 $\{x_n\}$ 的极限 x ; 第二步证明 $x\in C[a,b]$; 第三步证明 $\{x_n\}$ 收敛于 x .

1).设 $\{x_n\}\subset C[a,b]$ 是任一Cauchy列,即任给 $\varepsilon>0$, 存在 N 使得当 $n,m>N$ 时,

$$\|x_n - x_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

对每个 $t\in[a,b]$,

$$|x_n(t)-x_m(t)| \le \max_{t\in[a,b]} |x_n(t)-x_m(t)| = \|x_n-x_m\|_\infty \to 0, \quad (n,m\to\infty).$$

这表明对每个 $t\in[a,b]$,数列 $\{x_n(t)\}_{n=1}^\infty$ 都是Cauchy列, 则存在一个数 $x(t)$ 使得 $x_n(t)\to x(t)$.数 $x(t)$ 依赖 $t\in[a,b]$,从而定义 $[a,b]$ 上的一个函数.

2). 证明 $x(t)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

对任意的 $t\in[a,b]$, $n,m>N$ 总有

$$|x_n(t)-x_m(t)| \le \|x_n-x_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3},$$

在上式中令 $m\to\infty$ 得到

$$|x_n(t)-x(t)| \le \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall t\in[a,b], \quad n>N.$$

所以

$$\max_{t\in[a,b]}|x_n(t)-x(t)|\le\frac{\varepsilon}{3},\quad n>N.$$

对 $t,s\in[a,b]$,由于

$$\begin{aligned}|x(t)-x(s)| &\le |x_n(t)-x(t)|+|x_n(t)-x_n(s)|+|x_n(s)-x(s)|\\ &\le \max_{t\in[a,b]}|x_n(t)-x(t)|+|x_n(t)-x_n(s)|+\max_{s\in[a,b]}|x_n(s)-x(s)|\\ &\le \frac{2}{3}\varepsilon+|x_n(t)-x_n(s)|,\quad n>N.\end{aligned}$$

固定 $n>N$, 令 $t\to s$ 得到

$$\limsup_{t\to s}|x(t)-x(s)|\le\frac{2}{3}\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性,有 $\lim\limits_{t\to s}|x(t)-x(s)|=0$. 所以 $x\in C[a,b]$.

3). 表明 $x_n\to x$.

事实上对 $n>N$, 已经得到

$$\|x_n-x\|_\infty=\max_{t\in[a,b]}|x_n(t)-x(t)|\le\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon,\quad n>N$$

所以 $x_n\to x$.因此 $C[a,b]$ 是Banach空间. □

例 2.1.14 $(L^p[a,b],\|\cdot\|_p)$ 是Banach空间.

证明 设 $\{f_n\}$ 是 $L^p[a,b]$ 中的基本列, 由定义知存在 $n_k\in\mathbb{N}$ 使得当 $m,n>n_k$ 时,成立 $\|f_n-f_m\|_p<\frac{1}{2^k}$. 设 $n_1<n_2<\cdots<n_k<n_{k+1}<\cdots$ 为无穷列, 于是有 $\|f_{n_k}-f_{n_{k+1}}\|_p<\frac{1}{2^k}$, 从而成立

$$\sum_{k=1}^\infty\|f_{n_k}-f_{n_{k+1}}\|_p<\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{2^k}<\infty.$$

当 $p=1$ 时, 上式为

$$\sum_{k=1}^\infty\int_a^b|f_{n_k}(x)-f_{n_{k+1}}(x)|dx<\infty.$$

当 $p>1$ 时,由于

$$\int_a^b|f_{n_k}(x)-f_{n_{k+1}}(x)|dx\le\|f_{n_k}-f_{N_{k+1}}\|_p(b-a)^{1/q},$$

所以当 $p>1$ 也有

$$\sum_{k=1}^\infty\int_a^b|f_{n_k}(x)-f_{n_{k+1}}(x)|dx<\infty.$$

依实变函数的Levi定理可知, $\sum\limits_{k=1}^\infty|f_{n_k}(x)-f_{n_{k+1}}(x)|$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处收敛. 从而级数

$$f_{n_1}(x)+\sum_{k=1}^\infty[f_{n_k}(x)-f_{n_{k+1}}(x)]$$

在区间 $[a,b]$ 上几乎处处收敛, 即极限 $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ 几乎处处存在. 依可测函数的性质, $f(x)$ 是可测函数.

依基本列的性质,对充分大的 n 及 n_k 有,

$$\|f_n - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2}.$$

而 函数列 $\{|f_n(x) - f(x_{n_k}(x)|^p\}_{k=1}^{\infty}$ 非负可测, 应用Fatou引理有,

$$\int_a^b \lim_{k\to\infty} |f_n(x) - f_{n_k}(x)|^p dx \le \lim_{k\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f_{n_k}|^p dx \le \limsup_{k\to\infty} \|f_n - f_{n_k}\|_p^p \le \frac{1}{2^p}.$$

即

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p d \le \frac{1}{2^p}.$$

因此, $f_n - f \in L^p[a,b]$,从而 $f = f_n - (f_n - f) \in L^p[a,b]$.即 $L^p[a,b]$ 是完备空间. □

例 2.1.15 闭区间 $[a,b]$ 上有界变差函数组成的空间 $BV[a,b]$:

$$BV[a,b] = \left\{ f(x) \;\Big|\; \bigvee_a^b (f) < \infty \right\},$$

在通常函数的加法与数乘意义下成为线性空间. 在 $BV[a,b]$ 上定义泛函

$$\|f\| = |f(a)| + \bigvee_a^b (f)$$

则 $\|f\|$ 是 $BV[a,b]$ 上的一个范数. $(BV[a,b], \|\cdot\|)$ 是Banach空间.

证明 设 $\{f_n\}$ 是 $BV[a,b]$ 中的基本列, 由基本列的定义知,任给的 $\varepsilon > 0$ 存在 N 使得当 $m, n > N$ 时,成立

$$\|f_n - f_m\| = |f_n(a) - f_m(a)| + \bigvee_a^b (f_n - f_m) < \varepsilon.$$

对任意的 $x \in [a,b]$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(a)| + |f_n(a) - f_m(a)| < \|f_n - f_m\| < \varepsilon,$$

所以 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是Cauchy数列, 从而存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

下证 $f \in BV[a,b]$. 设 $\triangle$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = b$ 是区间 $[a,b]$ 的任一分割,由于

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k} |(f - f_m)(x_j) - (f - f_m)(x_{j-1})| \\
\le\ & \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k} |(f_n - f_m)(x_j) - (f_n - f_m)(x_{j-1})| \\
\le\ & \limsup_{n\to\infty} \left[|(f_n - f_m)(a)| + \bigvee_a^b (f_n - f_m) \right] \le \varepsilon,
\end{aligned}$$

于是有

$$\sup_{\Delta} \sum_{j=1}^{k} |(f - f_m)(x_j) - (f - f_m)(x_{j-1})| \le \varepsilon.$$

从而成立

$$\bigvee_a^b (f - f_m) < \infty.$$

故有 $f_m - f \in BV[a,b]$, 从而 $f = f_m - (f_m - f) \in BV[a,b]$.即 $BV[a,b]$ 是Banach空间. □

例 2.1.16　线性空间 $C[a,b]$. 对 $x \in C[a,b]$, 定义如下范数:

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|dt$$

则 $(C[a,b], \|\cdot\|_1)$ 不是Banach空间.

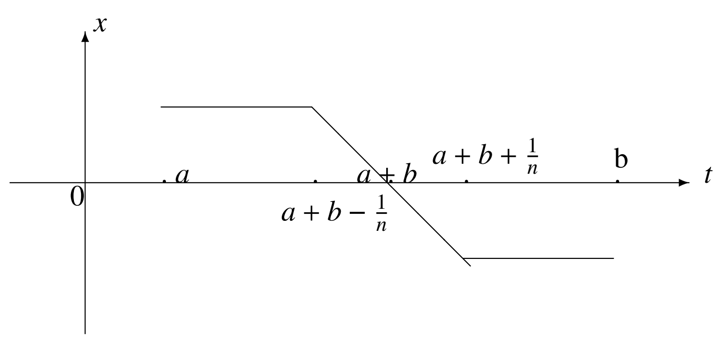
证明　要证 $\mathbb{X} = (C[a,b], \|\cdot\|_1)$ 不是Banach空间, 需要找出一个序列 $\{x_n\} \subset \mathbb{X}$, 它是一Cauchy列,但它在 $C[a,b]$ 无极限.

1).构造序列 $\{x_n\} \subset C[a,b]$ 是一Cauchy列.

设

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[a, \frac{a+b}{2} - \frac{1}{n}\right] \\ \frac{n}{2}[(a+b) - 2t], & t \in \left[\frac{a+b}{2} - \frac{1}{n}, \frac{a+b}{2} + \frac{1}{n}\right] \\ -1, & t \in \left[\frac{a+b}{2} + \frac{1}{n}, b\right] \end{cases}$$

函数 $x_n(t)$ 如图



明显地 $x_n \in C[a,b]$, 且 $\max\limits_{t\in[a,b]} |x_n(t)| = 1$,

$$\|x_n - x_m\|_1 = \int_a^b |x_n(t) - x_m(t)|dt = \int_{\frac{a+b}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{a+b}{2}+\frac{1}{n}} |x_n(t) - x_m(t)|dt \le \frac{2}{n}, \quad m > n.$$

即 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是Cauchy数列.

2). 存在函数 $x(t)$,在范数意义下 $x_n \to x$.

根据序列 $\{x_n\}$ 的构造方式,可令

$$x(t)=\begin{cases}1, & t\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right)\\ 0, & t=\frac{a+b}{2}\\ -1, & t\in\left(\frac{a+b}{2},b\right]\end{cases}$$

下面证明 $x_n\to x$. 注意到

$$\begin{aligned}\|x_n-x\|_1 &= \int_a^b|x_n(t)-x(t)|dt=\int_{\frac{a+b}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{a+b}{2}+\frac{1}{n}}|x_n(t)-x(t)|dt\\ &\le \int_{\frac{a+b}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{a+b}{2}+\frac{1}{n}}\max_{t\in[a,b]}|x_n(t)-x(t)|dt\le\frac{2}{n}\to 0,\quad n\to\infty\end{aligned}$$

所以 $x_n\to x$.但 $x\notin C[a,b]$,因此 $(C[a,b],\|\cdot\|_1)$ 不是Banach空间. □

注记 2.1.1 可以证明:若 $C[a,b]$ 中定义范数

$$\|x\|_p=\left(\int_a^b|x(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad\forall x\in C[a,b].$$

$(C[a,b],\|\cdot\|_p)$ 是赋范线性空间,但不是Banach空间.

§2.1.4 练习题三解答

1. 设线性空间 $C[a,b]$, 对 $x\in C[a,b]$ 定义泛函

$$\|x\|_p=\left(\int_a^b|x(t)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}},\quad 1\le p<\infty.$$

证明 $(C[a,b],\|\cdot\|_p)$ 是赋范线性空间(提 示应用积分形式的Minkowski不等式).

解 设 $1\le p<\infty$, 定义泛函

$$\|x\|_p=\left(\int_a^b|x(t)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}},\quad\forall x\in C[a,b]$$

我们只需验证范数公理

1) 明显地, $\|x\|_p\ge 0$. 如果 $\|x\|_p=0$,即

$$\int_a^b|x(t)|^pdx=0$$

由于 $x\in C[a,b]$, 所以必有 $x(t)\equiv 0$.

2) 对任意的 $\alpha\in\mathbb{K}$,

$$\|\alpha x\|_p=\left(\int_a^b|\alpha x(t)|^pdt\right)^{\frac{1}{p}}=|\alpha|\|x\|_p$$

3) 对任意的 $x, y \in C[a,b]$,积分形式的Minkowski不等式给出下面的三角不等式

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

因此, $\|x\|_p$ 满足范数公理, $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ 是赋范线性空间. □

2. 设 $C^1[a,b]$ 为闭区间 $[a,b]$ 上所有一次连续可微函数组成的集合, 按照通常函数的加法与数乘成为线性空间. 对 $x \in C^1[a,b]$ 定义泛函

$$\|x\|_2 = \left(\int_a^b |x'(t)|^2 dt + |x(a)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证明 $(C^1[a,b], \|\cdot\|_2)$ 是赋范线性空间。

解 对 $x \in C^1[a,b]$, 定义泛函

$$\|x\|_2 = \left(\int_a^b |x'(t)|^2 dt + |x(a)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

我们只需验证范数公理

1) 明显地, $\|x\|_2 \geq 0$. 如果 $\|x\|_2 = 0$, 即

$$\int_a^b |x(t)|^2 dx + |x(a)|^2 = 0$$

由于 $x \in C^1[a,b]$, 上式隐含 $x'(t) \equiv 0$, $x(a) = 0$. 由此得到 $x(t) \equiv 0$.

2) 对任意的 $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\|\alpha x\|_2 = \left(\int_a^b |\alpha x'(t)|^p dt + |\alpha x(a)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \|x\|_2$$

3) 对任意的 $x, y \in C[a,b]$,积分形式的Minkowski不等式给出下面的三角不等式

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_2^2 &= \int_a^b |x'(t)+y'(t)|^2 dt + |x(a)+y(a)|^2 \\
&\leq \int_a^b (|x'(t)^2 + |y'(t)|^2 + 2x(t)y(t))dt + |x(a)|^2 + |y(a)|^2 + 2x(a)y(a) \\
&\qquad \text{应用Cauchy不等式} \\
&\leq \int_a^b (|x'(t)^2 + |y'(t)|^2 + 2\left(\int_a^b |x'(t)|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_a^b |y'(t)|^2 dt\right)^{1/2} \\
&\quad + |x(a)|^2 + |y(a)|^2 + a|x(a)||y(a)| \\
&= (|X|^2 + |x(a)|^2) + (|Y|^2 + |y(a)|^2) + 2(|X||Y| + |x(a)||y(a)|) \\
&\qquad \text{应用Cauchy不等式} \\
&\leq (|X|^2 + |x(a)|^2) + (|Y|^2 + |y(a)|^2) + 2\sqrt{|X|^2 + |x(a)|^2}\sqrt{|Y|^2 + |y(a)|^2} \\
&= (\sqrt{|X|^2 + |x(a)|^2} + \sqrt{|Y|^2 + |y(a)|^2})^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2
\end{aligned}$$

其中 $|X| = \left(\int_a^b |x'(t)|^2 dt\right)^{1/2}$. 因此, $\|x\|_2$ 满足范数公理, $(C^2[a,b], \|\cdot\|_2)$ 是赋范线性空间.
□

3. 设 $C^1[a,b]$ 为闭区间 $[a,b]$ 上所有一次连续可微函数组成的集合, 按照通常函数的加法与数乘成为线性空间. 对 $x \in C^1[a,b]$ 定义泛函

$$\|x\|_{(1)} = \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

证明 $(C^1[a,b], \|\cdot\|_{(1)})$ 是完备的赋范线性空间。

证明 易见 $\|x\|_{(1)}$ 满足范数公理,这里主要证明 $(C^1[a,b], \|\cdot\|_{(1)})$ 的完备性.

设 $\{x_n\} \subset C^1[a,b]$ 满足条件

$$\|x_n - x_m\|_{(1)} = \max_{t\in[a,b]} |x_n'(t) - x_m'(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x_n(t) - x_m(t)| \to 0, n, m \to \infty.$$

依照 $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ 的完备性, 存在 $y(t)$ 及 $y_1(t)$ 使得

$$\max_{t\in[a,b]} |x_n(t) - y(t)| \to 0, \max_{t\in[a,b]} |x_n'(t) - y_1(t)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

由于对任意的 $t \in [a,b]$,

$$x_n(t) - x_n(a) = \int_a^t x_n'(s)ds$$

两端取极限得

$$y(t) - y(a) = \int_a^t y_1(t)dt$$

所以 $y \in C[a,b]$,且 $y' = y_1$. 因此,

$$\|x_n - y\|_{(1)} = \max_{t\in[a,b]} |x_n'(t) - y'(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x_n(t) - y(t)| \to 0, n \to \infty.$$

所以 $(C^1[a,b], \|\cdots\|_{(1)})$ 是完备的. □

4. 在 ℓ^∞ 中, 令

$$C_{00} = \left\{x \in \ell^\infty \,\middle|\, x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)\}, \xi_i \text{ 中仅有有限个不为零}\right\}.$$

证明 C_{00} 是 ℓ^∞ 的不完备的子空间.

证明 明显地, C_{00} 是 ℓ^∞ 的一个子空间。 令 $x_n = (1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, 0, 0, \cdots), (n \in \mathbb{N})$, 显然 $x_n \in C_{00}$, $\|x_n\|_\infty = 1$. 当 $n < m$ 时,

$$\|x_n - x_m\|_\infty = \sup_{n<k\le m} \left|\frac{1}{k}\right| = \frac{1}{n+1},$$

从而 $\{x_n\}$ 是 C_{00} 中的Cauchy列。 但是, $x_n \to x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\cdots) \notin C_{00}$, 从而子空间 C_{00} 不完备. □

5. 设 $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间 $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ 的闭子空间, 对于商空间 $\mathbb{X}/\mathbb{Y}$ (见 § 1, 习题 4)的元素 $\widehat{x}$, 定义

$$\|\widehat{x}\|_0 = \inf_{x\in\hat{x}} \|x\|.$$

验证 $\|\cdot\|_0$ 是 $\mathbb{X}/\mathbb{Y}$ 中的范数.

证明 按照商空间的定义, 设 $\widehat{x} \in \mathbb{X}/\mathbb{Y}$, 则有

$$\|\widehat{x}\|_0 = \inf_{y\in\mathbb{Y}} \|x+y\| \geq 0.$$

若 $\|\widehat{x}\|_0 = 0$, 则 $\inf\limits_{y\in\mathbb{Y}} \|x+y\| = 0$. 因为 $\mathbb{Y}$ 为闭子空间, 存在 $y_0 \in \mathbb{Y}$ 使得

$$\|\widehat{x}\|_0 = \|x+y_0\| = 0$$

从而 $x + y_0 = 0$, 即 $x = -y_0 \in \mathbb{Y}$. 所以有 $\widehat{x} = -y_0 + \mathbb{Y} = \mathbb{Y}$. $\widehat{x} = \widehat{\theta} = \mathbb{Y}$.

对任意的 $\alpha \in \mathbb{K},\ \alpha \neq 0,$ 有 $\alpha\mathbb{Y} = \mathbb{Y}$,

$$\begin{aligned}\|\alpha\widehat{x}\|_0 = \inf_{y\in\mathbb{Y}} \|\alpha x+y\| &= |\alpha| \cdot \inf_{y\in\mathbb{Y}} \|x+\frac{1}{\alpha}y\| \\ &= |\alpha| \cdot \inf_{y\in\mathbb{Y}} \|x+y\| = |\alpha|\|\widehat{x}\|_0.\end{aligned}$$

对于 $\widehat{x_1}, \widehat{x_2} \in \mathbb{X}/\mathbb{Y}$, $\widehat{x_1} = x_1 + \mathbb{Y}$, $\widehat{x_2} = x_2 + \mathbb{Y}$,

$$\|x_1+y_1+x_2+y_2\| \leq \|x_1+y_1\| + \|x_2+y_2\|, \quad \forall y_1, y_2, \in \mathbb{Y},$$

所以

$$\|\widehat{x_1}+\widehat{x_2}\|_0 = \inf_{y\in\mathbb{Y}} \|x_1+x_2+y\| \leq \|x_1+y_1\| + \|x_2+y_2\|, \quad \forall y_1, y_2, \in \mathbb{Y}.$$

在上式中依次对 $y_1 \in \mathbb{Y}$, $y_2 \in \mathbb{Y}$ 取下确界得到

$$\|\widehat{x_1}+\widehat{x_2}\|_0 \leq \inf_{y_1\in\mathbb{Y}} \|x_1+y_1\| + \inf_{y_2\in\mathbb{Y}} \|x_2+y_2\| = \|\widehat{x_1}\|_0 + \|\widehat{x_2}\|_0.$$

因此 $\|\widehat{x}\|_0$ 是范数， $(\mathbb{X}/\mathbb{Y}, \|\cdot\|_0)$ 是赋范线性空间. □

6. 设 $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ 是同一数域上的赋范线性空间,在乘积空间 $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ 上定义

$$\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{X}\times\mathbb{Y}$$

证明 $(\mathbb{X}\times\mathbb{Y}, \|\cdots\|)$ 是赋范线性空间。并进一步证明, $(\mathbb{X}\times\mathbb{Y}, \|\ldots\|)$ 是 Banach空间的充条件是 $\mathbb{X}$ 与 $\mathbb{Y}$ 都是Banach空间.

证明 对任意的 $(x,y) \in \mathbb{X}\times\mathbb{Y}$,直接验证 $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$ 满足范数公理,所以 $(\mathbb{X}\times\mathbb{Y}, \|\cdots\|)$ 是赋范线性空间。这里主要证明后一部分断言。

1) 假如 $(\mathbb{X}\times\mathbb{Y}, \|\ldots\|)$ 是 Banach空间,我们表明 $\mathbb{X}$ 与 $\mathbb{Y}$ 都是Banach空间. 设 $\{x_n\} \subset \mathbb{X}$, $\{y_n\} \subset \mathbb{Y}$ 都是Cauchy列,即有 $\|x_n - x_m\| \to 0$, $\|y_n - y_m\| \to 0$, $n, m \to \infty$, 从而

$$\|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\| = \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

所以 $(x_ny_n) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ 是Cauchy列, 依 $(\mathbb{X} \times \mathbb{Y}, \|\cdot\|)$ 是Banach空间,存在 $(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, 即有 $\|x_n - x\| \to 0$, $\|y_n - y\| \to 0$,所以 $\mathbb{X}$ 与 $\mathbb{Y}$ 都是完备的.

2) 假如 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 都是Banach空间, $(x_ny_n) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ 是Cauchy列,自然地, $\{x_n\} \subset \mathbb{X}$, $\{y_n\} \subset \mathbb{Y}$ 都是Cauchy列,依假定存在 $x \in \mathbb{X}$, $y \in \mathbb{Y}$ 使得 $\|x_n - x\| \to 0$, $\|y_n - y\| \to 0$,易见 $\|(x_n, y_n) - (x, y)\| \to 0$.所以 $(\mathbb{X} \times \mathbb{Y}, \|\ldots\|)$ 是 Banach空间。 □

7. 记 $D = \{z \in C \mid |z| \le 1\}$, $p \ge 1$, D 上的解析函数集

$$H^p(D) = \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}$$

按照通常函数的加法与数乘成为线性空间,定义

$$\|f(z)\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

证明 $(H^p(D), \|\cdot\|_p)$ 是完备的赋范线性空间。

证明 我们定义映射

$$Tf = (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1} \cdots,) \quad \forall f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^p(D)$$

由空间 $H^p(D)$ 的定义, T 是 $H^p(D)$ 到 ℓ^p 的映射,

1) T 是线性映射,

2) T 是双射,

3) T 是等距算子 $\|Tf|_p| = \|f\|_p$.

因此, $H^p(D)$ 等距同构于 ℓ^p . 由于 ℓ^p 是Babach空间,所以 $H^p(D)$ 也是Banach空间。 □

§2.2 第四讲　赋范线性空间中的级数与Schauder基

教学目的:
本节将 $\mathbb{R}$ 中无穷级数概念推广到一般赋范线性空间,通过绝对收敛级数刻划空间 的完备性，借用无穷级数研究无穷维空间的Schauder基。
本节要点:
完备赋范线性空间,Schauder 基.

§2.2.1 内容提要

定义 2.2.1　设 $\{x_n\}$ 是赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 中的序列,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n := x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$$

称为 $\mathbb{X}$ 中的形式级数. 令 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, $\{s_n\}$ 称为 $\{x_n\}$ 的部分和序列.

若存在 $x \in \mathbb{X}$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \|s_n - x\| = 0$, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 是收敛的, x 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 的和,记为 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. 若 $s_m = \sum\limits_{n=1}^{m} x_n$ 不收敛,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 不收敛.

若数值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ 收敛,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 是绝对收敛的.

注记 2.2.1　抽象空间中的级数收敛与数值级数收敛不同,数值级数绝对收敛, 则它一定收敛,但对抽象空间中的级数,绝对收敛并不能保证级数收敛.比如 $P[0,1]$ 中的多项式序列

$$x_n(t) = \frac{t^n}{n!}, \quad \|x_n\|_\infty = \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ 是绝对收敛的,但在 $P[0,1]$ 中无极限, 这是因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = e^t$ 不在 $P[0,1]$ 中.

定理 2.2.1　设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间,则 $\mathbb{X}$ 是完备空间的充要条件是: $\mathbb{X}$ 中的任何绝对收敛级数都收敛.

定义 2.2.2　若 $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ 是Banach空间 $\mathbb{X}$ 中的序列,具有如下性质:对每个 $x \in \mathbb{X}$ 有唯一的数列 $\{\alpha_n\}$,使得

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i - x\right\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

则 $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ 称为 $\mathbb{X}$ 的Schauder基. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ 的和为 x ,此级数称为 x 的展开式,记为:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n.$$

相应的数列 $\{\alpha_n\}$ 称为 x 关于基 $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ 的展开系数.

定义 2.2.3　设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, $A \subset \mathbb{X}$ 是一子集, 若 $\overline{A} = \mathbb{X}$,则称 A 在 $\mathbb{X}$ 中稠密. 若 $\mathbb{X}$ 中存在一个可数的稠密子集, 即存在可数子集 $B \subset \mathbb{X}$ 使得 $\overline{B} = \mathbb{X}$,则称空间 $\mathbb{X}$ 是可分(separable).

由定义可以知道: A 在 $\mathbb{X}$ 中稠密当且仅当,对每点 $x \in \mathbb{X}$ 及每个 $r > 0$, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$; $\mathbb{X}$ 为可分空间,存在可数子集 $M \subset \mathbb{X}$ 使得 $\forall r > 0$, $\bigcup_{x \in M} B(x,r) = \mathbb{X}$.

定理 2.2.2　设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间,若 $B \subset \mathbb{X}$ 是一可数集,且 $\overline{\mathrm{span} B} = \mathbb{X}$, 则 $\mathbb{X}$ 是可分空间.

推论 2.2.1　具有Schauder基的Banach空间是可分空间.

定义 2.2.4　设 $(\mathbb{X}, \|\cdot\|), (\mathbb{Y}, \|\cdot\|)$ 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间, $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是映射, 若T是线性算子又是双射,且满足

$$\|Tx\|_{\mathbb{Y}} = \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{X},$$

则称 T 是 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{Y}$ 的等距同构映射.

若存在 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{Y}$ 的等距同构映射,则称 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是等距同构的。 若两个空间 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是等距同构的, 则把它们看作是同一的.

定义 2.2.5　设 $\mathbb{X}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间, $\widehat{\mathbb{X}}$ 是Banach空间. 如果存在 $\widehat{\mathbb{X}}$ 的一个子空间 $\mathbb{Y}$ 使得

1). $\mathbb{Y}$ 在 $\widehat{\mathbb{X}}$ 中稠密;

2). $\mathbb{X}$ 与 $\mathbb{Y}$ 等距同构.

则称 $\widehat{\mathbb{X}}$ 是空间 $\mathbb{X}$ 的完备化空间.

定理 2.2.3　设 $\mathbb{X} = (\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ 是任意一个赋范线性空间,则总存在完备化的赋范线性空间 $\widehat{\mathbb{X}} = (\widehat{\mathbb{X}}, \|\cdot\|_1)$,且在等距意义下, 空间 $\widehat{\mathbb{X}}$ 是唯一的.

定义 2.2.6　设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, $A \subset \mathbb{X}$ 是一非空子集.

1) 如果 A 的闭包的内部 $\overline{A}^{\circ}$ 是空集, 则称 A 在 $\mathbb{X}$ 中是无处稠密集(nowhere dense), 或称 A 为疏朗集(meager set);

2) 若 A 是至多可数多个无处稠密集的并,则称 A 为第一纲集;

3) 若 A 不是第一纲集, 则称 A 为第二纲集.

定理 2.2.4　(Barie纲定理) 完备的赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 是第二纲集.

定理 2.2.5　设 $\mathbb{X}$ 是完备赋范线性空间, $\{A_k\}$ 是 $\mathbb{X}$ 中一列闭子集. 若 $\mathbb{X} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, 则至少存在一个集 A_k 包含一个 $\mathbb{X}$ 的非空开集.

§2.2.2 常用空间的可分性与基

例 2.2.1　$\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密, $\mathbb{R}$ 是可分空间.

例 2.2.2　空间 $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ ($1 \leq p < \infty$),令

$$e_n = (0, 0, \cdots, 0, \overset{(n)}{1}, 0 \cdots), \quad n \in \mathbb{N},$$

则 $e_n \in \ell^p$,序列 $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ 是 ℓ^p 的一个Schauder基. 对每个 $x = \{x_n\} \in \ell^p$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$. $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ 是可分Banach空间。

例 2.2.3 序列空间 c_0 定义为 $c_0 = \{x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \lim_{n\to\infty} \xi_n = 0\}$. c_0 按照通常数列的线性运算成为线性空间, 在其上定义范数 $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|$,则 c_0 是Banach空间,序列

$$e_n = (0, 0, \cdots, 0, \overset{(n)}{1}, 0 \cdots), \quad n \in \mathbb{N}$$

是 c_0 的一个Schauder基. 对每个 $x = \{x_n\} \in c_0$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$.

c_0 是可分Banach空间。

例 2.2.4 空间 ℓ^∞ ,范数定义为 $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|$, 序列

$$e_n = (0, 0, \cdots, 0, \overset{(n)}{1}, 0 \cdots), \quad n \in \mathbb{N}$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$, $e_n \in \ell^\infty$,但 $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ 不是 ℓ^∞ 的Schauder基. ℓ^∞ 是不可分的Banach空间。

例 2.2.5 空间 $P[a, b]$ 和 $C[a, b]$ 都是可分的.

例 2.2.6 $L^p[a, b](1 \le p < \infty)$ 是可分的.

例 2.2.7 线性空间 $L^\infty[a, b]$ (本性有界可测函数空间),

$$L^\infty[a, b] = \{f \mid f \text{ 是 } [a, b] \text{ 上的可测函数,存在零测集 } E \text{ 使得 } \sup_{x\in[a,b]\setminus E} |f(x)| < \infty\}.$$

对 $f \in L^\infty[a, b]$,定义范数

$$\|f\|_\infty = \inf_{E\subset[a,b], m(E)=0} \sup_{x\in[a,b]\setminus E} |f(x)| := ess \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

$(L^\infty[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ 是不可分的Banach空间.

§2.2.3 典型例题

赋范线性空间具有基性质和可分性都是赋范线性空间的重要性质,他们主要体现在序列的逼近性质。 在函数空间中,这些性质体现在粗糙函数能否用光滑函数在范数意义下逼近。

证明空间的可分性与不可分性都是重要内容. 特别是在证明不可分时需要一些特殊技巧。

例 2.2.8 序列空间 c_0 定义为 $c_0 = \{x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \lim_{n\to\infty} \xi_n = 0\}$. c_0 按照通常数列的线性运算成为线性空间, 在其上定义范数 $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|$,则 c_0 是Banach空间,序列

$$e_n = (0, 0, \cdots, 0, \overset{(n)}{1}, 0 \cdots), \quad n \in \mathbb{N}$$

是 c_0 的一个Schauder基. 对每个 $x = \{x_n\} \in c_0$,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n.$$

证明 对每个 $x \in c_0$, $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots\cdots)$, 定义 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k$. 依 $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ 的定义形式有

$$s_n = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, 0, 0, \cdots) \in c_0.$$

于是有

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - x\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup_{k>n} |\xi_k| = 0.$$

所以 $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$.

其次,这个表达式是唯一的. 假如还有 $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$,则

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \to x.$$

对每个 $k \in \mathbb{N}$,

$$|\xi_k - \alpha_k| \le \|s_n - v_n\|_\infty \le \|s_n - x\|_\infty + \|x - v_n\|_\infty \to 0, \quad n \to \infty.$$

因此有 $\xi_k = \alpha_k, \forall k \in \mathbb{N}$. 故 $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ 是 c_0 的一个Schauder基. □

例 2.2.9　空间 ℓ^∞ ,范数定义为 $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|$, 序列

$$e_n = (0, 0, \cdots, 0, \overset{(n)}{1}, 0 \cdots), \quad n \in \mathbb{N}$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$, $e_n \in \ell^\infty$,但 $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ 不是 ℓ^∞ 的Schauder基.

证明 明显地,对每个 $n \in \mathbb{N}$, $e_n \in \ell^\infty$. 为证 $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ 不是 ℓ^∞ 的Schauder基,只需找到一个 $x \in \ell^\infty$, 它不能按照 $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ 展开.

设 $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots\cdots)$,其中 $\xi_k = 0$ 或者 1 . 明显地有 $x \in \ell^\infty$. 由前面的例子看到,如果 x 能够按照 $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ 展开,它的展开系数必为序列中的项,所以部分和为

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, 0, 0, \cdots) \in \ell^\infty.$$

但对所取的 $x \in \ell^\infty$,总有

$$\|s_n - x\|_\infty = \sup_{k>n} |\xi_k| = 1.$$

所以 $x \ne \sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$. 故 $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ 不是 ℓ^∞ 的Schauder基. □

例 2.2.10　ℓ^∞ 是不可分的.

证明 考虑 ℓ^∞ 的一个子集

$$F = \{x = \{\eta_k\} \in \ell^\infty \mid \eta_i = 0, 或\ 1\}$$

F 是 $[0, 1]$ 数的二进制表示,是一个不可数集.

假如 ℓ^∞ 是可分的,则存在可数集 $\{x_k, k\in\mathbb{N}\}$ 使得 $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B\left(x_k, \frac{1}{3}\right) = \ell^\infty$. 由于 F 是不可数集,则至少有一个开球 $B\left(x_k, \frac{1}{3}\right)$ 中含有 F 中的两个点,这是不可能的,因为

$$\|x-y\|_\infty = 1, \quad x \neq y, x, y \in F.$$

因此 ℓ^∞ 是不可分的. □

例 2.2.11　线性空间 $L^\infty[a,b]$ (本性有界可测函数空间),

$$L^\infty[a,b] = \{f \mid f \text{ 是 } [a,b] \text{ 上的可测函数,存在零测集 } E \text{ 使得 } \sup_{x\in[a,b]\setminus E} |f(x)| < \infty\}.$$

对 $f \in L^\infty[a,b]$,定义范数

$$\|f\|_\infty = \inf_{E\subset[a,b],m(E)=0} \sup_{x\in[a,b]\setminus E} |f(x)| := ess \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

$(L^\infty[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ 是不可分的Banach空间.

证明　考虑 $L^\infty[a,b]$ 的一个子集

$$F = \{x = \chi_{[a,t]} \in L^\infty[a,b] \mid \chi_{[a,t]} \text{ 是区间 } [a,t] \text{ 的特征函数}, \forall t \in [a,b]\}$$

F 是一个不可数集. 对 F 中任意两个不同的元 x_1 , x_2 总有 $\|x_1 - x_2\|_\infty = 1$.

假如 $L^\infty[a,b]$ 是可分的,则存在可数集 $\{x_k, k\in\mathbb{N}\}$ 使得 $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B\left(x_k, \frac{1}{3}\right) = L^\infty[a,b]$. 由于 F 是不可数集,则至少有一个开球 $B\left(x_k, \frac{1}{3}\right)$ 中含有 F 中的两个点,这是不可能的. 因此 $L^\infty[a,b]$ 是不可分的. □

§2.2.4 练习题四解答

1. c **空间**. c 是收敛的实数(或者复数)列的全体组成的集合,按照通常数列的线性运算构成线性空间,即

$$c = \{x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \mid \text{数列}\{\xi_i\}\text{收敛}\}.$$

c 中任意 $x = \{\xi_k\}$ 的范数定义为 $\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k|$. c 可以看作 ℓ^∞ 的子空间. 令

$$e_\infty = (1, 1, \cdots, 1\cdots) \in c, \quad e_n = (0, 0, \cdots, 0, \overset{(n)}{1}, 0\cdots), \quad n \in \mathbb{N}.$$

证明 $\{e_\infty, e_n; n\in\mathbb{N}\}$ 是 c 的一个Schauder基。 对每个 $x = \{\xi_n\} \in c$, $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi$,

$$x = \xi e_\infty + \sum_{n=1}^\infty (\xi_n - \xi) e_n.$$

证明 对任意的 $\{x_n\} \in c$,设 $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, 令 $z_n = x_n - x$,则 $\{z_n\} \in c_0$,利用 c_0 的Schauder基, $\{z_n\}$ 有展开式

$$\{z_n\} = \sum_{n=1}^\infty z_n e_n.$$

于是

$$\|\{x_k\} - xe_\infty - \sum_{k=1}^{n}(x_k - x)e_k\| = \sup_{k\geq n+1} |x_k - x| \to 0, \quad n \to \infty.$$

因此,

$$\{x_k\} = xe_\infty + \sum_{k=1}^{\infty}(x_k - x)e_k.$$

即 $\{e_\infty, e_n; n \in \mathbb{N}\}$ 是 c 的一个Schauder基。 □

2. 设 $H^p(D)$ 如前面定义, 证明

$$1, z, z^2, z^3, \cdots, z^n, \cdots$$

是空间 $(H^p(D), \|\cdot\|_p)$ 的Schauder基。

证明 对任意的 $f \in H^p(D)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

于是

$$\|f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k z^k\|_p^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^p \to 0, \quad n \to \infty$$

所以, $1, z, z^2, z^3, \cdots, z^n, \cdots$ 是空间 $(H^p(D), \|\cdot\|_p)$ 的Schauder基。 □

3. 证明 $(P[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ 的完备化空间是 $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ 。

证明 这里只证明 $(P[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ 的完备化空间是 $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ 。

注意到二项式公式

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n a^k b^{n-k}$$

所以 $1 = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^k(1 - x)^{n-k}$. 对 $f \in C[0, 1]$, 由于 f 在 $[0, 1]$ 上一致连续,即对任给的 $\varepsilon > 0$ 存 在 $\delta > 0$ 使得当 $|x - y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

对区间 $[0, 1]$ 进行 n 等分,并使得 $\frac{\|f\|_\infty}{n\delta^2} < \varepsilon$,等分点记为 $x_k = \frac{k}{n}$, 定义多项式

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) C_n^k x^k (1 - x)^{n-k}, \quad x \in [0, 1]$$

其中 C_n^k 是二项式系数. 明显地 $\|p_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

注意恒等式

$$nx = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1 - x)^{n-k}, \quad \forall x \in [0, 1],$$

和

$$n(n - 1)x^2 = \sum_{k=0}^{n} k(k - 1) C_n^k x^k (1 - x)^{n-k}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

由此可得

$$nt(1-x)=\sum_{k=0}^{n}(k-nt)^2C_n^kx^k(1-x)^{n-k},\quad \forall x\in[0,1]$$

$$\begin{aligned}
|p_n(x)-f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}f(x_k)C_n^kx^k(1-x)^{n-k}-\sum_{k=0}^{n}f(x)C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\right| \\
&\le \sum_{k=0}^{n}|f(x_k)-f(x)|\,C_n^kx^k(1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{|x_k-x|<\delta}|f(x_k)-f(x)|\,C_n^kx^k(1-x)^{n-k}+\sum_{|x_k-x|\ge\delta}|f(x_k)-f(x)|\,C_n^kx^k(1-x)^{n-k} \\
&\le \frac{\varepsilon}{2}\sum_{|x_k-x|<\delta}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}+2\|f\|_\infty\sum_{|\frac{k}{n}-x|\ge\delta}C_n^kx^k(1-x)^{n-k} \\
&\le \frac{\varepsilon}{2}+2\|f\|_\infty\sum_{|\frac{k}{n}-x|\ge\delta}\left(\frac{(k-nx)}{n\delta}\right)^2C_n^kx^k(1-x)^{n-k} \\
&\le \frac{\varepsilon}{2}+2\frac{\|f\|_\infty}{(n\delta)^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2C_n^kx^k(1-x)^{n-k} \\
&= \frac{\varepsilon}{2}+2\frac{\|f\|_\infty}{(n\delta)^2}nx(1-x)\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2}\frac{\|f\|_\infty}{n\delta^2}<\varepsilon.
\end{aligned}$$

因此

$$\|p_n-f\|_\infty<\varepsilon.$$

注记 2.2.2 本题就是著名的 Weierstrass 逼近定理

4. 证明 $(C[a,b],\|\cdot\|_p)$ 的完备化空间是 $(L^p[a,b],\|\cdot\|_p)$ 。

证明

§2.3 第五讲　有限维赋范线性空间

> 教学目的:
> n 维实(或复)线性空间与 $\mathbb{R}^n$(或 $\mathbb{C}^n$) 是同构的, 即具有相同的代数结构. 本节将进一步指出 n'维赋范线性空间与 $\mathbb{R}^n$ 具有更多相似的性质.
> 本章要点: 有限维空间的特征性质。

§2.3.1 内容提要

引理 2.3.1　设 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 是赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 中的线性无关集,则存在一个数 $c > 0$,使得对每一 组数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 都有

$$\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_n|) \tag{2.3.1}$$

定理 2.3.1　赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 的每一个有限维子空间 $\mathbb{Y}$ 是完备的. 特别地,每一个有限维的赋范线性空间是完备的.

推论 2.3.1　赋范线性空间每一个有限维子空间都是闭的.

定义 2.3.1　设 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 $\mathbb{X}$ 上的两个范数. 若存在正数 a, b 使得对任意的 $x \in \mathbb{X}$ 都有

$$a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2, \quad \forall x \in \mathbb{X}. \tag{2.3.2}$$

则称范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 为等价的.

显然,若 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价,则 $\|\cdot\|_2$ 与 $\|\cdot\|_1$ 也等价. 等价范数有一个基本性质:若线性空间 $\mathbb{X}$ 上的范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是等价的, 范数 $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ 在 $\mathbb{X}$ 上导出的收敛性是相同的. 进一步, $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_1)$ 与 $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_2)$ 中的Cauchy列是相同的.所以 $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_1)$ 与 $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_2)$ 有相同的完备性.

定理 2.3.2　在有限维线性空间中,任何两个范数 $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ 都是等价的.

定理 2.3.3　(有限维赋范空间的特征) 设 M 是有限维赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 的子集,则 M 是紧集的充分必要条件是 M 是有界闭集. 从而有限维赋范线性空间中的有界集一定是列紧集.

引理 2.3.2　(Riesz引理) 设 $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 的子空间. 若 $\mathbb{Y}$ 是 $\mathbb{X}$ 的闭子空间, 且 $\mathbb{Y} \neq \mathbb{X}$, 则对于任意的 $\beta : 0 < \beta < 1$,存在 $x_0 \in \mathbb{X}$ 使得 $\|x_0\| = 1$, 且对所有的 $y \in \mathbb{Y}$ 都有 $\|x_0 - y\| \geq \beta$.

定理 2.3.4　设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间,则 $\mathbb{X}$ 是有限维的当且仅当 $\mathbb{X}$ 的单位闭球 $\overline{B(0,1)} = \{x \in \mathbb{X} \,\big|\, \|x\| \leq 1\}$ 是紧集.

推论 2.3.2　赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 为有限维的,当且仅当 $\mathbb{X}$ 的每一个有界集都是列紧集.

§2.3.2 典型例题

有限维赋范线性空间的性质:

(1) 完备性;

(2) 范数等价性;

(3) 有界紧性。

实际应用中, 赋范线性空间的等价范数是一种技巧,在适当选择等价范数可使问题简单化.

例 2.3.1 在线性空间 $C[a,b]$ 上定义两个范数,

$$\|x\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|, \quad \|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|dt.$$

则范数 $\|x\|_\infty$ 与 $\|x\|_1$ 不等价.

由于 $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ 是Banach空间, $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ 是不完备空间,所以两个范数不等价.

例 2.3.2 设集合

$$H^2[a,b] = \{f \in C^1[a,b] \mid f'(x) \text{ 在 } [a,b] \text{ 上绝对连续,且 } f'' \in L^2[a,b]\}.$$

在 $H^2[a,b]$ 上定义范数

$$\|f\| = \left(\int_a^b (|f''(x)|^2 + |f'(x)|^2 + |f(x)|^2)dx\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f \in H^2[a,b].$$

在 $H^2[a,b]$ 上定义另一个范数

$$\|f\|_u = \left(\int_a^b |f''(x)|^2 dx + |f(a)|^2 + |f(b)|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f \in H^2[a,b].$$

证明: $\|\cdot\|_u$ 是与 $\|\cdot\|$ 等价的范数.

证明 首先我们证明存在常数 $M > 0$ 使得下面不等式成立

$$\int_a^b |f''(x)|^2 dx + |f(a)|^2 + |f(b)|^2 \le M \int_a^b (|f''(x)|^2 + |f'(x)|^2 + |f(x)|^2)dx.$$

由于

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(s)ds, \quad f(x) = f(b) - \int_x^b f'(s)ds,$$

所以 $|f(a)| \le |f(x)| + \int_a^x |f'(s)|ds$, $f(b)| \le |f(x)| + \int_x^b |f(s)|ds$. 于是

$$(b-a)|f(a)|^2 \le 2\left(\int_a^b |f(x)|^2 dx + \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b |f'(s)|^2 ds\right),$$

$$(b-a)|f(b)|^2 \le 2\left(\int_a^b |f(x)|^2 dx + \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b |f'(s)|^2 ds\right),$$

因此,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b |f''(x)|^2 dx + |f(a)|^2 + |f(b)|^2 \\
\leq\ & \int_a^b |f''(x)|^2 dx + \frac{4}{b-a}\int_a^b |f(x)|^2 dx + 2(b-a)\int_a^b |f'(x)|^2 dx \\
&\leq M\int_a^b (|f''(x)|^2 + |f'(x)|^2 + |f(x)|^2) dx
\end{aligned}$$

其中 $M = \max\{1, \frac{4}{b-a}, 2(b-a)\}$.

其次证明存在常数 $m > 0$ 使得

$$\int_a^b (|f''(x)|^2 + |f'(x)|^2 + |f(x)|^2) dx \leq m\int_a^b |f''(x)|^2 dx + |f(a)|^2 + |f(b)|^2.$$

注意到

$$|f(x)|^2 \leq 2\left(|f(a)|^2 + \int_a^b |f'(x)|^2 dx\right)$$

我们有

$$\int_a^b |f(x)|^2 \leq 2(b-a)\left(|f(a)|^2 + \int_a^b |f'(x)|^2 dx\right).$$

利用中值定理存在 $c \in [a,b]$ 使得

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

于是

$$|f'(x)|^2 \leq 2(|f'(c)|^2 + \int_a^b |f''(x)|^2)$$

所以

$$\begin{aligned}
&\int_a^b |f'(x)|^2 dx \leq 2(b-a)\left(|f'(c)|^2 + \int_a^b |f''(x)|^2 dx\right) \\
\leq\ & 2(b-a)\left(|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}|^2 + \int_a^b |f''(x)|^2 dx\right) \\
\leq\ & \frac{4}{b-a}(f(b)|^2 + |f(a)|^2) + 2(b-a)\int_a^b |f''(x)|^2 dx
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (|f''(x)|^2+|f'(x)|^2+|f(x)|^2 dx \le 2(b-a)\left(|f(a)|^2+\int_a^b |f'(x)|^2dx\right)\\
&+\int_a^b |f'(x)|^2dx+\int_a^b |f''(x)|^2dx\\
=\ & 2(b-a)|f(a)|^2+[1+2(b-a)]\int_a^b |f'(x)|^2dx+\int_a^b |f''(x)|^2dx\\
\le\ & 2(b-a)|f(a)|^2+[1+2(b-a)]\left(\frac{4}{b-a}(f(b)|^2+|f(a)|^2)+2(b-a)\int_a^b |f''(x)|^2dx\right)\\
&+\int_a^b |f''(x)|^2dx\\
=\ & [2(b-a)+\frac{4(1+2(b-a))}{b-a}]|f(a)|^2+\frac{4[1+2(b-a)]}{b-a}|f(b)|^2\\
&+[1+2(b-a)]\int_a^b |f''(x)|^2dx\\
\le\ & m\left(|f(a)|^2+|f(b)|^2+\int_a^b |f''(x)|^2dx\right)
\end{aligned}$$

其中 $m=\max\{[2(b-a)+\frac{4(1+2(b-a))}{b-a}],\frac{4[1+2(b-a)]}{b-a},[1+2(b-a)]\}$.

由上面两个不等式估计, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m}\int_a^b (|f''(x)|^2+|f'(x)|^2+|f(x)|^2)dx \le \int_a^b |f''(x)|^2dx+|f(a)|^2+|f(b)|^2\\
&\le M\int_a^b (|f''(x)|^2+|f'(x)|^2+|f(x)|^2)dx.
\end{aligned}$$

因此, 这两个范数等价。 □

§2.3.3 练习题五解答

1. 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 $\mathbb{X}$ 上的两个等价范数, $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{X}$ 中的序列. 证明

(i) $\{x_n\}$ 是 $(\mathbb{X},\|\cdot\|_1)$ 中的Cauchy序列，当且仅当 $\{x_n\}$ 是 $(\mathbb{X},\|\cdot\|_2)$ 中的Cauchy序列.

(ii) $\{x_n\}$ 在范数 $\|\cdot\|_1$ 下收敛于 x_0 , 当且仅当 $\{x_n\}$ 在范数 $\|\cdot\|_2$ 下收敛于 x_0 .

证明 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 $\mathbb{X}$ 上的两个等价范数。按照定义, 存在常数 $a,b>0$ 使得对 $\forall x\in\mathbb{X}$ 有不等式

$$a\|x\|_2\le\|x\|_1\le b\|x\|_2.$$

(i) "$\Rightarrow$" 设 x_n 是 $(\mathbb{X},\|\cdot\|_1)$ 中的Cauchy序列, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$,使得当 $n,m\ge N$ 时,

$$\|x_m-x_n\|_1<a\varepsilon.$$

这时

$$\|x_m-x_n\|_2<\frac{1}{a}a\varepsilon=\varepsilon.$$

从而 $\{x_n\}$ 是也是赋范空间 $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_2)$ 中的Cauchy序列.

"$\Leftarrow$" 设 x_n 是 $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_2)$ 中的Cauchy序列，对 $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$,使得当 $n, m \geq N$ 时，

$$\|x_m - x_n\|_2 < \frac{\varepsilon}{b}.$$

这时

$$\|x_m - x_n\|_1 < b\|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

从而 $\{x_n\}$ 是也是赋范空间 $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_1)$ 中的Cauchy序列.

(ii) 假设 $\{x_n\}$ 在范数 $\|\cdot\|_1$ 下收敛于 x_0 . 利用范数等价性

$$a\|x_n - x_0\|_2 \leq \|x_n - x_0\|_1 \leq b\|x_n - x_0\|_2$$

所以当 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|_1 = 0$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|_2 = 0$. 即 $\{x_n\}$ 在范数 $\|\cdot\|_2$ 下也收敛于 x_0 . 反之亦然。 □

上面题目表明：等价范数具有相同的收敛性和完备性.

2. 在 ℓ^∞ 中,取

$$e_n = (0, 0, \cdots, \overset{n^{th}}{1}, 0 \cdots) \in \ell^\infty, \quad n \in \mathbb{N}$$

证明: $\|e_n\|_\infty = 1$, $\|e_n - e_m\|_\infty = 1, n \neq m$.

令

$$\mathbb{Y} = \{x = \{\xi_k\} \in \ell^\infty \;\Big|\; \text{对每一个 } i \in \mathbb{N}, |\xi_i| \leq 1\},$$

则 $\mathbb{Y}$ 是 ℓ^∞ 中的有界集,但不是紧集.

证明 由于 $e_n = \{\delta_{k,n}\}_{k=1}^\infty$,直接计算

$$\|e_n\|_\infty = \sup_k |\delta_{k,n}| = 1$$

$$\|e_n - e_m\|_\infty = \sup_k |\delta_{k,n} - \delta_{k,m}| = 1, \quad n \neq m$$

$\{e_n\} \subset \mathbb{Y}$ 没有收敛的子列, 所以 $\mathbb{Y}$ 不是紧的。

这一题目也可利用有限维空间的特征证明。由 $\mathbb{Y}$ 的定义可知 $\mathbb{Y}$ 是 ℓ^∞ 中的单位闭球. 如果 $\mathbb{Y}$ 是紧集, 由有限维空间的特征定理可知其所属空间 ℓ^∞ 一定是有限维的,而 ℓ^∞ 是无限维的, 矛盾. 所以 $\mathbb{Y}$ 不是紧集. □

3. 在 $\ell^p (1 \leq p < \infty)$ 中,取

$$e_n = (0, 0, \cdots, \overset{n^{th}}{1}, 0 \cdots) \in \ell^p, \quad n \in \mathbb{N}$$

证明: $\|e_n\|_p = 1$, $\|e_n - e_m\|_p = 2^{\frac{1}{p}}, n \neq m$.

解 由于 $e_n = \{\delta_{k,n}\}_{k=1}^{\infty}$,直接计算 $\|e_n\|_p = 1$, $\|e_n - e_m\|_p = 2^{\frac{1}{p}}, n \neq m.$ 这说明由Riesz引理确定的序列可以范数大于1。 □

4. 设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, 若 $\mathbb{Y}$ 是 $\mathbb{X}$ 的有限维真子空间, 则存在 $x_0 \in \mathbb{X}$ 满足 $\|x_0\| = 1$, 且 $\inf\limits_{y\in\mathbb{Y}} \|x_0 - y\| = 1$.

证明 由于 $\mathbb{Y}$ 是有限维子空间， 则 $\mathbb{Y}$ 是完备的。取 $v \in \mathbb{X}\backslash\mathbb{Y}$. 设 $\alpha = \inf\limits_{y\in\mathbb{Y}} \|v - y\|(> 0)$. 由下确界的定义， 对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 存在 $y_n \in \mathbb{Y}$ 使得

$$\alpha \le \|v - y_n\| < \alpha + \frac{1}{n}.$$

由此得到

$$\|y_n\| \le \|v\| + \alpha + \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\mathbb{Y}$ 是有限维空间, $\{y_n\} \subset \mathbb{Y}$ 为一有界点列, 则 $\{y_n\}$ 存在收敛的子列 $\{y_{n_i}, i \in \mathbb{N}\}$ 。假设 $y_{n_i} \to y_0$, 由 $\mathbb{Y}$ 是闭的, 得到 $y_0 \in \mathbb{Y}$ 。于是由 $\alpha \le \|v - y_{n_i}\| < \alpha + \frac{1}{n_i}$ 得

$$\alpha \le \|v - y_0\| \le \alpha$$

即 $\|v - y_0\| = \alpha$. 令 $x_0 = \frac{v-y_0}{\|v-y_0\|}$. 则 $\|x_0\| = 1$, 且对 $\forall y \in \mathbb{Y}$

$$\begin{aligned} \|x_0 - y\| &= \|\frac{v - y_0}{\|v - y_0\|} - y\| = \frac{1}{\|v - y_0\|}\|v - y_0 - \|v - y_0\|\|y\|\| \\ &\ge \frac{1}{\|v - y_0\|} \inf_{y\in\mathbb{Y}} \|v - y\| = 1. \end{aligned}$$

所以 $\inf\limits_{y\in\mathbb{Y}} \|x_0 - y\| \ge 1$. 由于 $\mathbb{Y}$ 是 $\mathbb{X}$ 的子空间, 零元 $0 \in \mathbb{Y}$ ，从而

$$\inf_{y\in\mathbb{Y}} \|x_0 - y\| \le \|x_0 - 0\| = \|x_0\| = 1.$$

所以

$$\inf_{y\in\mathbb{Y}} \|x_0 - y\| = 1.$$

讨论下面的证法是否正确?

证明：设 $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 的有限维真子空间， 则 $\mathbb{Y}$ 是闭子空间. 由Riesz引理可得, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 存在 $x_n \in \mathbb{X}\backslash\mathbb{Y}$, 使得 $\|x_n\| = 1$ 且

$$d(x_n, \mathbb{Y}) \ge 1 - \frac{1}{n}.$$

由于有限维空间中的单位闭球都是紧的, $\{x_n\}$ 有收敛的子序列 $\{x_{n_k}\}$,设 $x_{n_k} \to x_0$. 则 $\|x_0\| = 1$, 并由 $d(\cdot, \mathbb{Y})$ 的连续性得到

$$d(x_0, \mathbb{Y}) = \lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, \mathbb{Y}) \ge \lim_{k\to\infty} (1 - \frac{1}{n_k}) = 1.$$

显然,零元 $0 \in \mathbb{Y}$,所以有

$$d(x_0, \mathbb{Y}) = \inf_{y\in\mathbb{Y}} \|x_0 - y\| \le \|x_0 - 0\| = \|x_0\| = 1$$

因此，$d(x_0, \mathbb{Y}) = 1$ 。

提示：如何保证 $\{x_n\}$ 有收敛的子序列 $\{x_{n_k}\}$？ □

5. 证明 无限维的Banach空间不能分解为可数个列紧集之并.

证明 在证明之前我们回顾Baire纲定理

Baire纲定理: 设 $\mathbb{X}$ 是完备度量空间，$\{A_k\}$ 是 $\mathbb{X}$ 中的一列闭集.若 $\mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ，则至少有一个 A_k 包含 $\mathbb{X}$ 的非空开子集。

设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间， 假若 $\mathbb{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{X}_n$ ，其中 $\mathbb{X}_n$ 为列紧集。 则必有 $\mathbb{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathbb{X}_n}$. 依照Baire纲定理,至少有一个 $\overline{\mathbb{X}_n}$ 包含 $\mathbb{X}$ 中的非空开集， 比如 $O(x_0, r)$ 包含在 $\overline{\mathbb{X}_{n_0}}$. 而 $\overline{\mathbb{X}_{n_0}}$ 是紧集,所以 $O(x_0, r)$ 是列紧集,从而 $\mathbb{X}$ 中的单位球是列紧集。 因此 $\mathbb{X}$ 是有限维空间， 这与 $\mathbb{X}$ 是无限维空间相矛盾。 因此无限维Banach空间不能分解成可数个列紧集之并. □

6. 设 $\mathbb{X}$ 是无限维的Banach空间, 证明 $\mathbb{X}$ 中任何可数个向量 $\{e_n\}$ 都不能构成 $\mathbb{X}$ 的Hamel基.

证明 利用反证法. 设 $\mathbb{X}$ 是无限维Banach空间,假如 存在可数个向量 $\{e_n\}$ 它构成 $\mathbb{X}$ 的Hamel基。

令 $\mathbb{X}_n = \mathrm{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ ，则 $\mathbb{X}_n$ 是有限维线性空间, 且 $\mathbb{X}_n \subset \mathbb{X}_{n+1}$ ，由假定条件，成立等式 $\mathbb{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{X}_n$.

对每个 $n \in \mathbb{N}$ ，令

$$M_{n,k} = \{x \in \mathbb{X}_n \,\big|\, \|x\| \le k\}, \quad (n, k \in \mathbb{N}).$$

对于固定的 n ， $\mathbb{X}_n = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} M_{n,k}$. 而 $M_{n,k}$ 是 $\mathbb{X}_n$ 中的有界闭集,从而是 $\mathbb{X}_n$ 中的紧集, 也是 $\mathbb{X}$ 中的紧集. 于是有

$$\mathbb{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{X}_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_{n,k}.$$

即 $\mathbb{X}$ 可写成可数个列紧集的并集. 由上题的结论相矛盾. 从而无限维的Banach 空间中的任何可列个向量都不能构成Hamel基. □

这里要理解Hamel基与Shauder基的不同之处，Shauder基是一个元可表示成基的级数形式， 而Hamel基，每个空间中的元只是Hamel基中有限个元的线性组合。

7. 设集合

$$H^2[a, b] = \{f \in C^1[a, b] \,\big|\, f'(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上绝对连续,且 } f'' \in L^2[a, b]\}.$$

在 $H^2[a, b]$ 上定义范数

$$\|f\| = \left(\int_a^b (|f''(x)|^2 + |f'(x)|^2 + |f(x)|^2)dx\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f \in H^2[a, b].$$

在 $H^2[a,b]$ 上定义另一个范数

$$\|f\|_u = \left(\int_a^b (|f''(x)|^2 dx + |f(a)|^2 + |f(b)|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f \in H^2[a,b].$$

证明: $\|\cdot\|_u$ 是与 $\|\cdot\|$ 等价的范数, $(H^2[a,b], \|\cdot\|)$ 是Banach空间.

证明 这里主要证明空间的完备性. 设 $\{f_n\} \subset H^2(a,b)$ 是Cauchy 列,

$$\|f_n - f_m\| \to 0, n, m \to \infty$$

由范数的等价性易见 $\{f_n(a)\}$ 是Cauchy 列, 进一步,对每个 $x \in [a,b]$, 由

$$f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'(s) ds$$

可知, $\{f_n(x)\}$ 也是Cauchy列.

另一方面, $\|f_n - f_m\| \to 0$ 可推出

$$\int_a^b |f_n''(x) - f_m''(x)|^2 dx \to 0, \quad \int_a^b |f_n'(x) - f_m'(x)|^2 dx \to 0, \quad \int_a^b |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx \to 0,$$

依 $L^2[a,b]$ 的完备性, 存在函数 $f(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ 使得

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \to 0, \quad \int_a^b |f_n'(x) = g_1(x)|^2 dx \to 0, \quad \int^| f_n''(x) - g_2(x)|^2 dx \to 0.$$

由等式 $f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'(x) dx$ 得到

$$\int_a^x f_n(s) ds - (x-a) f_n(a) = \int_a^x dr \int_a^r f_n'(s) ds$$

取极限得

$$\int_a^x f(ds) - (x-a) f(a) = \int_a^x dr \int_a^r g_1(s) ds$$

所以 $f(x) - f(a) = \int_a^x g_1(s) ds$, $f'(x) = g_1(x)$. 进一步,

$$f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'(s) ds = (x-a) f_n'(x) - \int_a^x (s-a) f_n''(s) ds$$

两端积分得

$$\int_a^x f_n(s) ds - (x-a) f_n(a) = \int_a^x (s-a) f_n'(s) ds - \int_a^x dr \int_a^r (s-a) f_n''(s) ds$$

取极限得

$$\int_a^x f(s) ds - (x-a) f(a) = \int_a^x (s-a) g_1(s) ds - \int_a^x dr \int_a^r (s-a) g_2(s) ds$$

再求导数

$$f(x) - f(a) = (x-a) g_1(x) - \int_a^x (s-a) g_2(s) ds$$

$$(x-a)g_1(x) = \int_a^x (s-a)g_2(s)ds$$

所以

$$f''(x) = g_1'(x) = g_2(x)$$

因此, $f \in H^2(a,b)$. □

第三章　赋范线性空间上的有界线性算子

§3.1 第六讲　赋范线性空间上的有界线性算子

教学目的:
本节讨论一类特殊的线性算子–有界线性算子。对于线性算子, 我们将表明有界性与连续性是等价的.
本节要点:
有界线性算子; 有界线性算子的范数;有界线性算子空间

§3.1.1 内容提要

定义 3.1.1　设 $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ 和 $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|)$ 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间, $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是线性算子.若 T 将 $\mathbb{X}$ 中的每个有界集都映成 $\mathbb{Y}$ 中的有界集, 则称 T 为有界线性算子(bounded linear operator).

定理 3.1.1　设 $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ 和 $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|)$ 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间, $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是线性算子. 则 T 为有界线性算子的充要条件是:存在正常数 c , 使得对所有的 $x \in \mathbb{X}$ 都有

$$\|Tx\| \le c\|x\|. \tag{3.1.1}$$

定义 3.1.2　设 $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间, $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 的有界线性算子,令

$$\|T\| = \sup_{x\in\mathbb{X}, x\neq\theta} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \tag{3.1.2}$$

$\|T\|$ 称为算子 T 的范数.

注记 3.1.1　按照有界线性算子范数的定义,有

$$\|T\| = \inf\{c > 0 \,\big|\, \|Tx\| \le c\|x\|, \forall x \in \mathbb{X}\}.$$

当 T 是 $\mathbb{X}$ 上的有界线性算子时, 对每一个 $x \in \mathbb{X}$ 都有

$$\|Tx\| \le \|T\| \cdot \|x\|. \tag{3.1.3}$$

这个不等式表明 $\|T\|$ 是线性算子 T 对所有 x 的最大放缩系数.

引理 3.1.1　设 $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间, $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 的有界线性算子,则

$$\|T\| = \sup_{x\in\mathbb{X}, \|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x\in\mathbb{X}, \|x\|\le1} \|Tx\|. \tag{3.1.4}$$

利用上面的引理,对于任意一个线性算子 $T: D(T) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$,总可以定义数

$$\|T\| = \sup_{x \in D(T), \|x\|=1} \|Tx\|$$

如果 $\|T\| < \infty$,则 T 是有界线性算子;若 $\|T\| = \infty$,则 T 是无界线性算子.

定理 3.1.2　设 $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ 和 $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|)$ 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间, $T: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是线性算子. 则下面的陈述成立

(1) T 在 $\mathbb{X}$ 上连续的充要条件是 T 在某一点 $x_0 \in \mathbb{X}$ 处连续,特别地, T 在 θ 处连续;

(2) T 是连续线性算子的充要条件是 T 是有界线性算子.

推论 3.1.1　设 $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ 和 $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|)$ 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间, $T: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是有界线性算子,则下列结论成立.

(1) 若 $x_n \to x$, 则 $Tx_n \to Tx$.

(2) T 的零空间 $\mathcal{N}(T)$ 是闭的.

设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是在同一数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间, $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 表示所有 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{Y}$ 的有界线性算子组成的集合. 对于任意 $T, S \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 和任意的数 $\alpha \in \mathbb{K}$, 定义线性运算:

$$\begin{aligned}(T+S)x &:= Tx + Sx \\ (\alpha T)x &:= \alpha Tx\end{aligned}$$

由于

$$\|(T+S)x\| = \|Tx + Sx\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \leq (\|T\| + \|S\|)\|x\|$$

及

$$\|(\alpha T)x\| = \|\alpha Tx\| = \alpha\|\|Tx\| \leq |\alpha|\|T\|\|x\|$$

所以 $T + S \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), \alpha T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, 并且按照上述加法运算和数乘运算 $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 构成一个线性空间. 显然 $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 中的零元素就是 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{Y}$ 的零算子.

在 $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 上赋予范数, 即对 $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 中任一元素 T , T 的范数规定为算子范数 $\|T\|$, 则有

1). $\|T\| \geq 0, \quad \|T\| = 0, \Leftrightarrow T = O.$

2). $\|\alpha T\| = |\alpha|\|T\|,$

3). $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|.$

这样定义的范数满足范数公理. 综合上面的讨论,可以得到下面的定理.

定理 3.1.3　设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是同一数域上的赋范线性空间, $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 是 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{Y}$ 的所有有界线性算子组成的线性空间. $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 按照通常的算子范数 即 $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathbb{X}, x \neq \theta} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x \in \mathbb{X}, \|x\|=1} \|Tx\|$$

成为赋范线性空间

定理 3.1.4　若 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, $\mathbb{Y}$ 是Banach空间, 则 $\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ 是Banach空间.

关于有界线性算子的复合有如下结论.

定理 3.1.5　设 $\mathbb{X},\mathbb{Y},\mathbb{U}$ 都是赋范线性空间, $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}, S:\mathbb{Y}\to\mathbb{U}$ 都是有界线性算子,则 T 与 S 的复合 $S\circ T:\mathbb{X}\to\mathbb{U}$ 也是有界线性算子.

§3.1.2 典型例题

线性算子分为两类:有界线性算子与无界线性算子。有界线性算子是连续线性算子,所以无界线性算子是不连续线性算子。 线性算子的有界性估计需用到各种不等式,特别是算子范数的计算需要各种技巧.

证明算子范数为某一值的方法,其基本步骤是:

1). 通过适当估计得到 $\|T\|\le M$;

2). 通过选择特殊元表明 $\|T|\ge M$.

例 3.1.1　积分算子 $T:C[a,b]\to C[a,b]$ 定义为:

$$(Tx)(t)=\int_a^b k(t,s)x(s)ds,\quad \forall x\in C[a,b]$$

其中 $k(t,s)$ 是 $[a,b]\times[a,b]$ 上定义的实值二元连续函数,则 T 是有界线性算子,且

$$\|T\|=\max_{t\in[a,b]}\int_a^b|k(t,s)|ds.$$

证明　易见 T 是线性算子. 对任意 $x\in C[a,b],\|x\|_\infty=1$ 有

$$\begin{aligned}\|Tx\|_\infty &= \max_{a\le t\le b}|(Tx)(t)|=\max_{a\le t\le b}\left|\int_a^b k(t,s)x(s)ds\right|\\ &\le \max_{a\le t\le b}\int_a^b|k(t,s)|ds\max_{s\in[a,b]}|x(s)|=\max_{a\le t\le b}\int_a^b|k(t,s)|ds\end{aligned}$$

所以 T 是有界的,且 $\|T\|\le\max\limits_{a\le t\le b}\int_a^b|k(t,s)|ds$.

为证反向不等式, 记 $M=\max\limits_{(t,s)\in[a,b]\times[a,b]}|k(t,s)|$. 注意到 $\int_a^b|k(t,s)|ds$ 关于 t 是 $[a,b]$ 的连续函数,由连续函数的性质,存在一点 $t_0\in[a,b]$ 使得

$$\max_{a\le t\le b}\int_a^b|k(t,s)|ds=\int_a^b|k(t_0,s)|ds.$$

令

$$z(s)=\begin{cases}1, & k(t_0,s)\ge0,\\ -1, & k(t_0,s)<0.\end{cases}$$

则 $z(s)$ 是有界可测函数,应用鲁津定理,对任意的 $\varepsilon>0$,存在可测集 A, $m(A)\le\frac{\varepsilon}{2M}$, $z(s)$ 在 $[a,b]\backslash A$ 上连续. 取 $[a,b]$ 上的连续函数 $x(s)$ 使得 $|x(s)|\le1$, $x(s)=z(s),s\in$

$[a,b]\backslash A$.明显地 $\|x\|=1$,且

$$\begin{aligned}\max_{a\le t\le b}\int_a^b |k(t,s)|ds &= \int_a^b |k(t_0,s)|ds=\int_a^b k(t_0,s)z(s)ds\\ &= \int_a^b k(t_0,s)(z(s)-x(s))ds+\int_a^b k(t_0,s)x(s)ds\\ &\le 2m(A)\max_{s\in[a,b]}|k(t_0,s)|+\|Tx\|\\ &\le \|T\|+\varepsilon.\end{aligned}$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性,可得 $\max\limits_{a\le t\le b}\int_a^b |k(t,s)|ds\le\|T\|$. 因此,

$$\|T\|=\max_{a\le t\le b}\int_a^b |k(t,s)|ds.$$

从而证明全部结论. □

例 3.1.2 设 $C^1[0,1]$ 是 $[0,1]$ 上所有一阶连续可微函数组成的集合, 则 $(C^1[0,1],\|\cdot\|_\infty)$ 是 $(C[0,1],\|\cdot\|_\infty)$ 的子空间。考虑微分算子 $D:C^1[0,1]\to C[0,1]$,其定义为

$$Dx(t)=\frac{dx(t)}{dt},\quad \forall x\in C^1[0,1]$$

D 是无界线性算子.

事实上,取 $x_n\in C^1[0,1], x_n(t)=t^n, n\in\mathbb{N}$,则对每一个 $n\in\mathbb{N}$ 有 $\|x_n\|_\infty=1$ 且

$$\|Dx_n\|_\infty=\max_{0\le t\le 1}|x_n'(t)|=\max_{0\le t\le 1}|nt^{n-1}|=n.$$

明显地, $\sup\limits_{n\ge 1}\|Dx_n\|=\infty$,故 D 是无界线性算子.

例 3.1.3 $C^1[0,1]$ 是 $[0,1]$ 上一阶连续可微函数全体组成的线性空间,在 $C^1[0,1]$ 中定义

$$\|x\|=\max_{a\le t\le b}|x(t)|+\max_{a\le t\le b}|x'(t)|$$

则 $C^1[0,1]$ 是Banach 空间. 考虑微分算子 $D:C^1[0,1]\to C[0,1]$,其定义为

$$Dx(t)=\frac{dx(t)}{dt},\quad \forall x\in C^1[0,1]$$

则 D 是有界线性算子,且 $\|D\|\le 1$.

§3.1.3 练习题六解答

1. 设 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$,使得对 $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\mathbb{R}^3$

$$Tx=(\xi_1,\xi_2,-\xi_1-\xi_2).$$

求 T 的值域 $\mathcal{R}(T)$,零空间 $\mathcal{N}(T)$ 以及 T 对应的矩阵.

解 由题意可知

$$\mathcal{R}(T)=\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\mathbb{R}^3 \mid -\xi_1-\xi_2=\xi_3\}=\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\mathbb{R}^3 \mid \xi_1+\xi_2+\xi_3=0\}.$$

事实上就是平面 $\xi_1+\xi_2+\xi_3=0$. 下面来求 $\mathcal{N}(T)$ ，由 $Tx=0$ 可得

$$\begin{cases}\xi_1=0,\\ \xi_2=0,\\ -\xi_1-\xi_2=0.\end{cases}$$

计算可得

$$\mathcal{N}(T)=\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \mid \xi_1=\xi_2=0\}=\{(0,0,\xi_3)|\xi_3\in\mathbb{R}\}$$

再求 T 对应的矩阵. 设 $e_1=(1,0,0)^\tau,\ e_2=(0,1,0)^\tau,\ e_3=(0,0,1)^\tau$ ，e_1,e_2,e_3 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一组基, 则有

$$\begin{pmatrix}Te_1\\ Te_2\\ Te_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\ 0&1&-1\\ 0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\\ e_3\end{pmatrix},$$

所以 T 相应的矩阵为 $\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&1&0\\ -1&-1&0\end{pmatrix}$. □

2. 在 $C[a,b]$ 中定义算子 $f:C[a,b]\to\mathbb{R}$ ，

$$f(x)=\int_a^b x(t)q(t)dt,\quad \forall x\in C[a,b]$$

证明: f 是有界线性算子,且有 $\|f\|=\int_a^b|q(t)|dt.$

证明 由积分的性质，易见 f 是线性泛函。对于任意的 $x\in C[a,b]$ ，

$$|f_q(x)|=\left|\int_a^b x(t)q(t)dt\right|\le\int_a^b|q(t)|dt\max_{t\in[a,b]}|x(t)|=\int_a^b|q(t)|dt\|x\|_\infty$$

因此 f_q 是有界的，且 $\|f_q\|\le\int_a^b|q(t)|dt$.

不妨假定 $q\neq0$.令

$$x_0(t)=\mathrm{sign}(q(t))=\begin{cases}1, & \text{当 } q(t)>0\\ 0, & \text{当 } q(t)=0\\ -1, & \text{当 } q(t)<0\end{cases},t\in[a,b]$$

则 x_0 是 $[a,b]$ 上的可测函数, 应用鲁津定理，对于任意的 $\varepsilon>0$ 存在可测集 $A\subset[a,b]$ 及 $x_\varepsilon\in C[a,b]$,使得 $mA<\frac{\varepsilon}{2\|q\|}$ ，$\|x_\varepsilon\|=1$, 并且 $x_\varepsilon(t)=x_0(t),\quad\forall t\in[a,b]\backslash A$.

于是在集合 A 上有 $|x_\varepsilon(t)-x_0(t)|\le 2$ 。从而有

$$\begin{aligned}\int_a^b |q(t)|dt &= \int_a^b x_0(t)q(t)dt \le \left|\int_a^b x_\varepsilon(t)q(t)dt\right| + \left|\int_a^b (x_\varepsilon(t)-x_0(t))q(t)dt\right| \\ &\le \|f_q\|\cdot\|x_\varepsilon\| + \int_A |x_\varepsilon(t)-x_0(t)||q(t)|dt \\ &\le \|f_q\| + \frac{\varepsilon}{2\|y\|}2\|q\| = \|f_q\|+\varepsilon\end{aligned}$$

由 ε 的任意性可得 $\int_a^b |q(t)|dt \le \|f_q\|$,因此 $\|f_q\| = \int_a^b |q(t)|dt$. □

3. 对于 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in\ell^2$,定义 ℓ^2 上的左移算子 A_n 为

$$A_n x = (\xi_{n+1},\xi_{n+2},\cdots).$$

证明: $A_n:\ell^2\to\ell^2$ 是有界线性算子,且 $\|A_n\|=1$.

证明 对任意的 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in\ell^2,\ x\ne 0$,有

$$\|A_n x\| = \sum_{k=n+1}^{\infty}|\xi_k|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2 = \|x\|.$$

因此, A_n 是有界的,并且 $\|A_n\|\le 1$.

另一方面, 令 $x_0=(0,0,\cdots,0,\xi_{n+1},\xi_{n+2},\cdots)\in\ell^2$, $\|x_0\|_2^2=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}|\xi_k|^2$,从而有

$$\|A_n x_0\| = \|x_0\|.$$

故 $\|A_n\|\ge 1$ 。综上讨论有 $\|A_n\|=1$. □

4. 设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间, $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间, $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ 是有界线性算子, 且存在正数 b ,使得对一切 $x\in\mathbb{X}$ 都有

$$\|Tx\|\ge b\|x\|,$$

则 $\mathcal{R}(T)$ 是 $\mathbb{Y}$ 中的闭集.

证明 设 $\{y_n\}\subset\mathcal{R}(T)$, $y_n\to y$. 由给定的不等式,存在唯一的点列 $\{x_n\}\subset\mathbb{X}$ 使得

$$Tx_n = y_n,\quad n\in\mathbb{N}$$

由于

$$\|y_n-y_m\| = \|T(x_n-x-m)\| \ge b\|x_n-x_m\|\to 0,\quad n,m\to\infty$$

所以 $\{x_n\}\subset\mathbb{X}$ 是Cauchy列, 由 $\mathbb{X}$ 的完备性存在 $x\in\mathbb{X}$ 使得 $x_n\to x$,再由算子 T 的连续性得到

$$Tx = \lim_{n\to\infty}Tx_n = \lim_{n\to\infty}y_n = y.$$

所以 $y\in\mathcal{R}(T)$,即为闭集。 □

5. 设 $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间, $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ 是有界线性算子, 且 T 是满射. 若存在正数 b , 使得对一切 $x\in\mathbb{X}$ 都有

$$\|Tx\|\geq b\|x\|,$$

则 $T^{-1}:\mathbb{Y}\to\mathbb{X}$ 也是有界线性算子, 且 $\|T^{-1}\|\leq\frac{1}{b}$.

证明　首先证明 $T^{-1}:\mathbb{Y}\to\mathbb{X}$ 的存在性. 假设 $Tx=0$, 由

$$0=\|Tx\|\geq b\|x\|$$

及 $b\neq 0$, 得到 $x=0$. 由上题可知 $T^{-1}:\mathbb{Y}\to\mathbb{X}$ 存在, 且 T^{-1} 也是线性算子.

对任意的 $y\in\mathbb{Y}$, 由于 T 为满射, 存在 $x\in\mathbb{X}$ 使得 $Tx=y$, 于是有

$$\|T^{-1}y\|=\|T^{-1}Tx\|=\|x\|\leq\frac{1}{b}\|Tx\|=\frac{1}{b}\|y\|,\quad\forall y\in\mathbb{Y}.$$

所以 T^{-1} 也是有界线性算子,并且 $\|T^{-1}\|\leq\frac{1}{b}$. □

6. 设 (a_{ij}) 是无穷矩阵, 满足条件

$$\sup_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|<+\infty.$$

对任意的 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in\ell^\infty$, 定义算子 $T:\ell^\infty\to\ell^\infty$ 使得

$$Tx=(\eta_1,\eta_2,\cdots),\quad\eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j,\quad\forall i\in\mathbb{N}.$$

证明: T 是有界线性算子,且 $\|T\|=\sup\limits_{i\in\mathbb{N}}\sum\limits_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|$.

证明　对 $\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,)\in\ell^\infty$

$$Tx=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots)=\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_{1j}\xi_j,\sum_{j=1}^{\infty}a_{2j}\xi_j,\cdots,\sum_{j=1}^{\infty}a_{nj}\xi_j,\cdots\right)$$

依范数定义

$$\begin{aligned}\|Tx\|_\infty&=\sup_{i\in\mathbb{N}}|\eta_i|=\sup_{i\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j\right|\\&\leq\left(\sup_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|\right)\left(\sup_{j\in\mathbb{N}}|\xi_j|\right)\\&=\sup_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|\|x\|_\infty\end{aligned}$$

所以 T 是有界的,并有

$$\|T\|\leq\sup_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|.$$

另一方面, 记 $M=\sup\limits_{i\in\mathbb{N}}\sum\limits_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|$. 由上确界定义,对 $\forall\varepsilon>0$,存在某个 $i_0\in\mathbb{N}$ 使得

$$\sum_{j=1}^{\infty}|a_{i_0j}|>M-\epsilon.$$

取 $x_0=(\xi_1^{(0)},\xi_2^{(0)},\cdots)\in\ell^\infty$,其中

$$\xi_j^{(0)}=\operatorname{sign}(a_{i_0j})=\begin{cases}1, & a_{i_0j}\ge 0\\ -1, & a_{i_0j}<0\end{cases}$$

则 $\|x_0\|_\infty=1$ 且

$$\|Tx_0\|_\infty=\sup_{i\in\mathbb{N}}|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j^{(0)}|\ge|\sum_{j=1}^{\infty}a_{i_0j}\xi_j^{(0)}|=\sum_{j=1}^{\infty}|a_{i_0j}|>M-\varepsilon.$$

故 $\|T\|\ge\sup\limits_{\|x_0\|=1}\|Tx_0\|\ge M-\varepsilon$. 由 ε 的任意性可得 $\|T\|\ge M$. 综上所述,

$$\|T\|=M=\sup_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|.$$

这样就证明了范数等式。 □

7. 设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, $\mathbb{Y}$ 是Banach空间, $\mathbb{X}_0$ 是 $\mathbb{X}$ 的稠密子空间 算子 $T:\mathbb{X}_0\to\mathbb{Y}$ 是有界线性算子, 证明 T 可保范延拓到 $\mathbb{X}$ 上为有界线性算子.

证明 由于 T 是 $\mathbb{X}_0$ 上的有界线性算子,则有

$$\|Tx\|\le\|T\|\|x\|,\quad\forall x\in\mathbb{X}_0$$

对任意的 $x\in\mathbb{X}$,由 $\mathbb{X}_0$ 的稠密性,存在 $x_n\in\mathbb{X}_0$, $x_n\to x$. 从而 $Tx_n\in\mathbb{Y}$ 是Cauchy列,由 $\mathbb{Y}$ 的完备性, Tx_n 在 $\mathbb{Y}$ 中有极限,定义

$$\widehat{T}x=\lim_{n\to\infty}Tx_n.$$

1) $\widehat{T}x$ 的定义与 x_n 的选择无关; 这是因为若 $z_n\in\mathbb{X}_0$, $z_n\to x$, 则 $x_n-z_n\to 0$,从而 $T(x_n-z_n)\to 0$. 特别当 $x\in\mathbb{X}_0$ 时,还有 $\widehat{T}x=Tx$.

2) 利用极限的保序性可得 $\|\widehat{T}x\|\le\|T\|\|x\|,\forall x\in\mathbb{X}$.因此, $\|\widehat{T}\|\le\|T\|$.

注意到

$$\|\widehat{T}\|=\sup_{\|x\|=1,x\in\mathbb{X}}\|\widehat{T}x\|\ge\sup_{x\in\mathbb{X}_0,\|x\|=1}\|Tx\|=\|T\|$$

所以 $\|\widehat{T}\|=\|T\|$. □

8. 设 $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间, $T\in\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, 则 $\mathcal{N}(T)$ 是 $\mathbb{X}$ 的闭子空间. $\mathbb{X}/\mathcal{N}(T)$ 表示相应的商空间, $\|[x]\|$ 是相应的范数. 在商空间上定义

$$\widehat{T}[x]=Tx,\quad\forall x\in\mathbb{X}.$$

则算子 $\widehat{T}:\mathbb{X}/\mathcal{N}(T)\to\mathbb{Y}$ 是有界线性算子.

证明 由于 T 连续, $\mathcal{N}(T)$ 是 $\mathbb{X}$ 的闭子空间. 作商空间 $\mathbb{X}/\mathcal{N}(T)$, 其上的范数为

$$\|[x]\| = \inf_{z\in\mathcal{N}(T)}\|x-z\|$$

在商空间上定义

$$\widehat{T}[x] = Tx, \quad \forall x\in\mathbb{X}.$$

于是

$$\|\widehat{T}[x]\| = \|Tx\| = \|T(x-z)\| \le \|T\|\|x-z\|, \quad \forall z\in\mathcal{N}(T).$$

所以

$$\|\widehat{T}[x]\| = \|Tx\| \le \|T\|\inf_{z\in\mathcal{N}(T)}\|x-z\| = \|T\|\|[x]\|,$$

即有 $\|\widehat{T}\|\le\|T\|$. □

§3.2 第七讲　有界线性算子代数$\mathcal{B}(\mathbb{X})$与应用

教学目的:
本节主要讨论有界线性算子空间中的特殊情况$\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{X})$, 讨论空间的性质与新的算子的构造.作为构造有界线性算子的一种方法,我们介绍算子值函数.
本节要点:
Banach 算子代数, 谱半径公式, 算子值函数.

§3.2.1 内容提要

设 $\mathbb{X}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间, 记 $\mathcal{B}(\mathbb{X})=\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{X})$ 表示所有 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{X}$ 的有界线性算子组成的集合. 在 $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ 上除线性运算外,任意的 $T,S\in\mathcal{B}(\mathbb{X})$ 还有复合运算. 并且 $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ 中的零元素就是 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{X}$ 的零算子. 此外, $\mathbb{X}$ 上的恒同算子 I 还具有性质

$$T\circ I=I\circ T=T,\quad \forall T\in\mathcal{B}(\mathbb{X}).$$

如果将复合运算简单地记为 $TS:=T\circ S$, 它可以看作是算子间的乘法, 此时恒同算子起着数 1 的作用,称 I 为单位算子. 依算子复合的性质,我们有

$$\|TS\|\le\|T\|\cdot\|S\|$$

这一表达式表明算子的乘法依算子范数是连续的。上式称为算子乘法范数的次可乘性。

对算子 T ,如果存在算子 $S\in\mathcal{B}(\mathbb{X})$ 使得

$$TS=ST=I$$

则称 S 为算子 T 的逆算子, 记为 $S=T^{-1}$. 称 $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ 为具有单位元的赋范算子代数. 如果 $\mathbb{X}$ 还是Banach空间, 此时称 $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ 为Banach算子代数.

定理 3.2.1　设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间, $T\in\mathcal{B}(\mathbb{X})$. 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|}=\inf_{n\in\mathbb{N}}\sqrt[n]{\|T^n\|}. \tag{3.2.1}$$

定义 3.2.1　设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间, $T\in\mathcal{B}(\mathbb{X})$. 记 $r(T)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|}$, 数 $r(T)$ 称为算子 T 的谱半径.

下面定理给出算子谱半径的意义.

定理 3.2.2　设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间, $T\in\mathcal{B}(\mathbb{X})$. 若 $r(T)<1$, 则 $(I-T)^{-1}$ 也是 $\mathbb{X}$ 上的有界线性算子, 且 $(I-T)^{-1}$ 由下式给出

$$(I-T)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}T^n,\quad T^0=I. \tag{3.2.2}$$

利用已知的有界线性算子去构造新的有界线性算子,或有界线性算子族. 其基本想法是利用复变函数中的幂级数展开式.

定义 3.2.2　设 $\mathbb{X}$ 是复的Banach空间, T 为 $\mathbb{X}$ 上的有界线性算子, $r(T)$ 为 T 的谱半径. 设复值函数 $f(z)$ 有幂级数展开式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

其收敛半径 $r > r(T)$. 定义算子 $f(T)$:

$$f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n.$$

首先,算子 $f(T)$ 是有意义的,且是有界线性算子. 因为对任意的 $r(T) < c < r$, 及充分大的 k ,有 $\|T^k\|^{\frac{1}{k}} < c$. 而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|c^n$ 收敛,从而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|\|T^n\|$ 收敛. 而 $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ 是Banach空间, 因此 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ 在算子范数意义下收敛,且为有界线性算子.

其次, $f(T)$ 与算子 T 是可交换的,即 $f(T)\cdot T = T\cdot f(T)$. 这一性质可由定义直接得到. 从而,对两个函数 $f(z)$ 和 $g(z)$,若 $f(T)$ 与 $g(T)$ 可定义,则 也有

$$f(T)\cdot g(T) = g(T)\cdot f(T).$$

特别地,当两个函数在其收敛域上满足关系 $g(z)f(z) = 1$ 时,我们还有

$$g(T)\cdot f(T) = f(T)\cdot g(T) = I.$$

于是算子 $f(T)$ 的算子为 $g(T)$.

定义 3.2.3　设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间, $u : (a, b) \to \mathbb{X}$ 是抽象值函数.设 $s \in (a, b)$,若存在 $y \in \mathbb{X}$ 使得

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(s+h)-u(s)}{h} - y\right\| = 0,$$

则称 $u(t)$ 在 s 处可微, y 称为 $u(t)$ 在 s 处的导数,记为 $u'(s)$.

如果 $u(t)$ 在 (a, b) 中的每一点可微,则称 $u(t)$ 在 (a, b) 中可微, $\frac{du(t)}{dt}$ (或 $u'(t)$)称为 $u(t)$ 的导函数.

§3.2.2 典型例题

Banach空间自身上的有界线性算子构成一个非较换算子代数。有界线性算子在线性方程可解性理论中起重要作用。

算子值函数与抽象微分方程相联系.

例 3.2.1　积分算子 $T : C[a, b] \to C[a, b]$ 定义为:

$$(Tx)(t) = \int_a^b k(t, s)x(s)ds, \quad (x \in C[a, b])$$

其中 $k(t,s)$ 是 $[a,b]\times[a,b]$ 上定义的实值二元连续函数. 若 $r(T)<1$,则积分方程

$$x(t)-\int_a^b k(t,s)x(s)ds = y(t), \quad y\in C[a,b]$$

存在唯一解.

例 3.2.2 设 $T(x)$ 是 $[a,b]$ 上的正连续函数, $q(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负连续函数,满足 $\int_a^b q(x)dx\int_a^x \frac{dt}{T(t)}<1$.设 $f\in C[a,b]$, 考虑常微分方程

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(T(x)\frac{dy(x)}{dx}\right)-q(x)y(x)=f(x), & x\in[a,b] \\ y(a)=0, y'(b)=0. \end{cases}$$

则微分方程存在唯一解.

证明 两端对 x 积分得到

$$T(b)y'(b)-T(x)y'(x)-\int_x^b q(s)y(s)ds=\int_x^b f(s)ds$$

所以

$$y'(x)-\frac{1}{T(x)}\int_x^b q(s)y(s)ds=\frac{1}{T(x)}\int_x^b f(s)ds.$$

再积分得到

$$y(x)-\int_a^x\frac{dt}{T(t)}\int_t^b q(s)y(s)ds=\int_a^x\frac{dt}{T(t)}\int_t^b f(s)ds$$

写成积分方程为

$$y(x)-\int_a^b k(x,s)y(s)ds=\int_a^b k_1(x,s)f(s)ds$$

其中 $k(x,s)=k_1(x,s)q(s)$,

$$k_1(x,s)=\begin{cases}\int_a^s\frac{dt}{T(t)}, & a\le s\le x\\ \int_a^x\frac{dt}{T(t)}, & x\le s\le b\end{cases}$$

直接计算有

$$\max_{x\in[a,b]}\int_a^b|k(x,s)|ds=\int_a^b q(s)\int_a^s\frac{dt}{T(t)}<1.$$

因此, 在 $C[a,b]$ 上积分方程存在唯一解,从而微分方程存在唯一解. □

例 3.2.3 设 $\mathbb{X}$ 是复的Banach空间, A 是 $\mathbb{X}$ 上的有界线性算子,定义算子值指数函数

$$e^{At}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nA^n}{n!}, \quad t\in\mathbb{R}. \tag{3.2.3}$$

则算子值三角函数可表示为

$$\sin At=\frac{e^{iAt}-e^{-iAt}}{2i}; \quad \cos At=\frac{e^{iAt}+e^{-iAt}}{2}.$$

进一步还有

$$\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}, \quad \frac{d}{dt}\sin At=A\cos At, \quad \frac{d}{dt}\cos At=-A\sin At.$$

算子值指数函数的引入对于求解微分方程是很有帮助的.大家知道,常微分方程

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t), \quad x(0) = x_0$$

其中 a 是常数,其解 $x(t)$ 为 $x(t) = e^{at}x_0$.

若 $\mathbb{X}$ 是一个Banach空间, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$,空间 $\mathbb{X}$ 上的方程

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), \quad t > 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.2.4}$$

其中 $x(t)$ 是 $[0, +\infty)$ 上定义在 $\mathbb{X}$ 中取值的抽象函数. 可直接验证,它的解为 $x(t) = e^{At}x_0$. 这一结果在求解微分方程中有重要的应用.

例 3.2.4　求解下述齐次 n 阶常系数常微分方程初值问题:

$$y^{(n)}(t) + a_1y^{(n-1)}(t) + a_2y^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1}y'(t) + a_ny(t) = 0,$$

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \quad \cdots \quad y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}.$$

解　首先,将高阶微分方程化为一阶微分方程组.令

$$x_1(t) = y(t),\ x_2(t) = y'(t), \cdots, x_n(t) = y^{(n-1)}(t).$$

则

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

$$(x_1(0), x_2(0), \cdots, x_n(0))^\tau = (y_0, y_1, \cdots, y_{n-1})^\tau.$$

为使上述方程组具有(3.2.4)的形式. 取空间 $\mathbb{X} = \mathbb{C}^n$, 则 $\mathbb{X}$ 是Banach空间.令

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^\tau,$$

$$X_0 = (y_0, y_1, \cdots, y_{n-1})^\tau,$$

A 是有界线性算子.则原方程化为与之等价的向量值微分方程

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = AX(t), \quad t > 0, \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

从而方程的解为

$$X(t) = e^{At}X_0.$$

因此,原方程的解 $y(t)$ 即为 $X(t)$ 的第一分量. □

例 3.2.5　考虑 $M/M/1$ 经典排队模型:

$$\begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ \frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda p_{n-1}(t) - (\mu+\lambda)p_n(t) + \mu p_{n+1}(t), \quad n \geq 1, \end{cases} \tag{3.2.5}$$

其中 $p_n(t)$ 是时刻 t 系统中有 n 个顾客的概率, $\lambda > 0$ 是顾客的到达率, $\mu > 0$ 是系统的完成率. 初始条件为

$$p_0(0) = 1, \quad p_n(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.2.6}$$

这是一个无穷方程组.为解方程,根据问题的实际背景选择空间 $\mathbb{X} = \ell^1$. 并记

$$P(t) = (p_0(t), p_1(t), p_2(t), \cdots, p_n(t), p_{n+1}(t), \cdots)^\tau$$

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \mu & 0 & & & & & \\ \lambda & -(\lambda+\mu) & \mu & 0 & & & & \\ 0 & \lambda & -(\lambda+\mu) & \mu & 0 & & & \\ & 0 & \lambda & -(\lambda+\mu) & \mu & 0 & & \\ & & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \\ & & & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \end{pmatrix}_{\infty\times\infty}$$

则方程(3.2.5)–(3.2.6)可写成空间 $\mathbb{X}$ 中抽象发展方程:

$$\begin{cases} \dfrac{dP(t)}{dt} = AP(t), \quad t > 0, \\ P(0) = P_0 = (1, 0, 0, \cdots, \cdots)^\tau. \end{cases} \tag{3.2.7}$$

关于方程(3.2.7)的可解性以及解的表达,有下面的结果.

命题 3.2.1　算子 A 是 $\mathbb{X}$ 中的有界线性算子,从而方程(3.2.7)的解为 $P(t) = e^{At}P_0$.

证明　对任意的 $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{X} = \ell^1$, 有

$$Ax = y, \quad y = (y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n, y_{n+1}, \cdots)$$

其中

$$y_0 = -\lambda x_0 + \mu x_1, \quad y_n = \lambda x_{n-1} - (\lambda+\mu)x_n + \mu x_{n+1}, n \geq 1.$$

易见 A 是线性算子. 进一步有

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_1 &= \sum_{n=0}^{\infty}|y_n| = |-\lambda x_0+\mu x_1| + \sum_{n=1}^{\infty}|\lambda x_{n-1}-(\lambda+\mu)x_n+\mu x_{n+1}| \\
&\le \lambda|x_0|+\mu|x_1|+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}|x_{n-1}|+(\lambda+\mu)\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|+\mu\sum_{n=1}^{\infty}|x_{n+1}| \\
&\le 2\lambda\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|+2\mu\sum_{n=0}^{\infty}|x_n| \\
&= 2(\lambda+\mu)\|x\|_1
\end{aligned}$$

所以 A 是有界线性算子, 且 A 的范数有估计 $\|A\|_1 \le 2(\lambda+\mu)$.因此方程(3.2.7)有解,且解由 $P(t)=e^{At}P_0$ 给出. □

§3.2.3 练习题七解答

1.在 $\mathbb{R}^n$ 中考虑微分方程

$$\ddot{y} = A\dot{y} + By, \quad y(0)=y_0, \quad \dot{y}(0)=y_1$$

其中 A , B 是 n 阶方阵. 证明方程存在唯一解,并给出解公式.

证明 设 $z(t)=\dot{y}(t)$, 定义矩阵

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ B & A \end{pmatrix}$$

则原来的二阶方程写成 R^{2n} 中的一阶方程为

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \mathcal{A}\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

利用矩阵指数函数给出一阶方程的解

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{\mathcal{A}t}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

§3.3 第八讲 赋范线性空间上的有界线性泛函

教学目的:
给出了有界线性泛函空间 $\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{C})$, 在同构意义下给出泛函表示.
本节要点:
某些空间的有界线性泛函表示.

§3.3.1 内容提要

设 $\mathbb{X}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间,若 $f:\mathbb{X}\to\mathbb{K}$ 是有界线性算子, 则 f 称为 $\mathbb{X}$ 上有界线性泛函(bounded linear functional), 按照定义3.1.1, 若 f 是 $\mathbb{X}$ 上的有界线性泛函, 则存在常数 $c>0$,使得对所有 $x\in\mathbb{X}$ 都有

$$|f(x)|\leq c\|x\|.$$

并且按照定义3.1.2, f 的范数 $\|f\|$ 定义为

$$\|f\|=\sup_{x\in\mathbb{X},x\neq\theta}\frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

同样的还可以得到

$$\|f\|=\sup_{x\in\mathbb{X},\|x\|=1}|f(x)|=\sup_{x\in\mathbb{X},\|x\|\leq 1}|f(x)|.$$

这时,对每一个 $x\in\mathbb{X}$ 都有

$$|f(x)|\leq\|f\|\cdot\|x\|.$$

由定理3.1.1 可知下面结论成立.

定理 3.3.1 设 f 是赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 上的线性泛函, 则 f 在 $\mathbb{X}$ 上连续,当且仅当 f 在 $\mathbb{X}$ 上是有界的.

引理 3.3.1 赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 上非零线性泛函 f 不连续(无界)的充要条件是 $\mathcal{N}(f)$ 在 $\mathbb{X}$ 中稠密.

定义 3.3.1 设 $\mathbb{X}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间, $\mathbb{X}$ 上所有有界线性泛函组成的赋范线性空间 $\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{K})$ 称为 $\mathbb{X}$ 的对偶空间或者称为共轭空间,记为 $\mathbb{X}^*$,即 $\mathbb{X}^*=\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{K})$. 对每一个 $f\in\mathbb{X}^*$, f 的范数定义为:

$$\|f\|=\sup_{x\in\mathbb{X},x\neq\theta}\frac{|f(x)|}{\|x\|}=\sup_{x\in\mathbb{X},\|x\|=1}|f(x)|.$$

定理 3.3.2 赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 的对偶空间 $\mathbb{X}^*$ 是Banach空间.

定义 3.3.2 设 $(\mathbb{X}, \|\cdot\|), (\mathbb{Y}, \|\cdot\|)$ 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间，$T: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是映射，若T是线性算子又是双射,且满足

$$\|Tx\|_{\mathbb{Y}} = \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{X},$$

则称 T 是 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{Y}$ 的等距同构映射.

若存在 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{Y}$ 的等距同构映射,则称 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是等距同构的. 若两个空间 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是等距同构的,则把它们看作是同一的.

§3.3.2 常见空间的对偶空间–泛函表示定理

例 3.3.1 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ 的对偶空间是 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, 即 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)^* = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. 对个 $f \in (R^n, \|\cdot\|_2)^*$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k \beta_k, \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \beta_k = f(e_k) \tag{3.3.1}$$

$f \to (f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n))$ 是泛函表示。

例 3.3.2 ℓ^1 的对偶空间是 ℓ^∞ , 即 $(\ell^1)^* = \ell^\infty$. 对任意 $x = \{\xi_n\} \in \ell^1$, $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$. 令 $\alpha_k = f(e_k)(k \in \mathbb{N})$,则对任意 $x = \{\xi_n\} \in \ell^1$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \alpha_k \tag{3.3.2}$$

$f \to (f(e_1), f(e_2), \cdots,) \in \ell^\infty$ 是泛函表示。

例 3.3.3 ℓ^p 的对偶空间是 $\ell^q \left(1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, 即 $(\ell^p)^* = \ell^q$. 对任意 $x = \{\xi_n\} \in \ell^p$,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k.$$

利用 f 是有界线性泛函,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \alpha_k \tag{3.3.3}$$

令 $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\alpha \in \ell^q$ 由 f 唯一确定,是泛函表示。

例 3.3.4 $c_0^* = \ell^1$.这里 c_0 是收敛于零的序列的全体,按照上确界范数成为 Banach空间. 取 c_0 的 Schauder基 $\{e_n\}$,对每个 $x = \{\xi_n\} \in c_0$, x 有唯一的表示形式 $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$ 。

对 $f \in c_0^*$,令 $\alpha_i = f(e_i)(i \in \mathbb{N})$, 则在等距同构映射下,每一个 $f \in c_0^*$ 对应于 $\alpha = \{\alpha_n\} \in \ell^1$,使得

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \alpha_i, \quad \forall x = \{\xi_n\} \in c_0 \tag{3.3.4}$$

并且 $\|f\| = \|\alpha\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|$.

例 3.3.5 $(L^p[a,b]])^* = L^q[a,b]$ $\left(1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$. 在等距同构映射下,每一个 $f \in (L^p[a,b])^*$ 都存在唯一的 $\widetilde{f} \in L^q[a,b]$ 使得

$$f(x) = \int_a^b x(t)\widetilde{f}(t)dt, \quad \forall x \in L^p[a,b], \tag{3.3.5}$$

并且 $\|f\| = \|\widetilde{f}\|_q = \left(\int_a^b |\widetilde{f}(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$.

例 3.3.6 $(L[a,b])^* = L^\infty[a,b]$. 在等距同构映射下,每一个 $f \in (L[a,b])^*$,对应于 $\widehat{f} \in L^\infty[a,b]$ 使得

$$f(x) = \int_a^b x(t)\widehat{f}(t)dt, \quad \forall x \in L[a,b]. \tag{3.3.6}$$

并且 $\|f\| = \|\widehat{f}\|_\infty$,这里

$$\|\widehat{f}\|_\infty = \inf_{m(E)=0, E\subset[a,b]} \sup_{t\in[a,b]\setminus E} |\widehat{f}(t)|$$

$L^\infty[a,b]$ 中的元素 $\widehat{f}$ 称为本性有界可测函数,即除去一个零测度集 E 以外, $\widehat{f}(t)$ 在 $[a,b]\setminus E$ 上是有界的.

例 3.3.7 $(C[a,b])^* = NBV[a,b]$. 空间 $BV[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上所有有界变差函数组成的空间, 用 $NBV[a,b]$ 表示 $BV[a,b]$ 中满 足规范化条件的元组成的集合

$$NBV[a,b] = \{f \in BV[a,b] \,\big|\, f(a) = 0, f(t) = \lim_{s\to t^+} f(s)\}.$$

即右连续,左端点为零的所有的有界变差函数. $NBV[a,b]$ 是 $BV[a,b]$ 的闭子空间.

在等距同构映射下,每个 $f \in (C[a,b])^*$ 对应于 $\widehat{f} \in NBV[a,b]$,使得对任意的 $x \in C[a,b]$,泛函 f 仍然可以由 $\widehat{f}$ 按

$$f(x) = \int_a^b x(t)d\widehat{f}(t), \tag{3.3.7}$$

的形式表达出来,上式积分为Riemann-Stieltjes积分. 并且 $\|f\| = \bigvee_a^b(\widehat{f})$.

§3.3.3 典型例题

有界线性泛函是有界线性算子的一种特殊形式, 有界线性泛函空间称为对偶空间。在等距同构意义下给出有界线性泛函的表示。

对于具体的空间找出对偶空间的表现形式-泛函表示具有实际意义.

例 3.3.8 在闭区间 $[a,b]$ 上取一固定点 t_0 ,定义泛函 $f: C[a,b] \to \mathbb{R}$ (这里 $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ 是实空间), 使得对每一个 $x \in C[a,b]$

$$f(x) = x(t_0)$$

显然 f 是线性的,由

$$|f(x)| = |x(t_0)| \le \|x\|_\infty$$

得到 f 是有界的,且 $\|f\| \le 1$.另一方面,取 $x_0(t) \equiv 1$, 则 $x_0 \in C[a,b]$,且

$$|f(x_0)| = |x_0(t_0)| = 1 = \|x_0\|_\infty.$$

于是 $\|f\| \ge 1$,综上所述可得 $\|f\| = 1$.

例 3.3.9 在闭区间 $[a,b]$ 上取一固定点 t_0 ,定义泛函 $f:(C[a,b],\|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}$ 使得

$$f(x) = x(t_0), \quad \forall x \in (C[a,b],\|\cdot\|_1)$$

显然 f 是线性的,但 f 是无界泛函.

证明 考虑函数列

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[a, t_0 - \frac{1}{n}\right] \bigcup \left[t_0 + \frac{1}{n}, b\right], \\ n - n^2|t - t_0|, & t \in \left[t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}\right], \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

直接计算有

$$\|x_n\|_1 = \int_a^b |x_n(t)|dt = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$f(x_n) = x_n(t_0) = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

因此,有 $\sup\limits_{\|x\|_1=1} |f(x)| = \infty$. □

例 3.3.10 设 $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$ 是同一数域上的赋范线性空间,乘积空间 $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ 上取范数为 $\|(x_1,x_2)\| = \|x_1\| + \|x_2\|$,则

$$(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2)^* = \mathbb{X}_1^* \times \mathbb{X}_2^*$$

其中 $\mathbb{X}_1^* \times \mathbb{X}_2^*$ 上的范数定义为 $\|(f_1,f_2)\| = \max\{\|f_1\|,\|f_2\|\}$.

证明 对每个 $(f_1,f_2) \in \mathbb{X}_1^* \times \mathbb{X}_2^*$,任意的 $(x_1,x_2) \in \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$,定义泛函 F 如下

$$F(x_1,x_2) := f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

易见, $|F(x_1,x_2)| \le \max\{\|f_1\|,\|f_2\|\}\|(x_1,x_2)\|$, 所以 F 是有界线性泛函,且 $\|F\| \le \max\{\|f_1\|,\|f_2\|\}$.

对任意的 $F \in (\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2)^*$, 记 $f_1(x_1) = F(x_1,\theta)$, $f_2(x_2) = F(\theta,x_2)$,则有

$$|f_1(x_1)| \le \|F\|\|(x_1,\theta)\|, \quad |f_2(x_2)| \le \|F\|\|(\theta,x_2)\|$$

所以 f_1, f_2 分别是 $\mathbb{X}_1$, $\mathbb{X}_2$ 上的有界线性泛函,且有 $\|f_1\| \le \|F\|, \|f_2\| \le \|F\|$.

进一步, $(x_1,x_2) = (x_1,\theta) + (\theta,x_2)$,

$$F(x_1,x_2) = F(x_1,\theta) + F(\theta,x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2).$$

因此,对任意的 $F \in (\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2)^*$,我们得到表示 $F = (f_1,f_2)$,且有 $\|F\| = \max\{\|f_1\|,\|f_2\|\}$. 所以 $(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2)^* = \mathbb{X}_1^* \times \mathbb{X}_2^*$. □

例 3.3.11　$(L[a,b])^* = L^\infty[a,b]$. 在等距同构映射下,每一个 $f \in (L[a,b])^*$,对应于 $\widehat{f} \in L^\infty[a,b]$ 使得

$$f(x) = \int_a^b x(t)\widehat{f}(t)dt, \quad \forall x \in L[a,b].$$

并且 $\|f\| = \|\widehat{f}\|_\infty$,这里

$$\|\widehat{f}\|_\infty = \inf_{m(E)=0, E\subset[a,b]} \sup_{t\in[a,b]\setminus E} |\widehat{f}(t)|$$

$L^\infty[a,b]$ 中的元素 $\widehat{f}$ 称为本性有界可测函数,即除去一个零测度集 E 以外, $\widehat{f}(t)$ 在 $[a,b]\setminus E$ 上是有界的.

证明　设 $s \in [a,b]$,函数 $\chi_{[a,s]}(t)$ 是 $[a,s]$ 的特征函数.明显地, $\chi_{[a,s]} \in L[a,b]$,对任意的 $a \le s < r \le b$,

$$\chi_{[s,r]}(t) = \chi_{[a,r]}(t) - \chi_{[a,s]}(t)$$

且

$$\|\chi_{[s,r]}\|_1 = \int_a^b |\chi_{[s,r]}(t)|dt = (r-s)$$

设 $f \in (L[a,b])^*$,考虑

$$g(s) = f(\chi_{[a,s]}), \quad s \in [a,b].$$

上式定义一个作为 s 的函数,对任意的 $a \le s < r \le b$,

$$|g(r) - g(s)| = |f(\chi_{[s,r]}| \le \|f\|\|\chi_{[[s,r]}\|_1 = \|f\|(r-s)$$

所以 $g(s)$ 是Lipschitz连续函数(绝对连续),从而几乎处处可微,并且在可微点处的导数满足 $|g'(s)| \le \|f\|$. 令 $\widehat{f}(s) = g'(s)$,所以 $\widehat{f}(s)$ 是本性有界函数,且

$$\|\widehat{f}\|_\infty \le \|f\|.$$

对任意的 $x \in L[a,b]$,依可积函数的性质,存在阶梯函数列 $\{x_n(t)\} \subset L[a,b]$,

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{N_n} x_k^{(n)} \chi_{[s_{k-1}^{(n)}, s_k^{(n)}]}(t)$$

使得 $\|x_n - x\| \to 0, (n \to \infty)$,于是 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

另一方面,由 f 是线性泛函,

$$\begin{aligned} f(x_n) &= \sum_{k=1}^{N_n} x_k^{(n)} f(\chi_{[s_{k-1}^{(n)}, s_k^{(n)}]}) = \sum_{k=1}^{N_n} x_k^{(n)} [g(s_k^{(n)}) - g(s_{k-1}^{(n)})] \\ &= \sum_{k=1}^{N_n} x_k^{(n)} g'(\xi_k^{(n)}) \Delta s^{(n)} \\ &= \sum_{k=1}^{N_n} x_k^{(n)} \widehat{f}(\xi_k^{(n)}) \Delta s^{(n)} \end{aligned}$$

于是,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N_n}x_k^{(n)}\widehat{f}(\xi_k^{(n)})\Delta s^{(n)}=\int_a^b x(t)\widehat{f}(t)dt.$$

现对任意的 $\widehat{f}\in L^\infty[a,b]$, 定义泛函

$$f(x)=\int_a^b x(t)\widehat{f}(t)dt,\quad \forall x\in L[a,b].$$

积分有意义,且关于 x 是线性的,进一步有

$$|f(x)|\le\int_a^b|x(t)|\widehat{f}(t)|dt\le\|\widehat{f}\|_\infty\int_a^b|x(t)|dt=\|\widehat{f}\|_\infty\|x\|_1.$$

由此得到 $\|f\|\le\|\widehat{f}\|_\infty$.

注意到映射 $T:(L[a,b])^*\to L^\infty[a,b]$,由下式定义

$$Tf=\widehat{f}(t)=g'(t),\quad g(t)=f(\chi_{[a,t]})$$

是线性算子,且 $\|Tf\|_\infty=\|\widehat{f}\|_\infty=\|f\|$.因此, $(L[a,b])^*=L^\infty[a,b]$. □

§3.3.4 练习题八解答

1. 设 $\mathbb{X}$ 是 n 维线性空间, $\mathbb{Y}$ 是 $\mathbb{X}$ 的真子空间, 取一固定点 $x_0\in\mathbb{X}\backslash\mathbb{Y}$. 证明在 $\mathbb{X}$ 上存在一个线性泛函 f , 使得 $f(x_0)=1$,且对一切 $x\in\mathbb{Y}$ 有 $f(x)=0$.

证明　由于 $\mathbb{X}$ 是 n 维线性空间, $\mathbb{Y}$ 是其真子空间, 所以 $\mathbb{Y}$ 是有限维的，设其维数为 $m(m<n)$, $e_1,e_2,\cdots,e_m$ 为 $\mathbb{Y}$ 中的一组基, 它在 $\mathbb{X}$ 中也是一线性无关组. 由于 $x_0\notin\mathbb{Y}$,

$$e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_m,\ x_0$$

也是一线性无关组,记 $e_{m+1}=x_0$. $e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_m,\ e_{m+1}$ 可扩充为 $\mathbb{X}$ 的一组基, 设其为 $e_1,e_2,\cdots,e_m,e_{m+1},\cdots e_n$. 对任意的 $x\in\mathbb{X}$,存在数组使得 $x=\sum\limits_{i=1}^n\xi_ie_i$. 在 $\mathbb{X}$ 上按如下定义泛函

$$f(x)=\sum_{i=m+1}^n\xi_i,\quad\forall x=\sum_{i=1}^n\xi_ie_i,$$

下面证明 f 为一线性泛函.

对于任意的 $x,y\in\mathbb{X}$, 可设 $x=\sum\limits_{i=1}^n\xi_ie_i,\ y=\sum\limits_{i=1}^n\alpha_ie_i$, 依 f 的定义有

$$f(x+y)=f\left(\sum_{i=1}^n(\xi_i+\alpha_i)e_i\right)=\sum_{i=m+1}^n(\xi_i+\alpha_i)=\sum_{i=m+1}^n\xi_i+\sum_{i=m+1}^n\alpha_i=f(x)+f(y)$$

并且

$$f(\beta x)=f\left(\sum_{i=1}^n\beta\xi_ie_i\right)=\sum_{i=m+1}^n\beta\xi_i=\beta\sum_{i=m+1}^n\xi_i=\beta f(x)$$

所以 f 为 $\mathbb{X}$ 上的一个线性泛函. 由于 $\mathbb{Y}=\operatorname{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$,依 f 的定义有

$$f(y)=0,\quad \forall y=\sum_{j=1}^{m}\xi_j e_j,$$

以及 $f(x_0)=1$. □

2.设 f 是 n 维线性空间 $\mathbb{X}$ 上的非零线性泛函. 证明 f 的零空间 $\mathcal{N}(f)$ 是 $n-1$ 维的.

证明 设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 $\mathbb{X}$ 的基. 令 $\beta_1=f(e_1),\ \beta_2=f(e_2),\cdots,\beta_n=f(e_n)$, 由于 $f\neq 0$, 则有 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 不全为零,不妨设 $\beta_n\neq 0$. 令

$$\begin{aligned}
&\gamma_1=e_1-\tfrac{\beta_1}{\beta_n}e_n,\\
&\gamma_2=e_2-\tfrac{\beta_2}{\beta_n}e_n\\
&\cdots\cdots\\
&\gamma_i=e_i-\tfrac{\beta_i}{\beta_n}e_n\\
&\cdots\cdots\\
&\gamma_{n-1}=e_{n-1}-\tfrac{\beta_{n-1}}{\beta_n}e_n.
\end{aligned}$$

则它们是 $n-1$ 个线性无关向量. 且 $f(\gamma_i)=\beta_i-\frac{\beta_i}{\beta_n}\beta_n=0$, 所以 $\gamma_i\in\mathcal{N}(f),\ i=1,2,\cdots n-1$, 从而有 $\dim\mathcal{N}(f)\geq n-1$.另一方面

$$\mathbb{X}=\operatorname{span}\{e_n\}+\mathcal{N}(f).$$

所以 $\dim\mathcal{N}(f)\leq n$, 因此可得 $\dim\mathcal{N}(f)=n-1$. □

3. 求 $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_\infty)$ 的对偶空间,这里

$$\|x\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}|\xi_i|,\quad (x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n)$$

解 设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基, $x=\{\xi_k\}\in\mathbb{R}^n$, $x=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k e_k$, 在 $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_\infty)$ 的对偶空间中任取一元素 f ,

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k f(e_k),\quad \forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n.$$

令 $\alpha_i=f(e_i),\ (i=1,2,\cdots,n)$, 并令 $a=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 则 $a\in\mathbb{R}^n$.

$$|f(x)|\leq\sum_{k=1}^{n}|\xi_k||\alpha_k|\leq\max_{1\leq k\leq n}|\xi_k|\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|=\|x\|_\infty\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|.$$

所以 $\|f\|\leq\sum\limits_{k=1}^{n}|\alpha_k|$.

特别取 $x_0=(\operatorname{sign}(\alpha_1),\operatorname{sign}(\alpha_2),\cdots,\operatorname{sign}(\alpha_n))\in\mathbb{R}^n$, 则有 $\|x_0\|_\infty=1$, 且 $f(x_0)=\sum\limits_{k=1}^{n}|\alpha_k|$.所以 $\|f\|\geq\sum\limits_{k=1}^{n}|\alpha_k|$. 因此 $\|f\|=\sum\limits_{k=1}^{n}|\alpha_k|$.

定义

$$Tf = \alpha = \{f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n))\}$$

α 可由 f 唯一确定，T 是线性的单射并且是满射. 这是因为 对每个 $\alpha \in \mathbb{R}^n$，$\forall x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in \mathbb{R}^n$，

$$f_\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \alpha_i$$

是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性泛函。且 $\|f_\alpha\| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = \|a\|_1$. T 是 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)^* \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ 的等距同构映射。因此在等距同构意义下有 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)^* = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$. □

4. 证明 c_0 的对偶空间是 ℓ^1 .

证明 设 $\{e_n\}$, $e_n = \{\delta_{ni}\}_{i=1}^{\infty}$. 则 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 c_0 的Schauder 基.即对于 $\forall \eta \in c_0$，$\eta = \{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$，那么有表示式 $\eta = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i e_i$.

对于任意的 $f \in (c_0)^*$，f 是连续线性泛函，于是有

$$f(\eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k f(e_k).$$

设 $\alpha_n = f(e_n)$,并令 $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$，下面证明 $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^1$.

对任意的自然数 n，定义 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots)$，其中

$$\xi_k = \begin{cases} \operatorname{sign}(\alpha_k), & k \le n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

由定义可知 $\xi \in c_0$，且 $\|\xi\|_\infty = 1$，则有

$$f(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \le \|f\| \|\xi\|_\infty = \|f\|.$$

对于任意的 $n > 0$，

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \le \|f\|.$$

所以 $\|\alpha\|_1 \le \|f\|$，即有 $\alpha \in \ell^1$.

其次，对于任意的 $\beta = \{\beta_i\} \in \ell^1$，定义泛函

$$f_\beta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \beta_n, \quad x = \{x_i\} \in c_0,$$

则有

$$|f_\beta(x)| \le \sum_{i=1}^{\infty} |x_n||\beta_n| \le \max |x_n| \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| < +\infty.$$

所以 $f_\beta(x)$ 对 $\forall x\in c_0$ 都有意义.特别地 f_β 还是线性泛函,因为

$$f_\beta(ax+by)=\sum_{i=1}^{\infty}(ax_n+by_n)\beta_n=af(x)+bf(y),$$

所以 f_β 是有界线性泛函， $\|f_\beta\|\le\|\beta\|_1$. 两部分证明综合起来有 $\|f\|=\|\alpha\|_1$.

定义算子 $T:(c_0)^*\to\ell^1$, $Tf=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,)=\alpha\in\ell^1$, 显然 α 由 f 唯一确定, T 是单射. $\forall\beta\in\ell^1$, $f_\beta\in(c_0)^*$, $Tf_\beta=\beta$, 所以 T 是满射, 而

$$\begin{aligned}T(b_1f_1+b_2f_2) &= \{(b_1f_1(e_n)+b_2f_2(e_n)\}_{n=1}^{\infty}\\ &= b_1\{f_1(e_n)\}_{n=1}^{\infty}+b_2\{f_2(e_n)\}_{n=1}^{\infty}\\ &= b_1Tf_1+b_2Tf_2.\end{aligned}$$

所以 T 是线性映射, 并且 $\|Tf\|=\|f\|$ 。因此 $(c_0)^*=\ell^1$. □

5. 在实空间 $C[a,b]$ 上定义泛函 f :对每个 $x\in C[a,b]$,

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x(t_i),$$

其中 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 是 $[a,b]$ 中 n 个不同的固定点, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是一组固定的实数. 证明 f 是有界的, 并求出 f 的范数.

证明 明显地， f 是线性泛函. 对任意的 $x\in C[a,b]$,

$$|f(x)|=|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x(t_i)|\le(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|)\max_{t\in[a,b]}|x(t)|\le\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\right)\|x\|_\infty,$$

所以 f 是有界线性泛函，且 $\|f\|\le\sum\limits_{i=1}^{n}|\lambda_i|$.

另一方面，可构造一个 $[a,b]$ 上的连续函数 x_0 如下

$$x_0(t)=\begin{cases}\operatorname{sign}(\lambda_i), & \text{当 } t=t_i\\ \text{相邻两点线性连结}, & \text{当 } t\ne t_i\end{cases}$$

于是有

$$f(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x(t_i)=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|.$$

因此 $\|f\|=\sum\limits_{i=1}^{n}|\lambda_i|$. □

5. 设 $t_0\in(a,b)$,定义 $[a,b]$ 上的函数

$$H(t-t_0)=\begin{cases}1, & t\ge t_0,\\ 0, & t<t_0.\end{cases}$$

证明 $H(t)\in NBV[a,b]$,且 对任何的 $x\in C[a,b]$,

$$x(t_0)=\int_a^b x(t)dH(t).$$

§3.4 第九讲　有界线性算子的构造

教学目的:
本节主要应用有界线性泛函构造线性算子, 并给出有限维空间上线性算子的性质.
本节要点:
有限秩算子的构造,有限维空间上线性算子的性质.

§3.4.1 内容提要

作为有界线性泛函的一个应用,我们构造非零有界线性算子.

设 $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间,假定 $\mathbb{X}^*$ 存在非零元. 设 $y_1, y_2, \cdots, y_m \in \mathbb{Y}$ 是一组元, $f_1, f_2, \cdots, f_m \in \mathbb{X}^*$ 是一组有界线性泛函,定义算子 $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$,

$$Tx = \sum_{k=1}^{m} f_k(x)y_k, \quad \forall x \in \mathbb{X}. \tag{3.4.1}$$

对任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, x_1, x_2 \in \mathbb{X}$, 有 $T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2$, 且

$$\|Tx\| = \left\| \sum_{k=1}^{m} f_k(x)y_k \right\| \le \sum_{k=1}^{m} |f_k(x)| \|y_k\| \le \left(\sum_{k=1}^{m} \|f_k\| \|y_k\| \right) \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

这表明 T 是有界线性算子. 特别地, T 的值域 $\mathcal{R}(T)$ 的维数不超过 m .

定义 3.4.1　设 $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间, $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. 如果 $\mathcal{R}(T)$ 是有限维的, 则称 T 为有限秩算子.

定理 3.4.1　设 $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间, $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. 如果 $\dim \mathcal{R}(T) = m$, 则存在 $\mathbb{Y}$ 中的一个线性无关组 $\{y_1, y_2, \cdots, y_m\} \subset \mathbb{Y}$ 以及有限个有界线性泛函 $f_1, f_2, \cdots, f_m \in \mathbb{X}^*$ 使得

$$Tx = \sum_{k=1}^{m} f_k(x)y_k, \quad \forall x \in \mathbb{X}. \tag{3.4.2}$$

单纯的值域有限维并不能保证算子 T 的有界性. 请看下面例子.

例 3.4.1　设空间为 $(C[a, b], \|\cdot\|_1)$. 设 $s_0, s_1, s_2, \cdots, s_n \in (a, b)$ 是一组互异的点. 定义 $(C[a, b], \|\cdot\|_1)$ 到 $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ 中的线性算子 T 如下

$$Tf(x) = \sum_{k=0}^{n} f(s_k)x^k, \quad \forall f \in C[a, b].$$

T 是 $(C[a, b], \|\cdot\|_1)$ 上定义的线性算子,值域是有限维空间 $(P_n[a, b], \|\cdot\|_\infty)$. 但 T 是无界线性算子.

设 $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ 是在同一数域 $\mathbb{K}$ 上的有限维线性空间,设 $\dim\mathbb{X}=n$， $\dim\mathbb{Y}=m$. 并设 $E=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ 是 $\mathbb{X}$ 中选定的一个基, $B=\{b_1,b_2,\dots,b_m\}$ 是 $\mathbb{Y}$ 中选定的一个基,且 E 和 B 中的基元保持固定地秩序.

考虑任意的线性算子 $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$. 每一个 $x\in\mathbb{X}$, 在基 E 下有唯一表示

$$x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\cdots+\xi_ne_n. \tag{3.4.3}$$

由于 T 是线性的, 元 x 在映射 T 下的像为

$$y=Tx=T\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_ke_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\xi_kTe_k \tag{3.4.4}$$

由于表达式(3.4.3)是唯一的, 可见 T 完全有 $Te_1,Te_2,\dots,Te_n$ 唯一确定.

另一方面,元 x 在 T 下的像 y 以及每一个 Te_k 在 $\mathbb{Y}$ 的基 B 下有唯一的表示

$$Tx=y=\sum_{j=1}^{m}\eta_jb_j,$$

$$Te_k=\sum_{j=1}^{m}t_{jk}b_j,\quad (k=1,\dots,n).$$

把上面二式代入(3.4.4),得到

$$\sum_{j=1}^{m}\eta_jb_j=y=\sum_{k=1}^{n}\xi_kTe_k=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\sum_{j=1}^{m}t_{jk}b_j=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}t_{jk}\xi_k\right)b_j.$$

因为 $\{b_1,b_2,\dots,b_m\}$ 线性无关,所以各个 b_j 的系数相等,即

$$\eta_j=\sum_{k=1}^{n}t_{jk}\xi_k\quad (j=1,2,\dots,m) \tag{3.4.5}$$

于是, $x=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_ke_k$ 在 T 下的像 $y=Tx=\sum\limits_{j=1}^{m}\eta_jb_j$ 由(3.4.5)式确定.

等式(3.4.5)可以写为矩阵运算的形式

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t_{11}&t_{12}&\dots&t_{1n}\\ t_{21}&t_{22}&\dots&t_{2n}\\ \vdots&\vdots&\dots&\vdots\\ t_{m1}&t_{m2}&\dots&t_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}, \tag{3.4.6}$$

这个等式给出了 x 在基 E 下的系数与 Tx 在基 B 下系数之间的关系.

记

$$T_{EB}=\begin{pmatrix}t_{11}&t_{12}&\dots&t_{1n}\\ t_{21}&t_{22}&\dots&t_{2n}\\ \vdots&\vdots&\dots&\vdots\\ t_{m1}&t_{m2}&\dots&t_{mn}\end{pmatrix} \tag{3.4.7}$$

则 n 维线性空间 $\mathbb{X}$ 到 m 维线性空间 $\mathbb{Y}$ 的线性算子 T 对应于一个矩阵 T_{EB} . 反过来,每一个 m 行 n 列的矩阵 T_{EB} 决定了一个 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{Y}$ 的线性算子 T .

定理 3.4.2　设 $\mathbb{X}$ 是 n 维赋范线性空间, $\mathbb{Y}$ 是 m 维赋范线性空间, 则 $\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ 与 $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ 线性同构, 其中 $\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ 表示所有 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{Y}$ 的线性算子组成的线性空间.

定理 3.4.3　设 $\mathbb{X}$ 是有限维赋范线性空间, $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间, $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ 是线性算子,则 T 是有界的.

§3.4.2 典型例题

有限秩算子是有界线性算子中较简单的一种,当空间 $\mathbb{X}$ 与 $\mathbb{Y}$ 都是有限维空间时, 线性算子可表示成矩阵形式。

这里强调算子 T 确定的矩阵 T 是系数间的转换矩阵是基底转换矩阵的转置。

例 3.4.2　设 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, 使得对 $x=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2$

$$Tx=(\xi_1,\xi_2,-\xi_1-\xi_2)^T.$$

求 T 的值域 $\mathcal{R}(T)$, 零空间 $\mathcal{N}(T)$ 以及 T 对应的矩阵.

解　我们先求算子 T 对应的矩阵

$$Tx=(\xi_1,\xi_2,-\xi_1-\xi_2)^T=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}$$

所以

$$\mathcal{R}(T)=\{(\xi_1,\xi_2,-\xi_1-\xi_2)\mid \xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}\}=\{\xi_1+\xi_2+\xi_3=0\mid \xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}\}$$

即值域在 $\mathbb{R}^3$ 中的平面 $\xi_1+\xi_2+\xi_3=0$ 上.

$$\mathcal{N}(T)=\{(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2\mid Tx=0\}=\{(0,0)\}.$$

即零空间只有原点. □

§3.4.3 练习题九解答

1. 设空间 $(C[a,b],\|\cdot\|)$, 区间 $[a,b]$ 的节点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots,<x_n=b$, 构造有界线性算子 T 满足下面条件

(1) Tf 是 n 次多项式;

(2) $Tf(x_j)=f(x_j),\ j=0,1,2\cdots,n.$

解　这里我们采用直接构造基的方法

第一步：构造基函数

$$e_0(x)=\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{x-x_j}{x_0-x_j}\right)$$

$$e_k(x)=\prod_{j=1,j\neq k}^{n}\left(\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right),k=1,2,\cdots,n.$$

对于上面构造的函数每个是 n 次多项式, 满 足性质

$$e_k(x_k)=1,\quad e_k(x_j)=0,j\neq k$$

则

$$Tf(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)e_k(x)$$

满足要求的条件. □

2. 设 $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_1)$, $A=(a_{ij})$ 是 $n\times n$ 实矩阵,定义线性算子 $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $y=Ax$. 证明算子 A 的范数

$$\|A\|_1=\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|.$$

证明 对 $x\in\mathbb{R}^n$,其范数为

$$\|x\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k|.$$

于是

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right|\\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j|=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)|x_j|\\ &\leq \max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\|x\|_1\end{aligned}$$

所以 $\|A\|_1\leq\max\limits_{1\leq j\leq n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|.$

设

$$\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|=\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$

我们考虑基向量 e_k , $\|e_k\|_1=1$,

$$Ae_k=(a_{1k},a_{2k},\cdots,a_{nk}),$$

$$\|Ae_k\|_1=\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|=\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\leq\|A\|_1\|e_k\|_1$$

所以 $\|A\|_1 \geq \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$. 两个不等式一起得到

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

注意到这个范数是先对列相加再取最大值,所以也称其是列范数. □

3. 设 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ ， $A = (a_{ij})$ 是 $n \times n$ 实矩阵,定义线性算子 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $y = Ax$. 求算子 A 的范数 $\|A\|_\infty$.

证明 对 $x \in \mathbb{R}^n$,其范数为

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |x_k|$$

在此范数下

$$\begin{aligned} \|Ax\|_\infty &= \max_{1\leq i\leq n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \\ &\leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \|x\|_\infty \end{aligned}$$

所以 $\|A\|_\infty \leq \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$

另一方面，设

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

取向量

$$x_* = (\mathrm{sign}(a_{k1}), \mathrm{sign}(a_{k2}), \cdots, \mathrm{sign}(a_{kn}))$$

则 $\|x_*\|_\infty = 1$,

$$Ax_* = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\mathrm{sign}(a_{kj}), \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\mathrm{sign}(a_{kj}), \cdots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\mathrm{sign}(a_{kj}) \right)^T$$

$$\|Ax_*\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \left| \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathrm{sign}(a_{kj}) \right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| \leq \|A\|_\infty \|x_*\|_\infty.$$

因此,

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

这个范数是先对行相加然后取最大,所以也称其为行范数。 □

§3.5 第十讲 紧线性算子

教学目的:
本节将介绍Banach空间中一类特殊的有界线性算子–紧线性算子. 主要讨论紧线性算子的性质,并进一步讨论紧算子在空间嵌入中的应用.
本节要点:
紧线性算子的基本性质,紧线性算子空间.

§3.5.1 内容提要

定义 3.5.1 设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, $\mathbb{Y}$ 是Banach空间. $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ 映射(或称算子), 如果 T 将 $\mathbb{X}$ 中的每个有界集映为 $\mathbb{Y}$ 中的列紧集, 则称 T 为紧算子(compact operator).

如果 T 是线性算子,且为紧算子,则称 T 为紧线性算子(compact linear operator). 用 $\mathcal{K}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ 表示所有由 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{Y}$ 的紧线性算子组成的集合, 称其为紧线性算子空间.

由于列紧集是有界集, 所以紧算子一定是有界算子, 从而紧线性算子必为有界线性算子, 所以 $\mathcal{K}(\mathbb{X},\mathbb{Y})\subset\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. 下面的结果表明,集 $\mathcal{K}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ 是非空集.

定理 3.5.1 设 $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ 是Banach空间, $T\in\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ 是有限秩算子, 则 T 是紧线性算子

定理 3.5.2 设 $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ 是Banach空间, 则 $\mathcal{K}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ 是 $\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ 的一个闭子空间.

推论 3.5.1 设 $\mathbb{X},\mathbb{Y},\mathbb{U}$ 是Banach空间, 设 $T_n\in\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ 是有限秩算子, $T\in\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, 如果依算子范数 $T_n\to T$,则 T 是紧算子.

下面的定理给出了有界线性算子与紧线性算子的复合的性质.

定理 3.5.3 设 $\mathbb{X},\mathbb{Y},\mathbb{U}$ 是Banach空间, 设 $T\in\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, $S\in\mathcal{B}(\mathbb{Y},\mathbb{U})$, 如果算子 T 和 S 中有一个是紧算子,则 ST 也是紧算子.

定理 3.5.4 设 $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ 是Banach空间, $T\in\mathcal{K}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, 则 T 的值域 $\mathcal{R}(T)$ 是 $\mathbb{Y}$ 中的可分子空间.

定义 3.5.2 设 $(\mathbb{X},\|\cdot\|_{\mathbb{X}})$, $(\mathbb{Y},\|\cdot\|_{\mathbb{Y}})$ 是同一 数域 $\mathbb{K}$ 上的两个赋范线性空间. 假定作为数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间时有 $\mathbb{Y}\subset\mathbb{X}$. 定义算子 $E:\mathbb{Y}\to\mathbb{X}$,

$$Ex=x,\quad \forall x\in\mathbb{Y}. \tag{3.5.1}$$

如果 $E\in\mathcal{B}(\mathbb{Y},\mathbb{X})$,则称 E 是有界嵌入算子. 此时也称赋范线性空间 $\mathbb{Y}$ 有界嵌入到赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 中. 如果 $E\in\mathcal{K}(\mathbb{Y},\mathbb{X})$,则称 E 为紧嵌入算子.此时也称赋范线性空间 $\mathbb{Y}$ 紧嵌入到赋范线性 空间 $\mathbb{X}$ 中.

§3.5.2 算子理想 $\mathcal{K}(\mathbb{X})$

定义 3.5.3 设 $\mathcal{A}$ 是一个代数, $\mathbf{R}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的子集,如果对任意的 $a\in\mathcal{A}$, $b\in\mathbf{R}$, $ab\in\mathbf{R}$,则

称 $\mathbf{R}$ 为代数 $\mathcal{A}$ 的左理想; 如果对任意的 $a\in\mathcal{A}$, $b\in\mathbf{R}$, $ba\in\mathbf{R}$,则称 $\mathbf{R}$ 为代数 $\mathcal{A}$ 的右理想; 如果 $\mathbf{R}$ 既为代数 $\mathcal{A}$ 的左理想,又为 $\mathcal{A}$ 的右理想,则称 $\mathbf{R}$ 为 $\mathcal{A}$ 的 双边理想,简称理想.

设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间, 算子代数 $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ 是Banach代数,依定理3.5.2, $\mathcal{K}(\mathbb{X})$ 是 $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ 中的闭子空间. 定理3.5.3表明对任意的 $S\in\mathcal{B}(\mathbb{X})$, $T\in\mathcal{K}(\mathbb{X})$, $ST, TS\in\mathcal{K}(\mathbb{X})$. 因此有下面结论.

定理 3.5.5 设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间, 则 $\mathcal{K}(\mathbb{X})$ 是 $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ 的一个完备的(双边)理想.

§3.5.3 典型例题

紧线性算子是有界线性算子中一类特殊的映射, 其特征是将空间 $\mathbb{X}$ 中有界集映为 $\mathbb{Y}$ 的列紧集(完全有界集)。

证明有界线性算子是紧线性算子需要知道相关空间紧集的特征.

例 3.5.1 Fredholm积分算子 $T: C[a,b]\to C[a,b]$ 定义为

$$Tx(t)=\int_a^b k(t,s)x(s)ds,\quad \forall\ x\in C[a,b],$$

其中 $k(t,s)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续,则 T 是紧线性算子.

证明 显然, $T: C[a,b]\to C[a,b]$ 是线性算子.设 M 为 $C[a,b]$ 中的有界集,故存在常数 $c>0$, 使得 $\|x\|\le c, \forall x\in M$. 于是,对任意的 $x\in M$,

$$|Tx(t_1)-Tx(t_2)|\le\int_a^b|k(t_1,s)-k(t_2,s)|\cdot|x(s)|ds\le c\int_a^b|k(t_1,s)-k(t_2,s)|ds.$$

注意到 $k(t,s)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续,因此是一致连续的. 即 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任意的 $t_1,t_2\in[a,b]$, 只要有 $|t_1-t_2|<\delta$, 就有

$$|k(t_1,s)-k(t_2,s)|<\frac{\varepsilon}{c(b-a)},\quad \forall\ s\in[a,b],$$

从而

$$|Tx(t_1)-Tx(t_2)|<c\cdot\frac{\varepsilon}{c(b-a)}(b-a)=\varepsilon,\quad \forall\ x\in M.$$

即 $T(M)$ 是等度连续的.另外,对 $\forall\ x\in M$, 有

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \max_{a\le t\le b}\left|\int_a^b k(t,s)x(s)ds\right|\\ &\le \|x\|\cdot\max_{a\le t\le b}\int_a^b|k(t,s)|ds\\ &\le c\max_{a\le t\le b}\int_a^b|k(t,s)|ds\end{aligned}$$

知 $T(M)$ 是 $C[a,b]$ 中的有界集. 根据Arzela-Ascoli定理知, $T(M)$ 是 $C[a,b]$ 中的列紧集. 因此, T 是紧算子. □

例 3.5.2 空间 $(C[a,b],\|\cdot\|_\infty)$ 有界嵌入到空间 $(L^p[a,b],\|\cdot\|_p)$ 中.

这是因为

$$\|Ex\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p} \le (b-a)^{1/p}\|x\|_\infty.$$

所以 E 是有界嵌入算子.

例 3.5.3　设函数集合 $C^n[a,b]$

$$C^n[a,b] = \left\{ f \in C[a,b] \,\middle|\, f(x) \text{ 在 } [a,b] \text{ 上 } n \text{ 次连续可微} \right\}. \tag{3.5.2}$$

按照函数的线性运算 $C^n[a,b]$ 是线性空间. 在 $C^n[a,b]$ 上定义范数

$$\|f\|_{[n]} = \sum_{k=0}^{n} \max_{x\in[a,b]} |f^{(k)}(x)|, \quad f^{(0)} = f. \tag{3.5.3}$$

则 $(C^n[a,b], \|\cdot\|_{[n]})$ 成为Banach空间. 对 $n \ge 1$,空间 $(C^n[a,b], \|\cdot\|_{[n]})$ 紧嵌入到赋范线性空间 $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ 中.

例 3.5.4　设函数集合 $W^{1,p}[a,b]$

$$W^{1,p}[a,b] = \left\{ f \in C[a,b] \,\middle|\, f(x) \text{ 可微,且 } f'(x) \in L^p[a,b] \right\}. \tag{3.5.4}$$

按照通常函数的线性运算 $W^{1,p}[a,b]$ 成为线性空间. 在 $W^{1,p}[a,b]$ 上定义范数

$$\|f\|_{1,p} = \left(\int_a^b |f'(x)|^p dx + \int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \tag{3.5.5}$$

则 $(W^{1,p}[a,b], \|\cdot\|_{1,p})$ 成为Banach空间(称为一阶Sobolev空间). 此外,空间 $(W^{1,p}[a,b], \|\cdot\|_{1,p})$ 紧嵌入到赋范线性空间 $(L^p[a,b], \|\cdot\|_p)$ 中.

§3.5.4 练习题十解答

1. 设 $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ 是有界数列,满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. 在 ℓ^2 定义算子 T :

$$T\{a_n\} = \{\lambda_n a_n\}, \quad \forall \{a_n\} \in \ell^2.$$

则 $T: \ell^2 \to \ell^2$ 是紧线性算子.

证明 设 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 ℓ^2 的Schauder基,对每个 $x = \{\xi_n\} \in \ell^2$,

$$x = \sum_{n=1}^\infty \xi_n e_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\xi_n|^2.$$

定义有限秩算子

$$T_m x = \sum_{k=1}^m \lambda_k \xi_k e_k,$$

则有

$$\|Tx - T_m x\|^2 = \sum_{k=m+1}^\infty |\lambda_k|^2 |\xi_k|^2 \le \sup_{k\ge m+1} |\lambda_k|^2 \sum_{k=1}^\infty \xi_k^2$$

所以

$$\|T - T_m\| \le \sup_{k\ge m+1} |\lambda_k|$$

由假定 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$,所以

$$\lim_{m\to\infty} \|T - T_m\| = 0.$$

依定理3.5.2, T 是紧算子。 □

2. 设 $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ 都是Banach空间, 则 $\mathbb{Y}$ 紧嵌入 $\mathbb{X}$ 的充要条件是 $\mathbb{Y}$ 中的单位球是 $\mathbb{X}$ 中的列紧集。

证明 设 $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ 都是Banach空间, 定义映射 $E : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$

$$Ey = y, \quad \forall y \in \mathbb{Y}.$$

若 $\mathbb{Y}$ 紧嵌入 $\mathbb{X}$, 则 $E : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ 是紧线性算子, 所以 $B_{\mathbb{Y}}(\theta, 1) \subset \mathbb{Y}$ 在 $\mathbb{X}$ 中是列紧集.

反过来,若 $\mathbb{Y}$ 中的单位球是 $\mathbb{X}$ 中的列紧集, 则映射 $E : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ 是紧线性算子，所以 $\mathbb{Y}$ 紧嵌入 $\mathbb{X}$. □

3. 设函数空间 $W^{1,p}[a,b]$ 如前定义,证明 空间 $(W^{1,p}[a,b], \|\cdot\|_{1,p})$ 紧嵌入到赋范线性空间 $(L^p[a,b], \|\cdot\|_p)$ 中.

证明 对任意的 $f \in (W^{1,p}[a,b], \|\cdot\|_{1,p})$,

$$f(x+h) - f(x) = \int_x^{x+h} f'(s)ds = \int_0^h f'(x+s)ds$$

所以

$$\|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|_p^p = \int_a^b \left|\int_0^h f'(x+s)ds\right|^p dx \le |h|^{\frac{p}{q}} \int_a^b \int_0^h |f'(x+s)|^p dsdx \le |h|^{\frac{p}{q}+1} \int_a^b |f'(x)|^p dx$$

由此得到

$$\|f(\cdot+h) - f(\cdot)\|_p \le |h|\|f'\|_p \le |h|\|f\|_{W^{1,p}[a,b]}$$

对 $(W^{1,p}[a,b], \|\cdot\|_{1,p})$ 单位球 $B_W(\theta, 1)$,当 $f \in B_W(\theta, 1)$,

$$\|f(\cdot+h) - f(\cdot)\|_p \le |h|$$

即在 $L^2[a,b]$ 中是等度连续的,所以是 $L^2[a,b]$ 是的列紧集。 利用习题2， $(W^{1,p}[a,b], \|\cdot\|_{1,p})$ 紧嵌入到 $(L^p[a,b], \|\cdot\|_p)$ 中. □

注记 3.5.1 这一习题主要利用 $(L^p[a,b], \|\cdot\|_p)$ 空间紧集的充要条件。

4. 设空间 ℓ^2 ,无穷矩阵 $a = (a_{ij})$ 满足条件

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty.$$

定义算子 $A:\ell^2\to\ell^2$，$y=Ax$.证明算子 A 是紧线性算子。

证明： 明显地, A 是线性算子。对任意的 $x=\{x_j\}\in\ell^2$，

$$\begin{aligned}\|Ax\|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty}|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j|^2\\ &\le \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^2 \qquad \text{(Cauchy 不等式)}\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2\|x\|^2\end{aligned}$$

所以 A 是有界线性算子,且 $\|A\|^2\le\sum\limits_{i,j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2$。

现定义有限秩算子

$$A_nx=\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_{1j}x_j,\sum_{j=1}^{\infty}a_{2j}x_j,\cdots,\sum_{j=1}^{\infty}a_{nj}x_j,0,\cdots\right),\quad x=\{x_j\}\in\ell^2$$

则 A_n 是紧线性算子。

对任意的 $x=\{x_j\}\in\ell^2$，

$$\|(A-A_n)x\|^2\le\sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2\|x\|,$$

所以 $\|A-A_n\|\le\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2$,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\|A-A_n\|=0$. 依推论3.5.1，A 是紧线性算子.

第四章　线性泛函存在与延拓定理,有界线性算子伴随算子

§4.1 第十一讲　线性泛函的延拓定理

教学目的:
介绍线性泛函的延拓方法,分析保证受控条件的选择, 有界线性泛函的保范扩张定理.
本节要点:
线性泛函的延拓定理, 有界线性泛函的保范扩张定理.

§4.1.1 内容提要

定义 4.1.1　设 $\mathbb{X}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间, p 是定义在 $\mathbb{X}$ 上的实值泛函.

1) 若对任何 $x, y \in \mathbb{X}$,

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y),$$

则称 p 是次可加的(subadditive);

2) 若对任何 $\lambda \geq 0$,

$$p(\lambda x) = \lambda p(x),$$

则称 p 是正齐性的(positive-homogeneous);

3) 若对数域 $\mathbb{K}$ 中的任何数 λ ,

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$$

则称 p 是绝对齐性的(absolute-homogeneous).

定理 4.1.1　(Hahn-Banach定理) 设 $\mathbb{X}$ 是实线性空间, p 是定义在 $\mathbb{X}$ 上的次可加正齐性泛函. 若 f 是定义在 $\mathbb{X}$ 的线性子空间 $\mathbb{Y}$ 上的实线性泛函,且满足条件

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in \mathbb{Y}.$$

则存在一个定义在 $\mathbb{X}$ 上实线性泛函 $\widetilde{f}$, 满足

(1) $\widetilde{f}$ 是 f 的扩张,即 $\widetilde{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{Y}$;

(2) $\widetilde{f}(x) \leq p(x)$, $\forall x \in \mathbb{X}$.

定理 4.1.2 (Bohnenblust-Sobczyk 定理) 设 $\mathbb{X}$ 是实的或复的线性空间, p 是定义在 $\mathbb{X}$ 上的次可加绝对齐性泛函. 若 f 是定义在 $\mathbb{X}$ 的线性子空间 $\mathbb{Y}$ 上的线性泛函,且满足条件

$$|f(x)| \le p(x) \quad \forall x \in \mathbb{Y}, \tag{4.1.1}$$

则存在一个定义在 $\mathbb{X}$ 上的线性泛函 $\widetilde{f}$,满足

1) $\widetilde{f}$ 是 f 的扩张,即 $\widetilde{f}(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{Y}$;

2) $|\widetilde{f}(x)| \le p(x), \quad \forall x \in \mathbb{X}$.

定理 4.1.3 (Hahn-Banach定理) 设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间. 若 f 是定义在 $\mathbb{X}$ 的线性子空间 $\mathbb{Y}$ 上的有界线性泛函, 则存在一个定义在 $\mathbb{X}$ 上的有界线性泛函 $\widetilde{f}$,满足

1) $\widetilde{f}$ 是 f 的扩张,即 $\widetilde{f}(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{Y}$;

2) $\|\widetilde{f}\|_{\mathbb{X}} = \|f\|_{\mathbb{Y}}$, 这里 $\|\widetilde{f}\|_{\mathbb{X}}$ 为 $\widetilde{f}$ 在 $\mathbb{X}$ 上的范数, $\|f\|_{\mathbb{Y}}$ 为 f 在 $\mathbb{Y}$ 上的范数.

§4.1.2 典型例题

Hahn-Banach定理主要是有界线性泛函的扩张定理, 任何子空间上的有界线性泛函可以保范扩张到全空间.

例 4.1.1 设 $\mathbb{X} = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, 子空间 $M = \{((x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$.泛函 $f(x_1, 0) = x_1$ 是 M 上的有界线性泛函, 且 $\|f\| = 1$. 确定 f 的所有有界扩张.

解 假如 $\widehat{f}$ 是 f 的一个有界扩张, 对任意的 $(x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2)$

$$\widehat{f}(x_1, x_2) = \widehat{f}(x_1, 0) + \widehat{f}(0, x_2) = x_1 + x_2\widehat{f}(0, 1)$$

令 $\widehat{f}(0, 1) = \beta$, 并记这个泛函为

$$f_\beta(x_1, x_2) = x_1 + \beta x_2$$

明显地,

$$|f_\beta(x_1, x_2)| \le |x_1| + |\beta||x_2| \le \max\{1, |\beta|\}\|(x_1, x_2)\|_1$$

所以

$$\|f\|_\beta \le \max\{1, |\beta|\}$$

因此, f 的有界扩张组成集合 $\{f_\beta \mid \beta \in \mathbb{R}\}$. 对任意的 $|\beta| \le 1$, f_β 都是 f 的保范扩张. □

§4.1.3 练习题十一解答

1. 设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ 是线性子空间, f 是 $\mathbb{Y}$ 上的有界线性泛函,则 f 可唯一地延拓成 $\overline{\mathbb{Y}}$ 上的有界线性泛函.

证明 设 $x \in \overline{\mathbb{Y}}$, 则存在 $x_n \in \mathbb{Y}$ 使得 $x_n \to x$. 现定义

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

1) $f(x)$ 与 $\{x_n\}\subset\mathbb{Y}$ 的选择无关.

假如 $\{z_n\}\subset\mathbb{Y}$ 也满足 $z_n\to x$, 则 $\gamma_n=z_n-z_n\to 0$,由于 f 是有界线性泛函，

$$|f(z_n)-f(x_n)|=|f(\gamma_n)|\le\|f\|\|\gamma_n\|\to 0$$

所以 $f(x)$ 是唯一确定的。

2) f 是有界线性泛函.

这是因为

$$|f(x)|=\lim_{n\to\infty}|f(x_n)|\le\|f\|\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\|f\|\|x\|,\forall x\in\overline{\mathbb{Y}}.$$

由于 $f(x)$ 是唯一确定的,所以延拓是唯一的. □

(上面习题表明从子空间到闭子空间的延拓是唯一的, 所以在Hahn-Banach定理中通常假定 $\mathbb{Y}$ 是闭子空间)

§4.2 第十二讲　有界线性泛函存在定理

教学目的:
给出有界线性泛函的存在定理,并给出几个重要的推论.
本节要点:
有界线性泛函存在性, 几个重要推论, 几何意义。

§4.2.1 内容提要

定理 4.2.1　(有界线性泛函的存在定理) 设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, $\mathbb{X}^*$ 是其对偶空间,则对每个 $x \in \mathbb{X}$, $x \neq \theta$, 都存在一个 $f \in \mathbb{X}^*$,使得 $\|f\| = \|x\|$, $f(x) = \|x\|^2$.

推论 4.2.1　设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间,对每个 $x \in \mathbb{X}$,定义集合

$$\mathcal{F}(x) = \{f \in \mathbb{X}^* \bigm| f(x) = \|f\|^2 = \|x\|^2\}. \tag{4.2.1}$$

则 $\mathcal{F}(x)$ 是非空凸集.

定理 4.2.2　设 M 是赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 的子空间, $x_0 \in \mathbb{X}\backslash M$. 若

$$h = d(x_0, M) = \inf_{x\in M} \|x_0 - x\| > 0,$$

则必存在 $f \in \mathbb{X}^*$ 满足下列条件:

(i) 对每一个 $x \in M$, $f(x) = 0$;

(ii) $f(x_0) = h$;

(iii) $\|f\| = 1$.

推论 4.2.2　设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, $x_0 \in \mathbb{X}$, $x_0 \neq \theta$, 则在 $\mathbb{X}$ 上存在有界线性泛函 f 满足下列条件:

(i) $f(x_0) = \|x_0\|$;

(ii) $\|f\| = 1$.

推论 4.2.3　设 M 是赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 的子空间,则 $x_0 \in \overline{M}$ 的充分必要条件是, $\mathbb{X}$ 上任何满足 $f(x) = 0 (x \in M)$ 的有界线性泛函 f 必有 $f(x_0) = 0$.

推论 4.2.4　设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, 则对每一个 $x \in \mathbb{X}$, x 的范数可表示为

$$\|x\| = \sup_{f\in\mathbb{X}^*, f\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \tag{4.2.2}$$

因此, 若对 $\mathbb{X}$ 上的一切有界线性泛函 f 都有 $f(x) = 0$, 则 $x = \theta$.

设 f 是线性空间 $\mathbb{X}$ 上的线性泛函.对于固定的常数 c, 集合

$$H(f, c) = \{x \in \mathbb{X} \bigm| f(x) = c\}$$

称为 $\mathbb{X}$ 中的一个超平面(hyperplane).

若取一点 $x_0 \in H(f,c)$, 就有 $f(x_0) = c$, 则

$$H(f,c) = \mathcal{N}(f) + x_0,$$

其中 $\mathcal{N}(f) = \{x \in \mathbb{X} \,\big|\, f(x) = 0\}$ 是 f 的零空间.

若 $\mathbb{X}$ 是实线性空间, 则 f 是实线性泛函,满足 $f(x) \le c$ 的点 x 可认为都位于超平面 $H(f,c)$ 的一侧,而满足 $f(x) \ge c$ 的 点 x 可认为都位于超平面 $H(f,c)$ 的另一侧. 若 $\mathbb{X}$ 的子集 A 位于超平面 $H(f,c)$ 的一侧, 并且有一点 $x_0 \in A \bigcap H(f,c)$, 这时说超平面 $H(f,c)$ 在 x_0 处支撑着 A .

若 f 是赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 上的有界线性泛函,零空间 $\mathcal{N}(f)$ 是闭的, 因而超平面 $H(f,c)$ 是闭的.

定理4.2.2的几何意义:若 x_0 到子空间 M 的距离为 $h > 0$, 则在 $\mathbb{X}$ 中存在一个闭超平面(例如可取 $H(f,c)$,其中 $0 < c < h$, f 为定理4.2.2中满足条件 (i),(ii),(iii)的有界线性泛函),使得 M 与 x_0 分别位于此闭超平面的两侧.

设 x_0 是赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 中的某一非零元,记 $r = \|x_0\|$. 推论4.2.2表明: 在 $\mathbb{X}$ 中存在一个在 x_0 处支撑着闭球 $\overline{B(\theta,r)} = \{x \in \mathbb{X} \,\big|\, \|x\| \le r\}$ 的闭超平面 $H(f,r)$ (其中 f 是推论4.2.2中满足条件(i),(ii)的有界线性泛函). 这是因为对每一个 $x \in \overline{B(\theta,r)}$

$$f(x) \le \|f\| \cdot \|x\| = \|x\| \le r,$$

并且 $x_0 \in \overline{B(\theta,r)} \bigcap H(f,r)$.

下面的定理表明线性泛函在几何方面方向的分辨性.

定理 4.2.3 设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset \mathbb{X}$ 是一线性无关组,则存在一组泛函 $f_1, f_2, \cdots f_n \in \mathbb{X}^*$, 使得

$$f_j(x_k) = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

注记 4.2.1 在上面定理中,当 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是线性无关组,满足性质 $f_j(x_k) = \delta_{jk}$ 的泛函组 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\} \subset \mathbb{X}^*$ 也是线性无关的. 这一结果表明 $\mathbb{X}^*$ 的维数不小于 $\mathbb{X}$ 的维数.

定理 4.2.4 设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间,如果 $\mathbb{X}^*$ 是可分的,则 $\mathbb{X}$ 也是可分的.

§4.2.2 典型例题

有界线性泛函的存在定理给出赋范线性空间的对偶空间非平凡性。

1) 有限维同赋范线性空间的对偶空间是有限维空间;

2) 无限维空间的对偶空间是无限维空间;

3) $\mathbb{X}^*$ 的维数不小于 $\mathbb{X}$ 的维数。

例 4.2.1 设 $\mathbb{X}$ 是有限维赋范线性空间, $\dim \mathbb{X} = n$, 则 $\mathbb{X}^*$ 也是 n 维赋范线性空间。

证明 由于 $\mathbb{X}$ 是 n 维线性空间, 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 $\mathbb{X}$ 中的线性无关组, 对任意的 $x \in \mathbb{X}$, 存在数组 $a_k, k = 1, 2, \cdots, n$ 使得

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k.$$

依定理 4.2.3,存在 $f_j \in \mathbb{X}^*, j = 1, 2, 3, \cdots, n$ 使得 $f_j(x_k) = \delta_{jk}$. 于是可得 x 的系数表示 $a_k = f_k(x)$,因此

$$x = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) x_k.$$

首先, 泛函组 $\{f_k\}_{k=1}^n$ 是线性无关的. 事实上, 若

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n = 0$$

将其作用于元 x_j, 得到 $\alpha_j = 0$, $j = 1, 2, \cdots, n$.所以它们线性无关.

现对任意的 $f \in \mathbb{X}^*$, $x = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) x_k$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) f(x_k) = \left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k) f_k \right)(x).$$

所以 $f = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k) f_k$. 因此, $\mathbb{X}^*$ 也是 n 维赋范线性空间。 □

例 4.2.2 设 $\mathbb{X}$ 是无限维赋范线性空间, 则 $\mathbb{X}^*$ 也是无限维赋范线性空间

证明 设 M 是 $\mathbb{X}$ 中的线性无关集,且为无穷集. 设 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是 M 中有限集, 依定理 4.2.3,存在 $f_j \in \mathbb{X}^*, j = 1, 2, 3, \cdots, n$ 使得 $f_j(x_k) = \delta_{jk}$. 明显地,泛函组 $\{f_k\}_{k=1}^n$ 是线性无关的.

由于线性无关组 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 中元的个数 n 无上界,所以泛函 $\{f_k\}_{k=1}^n$ 无关组的个数也无上界。 因此, $\mathbb{X}^*$ 也是无穷维赋范线性空间。 □

§4.2.3 练习题十二解答

1. 设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, $x_0 \in \mathbb{X}$, $x_0 \neq \theta$, 则存在 $f \in \mathbb{X}^*$, 使得 $f(x_0) = 1$ 且 $\|f\| = \frac{1}{\|x_0\|}$.

证明 设 $x_0 \in \mathbb{X}$, $x_0 \neq 0$, 设 $\mathbb{Y} = \mathrm{span}\{x_0\}$ 是一维子空间. 定义 $\mathbb{Y}$ 上泛函

$$g(\alpha x_0) = \alpha, \quad \forall x = \alpha x_0 \in \mathbb{Y}.$$

它是 $\mathbb{Y}$ 上的有界线性算子. 事实上，对于任意的 $y_1 = \alpha_1 x_0$, $y_2 = \alpha_2 x_0$,

$$g(\alpha y_1 + \beta y_2) = g(\alpha\alpha_1 x_0 + \beta\alpha_2 x_0) = \alpha\alpha_1 + \beta\alpha_2 = \alpha g(\alpha_1 x_0) + \beta g(\alpha_2 x_0) = \alpha g(y_1) + \beta g(y_2),$$

$g(x_0) = 1$ 并且

$$\|g\| = \sup_{x \in \mathbb{Y}, x \neq 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in \mathbb{Y}} \frac{|\alpha|}{\|\alpha x_0\|} = \frac{1}{\|x_0\|}.$$

由Hahn-Banach定理可得, 存在一个 $f\in\mathbb{X}^*$ 使得

1) $f(y)=g(y),\quad y\in\mathbb{Y}$,特别地, $f(x_0)=g(x_0)=1$;

2) $\|f\|_{\mathbb{X}}=\|g\|_{\mathbb{Y}}=\frac{1}{\|x_0\|}$. □

2. 设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, $x_0\in\mathbb{X}$. 若对 $\mathbb{X}$ 上一切范数为1的有界线性泛函 f 都有 $|f(x_0)|\le c$ (常数),则 $\|x_0\|\le c$.

证明 定义子空间 $\mathbb{Y}=\{x\mid x=\alpha x_0,\alpha\in\mathbb{K}\}$, 在 $\mathbb{Y}$ 上定义泛函 $f(x)=\alpha\|x_0\|, x\in\mathbb{Y}$. 它是子空间 $\mathbb{Y}$ 上的线性算子. 事实上, 对于任意的 $y_1=\alpha_1x_0,\ y_2=\alpha_2x_0$,

$$f(\alpha y_1+\beta y_2)=f(\alpha\alpha_1x_0+\beta\alpha_2x_0)=(\alpha\alpha_1+\beta\alpha_2)\|x_0\|=\alpha\alpha_1\|x_0\|+\beta\alpha_2\|x_0\|=\alpha f(y_1)+\beta f(y_2).$$

进一步

$$\|f\|_{\mathbb{Y}}=\sup_{y\in\mathbb{Y},y\neq0}\frac{|f(x)|}{\|x\|_{\mathbb{Y}}}=\sup_{y\in\mathbb{Y}}\frac{|\alpha|\|x_0\|}{|\alpha|\|x_0\|}=1,$$

并且 $|f(x_0)|=\|x_0\|$.由假定条件有 $\|x_0\|\le c$. □

3. 设 $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 的闭子空间, 具有如下性质: 对每一个 $f\in\mathbb{X}^*$, 若 $f(x)=0(x\in\mathbb{Y})$, 则必有 $f(x)=0(x\in\mathbb{X})$, 证明 $\mathbb{Y}=\mathbb{X}$.

证明 假若 $\mathbb{Y}\neq\mathbb{X}$, 由于 $\mathbb{Y}$ 是 $\mathbb{X}$ 中的闭子空间, 取 $x_0\in\mathbb{X}\backslash\mathbb{Y}$, 则有 $d(x_0,\mathbb{Y})=h>0$. 利用推论1.2, 必存在 $f\in\mathbb{X}^*$ 使得 $f(x_0)=h$ 及 $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{Y}$. 这与题设相矛盾. 所以 $\mathbb{Y}=\mathbb{X}$. □

4. 设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, $M\subset\mathbb{X}$. 证明 $x_0\in\overline{\mathrm{span}M}$, 当且仅当对每一个 $f\in\mathbb{X}^*$, 若 $f|_M=0$, 则必有 $f(x_0)=0$.

证明: " $\Rightarrow$ " 对 $\forall f\in\mathbb{X}^*$, 若 $f|_M=0$, 即 $\forall x\in M$ 都有 $f(x)=0$. 对 $\forall\hat{x}\in\mathrm{span}M$, 有

$$\hat{x}=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n,\quad x_i\in M,\alpha_i\in\mathbb{K},i=1,2,\cdots,n$$

利用 f 的线性性可得 $f(\hat{x})=0$. 若 $x_0\in\overline{\mathrm{span}M}$, 依闭包性质存在一列 $y_i\in\mathrm{span}M,i=1,2,\cdots$, 使得 $y_i\to x_0$. 而 $f(y_i)=0$, $f\in\mathbb{X}^*$, 由 f 的连续性可得 $\lim\limits_{i\to\infty}f(y_i)=f(x_0)=0$.

" $\Leftarrow$ " 假若 $x_0\notin\overline{\mathrm{span}M}$,则 $h=d(x_0,\overline{\mathrm{span}M})>0$, 由 Hahn-Banach可知:存在 $f\in\mathbb{X}^*$ 使得 $f(x_0)=h$ 且 $f(x)=0,x\in\overline{\mathrm{span}M}$, 显然 $M\subset\overline{\mathrm{span}M}$, 所以 $f|_M=0$ 但 $f(x_0)\neq0$,这与假定相矛盾的. 所以必有 $x_0\in\overline{\mathrm{span}M}$. □

5. 设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, $x_1,x_2,\cdots x_n$ 是一组线性无关元. $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是任意给定的一组数,证明存在 $f\in\mathbb{X}^*$ 使得 $f(x_k)=a_k,k=1,2\cdots,n$.

证明: 令 $M=\mathrm{span}\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$,则对 $\forall y\in M$,存在数组 $\beta_j\in\mathbb{K}$, $j=1,2,\cdots,n$,使得

$$y=\sum_{j=1}^{n}\beta_jx_j$$

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是任意给定的一组数,定义 M 上的泛函 f 如下

$$f(y) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j$$

明显地, f 是线性泛函,并有不等式

$$|f(y)| \leq \sum_{j=1}^{n} |\beta_j||a_j| \leq \max_{1\leq j\leq n} |a_j| \sum_{j=1}^{n} |\beta_j|.$$

应用引理2.3.1,存在 c 使得对任意的 $y \in M$

$$\|y\| = \|\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j\| \geq c \sum_{j=1}^{n} |\beta_j|.$$

因此,

$$|f(y)| \leq \frac{\max\limits_{1\leq j\leq n} |a_j|}{c} \|y\|.$$

上式表明 f 是 M 上的有界线性泛函.依照Hahn-Banach泛函延拓定理存在全空间上的有界线性泛函仍记为 f 当在 M 上时有

$$f(y) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j.$$

依照上面泛函的表达形式可知: $f(x_k) = a_k, k = 1, 2, \cdots, n.$ □

6. 设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间, $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ 是 $\mathbb{X}$ 上有界线性算子空间. 证明: $[\mathcal{B}(\mathbb{X})]^*$ 含有非零元.

证明 $\mathbb{X}$ 是Banach空间, 依泛函存在定理, $\mathbb{X}^*$ 中含有非零元。设 $x \in \mathbb{X}$, $f \in \mathbb{X}^*$. 对任意的 $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$,定义泛函

$$\rho_{f,x}(T) = f(Tx), \forall T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}).$$

1) $\rho_{f,x}(T)$ 是线性泛函;

这是因为对任意的 $T, S \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$\rho_{f,x}(\alpha T + \beta S) = f((\alpha T + \beta S)x) = \alpha f(Tx) + \beta f(Sx) = \alpha\rho_{f,x}(T) + \beta\rho_{f,x}(S).$$

2) $\rho_{f,x}(T)$ 是有界线性泛函;

直接估计有

$$|\rho_{f,x}(T)| = |f(Tx)| \leq \|f\|\|x\|\|T\|, \quad \forall T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}).$$

上式蕴含 $\|\rho_{f,x}\| \leq \|f\|\|x\|$.

3) $[\mathcal{B}(\mathbb{X})]^*$ 中存在非零线性泛函;

对 $x \in \mathbb{X}$, $x \neq \theta$, 取 $f \in \mathcal{F}(x)$ (见推论4.2.1), 则 $\rho_{f,x}(I) = f(x) = \|x\|^2 \neq 0$,所以这样的泛函都是非零元。 □

§4.3 第十三讲　自反空间和伴随算子

教学目的:
给出自反空间和有界线性算子的伴随算子的概念，将伴随看作一种运算,讨论伴随算子的基本性质。 并进一步讨论算子的值域与伴随算子零空间的关系.
本节要点:
自反空间, 伴随算子, 伴随运算的性质。

§4.3.1 内容提要

设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间. 当 $\mathbb{X} \neq \{\theta\}$ 时, $\mathbb{X}$ 的对偶空间 $\mathbb{X}^*$ 中含有充分多的非零元素, $\mathbb{X}^*$ 是Banach空间. 对空间 $\mathbb{X}^*$,它也有对偶空间 $(\mathbb{X}^*)^*$. 把 $\mathbb{X}^*$ 的对偶空间 $(\mathbb{X}^*)^*$ 称为 $\mathbb{X}$ 的二次对偶空间(second dual space或bidual space),记为 $\mathbb{X}^{**}$, 即 $\mathbb{X}^{**} = (\mathbb{X}^*)^*$. 类似的,可以定义 $\mathbb{X}$ 的三次,四次, $\cdots$ 对偶空间, 并且分别记为 $\mathbb{X}^{***}, \mathbb{X}^{****}, \cdots$.

现在讨论 $\mathbb{X}$ 与 $\mathbb{X}^{**}$ 之间的关系. 对任意的 $f \in \mathbb{X}^*$, $x \in \mathbb{X}$,记

$$f(x) = \langle f, x\rangle. \tag{4.3.1}$$

这种形式称为对偶积. 对偶积(4.3.1)可以看作是一个二元函数,它可以从两个角度考虑. 当固定 f 让 x 在 $\mathbb{X}$ 中变动, 则在(4.3.1)式中 f 看作为 $\mathbb{X}$ 上的有界线性泛函； 若固定 x 让 f 在 $\mathbb{X}^*$ 中变动,则在(4.3.1)式中 x 可看作为 $\mathbb{X}^*$ 上的线性泛函,或者更严格地说, x 对应 $\mathbb{X}^*$ 上的线性泛函 F_x ,这里 F_x 的定义为

$$F_x(f) = \langle f, x\rangle, \quad \forall f \in \mathbb{X}^*. \tag{4.3.2}$$

若从记号上,应有 $F_x(f) = \langle F_x, f\rangle = \langle x, f\rangle$. 此时,不必区分谁是变量,谁是泛函,也不必区分谁是第一个变元谁是第二个变元.从这个意义上,对偶积的记法具有一定和优越性. 明显地,对偶积关于两个变元都是线性的.

引理 4.3.1　对赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 上每一个固定的点 x , 由(4.3.2)式定义的泛函 F_x 是 $\mathbb{X}^*$ 上的有界线性泛函, 即 $F_x \in \mathbb{X}^{**}$, 并且 $\|F_x\| = \|x\|$.

于是可定义一个映射

$$\Phi : \mathbb{X} \to \mathbb{X}^{**}, \quad \Phi(x) = F_x, \quad \forall x \in \mathbb{X}$$

Φ 称为 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{X}^{**}$ 的典范映射(canonical mapping)或称为自然映射(natural mapping). 映射 Φ 是线性的.

定理 4.3.1　赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{X}^{**}$ 的典范映射 Φ 是 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{X}^{**}$ 的一个子空间 $\Phi(\mathbb{X})$ 上的等距同构映射.

定义 4.3.1 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是同一数域上的两个赋范线性空间, 若 $\mathbb{X}$ 与 $\mathbb{Y}$ 的某个子空间等距同构(即存在等距同构映射 $\Phi : \mathbb{X} \to \Phi(\mathbb{X}) \subset \mathbb{Y}$), 则称 $\mathbb{X}$ 可等距嵌入 $\mathbb{Y}$ 中(embeddable).

定义 4.3.2 若赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 上的典范映射 Φ 是满射,即 $\Phi(\mathbb{X}) = \mathbb{X}^{**}$, 则 $\mathbb{X}$ 称为是自反的空间(reflexive space).

设 T 是赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 到赋范线性空间 $\mathbb{Y}$ 的有界线性算子. 任取 $g \in \mathbb{Y}^*$, 对于每个 $x \in \mathbb{X}$, 则映射 $x \longmapsto g(Tx)$. 定义了一个 $\mathbb{X}$ 上的线性泛函(因为 g 和 T 都是线性的), 记为 $\widehat{g}$,即 $\widehat{g}(x) = g(Tx)(x \in \mathbb{X})$,或者说 $\widehat{g} = gT$. 因为

$$|\widehat{g}(x)| = |g(Tx)| \le \|g\|\|Tx\| \le \|g\|\|T\|\|x\|,$$

所以 $\widehat{g}$ 是有界的,从而 $\widehat{g} \in \mathbb{X}^*$, 并且

$$\|\widehat{g}\| \le \|g\|\|T\|. \tag{4.3.3}$$

进一步,对任意的 $g \in \mathbb{Y}^*$, 定义映射 $g \longmapsto \widehat{g} = gT$. 此映射是一个从 $\mathbb{Y}^*$ 到 $\mathbb{X}^*$ 的算子, 记为 $T^* : \mathbb{Y}^* \to \mathbb{X}^*$, 即 $T^*g = \widehat{g} = gT$, 或者说,对于每个 $x \in \mathbb{X}$, $(T^*g)(x) = (gT)(x) = g(Tx)$.

定义 4.3.3 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间, $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是有界线性算子.定义 $T^* : \mathbb{Y}^* \to \mathbb{X}^*$ 为

$$T^*g = gT, \quad \forall g \in \mathbb{Y}^*, \quad 或者 \quad T^*g(x) = g(Tx), \quad \forall x \in \mathbb{X}. \tag{4.3.4}$$

则 T^* 称为 T 的伴随算子(adjoint operator)或称共轭算子.

定理 4.3.2 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间. 有界线性算子 $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 的伴随算子 $T^* : \mathbb{Y}^* \to \mathbb{X}^*$ 也是有界线性算子, 且 $\|T^*\| = \|T\|$.

定理 4.3.3 设 $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ 和 $\mathbb{Z}$ 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间, 则下面陈述成立

(1) 若 $S, T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, 则 $(\alpha S + \beta T)^* = \alpha S^* + \beta T^*$.

(2) 若 $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), S \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$, 则 $(ST)^* = T^*S^*$.

(3) 若 $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), T^{-1}$ 存在且 $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$, 则 $(T^*)^{-1}$ 存在, 且 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

定理 4.3.4 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间, $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, 则 $\|T^{**}\| = \|T\|$, 且 $T^{**}x = Tx, \forall x \in \mathbb{X}$ 成立.

若将 $\mathbb{X}$ 看作为 $\mathbb{X}^{**}$ 的子空间, 则 T^{**} 可看作是 T 的扩张.

设 $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ 是同一数域上的赋范线性空间, $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$,则 $T^* \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}^*, \mathbb{X}^*)$.

定义 4.3.4 设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, $A \subset \mathbb{X}$ 是非空子集,记

$$A^{\perp} = \{f \in \mathbb{X}^* \mid f(x) = 0, \forall x \in A\} \tag{4.3.5}$$

$\mathbb{X}^*$ 中的集合 $A^{\perp}$ 称为集 A 的零化子(annihilator).

设 $M \subset \mathbb{X}^*$,记集合

$${}^{\perp}M = \{x \in \mathbb{X} \mid f(x) = 0, \forall f \in M\} \tag{4.3.6}$$

$\mathbb{X}$ 中的集合 ${}^{\perp}M$ 称为集 M 的零化子(annihilator).

定理 4.3.5　设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, $\mathbb{X}^*$ 是其对偶空间.设 $A \subset \mathbb{X}$, $M \subset \mathbb{X}^*$,则 $A^{\perp}$, ${}^{\perp}M$ 分别是 $\mathbb{X}$, $\mathbb{X}^*$ 中的闭子空间, 此外,还有关系

$$ {}^{\perp}(A^{\perp}) = \overline{\mathrm{span} A}, \quad \overline{\mathrm{span} M} \subset ({}^{\perp}M)^{\perp}; \tag{4.3.7} $$

当 $\mathbb{X}$ 是自反空间时,

$$ ({}^{\perp}M)^{\perp} = \overline{\mathrm{span} M}. \tag{4.3.8} $$

定理 4.3.6　设 $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ 是赋范线性空间, $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$,则有

$$ \mathcal{R}(T)^{\perp} = \mathcal{N}(T^*), \quad {}^{\perp}\mathcal{R}(T^*) = \mathcal{N}(T), $$

$$ {}^{\perp}\mathcal{N}(T^*) = \overline{\mathcal{R}(T)}, \quad \overline{\mathcal{R}(T^*)} \subset \mathcal{N}(T)^{\perp}. $$

§4.3.2 典型例题

给定赋范线性空间 $\mathbb{X}$, 利用对偶空间方法可以生成一系列空间, $\mathbb{X}$, $\mathbb{X}^*$, $\mathbb{X}^{**}$, $\mathbb{X}^{***}$, $\mathbb{X}^{****}, \cdots$; 在嵌入意义下

$$ \mathbb{X} \subset \mathbb{X}^{**} \subset \mathbb{X}^{****} \subset \cdots $$

$$ \mathbb{X}^* \subset \mathbb{X}^{***} \subset \mathbb{X}^{*****} \subset \cdots. $$

赋范线性空间 $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ 之间的有界线性算子,利用伴随算子方法可生成一系列算子 T , T^* , T^{**} , T^{***} , $T^{****}, \cdots$; 在扩张意义下

$$ T \subset T^{**} \subset T^{****} \subset \cdots $$

$$ T^* \subset T^{***} \subset T^{*****} \subset \cdots. $$

求算子的伴随算子,通常需要知道对偶空间和泛函表示。利用对偶积表示为

$$ \langle f, Tx \rangle = \langle T^* f, x \rangle. $$

自反空间一定是Banach空间, 但Banach空间不必是自反空间.

例 4.3.1　$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ 的对偶空间仍然是 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, 因此 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ 是自反的. 每一个有限维的赋范线性空间都是自反的.

例 4.3.2　ℓ^p 和 $L^p[a,b](1 < p < \infty)$ 也都是自反的. $C[a,b]$, c_0 , (c) , ℓ^1 , ℓ^{∞} , $L^1[a,b]$ 以及 $L^{\infty}[a,b]$ 等都不是自反的.

例 4.3.3　设 $S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是一个线性算子.令 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个基, 同时也是 $(\mathbb{R}^n)^*$ 中的一个基. 设 $\{\widetilde{e_1}, \widetilde{e_2}, \cdots, \widetilde{e_m}\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个基, 同时也是 $(\mathbb{R}^m)^*$ 中的一个基. 在

上述给定的 基下, S 对应于唯一的 $m\times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & \cdots & t_{n1} \\ t_{12} & t_{22} & \cdots & t_{n2} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ t_{1m} & t_{2m} & \cdots & t_{nm} \end{pmatrix}.$$

则 $S^*:(\mathbb{R}^m)^*\to(\mathbb{R}^n)^*$ 在相应基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1m} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2m} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nm} \end{pmatrix}=S^T.$$

即 $S=(t_{ij})_{m\times n}$, $S^*=(t_{ji})_{n\times m}=S^T$.

从这个例子看到,伴随算子的定义可理解为转置矩阵的概念的推广.

例 4.3.4 设函数 $k(s,t)$ 是矩形域 $[a,b]\times[a,b]$ 上的可测函数,且满足条件

$$\int_a^b\left(\int_a^b|k(s,t)|^q dt\right)^{p/q}ds<\infty,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

则算子

$$Tf(s)=\int_a^b k(s,t)f(t)dt,\quad \forall f\in L^p[a,b]$$

是 $L^p[a,b]$ 到 $L^p[a,b]$ 中的有界线性算子,其伴随算子为

$$T^*g(t)=\int_a^b k(s,t)g(s)ds,\quad \forall g\in L^q[a,b].$$

证明 我们分成两步来证明.

Step 1. T 是有界线性算子.

对任意的 $f\in L^p[a,b]$,依范数定义有

$$\begin{aligned}\|Tf\|_p^p &= \int_a^b|Tf(s)|^p ds=\int_a^b\left|\int_a^b k(s,t)f(t)dt\right|^p ds \quad (\text{应用Hölder不等式})\\ &\le \int_a^b\left(\int_a^b|k(s,t)|^q dt\right)^{p/q}\left(\int_a^b|f(t)|^p dt\right)ds\\ &= \|f\|_p^p\int_a^b\left(\int_a^b|k(s,t)|^q dt\right)^{p/q}ds\end{aligned}$$

所以 T 是有界线性算子,且

$$\|T\|\le\left(\int_a^b\left(\int_a^b|k(s,t)|^q dt\right)^{p/q}ds\right)^{1/p}.$$

Step 2. T 的伴随算子为

$$T^*g(t) = \int_a^b k(s,t)g(s)ds, \quad \forall g \in L^q[a,b].$$

对任意的 $g \in (L^p[a,b])^* = L^q[a,b]$,依泛函表示有

$$g(f) = \int_a^b f(t)g(t)dt, \quad \forall f \in L^p[a,b].$$

于是

$$\begin{aligned} g(Tf) &= \int_a^b Tf(s)g(s)ds = \int_a^b g(s)ds \int_a^b k(s,t)f(t)dt \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b k(s,t)g(s)ds\right) f(t)dt = T^*g(f), \quad \forall f \in L^p[a,b]. \end{aligned}$$

再次利用泛函表示定理得到

$$T^*g(t) = \int_a^b k(s,t)g(s)ds, \quad \forall g \in L^q[a,b].$$

上式是伴随算子表示. □

例 4.3.5 设函数 $k(s,t)$ 是矩形域 $[a,b]\times[a,b]$ 上的连续函数, 积分算子

$$Tf(s) = \int_a^b k(s,t)f(t)dt, \quad \forall f \in C[a,b]$$

是 $C[a,b]$ 到其自身的有界线性算子,其伴随算子为

$$T^*g(t) = \int_a^t dr \int_a^b k(s,r)g(s)ds, \quad \forall g \in NBV[a,b].$$

证明 首先, T 是有界线性算子. 对任意的 $g \in (C[a,b])^* = NBV[a,b]$ 有泛函表示

$$g(f) = \int_a^b f(s)dg(s), \quad \forall f \in C[a,b].$$

由于对每个 $t \in [a,b]$, $k(s,t)$ 是 $[a,b]$ 上关于 s 的连续函数,所以 $\int_a^b k(s,t)dg(s)$ 有意义. 于是

$$\begin{aligned} g(Tf) &= \int_a^b Tf(s)dg(s) = \int_a^b dg(s) \int_a^b k(s,t)f(t)dt \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b k(s,t)dg(s)\right) f(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)d\left(\int_a^t dr \int_a^b k(s,r)dg(s)\right) = T^*g(f), \quad \forall f \in C[a,b]. \end{aligned}$$

再次利用泛函表示得到

$$T^*g(t) = \int_a^t dr \int_a^b k(s,r)dg(s), \quad \forall g \in NBV[a,b].$$

上式是共轭空间 $NBV[a,b]$ 上伴随算子的表示. □

例 4.3.6 设空间 $\mathbb{X} = L^1[a,b]$, 则 $\mathbb{X}^* = L^\infty[a,b]$. 取集 $M = C[a,b] \subset L^\infty[a,b]$, 则

$$^\perp M = \left\{ g \in L^1[a,b] \,\middle|\, f(g) = \int_a^b f(t)g(t)dt = 0, \forall f \in C[a,b] \right\} = \{\theta\}$$

但有真包含关系

$$M \subset (^\perp M)^\perp = L^\infty[a,b].$$

注记 4.3.1 值域关系式 $\mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}(T^*)$ 在有限维空间时有明确的意义,它与代数方程 $Tx = y$ 的可解性 紧密相关. $T^* = T^\tau$, $\mathcal{N}(T^*) = \{f \in \mathbb{R}^n \mid T^\tau f = 0\}$. $\mathcal{R}(T) = \overline{\mathcal{R}(T)}$ 。$Tx = y$ 可解,充要条件是 $f(y) = 0$, $f \in \mathcal{N}(T^*)$.

§4.3.3 练习题十三解答

1. 证明自反空间是Banach空间.

证明 设 $\mathbb{X}$ 是自反空间，由定义可知 $\mathbb{X} = \mathbb{X}^{**} = (\mathbb{X}^*)^*$. 由于 $(\mathbb{X}^*)^*$ 是Banach空间, 从而 $\mathbb{X}$ 是 Banach 空间. □

2. 证明Banach空间 $\mathbb{X}$ 是自反的充分必要条件是 $\mathbb{X}$ 的任一闭子空间是自反的.

证明 ”$\Rightarrow$ ”假设 $\mathbb{X}$ 自反空间， $\mathbb{Y}$ 是 $\mathbb{X}$ 任一闭子空间, 对任意的 $f \in \mathbb{X}^*$, 定义 $\mathbb{Y}$ 上的线性泛函 f_Y

$$f_Y(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{Y},$$

而 $|f_Y(x)| = |f(x)| \le \|f\|\|x\|$,所以 $f_Y \in \mathbb{Y}^*$, 也就是 $\mathbb{Y}^* \supset \mathbb{X}^*$. 因此 $\mathbb{Y}^{**} \subset \mathbb{X}^{**}$.

注意到总有 $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{Y}^{**} \subseteq \mathbb{X}^{**} = \mathbb{X}$,所以 $\mathbb{Y}^{**}$ 是 $\mathbb{X}$ 的一子空间。为证 $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}^{**}$ ， 定义有界线性算子 $T : \mathbb{X}^* \to \mathbb{Y}^*, \quad T(f) = f_Y$, 此时有 $T^* : \mathbb{Y}^{**} \to \mathbb{X}^{**} = \mathbb{X}$. 对每个 $y^{**} \in \mathbb{Y}^{**}$, $T^*y^{**} = x_y$ 存在,且 $x_y \in \mathbb{X} = \mathbb{X}^{**}$. 由于 $T^*y^{**} \in \mathbb{X}^{**}$,对任意的 $f \in \mathbb{X}^*$,

$$f(x_y) = T^*y^{**}(f) = y^{**}(Tf) = y^{**}(f_Y), \quad \forall f \in \mathbb{X}^*.$$

如果 $x_y \notin \mathbb{Y}$, 由 Hahn-Banach定理可知：存在 $f^1 \in \mathbb{X}^*$ 使得 $f^1(x) = 0, x \in \mathbb{Y}$, 且 $f^1(x_y) = 1$. 所以有 $Tf^1 = f^1_Y = 0$. 另一方面，依照前面的等式有

$$1 = f^1(x_y) = T^*y^{**}(f^1) = y^{**}(Tf^1) = y^{**}(f^1_Y) = 0,$$

这是一个矛盾. 因此 $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}^{**}$.

”$\Leftarrow$ ”假定 $\mathbb{X}$ 的任一闭子空间是自反的. 取 $x_0 \in \mathbb{X}, \ x_0 \ne 0$, 存在 $f_0 \in \mathbb{X}^*$ 使得 $f_0(x_0) = 1$ 。考虑 f 的零 空间

$$\mathcal{N}(f_0) = \{x \in \mathbb{X} \mid f_0(x) = 0\}.$$

由于 f 连续, $\mathcal{N}(f_0)$ 是 $\mathbb{X}$ 的闭子空间. 则对任意的 $x \in \mathbb{X}$, x 可以写成如下形式

$$x = f_0(x)x_0 + y, \quad y \in \mathcal{N}(f_0).$$

对任意的 $f \in \mathbb{X}^*$,

$$f(x) = f_0(x)f(x_0) + f(y) = (f(x_0)f_0)(x) + f\big|_{\mathcal{N}(f_0)}(y),$$

所以 $f = f(x_0)f_0 + f_1$,这里 $f_1 = f\big|_{\mathcal{N}(f_0)}$ 表示泛函 f 在子空间 $\mathcal{N}(f_0)$ 上的限制. 注意到 $\mathcal{N}(f_0) \subset \mathbb{X}$,则有 $\mathbb{X}^* \subset [\mathcal{N}(f_0)]^*$ (见第一部分证明). 由题意可知 $\mathcal{N}(f_0) = [\mathcal{N}(f_0)]^{**}$. 因此对任意的 $x^{**} \in \mathbb{X}^{**}$, 使得

$$x^{**}(f) = x^{**}(f(x_0)f_0 + f_1) = f(x_0)x^{**}(f_0) + x^{**}(f_1).$$

由于 $\mathcal{N}(f_0)$ 自反性，存在 $y \in \mathcal{N}(f_0)$ 使得

$$f_1(y) = x^{**}(f_1), \quad \forall f_1 \in \mathcal{N}(f_0)^* \cap \mathbb{X}^*.$$

因此

$$x^{**}(f) = x^{**}(f_0)f(x_0) + f_1(y) = f(x^{**}(f_0)x_0 + y), \quad \forall f \in \mathbb{X}^*,$$

即

$$x^{**} = x^{**}(f_0)x_0 + y \in \mathbb{X}, \quad y \in \mathcal{N}(f_0).$$

特别地还有 $f_0(x^{**}) = x^{**}(f_0)$. 因此, $\mathbb{X}^{**} = \mathbb{X}$,且

$$x^{**} = f_0(x^{**})x_0 + y, \quad y \in \mathcal{N}(f_0).$$

明显地, $Jx = x^{**}$ 是 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{X}^{**}$ 的等距同构映射. □

3. 证明 Banach空间 $\mathbb{X}$ 是自反的充分必要条件是 $\mathbb{X}^*$ 是自反的. (提示:可利用上题的结论)

证明 : "$\Rightarrow$ "由于 $\mathbb{X}$ 自反，有 $\mathbb{X} = \mathbb{X}^{**}$, 从而 $\mathbb{X}^* = (\mathbb{X}^{**})^* = \mathbb{X}^{***} = (\mathbb{X}^*)^{**}$, 必要性得证;

"$\Leftarrow$ " 由于 $\mathbb{X}^*$ 是自反的, 所以有 $\mathbb{X}^* = (\mathbb{X}^*)^{**}$. 此时 $(\mathbb{X}^*)^* = \mathbb{X}^{**} = X^{****}$, 所以有 $\mathbb{X}^{**}$ 是自反的. 而 $\mathbb{X}$ 在等距同构意义下 $\mathbb{X} \subset \mathbb{X}^{**}$, 并且由于 $\mathbb{X}$ 是Banach空间，所以 $\mathbb{X}$ 是 $\mathbb{X}^{**}$ 的闭子空间，利用上题可知 $\mathbb{X}$ 是自反的. □

4.证明无限维赋范空间的对偶空间也是无限维空间.

证明 对任意的 $n \in \mathbb{N}$,由于 $\mathbb{X}$ 是无限维的,则存在一个线性无关组

$$e_1, e_2, \cdots e_n \in \mathbb{X}.$$

令 $\mathbb{Y} = \mathrm{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, $\mathbb{Y}$ 是 $\mathbb{X}$ 的有限维子空间, 应用Hahn-Banach定理， 存在有界线性泛函 $f_1, f_2, \cdots f_n \in \mathbb{X}^*$ 使得

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

则 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是空间 $\mathbb{X}^*$ 中一线性无关组. 事实上, 若

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{X},$$

此时取 $x = e_j$, 就有

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i(e_j) = 0, \quad j = 1, 2.\cdots, n.$$

因此 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\} \subset \mathbb{X}^*$ 是线性无关组. 由 $n \in \mathbb{N}$ 的任意性，所以 $\mathbb{X}^*$ 是无限维空间. □

5. 证明 ℓ^1 不是自反空间.(提示:可利用习题3结论.)

证明　利用反证法。假如 ℓ^1 是自反空间，即 $(\ell^1) = (\ell^1)^{**}$. 由于 ℓ^1 是可分的, 即 $(\ell^1)^{**}$ 可分, 由上题可知 $(\ell^1)^* = \ell^\infty$ 是可分的。但 ℓ^∞ 是不可分的, 矛盾。因此, ℓ^1 不是自反空间. □

6. ℓ^2 上的左移算子 $A : \ell^2 \to \ell^2$ 定义为

$$Ax = (\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \cdots), \quad x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in \ell^2.$$

求算子 A 的伴随算子 A^* .

7. 算子 $T : L^2[a, b] \to L^2[a, b]$ 定义如下

$$Tf(t) = \int_a^t q(s)f(s)ds, \quad \forall f \in L^2[a, b]$$

其中 $q \in L^2[a, b]$,求算子 T 的伴随算子 T^* .

解　对任意的 $g \in L^2[a, b] = \left(L^2[a, b]\right)^*$, 依泛函表示定理,

$$\langle g, Tf\rangle = \int_a^b g(t)dt \int_a^t q(s)f(s)ds = \int_a^b f(s)q(s)ds \int_s^b g(t)dt = \langle T^*g, f\rangle$$

由泛函表示定理得到

$$T^*g(s) = q(s) \int_s^b g(t)dt.$$

§4.4 第十四讲　特殊算子的伴随算子

教学目的:
主要讨论两类算子: 紧线性算子和具有闭值域的算子. 作为伴随算子的特殊形式, 讨论子空间的对偶空间与商空间的对偶空间.
本节要点:
紧算子的伴随算子的性质, 闭值域算子伴随算子的性质, 子空间的对偶空间, 商空间的对偶空间。

§4.4.1 内容提要

定理 4.4.1　有限秩线性算子的伴随算子是有限秩线性算子.

定理 4.4.2　设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间, $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$,那么 $T^* \in \mathcal{K}(\mathbb{Y}^*, \mathbb{X}^*)$.

定义 4.4.1　设 $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ 是Banach空间, $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. 如果 $\mathcal{R}(T)$ 是 $\mathbb{Y}$ 中的闭集，则称 T 为具有闭值域的算子,简称闭值域算子.

定理 4.4.3　设 $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ 是Banach空间, $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. 如果 T 是闭值域算子,则存在常数 $m > 0$ 使得对每个 $y \in \mathcal{R}(T)$,存在相应的一个 $x \in \mathbb{X}$ 使得 $Tx = y$,且 $\|x\| \le m\|y\|$.

定理 4.4.4　设 $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ 是Banach空间, $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. 如果 T 是闭值域算子,则伴随算子 T^* 也是闭值域算子,并且 $\mathcal{R}(T^*) = \mathcal{N}(T)^\perp$.

定理 4.4.5　(Dieudonné定理) 设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间, $M \subset \mathbb{X}$ 是闭子空间. 那么 M^* 与 $\mathbb{X}^*/M^\perp$ 等距同构.

定理 4.4.6　(Dieudonné定理) 设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间, $M \subset \mathbb{X}$ 是闭子空间. 那么 $[\mathbb{X}/M]^*$ 与 $M^\perp$ 等距同构.

§4.4.2 典型例题

紧线性算子与具有闭值域的有界线性算子是两类具有特殊性质算子, 它们在伴随运算下仍属于同一类。

例 4.4.1　设 $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ 是赋范线性空间, 且 $\mathbb{X}$ 紧嵌入 $\mathbb{Y}$) , 则 $\mathbb{Y}^*$ 紧嵌入 $\mathbb{X}^*$

证明 我们考虑嵌入映射 $E : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$

$$Ex = x, \quad \forall x \in \mathbb{X}$$

$$\|Ex\|_{\mathbb{Y}} \le \|E\|\|x\|_{\mathbb{X}}$$

对任意的 $g \in \mathbb{Y}^*$, $x \in \mathbb{X}$,

$$g(Ex) = g(x) = E^* g(x), \quad \forall x \in \mathbb{X}$$

即 $E^* g = g, \forall g \in \mathbb{Y}^*$, 所以 $E^* : \mathbb{Y}^* \to \mathbb{X}$ 也是嵌入映射。 由于 $\mathbb{X}$ 紧嵌入 $\mathbb{Y}$) , E 是紧线性算子, 依定理 4.4.2, $E^* : \mathbb{Y}^* \to \mathbb{X}^*$ 也是紧线性算子。 所以, $\mathbb{Y}^*$ 紧嵌入 $\mathbb{X}^*$. □

例 4.4.2 设 $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ 是赋范线性空间, $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 是单射,且具有闭值域. 则

$$\|x\|_T = \|Tx\|_{\mathbb{Y}}, \quad \forall x \in \mathbb{X}$$

是 $\mathbb{X}$ 上的一个等价范数.

证明 我们先验证 $\|x\|_T$ 满足范数公理.

1) 对任意的 $x \in \mathbb{X}$, $\|x\|_T \geq 0$. 如果 $\|x\|_T = \|Tx\|_{\mathbb{Y}} = 0$,则 $Tx = \theta$,由于 T 是单射,必有 $x = \theta$.

2) 对任意的 $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\|\alpha x\|_T = \|T(\alpha x)\|_{\mathbb{Y}} = |\alpha| \|Tx\|_{\mathbb{Y}} = |\alpha| \|x\|_T$$

3) 对任意的 $x, z \in \mathbb{X}$,

$$\|x + z\|_T = \|Tx + Tz\|_{\mathbb{Y}} \leq \|Tx\|_{\mathbb{Y}} + \|Tz\|_{\mathbb{Y}} = \|x\|_T + \|z\|_T.$$

所以 $\|x\|_T$ 是 $\mathbb{X}$ 上定义的一个范数.

明显地, $\|x\|_T \leq \|T\| \|x\|$, 依定理4.4.3,存在 $m > 0$ 使得 $\|Tx\| \geq \frac{1}{m}\|x\|$. 由此得到

$$\frac{1}{m}\|x\| \leq \|x\|_T \leq \|T\| \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{X}$$

所以 $\|x\|_T$ 是 $\mathbb{X}$ 上的一个等价范数。 □

如果 T 不是单射,如上证明 $\|x\|_T$ 是商空间 $\mathbb{X}/\mathcal{N}(T)$ 上的一个等价范数。

§4.4.3 练习题十四解答

1. 设 $\mathbb{X}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间. 设 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 $\mathbb{X}$ 中的线性无关组, 泛函 $f_k \in \mathbb{X}^*, k = 1, 2, \cdots, n$ 满足条件 $f_k(x_j) = \delta_{kj}, \forall j, k \in \{1, 2, \cdots, n\}$,其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 $\mathbb{X}$ 中的另一线性无关组. 证明有限秩算子

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) y_k, \quad x \in \mathbb{X}$$

的伴随算子的值域 $\mathcal{R}(T^*)$ 也是 n 维的.

证明 设 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 $\mathbb{X}$ 中的线性无关组, 泛函 $f_k \in \mathbb{X}^*, k = 1, 2, \cdots, n$ 满足条件 $f_k(x_j) = \delta_{kj}, \forall j, k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 $\mathbb{X}$ 中的另一线性无关组.

$$Tx = \sum_{k=1}^{m} f_k(x) y_k, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

首先我们证明 $\mathcal{R}(T)$ 是 n 维空间. 由于对每个 x_j ,

$$Tx_j = \sum_{k=1}^{m} f_k(x_j)y_k = y_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

所以 $R(T) = \operatorname{span}\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$.

对任意的 $g \in \mathbb{Y}^*$, 依伴随算子的定义有

$$T^*g(x) = g(Tx) = \sum_{k=1}^{m} f_k(x)g(y_k) = \left[\sum_{k=1}^{m} g(y_k)f_k\right](x), \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

因此

$$T^*g = \sum_{k=1}^{m} g(y_k)f_k.$$

这表明 $\mathcal{R}(T^*) \subset \operatorname{span}\{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$, 所以 F^* 也是有限秩算子. 依定理4.2.3,存在泛函 $g_j \in \mathbb{X}^*$ 使得 $g_k(y_j) = \delta_{kj}, \forall j, k \in \{1, 2, \cdots, n\}$. 所以 $T^*g_j = f_j$, 于是 $\mathcal{R}(T^*) = \operatorname{span}\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$. 由于 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 是线性无关的,所以 $\mathcal{R}(T^*)$ 也是 n 维的. □

注记 4.4.1 泛函 $f_k \in \mathbb{X}^*, k = 1, 2, \cdots, n$ 满足条件 $f_k(x_j) = \delta_{kj}, \forall j, k \in \{1, 2, \cdots, n\}$,实际上已经蕴含 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 $\mathbb{X}$ 的线性无关性. 同时也蕴含 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 的线性无关性. 没有这个条件,不能保证算子 T 的值域是 n 维的.

2. 设 $\mathbb{X}$ 是Banch空间. $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ 是紧线性算子, 证明

1) $\mathcal{N}(I - T)$ 是有限维的;

2) $\mathcal{R}(I - T)$ 是闭的.

证明 我们依序证明.

(1) 算子 $I - T$ 的零空间,

$$\mathcal{N}(I - T) = \{x \in \mathbb{X} \mid (I - T)x = 0\}$$

如果 $\mathcal{N}(I - T) = \{\theta\}$,结论成立。 假定 $\mathcal{N}(I - T) \neq \{\theta\}$,则其是 $\mathbb{X}$ 的闭子空间,设 $S_{\mathcal{N}}(0, 1)$ 表示 $\mathcal{N}(I - T)$ 中的单位球面 则有 $S_{\mathcal{N}}(0, 1) = TS_{\mathcal{N}}(0, 1)$,由于 T 是紧线性算子, 所以 $TS_{\mathcal{N}}(0, 1)$ 是列紧集,由有限维空间的特征性质可知 $\mathcal{N}(I - T)$ 是有限维空间。

(2) 设 $\{y_n\} \subset \mathcal{R}(I - T)$, 且 $y_n \to y$. 则存在点列 $x_n \in \mathbb{X}$ 使得

$$y_n = (I - T)x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

不妨假定 $\{x_n\}$ 是有界点列, 则 $\{Tx_n\}$ 是列紧的,存在收敛的子列 $\{Tx_{n_j}\}$,设 $Tx_{n_j} \to z, j \to \infty$,于是

$$x_{n_j} = Tx_{n_j} + y_{n_j} \to z + y, \quad j \to \infty.$$

再利用算子 $(I - T)$ 的连续性, $(I - T)x_{n_j} = (I - T)(z + y)$,于是有

$$y = \lim_{j\to\infty} y_{n_j} = (I - T)x_{n_j} = (I - T)(z + y)$$

所以 $y \in \mathcal{R}(I - T)$,即 $\mathcal{R}(I - T)$ 是闭的. □

注记 4.4.2 在前面的证明中, 我们假定 $\{x_n\}$ 是有界点列. 如果要更完整地证明这个结论, 我们还需证明

(1) 对每个 $y \in \mathcal{R}(I-T)$, 其解集

$$S(y) = \{x \in \mathbb{X} \mid (I-T)x = y\}$$

存在一个元 $x(y) \in S(y)$ 达到最小范数, 即

$$\|x(y)\| = \inf_{x \in S(y)} \|x\|.$$

(2) 存在常数 $m > 0$ 使得

$$\|x(y)\| \le m\|y\| \quad \forall y \in \mathcal{R}(I-T).$$

第一个陈述容易证明, 关于第二个陈述, 可利用反证法. 假如这样的 m 不存在, 对每个 n 存在 $y_n \in \mathcal{R}(I-T)$

$$\|x(y_n)\| \ge n\|y_n\|$$

则 $\frac{\|y_n\|}{\|x(y_n)\|} \to 0$,

$$\frac{x(y_n)}{\|x(y_n)\|} = T\frac{x(y_n)}{\|x(y_n)\|} + \frac{y_n}{\|s(y_n)\|}$$

由于 $T\frac{x(y_n)}{\|x(y_n)\|}$ 存在收敛的子列, 可设 $T\frac{x(y_n)}{\|x(y_n)\|} \to z$, 由上面可得 $\frac{x(y_n)}{\|x(y_n)\|} \to z$, 再利用算子的连续性得 $(I-T)z = 0$. 于是

$$(I-T)(x(y_n) - \|x(y_n)\|z) = y_n$$

利用第一个断言应有

$$\|x(y_n)\| \le \|x(y_n) - \|x(y_n)z\|.$$

由此得到

$$\left\|\frac{x(y_n)}{\|x(y_n)\|} - z\right\| \ge 1$$

这与 $\frac{x(y_n)}{\|x(y_n)\|} \to z$ 相矛盾. 因此, 第二个陈述也成立. 按照定理4.4.3, 这实际上已经证明, $\mathcal{R}(I-T)$ 是闭的.

由于这两个断言的证明要求技巧太强, 所以可假定 $\{x_n\}$ 是有界点列.

第五章　Banach空间中的基本定理

§5.1 第十五讲　一致有界定理–共鸣定理

教学目的:
介绍Banach空间上有界线性算子列的一致有界性原理,讨论有界线性算子列收敛的充要条件。
本节要点:
有界线性算子一致有界性定理,有界性算子列的收敛定理

§5.1.1 内容提要

有界算子序列的两种有界性的概念.

定义 5.1.1　设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间, $T_n \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), (n \in \mathbb{N})$.

1) 若对每个 $x \in \mathbb{X}$ 序列 $\{\|T_n x\|\}$ 是有界的,即存在(仅与 x 有关的) 常数 M_x, 使得 $\|T_n x\| \le M_x, \forall n \in \mathbb{N}$, 则称算子序列 $\{T_n\}$ 是强有界的(strongly bounded).

2) 若序列 $\{\|T_n\|\}$ 是有界的,即存在常数 M, 使得 $\|T_n\| \le M, \forall n \in \mathbb{N}$, 则称算子序列 $\{T_n\}$ 是一致有界的(uniformly bounded).

引理 5.1.1　设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间, f_n 是 $\mathbb{X}$ 上的连续泛函 $(n \in \mathbb{N})$. 若对每个 $x \in \mathbb{X}$, 序列 $\{f_n(x)\}$ 是有界的,则序列 $\{f_n(x)\}$ 必 在某一闭球上一致有界, 即存在 $M > 0$, 使得对此闭球中的一切点 x 及 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|f_n(x)| \le M$.

定理 5.1.1　(一致有界定理, Banach-Steinhaus 定理)　设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间, $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间, $T_n \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), (n \in \mathbb{N})$. 若对每个 $x \in \mathbb{X}$, 序列 $\{\|T_n x\|\}$ 是有界的,则数列 $\{\|T_n\|\}$ 是有界的. 即如果对每个 $x \in \mathbb{X}$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\| < \infty, \tag{5.1.1}$$

则必有

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty. \tag{5.1.2}$$

推论 5.1.1　设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间, $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间, $T_n \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), (n \in \mathbb{N})$. 如果 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| = \infty$,则至少存在一点 $x_0 \in \mathbb{X}$ 使得 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x_0\| = \infty$.

定理 5.1.2　设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间, $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间, $T_n \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), (n \in \mathbb{N})$. 若对每个 $x \in \mathbb{X}$, 序列 $\{T_n x\}$ 都收敛 Tx ,即 $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} T_n x, (x \in \mathbb{X})$,则有 $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$,且 $\|T\| \le \liminf\limits_{n\to\infty} \|T_n\|$.

定理 5.1.3 (算子列收敛定理) 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 都是Banach空间, $T_n \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), (n \in \mathbb{N})$. 则存在 $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 使得对每个 $x \in \mathbb{X}$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = Tx$, 当且仅当下列两个条件同时成立:

(1) $\{\|T_n\|, n \in \mathbb{N}\}$ 是有界的;

(2) 在 $\mathbb{X}$ 的某个稠密集 A 的每个元素 x 上,序列 $\{T_n x\}$ 收敛.

§5.1.2 典型例题

一致有界定理的本质是:在Banach空间点点有界蕴含一致有界。 其反面是:如果不一致有界,则必在某一点上无界。这一结果给出有界性的充分条件,同时给出判定有界与无界的方法。

算子列的收敛性定理给出有界线性算子列的极限仍为有界线性算子的充要条件。 利用这一结果, 可用来研究算子的有界性, 通常作法是将其视为某个算子列的极限。

例 5.1.1 设 $1 < p < \infty$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 若 $a = \{a_k\}$ 满足如下条件: 对每个 $x = \{\xi_k\} \in \ell^p$ 皆有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k < \infty$, 则 $a \in \ell^q$.

证明 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 定义泛函

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k, \quad x = \{\xi_k\} \in \ell^p.$$

明显地, f_n 是线性泛函. 由Hölder不等式

$$|f_n(x)| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \|x\|,$$

故 $f_n \in (\ell^p)^*, (n \in \mathbb{N})$.

对每个 $x \in \ell^p$, 定义 ℓ^p 上的线性泛函 f ,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k, \quad \forall x = \{\xi_x\} \in \ell^p. \tag{5.1.3}$$

依假定条件, f 对每个 $x \in \ell^p$ 有意义. 显然 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. 而 ℓ^p 是Banach空间, 应用定理5.1.2得到 $f \in (\ell^p)^* = \ell^q$.

取 $e_n = (0, 0, 0, \cdots, \overset{n^{th}}{1}, 0, \cdots)$, 则有 $f(e_n) = \alpha_n (n \in \mathbb{N})$. 在 $(\ell^p)^*$ 与 ℓ^q 的等距同构下 f 对应于 $a = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots)$, 故 $a \in \ell^q$. □

注记 5.1.1 在上面例子中,由(5.1.3)定义的线性泛函 f , 由于不知道 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots)$ 的性质, 所以不能直接断定 f 是有界线性泛函. 这里是把它看作是一列有界线性泛函的极限来得到 f 的有界性.

作为一致有界定理在实际问题中的应用,讨论两个例子, 重点在于如何将实际问题与抽象理论相结合。

例 5.1.2　**在Fourier级数理论中的应用**

以 2π 为周期的连续函数 $x(t)$ 可展成Fourier级数

$$x(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt), \tag{5.1.4}$$

其中Fourier系数

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos ntdt, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\sin ntdt, \quad n = 1, 2, \cdots . \end{cases} \tag{5.1.5}$$

对每个连续数 $x(t)$, 它的Fourier级数是否处处收敛?

定理 5.1.4　任给 $t_0 \in [0, 2\pi]$, 则 存在实值连续函数, 它的Fourier级数在 t_0 发散. 从而 函数 $x(t)$ 的连续性不能推出 $x(t)$ 的Fourier级数处处收敛性.

证明　记 $C_{2\pi}$ 为以 2π 为周期的实值连续函数的全体组成的集合. 按通常函数的线性运算及范数

$$\|x\|_\infty = \max_{0\le t\le 2\pi} |x(t)|,$$

$C_{2\pi}$ 是一个Banach空间.由于 $C_{2\pi}$ 中的元素皆以 2π 为周期, 所以不失一般性可设 $t_0 = 0$.

对每个 $x \in C_{2\pi}$, 令 $f_n(x)$ 为 x 的Fourier级数的前 n 项部分和在 $t = 0$ 点的值。由(5.1.4)和(5.1.5), 并且注意到当 $t = 0$ 时正弦项为0而余弦项为1,于是得到

$$f_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]dt. \tag{5.1.6}$$

为简化上式, 直接计算得到

$$\begin{aligned} 2\sin\frac{1}{2}t\sum_{k=1}^{n}\cos kt &= \sum_{k=1}^{n}\left[-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t + \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right] \\ &= -\sin\frac{1}{2}t + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t. \end{aligned}$$

上式两边同除以 $\sin\frac{1}{2}t$ 再加1, 得到

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos kt = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}.$$

令 $q_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}$, 当 $t = 0$ 时, 定义 $q_n(0) = \lim_{t\to 0} q(t) = 2n + 1$. 则 $q_n \in C_{2\pi}$. 这时(5.1.6)式变形为

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)q_n(t)dt. \tag{5.1.7}$$

可以证明, 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 泛函 f_n 是 $C_{2\pi}$ 上的有界线性泛函, 且

$$\|f_n\| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |q_n(t)|dt.$$

当 $t \in (0, 2\pi]$ 时, 有 $\left|\sin \frac{1}{2}t\right| < \frac{1}{2}t$. 令 $v = \left(n + \frac{1}{2}\right)t$, 则

$$\begin{aligned}
\|f_n\| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\right|dt > \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}t\right)\right|}{t}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi}\frac{|\sin v|}{v}dv = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin v|}{v}dv \\
&\geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin v|dv \\
&= \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1} \to \infty \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

至此证明了:(i) $C_{2\pi}$ 是Banach空间; (ii) $\sup\limits_{n\geq 1}\|f_n\| = \infty$.

依照推论5.1.1, 必存在 $x_0 \in C_{2\pi}$ 使得 $\{f_n(x_0)\}$ 发散. 这就证明了 $C_{2\pi}$ 中有一元 x_0 的Fourier级数在 $t = 0$ 处发散. □

例 5.1.3　机械求积公式的收敛问题 在定积分的数值计算中, 提出的问题是如何计算定积分 $\int_a^b x(t)dt$. 依定积分定义, 可取区间 $[a, b]$ 上一组分点, 即

$$a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} = b.$$

在每个小区间上 $[x_{k-1}, x-k]$, 取 $\xi_k^{(n)}$, 作和 $\sum\limits_{k=1}^{n} x(\xi_k^{(n)})\Delta x_k$ 。 如果 x 是Riemann可积的, 当 n 充分大时, 逼近于 $\int_a^b x(t)dt$. 前面的和式是矩形近似代替, 也可用梯形法作近似代替求积. 求积分问题一般化归结为:

在实Banach空间 $C[a, b]$ 中, 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 定义泛函 f_n , 对每个 $x \in C[a, b]$

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k^{(n)}x(t_k^{(n)}), \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{5.1.8}$$

这里 $\alpha_0^{(n)}, \alpha_1^{(n)}, \cdots, \alpha_n^{(n)}$ 是 $n+1$ 个实数, $t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \cdots, t_n^{(n)}$ 是区间 $[a, b]$ 的分划

$$a \leq t_0^{(n)} \leq t_1^{(n)} \leq \cdots \leq t_n^{(n)} \leq b.$$

在实际计算中, 选定系数 $\alpha_0^{(n)}, \alpha_1^{(n)}, \cdots, \alpha_n^{(n)}$, $f_n(x)$ 作为定积分的近似值. 公式(5.1.8)称为机械求积公式.

问题是: 当系数 $\{\alpha_k^{(n)}\}$ 满足什么条件时, 由公式(5.1.8)中定义的泛函 f_n 对每个 $x \in C[a, b]$, $f_n(x)$ 收敛于定积分 $\int_a^b x(t)dt$.

下面的定理给出了机械求积公式收敛的充要条件.

定理 5.1.5　对任意的 $x \in C[a, b]$ (实空间), 由(5.1.8)式定义的机械求积公式 $f_n(x)$ 收敛于 $\int_a^b x(t)dt$ 的充分必要条件是下列二条件成立:

(i). 存在常数 $M > 0$, 使得 $\sum\limits_{k=0}^{n}|\alpha_k^{(n)}| \leq M (n \in \mathbb{N})$;

(ii). 对每一个多项式 $p \in P[a, b]$, $f_n(p) \to \int_a^b p(t)dt, (n \to \infty)$.

证明　对于任意的实数 $\alpha_0^{(n)}, \alpha_1^{(n)}, \cdots, \alpha_n^{(n)}$ 及

$$a \le t_0^{(n)} \le t_1^{(n)} \le \cdots \le t_n^{(n)} \le b.$$

首先,由(5.1.8)式定义的泛函 f_n 是 $C[a,b]$ 上的有界线性泛函,且

$$\|f_n\| = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}|. \tag{5.1.9}$$

事实上,明显地有

$$|f_n(x)| \le \left(\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}|\right) \|x\|, \quad \forall x \in C[a,b],$$

故 f_n 是有界的,且 $\|f_n\| \le \sum\limits_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}|$. 另一方面,对每一个 $n \in \mathbb{N}$, 可选取 $[a,b]$ 上的连续函数 $x_n(t)$, 使得 $\|x_n\| = 1$ 且

$$x_n(t_k^{(n)}) = \operatorname{sign}(\alpha_k^{(n)}), \quad k = 0, 1, \cdots, n,$$

于是 $|f_n(x)| = \sum\limits_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}|$, 故 $\|f_n\| \ge \sum\limits_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}|$. 因此(5.1.9)成立.

其次,泛函 f:

$$f(x) = \int_a^b x(t)dt, \quad \forall x \in C[a,b]$$

是有界线性泛函.

由Weierstrass逼近定理知, $P[a,b]$ 在 $C[a,b]$ 中稠密. 对泛函 f_n, f 应用定理5.1.3, 可得要求的结果. □

§5.1.3 练习题十五解答

1.若 $\{x_n\}$ 是 Banach空间 $\mathbb{X}$ 中的序列, 使得对每个 $f \in \mathbb{X}^*$, $\{f(x_n)\}$ 是有界数列, 则 $\{\|x_n\|\}$ 是有界的.

证明　对每个 $n \in \mathbb{N}$, 定义泛函

$$F_{x_n}(f) := f(x_n), \quad \forall f \in \mathbb{X}^*.$$

则有 $F_{x_n} \in \mathbb{X}^{**}$, 且 $\|F_{x_n}\| = \|x_n\|$. 由假设， $\forall f \in \mathbb{X}^*$, 都有 $f(x_n) = F_{x_n}(f)$ 是有界的, 从而

$$\sup_{n \ge 1} |F_{x_n}(f)| < \infty$$

$\mathbb{X}^*$ 是Banach空间，由一致有界原理可得 $\sup\limits_{n\ge1} \|F_{x_n}\| < \infty$ 有界。而 $\|x_n\| = \|F_{x_n}\|$, 所以 $\{\|x_n\|\}$ 是有界的. □

对每个 $f \in \mathbb{X}^*$, 集 $\{f(x_n)\}$ 是有界的, 称为弱有界性; $\{\|x_n\|\}$ 有界， 称为强有界, 此题表明弱有界与强有界是等价的.

2. 设 $a=\{a_k\}$. 若对每个 $x=\{\xi_k\}\in c_0$ 皆有 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\xi_i a_i<\infty$, 则 $a\in\ell^1$.

证明 定义 c_0 上的泛函

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k a_k,\quad x=\{\xi_k\}\in c_0,$$

易见，

$$|f_n(x)|\le\sum_{k=1}^{n}|a_k|\max_{1\le k\le n}|\xi_k|\le\sum_{k=1}^{n}|a_k|\|x\|_\infty,$$

所以 f_n 是 c_0 上的有界线性泛函, 进一步还有 $\|f_n\|=\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|$.

由假定，对每一个 $x=\{xi_k\}\in c_0$ 皆有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\xi_n a_n<\infty$,定义一个 c_0 上的线性泛函

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i a_i,\quad x=\{\xi_k\}.$$

而对每个 $x\in c_0$ 都有

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i a_i=\lim_{n\to\infty}f_n(x),$$

利用一致有界原理可得 $\|f\|\le\liminf\limits_{n\to\infty}\|f_n\|$,即 $f\in(c_0)^*=\ell^1$. 由泛函表示可知, f 对应于 $a=\{a_k\}$, 从而 $a\in\ell^1$. □

3. 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是Banach空间, $T_n\in\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})(n\in\mathbb{N})$, 则下列各条等价:

(i) $\{\|T_n\|\}$ 是有界的.

(ii) 对每一个 $x\in\mathbb{X}$, $\{T_n x\}$ 是有界的.

(iii) 对每一个 $x\in\mathbb{X}$ 及 每一个 $g\in\mathbb{Y}^*$, $\{g(T_n x)\}$ 是有界的.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 因为 $\{\|T_n\|\}$ 是有界的, 所以对任意 $x\in\mathbb{X}$, 有

$$\|T_n x\|\le\|T_n\|\|x\|\le M\|x\|,$$

即 $\{\|T_n x\|\}$ 是有界的.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 对于任意的 $g\in\mathbb{Y}^*$,有 $\|g\|\le M$. 由于对任意的 $x\in\mathbb{X}$, 都有 $\{\|T_n x\|\}$ 是有界的, 即 $\|T_n x\|<N$. 从而有

$$|g(T_n x)|\le\|g\|\|T_n x\|\le MN,$$

从而 $\{|g(T_n x)|\}$ 是有界的.

(iii) $\Rightarrow$ (i) 对任意的 $x\in\mathbb{X}$,及每一 $g\in\mathbb{Y}^*$, 都有

$$g(T_n x)=T_n^* g(x),\forall x\in\mathbb{X}.$$

由假定

$$\sup_{n\ge1}\|T_n^* g(x)\|=\sup_{n\ge1}|g(T_n x)|<\infty.$$

利用一致有界原理可得

$$\sup_{n\geq 1} \|T_n^* g\| < \infty$$

对每个 $g \in \mathbb{Y}^*$,再一次应用一致有界原理得 $\sup\limits_{n\geq 1} \|T_n^*\| < \infty$. 注意到等式 $\|T_n^*\| = \|T_n\|$， 因此 $\{\|T_n\|\}$ 是有界的. □

对算子列而言，(i) 表示算子列一致有界， (ii) 表示强有界， (iii) 表示弱有界。上题表明三个有界性是一致的.

4. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数,若对任意的 $g \in L^2[a,b]$, 积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 有限,证明 $f \in L^2[a,b]$.

证明 定义函数列

$$[f]_n(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| < n \\ n, & f(x) \geq n \\ -n, & f(x) \leq -n \end{cases}$$

明显地, $[f]_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界可测函数,且

$$\lim_{n\to\infty} [f]_n(x) = f(x), a.e.,$$

定义有界线性泛函

$$F_n(g) = \int_a^b [f]_n(x)g(x)dx, \quad \forall g \in L^2[a,b]$$

对每个固定的 n

$$\|F_n\|^2 = \int_a^b |[f]_n(x)|^2 dx$$

对每个固定的 $g \in L^2[a,b]$, Fatu引理表明

$$\lim_{n\to\infty} F_n(g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

即有

$$\sup_n |F_n(g)| < \infty.$$

$L^2[a,b]$ 是完备空间,应用一致有界定理表明

$$\sup_n \|F_n\| < \infty.$$

进一步应用算子列收敛定理,

$$F(g) = \int_a^b f(x)g(x)dx, \forall g \in L^2[a,b]$$

是有界线性泛函.由泛函表示定理 , $f \in L^2[a,b]$. □

§5.2 第十六讲　几种收敛性

教学目的:
介绍赋范线性空间中元列, 算子列和泛函列的几种收敛性概念。 各种不同的收敛性及其关系是泛函分析研究的重要内容,在理论 研究和应用上都十分重要。
本节要点:
元列的收敛性,算子列的收敛性, 泛函列的收敛性, 弱收敛性。

§5.2.1 内容提要

对于赋范线性空间中元素的序列,有下面两种收敛的概念.

定义 5.2.1　设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{X}$ 中的序列.

(1) 若存在 $x \in \mathbb{X}$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$, 则称序列 $\{x_n\}$ 是强收敛的(strongly convergent),记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, 或 $x_n \xrightarrow{s} x$. 这时, x 称为 $\{x_n\}$ 的强极限,并且称 $\{x_n\}$ 强收敛于 x .

(2) 若存在 $x \in \mathbb{X}$, 使得对每个 $f \in \mathbb{X}^*$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.则称序列 $\{x_n\}$ 为弱收敛的(weakly convergent),记为 $(w) \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. 或 $x_n \xrightarrow{w} x$. 这时, x 称为 $\{x_n\}$ 的弱极限,并且称 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x .

序列 $\{x_n\}$ 的强收敛实际上是序列 $\{x_n\}$ 在空间范数下的收敛. 对于弱收敛的序列,有下面的性质.

定理 5.2.1　若赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 中的序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x ,则

(1) $\{x_n\}$ 的弱极限 x 是唯一的;

(2) 序列 $\{\|x_n\|\}$ 是有界的.

推论 5.2.1　设 $\{x_n\}$ 是赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 中的序列. 若对每个 $f \in \mathbb{X}^*$, $\sup_n |f(x_n)| < \infty$,则 $\sup_n \|x_n\| < \infty$.

关于序列的强收敛与弱收敛的关系,有下面的定理.

定理 5.2.2　设 $\{x_n\}$ 是赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 中的序列.

(1) 若 $\{x_n\}$ 强收敛于 x ,则 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x .

(2) 若 $\mathbb{X}$ 是有限维的, $\{x_n\}$ 弱收敛于 x ,则 $\{x_n\}$ 强收敛于 x .

如果序列强收敛, 则其必弱收敛,并且强极限与弱极限是一致的; 下面的定理表明强和弱收敛点列的性质在有界线性算子映射下的不变性.

定理 5.2.3　设 $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间, $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

(1) 若 $\{x_n\} \subset \mathbb{X}$ 是强收敛的,则 $\{Tx_n\} \subset \mathbb{Y}$ 也是强收敛的;

(2) 若 $\{x_n\} \subset \mathbb{X}$ 是弱收敛的,则 $\{Tx_n\} \subset \mathbb{Y}$ 也是弱收敛的.

当算子具有特殊性质时,收敛性可能发生变化.

定理 5.2.4　设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, $\mathbb{Y}$ 是Banach空间, $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. 若 $\{x_n\}$ 是弱收敛的,则 $\{Tx_n\}$ 是强收敛的.

当空间具有某些特殊性质时,元列的性质也可能发生变化.

定理 5.2.5　(Schur 定理) 在 ℓ^1 中, 强收敛与弱收敛等价.

算子序列有三种收敛概念.

定义 5.2.2　设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间, $\{T_n\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, T 是 $\mathbb{X}$ 上的线性算子.

(1) 若 $\{T_n\}$ 在算子范数下收敛于 T ,即 $\|T_n - T\| \to 0$, 则称算子序列 $\{T_n\}$ 是一致收敛的(uniformly convergent), 记为 $\lim_{n\to\infty} T_n = T$, 或 $T_n \xrightarrow{u} T$.

(2) 若对每个 $x \in \mathbb{X}$, 序列 $\{T_nx\}$ 在 $\mathbb{Y}$ 中强收敛于 Tx, 则称算子序列 $\{T_n\}$ 是强收敛的(strongly convergent), 记为 $(s)\lim_{n\to\infty} T_n = T$, 或 $T_n \xrightarrow{s} T$.

(3) 若对每个 $x \in \mathbb{X}$ 序列 $\{T_nx\}$ 在 $\mathbb{Y}$ 中弱收敛于 Tx, 则称算子序列 $\{T_n\}$ 是弱收敛的(weakly convergent), 记为 $(w)\lim_{n\to\infty} T_n = T$, 或 $T_n \xrightarrow{w} T$.

定理 5.2.6　设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间, $T_n \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), (n \in \mathbb{N})$, T 是 $\mathbb{X}$ 上的线性算子.

(1) 若 $\{T_n\}$ 一致收敛于 T ,则 $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$;

(2) 若 $\{T_n\}$ 一致收敛于 T ,则 $\{T_n\}$ 强收敛于 T ;

(3) 若 $\{T_n\}$ 强收敛于 T ,则 $\{T_n\}$ 弱收敛于 T .

下面的定理给出算子列弱收敛于 T ,并保障 T 是有界线性算子的条件.

定理 5.2.7　设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间, $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间, $T_n \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})(n \in \mathbb{N})$. 若 $T_n \xrightarrow{w} T$,则 $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

注记 5.2.1　算子列的一致收敛性大多能保持算子的一些性质,比如紧算子列的一致极限是紧算子, 但强收敛的的算子列并不能保持这种性质. 紧算子列的强极限不必是紧算子,比如具有Schauder基的空间, 其部分和算子总是有限秩算子,从而是紧算子,但其强极限是单位算子.

定义 5.2.3　设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间, $T_n \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), (n \in \mathbb{N})$.

(1) 若 $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|T_n - T_m\| = 0$,则称 $\{T_n\}$ 为一致Cauchy列;

(2) 若对每个 $x \in \mathbb{X}$, $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|T_nx - T_mx\| = 0$,则称 $\{T_n\}$ 为强Cauchy列;

(3) 若对每个 $x \in \mathbb{X}$, $g \in \mathbb{Y}^*$, $\lim\limits_{n,m\to\infty} |g(T_nx) - g(T_mx)| = 0$,则称 $\{T_n\}$ 为弱Cuachy列.

当 $\mathbb{Y}$ 是Banach空间时, $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 是Banach空间, 一致Cauchy 列 $T_n \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 的极限 T 存在; 对强Cauchy列 $T_n \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $\mathbb{Y}$ 完备性只能保证强极限 T 存在,但不保证 $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. 对于弱Cauchy算子列 $T_n \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$,弱极限的存在性仍是一个问题.

线性泛函序列的几种收敛的概念.

定义 5.2.4　设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, $\{f_n\}$ 是 $\mathbb{X}^*$ 中的序列.

(1) 若存在 $f \in \mathbb{X}^*$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$, 则称 $\{f_n\}$ 是强收敛的(strongly convergent), 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, 或 $f_n \xrightarrow{s} f$.

(2) 若存在 $f \in \mathbb{X}^*$, 使得对每个 $F \in \mathbb{X}^{**}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} F(f_n) = F(f)$, 则称 $\{f_n\}$ 是弱收敛的(weakly convergent), 记为 $(w)\lim_{n\to\infty} f_n = f$ 或 $f_n \xrightarrow{w} f$.

(3) 若存在 $f \in \mathbb{X}^*$, 使得对每个 $x \in \mathbb{X}$ 有 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, 则称 $\{f_n\}$ 是弱 * 收敛的(weak * convergent),记为 $(w^*)\lim_{n\to\infty} f_n = f$, 或 $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

定理 5.2.8　设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, $\{f_n\}$ 是 $\mathbb{X}^*$ 中的序列.

(1) 若 $\{f_n\}$ 是强收敛的,则 $\{f_n\}$ 必是弱收敛的;

(2) 若 $\{f_n\}$ 是弱收敛的,则 $\{f_n\}$ 必是弱 * 收敛的.

定理 5.2.9　设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间, $f_n \in \mathbb{X}^*(n \in \mathbb{N})$, 则存在 $f \in \mathbb{X}^*$ 使 $\{f_n\}$ 弱 * 收敛于 f 的充分必要条件是下列两个条件同时成立.

(1) $\{\|f_n\|\}$ 是有界的.

(2) 对于 $\mathbb{X}$ 中的稠密子集 A 的每个元素 x ,序列 $\{f_n(x)\}$ 收敛.

定义 5.2.5　设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, $M \subset \mathbb{X}$. 若 M 中的任意点列 $\{x_n\}$ 都存在弱收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$, 则称 M 是弱序列紧的(weak sequentially compact).

若 $M \subset \mathbb{X}$ 是弱序列紧的,则 M 是有界集. 每个弱序列紧集的弱极限点都存在. 由于强收敛的序列是弱收敛的,因此强列紧集必是弱序列紧集.

对于对偶空间不仅有弱列紧性,还可用弱 * 收敛来定义弱 * 序列紧.

定义 5.2.6　设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, $\Omega \subset \mathbb{X}^*$. 若 Ω 中的任意点列 $\{f_n\}$ 都存在子序列 $\{f_{n_k}\}$ 弱 * 收敛于某个 $f \in \mathbb{X}^*$, 则称 Ω 是弱 * 序列紧的(weak * sequentially compact).

定理 5.2.10　(Alaoglu定理) 若赋范线性空间 $\mathbb{X}$ 是可分的, 则对偶空间 $\mathbb{X}^*$ 中每个有界集 Ω 都是弱 * 序列紧的 (这里 Ω 有界是指数集 $\{\|f\| \,\big|\, f \in \Omega\}$ 有界.)

推论 5.2.2　设 $\mathbb{X}$ 是可分的自反Banach空间,则 $\mathbb{X}$ 中每个有界集 Ω 都是弱序列紧的.

§5.2.2 典型例题

对一般的赋范线性空间 $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$, 空间中的元列, 算子列,泛函列的各种收敛性是不同的。同时由Cauchy列定义的完备性也不相同。

$T_n \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 强收敛于 T , 并不能保证 T 是有界线性算子; 当 $\mathbb{X}$ 是Banach 空间时, T 是有界线性算子. 同样地,若 $T_n \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 弱收敛于 T ,也不保 障 T 是有界线性算子.

例 5.2.1　在 $\ell^p(1 < p < \infty)$ 空间中, e_n 表示 ℓ^p 中其第 n 个坐标为1其余坐标皆为零的元素. 关于序列 $\{e_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \ell^p$, 有如下的结论.

(1) $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ 弱收敛于零元 θ. 因为对任意的 $f \in (\ell^p)^*, f$ 对应于 ℓ^q (这里 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)中的一个元 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots)$ 满足

$$f(e_n) = \alpha_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(2) $\|e_n\| = 1$, 故 $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ 不是强收敛的.

强收敛的算子序列不一定一致收敛, 弱收敛的算子序列不一定强收敛.

例 5.2.2 在 $\ell^p(1 \leq p < \infty)$ 中, 定义"左平移"算子 $T_n : \ell^p \to \ell^p$ 使得对每个 $x = \{\xi_k\} \in \ell^p$,

$$T_n x = \{\xi_{m+k}\} = (\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \cdots).$$

则算子序列 $\{T_n\}$ 强收敛于零算子, 但 $\{T_n\}$ 不一致收敛于零算子.

事实上, 对每一个 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in \ell^p$, 由于 $\|x\|^p = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < +\infty$, 则

$$\|T_n x\| = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

故 $\{T_n\}$ 强收敛于零算子.

$\{T_n\}$ 在 ℓ^p 上不是一致收敛的, 因为它若收敛,则必与强极限相同. 但对任意的 $n \in \mathbb{N}$, $\|T_n e_{n+1}\| = \|e_1\| = 1$, 这里 e_n 是 ℓ^p 中其第 n 个坐标为1其余坐标皆为零的元素, 故 $\|T_n\| \geq 1$. 因此, $\{T_n\}$ 不一致收敛于零算子. □

弱收敛但上不强收敛.

例 5.2.3 在 $\ell^p(1 < p < \infty)$ 中, 定义"右平移"算子 $T_n : \ell^p \to \ell^p$ 使得 对每一个 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in \ell^p$

$$T_n x = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n\text{个}0}, \xi_1, \xi_2, \cdots),$$

则算子序列 $\{T_n\}$ 弱收敛于零算子. 但是 $\{T_n\}$ 在 ℓ^p 上不强收敛.

事实上,对每一个 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in \ell^p$ 及每一个 $f \in (\ell^p)^*$, f 对应于 ℓ^q (这里 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)中的一个 元素 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots)$, 使得 $f(e_n) = \alpha_n, (n \in \mathbb{N})$. 当 $n \to \infty$ 时

$$f(T_n x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \alpha_{k+n} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \to 0,$$

故 $\{T_n\}$ 弱收敛于零算子.

但是 $\{T_n\}$ 在 ℓ^p 上不是强收敛的.因为对于 $x = (1, 0, 0, \cdots) \in \ell^p$, 当 $m \neq n$ 时

$$\|T_m x - T_n x\| = (1^p + 1^p)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}.$$

这表明序列 $\{T_n x\}$ 不是Cauchy列,不可能收敛. □

§5.2.3 练习题十六解答

1. 若 $\{x_n\}\subset C[a,b]$ 且 $x_n \xrightarrow{w} x\in C[a,b]$, 则 $\{x_n\}$ 逐点收敛于 x, 即对每一点 $t\in[a,b]$ 有 $x_n(t)\to x(t)$.

证明 对每一点 $t\in[a,b]$,定义泛函 $f_t(x)=x(t)$， 那么 $f_t(x)$ 是空间C[a,b]的有界线性泛函. 事实上,

$$|f_t(x)|=|x(t)|\le \max_{s\in[a,b]}|x(s)|\le \|x\|_\infty.$$

由于 $x_n \xrightarrow{w} x\in C[a,b]$, 所以 $|f_t(x_n)-f_t(x)|=|x_n(t)-x(t)|\to 0$, 即对于每一点 $t\in[a,b]$ 有 $x_n(t)\to x(t)$. □

在 $C[a,b]$ 中，强收敛 $\Rightarrow$ 弱收敛 $\Rightarrow$ 逐点收敛, 由此看到逐点收敛是非常弱的一种收敛性.

2. 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间, $T\in\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, $\{x_n\}\subset\mathbb{X}$, $x_0\in\mathbb{X}$. 若 $x_n\xrightarrow{w}x_0$, 则 $Tx_n\xrightarrow{w}Tx_0$.

证明 由于 $T\in\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, 所以对于任意的 $f\in\mathbb{Y}^*$, $T^*f\in\mathbb{X}^*$. 由 $x_n\xrightarrow{w}x_0$ 可知, 对于任意的 $g\in\mathbb{X}^*$, $\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=g(x)$,所以

$$\lim_{n\to\infty}T^*f(x_n)=T^*f(x),\quad g=T^*f.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}f(Tx_n)=\lim_{n\to\infty}T^*f(x_n)=T^*f(x)=f(Tx),$$

由上式可知, $Tx_n\xrightarrow{w}Tx_0$. □

3. 设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间. $\{x_n\}\subset\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}=\mathrm{span}\{x_n\}$, $x_0\in\mathbb{X}$. 若 $x_n\xrightarrow{w}x_0$, 则 $x_0\in\overline{\mathbb{Y}}$.

证明 若 $x_0\notin\overline{\mathbb{Y}}$, 那么有 $h=d(x_0,\mathbb{Y})>0$, 所以由Hahn-Banach定理可知， 存在 $f_0\in\mathbb{X}^*$ 使得 $f_0(x_0)=1$ 且 $f_0(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{Y}$, 所以 $|f_0(x_n)-f_0(x_0)|=|0-1|=1,\forall n\in\mathbb{N}$. 而 $x_n\xrightarrow{w}x_0$, 那么对于任意的 $f\in\mathbb{X}^*$ 都有

$$|f(x_n)-f(x_0)|\to 0.$$

这与 f_0 的取法相矛盾. 从而 $x_0\in\overline{\mathbb{Y}}$. □

集 $\mathbb{Y}\subset\mathbb{X}$， 对每个点列 $x_n\in\mathbb{Y}$, 若 $x_n\xrightarrow{s}x$,都有 $x\in\mathbb{Y}$, 则称 $\mathbb{Y}$ 是强闭集(也就是通常意义下的闭集)。 若 $x_n\xrightarrow{w}x$, 都有 $x\in\mathbb{Y}$,则称 $\mathbb{Y}$ 为弱闭集. 一般来说， 强闭集不必是弱闭集， 比如 ℓ^1 中的单位球面是强闭集，但不是弱闭集，因为Schauder基序列 $\{e_n\}$ 总是弱收敛于 0 的。

上题表明，当 $\mathbb{Y}$ 是子空间时， $\mathbb{Y}$ 的强闭子空间与它是弱闭子空间是等价的.

4. 设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, $E\subset\mathbb{X}^*$ 且 $\overline{\mathrm{span}E}=\mathbb{X}^*$, $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{X}$ 中的序列, $x\in\mathbb{X}$. 若 $\sup_n\|x_n\|<\infty$ 且对任意的 $f\in E$ 有 $f(x_n)\to f(x)$, 则 $x_n\xrightarrow{w}x$.

证明 由于 $\overline{\mathrm{span}E} = \mathbb{X}^*$, 对任意的 $f \in \mathbb{X}^*$, 存在泛函列 $f_k \in \mathrm{span}E$, $k \in \mathbb{N}$ 使得 $f_k \to f$ (强收敛). 即对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 > 0$, 当 $k > N_1$ 时,

$$\|f_k - f\| \leq \frac{\varepsilon}{3M}$$

其中 $M = \max\{\sup\limits_n \|x_n\|, \|x\|\}$.

对每个 $f \in \mathbb{X}^*$,

$$|f(x_n) - f(x)| \leq |f_k(x_n) - f(x_n)| + |f_k(x_n) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| < \frac{2\varepsilon}{3} + |f_k(x_n) - f_k(x)|$$

对 $k > N_1$ 时成立. 固定 $k > N_1$,由于 $f_k \in \mathrm{span}E$ ， 存在 E 中有限个元 $g_s, s = 1, 2, \cdots, m \in E$ 使得

$$f_k = \sum_{s=1}^{m} \alpha_s g_s, \quad \alpha_s \in \mathbb{K}.$$

由题意可知对每个 $g \in E$ 有 $g(x_n) \to g(x)$, 所以有 $f_k(x_n) \to f_k(x)$. 从而有

$$\limsup_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \lim_{n\to\infty} |f_k(x_n) - f_k(x)| \leq \varepsilon.$$

由 ε 的任意性， 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, 即 $x_n \xrightarrow{w} x$. □

5. 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间, $T_n, T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})(n \in \mathbb{N})$. 证明 $\{T_n\}$ 一致收敛于 T 的充分必要条件是, 对任意的 $\varepsilon > 0$ 存在一个仅与 ε 有关的正整数 N ,使得对一切 $n > N$ 以及 $\mathbb{X}$ 中一切范数为1的元素 x 有

$$\|T_n x - Tx\| < \varepsilon.$$

证明 " $\Rightarrow$ " 因为 T_n 一致收敛到 T , 所以对 $\forall\varepsilon > 0$ 存在 $N(\varepsilon)$ 满足当 $n > N$ 时 有 $\|T_n - T\| < \varepsilon$. 所以 对于范数为1的元素 x 有

$$\|T_n x - Tx\| \leq \|T_n - T\|\|x\| = \|T_n - T\| < \varepsilon.$$

" $\Leftarrow$ "若存在一仅与 ε 有关的正整数 $N(\varepsilon)$,使得对一切 $n > N$ 以及 $\mathbb{X}$ 中 的一切范数为1的元素 x 有 $\|T_n x - Tx\| < \varepsilon$ ， 那么有

$$\|T_n - T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_n x - Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|(T_n - T)x\| \leq \varepsilon,$$

从而 $\{T_n\}$ 一致收敛到 T . □

6. 设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, $f_n \in \mathbb{X}^*(n \in \mathbb{N})$. 若 $\{f_n\}$ 弱 * 收敛于 $f \in \mathbb{X}^*$, 则 $\{f_n\}$ 的弱 * 极限是唯一的.

证明 设 f, g 都是 $\{f_n\}$ 的弱 * 极限. 由 $\{f_n\}$ 弱 * 收敛于 $f \in \mathbb{X}^*$, 那么对于任意的 $x \in \mathbb{X}$ 有

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

所以 $g(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{X}$. 即 $g = f$. □

§5.3 第十七讲　开映射定理

教学目的:
Banach空间线性算子理论中另外一个主要定理,即开映射定理。 由开映射定理可以得到Banach空间“逆算子定理”，这些定理在理论与实际中都有广泛的应用。
本节要点:
开映射定理,逆算子定理,范数等价定理

§5.3.1 内容提要

定义 5.3.1　设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是度量空间(或者更一般地可设为拓扑空间), 映射 $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$.若 $\mathbb{X}$ 中的每个开集 G 的象 $f(G)$ 是 $\mathbb{Y}$ 中的开集, 则 f 称为开映射(open mapping).

引理 5.3.1　设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是Banach空间. 若 $T\in\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ 是满射, 则 $\mathbb{X}$ 的单位开球 $B_0=B(\theta,1)$ 的像 $T(B_0)$ 必含有一个以 $\theta\in\mathbb{Y}$ 为中心的开球.

定理 5.3.1　(开映射定理) 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是Banach空间, $T\in\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. 若 $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ 是满射, 则 T 是开映射.

定理 5.3.2　(逆算子定理) 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是Banach空间, $T\in\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. 若 $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ 是双射, 则 T 的逆算子 $T^{-1}:\mathbb{Y}\to\mathbb{X}$ 也是有界线性算子.

推论 5.3.1　(范数等价定理) 设 $(\mathbb{X},\|\cdot\|_1)$ 和 $(\mathbb{X},\|\cdot\|_2)$ 是两个Banach空间. 若存在常数 $c_1>0$ 使得

$$\|x\|_2\le c_1\|x\|_1,\quad \forall x\in\mathbb{X}.$$

则存在 $c_2>0$ 使得

$$\|x\|_1\le c_2\|x\|_2,\quad \forall x\in\mathbb{X}$$

即范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是等价的.

定理 5.3.3　设 $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ 是Banach空间, $T\in\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, 且 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的. 则存在常数 $c>0$ 使得

$$\|Tx\|\ge c\,d(x,\mathcal{N}(T)),\quad \forall x\in\mathbb{X}. \tag{5.3.1}$$

注记 5.3.1　如果条件(5.3.1)成立, 则算子 T 的值域也是闭的,所以(5.3.1)成为算子 T 具有闭值域的充要条件.

定理 5.3.4　设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间, 则存在 $\mathbb{X}$ 的两个闭子空间 M,N 使得 $\mathbb{X}$ 有直和分解 $\mathbb{X}=M\oplus N$ 的充要条件是 $\mathbb{X}$ 拓扑同构于 $M\times N$.

推论 5.3.2　设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间, $\mathbb{X}$ 有拓扑直和分解 $\mathbb{X}=M\oplus N$, 则 $\mathbb{X}$ 的范数等价于乘积空间 $M\times N$ 的范数,即存在常数 $c>0$ 使得

$$c(\|m\|+\|n\|)\le\|x\|\le\|m\|+\|n\|,\quad \forall x=m+n\in\mathbb{X}. \tag{5.3.2}$$

§5.3.2 典型例题

开映射定理, 逆算子定理, 范数等价定理在实际中有广泛应用。定理中要求的条件是重要的如果条件不满足结果可能不对。

例 5.3.1　设 $\mathbb{X} = (C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$,线性空间 $\mathbb{Y}$ 定义如下

$$\mathbb{Y} = \{x \in C^1[a,b] \mid x(a) = 0\}$$

在 $\mathbb{Y}$ 中取范数 $\|x\|_\infty$, $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|_\infty)$ 是赋范线性空间.

积分算子

$$G(x) = \int_a^t x(s)ds, \quad x \in C[a,b] = \mathbb{X}.$$

$G : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是有界线性算子,且为双射, G 的逆算子是微分算子 D

$$Dy(t) = y'(t), \quad y \in \mathbb{Y}$$

是无界线性算子.

上例表明：两个空间间的线性同构映射(双射)不必为有界可逆的.

例 5.3.2　设线性空间 $\mathbb{X} = C[a,b]$, 在 $\mathbb{X}$ 上定义两个范数

$$\|x\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |x(t), \quad \|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|dt.$$

(1) 空间 $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_\infty)$ 是Banach空间, $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_1)$ 是赋范线性空间.

(2) 对任意的 $x \in \mathbb{X}$,且有不等式

$$\|x\|_1 \le (b-a)\|x\|_\infty.$$

$\mathbb{X}$ 中的范数 $\|x\|_\infty$ 与 $\|x\|_1$ 不等价.

上例表明：同一线性空间上定义的两个范数不必等价。

§5.3.3 练习题十七解答

1. 设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间, M 和 N 都是 $\mathbb{X}$ 的闭子空间,且 $M \cap N = \{\theta\}$. 则 $M \oplus N$ 是闭子空间的充要条件 $M \oplus N$ 的范数与 $M \times N$ 的范数等价。

证明 充分性. 假定 $M \oplus N$ 的范数与 $M \times N$ 的范数等价,即存在数 $c > 0$ 使得

$$c(\|m\| + \|n\|) \le \|m+n\| \le \|m\| + \|n\|, \quad \forall x = m+n \in M \oplus N.$$

则映射 $Jx = (m,n), x = m+n$,是有界可逆的,即 $M \oplus N$ 与 $M \times N$ 拓扑同构. 由于 M , N 都是 $\mathbb{X}$ 的闭子空间,从而是Banach空间,所以 $M \times N$ 是Banach空间. 而 $M \oplus N$ 拓扑同构于 $M \times N$,所以 $M \oplus N$ 也是Banach空间,它是 $\mathbb{X}$ 的闭子空间. 充分性得证。

必要性：假定 $M \oplus N$ 是 $\mathbb{X}$ 的闭子空间,由于 $\mathbb{X}$ 是Banach空间,则 $M \oplus N$ 也是Banach空间. 则 $M \times N$ 也是Banach空间. 在 $M \oplus N$ 上定义新的范数, $\|x\|_* = \|m\| + \|n\|$,明显地,

$$\|x\| \le \|x\|_*$$

依范数等价定理存在 $c > 0$ 使得

$$c(\|m\| + \|n\|) \le \|m + n\| \le \|m\| + \|n\|, \quad \forall x = m + n \in M \oplus N.$$

即两个范数等价。 □

2. 设 $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ 是Banach空间, $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是有界线性算子, 单射. 在 $\mathbb{X}$ 上定义新的范数

$$\|x\|_1 = \|Tx\|_{\mathbb{Y}}, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

证明 $\|x\|_1$ 与 $\|x\|$ 等价的充要条件 $\mathcal{R}(T)$ 是 $\mathbb{Y}$ 中的闭集.

证明 充分性.假定 $\mathcal{R}(T)$ 是 $\mathbb{Y}$ 中的闭集.由于 $\mathbb{Y}$ 是Banach空间,则 $\mathcal{R}(T)$ 也是Banach空间。$T : \mathbb{X} \to \mathcal{R}(T)$ 是双射,逆算子定理表明 $T^{-1} : R(T) \to X$ 是有界线性算子,所以

$$\|x\| = \|T^{-1}Tx\| \le \|T^{-1}\|\|Tx\|$$

对任意的 $x \in \mathbb{X}$,有

$$\frac{1}{\|T^{-1}\|}\|x\| \le \|x\|_1 \le \|T\|\|x\|.$$

所以两个范数等价.

必要性:假定两个范数等价,即存在正常数 c 使得

$$c\|x\| \le \|x\|_1 \le \|T\|\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

左半边不等式是

$$\|Tx\| \ge c\|x\|, \forall x \in \mathbb{X}.$$

对任意的 $y_n \in \mathcal{R}(T)$, $y_n \to y$,存在 $x_n \in \mathbb{X}$, $y_n = Tx_n$, 由上式得到

$$\|y_n - y_m\| \ge c(\|x_n - x_m\|)$$

所以 $\{x_n\}$ 是 X 中的基本点列,存在极限 $x \in X$ 使得 $x_n \to x$,于是利用算子 T 的连续性有

$$y_n = Tx_n \to y = Tx.$$

即 $\mathcal{R}(T)$ 是 $\mathbb{Y}$ 中的闭集. □

§5.4 第十八讲 闭图象定理

教学目的:
讨论Banach空间理论中另一个主要定理,即闭图象定理。 本质上讲, 开映射定理与闭图象定理两个定理是等价的，从应用角度, 闭图象定理更便于在实际中应用。
本节要点:
闭图象定理, 算子有界定理

§5.4.1 内容提要

定义 5.4.1 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间,映射 $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$. 乘积空间 $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, 按照范数 $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$ 成为赋范线性空间. $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ 中的集合

$$G(T) = \{(x, Tx) \mid x \in \mathcal{D}(T)\} \tag{5.4.1}$$

称为映射 T 的图象(graph). 若 $G(T)$ 是 $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ 中的闭集, 则称 T 有闭图象,或称 T 为闭映射,闭算子. 若 T 是既是闭映射又是线性算子,则称 T 为闭线性算子(closed linear operator).。

引理 5.4.1 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间,映射 $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$. 则 T 是闭映射当且仅当

$$\forall x_n \in \mathcal{D}(T), (n \in \mathbb{N}), \quad 若\ x_n \to x, \quad Tx_n \to y \Longrightarrow \quad x \in \mathcal{D}(T), \quad Tx = y. \tag{5.4.2}$$

推论 5.4.1 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间, $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是闭映射, 若 T 是可逆的,则 $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to \mathbb{X}$ 也是闭映射.

注意到

$$G(T^{-1}) = \{(y, T^{-1}y) \mid y \in \mathcal{R}(T)\} = \{(Tx, x) \mid x \in D(T)\}$$

上面推论结果是明显的.

引理 5.4.2 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间, $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是线性算子. 若 T 是有界的, 且 $\mathcal{D}(T)$ 是 $\mathbb{X}$ 中的闭集, 则 T 是闭算子. 特别地,当 $\mathcal{D}(T) = \mathbb{X}$ 时,若 T 是有界线性算子,则 T 是闭算子.

例 5.4.1 设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间,若 M 是 $\mathbb{X}$ 中的稠密子空间且 $M \neq \mathbb{X}$, 则恒等算子 $I_M : M \to M \subset \mathbb{X}$ 是有界线性算子.但是,只要取 $x \in \mathbb{X} \backslash M$ 和序列 $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(I_M) = M$, 使得 $x_n \to x$, 应用引理5.4.1便可知 $I_M : \mathcal{D}(I_M) \to \mathbb{X}$ 不是闭算子.

定理 5.4.1 (闭图象定理) 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是Banach空间, $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是闭线性算子. 若 $\mathcal{D}(T)$ 是 $\mathbb{X}$ 中的闭集,则 T 是有界的.

推论 5.4.2 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是Banach空间, $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是线性算子, 则 T 是闭算子当且仅当 T 是有界算子.

推论 5.4.3 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是Banach空间, $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是闭线性算子. 若 $\mathcal{N}(T) = \{\theta\}$, $\mathcal{R}(T) = \mathbb{Y}$, 则 $T^{-1} : \mathbb{Y} \to \mathcal{D}(T)$ 是有界线性算子.

§5.4.2 典型例题

闭图象定理及其推论常常被用来证明线性算子的有界性以及无界算子逆算子的有界性。

在有些算子表达式中, 根据现有的条件可能无法直接估计它是有界线性算子, 则可利用闭算子定理来证明它是有界线性算子。

例 5.4.2 考察微分算子 $D : \mathcal{D}(D) \to C[0,1]$, 这里 $\mathcal{D}(D) = C^1[0,1]$ 是闭区间 $[0,1]$ 上连续可微函数的组成的集合,它是 $C[0,1]$ 的 子空间.对每个 $f \in \mathcal{D}(D)$

$$(Df)(t) = f'(t) = \frac{df(t)}{dt}.$$

D 是无界的闭算子.

事实上,取任意的 $f_n \in \mathcal{D}(D)(n \in \mathbb{N})$ 使得 $f_n \to f$ 以及 $Df_n = f_n' \to g$. 由于 $C[0,1]$ 中元列的收敛等价于 $[0,1]$ 上函数列的一致收敛,因此 在下面的运算过程中,极限运算与积分运算可以交换次序,即

$$\begin{aligned}\int_0^t g(s)ds &= \int_0^t \lim_{n\to\infty} f_n'(s)ds = \lim_{n\to\infty}\int_0^t f_n'(s)ds\\ &= \lim_{n\to\infty}(f_n(t) - f_n(0)) = f(t) - f(0).\end{aligned}$$

于是有

$$f(t) = f(0) + \int_o^t g(s)ds.$$

这表明 $f \in \mathcal{D}(D)$ 且 $Df = f' = g$. 所以 T 是闭算子. □

例 5.4.3 设 $1 < p, p' < \infty$, (α_{ij}) 是无穷矩阵满足下面条件

(1) 对每个 $i \in \mathbb{N}$,均有

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^q < \infty \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

(2) 对任意的 $x = \{\xi_j\} \in \ell^p$, 以

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\xi_j \quad (i \in \mathbb{N})$$

为坐标的元素 $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots) \in \ell^{p'}$.

定义算子 $Tx = y, \forall x \in \ell^p$. 则 $T : \ell^p \to \ell^{p'}$ 是有界线性算子.

证明 显然, T 是线性算子,定义域 $\mathcal{D}(T) = \ell^p$ 是闭的. 要证 T 是连续的, 由闭图象定理只需证明 T 是闭算子. 假设 $\{x_n\} \subset \ell^p$ 满足条件

$$x_n \to x_0, \quad Tx_n \to y.$$

记

$$x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots), \quad Tx_n = (\eta_1^{(n)}, \eta_2^{(n)}, \cdots)(n \in \mathbb{N}),$$

$$x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \cdots), \quad y = (\eta_1, \eta_2, \cdots).$$

由于 ℓ^p 中点列的收敛可推出点列按坐标收敛. 因此由 $Tx_n \to y$ 可得,对每个固定的 $i \in \mathbb{N}$,

$$\eta_i^{(n)} \to \eta_i \quad n \to \infty. \tag{5.4.3}$$

另一方面,当令 $Tx_0 = (\eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}, \cdots)$ 时, 对每个 $i \in \mathbb{N}$,由Hölder不等式有

$$\begin{aligned} |\eta_i^{(n)} - \eta_i^{(0)}| &= \left| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} (\xi_j^{(n)} - \xi_j^{(0)}) \right| \\ &\le \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(n)} - \xi_j^{(0)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \|x_n - x_0\| \to 0 \quad (n \to \infty), \end{aligned}$$

由此推出

$$\eta_i^{(n)} \to \eta_i^{(0)} \quad (n \to \infty, i \in \mathbb{N}). \tag{5.4.4}$$

由极限的唯一性及(5.4.3)与(5.4.4),则得 $\eta_i = \eta_i^{(0)} (i \in \mathbb{N})$, 即 $y = Tx_0$. 由引理5.4.1知, T 是闭算子, 推论5.4.2表明 T 是有界线性算子. □

注记 5.4.1 在前面例子中,第二个条件等价于,对每个 $\{\zeta_k\} \in \ell^{q'}$ ($\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$),

$$\sum^{\infty} \zeta_k \eta_k = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k (\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{kj} \xi_j) < \infty.$$

实际上,设 $\eta_k = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{kj} \xi_j, k \in \mathbb{N}$, 对每个 $z = \{\zeta_k\} \in \ell^{q'}$,

$$f_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \zeta_k$$

是有界线性泛函,且

$$f_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \zeta_k \to \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \zeta_k, \quad n \to \infty.$$

一致有界定理(算子列收敛定理)表明 $f \in ell^{p'}$,即 $f = \{\eta_k\} \in \ell^{p'}$.

例 5.4.4 (线性微分方程组解的连续依赖性)考虑一个 n 阶非齐次线性常微分方程

$$a_n(t) x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t) x'(t) + a_0(t) x(t) = y(t), \quad t \in (a, b), \tag{5.4.5}$$

这里 $a_k \in C[a, b]$, $a_n(t) > 0$, $x^{(k)}(t)$ 表示 x 的 k 阶导数 $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$.

设 S 表示方程(5.4.5)的初始条件

$$S : x(a) = x'(a) = \cdots = x^{(n-1)}(a) = 0. \tag{5.4.6}$$

(或者多点边界条件

$$S: x(t_1) = x(t_2) = \cdots = x(t_n) = 0, \quad \text{这里}(a = t_1 < \cdots < t_n = b). \tag{5.4.7}$$

常微分方程理论中的Picard定理指出:若对每个 $y \in C[a,b]$ 都存在唯一的解 $x \in C^n[a,b]$, 则此解 $x(t)$ 是连续依赖于函数 $y(t)$ 的.

现在验证这一结论. $C^n[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上所有 n 阶连续可微函数的全体, 其中元素 x 的范数定义为

$$\|x\|_d = \sum_{k=0}^{n} \max_{a \le t \le b} |x^{(k)}(t)|.$$

易验证 $(C^n[a,b], \|\cdot\|_d)$ 是Banach空间.令

$$\mathbb{X} = \{x \in C^n[a,b] \mid x \text{ 满足条件 } S\}.$$

易见 $\mathbb{X}$ 是 $C^n[a,b]$ 的闭子空间,从而 $\mathbb{X}$ 也是完备的. $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ 是Banach空间.

定义算子 $T: \mathbb{X} \to C[a,b]$, 对每个 $x \in \mathbb{X}$

$$Tx = a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x.$$

则 T 是线性算子. 方程(5.4.5)解的存在及唯一性表明 T 是双射. 对每个 $x \in \mathbb{X}$, 容易得到

$$\|Tx\|_\infty \le \max_{1 \le k \le n} \|a_k\|_\infty \|x\|_d,$$

故 T 是有界的. 应用逆算子定理, $T^{-1}: C[a,b] \to \mathbb{X}$ 存在且连续. 因此当 $[a,b]$ 上的连续函数 $y(t)$ 有一微小变化时, 相应的满足条件 S (初始条件或边界条件)的解 $x(t)$ 以及它的各阶导函数 $x'(t), \cdots, x^{(n)}(t)$ 一致地有微小的变化. 这就是解 $x(t)$ 对 $y(t)$ 的连续依赖性.

在实际应用中,往往仅对 $C[a,b]$ 的某些特殊的函数(例如多项式)可以求出解.对于 $y \in C[a,b]$, 欲求对应的解 $x \in \mathbb{X}$,可取多项式 p_m 使 $p_m \to y$. 若 $x_m \in \mathbb{X}$ 是 p_m 对应的解, 依解对 y 的连续依赖性知, $x_m \to x$. □

注记 5.4.2　在对例5.4.4讨论时,采用了与微分同阶的空间 $\mathbb{X}$,微分表达式是有界线性算子. 如果在空间 $C[a,b]$ 中直接讨论,微分算子具有定义域

$$\mathcal{D}(T) = \{x \in C^n[a,b] \mid x\text{满足条件 } S\} \subset C[a,b],$$

$$Tx = a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x.$$

直接验证可知 T 是无界闭线性算子, $\mathcal{R}(T) = C[a,b]$, $\mathcal{N}(T) = \{0\}$,应用推论5.4.3, $T^{-1}: C[a,b] \to \mathcal{D}(T) \subset C[a,b]$ 是有界线性算子, 也得到要求的结论.

§5.4.3 练习题十八解答

1. 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间, $T:\mathcal{D}(T)\subset\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ 是闭线性算子. 若 T^{-1} 存在, 则 T^{-1} 也是闭线性算子.

证明 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是赋范空间, $T:\mathcal{D}(T)\subset\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ 是闭线性算子。

(证法1) 若 T^{-1} 存在,易知 T^{-1} 线性算子. 设 $T^{-1}:\mathcal{R}(T)\to\mathcal{D}(T)$, 对 $y_n\in\mathcal{R}(T)$, 若 $y_n\to y$ 且 $T^{-1}y_n\to x$, 要证 $y\in\mathcal{R}(T)$, $T^{-1}y=x$. 令 $x_n=T^{-1}y_n$, 那么有 $x_n\to x$, $Tx_n=y_n\to y$, 由于 T 是闭线性算子, 则有 $x\in\mathcal{D}(T)$ 并且 $Tx=y$, 这时有 $y\in\mathcal{R}(T)$ 并且 $T^{-1}y=x$, 所以按照闭算子的定义可知, T^{-1} 也是闭线性算子.

(证法2) 在乘积空间 $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ 与乘积空间在 $\mathbb{Y}\times\mathbb{X}$ 间定义 算子 Φ

$$\Phi(x,y)=(y,x)\quad\forall(x,y)\in\mathbb{X}\times\mathbb{Y}.$$

易见 Φ 是 $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ 到 $\mathbb{Y}\times\mathbb{X}$ 的等距同构映射。从而当 $M\subset\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ 为闭集时, $\Phi(M)\subset\mathbb{Y}\times\mathbb{X}$ 也为闭集.

设 T 是闭线性算子, T^{-1} 存在, T^{-1} 是线性算子. 现在 由假设可知集合 $G(T)=\{(x,Tx)\mid x\in\mathcal{D}(T)\}$ 是空间 $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ 中的闭集, 所以

$$\Phi(G(T))=\{(Tx,x)\mid x\in\mathcal{D}(T)\}=G(T^{-1})$$

是 $\mathbb{Y}\times\mathbb{X}$ 中的闭集, 从而由闭算子定义可知 T^{-1} 是闭线性算子. □

2. 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间, $T:\mathcal{D}(T)\subset\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ 是闭线性算子. 若 $A\subset\mathbb{D}(T)$ 是 $\mathbb{X}$ 中的紧子集, 则 A 的象 $T(A)$ 是 $\mathbb{Y}$ 中的闭集.

证明 假设 $y\in\overline{T(A)}$, 则存在 $y_n\in T(A)$ 使得 $y_n\to y$, 从而有 $x_n\in A$, 使得 $Tx_n=y_n$. 由于 A 是紧集, 则存在子列 $\{x_{n_i}\}\subset\{x_n\}$ 使得 $x_{n_i}\to x\in A$. 而 $\{y_{n_i}\}$ 是 $\{y_n\}$ 的子列, 从而有 $y_{n_i}=Tx_{n_i}\to y$. 由 T 是闭算子可得, $x\in\mathcal{D}(T)\cap A$ 且 $y=Tx$. 从而 $y\in T(A)$, 所以 $T(A)$ 是 $\mathbb{Y}$ 中的闭集。 □

3. 设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, $\mathbb{Y}$ 是Banach空间, $T:\mathcal{D}(T)\subset\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ 是有界线性算子. 若 T 是闭算子, 则 $\mathcal{D}(T)$ 是 $\mathbb{X}$ 中的闭集.

证明 设 $x\in\overline{\mathcal{D}(T)}$, 这时存在 $x_n\to x$, $x_n\in\mathcal{D}(T)$. 由于 T 是有界线性算子, 不妨设 $\|T\|<M$。 所以有 $\|Tx_m-Tx_n\|\le\|T\|\|x_m-x_n\|$, 由于 $\{x_n,n\in\mathbb{N}\}$ 是一Cauchy 列, 从而有 $\{Tx_n,n\in\mathbb{N}\}$ 是 $\mathbb{Y}$ 中Cauchy列. 由于 $\mathbb{Y}$ 是 Banach空间, 利用其完备性可得存在 $y\in\mathbb{Y}$, $Tx_n\to y\in\mathbb{Y}$. 此时由 T 是闭算子可知 $x\in\mathcal{D}(T)$ 且 $Tx=y$. 所以 $\mathcal{D}(T)$ 是 $\mathbb{X}$ 中的闭集. □

上面的结果与闭图像定理结合在一起, 可以给出闭算子, 有界线性算子和定义域闭之间的关系:

1) $\mathbb{X}$ 赋范空间， $\mathbb{Y}$ 是Banach空间，

闭算子 + 有界线性算子 ⇒ $\mathcal{D}(T)$ 闭:

2) $\mathbb{X}$ 是Banach空间， $\mathbb{Y}$ 是Banach空间，

闭算子 + $\mathcal{D}(T)$ 闭 ⇒ 有界线性算子:

3) $\mathbb{X}$ 赋范空间， $\mathbb{Y}$ 是赋范空间，

有界线性算子 + $\mathcal{D}(T)$ 闭 ⇒ 闭算子

4. 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是赋范线性空间, $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ 是闭线性算子. 证明 T 的零空间 $\mathcal{N}(T)$ 是 $\mathbb{X}$ 中的闭子空间.

证明　由于 $T:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ 是线性算子, 所以 $\mathcal{N}(T)$ 是线性空间. 设 $x\in\overline{\mathcal{N}(T)}$, 则存在点列 $x_n\in\mathcal{N}(T)$ 且 $x_n\to x$. 此时恒有 $Tx_n=0$. 由于 T 是闭线 性算子，所以 $x\in\mathcal{D}(T)$ 且 $Tx=0$. 即 $x\in\mathcal{N}(T)$, 因此是 $\mathcal{N}(T)$ 是 $\mathbb{X}$ 中的闭子空间。 □

5. 设 $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ 是同一数域上的Banach空间, $T:\mathcal{D}(T)\subset\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ 是闭线性算子,在 $\mathcal{D}(T)$ 上定义范数

$$\|x\|_T=\|x\|+\|Tx\|,\quad x\in\mathcal{D}(T).$$

则 $\mathbb{X}_1=(\mathcal{D}(T),\|\cdot\|_T)$ 也是Banach空间, $T:\mathbb{X}_1\to\mathbb{Y}$ 是有界线性算子.

证明　首先证明 $\mathbb{X}_1=(\mathcal{D}(T),\|\cdot\|_T)$ 是Banach空间.

设 $x_n\in\mathbb{X}_1$ 是Cauchy列,即

$$\|x_n-x_m\|_T=\|x_n-x_m\|+\|Tx_n-T_m\|\to 0,\quad n,m\to\infty$$

上式表明 $\{x_n\}\subset\mathbb{X}$, $\{Tx_n\}\subset\mathbb{Y}$ 都是Cauchy列,由于 $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ 是Banach空间, 则存在 $x_0\in X$, $y\in Y$ 使得

$$x_n\to x_0,\quad Tx_n\to y,\quad n\to\infty.$$

由于 T 是闭算子,则 $x_0\in\mathcal{D}(T)$,且 $Tx_0=y$.于是 $x_0\in\mathbb{X}_1$,且

$$\|x_n-x_0\|_T=\|x_n-x_0\|+\|Tx_n-Tx_0\|\to 0,\quad n\to\infty.$$

所以, $\mathbb{X}_1$ 是Banach空间.

对任意的 $x\in\mathbb{X}_1$, $Tx\in\mathbb{Y}$,

$$\|Tx\|\le\|x\|+\|Tx\|=\|x\|_T,$$

因此 T 是 $\mathbb{X}_1$ 到 $\mathbb{Y}$ 的有界线性算子, 且 $\|T\|\le 1$. □

§5.5 第十九讲　Banach空间中特殊类算子

教学目的:
介绍Banach空间中一些特殊类的有界线性算子：一类是幂等算子,另一类是具有广义逆的有界线性算子, Fredholm算子是其中的一种。幂等算子与空间的分解紧密相关,而具有广义逆的有界线性算子,则与方程求解密切联系。
本节要点:
幂等算子, 具有广义逆的有界线性算子, Fredholm算子.

§5.5.1 内容提要

首先介绍空间分解的几个概念.

定义 5.5.1 设 $\mathbb{X}$ 是线性空间, M , N 是 $\mathbb{X}$ 的两个子空间,如果 $M\cap N=\{\theta\}$, 则称 $M+N$ 代数直和, 记为 $M\oplus N$.

设 M 是 $\mathbb{X}$ 的一个子间, 如果子空间 N 使得 $M\cap N=\{\theta\}$,且有 $\mathbb{X}=M\oplus N$, 则称 M 是代数可余子空间, N 称为 M 的余子空间(也称补空间).分解 $\mathbb{X}=M\oplus N$ 称为代数可余分解(简称代数直和分解).

设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, M , N 都是 $\mathbb{X}$ 的闭子空间, 如果 $M\cap N=\{\theta\}$, 且 $M+N$ 是 $\mathbb{X}$ 的闭子空间, 称 $M\oplus N$ 是拓扑直和.

设 M 是 $\mathbb{X}$ 的闭子空间, 如果存在 $\mathbb{X}$ 的闭子空间 N 使得 $\mathbb{X}=M\oplus N$, 则称 M 是拓扑可余子空间, N 称为 M 的拓扑余子空间(也称拓扑补子空间). 分解 $\mathbb{X}=M\oplus N$ 称为拓扑可余分解(简称拓扑直和分解).

定理 5.5.1 设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间,则存在 $\mathbb{X}$ 的两个闭子空间 M,N 使得 $\mathbb{X}$ 有直和分解 $\mathbb{X}=M\oplus N$ 的充要条件是存在幂等算子 $P\in\mathcal{B}(\mathbb{X})$ 使得 $\mathcal{R}(P)=M$, $\mathcal{N}(P)=N$.

定义 5.5.2 设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间, $P\in\mathcal{B}(\mathbb{X})$. 如果算子 P 满足条件 $P^2=P$,则称 P 为幂等算子(也称为投影算子). $\mathbb{X}$ 上所有幂等算子组成的集合记为 $\mathcal{P}(\mathbb{X})$.

集合 $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ 具有下面的运算性质.

定理 5.5.2 设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间, $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ 是幂等算子组成的集合.

1) $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ 是非空集. 若 $P\in\mathcal{P}(\mathbb{X})$, $P\neq I$,则 $(I-P)\in\mathcal{P}(\mathbb{X})$.

2) 如果 $P_1,P_2\in\mathcal{P}(\mathbb{X})$,则 $P_1+P_2\in\mathcal{P}(\mathbb{X})$ 的充要条件是 $P_1P_2=P_2P_1=0$;

3) 如果 $P_1,P_2\in\mathcal{P}(\mathbb{X})$,且 $P_1P_2=P_2P_1$,则 $P_1P_2\in\mathcal{P}(\mathbb{X})$;

4) 设 $P_n\in\mathcal{P}(\mathbb{X})$, $n\in\mathbb{N}$,满足条件 $P_mP_n=P_nP_m=0, m\neq n$, 如果强极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}P_k$ 存在,则 $P=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P_n\in\mathcal{P}(\mathbb{X})$.

定理 5.5.3　$\mathbb{X}$ 是Banach空间, $P \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$, 则 $P^* \in \mathcal{P}(\mathbb{X}^*)$.

定义 5.5.3　设 $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ 是Banach空间, $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, 如果存在 $G \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$ 满足条件:

$$TGT = T; \quad GTG = G. \tag{5.5.1}$$

则称 G 为算子 T 的广义逆算子. 此时 T 也是 G 的广义逆算子.

下面定理给出算子 T 广义逆存在的必要条件.

定理 5.5.4　设 $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ 是Banach空间, $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, 如果 T 的广义逆 $G \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$ 存在, 则 GT 和 TG 都是幂等算子.

定理 5.5.5　设 $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ 是Banach空间, $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, 如果 T 的广义逆 $G \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$ 存在,则 T 和 G 都是具有闭值域.

定理 5.5.6　设 $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ 是Banach空间,则 $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 存在广义逆的充要条件是:

1) $\mathcal{R}(T)$ 是闭子空间;

2) $\mathcal{N}(T)$ 和 $\mathcal{R}(T)$ 都是拓扑可余子空间.

注记 5.5.1　设 $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ 是Banach空间, $\mathbb{X}_1 \subset \mathbb{X}$, $\mathbb{Y}_1 \subset \mathbb{Y}$ 都是可余子空间, 余子空间存在但并不一定唯一. 所以对算子 T 即使广义逆算子存在,也不一定唯一.

广义逆在求解抽象方程中有重要应用. 设算子 T 有广义逆 G , 对于方程 $Tx = y$, 如果 $y \in \mathcal{R}(T)$, $TGy = y$, 则 $x = Gy$ 就是方程的一个解, 因为 $Tx = TGy = y$. 如果方程无解, 则 TGy 是 y 在 $\mathcal{R}(T)$ 上的投影, $x = GTGy$ 是方程的一近似解, 因为. $Tx = TGTGy = TGy$.

设 $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ 是Banach空间, $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $\mathcal{N}(T)$, $\mathcal{R}(T)$ 分别表示零空间与值域. 零空间的维数 $\dim \mathcal{N}(T)$,记为 $\mathrm{nul}(T)$,称为算子 T 的零度. 用算子 T 的值域 $\mathcal{R}(T)$ 的闭包对空间 $\mathbb{Y}$ 作商空间 $\mathbb{Y}/\overline{\mathcal{R}(T)}$

$$\mathbb{Y}/\overline{\mathcal{R}(T)} = \Big\{[y] \,\Big|\, y \in \mathbb{Y}\Big\}, \quad y_1 \in [y] \Leftrightarrow y_1 - y \in \overline{\mathcal{R}(T)}$$

商空间的维 数称为 $\mathcal{R}(T)$ 的余维数,记为 $\mathrm{codim}\mathcal{R}(T)$, 余维数也称为亏指数,记为 $\mathrm{def}(T)$.

定义 5.5.4　设 $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ 是Banach空间. 如果算子 $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 满足条件: $\mathcal{R}(T)$ 是闭的,且

$$\mathrm{nul}(T) := \dim \mathcal{N}(T), \quad \mathrm{def}(T) := \mathrm{codim}\mathcal{R}(T) \tag{5.5.2}$$

都是有限的,则称 T 为Fredholm 算子.

用 $\Phi(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 表示所有由 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{Y}$ 的Fredholm算子组成的集合. 对 $T \in \Phi(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, 定义

$$\mathrm{ind}(T) = \mathrm{nul}(T) - \mathrm{def}(T) \tag{5.5.3}$$

数 $\mathrm{ind}(T)$ 称为算子 T 的指标.

定理 5.5.7　设 $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ 是Banach空间, 若 $T \in \Phi(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$,则 T 存在广义逆算子.

定理 5.5.8　设 $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ 是Banach空间, 则 $T \in \Phi(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 的充要条件是:存在算子 $T_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$ 和有限秩算子 $F_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{X}), F_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{Y})$,使得

$$T_0 T = I_{\mathbb{X}} - F_1, \quad TT_0 = I_{\mathbb{Y}} - F_2. \tag{5.5.4}$$

推论 5.5.1　设 $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ 是Banach空间, $T\in\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. 若存在算子 $T_0\in\mathcal{B}(\mathbb{Y},\mathbb{X})$ 和有限秩算子 $F_1\in\mathcal{B}(\mathbb{X}),F_2\in\mathcal{B}(\mathbb{Y})$,使得

$$T_0T=I_{\mathbb{X}}-F_1,\quad TT_0=I_{\mathbb{Y}}-F_2.$$

则

$$\dim\mathcal{N}(T)=\dim\mathcal{N}(I_{\mathbb{X}}-F_1),\quad \operatorname{codim}\mathcal{R}(T)=\dim\mathcal{N}(I_{\mathbb{Y}}-F_2).\tag{5.5.5}$$

定理 5.5.9　设 $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ 是Banach空间. 若 $T\in\Phi(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, 则 $T^*\in\Phi(\mathbb{Y}^*,\mathbb{X}^*)$, 即Fredholm算子 T 的共轭算子 T^* 也是Fredholm算子. 进一步还有

$$\dim\mathcal{N}(T^*)=\operatorname{codim}\mathcal{R}(T),\tag{5.5.6}$$

即 $\operatorname{def}(T)=\operatorname{nul}(T^*)$.

定理 5.5.10　设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间, $T\in\mathcal{K}(\mathbb{X})$. 则 $I-T$ 是Fredholm算子.

定理 5.5.11　设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 都是Banach空间, $T\in\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, 则 T 是Fredholm算子,当且仅当存在 $A_1\in\mathcal{K}(\mathbb{X}),A_2\in\mathcal{K}(\mathbb{Y})$, 以及 $B_1,B_2\in\mathcal{B}(\mathbb{Y},\mathbb{X})$ 使得

$$B_1T=I+A_1;\quad TB_2=I+A_2.\tag{5.5.7}$$

设 $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ 是Banach空间, $T\in\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. 假定 $\mathcal{N}(T)$ 和 $\mathcal{R}(T)$ 都是可余的子空间. 设

$$\mathbb{X}=\mathcal{N}(T)\oplus\mathbb{X}_0,\quad \mathbb{Y}=\mathcal{R}(T)\oplus\mathbb{Y}_0,$$

在空间 $\mathbb{X}_0\times\mathbb{Y}_0$ 上定义线性算子 $\widetilde{T}:\mathbb{X}_0\times\mathbb{Y}_0\to\mathbb{Y}$

$$\widetilde{T}(x,y)=Tx+y,\quad \forall(x,y)\in\mathbb{X}_0\times\mathbb{Y}_0.$$

引理 5.5.1　算子 $\widetilde{T}$ 是 $\mathbb{X}_0\times\mathbb{Y}_0\to\mathbb{Y}$ 的双射. 特别地 $\widetilde{T}(x,\theta)=Tx,\forall x\in\mathbb{X}_0$

算子 $\widetilde{T}$ 称为相应于算子 T 的双射. 记 $T_0:\mathbb{X}_0\to\mathbb{Y}$, $T_0x=Tx,\ \forall x\in\mathbb{X}_0$. T_0 是算子 T 在 $\mathbb{X}_0$ 上的限制.

下面的引理给出算子 T 与算子 T_0 的指标间的关系.

引理 5.5.2　设 $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ 是Banach空间, $T\in\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. 设 $M\subset\mathbb{X}$ 是闭子空间,且 $\operatorname{codim}M=n$,算子 $T_0:M\to\mathbb{Y}$ 是算子 T 的限制, 则 T 是Fredholm算子的充要条件是 T_0 是Fredholm算子.此时还有等式 $ind(T)=ind(T_0)+n$.

算子复合的指标公式.

定理 5.5.12　设 $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ 和 $\mathbb{U}$ 都是Banach空间.若 $T_1\in\Phi(\mathbb{X},\mathbb{Y}),T_2\in\Phi(\mathbb{Y},\mathbb{U})$,则 $T_2T_1\in\Phi(\mathbb{X},\mathbb{U})$,且

$$\operatorname{ind}(T_2T_1)=\operatorname{ind}(T_2)+\operatorname{ind}(T_1);\tag{5.5.8}$$

定理 5.5.13　设 $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ 都是Banach空间. 若 $T \in \Phi(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $\widetilde{T}$ 是相应于算子 T 的双射. 则对任意的 $A \in B(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$,且 $\|A\| < \|\widetilde{T}^{-1}\|^{-1}$ 时, $T + A \in \Phi(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$,且有

$$\begin{aligned} &(i). \quad \mathrm{nul}(T + A) \leq \mathrm{nul}(T);\\ &(ii). \quad \mathrm{def}(T + A) \leq \mathrm{def}(T);\\ &(iii). \quad \mathrm{ind}(T + A) = \mathrm{ind}(T). \end{aligned} \tag{5.5.9}$$

推论 5.5.2　设 $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ 都是Banach空间. 则 $\Phi(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 是空间 $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 中的开集;且在 $\Phi(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 的每个连通集上, Fredholm算子的指标是常数.

作为推论5.5.2的结果, 可将集合 $\Phi(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 表示成下面的形式

$$\Phi(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_k(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$$

其中 $\Phi_k(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 定义为

$$\Phi_k(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \{T \in \Phi(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \,\big|\, \mathrm{ind}(T) = k\},$$

它是一个开集.集合 $\Phi_0(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 是一个特殊的开集,它含有双射算子.

定理 5.5.14　设 $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ 都是Banach空间. 若 $T \in \Phi(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $A \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$,则 $T + A \in \Phi(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$,且

$$\mathrm{ind}(T + A) = \mathrm{ind}(T); \tag{5.5.10}$$

推论 5.5.3　设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间. 若 $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$,则 $\mathrm{ind}(I - T) = 0$.

§5.5.2 典型例题

幂等算子与空间的代数直和分解相关联, 有界幂等算子与空间的拓扑分解相联系。
具有广义逆的有界线性算子与空间可余分解相联系，同时与方程的可解性相联系,在实际中有广泛应用。
Fredholm算子是一类特殊的具有广义逆的算子,利用Fredholm算子的亏度与零度可直接给出广义逆的构造。

空间 $\mathbb{X}$, M 是闭子空间, 如果存在子空间 N 使得 $\mathbb{X} = M \oplus N$, N 只是 M 的代数余子空间. 一般代数余子空间 N 可能不是闭子空间. 空间 $\mathbb{X}$ 的拓扑直和分解, 要求 M 和 N 都是闭子空间,并且 $M \oplus N$ 也是闭的且等于 $\mathbb{X}$.

例 5.5.1　设 $\mathbb{X}$ 是不完备的赋范线性空间, f 是 $\mathbb{X}$ 上的非零无界线性泛函。 设 $x_0 \in \mathbb{X}$ 使得 $f(x_0) = 1$,则对任意的 $x \in \mathbb{X}$, x 可写成

$$x = f(x)x_0 + y, \quad y \in \mathcal{N}(f).$$

则有

$$\mathbb{X} = \{\alpha x_0 \,\big|\, \alpha \in \mathbb{K}\} \oplus \mathcal{N}(f).$$

上式是代数直和分解但不是拓扑直和(拓扑可余分解),因为 $\mathcal{N}(f)$ 不是闭子空间.

$\mathbb{X}$ 有代数可余分解同时也有拓扑可余分解,这两个分解也不必相同。

例 5.5.2　设 $\mathbb{X}$ 是不完备的赋范线性空间, f 是 $\mathbb{X}$ 上的非零无界线性泛函(参考例5.5.1). 设 $x_0 \in \mathbb{X}$ 使得 $f(x_0) = 1$,则对任意的 $x \in \mathbb{X}$, x 可写成

$$x = f(x)x_0 + y, \quad y \in \mathcal{N}(f).$$

现设 $g \in \mathbb{X}^*$,满足 $g(x_0) = 1$,则 $\mathcal{N}(g)$ 是 $\mathbb{X}$ 的闭子空间, 则有 $x = g(x)x_0 + y$, $y \in \mathcal{N}(g)$, 于是

$$\mathbb{X} = \{\alpha x_0 \mid \alpha \in \mathbb{K}\} \oplus \mathcal{N}(g).$$

是拓扑直和分解.

例 5.5.3　设 $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \ell^2$, $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是左移算子,即

$$Tx = (x_2, x_3, \cdots), \quad \forall\, x = (x_1, x_2, \cdots) \in \mathbb{X}.$$

(1) $\mathcal{R}(T) = \ell^2 = \mathbb{X}$, 所以 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的;

(2) $\mathcal{N}(T) = \{(x, 0, 0, \cdots) :\ x \in \mathbb{C}\}$,所以 $\mathrm{nul}(T) = \dim \mathcal{N}(T) = 1$;

(3) $\mathbb{Y}/\mathcal{R}(T) = \{\theta\}$, 因此 $\mathrm{def}(T) = 0$. 故 T 是Fredholm算子, 而且 $\mathrm{ind}(T) = 1$.

同理可以说明 T^* 是右移算子,也即

$$T^*x = (0, x_1, x_2, \cdots), \quad \forall\, x = (x_1, x_2, \cdots) \in \ell^2.$$

因此 T^* 也是 ℓ^2 上的Fredholm算子,且有 $\mathrm{ind}(T^*) = -1$.

一般地,有 $T^n, (T^*)^n \in \Phi(\ell^2)$, 且 $\mathrm{ind}(T^n) = n$, $\mathrm{ind}(T^*)^n = -n$.

§5.5.3 练习题十九解答

1. 设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间, M 是 $\mathbb{X}$ 的有限维子空间, 证明 M 是拓扑可余子空间.

证明　设 $\dim M = m$,则存在 $x_1, x_2, \cdots, x_m \in M$ 线性无关,对任何的 $x \in M$,

$$x = \sum_{k=1}^{m} a_k x_k$$

. 依泛函存在定理存在 $f_k \in \mathbb{X}^*$ 使得

$$f_k(x_j) = \delta_{kj}, \quad \forall\, j, k = 1, 2, \cdots, m.$$

对每个 k , $\mathcal{N}(f_k)$ 是 $\mathbb{X}$ 中的闭集. 令

$$N = \cap_{k=1}^{m} \mathcal{N}(f_k)$$

则 N 是 X 中的闭集,对任意的 $x \in \mathbb{X}$,令

$$y = x - \sum_{k=1}^{m} f_k(x) x_k$$

则对每个 $j=1,2,\cdots,m$，

$$f_j(y)=f_j(x)-\sum_{k=1}^{m} f_k(x)f_j(x_k)=0.$$

所以 $y\in N$，

$$x=\sum_{k=1}^{m} f_k(x)x_k+y.$$

因此，N 是 M 的拓扑余子空间. □

2. 设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间，P 是 $\mathbb{X}$ 上定义的线性幂等算子，如果 $\mathcal{R}(P)$，$\mathcal{N}(P)$ 都是闭子空间，证明 P 是有界的.

证明 设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间，P 是 $\mathbb{X}$ 上定义的线性幂等算子，则对任意的 $x\in\mathbb{X}$，

$$x=Px+(I-P)x,\quad Px\in\mathcal{R}(P),(I-P)x\in\mathcal{N}(P).$$

如果 $\mathcal{R}(P)$，$\mathcal{N}(P)$ 都是闭子空间，则上面的分解是拓扑直和分解，即有

$$\mathbb{X}=\mathcal{R}(P)\oplus\mathcal{N}(P).$$

此时，$\mathbb{X}$ 上的范数 $\|x\|$ 与 $\|x\|_1=\|Px\|+\|(I-P)x\|$ 等价(见，推论5.3.2)，于是

$$\|Px\|_1=\|Px\|\le\|Px\|+\|(I-P)x\|=\|x\|_1.$$

所以 P 是有界线性算子. □

第六章　Hilbert空间与算子

§6.1 第二十讲　内积空间

教学目的

本节将主要将有限维空间中内积的概念推广 到一般线性空间,并简单讨论其几何性质。

本节要点

内积空间, Cauchy-Schwartz 不等式, 平行四边形公式, 极化恒等式。

§6.1.1 内容提要

定义 6.1.1　设 $\mathbb{X}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间,若映射 $\varphi(\cdot,\cdot):\mathbb{X}\times\mathbb{X}\to\mathbb{K}$, 对 $\forall x,y,z\in\mathbb{X}$ 以及 $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$,满足下列条件:

(1). 对第一变元的线性性: $\varphi(\alpha x+\beta y,z)=\alpha\varphi(x,z)+\beta\varphi(y,z)$;

(2). 共轭对称性: $\varphi(x,y)=\overline{\varphi(y,x)}$;

(3). 正定性: $\varphi(x,x)\geq 0$,并且 $\varphi(x,x)=0$ 当且仅当 $x=\theta$.

则称 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 为 $\mathbb{X}$ 上的一个内积, $(\mathbb{X},\varphi)$ 称为内积空间. $\varphi(x,y)$ 称为 x 与 y 的内积, 简记为 (x,y). 通常把条件(1)–(3)称为内积公理.

当 $\mathbb{K}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 时, $\mathbb{X}$ 称为实内积空间; $\mathbb{K}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 时, $\mathbb{X}$ 称为复内积空间.

根据定义不难看到:内积关于第二个变元是共轭线性的,即

$$(x,\alpha y+\beta z)=\overline{\alpha}(x,y)+\overline{\beta}(x,z).$$

特别地当 x,y 其中之一为零元时,总有 $(x,y)=0$.

定理 6.1.1　(Cauchy–Schwartz不等式) 设 $\mathbb{X}$ 是一个内积空间,对 $\forall x,y\in\mathbb{X}$,恒有

$$|(x,y)|\leq\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}.\tag{6.1.1}$$

定义 6.1.2　设 $\mathbb{X}$ 为内积空间, $x\in\mathbb{X}$,记

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}\tag{6.1.2}$$

$\|x\|$ 称为 $\mathbb{X}$ 上由内积导出的范数.

定理 6.1.2　设 $(\mathbb{X},(\cdot,\cdot))$ 为内积空间, $\|\cdot\|$ 是由内积导出的范数.则 $\|\cdot\|$ 满足范数公理, 即对 $\forall x,y\in\mathbb{X}$, $\alpha\in\mathbb{K}$ 有

(1) 正定性: $\|x\|\geq 0$, 且 $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=\theta$;

(2) 绝对齐性: $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$;

(3) 三角不等式: $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

推论 6.1.1　设 $\mathbb{X}$ 是内积空间, $\|\cdot\|$ 是内积导出的范数. 则 $\mathbb{X}$ 的内积是二元连续函数,即若 $x_n\to x_0$, $y_n\to y_0$, 有 $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$.

下面的定理给出了内积空间的几何性质(平行四边形公式)和内积与范数之间的关系.

定理 6.1.3　设 $\mathbb{X}$ 是内积空间,对 $\forall x,y\in\mathbb{X}$, 由内积导出的范数满足下列各恒等式:

(1) 平行四边形公式:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2); \tag{6.1.3}$$

(2) 极化恒等式:当 $\mathbb{X}$ 是实内积空间时,

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2); \tag{6.1.4}$$

当 $\mathbb{X}$ 是复内积空间时,

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\,\|x+iy\|^2-i\,\|x-iy\|^2). \tag{6.1.5}$$

定义 6.1.3　设 $\mathbb{X}$ 是内积空间, $x,y\in\mathbb{X}$ 及 $A,B\subset\mathbb{X}$

(1) 若 $(x,y)=0$,则称 x 与 y 正交,记为 $x\perp y$.

(2) 若 $\forall a\in A,\forall b\in B$,有 $a\perp b$,则称集合 A 与 B 正交,记为 $A\perp B$. 特别地,当 $A=\{x\}$ 为单点集时,记为 $x\perp B$.

(3) 称 $\mathbb{X}$ 的子集 $A^\perp=\left\{x\in\mathbb{X}\,\middle|\,x\perp A\right\}$ 为集合 A 的正交补.

(4) 规定:零元与任何元正交.

定理 6.1.4　设 $\mathbb{X}$ 是内积空间, $x,y\in\mathbb{X}$, $A\subset\mathbb{X}$.

(1) (勾股定理): 若 $x\perp y$,则 $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$.

(2) 若 $x\perp A$,则 $x\perp\mathrm{span}A$.

(3) $A\cap A^\perp\subset\{\theta\}$; 当 $\theta\in A$ 时 $A\cap A^\perp=\{\theta\}$.

注记 6.1.1　在上面定理中,勾股定理是说: 若 $x\perp y$, 则 $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$. 但它的逆命题并不一定成立.

当 $\mathbb{X}$ 是实内积空间时,若 $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$, 而

$$\|x+y\|^2=(x,x)+2(x,y)+(y,y)=\|x\|^2+\|y\|^2+2(x,y)$$

则可推出 $(x,y)=0$,即 $x\perp y$. 但当 $\mathbb{X}$ 是复内积空间时,由 $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$,只能推出 $\Re(x,y)=0$,并不能推出 $x\perp y$.

定理 6.1.5 (Fréchet-Jordan–Von Neumann定理) 设 $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间. 如果 $\mathbb{X}$ 中范数满足平行四边形公式, 即对任何的 $x, y \in \mathbb{X}$ 都有

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

则必定存在 $\mathbb{X}$ 定义的内积 $(\cdot,\cdot)$,使得 $\|x\|$ 就是由内积 $(\cdot,\cdot)$ 导出的范数.

定义 6.1.4 设 $(\mathbb{X}, (\cdot,\cdot))$ 是内积空间, $\|\cdot\|$ 是内积导出的范数. 如果 $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ 是Banach 空间,则称 $\mathbb{X}$ 为Hilbert空间. Hilbert空间就是完备的内积空间.

定义 6.1.5 设 $(\mathbb{X}, (\cdot,\cdot))$ 是内积空间, $\mathbb{Y}$ 是 $\mathbb{X}$ 的线性子空间, $\mathbb{Y}$ 按照 $\mathbb{X}$ 的内积 $(\cdot,\cdot)$ 也成为一个内积空间, 此内积空间 $(\mathbb{Y}, (\cdot,\cdot))$ 称为内积空间 $(\mathbb{X}, (\cdot,\cdot))$ 的子空间. 如果 $\mathbb{Y}$ 还是闭集,则称 $\mathbb{Y}$ 为 $\mathbb{X}$ 的闭子空间. 如果 $(\mathbb{Y}, (\cdot,\cdot))$ 是Hilbert空间, 则称 $\mathbb{Y}$ 是 $\mathbb{X}$ 的完备子空间.

定理 6.1.6 设 $(\mathbb{X}, (\cdot,\cdot))$ 是内积空间, $M \subset \mathbb{X}$ 是一个非空子集, 则 $M^\perp$ 是 $\mathbb{X}$ 的闭子空间.

定义 6.1.6 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是定义在同一数域 $\mathbb{K}$ 上的两个内积空间,若存在双射 $T: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$,对 $\forall x, y \in \mathbb{X}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ 满足

(1) T 是线性算子,即 $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y$;

(2) T 是保持内积,即 $(Tx, Ty) = (x, y)$.

则称 T 是 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{Y}$ 的同构映射(isomorphic).

如果两个内积空间存在一个同构映射，则称两个内积空间是同构的.

内积空间的同构蕴含了作为赋范线性空间的等距同构, 因为 $\|Tx\| = \|x\|$. 两个同构的内积空间可以认为具有相同的线性结构和内积. 因此,在同构的意义下 可以把两个同构的内积空间看作是同一的.

§6.1.2 典型例题

内积空间是线性空间 $\mathbb{X}$,与一个二元泛函(满足内积公理)的综合体 $(\mathbb{X}, (\cdot,\cdot)$ 。

1) 内积诱导一个范数,从而是赋范线性空间;

2) 赋范线性空间成为内积空间的充要条件是范数满足平行四边形公式, 内积与范数由极化恒等式联系;

3) 内积空间有几何性质。

例 6.1.1 在线性空间 $\mathbb{C}^n$ 上,对 $\forall x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^\tau$, $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)^\tau \in \mathbb{C}^n$, 定义

$$(x, y) := \xi_1\overline{\eta_1} + \xi_2\overline{\eta_2} + \cdots + \xi_n\overline{\eta_n} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k\overline{\eta_k} := y^H x, \tag{6.1.6}$$

其中 y^H 表示矩阵的共轭转置. 不难验证 $\mathbb{C}^n$ 按上述定义的内积成为内积空间.

例 6.1.2 在线性空间 ℓ^2 上,对 $\forall x = \{\xi_k\}$, $y = \{\eta_k\} \in \ell^2$,定义

$$(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\overline{\eta_k} \tag{6.1.7}$$

则 ℓ^2 按上述定义的内积成为内积空间.

例 6.1.3 设 $\rho \in C[a,b]$, $\rho(t) > 0$.在线性空间 $C[a,b]$ 上, 对 $\forall x, y \in C[a,b]$,定义

$$(x,y)_\rho := \int_a^b \rho(t)x(t)\overline{y(t)}dt. \tag{6.1.8}$$

则 $(C[a,b],(\cdot,\cdot)_\rho)$ 为内积空间. $(x,y)_\rho$ 称为加权内积, ρ 称为权函数.

在上例中可以看到,对于不同的权函数 $C[a,b]$ 构成不同的内积空间.在内积空间中,无论内积形式如何, 它们总具有前面定理表述的共同性质.

例 6.1.4 设 $C^1[a,b]$ 为闭区间 $[a,b]$ 上所有一次连续可微实函数组成的集合. 设 $\rho(x), E(x)$ 是 $[a,b]$ 上的两个正连续函数, 则对任意的 $f,g \in C^1[a,b]$,有不等式

$$\left|\int_a^b [\rho fg + Ef'g']dx\right|^2 \leq \left(\int_a^b [\rho|f|^2 + E|f'|^2]dx\right)\left(\int_a^b [\rho|g|^2 + E|g'|^2]dx\right).$$

证明 $C^1[a,b]$ 按照函数的加法与数乘成为实线性空间.在 $C^1[a,b]$ 上定义二元泛函数

$$(f,g) := \int_a^b [\rho(x)f(x)g(x) + E(x)f'(x)g'(x)]dx, \quad f,g \in C^1[a,b].$$

直接验证 (f,g) 满足内积公理,从而 $(C^1[a,b],(\cdot,\cdot))$ 是内积空间. 所要证明的不等式正是 $(C^1[a,b],(\cdot,\cdot))$ 中的Cauchy–Schwartz不等式. □

例 6.1.5 线性空间 $C[a,b]$, 对任意的 $x \in C[a,b]$,定义范数

$$\|x\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|,$$

在此范数下 $C[a,b]$ 不能成为内积空间.

这是因为范数 $\|x\|_\infty$ 不满足平行四边形公式,比如取函数 $x(t) \equiv 1$, $y(t) = \frac{t-a}{b-a}$,则有

$$\|x\|_\infty = 1. \quad \|y\|_\infty = 1, \quad \|x+y\|_\infty = 2, \quad \|x-y\| = 1,$$

并有严格不等式

$$5 = \|x+y\|_\infty^2 + \|x-y\|_\infty^2 > 2(\|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2) = 4.$$

例 6.1.6 赋范线性空间 $(\ell^p, \|\cdot\|_p), p \neq 2$,不能成为内积空间.

例 6.1.7 线性空间 $C[a,b]$, 对任意的 $x \in C[a,b]$,定义范数

$$\|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

在此范数下 $C[a,b]$ 成为内积空间.

例 6.1.8 ℓ^2 按照内积

$$(x,y) = \sum_{n=1}^\infty \xi_n\overline{\eta_n}$$

是Hilbert空间.

例 6.1.9 线性空间 $C[a,b]$, 对任意的 $x,y\in C[a,b]$,定义内积

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt,$$

$C[a,b]$ 是内积空间,但不是Hilbert空间.

线性空间 $L^2[a,b]$, 对任意的 $x,y\in L^2[a,b]$,定义内积

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt,$$

$L^2[a,b]$ 成为Hilbert空间,它是 $(C[a,b],\|\cdot\|_2)$ 的完备化空间,即 $\overline{(C[a,b],\|\cdot\|_2)}=L^2[a,b]$.

§6.1.3 练习题二十解答

1. 设 $\mathbb{X}$ 是线性空间, $\varphi(x,y)$ 是 $\mathbb{X}\times\mathbb{X}\to\mathbb{C}$ 二元函数, 满足条件

   1) $\varphi(x,y)$ 关于第一变元是线性的;

   2) $\varphi(x,y)=\overline{\varphi(y,x)}$;

   3) $\varphi(x,x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{X}$.

证明 $|\varphi(x,y)|^2\leq\varphi(x,x)\varphi(y,y)$.

证明 对任意的 $x,y\in\mathbb{X}$, $\alpha\in\mathbb{C}$,如果 $\varphi(y,y)\neq 0$,则

$$\begin{aligned}0 &\leq \varphi(x+\alpha y,x+\alpha y)=\varphi(x,x)+\alpha\varphi(y,x)+\overline{\alpha}\varphi(x,y)+\alpha\overline{\alpha}\varphi(y,y)\\ &= \varphi(x,x)+\alpha\varphi(y,x)+\overline{\alpha}[\varphi(x,y)+\alpha\varphi(y,y)]\end{aligned}$$

可取 $\alpha=-\frac{\varphi(x,y)}{\varphi(y,y)}$,则得

$$\varphi(x,x)+\alpha\varphi(y,x)=\varphi(x,x)-\frac{\overline{\varphi(x,y)}}{\varphi(y,y)}\varphi(y,x)\geq 0$$

即

$$|\varphi(x,y)|^2\leq\varphi(x,x)\varphi(y,y)$$

如果 $\varphi(x,x)\neq 0$,在上面讨论中调换 x,y 的位置,也可得相应的结果.

如果 $\varphi(x,x)=\varphi(y,y)=0$, 由不等式

$$0\leq\varphi(x+\alpha y,x+\alpha y)=\alpha\varphi(y,x)+\overline{\alpha}\varphi(x,y),\quad\forall\alpha\in\mathbb{C}$$

可取 $\alpha\in\mathbb{R}$,并令 $\alpha\to\infty$ 得到 $\varphi(x,y)+\varphi(y,x)=0$. 再取 $\alpha=it,t\in\mathbb{R}$,并令 $t\to\infty$ 得到 $\varphi(x,y)-\varphi(y,x)=0$. 由此得到 $\Re\varphi(x,y)=0$, $\Im\varphi(x,y)=0$.因此, $\varphi(x,y)=0$. 不等式也成立。 因此,对所有的 $x,y\in X$,成立不等式

$$\varphi(x,y)|^2\leq\varphi(x,x)\varphi(y,y).$$

这是推广形式的Cauchy-Schwartz不等式。 □

2. 对任意 $x=\{\xi_k\}\in\ell^2,\ y=\{\eta_k\}\in\ell^2$, 定义

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\overline{\eta}_k$$

验证按此定义的 $(\cdot,\cdot)$ 是 ℓ^2 上的内积，从而 ℓ^2 成为内积空间.

证明 对任意 $x=\{\xi_k\}\in\ell^2,\ y=\{\eta_k\}\in\ell^2$, 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k\overline{\eta}_k$ 收敛. 所以二元泛函

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\overline{\eta}_k$$

对任意的 $x,y\in\ell^2$ 有意义.

对任意的 $x,y,z\in\ell^2$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, $z=\{\zeta_k\}$,

$$(\alpha x+\beta z,y)=\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha\xi_k+\beta\zeta_k)\overline{\eta_k}=\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\overline{\eta_k}+\beta\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k\overline{\eta_k}=\alpha(x,y)+\beta(z,y).$$

即关于第一变元是线性的。

由定义可以看到, $(x,y)=\overline{(y,x)}$. 特别地,

$$(x,x)=\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2\geq 0$$

如果 $(x,x)=0$,则 $\xi_k=0,\forall k\in\mathbb{N}$. 所以 (x,y) 满足内积公理, (x,y) 是 ℓ^2 上的内积, $(\ell^2,(\cdot,\cdot))$ 是内积空间. □

3. 设 $\{x_n\}$ 是内积空间 $\mathbb{X}$ 中的点列, $x\in\mathbb{X}$, 证明: 若 $(x_n,x)\to(x,x)$ 且 $\|x_n\|\to\|x\|$, 则 $x_n\to x$.

证明 由题意可知，只需证明 $(x_n-x,x_n-x)=\|x_n-x\|^2\to 0$ 即可. 由内积性质可得

$$(x_n-x,x_n-x)=(x_,x_n)-(x_n,x)-(x,x_n)+(x,x)$$

因为 $(x_n,x)\to(x,x)$ 所以有 $(x,x_n)=\overline{(x_n,x)}\to\overline{(x,x)}=(x,x)$, 再由 $\|x_n\|^2=(x_n,x_n)\to\|x\|^2$ 可得

$$(x_n-x,x_n-x)\to 0,$$

从而 $x_n\to x$. □

4. 设 $\mathbb{Y}$ 是 Hilbert 空间 $\mathbb{X}$ 的子空间, 则 $\mathbb{Y}$ 是完备的当且仅当 $\mathbb{Y}$ 是 $\mathbb{X}$ 中的闭集.

证明 必要性 " $\Rightarrow$ ": 如果 $\mathbb{Y}$ 是完备的, 设 $\forall y\in\overline{\mathbb{Y}}$, 总可以找到一Cauchy列 $y_n\in\mathbb{Y}$, 使得 $y_n\to y$ 而 $\mathbb{Y}$ 中任意的Cauchy列均收敛,从而可知 $y\in\mathbb{Y}$.

充分性 " $\Leftarrow$ ": 设 $\mathbb{Y}$ 是 $\mathbb{X}$ 中的闭集, 由于 $\mathbb{X}$ 为一Hilbert空间， 从而对于 $\mathbb{X}$ 中的任意Cauchy 列 均收敛到 $\mathbb{X}$ 中, 现在令 y_n 为一 $\mathbb{Y}$ 中的任意的 Cauchy 列，显然 $\{y_n\}$ 是 $\mathbb{X}$ 中

的一Cauchy列， 那么由 $\mathbb{X}$ 的完备性可知 $y_n \to y \in \mathbb{X}$. 由于 $\mathbb{Y}$ 是闭集,所以 $y \in \mathbb{Y}$ 。 因此 $\mathbb{Y}$ 为完备的. □

5. 试在线性空间 $\mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ 上定义一个二元函数 $\varphi(A,B)$,使得 $(\mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{C}),\varphi)$ 成为内积空间。

解 设 $A,B \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$, $A=(a_{ij})_{n\times m}$, $B=(b_{ij})_{n\times m}$, 定义二元泛函

$$\varphi(A,B)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\overline{b_{ij}}$$

则二元泛函满足 1)关于第一变元是线性的; 2) $\varphi)(A,B)$ 是共轭对称的; 3) $\varphi(A,A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|^2 \geq 0$,特别当 $\varphi(A,A)=0$ 时,有 $A=0$ 。

因此, $\varphi(A,B)$ 满足内积公理, $(\mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{C}),\varphi)$ 成为内积空间。 □

§6.2 第二十一讲 变分引理, 空间的正交分解

教学目的

本节将给出内积空间中的基本定理,也称为变分引理. 基于变分引理,导出空间的分解定理.

本节要点

变分引理, 投影定理, 空间正交分解定理

§6.2.1 内容提要

定理 6.2.1 (变分引理) 设 $\mathbb{X}$ 是内积空间,若 M 是 $\mathbb{X}$ 的非空凸集,且是完备的. 则对每个 $x \in \mathbb{X}$,都有唯一的元 $y_0 \in M$ 使得 $\|x - y_0\| = d(x, M)$.

在上面定理的证明中,满足条件

$$d(x, M) = \lim_{n\to\infty} \|x - y_n\|, \quad y_n \in M$$

的序列 $\{y_n\}$ 称为极小化序列. M 的凸集性质以及内积空间的几何性质保证极小化序列是Cauchy列. M 的完备性用于保证极限存在.

定义 6.2.1 设 $\mathbb{X}$ 是内积空间, M 是 $\mathbb{X}$ 的子空间, $x \in \mathbb{X}$. 若存在 $y_0 \in M$ 和 $x_0 \perp M$,使得

$$x = y_0 + x_0 \tag{6.2.1}$$

则称 y_0 为 x 在 M 上的正交投影(简称为投影),式(6.2.1)称为 x 的正交分解.

定理 6.2.2 设 $\mathbb{X}$ 是内积空间, M 是 $\mathbb{X}$ 的线性子空间, $x \in \mathbb{X}$. 若 x 在 M 上的投影 y_0 存在, 则 y_0 是唯一的,并且

$$\|x - y_0\| = d(x, M) = \inf_{y\in M} \|x - y\|. \tag{6.2.2}$$

定理 6.2.3 (投影定理) 设 $\mathbb{X}$ 是内积空间, 若 M 是 $\mathbb{X}$ 的完备子空间. 则对每个 $x \in \mathbb{X}$, x 在 M 上的投影唯一地存在, 即存在元 $y_0 \in M$ 及 $x_0 \in M^\perp$ 使得 $x = x_0 + y_0$.

推论 6.2.1 若 M 是Hilbert空间 $\mathcal{H}$ 的闭子空间,则 $\mathcal{H} = M \dotplus M^\perp$,其中 $\dotplus$ 表示正交和.

推论 6.2.2 若 M 是Hilbert空间 $\mathcal{H}$ 的闭子空间,则

$$M = M^{\perp\perp}.$$

特别地, 当 $M^\perp = \{\theta\}$ 时, $M = \mathcal{H}$.

作为定理6.2.3的直接应用,可以求函数的最佳平方逼近.

定义 6.2.2 设 $\mathbb{X}$ 是赋范线性空间, M 是 $\mathbb{X}$ 的子空间, $x \in \mathbb{X}$. 若存在 $y_0 \in M$,使得

$$\|x - y_0\| = d(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|,$$

则称 y_0 为 x 在 M 上的最佳逼近元(best approach).

当 $\mathbb{X}$ 是内积空间,且 M 是 $\mathbb{X}$ 的完备子空间时, 定理6.2.1和定理6.2.3表明, $\mathbb{X}$ 的每个元 x 在 M 上存在唯一的投影 y_0 ,并且 y_0 正是 x 在 M 上的最佳逼近元. 在Hilbert空间 $L^2[a, b]$ 中的最佳逼近,通常称为最佳平方逼近.

定义 6.2.3 设 M 是Hilbert间 $L^2[a, b]$ 的有限维子空间,则 $L^2[a, b]$ 中的每个元 f 在 M 上的投影 s^* 都唯一地存在(定理6.2.3),并且

$$\|f - s^*\| = d(f, M) = \inf_{s \in M} \left(\int_a^b |f(x) - s(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

称 s^* 为 f 在 M 上的最佳平方逼近或最小二乘逼近.

当 $M = P_n[a, b] = \mathrm{span}\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ 时, f 在 $P_n[a, b]$ 上的最佳平方逼近 s^* 是一个次数小于或等于 n 的多项式. 满足上述定义的 s^* 称为 f 的 n 次最佳平方逼近多项式, 简称为 f 的 n 次最佳平方逼近.

下面介绍求 s^* 的方法.

设 $\{e_1, e_2, \cdots e_n\}$ 是 M 的一个基,任 给 $s \in M$,在此基下的表示式为

$$s(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k(x) \tag{6.2.3}$$

则有

$$\|f - s\|^2 = \int_a^b |f(x) - s(x)|^2 \, dx = \int_a^b |f(x) - \sum_{j=1}^{n} a_j e_j(x)|^2 dx$$

于是,问题归结为如何求出这一组数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,使得 s^* 是 f 在 M 上的最佳平方逼近,即 s^* 是 f 在 M 上的投影.这时 $f = s^* + (f - s^*)$,其中 $s^* \in M$, $f - s^* \perp M$,并且

$$\|f - s^*\| = d(f, M).$$

因 $f - s^* \perp M$,故对每一个 $e_i \in M$ ($i = 1, \cdots, n$) ,有

$$(f - s^*, e_i) = \left(f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j, e_i \right) = (f, e_i) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (e_j, e_i) = 0.$$

于是得到

$$\sum_{j=1}^{n} a_j (e_j, e_i) = (f, e_i) \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{6.2.4}$$

于是得到线性方程组

$$\begin{cases} (e_1, e_1)a_1 + (e_2, e_1)a_2 + \cdots + (e_n, e_1)a_n = (f, e_1) \\ (e_1, e_2)a_1 + (e_2, e_2)a_2 + \cdots + (e_n, e_2)a_n = (f, e_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (e_1, e_n)a_1 + (e_2, e_n)a_2 + \cdots + (e_n, e_n)a_n = (f, e_n) \end{cases}$$

此式或式(6.2.4)称为最佳平方逼近问题(或最小二乘问题)的法方程组. 由于 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 线性无关,所以线性方程组系数行列式 (Gram行列式)

$$G(e_1, e_2, \cdots, e_n) = \begin{vmatrix} (e_1, e_1) & (e_2, e_1) & \cdots & (e_n, e_1) \\ (e_1, e_2) & (e_2, e_2) & \cdots & (e_n, e_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (e_1, e_n) & (e_2, e_n) & \cdots & (e_n, e_n) \end{vmatrix} \neq 0,$$

从而代数方程的解为

$$a_j = \frac{G_j}{G(e_1, e_2, \cdots e_n)}, \quad (j = 1, \cdots n), \tag{6.2.5}$$

其中 G_j 是将行列式 $G(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的第 j 列

$$((e_j, e_1), (e_j, e_2), \cdots, (e_j, e_n))^T$$

换为 $((f, e_1), (f, e_2), \cdots, (f, e_n))^T$ 后得到的行列式.将 $\alpha_j (j = 1, 2, \cdots, n)$,代入式(6.2.3),即可得到 s^*

$$s^*(x) = \frac{1}{G(e_1, e_2, \cdots, e_n)} \sum_{j=1}^{n} G_j e_j(x)$$

注记 6.2.1　最佳平方逼近的误差为 $\|f - s^*\|$. 令 $\delta = \|f - s^*\|$.因 $f - s^* \perp s^*$,则

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \|f - s^*\|^2 = (f - s^*, f - s^*) = (f - s^*, f) \\ &= \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i, f) \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

§6.2.2 典型例题

变分引理是Hilbert空间中的重要引理,在实际中有广泛应用。 在实际问题处理中,通过适当的方式将要求的问题转化为求最小问题(优化问题),利用变分引理得到存在性结果。

例 6.2.1　设 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ 是Hilbert状态空间, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 有界线性算子($n \times n$ 矩阵).设矩阵值指数函数 $T(t) = e^{At}$. $\mathbb{R}^m$ 是控制空间, $B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 是有界线性算子. 考虑线性动力系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad u(t) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m). \tag{6.2.7}$$

则系统的解可表示为

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds, \quad u(t) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m). \tag{6.2.8}$$

系统的费用函数为

$$J(u) = \int_0^T (\|x(t)\|_2^2 + \|u(t)\|_2^2) dt + (x(T), x(T))$$

则存在唯一的控制 $u_0 \in L^2[(0,T),\mathbb{R}^m]$ 使得

$$J(u_0) = \inf_{u \in L^2[(0,T),\mathbb{R}^m]} J(u).$$

$u_0(t)$ 称为最优控制.

证明 为了将这个问题化为已知的问题,定义新的空间 $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n \times L^2[(0,T),\mathbb{R}^m]$, 并定义二元泛函数

$$\langle [x,u],[y,v] \rangle = \int_0^T [(x(t),y(t))_{\mathbb{R}^n} + (u(t),v(t))_{\mathbb{R}^m}]dt + (x(T),y(T))_{\mathbb{R}^n}$$

其中

$$x(t) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds,$$

$$y(t) = e^{At}y + \int_0^t e^{A(t-s)}Bv(s)ds.$$

下面验证 $\langle [x,u],[y,v] \rangle$ 是 $\mathcal{H}$ 上的一个内积.

1). 关于第一变元的线性性. 设 $[x_1,u_1],[x_2,u_2] \in \mathcal{H}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$,

$$\alpha[x_1,u_1] + \beta[x_2,u_2] = [\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha u_1 + \beta u_2] \in \mathcal{H}$$

由解的定义形式

$$\begin{aligned}
[\alpha x_1 + \beta x_2](t) &:= e^{At}(\alpha x_1 + \beta x_2) + \int_0^t e^{A(t-s)}B(\alpha u_1(s) + \beta u_2(s))ds \\
&= \alpha e^{At}x_1 + \beta e^{At}x_2 + \alpha \int_0^t e^{A(t-s)}Bu_1(s)ds + \beta \int_0^t e^{A(t-s)}Bu_2(s))ds \\
&= \alpha\left(e^{At}x_1 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu_1(s)ds\right) + \beta\left(e^{At}x_2 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu_2(s)ds\right) \\
&= \alpha x_1(t) + \beta x_2(t).
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
& \langle \alpha[x_1,u_1] + \beta[x_2,u_2],[y,v] \rangle = \langle [\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha u_1 + \beta u_2],[y,v] \rangle \\
= & \int_0^T [(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t), y(t))_{\mathbb{R}^n} + (\alpha u_1(t) + \beta u_2(t), v(t))_{\mathbb{R}^m}] + (\alpha x_1(T) + \beta x_2(T), y(T))_{\mathbb{R}^n} \\
= & \alpha\left(\int_0^T [(x_1(t),y(t))_{\mathbb{R}^n} + (u_1(t),v(t))_{\mathbb{R}^m}]dt + (x_1(T),y(T))_{\mathbb{R}^n}\right) \\
& +\beta\left(\int_0^T [(x_2(t),y(t))_{\mathbb{R}^n} + (u_2(t),v(t))_{\mathbb{R}^m}] + (x_2(T),y(T))_{\mathbb{R}^n}\right) \\
= & \alpha\langle [x_1,u_1],[y,v] \rangle + \beta\langle [x_2,u_2],[y,v] \rangle,
\end{aligned}$$

所以 $\langle [x,u],[y,v] \rangle$ 关于第一变元是线性的.

2).共轭对称性. 依定义形式有

$$\begin{aligned}\langle [y,v],[x,u]\rangle &= \int_0^T [(y(t),x(t))_{\mathbb{R}^n} + (v(t),u(t))_{\mathbb{R}^m}] + (y(T),x(T))_{\mathbb{R}^n} \\ &= \int_0^T [\overline{(x(t),y(t))_{\mathbb{R}^n}} + \overline{(u(t),v(t))_{\mathbb{R}^m}}] + \overline{(x(T),y(T))_{\mathbb{R}^n}} \\ &= \overline{\langle [x,u],[y,v]\rangle}.\end{aligned}$$

3). 正定性

$$\|[x,u]\|^2 = \int_0^T [\|x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2]dt + \|x(T)\|^2 \geq 0, \quad \forall [x,u] \in \mathcal{H}.$$

若 $\|[x,u]\| = 0$, 则可得到 $u(t) = 0, x(t) = 0, a.e.$, $\|x(T)\| = 0$. 由此得到

$$x(t) = e^{At}x, \quad x(T) = e^{AT}x.$$

从而 $x = 0$. 所以有 $[x,u] = [0,0]$. 因此, $\langle [x,u],[y,v]\rangle$ 满足内积公理, $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是内积空间. 注意到乘积空间 $\mathbb{R}^n \times L^2[(0,T),\mathbb{R}^m]$ 是Banach空间,所以 $\mathcal{H}$ 是一个Hilbert空间.

令

$$x_0(t) = e^{At}x_0, \quad \Phi(u)(t) = \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds, \quad u \in L^2[(0,T),\mathbb{R}^m]$$

则

$$J(u) = \int_0^T [\|x_0(t) + \Phi(u)(t)\|^2 + \|u(t)\|^2]dt + \|x(T)\|^2 = \|[x_0,u]\|^2 = \|[x_0,0] + [0,u]\|^2.$$

则问题变成

$$\inf_{u\in L^2[(0,T),\mathbb{R}^m]} J(u) = \inf_{u\in L^2[(0,T),\mathbb{R}^m]} \|[x_0,u]\|^2 = \inf_{u\in L^2[(0,T),\mathbb{R}^m]} \|[x_0,0] + [0,u]\|^2.$$

令

$$M = \{(0,u) \mid u \in L^2[(0,T),\mathbb{R}^m]\}$$

M 是 $\mathcal{H}$ 闭子空间,从而是凸的且完备的. 于是

$$\inf_{u\in L^2[(0,T),\mathbb{R}^m]} J(u) = \inf_{[0,-u]\in M} \|[x_0,0] - [0,u]\|^2_{\mathcal{H}}$$

依前面的定理6.2.1,存在唯 一的 $u_0 \in L^2[(0,T),\mathbb{R}^m]$ 使得

$$\begin{aligned} J(u_0) &= \inf_{u\in L^2[(0,T),\mathbb{R}^m]} J(u) \\ &= \inf_{[0,-u]\in M} \|[x_0,0] - [0,u]\|^2_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

这里只解决了存在性,至于如何求出最优控制 $u_0(t)$ 这里不讨论.　□

§6.2.3 练习题二十一解答

1. 设 M 和 N 是内积空间 $\mathbb{X}$ 的子集, 证明:

(1). 若 $M \subset N$, 则 $N^{\perp} \subset M^{\perp}$;

(2). 若 $x \perp M$, 则 $x \perp \overline{M}$;

(3). $M^{\perp} = (\overline{\text{span}\,\text{M}})^{\perp}$.

证明 设 $\mathbb{X}$ 为内积空间， MN 为 $\mathbb{X}$ 的子集。

(1). 设 $\forall x \in N^{\perp}$, 那么有 $x \perp N$, 即 对 $\forall y \in N$ 都有 $x \perp y$. 而 $M \subset N$, 从而有 $x \perp M$. 即有 $x \in M^{\perp}$ ， 所以 $N^{\perp} \subset M^{\perp}$.

(2). 设 $\forall y \in \overline{M}$, 那么存在 $y_n \in M$, 使得 $y_n \to y$. 这时由 $x \perp M$ 可得, $(x, y_n) = 0$, 而由内积的连续性可知

$$0 = \lim_{n\to\infty} (x, y_n) = (x, \lim_{n\to\infty} y_n) = (x, y).$$

由 y 的任意性可知, $x \perp \overline{M}$.

(3). 由于总有 $M \subset \text{span}M \subset \overline{\text{span}M}$ ， 利用结果(1)有

$$\overline{\text{span}M}^{\perp} \subset M^{\perp}.$$

设 $\forall x \in M^{\perp}$, 即有 $x \perp M$. 从而 $x \perp \text{span}\, M$. 由(2)可得 $x \perp \overline{\text{span}\, M}$, 从而 $M^{\perp} \subset (\overline{\text{span}\,\text{M}})^{\perp}$. 综合两部分证明可知 $M^{\perp} = (\overline{\text{span}\,\text{M}})^{\perp}$. □

2. 设 M 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的子空间。 证明 $\overline{M} = (M^{\perp})^{\perp}, M^{\perp} = (\overline{M})^{\perp}$.

证明 $\forall x \in M^{\perp}$, 那么有 $x \perp M$,从而 由 第一题2)可得 $x \perp \overline{M}$, 即 $x \in \overline{M}^{\perp}$. 所以 $M^{\perp} \subset (\overline{M})^{\perp}$; 另一方面, 由第一题1)可得 $\overline{M}^{\perp} \subset M^{\perp}$. 从而有 $M^{\perp} = \overline{M}^{\perp}$. 由 推论 2.11 可得 $\overline{M} = (\overline{M}^{\perp})^{\perp} = (M^{\perp})^{\perp}$. 证明完毕. □

设 $\mathbb{X}$ 是内积空间，对任意的非空集 $M \subset \mathbb{X}$ ， 可以直接验证 $M^{\perp}$ 总是 $\mathbb{X}$ 的闭子空间.

3. 设 $\mathbb{X}$ 是内积空间, $u, v \in \mathbb{X}$. 若对一切 $x \in \mathbb{X}$ 皆有 $(x, u) = (x, v)$, 则 $u = v$.

证明 因为对 $\forall x \in \mathbb{X}$,都有 $(x, u) = (x, v)$. 从而 $(x, u - v) = 0$, 取 $x = u - v$, 可得 $\|u - v\|^2 = 0$, 从而 $u = v$. □

在赋范空间 $\mathbb{X}$ 中，我们曾证明，若 $f, g \in \mathbb{X}^*$ ， $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{X}$, 则有 $f = g$ 。上面题目是同一命题在内积空间的表现形式.

4.设 $\mathbb{X}$ 是实内积空间, 若 $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, 则 $x \perp y$. 当 $\mathbb{X}$ 是复内积空间时, 这个结论是否仍然成立?

证明 当 $\mathbb{X}$ 是实内积空间时, 如果 $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, 那么有 $(x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) = (x, x) + (y, y)$. 由此可知 $(x, y) = 0$ ， 从而 $x \perp y$.

如果 $\mathbb{X}$ 为复内积空间, 这时

$$\|x+y\|^2=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)=\|x\|^2+\|y\|^2+(x,y)+(y,x),$$

由 $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$ 可得 $(x,y)+(y,x)=2\Re(x,y)=0$，得不到 $(x,y)=0$. 所以不能由此断定 $x\perp y$.

我们给出一个例子：令 $x=(1,0)\in\mathbb{C}^2$, $y=(i,0)\in\mathbb{C}^2$, 这时 $\|x+y\|^2=2=\|x\|^2+\|y\|^2$, 而 $(x,y)=-i\neq 0$, 从而 x,y 不正交. □

5. 设 $\mathbb{X}$ 是内积空间, $A,B\subset\mathbb{X}$. 记 $L=\mathrm{span}(A\cup B)$. 证明 $L^\perp=A^\perp\cap B^\perp$.

证明　$\forall x\in L^\perp$, 那么有 $x\perp L$. 而 $A\subset L$, $B\subset L$, 于是 $x\perp A$ 且 $x\perp B$, 所以 $x\in A^\perp\cap B^\perp$. 因此 $L^\perp\subset A^\perp\cap B^\perp$.

另一方面, 设 $x\in A^\perp\cap B^\perp$, 那么有 $x\perp A$ 且 $x\perp B$，这时有 $x\perp(A\cup B)$, 从而 $x\perp\mathrm{span}(A\cup B)$, 所以 $x\in L^\perp$. 综上所述有 $L^\perp=A^\perp\cap B^\perp$. □

6. 设 $\mathbb{X}$ 是内积空间， $x,y\in\mathbb{X}$. 证明 $x\perp y$ 的充分必要条件是，对一切数 $\alpha\in\mathbb{K}$ 皆有 $\|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\|$.

证明: 必要性 "$\Rightarrow$ "： 如果 $x\perp y$, 那么对于 $\forall\alpha\in\mathbb{K}$ 有

$$\|x+\alpha y\|^2=(x,x)+(x,\alpha y)+(\alpha y,x)+(\alpha y,\alpha y)=(x,x)+(\alpha y,\alpha y)$$

及

$$\|x-\alpha y\|^2=(x,x)-(x,\alpha y)-(\alpha y,x)+(\alpha y,\alpha y)=(x,x)+(\alpha y,\alpha y)$$

从而 $\|x+\alpha y\|^2=\|x-\alpha y\|^2$.

充分性 "$\Leftarrow$ "： 如果对一切 $\alpha\in\mathbb{K}$ 都有 $\|x+\alpha y\|^2=\|x-\alpha y\|^2$, 那么

$$\|x+\alpha y\|^2-\|x-\alpha y\|^2=2(x,\alpha y)+2(\alpha y,x)=0$$

从而 $(x,\alpha y)+(\alpha y,x)=0$ 取 $\alpha=(x,y)$, 我们可得 $|(x,y)|^2=0$,从而 $(x,y)=0$,即 $x\perp y$. □

7. 设 $\mathbb{X}$ 是内积空间， $x,y\in\mathbb{X}$. 证明 $x\perp y$ 的充分必要条件是，对一切数 α 皆有 $\|x+\alpha y\|\geq\|x\|$.

证明　必要性 "$\Rightarrow$ "： 如果 $x\perp y$, 那么 对于任意的 $\alpha\in\mathbb{K}$ 有 $x\perp(\alpha y)$, 于是

$$\|x+\alpha y\|^2=\|x\|^2+\|\alpha y\|^2\geq\|x\|^2$$

从而必要性得证

充分性 "$\Leftarrow$ "： 如果对一切 $\alpha\in\mathbb{K}$ 都有 $\|x+\alpha y\|^2\geq\|x\|$, 这时,

$$\|x+\alpha y\|^2=(x,x)+(x,\alpha y)+(\alpha y,x)+(\alpha y,\alpha y)\geq(x,x),$$

假设 $y \neq 0$, 令 $\alpha = -\frac{1}{\|y\|^2}(x, y)$, 代入上式可得

$$-\frac{|(x,y)|^2}{\|y\|^2} - \frac{|(x,y)|^2}{\|y\|^2} + \frac{|(x,y)|^2}{\|y\|^2} = -\frac{|(x,y)|^2}{\|y\|^2} \geq 0$$

由于 $y \neq 0$,从而可得 $(x, y) = 0$. 所以 $x \perp y$. □

§6.3 第二十二讲　正交系, Fourier级数

教学目的
本节将介绍内积空间中的正交系,正交系以及完全标准正交系. 最后给出Hilbert空间正交基的存在性.
本节要点
Bessel不等式, Parseval等式, Hilbert空间正交基。

§6.3.1 内容提要

定义 6.3.1　设 $\mathbb{X}$ 是内积空间, $\theta \notin M \subset \mathbb{X}$.

(1) 若 M 中的任意两个元素都是正交的,则称 M 为 $\mathbb{X}$ 的一个正交系(orthogonal system).

(2) 若 M 为 $\mathbb{X}$ 的正交系,且 M 中每个元素的范数都是1,即

$$(x, y) = \begin{cases} 0, & x \neq y, \\ 1, & x = y, \end{cases}$$

则 M 称为 $\mathbb{X}$ 的一个标准正交系(orthonormal system).

关于 $\mathbb{X}$ 中的正交系和标准正交系有下列性质.

定理 6.3.1　设 $(\mathbb{X}, (\cdot, \cdot))$ 是一个内积空间,

(1) 若 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是 $\mathbb{X}$ 的正交系,则

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2. \tag{6.3.1}$$

(2) 若 M 是 $\mathbb{X}$ 的正交系,则 M 是线性无关的,反之不真.

(3) 若 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 $\mathbb{X}$ 的标准正交系, 则 $\forall x \in \operatorname{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 可唯一表示为

$$x = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k. \tag{6.3.2}$$

(4) (Gram–Schmidt标准正交化方法) 设 $\{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ 是 $\mathbb{X}$ 的任意线性无关列, 则存在 $\mathbb{X}$ 中的标准正交列 $\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$,使得 $\forall n \in \mathbb{N}$ 有

$$\operatorname{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} = \operatorname{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}. \tag{6.3.3}$$

定义 6.3.2　设 $F = \{e_k, k \in \mathbb{N}\}$ 是内积空间 $\mathbb{X}$ 中的标准正交系, $x \in \mathbb{X}$,则内积 $(x, e_k), k \in \mathbb{N}$ 称为 x 关于 F 的广义Fourier系数,或简称为Fourier系数.

利用广义Fourier系数,可以给出投影的表示形式.

定理 6.3.2　设 $\{e_k, k \geq 1\}$ 是内积空间 $\mathbb{X}$ 中的标准正交系, $x \in \mathbb{X}$, 记 $M = \mathrm{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$,则

1) x 在 M 上的投影 x_0 可表示为

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k;$$

2) $\|x_0\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2$;

3) $\|x - x_0\|^2 = \|x\|^2 - \|x_0\|^2$.

定理 6.3.3　设 $\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$ 是内积空间 $\mathbb{X}$ 中的标准正交系,则对每个 $x \in \mathbb{X}$,有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \leq \|x\|^2. \tag{6.3.4}$$

此式称为**Bessel**不等式.

Bessel不等式(6.3.4)的左端是一个正项级数,根据级数收敛的必要条件,有下面的结果.

推论 6.3.1　设 $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ 是内积空间 $\mathbb{X}$ 中的标准正交系,则对每个 $x \in \mathbb{X}$ 有

$$\lim_{n\to\infty}(x, e_n) = 0.$$

定义 6.3.3　若 $F = \{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ 是内积空间 $\mathbb{X}$ 的一列元,如果它满足 $\overline{\mathrm{span}F} = \mathbb{X}$,则称 F 为 $\mathbb{X}$ 中的完全系. 如果 F 是正交系,并且还是完全系,则称 F 为完全正交系.

若 $F = \{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ 是内积空间 $\mathbb{X}$ 的标准正交系,并且 F 是完全系, 则称 F 为 $\mathbb{X}$ 中的完全标准正交系.

如果 $F = \{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ 是内积空间的完全标准正交系,可以将有限维内积空间的结论推广到Hilbert空间中. 下面的定理具体给出了完全标准正交系的几个等价条件.

定理 6.3.4　若 $F = \{e_k, k \in \mathbb{N}\}$ 是Hilbert空间 $\mathcal{H}$ 中的标准正交系,则下列各条件等价:

1) F 是 $\mathcal{H}$ 的完全标准正交系.

2) $F^{\perp} = \{\theta\}$,即 $\mathcal{H}$ 中不存在与 F 中所有元素正交的非零元素.

3) 对每个 $x \in \mathcal{H}$,有

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k.$$

4) 对每个 $x \in \mathcal{H}$,有

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|(x, e_k)|^2.$$

此式称为**Parseval**等式.

定义 6.3.4 若 $F=\{e_k,k\in\mathbb{N}\}$ 是Hilbert空间 $\mathcal{H}$ 中的完全标准正交系,则每个 $x\in\mathcal{H}$ 可展开为无穷级数,即 $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k$.无穷级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k$ 称为 x 关于 F 的广义**Fourier**级数,或简称为Fourier级数.

若 $\mathcal{H}$ 是Hilbert空间, $F=\{e_k,k\in\mathbb{N}\}$ 是Hilbert空间 $\mathcal{H}$ 中的完全标准正交系, 对每个 $x\in\mathcal{H}$, x 的Fourier级数具有明显的几何意义:

1) 前 n 项和 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k$ 正是 x 在子空间 $\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots e_n\}$ 上的投影 (见定理6.3.2),

2) $\|x-s_n\|$ 是 x 到 $\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 的距离.

从逼近角度, s_n 是 x 在 $\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots e_n\}$ 上的最佳逼近, $\|x-s_n\|$ 是其误差.

定理 6.3.5 (Riesz-Fischer定理) 若 $F=\{e_k,k\in\mathbb{N}\}$ 是Hilbert空间 $\mathcal{H}$ 中的标准正交系,令 $M=\overline{\mathrm{span}F}$. 则每个 $\alpha\in\ell^2$, $\alpha=\{a_n,n\in\mathbb{N}\}$,都存在唯一的元 $x\in M$ 使得

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}a_ke_k,\quad a_k=(x,e_k).$$

定义 6.3.5 设 $\mathcal{H}$ 可分的Hilbert空间,若 $F=\{e_n,n\in\mathbb{N}\}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的完全标准正交系. 则称 $F=\{e_n,n\in\mathbb{N}\}$ 为 $\mathcal{H}$ 的标准正交基(或规范正交基).

由定义,标准正交基也是Schauder基,具有Schauder基的空间是可分的,可分的空间不必一定具有基. 但对可分的Hilbert空间而言,标准正交基总存在.

定理 6.3.6 设 $\mathcal{H}$ 可分无限维的Hilbert空间,则 $\mathcal{H}$ 必有可数的标准正交基.

定理 6.3.7 每个可分的无限维Hilbert空间 $\mathcal{H}$ 都同构于空间 ℓ^2 .

推论 6.3.2 空间 $L^2[0,2\pi]$ 与 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 等距同构.

定理6.3.7表明,任何无限维可分Hilbert空间都与 ℓ^2 同构. 因此,任何两个在同一数域上的无限维可分Hilbert空间都是同构的. 对于无限维可分Hilbert空间,其上性质的研究可转化为对 ℓ^2 空间中相应性质的研究.

§6.3.2 典型例题

Hilbert空间的正交系是线性无关的,任何线性无关组都可通过Gram-schmidt正交化过程得到标准正交系。 完全标准正交系(也称规范正交基)是空间元按照基展开的充要条件。

可分Hilbert空间的规范正交基不仅意味着空间中的每个元可按照基展成广义Fourier级数, 同时它也是一种方法.

例 6.3.1 在内积空间 $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$) 中

$$e_1=(1,0,0,\cdots,0),\quad e_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,e_n=(0,0,0,\cdots,1)$$

是一个标准正交系.

例 6.3.2　在Hilber空间 ℓ^2 中,记

$$e_k = (0, \cdots, 0, \overset{(k)}{1}, 0, \cdots), (k \in \mathbb{N}),$$

则 $\{e_k; k \in \mathbb{N}\}$ 是一个标准正交系. 对每个 $x \in \ell^2$, $x = \{\xi_n\}$,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n.$$

例 6.3.3　若实内积空间 $C[0, 2\pi]$ 中任意二元 x 和 y 的内积定义为

$$(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) y(t) dt.$$

令 $u_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $u_n(t) = \cos nt$, $v_n(t) = \sin nt$ ($n \in \mathbb{N}$),则

$$\{u_0, u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots, u_n, v_n, \cdots\}$$

是 $C[0, 2\pi]$ 的标准正交系.每个 $x \in C[0, 2\pi]$ 关于此标准正交系可以展开为Fourier级数

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) dt = \sqrt{2}(x, u_0),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos nt dt = (x, u_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin nt dt = (x, v_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

在数学分析中, a_0 , a_n , b_n （ $n \in \mathbb{N}$ ）就是 x 的Fourier级数的展开系数.

例 6.3.4　设Hilbert空间 $L^2[0, 2\pi]$,其上内积为

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \forall f, g \in L^2[0, 2\pi]$$

指数函数族 $F = \{e^{inx}, n \in \mathbb{Z}\}$ 是 $L^2[0, 2\pi]$ 的完全标准正交系. 函数 $f \in L^2[0, 2\pi]$ 关于 F 的Fourier系数

$$c_n = (f, e_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

于是 $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, $\|f\|^2 = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$.

例 6.3.5　设 $k(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数,在 $L^2[0, 2\pi]$ 上考虑积分方程

$$f(x) - \int_0^{2\pi} k(x - s) f(s) ds = g(x), \quad g \in L^2[0, 2\pi]. \tag{6.3.5}$$

的可解性.

解　在 $L^2[0,2\pi]$ 上内积为

$$(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx,\quad f,g\in L^2[0,2\pi].$$

由例6.3.4知指数函数族 $\{e^{-inx}, n\in\mathbb{Z}\}$ 是此内积下 $L^2[0,2\pi]$ 的标准正交基. 记

$$c_n(f)=(f,e_n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

对方程(6.3.5)两端与 $e_n=e^{inx}$ 做内积得到

$$c_n(f)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}dx\int_0^{2\pi} k(x-s)f(s)ds=c_n(g),\quad n\in\mathbb{Z}.$$

由于

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}dx\int_0^{2\pi} k(x-s)f(s)ds &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)ds\int_0^{2\pi} k(x-s)e^{-inx}dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)e^{-ins}ds\int_{-s}^{2\pi-s} k(r)e^{-inr}dr,\end{aligned}$$

注意到 $k(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数,我们有等式

$$\int_{-s}^{2\pi-s} k(r)e^{-inr}dr=\int_0^{2\pi} k(r)e^{-inr}dr=2\pi c_n(k),$$

所以有

$$c_n(f)-2\pi c_n(k)c_n(f)=c_n(g),\quad n\in\mathbb{Z}.$$

当 $2\pi c_n(k)\neq 1$ 时, 我们得到

$$c_n(f)=\frac{c_n(g)}{1-2\pi c_n(k)},\quad n\in\mathbb{Z}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n(k)=0$,所以 $c_n(f)\in\ell^2(\mathbb{Z})$. 从而积分方程的解 $f(x)$ 由下式给出

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{-inx}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{c_n(g)}{1-2\pi c_n(k)}e^{-inx}.$$

当对某个 n ,有 $2\pi c_n(k)=1$,此时只对满足条件 $c_n(g)=0$ 的函数 g 可解.　□

例 6.3.6　设 $k(t,s)$ 是 $[-1,1]\times[-1,1]$ 上的实连续函数满足条件 $k(t,s)=k(s,t)$,在 $L^2[-1,1]$ 上考虑积分方程

$$f(t)-\int_{-1}^{1} k(t,s)f(s)ds=g(t),\quad g\in L^2[-1,1]. \tag{6.3.6}$$

的可解性.

解　在 $L^2[-1,1]$ 上内积为

$$(f,g)=\int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx,\quad f,g\in L^2[-1,1].$$

设实函数族 $\{e_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 是 $L^2[-1,1]$ 的标准正交基. 记

$$c_n(f) = (f, e_n) = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{e_n(x)}dx$$

对每个 $t \in [-1,1]$, $k(t,\cdot) \in L^2[-1,1]$,按照基有展开式

$$k(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)e_n(s)$$

其中

$$a_n(t) = \int_{-1}^{1} k(t,s)\overline{e_n(s)}ds.$$

利用关系式 $k(t,s) = k(s,t)$,存在实数 λ_n 使得 $a_n(t) = \lambda_n e_n(t)$,所以

$$k(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n(t)e_n(s).$$

对方程(6.3.6)两端与 $e_n(t)$ 做内积得到

$$c_n(f) - \int_{-1}^{1} e_n(t)dt \int_{-1}^{1} k(t,s)f(s)ds = c_n(g), \quad n \in \mathbb{N}.$$

由于

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} e_n(t)dt \int_{-1}^{1} k(t,s)f(s)ds &= \int_{-1}^{1} f(s)ds \int_{-1}^{1} k(t,s)e_n(t)dt \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \int_{-1}^{1} f(s)e_j(s)ds \int_{-1}^{1} e_n(t)e_j(t)dt \\
&= \lambda_n \int_{-1}^{1} f(s)e_n(s)ds,
\end{aligned}$$

所以有

$$c_n(f) - \lambda_n c_n(f) = c_n(g), \quad n \in \mathbb{N}.$$

当 $\lambda_n \neq 1$ 时, 我们得到

$$c_n(f) = \frac{c_n(g)}{1-\lambda_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

由于

$$\int_{-1}^{1} dt \int_{-1}^{1} |k(t,s)|^2 ds = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^{1} |\lambda_n|^2 |e_n(t)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2,$$

这蕴含 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$,所以 $c_n(f) \in \ell^2(\mathbb{N})$. 从而积分方程(6.3.6)的解 $f(x)$ 由下式给出

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)e_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(g)}{1-\lambda_n} e_n(x).$$

当对某个 n ,有 $\lambda_n = 1$,此时只对满足条件 $c_n(g) = 0$ 的函数 g 可解. □

注记 6.3.1 在空间 $L^2[-1,1]$, 由函数族 $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ 正交化得到的正交多项式–规范化Legendre正交多项式, 就是满足上例条件的标准正交基. 这里要求 $\{e_n(x)\}$ 是实正交基,主要是便于利用 $k(t,s) = k(s,t)$ 性质进行比较. 一般地,若函数满足条件 $k(t,s) = \overline{k(s,t)}$, 就可去掉对实基的限制. 其证明方法完全相同.

§6.3.3 练习题二十二解答

1. 设 $\mathbb{X}$ 是一内积空间, $\{x_k\}_{k=1}^n$ 是一标准正交系,证明函数

$$\left\|x-\sum_{k=1}^n a_kx_k\right\|$$

仅当 $a_k=(x,x_k), k=1,2,\cdots,n,$ 时取到极小值。

证明 记 $x_0=\sum_{k=1}^n(x,x_k)x_k$, 则 $x-x_0\perp x_k$,于是

$$\begin{aligned}\left\|x-\sum_{k=1}^n a_kx_k\right\|^2 &= \left\|x-x_0+x_0-\sum_{k=1}^n a_kx_k\right\|^2\\ &= \|x-x_0\|^2+\|x_0-\sum_{k=1}^n a_kx_k\|^2=\|x-x_0\|^2+\sum_{k=1}^n|(x,x_k)-a_k|^2\end{aligned}$$

因此,仅当 $a_k=(x,x_k), k=1,2,\cdots,n,$ 时 $\left\|x-\sum_{k=1}^n a_kx_k\right\|$ 取到极小值 $\|x-x_0\|$ 。 □

2. 设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是内积空间 $\mathbb{X}$ 的标准正交系, $M=\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$. 定义算子 $P:\mathbb{X}\to M$, 使得对于每一个 $x\in\mathbb{X}$

$$Px=\sum_{i=1}^n(x,e_i)e_i.$$

Px 是 x 在 M 上的投影. 证明

(1). $P:\mathbb{X}\to M$ 是有界线性算子,且 $\|P\|=1$;

(2). $P^2=P$ (这里 $P^2=P\cdot P$)

证明 (1). 首先来证明 P 是有界线性算子. 对于任意的 $x,y\in\mathbb{X}$ 及 $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, 有

$$\begin{aligned}P(\alpha x+\beta y) &= \sum_{i=1}^n(\alpha x+\beta y,e_i)e_i=\sum_{i=1}^n(\alpha x,e_i)e_i+\sum_{i=1}^n(\beta y,e_i)e_i\\ &= \alpha\sum_{i=1}^n(x,e_i)e_i+\beta\sum_{i=1}^n(y,e_i)e_i=\alpha Px+\beta Py\end{aligned}$$

从而 P 是线性算子. 而

$$\|Px\|^2=\left\|\sum_{i=1}^n(x,e_i)e_i\right\|^2\le\left\|\sum_{i=1}^n(x,e_i)e_i\right\|^2+\left\|x-\sum_{i=1}^n(x,e_i)e_i\right\|^2=\|x\|^2,$$

所以 $\|Px\|\le\|x\|$, 由 x 的任意性可得 P 是有界算子，并且 $\|P\|\le 1$, 取 $x\in M$, 这时有 $\|Px\|^2=\|x\|^2$, 所以 $\|P\|\ge 1$.因此 $\|P\|=1$.

(2).对于任意的 $x\in\mathbb{X}$, 我们有

$$y=Px=\sum_{i=1}^n(x,e_i)e_i,\quad (y,e_j)=(x,e_j),\quad j=1,2,\cdots,n.$$

于是

$$P^2x = P(Px) = P(y) = \sum_{i=1}^{n}(y, e_i)e_i = \sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i = Px,$$

由 x 的任意性可知 $P^2 = P$. □

3. 设 $\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$ 是内积空间 $\mathbb{X}$ 的标准正交系,则对于任意 $x, y \in \mathbb{X}$ 恒有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)(y, e_k)| \leq \|x\|\|y\|$$

证明　由 Cauchy-Schwartz 不等式可得

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)(y, e_i)| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |(y, e_i)|^2},$$

而由Bessel不等式可知

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2, \quad \|y\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |(y, e_i)|^2,$$

从而可得 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)(y, e_i)| \leq \|x\|\|y\|$. □

4. 设 $\{e_i, i \in \mathbb{N}\}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的标准正交系, $M = \text{span}\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$. 证明 $x \in \overline{M}$ 的充分必要条件是: x 可以表示为 $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$.

证明　必要性 " $\Rightarrow$ ": 因为空间 $\mathcal{H}$ 是Hilbert空间，而 $\overline{M}$ 是其闭子空间， 从而亦是Hilbert空间， 这时 $\{e_i, i \in \mathbb{N}\}$ 是完备子空间 $\overline{M}$ 的完全规范正交系，利用定理3.7的等价条件可知 $\forall x \in \overline{M}$, 都有 $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(x, e_i)e_i$;

充分性 " $\Leftarrow$ ": 令 $x_n = \sum\limits_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i$, 显然 $x_n \in M$, 又因为 $\mathcal{H}$ 是Hilbert空间,

$$x = \sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)e_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

从而可知 x 是 x_n 的极限, 从而 $x \in \overline{M}$. □

此处 $\mathcal{H}$ 是Hilbert空间的条件主要用于保障级数 $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(x, e_i)e_i$ 是空间 $\mathcal{H}$ 中的元。可以证明：若 $\{e_i, i \in \mathbb{N}\}$ 是内积空间 X 中的规范正交系，则部分和列 $x_n = \sum\limits_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i$, $n \in \mathbb{N}$,总是一Cauchy列 .

5.设 $\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的标准正交系. 证明 $\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$ 是完全标准正交系的充分必要条件是, 对于任意的 $x, y \in \mathcal{H}$ 恒有

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)\overline{(y, e_k)}.$$

证明: 必要性 "$\Rightarrow$ ": 若 $\{e_i, i \in \mathbb{N}\}$ 是完全规范正交系, 那么根据定理 3.7 的等价条件可知 $x = \sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)e_i, \quad y = \sum_{i=1}^{\infty}(y, e_i)e_i$, 这时

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)e_i, y) = \sum_{i=1}^{\infty}((x, e_i)e_i, y) = \sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)\overline{(y, e_i)}.$$

充分性 "$\Leftarrow$ ": 若 $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)\overline{(y, e_i)}$. 对于任意的 $x, y \in \mathcal{H}$ 均成立, 我们取 $x = y \in \mathcal{H}$,这时

$$(x, x) = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)\overline{(x, e_i)} = \sum_{i=1}^{\infty}|(x, e_i)|^2$$

再由 定理 3.7的等价条件可知, $\{e_i, i \in \mathbb{N}\}$ 是完全规范正交系. □

§6.4 第二十三讲　Hilbert空间中有界线性泛函的Riesz表示定理

教学目的 本节将讨论Hilbert 空间的对偶空间的表示问题,通过Riesz表示定理,建立起Hilbert空间的自对偶性质. 本节要点 Riesz表示定理,复共轭同构映射。

§6.4.1 内容提要

在内积空间 $\mathbb{X}$ 中,任给一个元 $y \in \mathbb{X}$ 固定,利用内积可定义一个 $\mathbb{X}$ 上的线性泛函 f_y

$$f_y(x) = (x, y), \quad \forall x \in \mathbb{X}. \tag{6.4.1}$$

由Cauchy–Schwartz不等式, $|f_y(x)| = |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$,因此 f_y 是有界线性泛函, 并且 $\|f_y\| \leq \|y\|$. 另一方面,取 $x = y$,有 $|f_y(y)| = (y, y) = \|y\|^2$,则 $\|f_y\| \geq \|y\|$.因此 $\|f_y\| = \|y\|$.

下面的定理表明, 在Hilbert空间 $\mathcal{H}$ 中,每个 $\mathcal{H}$ 上的有界线性泛函 f 可以由空间 $\mathcal{H}$ 中的元素来表示。

定理 6.4.1 (Riesz表示定理) 设 $\mathcal{H}$ 是Hilbert空间, f 是 $\mathcal{H}$ 上的有界线性泛函,则存在唯一的 $u \in \mathcal{H}$,使得

$$f(x) = (x, u), \quad \forall x \in \mathcal{H}, \tag{6.4.2}$$

并且 $\|f\| = \|u\|$.

推论 6.4.1 设 $\mathcal{H}^*$ 是Hilbert空间 $\mathcal{H}$ 的对偶空间,映射 $J : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ 定义为

$$Jy = f_y \in \mathcal{H}^*, \quad \forall y \in \mathcal{H}$$

(这里 $f_y(x) = (x, y), \forall x \in \mathcal{H}$),则

(1) J 是共轭线性算子,即

$$J(y_1 + y_2) = Jy_1 + Jy_2, \quad J(\alpha y) = \overline{\alpha} Jy;$$

(2) J 是双射且保持范数.

推论6.4.1中的 J 称为由 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{H}^*$ 上的一个复共轭同构映射,并且称 $\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{H}^*$ 是复共轭同构的. 在复共轭同构的意义下,可以将 $\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{H}^*$ 视为同一的(若 $\mathcal{H}$ 是实Hilbert空间,则复共轭同构就是同构). 必须注意,当 $\alpha y \in \mathcal{H}$ 视为 $\mathcal{H}$ 上的有界线性泛函 时,有

$$(\alpha y)(x) = (x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y) = \bar{\alpha} y(x).$$

§6.4.2 典型例题

Hilbert空间 $\mathcal{H}$ 的Riesz 表示定理中的复共轭同构映射 J 只是表明 $\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{H}^*$ 中 元的一一对应关系,并不意味着 $f \in \mathcal{H}^*$ 与 $u \in \mathcal{H}$ 两个元完全相同. 在函数空间中 $Ju = f$ 这种对应关系实际上蕴含某种方程的解 u 与给定函数(广义函数) f 之间的关系.

例 6.4.1　设函数空间 $H^1(0,1)$ 定义如下

$$H^1(0,1) = \{\varphi \in C[0,1] \,\big|\, \varphi(x)\ \text{绝对连续},\ \varphi' \in L^2[0,1]\}$$

定义内积

$$(\varphi,\psi)_{1,2} = \int_0^1 \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx + \int_0^1 \varphi'(x)\overline{\psi'(x)}dx$$

内积诱导的范数记为 $\|\cdot\|_{1,2}$,这里下标 $\{1,2\}$, 1 表示关于导数的阶数,2表示基本空间为 L^2 . 直接验证 $(H^1(0,1), \|\cdot\|_{1,2})$ 是Hilbert空间.

设 $x_0 \in (0,1)$, 定义 $H^1(0,1)$ 上的泛函 δ_{x_0} 如下

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0) = \int_0^1 \varphi(x)\delta(x-x_0)dx, \quad \forall \varphi \in H^1(0,1).$$

则 $\delta_{x_0} \in (H^1(0,1))^*$.

设函数 $u \in H^1(0,1)$ 满足方程

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = \delta(x-x_0), & x \in (0,1) \\ u'(1) = u'(0) = 0 \end{cases} \tag{6.4.3}$$

则有

$$\delta_{x_0}(\varphi) = (\varphi, u)_{1,2} = \int_0^1 \varphi(x)\overline{u(x)}dx + \int_0^1 \varphi'(x)\overline{u'(x)}dx.$$

证明　首先证明 $\delta_{x_0} \in (H^1(0,1))^*$. 对任意的 $\varphi \in H^1(0,1)$,

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^x \varphi'(s)ds, \quad x \in [0,1].$$

所以

$$|\varphi(x_0)| \le |\varphi(x)| + \int_{x_0}^x |\varphi'(s)|ds \le |\varphi(x)| + \int_0^1 |\varphi'(x)|dx$$

在 $[0,1]$ 上对上式积分,并应用Cauchy–Schwartz不等式得

$$|\varphi(x_0)| \le \int_0^1 |\varphi(x)|dx + \int_0^1 |\varphi'(x)|dx \le \sqrt{2}\left(\int_0^1 (|\varphi(x)|^2 + |\varphi'(x)|^2)dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

即

$$|\delta_{x_0}(\varphi)| \le \sqrt{2}\|\varphi\|_{1,2}.$$

因此, $\delta_{x_0} \in (H^1(0,1))^*$.

直接求解方程(6.4.3)可得

$$u(x)=\begin{cases}\frac{\cosh x_0}{\sinh 1}\cosh(1-x), & x_0\le x\le 1\\ \frac{\cosh(1-x_0)}{\sinh 1}\cosh x, & 0\le x\le x_0\end{cases}\tag{6.4.4}$$

明显地, $u\in C[0,1]$, $u'\in L^2[0,1]$.所以 $u\in H^1(0,1)$.

对任意的 $\varphi\in H^1(0,1)$,

$$\begin{aligned}(\varphi,u)_{1,2} &= \int_0^1\varphi(x)\overline{u(x)}dx+\int_0^1\varphi'(x)u'(x)dx\\ &= \frac{\cosh x_0}{\sinh 1}\left[\int_{x_0}^1\varphi(x)\cosh(1-x)dx-\int_{x_0}^1\varphi'(x)\sinh(1-x)dx\right]\\ &\quad+\frac{\cosh(1-x_0)}{\sinh 1}\left[\int_0^{x_0}\varphi(x)\cosh x dx+\int_0^{x_0}\varphi'(x)\sinh x dx\right]\\ &= \frac{\cosh x_0}{\sinh 1}\left[-\varphi(x)\sinh(1-x)\Big|_{x_0}^1\right]+\frac{\cosh(1-x_0)}{\sinh 1}\left[\varphi(x)\sinh x\Big|_0^{x_0}\right]\\ &= \frac{\varphi(x_0)}{\sinh 1}[\cosh x_0\sinh(1-x_0)+\cosh(1-x_0)\sinh x_0]=\varphi(x_0)\end{aligned}$$

所以

$$\delta_{x_0}(\varphi)=(\varphi,u)_{1,2}=\int_0^1\varphi(x)\delta(x-x_0)dx.$$

上式表明对应关系 $Ju=\delta_{x_0}$ 由方程(6.4.3)确定, $u(x)=J^{-1}\delta_{x_0}$ 正是方程(6.4.3)的解. □

前面的例子表明复共轭同构映射在函数空间表示给定函数与方程解之间的关系,利用这种关系反过来可用以求解微分方程.

例 6.4.2 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界开区域, 其边界 $\partial\Omega$ 具有一定光滑性. 设 $f\in L^2(\Omega)$, 则偏微分方程Dirichlet边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u(x)=f(x), & x\in\Omega\\ u(x)=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{6.4.5}$$

存在唯一解.

证明 由于方程的解在边界 $\partial\Omega$ 上取零值,选择函数空间 $H_0^1(\Omega)$

$$H_0^1(\Omega)=\{\varphi\in C_0(\Omega)\,\big|\,\partial_{x_j}\varphi\in L^2(\Omega), j=1,2,\cdots,n\}$$

内积定义为

$$(\varphi,\psi)_{1,2}=\int_\Omega\varphi(x)\overline{\psi(x)}dx+\int_\Omega\nabla\varphi(x)\overline{\nabla\psi(x)}dx,$$

诱导的范数为

$$\|\varphi\|_{1,2}^2=\|\varphi\|_2^2+\|\nabla\varphi\|_2^2.$$

函数空间 $H_0^1(\Omega)$ 的另外一种定义方式是边界处为零的无穷次可微函数 $C_0^\infty(\Omega)$ 在范数 $\|\cdot\|_{1,2}$ 下的完备化空间, 它是Hilbert空间.

在 $H_0^1(\Omega)$ 上定义新的范数,

$$\|\varphi\|_*^2=\int_\Omega|\nabla\varphi|^2dx.$$

直接验证可知：范数 $\|\cdot\|_{1,2}$ 与 $\|\cdot\|_*$ 等价,即存在常数 M 使得 $\|\varphi\|_* \le \|\varphi\|_{1,2} \le M\|\varphi\|_*$.

对给定的 $f \in L^2(\Omega)$, 定义 $H_0^1(\Omega)$ 上的泛函 F 如下

$$F(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

明显地, F 是线性泛函,且

$$|F(\varphi)| \le \|f\|_2\|\varphi\|_2 \le \|f\|_2\|\varphi\|_{1,2}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

所以 $F \in (H_0^1(\Omega))^*$.

为证明要求结果,取内积空间 $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_*)$, 依Riesz 表示定理, 存在唯一的函数 $u \in H_0^1(\Omega)$

$$F(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega \nabla\varphi(x)\overline{\nabla u(x)}dx, \quad \forall \varphi \in H^1(0,1).$$

依Green公式

$$\int_\Omega \nabla\varphi(x)\overline{\nabla u(x)}dx = \int_{\partial\Omega} \varphi(x)\overline{\frac{\partial u}{\partial \nu}}dS - \int_\Omega \varphi(x)\overline{\Delta u(x)}dx$$

其中 $\nu(x)$ 表示在边界点 x 处的外法向, 所以

$$\int_\Omega (-\overline{\Delta u(x)} - f(x))\varphi(x)dx = 0, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

上面关系蕴含 $-\Delta\overline{u(x)} = f(x), a.e., x \in \Omega$, 所以 $\overline{u(x)}$ 就是方程(6.4.5)的唯一解. □

注记 6.4.1　通常用 $H^m(\Omega)$ 表示 $C^\infty(\Omega)$ 在范数

$$\|\varphi\|_{m,2}^2 = \sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha\varphi\|_2^2$$

的完备化空间,其中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n), \alpha_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 表示多重指标; 用 $H_0^m(\Omega)$ 表示 $C_0^\infty(\Omega)$ 在范数 $\|\varphi\|_{m,2}$ 下的完备化空间. 它们都是Hilbert空间, 它们的对偶空间 $(H^m(\Omega))^*$, $(H_0^m(\Omega))^*$,分别记为 $H^{-m}(\Omega)$, $H_0^{-m}(\Omega)$. 空间 $H^m(\Omega)$ 与 $H^{-m}(\Omega)$, $H_0^m(\Omega)$ 与 $H_0^{-m}(\Omega)$ 间的复共轭等距同构,都表示某种偏微分方程的可解性.

§6.4.3 练习题二十三解答

1. 设 $\mathbb{X}^*$ 是内积空间 $\mathbb{X}$ 的对偶空间. 映射 $\mathbb{J} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}^*$ 定义为

$$\mathbb{J}y = f_y \in \mathbb{X}^*, \ (y \in \mathbb{X})$$

(这里 $f_y(x) = (x, y), \ (x \in \mathbb{X})$). 若 J 是满射, 则 $\mathbb{X}$ 是 Hilbert空间。

证明　由推论 4.2的证明 可知， $\mathbb{J}$ 是共轭线性的. 即

$$\mathbb{J}(y_1 + y_2) = \mathbb{J}y_1 + \mathbb{J}y_2, \quad \mathbb{J}(\alpha y) = \overline{\alpha}Jy, \quad y, y_1, y_2 \in \mathbb{X}, \ \alpha \in \mathbb{K}.$$

并且 $\|\mathbb{J}y\| = \|y\|$.

若 $\mathbb{J}$ 是满射,则 $\mathbb{J}$ 是 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{X}^*$ 上的复共轭同构映射，而 $\mathbb{X}^*$ 完备, 故 $\mathbb{X}$ 完备。事实上, 设 $\{y_n\}$ 是 $\mathbb{X}$ 上的Cauchy 序列, 而

$$\|\mathbb{J}y_n - \mathbb{J}y_m\| = \|\mathbb{J}(y_n - y_m)\| = \|y_n - y_m\|,$$

$\mathbb{X}^*$ 完备，故 $\exists f \in \mathbb{X}^*$ 使得 $\mathbb{J}y_n \to f, (n \to \infty)$. 由假设可知 $\mathbb{J}$ 是满射，故 $\exists y \in \mathbb{X}$, 使得 $\mathbb{J}y = f$. 从而 $\mathbb{J}y_n \to Jy, n \to \infty$. 因此 $\|y_n - y\| \to 0, n \to \infty$. □

2. 若 $\mathcal{H}$ 是Hilbert 空间,则 $\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{H}^{**}$ 同构.

证明 设 $\mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间, 则 $\mathbb{J} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ 是复共轭同构映射. 又 $\mathbb{J}_1 : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}^{**}$ 是复共轭同构映射. 定义 $\Phi := \mathbb{J}_1 \cdot \mathbb{J}$, 可以验证 Φ 是 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{H}^{**}$ 上的线性同构映射. (共轭两次就变成一个线性映射) . □

3. 设 $\{x_n\}$ 是内积空间 $\mathbb{X}$ 中的点列.证明 : 若 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x ,则 $(x_n, x) \to (x, x)$.

证明 由于 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x , 则有对于任意的 $f \in \mathbb{X}^*$ 都有 $|f(x_n) - f(x)| \to 0, n \to \infty$. 此时, 由 x 可确定 $\mathbb{X}$ 上的一有界线性泛函 f_x , 使得 $f_x(y) = (y, x), \forall y \in \mathbb{X}$, 所以 $f_x(x_n) \to f_x(x)$, 即 $(x_n, x) \to (x, x)$. □

此题与前面第一节第三题相结合可以得到下面的命题:

设 $\mathbb{X}$ 是内积空间，$\{x_n\} \subset \mathbb{X}$，$x \in \mathbb{X}$, 则 $x_n \to x$ (强收敛)的充要条件是：$x_n \xrightarrow{w} x$, 且 $\|x_n\| \to \|x\|$.

4. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开区域,边界 $\partial\Omega$ 具有一定光滑性。定义函数空间 $H_0^1(\Omega)$

$$H_0^1(\Omega) = \{\varphi \in C_0(\Omega) \,\big|\, \partial_{x_j}\varphi \in L^2(\Omega), j = 1, 2, \cdots, n\}$$

内积定义为

$$(\varphi, \psi)_{1,2} = \int_\Omega \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx + \int_\Omega \nabla\varphi(x)\overline{\nabla\psi(x)}dx,$$

诱导的范数为

$$\|\varphi\|_{1,2}^2 = \|\varphi\|_2^2 + \|\nabla\varphi\|_2^2.$$

在 $H_0^1(\Omega)$ 上定义新的范数,

$$\|\varphi\|_*^2 = \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx.$$

证明：范数 $\|\cdot\|_{1,2}$ 与 $\|\cdot\|_*$ 等价,即存在常数 M 使得 $\|\varphi\|_* \le \|\varphi\|_{1,2} \le M\|\varphi\|_*$.

证明 证明的关键在于 $\varphi(x)$ 能够用它的梯度来估计. 注意到函数 $\varphi(x)$ 在边界上取零值,可将函数扩张到区域 Ω 之外,也取零值. 于是可作矩形区域代替 Ω 。

这里仅对 $n=2$ 的情形证明, 一般情形类似. 设矩形区域 $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\supset\Omega$, 对任何的 $(x,y)\in\Omega$, 点 $(a_1,y)\notin\Omega$, $(x,a_2)\notin\Omega$

$$\varphi(x,y)-\varphi(a_1,y)=\int_{a_1}^{x}\frac{\partial\varphi(s,y)}{\partial x}ds$$

$$\varphi(x,y)-\varphi(x,a_2)=\int_{a_2}^{y}\frac{\partial\varphi(x,s)}{\partial y}ds$$

注意到点 $(a_1,y),(x,a_2)\notin\Omega$, $\varphi(a_1,y)=\varphi(x,a_2)=0$,所以

$$2\varphi(x,y)=\int_{a_1}^{x}\frac{\partial\varphi(s,y)}{\partial x}ds+\int_{a_2}^{y}\frac{\partial\varphi(x,s)}{\partial y}ds$$

于是

$$\begin{aligned}2|\varphi(x,y)| &\le \left|\int_{a_1}^{x}\frac{\partial\varphi(s,y)}{\partial x}ds+\int_{a_2}^{y}\frac{\partial\varphi(x,s)}{\partial y}ds\right|\\ &\le \int_{a_1}^{b_1}\left|\frac{\partial\varphi(s,y)}{\partial x}\right|ds+\int_{a_2}^{b_2}\left|\frac{\partial\varphi(x,s)}{\partial y}\right|ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&4\int_{\Omega}|\varphi(x,y)|^2dxdy=4\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]}|\varphi(x,y)|^2dxdy\\ \le\ &\int_{\Omega}\left(\int_{a_1}^{b_1}\left|\frac{\partial\varphi(s,y)}{\partial x}\right|ds+\int_{a_2}^{b_2}\left|\frac{\partial\varphi(x,s)}{\partial y}\right|ds\right)^2dxdy\\ \le\ &2\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]}\left((b_1-a_1)\int_{a_1}^{b_1}\left|\frac{\partial\varphi(s,y)}{\partial x}\right|^2ds+(b_2-a_2)\int_{a_2}^{b_2}\left|\frac{\partial\varphi(x,s)}{\partial y}\right|^2ds\right)dxdy\\ =\ &2(b_1-a_1)(b_2-a_2)\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]}\left|\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\right|^2dxdy\\ =\ &2(b_1-a_1)(b_2-a_2)\int_{\Omega}|\nabla\varphi(x,y)|^2dxdy\end{aligned}$$

所以

$$\|\varphi\|^2\le\frac{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}{2}\|\nabla\varphi\|^2.$$

利用上面不等式, 可知存在正常数 M 使得

$$\|\varphi\|_{1,2}\le M\|\varphi\|_*$$

注记 6.4.2 在一般情形,存在正数 $M(\Omega)$ (只与区域 Ω 有关),使得

$$\|\varphi\|_2\le M(\Omega)\|\nabla\varphi\|_2$$

这个不等式称为Poincare不等式.

§6.5 第二十四讲　Hilbert空间中的伴随算子

教学目的

本节主要介绍Hilbert空间中在内积意义下的伴随算子,讨论伴随算子的性质,算子的值域与伴随算子零空间的关系.

本节要点

Hilbert伴随算子, 随伴运算。

§6.5.1 内容提要

设 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 是两个Hilbert空间.按照内积导出的范数它们是Banach空间. 仍用记号 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ 表示所有 $\mathcal{H}_1$ 到 $\mathcal{H}_2$ 的有界线性算子的全体. 对于 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$, T 的伴随算子 $T^*:\mathcal{H}_2^*\to\mathcal{H}_1^*$ 定义为

$$(T^*g)(x)=g(Tx),\quad \forall g\in\mathcal{H}_2^*,\forall x\in\mathcal{H}_1. \tag{6.5.1}$$

为了与本节的记号加以区别,把上面定义的 T^* 称为 T 的Banach伴随算子,并记为 T' (因为在下面,将用记号 T^* 表示 T 的Hilbert伴随算子).于是(6.5.1)式变为

$$(T'g)(x)=g(Tx),\quad \forall g\in\mathcal{H}_2^*,\forall x\in\mathcal{H}_1. \tag{6.5.2}$$

设 $J_1:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_1^*$ 与 $J_2:\mathcal{H}_2\to\mathcal{H}_2^*$ 是复共轭同构映射.由于 $g\in\mathcal{H}_2^*,T'g\in\mathcal{H}_1^*$,应用 Riesz表示定理, $\mathcal{H}_1$ 上的有界线性泛函 $T'g$ 对应于 $\mathcal{H}_1$ 上的元 $J_1^{-1}T'g$, 使得对任意的 $x\in\mathcal{H}_1$,

$$(T'g)(x)=(x,J_1^{-1}T'g)_{\mathcal{H}_1},\quad \forall x\in\mathcal{H}_1.$$

再应用Riesz表示定理, $g\in\mathcal{H}_2^*$ 又对应于 $\mathcal{H}_2$ 上的元 y ,即 $g=J_2y$,于是

$$(T'g)(x)=(x,J_1^{-1}T'J_2y)_{\mathcal{H}_1}$$

并且

$$g(Tx)=(Tx,y)_{\mathcal{H}_2}.$$

因此,由(6.5.2)式得到

$$(Tx,y)_{\mathcal{H}_2}=(x,J_1^{-1}T'J_2y)_{\mathcal{H}_1}. \tag{6.5.3}$$

定理 6.5.1　设 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 是Hilbert空间, $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$. 则存在唯一的 $T^*\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_1)$ 使得

$$(Tx,y)=(x,T^*y),\quad \forall x\in\mathcal{H}_1,y\in\mathcal{H}_2 \tag{6.5.4}$$

并且 $\|T\|=\|T^*\|$.

设 T' 是 $\mathcal{H}_2^*$ 到 $\mathcal{H}_1^*$ 的Banach伴随算子, 令

$$T^* = J_1^{-1}T'J_2 \tag{6.5.5}$$

则 T^* 是 $\mathcal{H}_2$ 到 $\mathcal{H}_1$ 的映射,且满足(6.5.4).

定义 6.5.1　设 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 是Hilbert空间, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.则算子 $T^* : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ 满足条件

$$(Tx, y) = (x, T^*y), \quad \forall x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2$$

称为 T 的Hilbert伴随算子(Hilbert-adjoint operator),或称为Hilbert共轭算子(conjugate operator).

伴随运算具有下面的运算性质.

定理 6.5.2　设 $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ 和 $\mathbb{U}$ 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的Hilbert空间,则下面的断言成立:

1) $\forall S, T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $(S+T)^* = S^* + T^*$;

2) $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $(\alpha S)^* = \overline{\alpha} S^*$;

3) $\forall T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $(T^*)^* = T$;

4) $\forall T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), S \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}, \mathbb{U})$, $(ST)^* = T^*S^*$;

5) 若算子 $S \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 是有界可逆的, 则算子 S^* 也是有界可逆的, 并且有等式 $(S^{-1})^* = (S^*)^{-1}$.

6) $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$.

定理 6.5.3　设 $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ 是Hilbert空间, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. $\mathcal{N}(T)$ 是 T 的零空间, T 的值域为 $\mathcal{R}(T)$. 则下面的关系成立

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(T^*)^{\perp}, \quad \mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^{\perp},$$

$$\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{N}(T^*)^{\perp}, \quad \overline{\mathcal{R}(T^*)} = \mathcal{N}(T)^{\perp}.$$

推论 6.5.1　设 $\mathcal{H}$ 是Hilbert空间, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. 则

$$\mathcal{H} = \mathcal{N}(T) \dotplus \overline{\mathcal{R}(T^*)} = \overline{\mathcal{R}(T)} \dotplus \mathcal{N}(T^*).$$

§6.5.2 典型例题

Banach空间的伴随是在对偶积意义下求伴随算子, Hilbert伴随是在内积意义下求伴随算子。 求Hilbert 伴随算子(共轭算子)需要在指定内积意义下计算。

例 6.5.1　设 $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 是线性算子, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的规范正交基. 在此基下, T 对应的 n 阶矩阵为 $A = (a_{ij})$. 对于任意 $x, y \in \mathbb{C}^n$, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T \in \mathbb{C}^n$, $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)^T \in \mathbb{C}^n$ (列向量),

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta_k} = y^H x$$

y^H 表示列向量的共轭转置. 设 T^* 对应的矩阵为 B ,则

$$(Tx, y) = y^H(Ax) = (x, T^*y) = (By)^H x = y^H(B)^H x, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

所以 $(T^*)^H = A$,故必有 $B = \bar{A}^T$.因此

$$B = A^H = (\bar{a}_{ji}).$$

这表明 T 的Hilbert伴随算子 T^* 对应的矩阵是 T 对应的矩阵的复共轭转置.

例 6.5.2　设 $L^2[a,b]$, $T : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ 是Fredholm积分算子,

$$Tf(t) = \int_a^b K(t,s)f(s)ds, \quad f \in L^2[a.b].$$

则 T 的Hilbert共轭算子 T^* 为

$$T^*g(t) = \int_a^b \overline{k(t,s)}g(t)dt, \quad \forall g \in L^2[a,b].$$

证明　对任意的 $f, g \in L^2[a,b]$,

$$\begin{aligned}(Tf, g) &= \int_a^b Tf(t)\overline{g(t)}dt = \int_a^b \left(\int_a^b K(t,s)f(s)ds\right)\overline{g(t)}dt \\ &= \int_a^b f(s)ds\int_a^b K(t,s)\overline{g(t)}dt \\ &= \int_a^b f(s)ds\overline{\left(\int_a^b \overline{K(t,s)}g(t)dt\right)} = (f, T^*g),\end{aligned}$$

所以,

$$T^*g(s) = \int_a^b \overline{K(t,s)}g(t)dt.$$

可以看到Hilbert共轭算子与 Banach共轭算子相差一个复共轭运算。 □

§6.5.3 练习题二十四解答

1. 设 $\mathcal{H}$ 是Hilbert空间,　$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, 求下列算子的伴随算子

(1)　$T + T^*$;

(2)　$T - T^*$.

解 直接利用共轭算子的性质有

$$(T + T*)^* = T^* + T^{**} = T^* + T$$

$$(T - T^*)^* = T^* - T^{**} = -(T - T^*)$$

2. 设 H 是Hilbert空间, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, 证明 $(T+T^*)(T-T^*)$ 与 $(T-T^*)(T+T^*)$ 相等的充要条件 是 $T^*T = TT^*$.

证明 直接计算有

$$(T+T^*)(T-T^*) = TT + T^*T - TT^* + T^*T^*$$

$$(T-T^*)(T+T^*) = TT - T^*T + TT^* + T^*T^*$$

它们之差为

$$(T+T^*)(T-T^*) - (T-T^*)(T+T^*) = 2(T^*T - TT^*)$$

所以它们相等的充要条件是 $T^*T = TT^*$.

上题说明:对于算子一般来说是不可交换的,它们可交换是在一定条件下进行。

3. 设 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 是 Hilbert空间, $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ 是有界线性算子, $\mathcal{N}(T)$ 和 $\mathcal{R}(T)$ 分别表示 T 的零空间和值域. 证明

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(T^*)^\perp, \quad \mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp,$$

$$\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{N}(T^*)^\perp, \quad \overline{\mathcal{R}(T^*)} = \mathcal{N}(T)^\perp.$$

证明 我们逐个给出证明,

(a) $\mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(T^*)^\perp$

对于任意的 $x \in \mathcal{N}(T)$,有 $Tx = 0$. 对 $\forall y \in \mathcal{H}_2$, $T^*y \in \mathcal{R}(T^*)$, 这时有 $(x, T^*y) = (Tx, y) = 0$, 从而 $x \in \mathcal{R}(T^*)^\perp$. 即 $\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{R}(T^*)^\perp$.

另一方面, 设 $\forall x \in \mathcal{R}(T^*)^\perp$, 我们有

$$(x, T^*y) = 0, \quad \forall y \in \mathcal{H}_2.$$

这时 $(Tx, y) = 0$, 我们可取 $y = Tx$, 此时可得 $\|Tx\| = 0$, 从而 $Tx = 0$, 所以 $x \in \mathcal{N}(T)$, 即 $\mathcal{R}(T^*)^\perp \subset \mathcal{N}(T)$. 综上可得 $\mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(T^*)^\perp$.

(b) $\mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp$

由于 $(T^*)^* = T^{**} = T$, 所以用 T^* 替换 (a)中 T 即可得到结果.

(c) $\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{N}(T^*)^\perp$

由前面第二节习题可知 $\mathcal{R}(T)^\perp = \overline{\mathcal{R}(T)}^\perp$, 所以由(b)可知

$$\overline{\mathcal{R}(T)}^\perp = \mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}(T^*)$$

而 $\overline{\mathcal{R}(T)}$ 是 Hilbert 空间中的一闭集, 从而由 推论2.11可得 $\overline{\mathcal{R}(T)} = \overline{\mathcal{R}(T)}^{\perp\perp} = \mathcal{N}(T^*)^\perp$

(d) $\overline{\mathcal{R}(T^*)} = \mathcal{N}(T)^\perp$

在(c)中用 T^* 代替 T)可得结果. □

§6.6 第二十五讲 Hilbert空间中正规类算子

教学目的

本节介绍Hilbert空间中正规类算子中几类特殊的算子–自伴算子, 非负算子, 正算子, 正交投影算子, 正规算子, 酉算子以及它们的性质.

本节要点

几类特殊的有界线性算子–自伴算子, 非负算子,正算子,正交投 影算子, 正规算子,酉算子以及它们的性质.

§6.6.1 内容提要

定义 6.6.1 设 $\mathcal{H}$ 是Hilbert空间, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

(1) 若 $TT^* = T^*T$,则 T 称为 $\mathcal{H}$ 上的正规算子(normal operator).

(2) 若 $T^* = T$,则 T 称为 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子(self-adjoint operator),或称为Hermite算子(Hermitian operator).

(3) 若 $T^* = -T$,则 T 称为 $\mathcal{H}$ 上的斜自伴算子(skew-adjoint operator).

(4) 若 T 是双射且 $T^* = T^{-1}$,则 T 称为 $\mathcal{H}$ 上的酉算子(unitary operator).

由定义不难看出:

(1). 酉算子,自伴算子和斜自伴算子都是正规算子;

(2). 若 T 是斜自伴算子, 则 iT 是自伴算子;

(3). 若 T 是自伴算子, 对任意 $x, y \in \mathcal{H}$ 有

$$(Tx, y) = (x, T^*y) = (x, Ty).$$

由此得到 T 是自伴算子的充分必要条件是:对于任意 $x, y \in \mathcal{H}$ 有 $(Tx, y) = (x, Ty)$.

引理 6.6.1 设 $\mathbb{X}$ 是复内积空间, $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ 是有界线性算子, 则 $T = 0$ 的充分必要条件是,对一切 $x \in \mathbb{X}$ 皆有

$$(Tx, x) = 0. \tag{6.6.1}$$

注记 6.6.1 值得注意,此引理在实内积空间中不成立.例如在 $\mathbb{R}^2$ 中,非零矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的有界线性算子,且满足:对任意 $x = (\xi_1, \xi_2)^T \in \mathbb{R}^2$,皆有 $(Ax, x) = 0$.

定理 6.6.1 设 $\mathcal{H}$ 是复Hilbert空间, $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 是有界线性算子, 则 T 是自伴算子的充分必要条件是: 对一切 $x \in \mathcal{H}$, (Tx, x) 都是实数.

定理 6.6.2　设 T 和 S 是Hilbert空间 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子, 则

(1) 对任意的 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha T+\beta S$ 是自伴算子;

(2) TS 是自伴算子的充分必要条件是 $TS=ST$.

推论 6.6.1　设 $p_n(x)$ 是实系数多项式, T 是Hilbert空间 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子,则 $p_n(T)$ 也是自伴算子.

定理 6.6.3　设 $\{T_n\}$ 是Hilbert空间 $\mathcal{H}$ 上的一列自伴算子. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=T$ (强收敛), 则 T 也是 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子.

推论 6.6.2　设 $\mathcal{H}$ 是Hilbert空间上的自伴算子,则 $\mathcal{H}$ 上的所有自伴算子组成的集合, 按照算子的加法与数乘构成 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的一个实闭子空间.

下面定理给出自伴算子对空间的分解性质.

定理 6.6.4　设 $\mathcal{H}$ 是Hilbert空间, T 是 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子, 则 $\mathcal{N}(T)=\mathcal{R}(T)^{\perp}$, 从而

$$\mathcal{H}=\mathcal{N}(T)\dotplus\overline{\mathcal{R}(T)}.$$

定义 6.6.2　设 $\mathcal{H}$ 是Hilbert 空间, 如果 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足下面条件

$$(Tx,x)\geq 0,\quad \forall x\in\mathcal{H} \tag{6.6.2}$$

称 T 是非负算子.如果仅当 $x=\theta$ 时,等式成立,则称 T 为正算子(positive operator).

如果存在正常数 $\alpha>0$ 使得

$$(Tx,x)\geq\alpha\|x\|^2,\quad \forall x\in\mathcal{H} \tag{6.6.3}$$

则称 T 为正定算子(positive definite operator).

在不太严格的情况下,非负算子和正算子统称正算子. 容易证明:对任意的 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, T^*T 和 TT^* 是非负算子。

定理 6.6.5　设 T 和 S 是复Hilbert空间 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子,则

(1) 如果 T 是自伴的,则 S^*TS 也是自伴算子; 若 T 是正的,则 S^*TS 也是正的;

(2) 如果 S 的值域在 $\mathcal{H}$ 中稠密,并且 S^*TS 也是自伴算子,则 T 是自伴的; 如果 S^*TS 是正的,则 T 也是正算子.

推论 6.6.3　如果 T_1 和 T_2 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的有界自伴线性算子, T_2 是正算子, T_1 与 T_2 可交换,则 $T_1^2T_2$ 是正算子.

定义 6.6.3　设 $\mathcal{H}$ 是Hilbert 空间, $T,S\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, 如果 $T-S$ 是非负算子, 即

$$(Tx,x)\geq(Sx,x),\quad \forall x\in\mathcal{H}$$

称 T 不小于 S ,记为 $S\leq T$.

如果 $T-S$ 是正定算子, 则称 T 大于 S (或者 S 小于 T),记为 $S<T$.

在算子空间 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 引入的" $\leq$ "偏序关系, $(\mathcal{B}(\mathcal{H}),\leq)$ 成为偏序空间.

下面定理给出偏序空间 $(\mathcal{B}(\mathcal{H}),\leq)$ 中的一些性质和结论.

定理 6.6.6　设 $\mathcal{H}$ 是一个复 Hilbert 空间, $T,S,T_n,S_n\in\mathcal{B}(\mathcal{H}),n\in\mathbb{N}$, 则

(1) 若 $T\leq T_1,T_1\leq T_2$, 则有 $T\leq T_2$;

(2) 若 $T\leq S,S\leq T$, 则有 $T=S$;

(3) 若 $T_1\leq S_1,T_2\leq S_2$, 则有 $T_1+T_2\leq S_1+S_2$;

(4) 若 $T\leq S,\alpha>0$, 则有 $\alpha T\leq\alpha S$;

(5) 若 $T_n\leq S_n,n\in\mathbb{N}$, 且极限 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 在强收敛意义下存在. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n\leq\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

下面定理给出单调有界的收敛性.

定理 6.6.7　设 $\mathcal{H}$ 是一个复Hilbert空间.若 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的单调增加算子列,且以 S 为上界,即

$$T_1\leq T_2\leq\cdots\leq T_n\leq\cdots\leq S,$$

则 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 强收敛于某个算子 A, 而且 $T_1\leq A\leq S$. 若 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调减少算子点列,且以 S 为下界, 则 $\{T_n\}$ 强收敛于某个算子 A ,而且 $T_1\geq A\geq S$.

下面定理给出正算子的平方根的存在性.

定理 6.6.8　设 $\mathcal{H}$ 是复Hilbert空间. 如果 T 是 $\mathcal{H}$ 上的正算子,则存在唯一的正算子 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 使得 $A^2=T$ (A 称为 T 的正平方根). 特别地,若 $U\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 与 T 可换,则 U 也与 A 可换.

若算子 T 还是紧算子,我们有下面的结果.

推论 6.6.4　设 $\mathcal{H}$ 是复Hilbert空间. 若 T 是 $\mathcal{H}$ 上的正紧算子,则存在唯一的正紧算子 A ,使得 $A^2=T$.

下面定理给出正算子乘积是正算子的条件.

定理 6.6.9　如果 T 和 S 是Hilbert空间 $\mathcal{H}$ 上的正算子,且可交换,则 TS,ST 也是正算子.

定义 6.6.4　设 $\mathcal{H}$ 是Hilbert 空间, M 是 $\mathcal{H}$ 中的闭子空间, 对每个 $x\in\mathcal{H}$, 存在唯一的 $x_0\in M$, $x_1\in M^{\perp}$,使得 $x=x_0+x_1$, 定义算子 $P:\mathcal{H}\to M$,

$$Px=x_0,\quad x\in\mathcal{H}\tag{6.6.4}$$

称 P 为由 $\mathcal{H}$ 到 M 的正交投影算子(orthogonal projection),简称投影算子.

定理 6.6.10　设 $\mathcal{H}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的Hilbert 空间, M 是 $\mathcal{H}$ 中的闭子空间, P 是 $\mathcal{H}$ 到 M 的投影算子. 则 P 是 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子,且 $P^2=P$, $\|P\|=1$.

定理 6.6.11　设 $\mathcal{H}$ 是Hilbert 空间, P 是 $\mathcal{H}$ 上的线性算子,且 $P^2=P$, $\|P\|=1$, 则 P 是 $\mathcal{H}$ 到某个闭子空间 M 上的投影算子.

下面定理给出Hilbert 空间中投影算子的另一种表现形式.

定理 6.6.12　设 $\mathcal{H}$ 是Hilbert空间, P 是 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子,且 $P^2 = P$,则 P 是 $\mathcal{H}$ 到某个闭子空 M 上的投影算子.

定理 6.6.13　设 T 和 S 是Hilbert空间 $\mathcal{H}$ 上的酉算子, 则

(1)　T 保持范数,即对每个 $x \in \mathcal{H}$ 都有 $\|Tx\| = \|x\|$;

(2)　当 $\mathcal{H} \neq \{\theta\}$ 时, $\|T\| = 1$;

(3)　T^{-1} 是酉算子;

(4)　TS 是酉算子.

定理 6.6.14　设 $\{T_n\}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的一列酉算子. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$, 则 T 也是 $\mathcal{H}$ 上的酉算子.

酉算子保持范数,但是保持范数的有界线性算子不一定是酉算子.

定理 6.6.15　设 $\mathcal{H}$ 是复Hilbert空间, $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 是有界线性算子, 则 T 是酉算子的充分必要条件是 T 是满射且保持范数.

注记 6.6.2　算子 T 为酉算子还有下面的等价陈述.

设 $\mathcal{H}$ 是复Hilbert空间, $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 是有界线性算子. 则 T 是酉算子的充分必要条件是: $\|Tx\| = \|x\|$, $\|T^*x\| = \|x\|, \forall x \in \mathcal{H}$.

设 $\mathbb{U}(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 上所有酉算子组成的集合, 由上面讨论可以知道: $\mathbb{U}(\mathcal{H})$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的闭集,且为一个乘法群.

定理 6.6.16　设 $\mathcal{H}$ 是复Hilbert空间, T 是 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子, 则 T 是正规算子的充要条件是: $\|T^*x\| = \|Tx\|, \forall x \in \mathcal{H}$.

定理 6.6.17　设 $\mathcal{H}$ 是Hilbert空间, T 是 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子. 则下面陈述成立:

1) 算子 T 的范数为 $\|T\| = \sqrt{r(T^*T)}$.

2) 当 T 是 $\mathcal{H}$ 上的正规算子时, $\|T^2\| = \|T^*T\|$. 从而 算子 T 的谱半径 $r(T) = \|T\|$.

§6.6.2 典型例题

正规算子, 自伴算子, 正算子都是在内积意义下具有特殊性质的算子. 利用它们具有有特殊性质,在必要时可以用来改变范数或内积.

例 6.6.1　设 $\mathcal{H}$ 是Hilbert 空间, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是正定算子,定义

$$(x, y)_A = (Ax, y), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

则 $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot)_A)$ 是Hilbert空间.

证明 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是正定算子, 即存在 $\alpha > 0$ 使对任意的 $x \in \mathcal{H}$,

$$(Ax, x) \geq \alpha\|x\|^2,$$

由自伴算子的性质, $\mathcal{H} = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A)$, 上式表明 $\mathcal{R}(A) = \mathcal{H}$. 逆算子定理表明 $A^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,令 $y = Ax$,于是 $x = A^{-1}y$,

$$(Ax, x) = (y, A^{-1}y) \geq \alpha \|A^{-1}y\|^2$$

所以 $\|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{\alpha}\|y\|$.

在 $\mathcal{H}$ 上定义新的数量积

$$(x, y)_A = (Ax, y), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

直接验证 $(x, y)_A$ 满足内积公理,从而 $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot)_A)$ 是内积空间. 注意到关系式

$$\alpha\|x\|^2 \leq (Ax, x) = \|x\|_A^2 \leq \|A\|\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

即两个范数等价,所以 $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot)_A)$ 是Hilbert空间. □

上面的内积也可写成

$$(x, y)_A = (A^{\frac{1}{2}}x, A^{\frac{1}{2}}y) = (Ax, y).$$

利用Cauchy-Schwartz不等式得到

$$|(Ax, y)|^2 \leq (Ax, x)(Ay, y).$$

例 6.6.2 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开区域,具有光滑的边界. 设 $A(x) = (a_{ij}(x))_{n\times n}$ 是 $\overline{\Omega}$ 定义的连续函数矩阵, 满足椭圆性条件,即存在 $\beta > 0$ 使得对任意的向量 $\eta \in \mathbb{R}^n$,

$$\eta^T A(x)\eta \geq \beta\|\eta\|^2, \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

证明,对任意的 $f \in L^2(\omega)$, 在 $H_0^1(\Omega)$ 中微分方程

$$\begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(A(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = f(x), \quad x \in (\Omega) \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

在 $H_0^1(\Omega)$ 中定义内积

$$(u, v)_A = \int_\Omega (A(x)\nabla u(x), \nabla v(x))_{\mathbb{R}^n} dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

则内积等价于

$$(u, v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

应用Riesz表示定理,可得方程解的存在性.

§6.6.3 练习题二十五解答

1. 若 S 和 T 是 Hilbert空间 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子,则对于任意的实数 α 和 β， $\alpha S+\beta T$ 也是 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子.

证明　因为对于任意的 $x,y\in\mathcal{H}$,及任意的 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}((\alpha S+\beta T)x,y) &= (\alpha Sx,y)+(\beta Tx,y)=(x,\alpha S^{*}y)+(x,\beta T^{*}y)\\ &= (x,\alpha Sy)+(x,\beta Ty)=(x,(\alpha S+\beta T)y),\end{aligned}$$

从而可得 $\alpha S+\beta T$ 是 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子. □

此题采用共轭运算 $(\alpha T+\beta S)^{*}=\overline{\alpha}T^{*}+\overline{\beta}S^{*}=\alpha T+\beta S$ *证明更简单*

2. 设 $\mathcal{H}$ 是复Hilbert空间, $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 是有界线性算子.则存在自伴算子 T_1 和 T_2 使得 $T=T_1+iT_2$,且这种表示是唯一的.

证明　令

$$T_1=\frac{1}{2}(T+T^{*}),\quad T_2=\frac{1}{2i}(T-T^{*}).$$

(1) T_1 和 T_2 是自伴算子且 $T=T_1+iT_2,\ T^{*}=T_1-iT_2$.

对于任意的 $x,y\in\mathcal{H}$, 我们有

$$\begin{aligned}(T_1x,y) &= (\frac{1}{2}(T+T^{*})x,y)=(\frac{1}{2}Tx,y)+(\frac{1}{2}T^{*}x,y)=(x,\frac{1}{2}T^{*}y)+(x,\frac{1}{2}T^{**}y)\\ &= (x,\frac{1}{2}T^{*}y)+(x,\frac{1}{2}Ty)=(x,\frac{1}{2}T^{*}y+\frac{1}{2}Ty)=(x,\frac{1}{2}(T+T^{*})y)\end{aligned}$$

从而 T_1 是空间 $\mathcal{H}$ 的自伴算子. 同理可证明 T_2 也是 $\mathcal{H}$ 的自伴算子(也可以由定理5.3直接演算得到). 另外, 直接求解方程组可得 $T=T_1+iT_2,\ T^{*}=T_1-iT_2$. .

(2) 唯一性. 即若有自伴算子 S_1,S_2 , 使得 $T_1+iT_2=S_1+iS_2$, 则必有 $T_1=S_1,T_2=S_2$.

设 $\forall x,y\in\mathcal{H}$, 我们有

$$(((T_1+iT_2)-(S_1+iS_2))x,y)=((T_1-S_1)x,y)+i((T_2-S_2)x,y)=0,$$

由于 $T_i,S_i\ i=1,2$ 均是自伴算子,从而 $T_i-S_i,\ i=1,2$ 均为自伴算子. 由自伴算子的性质可知 $((T_1-S_1)x,y)$ 和 $((T_2-S_2)x,y)$ 均为实数. 所以

$$((T_1-S_1)x,y)=0,\quad ((T_2-S_2)x,y)=0,\quad \forall x,y\in\mathcal{H}.$$

令 $y=x$, 由 引理5.5可知 $T_i-S_i=0,\ i=1,2$. 证明完毕. □

3. 设 $\mathcal{H}$ 是复Hilbert空间, $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 是有界线性算子, 证明 $T=-T^{*}$ 的充分必要条件是, 对一切 $x\in\mathcal{H}$ 有 $\Re(Tx,x)=0$.

证明 ”$\Rightarrow$ ”: 设 $T=-T^*$, 则对任意 $x\in\mathcal{H}$, 有 $(Tx,x)=(x,T^*x)=(x,-Tx)$, 从而

$$(Tx,x)+(x,Tx)=(Tx,x)+\overline{(Tx,x)}=2\Re(Tx,x)=0,$$

所以 $\Re(Tx,x)=0$.

”$\Leftarrow$ ”: 假定对任意的 $x\in\mathcal{H}$ 都有 $\Re(Tx,x)=0$, 那么

$$(Tx,x)+(x,Tx)=(Tx,x)+\overline{(Tx,x)}=0,$$

而 $(Tx,x)=(x,T^*x)$, 所以 $(x,T^*x)=-(x,Tx)$, 从而

$$(x,(T^*+T)x)=\overline{((T^*+T)x,x)}=0,\quad \forall x\in\mathcal{H}$$

这时利用引理5.5可得 $(T^*+T)x=0$, 由 x 的任意性可知 $T=-T^*$. □

4. 设 $\mathbb{X}$ 是内积空间, P 是 $\mathbb{X}$ 上的正定算子算子, 在 $\mathbb{X}$ 上定义二元泛函

$$(x,y)_p=(Px,y),\quad \forall x,y\in\mathbb{X}.$$

证明: $(x,y)_p$ 是 $\mathbb{X}$ 上的内积,且是等价内积。

证明 由于 P 是正定算子,则存在 $\alpha>0$ 使得 $(Px,x)\geq\alpha\|x\|^2,\forall x\in\mathbb{X}$.

在 $\mathbb{X}$ 上定义二元泛函

$$(x,y)_p=(Px,y),\quad \forall x,y\in\mathbb{X}.$$

我们验证 $(x,y)_p$ 满足内积公理

1) 正定性: $(x,x)_p\geq 0,\forall x\in\mathbb{X}$, 若 $(x,x)_p=0$,由 P 的正定性得 $x=\theta$;

2) 关于第一变元的线性性:

$$(\alpha x_1+\beta x_2,y)_p=(P(\alpha x_1+\beta x_2),y)=\alpha(P,x_1,y)+\beta(Px_2,y)=\alpha(x,y)_p+\beta(x_2,y)_p;$$

3) 对称性:

$$(x,y)_p=(Px,y)=\overline{(y,Px)}=\overline{(Py,x)}=\overline{(y,x)}_p.$$

因此, $(x,y)_p$ 也是 $\mathbb{X}$ 上的内积.

在此内积下诱导的范数为

$$\|x\|_p=\sqrt{(Px,x)}$$

再利用 P 是有界线性算子及Cauchy-Schwartz不等式

$$(Px,x)\leq\|Px\|\|x)\|\leq\|P\|\|x\|^2$$

所以

$$\sqrt{\alpha}\|x\|\leq\|x\|_p\leq\sqrt{\|P\|}\|x\|$$

即两个范数等价. □

5. 设 T 是 Hilbert空间 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子, 证明 对 $\forall x, y \in \mathcal{H}$,有下面等式

$$(Tx, y) = \frac{1}{4}[(T(x+y),(x+y)) - (T(x-y),(x-y))] + \frac{i}{4}[(T(x+iy),(x+iy)) - (T(x-iy),(x-iy))].$$

6. 设 T 是 Hilbert空间 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子, 证明 $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)$.

证明: 记 $\alpha = \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)|$,由于

$$|(Tx, x)| \leq \|Tx\|\|x\| \leq \|T\|\|x\|^2, \forall x \in \mathcal{H}$$

所以 $\alpha \leq \|T\|$.

另一方面, 对任意的 $x \in \mathcal{H}$,

$$|(Tx, x)| \leq \alpha\|x\|^2.$$

对 $\forall x, y \in \mathcal{H}$,由等式

$$(Tx, y) = \frac{1}{4}[(T(x+y),(x+y)) - (T(x-y),(x-y))] + \frac{i}{4}[(T(x+iy),(x+iy)) - (T(x-iy),(x-iy))]$$

可得

$$\begin{aligned}
|(Tx, y)| &\leq \frac{1}{4}[|(T(x+y),(x+y))| + |(T(x-y),(x-y))| \\
&\quad + \frac{1}{4}[|(T(x+iy),(x+iy))| + |(T(x-iy),(x-iy))|] \\
&\leq \frac{\alpha}{4}[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2] \text{ (利用平行四边形公式)} \\
&\leq \frac{\alpha}{2}[\|x\|^2 + \|y\|^2]
\end{aligned}$$

在上式中用 $\frac{x}{\|x\|}$, $\frac{y}{\|y\|}$ 代替 x, y 得到

$$|(Tx, y)| \leq \alpha\|x\|\|y\|.$$

由此得到 $\|Tx\| \leq \alpha\|x\|$. 所以 $\|T\| \leq \alpha$. 因此, $\|T\| = \alpha$. □

7. 设 $\mathbb{X}$ 是内积空间, P 是 $\mathbb{X}$ 上的正算子, $x(t) \in \mathbb{X}, t \in [a, b]$, 是连续函数,证明

$$\left(P\int_a^b x(t)dt, \int_a^b x(t)dt\right) \leq (b-a)\int_a^b (Px(t), x(t))dt$$

证明 由于 P 是正算子, 则有 $(Px, x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{X}$. 在 $\mathbb{X}$ 上定义二元泛函 (Px, y) , $\forall x, y \in \mathbb{X}$. 则有Cauchy-Schwartz不等式

$$|(Px, y)| \leq \sqrt{(Px, x)}\sqrt{(Py, y)}$$

于是

$$\begin{aligned}
&\left(P\int_a^b x(t)dt, \int_a^b x(s)ds\right) = \int_a^b \int_a^b (Px(t), x(s))dsdt \\
\le\ & \int_a^b \int_a^b |(Px(t), x(s))|dtds \quad \text{应用Cauchy-Schwartz 不等式} \\
\le\ & \int_a^b \int_a^b \sqrt{(P(x(t), x(t))}\sqrt{(Px(s), x(s))}dsdt \\
=\ & \left(\int_a^b \sqrt{(Px(s), x(s))}ds\right)^2 \quad \text{应用积分型 Cauchy-Schwartz 不等式} \\
\le\ & (b-a)\int_a^b (P(x(s), x(s))ds
\end{aligned}$$

所以

$$\left(P\int_a^b x(t)dt, \int_a^b x(s)ds\right) \le (b-a)\int_a^b (Px(t), x(t))dt.$$

§6.7 第二十六讲　双线性泛函

教学目的

本节将研究第一变元是线性的,对第二变元是共轭线性的二元泛函,即双线性泛函。研究Hilbert空间中双线性泛函与Hilbert空间中有界线性算子之间的联系, 建立它们之间的一一对应关系，并由此得到 Lax-Milgram 定理。

本节要点

双线性泛函的表示, Lax-Milgram 定理。

§6.7.1 内容提要

定义 6.7.1　设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间. 若映射 $\varphi:\mathbb{X}\times\mathbb{Y}\to\mathbb{K}$ 满足条件: φ 对第一个变元是线性的, 对第二个变元是共轭线性的,即

$$\begin{aligned}&\varphi(\alpha x+\beta z,y)=\alpha\varphi(x,y)+\beta\varphi(z,y),\quad \forall x,z\in\mathbb{X},\quad \forall y\in\mathbb{Y}\\&\varphi(x,\alpha z+\beta y)=\overline{\alpha}\varphi(x,z)+\overline{\beta}\varphi(x,y),\quad \forall x\in\mathbb{X},\quad \forall y,z\in\mathbb{Y}.\end{aligned}\tag{6.7.1}$$

则 φ 称为 $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ 上的双线性泛函(bilinear functional). 当 $\mathbb{X}=\mathbb{Y}$ 时, 称 φ 为 $\mathbb{X}$ 上的双线性泛函.

从上面的定义看到,在复空间上 $\varphi(x,y)$ 对于第二个变元 y 来说并不是线性的, 而是共轭线性的。

用 $\Psi(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ 表示所有 $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ 上定义的双线性泛函全体组成的集合, 即

$$\Psi(\mathbb{X},\mathbb{Y})=\{\varphi\mid\varphi\text{ 是 }\mathbb{X}\times\mathbb{Y}\text{ 上的双线性泛函}\}.\tag{6.7.2}$$

在 $\Psi(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ 上定义线性运算如下： $\forall\varphi,\psi\in\Psi(\mathbb{X},\mathbb{Y})$

$$\begin{aligned}&(\varphi+\psi)(x,y):=\varphi(x,y)+\psi(x,y),\\&(\alpha\varphi)(x,y):=\alpha\varphi(x,y),\quad\forall\alpha\in\mathbb{K}.\end{aligned}$$

容易验证 $\Psi(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ 是一个线性空间.

定义 6.7.2　设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的内积空间, φ 是 $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ 上的双线性泛函.若存在常数 $c>0$ 使得

$$|\varphi(x,y)|\le c\|x\|\|y\|,\quad\forall x\in\mathbb{X},\forall y\in\mathbb{Y}.\tag{6.7.3}$$

则称双线性泛函 φ 是有界的. 这时 φ 的范数定义为

$$\|\varphi\|=\sup_{x\in\mathbb{X}\backslash\theta,y\in\mathbb{Y}\backslash\theta}\frac{|\varphi(x,y)|}{\|x\|\|y\|}.\tag{6.7.4}$$

类似于有界线性算子,双线性泛函的范数也有下面的等价表示:

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|=1,\|y\|=1} |\varphi(x,y)| = \sup_{\|x\|\le 1,\|y\|\le 1} |\varphi(x,y)|. \tag{6.7.5}$$

从而有

$$|\varphi(x,y)| \le \|\varphi\|\|x\|\|y\|, \quad \forall x \in \mathbb{X}, \forall y \in \mathbb{Y}. \tag{6.7.6}$$

用 $\Psi_b(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ 表示所有 $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ 上定义的有界双线性泛函组成的集合,

$$\Psi_b(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \{\varphi \in \Psi(\mathbb{X},\mathbb{Y}) \,\big|\, |\varphi(x,y)| \le \|\varphi\|\|x\|\|y\|\}. \tag{6.7.7}$$

定理 6.7.1 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的内积空间. $\Psi_b(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ 表示所有 $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ 上定义的有界双线性泛函组成的集合, 双线性泛函 φ 的范数如(6.7.4)定义. 则 $(\Psi_b(\mathbb{X},\mathbb{Y}),\|\cdot\|)$ 是赋范线性空间.

观察下面的事实: $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是内积空间, $S:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ 是有界线性算子. 定义

$$\varphi_s(x,y) = (Sx,y), \quad \forall x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{Y}. \tag{6.7.8}$$

易见 φ_s 是 $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ 上的双线性泛函,且 $|\varphi_s(x,y)| \le \|S\|\|x\|\|y\|$,因此 $\varphi_s \in \Psi_b(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. 称 φ_s 为由算子 S 导出的双线性泛函. 当 φ_s 由算子 S 导出时,总有 $\|\varphi_s\| \le \|S\|$ 成立.

另一方面,

$$\|Sx\|^2 = (Sx,Sx) = \varphi_s(x,Sx) \le \|\varphi_s\|\|x\|\|Sx\|, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

由此可得 $\|S\| \le \|\varphi_s\|$. 因此 $\|\varphi_s\| = \|S\|$.

是否每个 $\varphi \in \Psi_b(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ 都可以由一个有界线性算子导出? 下面的定理回答了这个问题.

定理 6.7.2 (有界双线性泛函的表示) 设 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 是Hilbert空间, $\varphi \in \Psi_b(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$. 则存在唯一的有界线性算子 $S:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$ 使得

$$\varphi(x,y) = (Sx,y), \quad \forall x \in \mathcal{H}_1, \quad \forall y \in \mathcal{H}_2. \tag{6.7.9}$$

并且 $\|\varphi\| = \|S\|$.

推论 6.7.1 设 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 是Hilbert空间, 则 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ 与 $\Psi_b(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ 等距同构, 且等距同构映射由下式给出

$$\mathcal{T}: S \to \varphi_s, \quad \forall S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2). \tag{6.7.10}$$

定理 6.7.3 (广义 Lax-Milgram定理) 设 $\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2$ 是Hilbert空间, $\varphi \in \Psi_b(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$. 若存在 $b>0$ 使得

$$\inf_{\|x\|=1} \sup_{\|y\|\le 1} |\varphi(x,y)| \ge b, \tag{6.7.11}$$

以及

$$\sup_{\|x\|=1} |\varphi(x,y)| > 0, \forall y \in \mathcal{H}_2, y \neq \theta. \tag{6.7.12}$$

则存在唯一的 $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, 使得

$$\varphi(x,y) = (Sx, y), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}, \tag{6.7.13}$$

并且 S 是一个双射, $S^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$.

定理 6.7.4 设 φ 是Hilbert空间 $\mathcal{H}$ 上的有界双线性泛函.若存在 $b > 0$ 使得

$$|\varphi(x,x)| \geq b\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathcal{H}. \tag{6.7.14}$$

则存在唯一的双射 $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 使得

$$\varphi(x,y) = (Sx, y), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}, \tag{6.7.15}$$

并且 $\|S^{-1}\| \leq \frac{1}{b}$.

定理 6.7.5 (Lax-Milgram定理) 设 $\mathcal{H}$ 是Hilbert空间, φ 是 $\mathcal{H}$ 上的有界双线性泛函. 若存在 $b > 0$ 使得

$$|\varphi(x,x)| \geq b\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathcal{H}. \tag{6.7.16}$$

则对 $\mathcal{H}$ 上的任意的有界线性泛函 f ,皆存在唯一的 $y \in \mathcal{H}$ 使得

$$f(x) = \varphi(x,y), \quad \forall x \in \mathcal{H}, \tag{6.7.17}$$

并且 $\|y\| \leq \frac{1}{b}\|f\|$.

注记 6.7.1 Lax-Milgram定理是在双线性泛函 φ 意义下的泛函表示定理. 如果用 J_φ 表示在 φ 意义下 $\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{H}^*$ 的对应关系, $J_\varphi y = f$, 这里 $f(x) = \varphi(x,y)$. Lax-Milgram定理表明 J_φ 是有界可逆的, $J_\varphi^{-1} f = y$. 同样地,在函数空间, 关系 $J_\varphi y = f$ 通常也是一种方程.

§6.7.2 典型例题

有界双线性泛函在内积空间建立起二元泛函与有界线性算子的联系,进一步通过二元泛函建立起与方程之间的联系。在实际问题中通常将问题转化成 双线性泛函的形式, 利用Lax-Milgram定理 得到方程的可解性。

例 6.7.1 考虑变系数常微方程. 给定 $g, \beta \in L^2[0,\ell]$, 求解方程

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[\sigma(x)\frac{du(x)}{dx}(x)] - q(x)u(x) = -g(x)\rho(x), \\ u(0) = 0 \\ \sigma(\ell)\frac{du}{dx}(\ell) = -\int_0^\ell \beta(x)dx. \end{cases} \tag{6.7.18}$$

其中 $\sigma(x)$ 和 $\rho(x)$ 都是正的连续可微函数, $q(x)$ 是非负连续函数.

解 这是一个非齐次方程,同时还有非齐次边界条件。如果 $\sigma(x)$ 和 $q(x)$ 都是常函数, 上面方程很容易求解, 但对变系数方程即难直接确定方程是否有解。为了证明解的存在性,将微分方程转变成变分方程。

用任意的 $\varphi \in H^1[0,\ell]$ 乘以微分方程两端,并在整个区间上积分, 分部积分得到

$$\begin{aligned}&\int_0^\ell [\sigma(x)u'(x)\varphi'(x) + q(x)u(x)\varphi(x)]dx\\ = \;& \varphi(\ell)\int_0^\ell \beta(x)dx - \varphi(0)\sigma(0)u'(0) + \int_0^\ell g(x)\rho(x)\varphi(x)dx\end{aligned}$$

为研究前面导出的变分方程,设空间 $\mathcal{H}$ 为

$$V^1[0,\ell] = \left\{f \in C[0,\ell] \;\middle|\; f' \in L^2[0,\ell], f(0)=0\right\} = \{f \in H^1[0,\ell] \mid f(0)=0\}$$

其上范数定义为

$$\|f\|_{\mathcal{H}} = \left(\int_0^\ell [\sigma(x)|f'(x)|^2 + q(x)|f(x)|^2]dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

则 $\mathcal{H}$ 是一个Hilbert 空间.

对任意的两个函数 $w, z \in H^1[0,\ell]$, 定义双线性泛函 $B(w,z)$ 如下:

$$B(w,z) = \int_0^\ell [\sigma(x)w'(x)\overline{z'(x)} + q(x)w(x)\overline{z(x)}]dx.$$

在 $\mathcal{H}$ 中,双线性泛函满足条件

$$\begin{aligned}|B(w,z)| &\le \left|\int_0^\ell [\sigma(x)w'(x)\overline{z'(x)}dx + q(x)w(x)\overline{z(x)}]dx\right|\\ &\le \left(\int_0^\ell \sigma(x)|w'(x)|^2 + q(x)|w(x)|^2]dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\ell [\sigma(x)|z'(x)|^2 + q(x)|z(x)|^2]dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \|w_{H^1}\|z(x)\|_{H^1}\end{aligned}$$

这表明双线性泛函是有界的; 其次,对任意的 $v \in H^1[0,\ell]$,

$$|B(v,v)| = \int_0^\ell \sigma(x)|v'(x)|^2 + q(x)|v(x)|^2dx = \|v\|_H^2$$

上面等式说明双线性泛函满足Lax-Milgram条件.

最后,令 $\mathcal{H}$ 上的泛函 $F(\varphi)$ 为

$$F(\varphi) = \varphi(\ell)\int_0^\ell \beta(x)dx + \int_0^\ell g(x)\rho(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{H}.$$

明显地, F 是线性泛函,并且有

$$\begin{aligned}|F(\varphi)| &= \left|\int_0^\ell \sigma(x)\varphi'(x)dx\frac{\int_0^\ell \beta(x)dx}{\sigma(x)} + \int_0^\ell q(x)\varphi(x)\frac{g(x)\rho(x)}{q(x)}dx\right|\\ &\le \left(\int_0^\ell \frac{|\int_0^\ell \beta(x)dx|^2}{\sigma(x)}dx + \frac{|g(x)|^2}{q(x)}dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\ell [\sigma(x)|\varphi'(x)|^2d + q(x)|\varphi(x)dx|^2]dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left(\int_0^\ell \frac{|\int_0^\ell \beta(x)dx|^2}{\sigma(x)}dx + \frac{|g(x)|^2}{q(x)}dx\right)^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{\mathcal{H}}\end{aligned}$$

所以 F 是 $\mathcal{H}$ 上的有界线性泛函. 应用Lax-Milgram定理,存在唯一的 $u \in \mathcal{H}$ 使得

$$B(\varphi, u) = F(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}.$$

从而 u 满足微分方程(6.7.18).

注记 6.7.2　尽管上面的例子比较简单,但完全反映了如何应用Lax-Milgram定理解决实际问题的方法。 类比地可讨论变系数偏微分方程的非齐次问题和边界值问题, 但对边界值问题难度要大一些, 需要一些先验的积分不等式估计。

§6.7.3 练习题二十六解答

1. 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的内积空间, $\varphi : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{K}$ 是一个双线性泛函,则下面各条等价

(a)　φ 是连续的;

(b)　φ 在点 (θ, θ) 处连续;

(c)　φ 是有界的.

注意,这里 φ 在点 (x_0, y_0) 连续可定义为:对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,使得当 $\|x-x_0\| < \delta$ 且 $\|y - y_0\| < \delta$ 时, $|\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

证明　$(a) \Rightarrow (b)$. 如果 φ 是连续的，对于任意的点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, 及 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,使得当 $\|x - x_0\| < \delta$ 且 $\|y - y_0\| < \delta$ 时

$$|\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

此时, 令 $(\theta, \theta) = (x_0, y_0)$ 即可得 φ 在 (θ, θ) 处连续;

$(b) \Rightarrow (c)$. 设 φ 在零点 (θ, θ) 连续, 那么由定义可知 对于 $\varepsilon = 1$,存在 $\delta > 0$,使得当 $\|\hat{x}\| < \delta,\ \|\hat{y}\| < \delta$ 时, $|\varphi(\hat{x}, \hat{y}) - \varphi(\theta, \theta)| < 1$. 这时对于 $\forall x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{Y}$, 我们有

$$\|\frac{\delta x}{2\|x\|}\| \le \delta, \quad \|\frac{\delta y}{2\|y\|}\| \le \delta,$$

注意到 $\varphi(\theta, \theta) = 0$, 于是有

$$\left|\varphi(\frac{\delta x}{2\|x\|}, \frac{\delta y}{2\|y\|})\right| < 1$$

从而利用双线性泛函对第一变元的线性及第二变元的共轭线性可知

$$\|\varphi(x, y)\| = \|\frac{2\|x\|}{\delta}\frac{2\|y\|}{\bar{\delta}}|\varphi(\frac{\delta x}{2\|x\|}, \frac{\delta y}{2\|y\|})| < \frac{4\|x\|\|y\|}{|\delta|^2}$$

所以 φ 有界。

$(c) \Rightarrow (a)$. 因为 φ 有界, 由定义可知 $\|\varphi\| \le c, \quad c > 0$. 这时 对于任意的 $x_0 \in \mathbb{X}, y_0 \in$

$\mathbb{Y}$, 由于

$$
\begin{aligned}
|\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0))| &= |\varphi(x,y)-\varphi(x,y_0)+\varphi(x,y_0)-\varphi(x_0,y_0)| \\
&\le |\varphi(x,y)-\varphi(x,y_0)|+|\varphi(x,y_0)-\varphi(x_0,y_0)| \\
&= |\varphi(x,y-y_0)|+|\varphi(x-x_0,y_0)| \\
&\le c\|x\|\|y-y_0\|+c\|y_0\|\|x-x_0\|.
\end{aligned}
$$

若 $\|x-x_0\|\to 0,\ \|y-y_0\|\to 0$, 则有

$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0}|\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)|=0.$$

所以 φ 在 (x_0,y_0) 处连续， 由 $(x_0,y_0)\in\mathbb{X}$ 的任意性， φ 在 $\mathbb{X}$ 上连续. □

2. 设 φ 是线性空间 $\mathbb{X}$ 上的双线性泛函,证明:

(1) 若 $\mathbb{X}$ 是实线性空间,且 φ 是对称的(即 $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$),则对于任意的 $x,y\in\mathbb{X}$

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{4}[\varphi(x+y,x+y)-\varphi(x-y,x-y)].$$

(2) 若 $\mathbb{X}$ 是复线性空间,则

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{4}[\varphi(x+y,x+y)-\varphi(x-y,x-y)+i\varphi(x+iy,x+iy)-i\varphi(x-iy,x-iy)].$$

证明 (1) 若 $\mathbb{X}$ 是实线性空间, 且 φ 是对称的. 因为

$$\varphi(x+y,x+y)=\varphi(x,x)+\varphi(x,y)+\varphi(y,x)+\varphi(y,y)=\varphi(x,x)+2\varphi(x,y)+\varphi(y,y)$$

及

$$\varphi(x-y,x-y)=\varphi(x,x)-2\varphi(x,y)+\varphi(y,y)$$

从而 $\varphi(x+y,x+y)-\varphi(x-y,x-y)=4\varphi(x,y)$. 所以

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{4}[\varphi(x+y,x+y)-\varphi(x-y,x-y)]$$

(2) 若 $\mathbb{X}$ 是复线性空间, 因为

$$
\begin{aligned}
\varphi(x+y,x+y) &= \varphi(x,x)+\varphi(x,y)+\varphi(y,x)+\varphi(y,y), \\
\varphi(x-y,x-y) &= \varphi(x,x)-\varphi(x,y)-\varphi(y,x)+\varphi(y,y), \\
\varphi(x+iy,x+iy) &= \varphi(x,x)-i\varphi(x,y)+i\varphi(y,x)+\varphi(y,y), \\
\varphi(x-iy,x-iy) &= \varphi(x,x)+i\varphi(x,y)-i\varphi(y,x)+\varphi(y,y),
\end{aligned}
$$

从而直接带入计算可得

$$\varphi(x+y,x+y)-\varphi(x-y,x-y)+i\varphi(x+iy,x+iy)-i\varphi(x-iy,x-iy)=4\varphi(x,y)$$

立即可得结果. □

3. 设 $\mathbb{X}$ 是复线性空间, φ 是 $\mathbb{X}$ 上的双线性泛函. 若对于任意的 $x, y \in \mathbb{X}$ 皆有

$$\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)},$$

则 φ 称为 $\mathbb{X}$ 上的 Hermite双线性泛函. 证明: φ 是 $\mathbb{X}$ 上的 Hermite双线性泛函当且仅当对任意的 $x \in \mathbb{X}$, $\varphi(x, x)$ 都是实数.

证明: "$\Rightarrow$": 若 φ 是 $\mathbb{X}$ 上的 Hermite双线性泛函，令 $y = x \in \mathbb{X}$,此时有 $\varphi(x, x) = \overline{\varphi(x, x)}$,从而 $\varphi(x, x)$ 为实数。

"$\Leftarrow$":假如双线性泛函 φ ,对任意的 $x \in \mathbb{X}$, $\varphi(x, x)$ 是实数，那么有

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4}[\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) + i\varphi(x+iy, x+iy) - i\varphi(x-iy, x-iy)].$$

$$\begin{aligned}\varphi(y, x) &= \frac{1}{4}[\varphi(y+x, y+x) - \varphi(y-x, y-x) + i\varphi(y+ix, y+ix) - i\varphi(y-ix, y-ix)]\\ &= \frac{1}{4}[\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) - i\varphi(x-iy, x-iy) + i\varphi(x+iy, x+iy)]\\ &= \overline{\varphi(x, y)}\end{aligned}$$

这里用到 $\varphi(x+y, x+y), \varphi(x-y, x-y), \varphi(x+iy, x+iy), \varphi(x-iy, x-iy)]$ 都是实数。因此 φ 是Hermite双线性泛函. □

4. 设 φ 是内积空间 $\mathbb{X}$ 上的 Hermite双线性泛函, 若存在常数 $c \geq 0$ 使得对任意 $x \in \mathbb{X}$ 有

$$|\varphi(x, x)| \leq c\|x\|^2,$$

则 φ 是有界的,且 $\|\varphi\| \leq c$.

证明: 由于 φ 为双线性泛函,根据第2题有

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4}[\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) + i\varphi(x+iy, x+iy) - i\varphi(x-iy, x-iy)].$$

φ 为Hermite双线性泛函,依第3题，对任意的 $x \in \mathbb{X}$, $\varphi(x, x)$ 是实数.

当 $\varphi(x, y)$ 为实数时，有

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4}[\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y)]$$

于是由假定条件得到

$$|\varphi(x, y)| \leq \frac{c}{4}[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2] = \frac{c}{2}[\|x\|^2 + \|y\|^2]$$

从而有

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|=1\|y\|=1} |\varphi(x, y)| \leq \frac{c}{2}[1^2 + 1^2] = c.$$

得到结论.

若 $\varphi(x,y)$ 为复数时, 令 $\lambda = \frac{\overline{\varphi(x,y)}}{|\varphi(x,y)|}$, 则 $|\lambda| = 1$ ，并且 $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x,y)$ 是实数. 于是有

$$\varphi(\lambda x, y) = \frac{1}{4}[\varphi(\lambda x + y, \lambda x + y) - \varphi(\lambda x - y, \lambda x - y)]$$

由于 $|\lambda| = 1$, 从而

$$|\varphi(x,y)| = |\varphi(\lambda x, y)| \leq \frac{c}{2}(\|\lambda x\|^2 + \|y\|^2) = \frac{c}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

同样得到 $\|\varphi\| \leq c$, 证明完毕. □

第七章 Banach空间有界线性算子谱理论初步

§7.1 第二十七讲 有界线性算子的谱

教学目的:
本节介绍线性算子谱的概念. 主要将 $\mathbb{C}^n$ 矩阵特征值的特性推广到一般的有界线性算子,讨论抽象方程的可解性.
本节要点:
有界线性算子的谱, 谱的特性

§7.1.1 内容提要

定义 7.1.1 设 $\mathbb{C}$ 是复数域, $\mathbb{X}$ 是复Banach空间, $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$. T 的预解集(resolvent set), 记为 $\rho(T)$, 是这样的复数集合:

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - T)^{-1} \text{存在, 且为 } \mathbb{X} \text{ 上处处有定义的有界线性算子}\} \tag{7.1.1}$$

$\mathbb{C}\backslash\rho(T)$ 称为 T 的谱(spectrum), 记为 $\sigma(T)$. 对 $\lambda \in \rho(T)$, 算子 $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$ 称为算子 T 的预解式(resolvent).

由上面的定义可以看到, $\lambda \in \rho(T)$ 就是使得对任意的 $y \in \mathbb{X}$,

$$(\lambda I - T)x = y$$

都唯一可解, 且解 x 连续依赖 y 的点. 这个方程也称为预解方程.

下面的定理给出预解集的性质.

定理 7.1.1 设 $\mathbb{X}$ 是复Banach空间, $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$. 则预解集 $\rho(T)$ 为开集, 从而 $\sigma(T)$ 为闭集.

下面的定理给出算子谱的范围.

定理 7.1.2 设 $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$,则 T 的谱 $\sigma(T)$ 为有界集, 且 $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \le \|T\|\}$.

定义 7.1.2 设 $\mathbb{X}$ 是复Banach空间, $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是开集, $f : \Omega \to \mathbb{X}$ 是抽象值函数. 设 $\lambda_0 \in \Omega$, 如果函数 $f(z)$ 在 λ_0 邻域可以展成幂级数,即

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \lambda_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{X}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{7.1.2}$$

则称 $f(z)$ 在 λ_0 处解析. 如果 $f(z)$ 在 Ω 的每一点解析,则称 $f(z)$ 在 Ω 上解析, 或称 $f(z)$ 为 Ω 上的解析函数.

定理 7.1.3 设 $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, 则预解式 $R(\lambda, T)$ 是 $\rho(T)$ 上的解析函数.

推论 7.1.1 设 $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$,则对任意的 $\lambda, \mu \in \rho(T)$, 有预解等式

$$R(\mu, T) - R(\lambda, T) = (\lambda - \mu)R(\mu, T)R(\lambda, T) = (\lambda - \mu)R(\lambda, T)R(\mu, T). \tag{7.1.3}$$

从而得到预解式的微分表达

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda, T) = -R^2(\lambda, T), \quad \frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda, T) = (-1)^n n! R^{n+1}(\lambda, T). \tag{7.1.4}$$

推论 7.1.2 设 $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$,则 T 的谱 $\sigma(T)$ 不为空集.

定理 7.1.4 (谱半径公式) 设 T 是复Banach空间 $\mathbb{X}$ 上的有界线性算子, 记 $r(T) = \lim\limits_{k\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ (见定理3.2.1), 则有

$$r(T) = \max\{|\lambda| \bigm| \lambda \in \sigma(T)\}. \tag{7.1.5}$$

定理 7.1.5 设 $\mathbb{X}$ 是复Banach空间, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 是 $\mathbb{X}$ 上的两个等价的范数. T 是 $\mathbb{X}$ 上的有界线性算子, 则在等价范数意义下, 算子 T 的谱 $\sigma(T)$ 是不变量.

推论 7.1.3 设 $\mathbb{X}$ 是复Banach空间, T 是 $\mathbb{X}$ 上的有界线性算子。设 $S \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ 是有界可逆的,则 STS^{-1} 与 T 有相同的谱, 从而算子 T 的谱 $\sigma(T)$ 也是相似不变量。

§7.1.2 典型例题

有界线性算子的谱与预解集的并集是整全复平面。$\lambda \in \mathbb{C}$ 是算子 T的预解点，当且仅当, $\lambda I - T$ 是单射, 值域为全空间, $(\lambda I - T)^{-1}$ 是 $\mathbb{X}$ 上的有界线性算子。所有预解点组成预解集, 预解集的补集为算子 T 的谱。有界线性算子的谱是一个有界集, 且含于以谱半径为半径的圆内.

在算子谱的研究中, 主要是研究预解方程 $(\lambda I - T)x = y$的可解性。

例 7.1.1 在连续函数空间 $C[a, b]$ 中, 定义算子

$$Tf(x) = xf(x), \quad \forall f \in C[a, b]. \tag{7.1.6}$$

则 $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \bigm| \lambda \in [a, b]\}$.

对 $\lambda \in \mathbb{C}$, 任意的 $g \in C[a, b]$,考虑预解方程 $(\lambda I - T)f = g$, i.e.,

$$(\lambda - x)f(x) = g(x), \quad x \in [a, b].$$

当 $\lambda \notin [a, b]$ 时, 预解方程有解

$$f(x) = \frac{g(x)}{\lambda - x}, \quad x \in [a, b].$$

当 $\lambda = x_0 \in [a, b]$, 总有等式

$$(\lambda I - T)f(x_0) = (\lambda - x_0)f(x_0) = 0, \quad \forall f \in C[a, b].$$

所以 $\overline{\mathcal{R}(\lambda I - T)} \neq C[a, b]$. 这表明算子 $(\lambda I - T)^{-1}$ 不能定义在全空间 $C[a, b]$. 因此 $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \bigm| \lambda \in [a, b]\}$. □

注记 7.1.1　上面的乘积算子只是一种特殊形式,一般地对 $h(x) \in C[a,b]$, 定义算子 T : $C[a,b] \to C[a,b]$

$$T_h f(x) = h(x)f(x), \quad \forall f \in C[a,b].$$

相应的谱也有类似性质, $\sigma(T_h) = \mathcal{R}(h)$.

§7.1.3 练习题二十七解答

1. 设 $h(x) \in C[a,b]$, 定义算子 $T_h : C[a,b] \to C[a,b]$

$$T_h f(x) = h(x)f(x), \quad \forall f \in C[a,b].$$

证明 $\sigma(T_h) = \mathcal{R}(h)$.

2. 设空间 $C[a,b]$,考虑积分算子

$$Tf(x) = \int_a^x f(s)ds, \quad f \in C[a,b]$$

证明 $r(T) = 0$.

§7.2 第二十八讲 有界线性算子谱的分类

教学目的:
本节讨论有界线性算子谱中点的分类. 通过谱点的分类,表明抽象方程可解性. 进一步讨论有界线性算子特征值对应的线性子空间的性质、特征值的重数以及孤立谱点的特性。
本节要点:
有界线性算子谱的基本分类,谱的特性,特征值的几何重数,代数重数,谱点的重数

§7.2.1 内容提要

定义 7.2.1 设 T 是复Banach空间 $\mathbb{X}$ 上的有界线性算子, $\sigma(T)$ 是 T 的谱。 T 的点谱, 记为 $\sigma_p(T)$, 定义为复数集

$$\sigma_p(T)=\left\{\lambda\in\sigma(T)\,\middle|\,\begin{array}{l}(\lambda I-T)\text{ 不是1–1的映射,}\\ \text{即存在 } x\in\mathbb{X},\ x\neq 0 \text{ 使得 } Tx=\lambda x\end{array}\right\}$$

$\lambda\in\sigma_p(T)$ 称为 T 的特征值(eigenvalue),满足 $Tx=\lambda x$ 的 $x\neq 0$ 称为相应于 λ 的特征向量(eigenvector).

T 的剩余谱,记为 $\sigma_r(T)$, 定义为复数集

$$\sigma_r(T)=\{\lambda\in\sigma(T)\,|\,(\lambda I-T)\text{是1-1的, 但值域 }\mathcal{R}(\lambda I-T)\text{ 在 }\mathbb{X}\text{ 中不稠密}\}.$$

T 的连续谱, 记为 $\sigma_c(T)$, 定义为复数集

$$\sigma_c(T)=\{\lambda\in\sigma(T)\,|\,(\lambda I-T)\text{是1-1的, 值域在 }\mathbb{X}\text{ 中稠密,但 }(\lambda I-T)^{-1}\text{ 不有界}\}.$$

由定义7.2.1可以看到, $\sigma_p(T)$, $\sigma_r(T)$, $\sigma_c(T)$ 是两两不交的集合,且

$$\sigma_p(T)\cup\sigma_r(T)\cup\sigma_c(T)=\sigma(T).$$

注意到对任意的 $\lambda\in\rho(T)$,

$$(\lambda I-T)R(\lambda,T)=R(\lambda,T)(\lambda I-T)=I$$

在Banach对偶意义下,

$$R^*(\lambda,T)(\lambda I^*-T^*)=(\lambda I^*-T^*)R^*(\lambda,T)=I^*.$$

因此,我们有下面的结果.

定理 7.2.1　(伴随算子的谱) 设 $\mathbb{X}$ 是复Banach空间, $\mathbb{X}^*$ 是其对偶空间. 设 $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, T^* 是伴随算子. 则对任意的 $\lambda \in \rho(T)$, 都有 $\lambda \in \rho(T^*)$,并且 $R(\lambda, T^*) = R^*(\lambda, T)$. 因此, $\sigma(T) = \sigma(T^*)$.

注意到算子 T 有界可逆的充要条件,定理的结论是明显的.

在Hilbert 空间,有界线性算子 T 的共轭算子 T^* 是在内积意义下定义的. 由于Hilbert对偶是共轭线性运算,所以在Hilbert 对偶意义下,

$$R^*(\lambda, T)(\bar{\lambda}I^* - T^*) = (\bar{\lambda}I^* - T^*)R^*(\lambda, T) = I^*.$$

因此,我们有下面的结果.

定理 7.2.2　设 $\mathbb{X}$ 是复Hilbert空间,设 T 是 $\mathbb{X}$ 上的有界线性算子, T^* 是其对偶算子. 则对任意的 $\lambda \in \rho(T)$, 都有 $\bar{\lambda} \in \rho(T^*)$,并且 $R(\bar{\lambda}, T^*) = R^*(\lambda, T)$. 因此, $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$.

定理 7.2.3　设 T 是复Banach空间 $\mathbb{X}$ 上的有界线性算子, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{N}((\lambda I - T)^m) = \{x \in \mathbb{X} \mid (\lambda I - T)^m x = \theta\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

是 $\mathbb{X}$ 的闭子空间. $\mathcal{N}(\lambda I - T) \neq \{\theta\}$ 的充要条件是 $\lambda \in \sigma_p(T)$.

定义 7.2.2　设 T 是复Banach空间 $\mathbb{X}$ 上的有界线性算子, $\lambda \in \sigma_p(T)$. $\mathcal{N}(\lambda I - T)$ 称为关于 λ 的特征子空间(几何空间), $x \in \mathcal{N}(\lambda I - T), x \neq \theta$ 称为 T 的相应于 λ 的特征向量。$\mathcal{N}(\lambda I - T)$ 的维数 $\dim[\mathcal{N}(\lambda I - T)]$ 称为 λ 的几何重数, 记为 $m_g(\lambda)$.

定义 7.2.3　设 T 是复Banach空间 $\mathbb{X}$ 上的有界线性算子, $\lambda \in \sigma_p(T)$. $\mathcal{N}((\lambda I - T)^m)$ 称为 T 关于 λ 的 m 阶广义特征子空间(m 阶根子空间). 若存在 $x \in \mathcal{N}((\lambda I - T)^m)$ 使得

$$(\lambda I - T)^{m-1} x \neq \theta, \quad (\lambda I - T)^m x = \theta, \tag{7.2.1}$$

则称 x 为 T 的相应于 λ 的 m 阶广义特征向量(或称为 m 阶根向量).

定义 7.2.4　设 T 是复Banach空间 $\mathbb{X}$ 上的有界线性算子, $\lambda \in \sigma(T)$. T 关于 λ 的广义特征子空间(也称根子空间), 记为 $\mathcal{N}_\lambda(T)$. $\mathcal{N}_\lambda(T)$ 是包含 $\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{N}((\lambda I - T)^n)$ 的最小闭子空间,即:

$$\mathcal{N}_\lambda(T) = \overline{\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{N}((\lambda I - T)^n)}. \tag{7.2.2}$$

如果 $\lambda \in \sigma_p(T)$,存在正整数 k 使得

$$\mathcal{N}((\lambda I - T)^k) = \mathcal{N}((\lambda I - T)^{k+j}), \quad j = 1, 2, \cdots, \tag{7.2.3}$$

则称 λ 有有限指标.满足上等式的最小 k 值,称为 λ 的指标(代数指标,或链长),记为 $k(\lambda)$. 子空间 $\mathcal{N}_\lambda(T)$ 的维数 $\dim[\mathcal{N}_\lambda(T)]$ 称为特征值的代数重数,记为 $m_a(\lambda)$.

如果 $\lambda \in \sigma(T)$ 为 T 的特征值, 总有 $\mathcal{N}(\lambda I - T) \subset \mathcal{N}_\lambda(T)$, 从而 λ 的几何重数小于或等于代数重数 $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$. 设 λ 的指标(或链长) $k(\lambda) < \infty$,则

$$\mathcal{N}_\lambda(T) = \bigcup_{k=1}^{k(\lambda)} \mathcal{N}(\lambda I - T)^k) = \mathcal{N}((\lambda I - T)^{k(\lambda)}).$$

对任意的 $x \in \mathcal{N}_\lambda(T)$，$(\lambda I - T)^{k(\lambda)-1}x \in \mathcal{N}(\lambda I - T)$. 所以

$$m_g(\lambda) \le m_a(\lambda) \le k(\lambda)m_g(\lambda). \tag{7.2.4}$$

当 λ 的指标(或链长)为 k 时,至少有一个 k 阶广义特征向量.

定义 7.2.5　设 T 是复Banach空间 $\mathbb{X}$ 上的有界线性算子, $\lambda \in \sigma_p(T)$. 如果 $\mathcal{N}(\lambda I - T) = \mathcal{N}_\lambda(T)$, 即 特征值几何重数等 于代数重数 $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$ ($k(\lambda) = 1$),则称特征值 λ 是半简单的; 如果 λ 的代数重数等于1($m_a(\lambda) = 1$),则称 λ 是简单特征值.

当特征值 λ 为半简单时,对应于 λ 的都是特征向量,没有二阶根向量(广义特征向量), 特征子空间中线性无关元的个数恰为它的代数重数. 当 λ 为简单特征值时,它的几何重数等于代数重数且等于1, 对应于 λ 只有一个特征向量,没有二阶根向量(广义特征向量).当 λ 的特征空间是一维时 $(m_g(\lambda) = 1)$, 对应于 λ 也只有一个特征向量,此时 它的代数重数恰好等于它的指标 $(m_a(\lambda) = k(\lambda))$.

定义 7.2.6　设 T 是复Banach空间 $\mathbb{X}$ 上的有界线性算子, $\lambda_0 \in \sigma(T)$. 如果 存在 $r > 0$ 使得 $B(\lambda_0, r) \cap \sigma(T) = \{\lambda_0\}$,则称 λ_0 是 $\sigma(T)$ 的孤立点.

设 $\lambda_0 \in \sigma(T)$ 为孤立点. 记

$$E(\lambda_0, T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon} R(\lambda, T)d\lambda \tag{7.2.5}$$

其中 $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z - \lambda_0| \le \varepsilon\} \cap \sigma(T) = \{\lambda_0\}$. $E(\lambda_0, T)$ 称为对应于 λ_0 的 Riesz 谱投影 (简称 Riesz 投影),子空间 $E(\lambda_0, T)\mathbb{X} = \mathcal{R}(E(\lambda_0, T))$ 的维数称为相应于 λ_0 的维数.

从定义上看,孤立点的维数与特征值的代数重数不同,如果 λ_0 既是孤立点又是特征值,此时 λ_0 代数重数小于或等于它的维数.

定理 7.2.4　设 T 是复Banach 空间 $\mathbb{X}$ 上的有界线性算子, $\lambda_0 \in \sigma(T)$ 是孤立点. 则 $E(\lambda_0, T)$ 是投影算子,即 $E^2(\lambda_0, T) = E(\lambda_0, T)$.

§7.2.2 典型例题

从预解方程看算子的谱点分类具有特殊的意义. 考虑抽象方程

$$(\lambda I - T)x = y, \quad y \in \mathbb{X}.$$

如果 $\lambda \in \rho(T)$, 对任意的 $y \in \mathbb{X}$ 抽象方程唯一可解, $x = R(\lambda, T)y$, 且解连续依赖于 y , 这就是方程的适定性。

如果 $\lambda \in \sigma(T)$,则抽象方程是不适定的.

1) $\lambda \in \sigma_p(T)$: 意味着对 $y \in \mathbb{X}$ 方程可能有解, 但解不唯一;

2) $\lambda \in \sigma_r(T)$: 意味着若方程有解则解是唯一的, 但方程可能无解. 剩余谱表明抽象方程只对某些 $y \in \mathbb{X}$ 方程有解, 但这样的 y 组成的集合很小, 在空间 $\mathbb{X}$ 不稠密;

3) $\lambda \in \sigma_c(T)$: 意味着若方程有解则解是唯一的, 但对某些 $y \in \mathbb{X}$ 方程可能无解. 使得抽象方程唯一可解 $y \in \mathbb{X}$ 组成的集合在空间 $\mathbb{X}$ 稠密, 但解 x 并不连续依 y ,即 $(\lambda I - T)^{-1}$ 可在 $\mathbb{X}$ 的稠密集上定义, 但不是有界线性算子.

例 7.2.1 在空间 ℓ^2 ,定义算子(称为左移算子)

$$Lx = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}e_n, \quad \forall x = (a_n) \in \ell^2, \tag{7.2.6}$$

则 $\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,\big|\, |\lambda| \le 1\}$.

对 $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < 1$, 元

$$x_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} e_n \in \ell^2.$$

且有

$$Lx_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n e_n = \lambda x_\lambda.$$

所以 $\sigma_p(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,\big|\, |\lambda| < 1\}$. 而有界线性算子的谱为闭集, 所以 $\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,\big|\, |\lambda| \le 1\}$.

为表明边界 $|\lambda| = 1$ 上点的谱性质, 设

$$\mathcal{F} = \left\{ y = \sum_{k=1}^{m} b_k e_k, \,\Bigg|\, b_k \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N} \right\}$$

线性子空间 $\mathcal{F}$ 在 ℓ^2 中稠密. 设 $y = (b_n) \in \mathcal{F}$, 对 $|\lambda| = 1$,考虑方程 $(\lambda I - L)x = y$, i.e.,

$$(\lambda I - L)x = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n - a_{n+1}) e_n = \sum_{k=1}^{m} b_k e_k.$$

它等价于方程

$$\begin{cases} \lambda a_k - a_{k+1} = b_k, & 1 \le k \le m, \\ \lambda a_k - a_{k+1} = 0, & k > m. \end{cases}$$

于是

$$a_{k+1} = \lambda a_k - b_k, \quad 1 \le k \le m.$$

设 $a_1 = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda^{-k} b_k$, 利用上面的递推关系可以得到

$$\begin{aligned} a_2 &= \lambda a_1 - b_1 \\ a_3 &= \lambda(a_2) - b_2 = \lambda^2 a_1 - \lambda b_1 - b_2 \\ &\cdots\cdots \\ a_{k+1} &= \lambda^k a_1 - \lambda^{k-1} b_1 - \lambda^{k-2} b_2 - \cdots - \lambda b_{k-1} - b_k = \lambda^k a_1 - \sum_{j=1}^{k} \lambda^{k-j} b_j, \ k \le m-1. \\ a_{m+1} &= \lambda a_m = \lambda^m a_1 - \sum_{j=1}^{m} \lambda^{m-1} b_j = \lambda^m \left[a_1 - \sum_{j=1}^{m} \lambda^{-j} b_j \right] = 0 \end{aligned}$$

当 $k > m$ 时, $a_k = 0$. 这表明对任意的 $y \in \mathcal{F}$, 方程都有解, 即有 $\mathcal{R}(\lambda I - L) \supset \mathcal{F}$. 因此 $\overline{\mathcal{R}(\lambda I - L)} = \ell^2$. 这表明 $\sigma_c(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,\big|\, |\lambda| = 1\}$. □

例 7.2.2　在 ℓ^2 中定义算子(称为右移算子)

$$Sx = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}e_n, \quad \forall x = (a_n) \in \ell^2, \quad a_{n-1} = 0, \quad n-1 < 0. \tag{7.2.7}$$

则 $\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \le 1\}$.

对 $\forall\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathcal{N}(\lambda I - S) = \{\theta\}$, 即算子无本征值. $Sx = (0, a_1, a_2, \cdots), \forall x \in \ell^2$, $\mathcal{R}(S)$ 是闭的与全空间 ℓ^2 相差一维, 所以 $0 \in \sigma_r(S)$. 进一步, 对 $|\lambda| < 1$,

$$x_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} e_n \in \ell^2.$$

$$\langle(\lambda I - S)x, x_\lambda\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n - a_{n-1})\lambda^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}[\lambda^n a_n - \lambda^{n-1}a_{n-1}] = 0, \quad \forall x \in \ell^2.$$

即 $\mathcal{R}(\lambda I - S) \perp x_\lambda$, 所以 $\mathcal{R}(\lambda I - S) \ne \ell^2$. 故有 $\sigma_r(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}$. 利用算子谱为闭集得到 $\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \le 1\}$. □

下面的例子表明 λ_0 代数重数与 λ_0 维数之间的区别.

例 7.2.3　在空间 $C[a,b]$ 中,考虑有界线性算子 T :

$$Tf(x) = \int_a^x f(s)ds - (x-a)f(a), \quad \forall f \in C[a,b].$$

算子 T 有唯一的谱点 $\lambda = 0$. 0 是特征值,它的代数重数为1,而其维数为无穷维.

证明　设 $\lambda \ne 0$, 任意给定 $g \in C[a,b]$, 考虑预解方程 $(\lambda I - T)f = g$, 即

$$\lambda f(x) - \int_a^x f(s)ds + (x-a)f(a) = g(x).$$

由上式取 $x = a$ 得到 $\lambda f(a) = g(a)$, 所以上式可改写成

$$\lambda f(x) - \int_a^x f(s)ds = g(x) - \frac{(x-a)}{\lambda}g(a).$$

令 $F(x) = \int_a^x f(s)ds$, 则有 $F(a) = 0$,

$$\lambda F'(x) - F(x) = g(x) - \frac{(x-a)}{\lambda}g(a).$$

解微分方程得到

$$F(x) = \frac{1}{\lambda}\int_a^x e^{\frac{(x-s)}{\lambda}}\left[g(s) - \frac{(s-a)}{\lambda}g(a)\right]ds.$$

所以有

$$f(x) = \frac{1}{\lambda^2}\int_a^x e^{\frac{(x-s)}{\lambda}}\left[g(s) - \frac{(s-a)}{\lambda}g(a)\right]ds + \frac{1}{\lambda}\left[g(x) - \frac{(x-a)}{\lambda}g(a)\right].$$

明显地,由上式确定的函数是连续的. 因此, $\lambda \in \rho(T)$.

当 $\lambda = 0$, 函数 $f(x) = 1$ 满足方程 $Tf(x) = 0$, 所以 $\lambda = 0$ 是特征值. 而方程

$$\int_a^x f(s)ds - (x-a)f(a) = 1$$

无解, 所以 $\lambda = 0$ 是简单本征值. 它的代数重数为 1. 而

$$E(0,T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon} R(\lambda,T)d\lambda = I$$

从而有 $E(0,T)C[a,b] = C[a,b]$, 所以它的维数为无穷. □

§7.2.3 练习题二十八解答

1. 在 $C[a,b]$ 中考虑积分算子

$$Tf(x) = L\int_a^x f(s)ds + m\int_x^b f(s)ds, \quad L \neq m$$

讨论算子 T 的谱.

2. 设 S 是 $\ell^2(\mathbb{N})$ 中的右移算子, L 是左移算子, 讨论算子 $T = S + L$ 谱。

3. 设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间, $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, $r(T)$ 是算子 T 的谱半径. 计算积分

   1) $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r(T)+\varepsilon} R(z,T)dz$;
   2) $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r(T)+\varepsilon} zR(z,T)dz$;

§7.3 第二十九讲　紧线性算子的谱

教学目的：
本节讨论紧线性算子谱. 表明紧算子的谱与矩阵的谱具有一些相同的特性. 紧算子的非零谱点由孤立的有限重特征值组成.
本节要点：
紧算子的谱特性, 孤立有限重特征值

§7.3.1 内容提要

在前面章节讨论了紧线性算子与其伴随算子(共轭算子), 本节讨论这类算子的谱性质。下面将会看到 紧线性算子不仅在性质上是矩阵的推广形式, 在谱特性上也具有类似的性质.

定理 7.3.1　设 $\mathbb{X}$ 是复Banach空间, $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$. 则对每个非零 $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathcal{N}(\lambda I - T)$ 是有限维子空间.

定理 7.3.2　设 $\mathbb{X}$ 是复Banach空间, $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$. 则对非零 $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 是闭子空间.

定理 7.3.3　设 $\mathbb{X}$ 是复Banach空间, $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$, 对每个非零 $\lambda \in \mathbb{C}$, 存在一个正整数 $k(\lambda)$ 使得

$$\mathcal{N}((\lambda I - T)^{k(\lambda)}) = \mathcal{N}((\lambda I - T)^{k(\lambda)+j}), \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{7.3.1}$$

$$\mathcal{R}((\lambda I - T)^{k(\lambda)}) = \mathcal{R}((\lambda I - T)^{k(\lambda)+j}), \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{7.3.2}$$

推论 7.3.1　设 $\mathbb{X}$ 是Banach空间, $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$. $\lambda \in \mathbb{C}$ 非零, $\mathcal{R}(\lambda I - T) = \mathbb{X}$ 当且仅当 $\mathcal{N}(\lambda I - T) = \{\theta\}$.

下面定理给出紧线性算子的谱特征.

定理 7.3.4　设 $\mathbb{X}$ 是无穷维Banach空间, $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$. 则下面结论成立:

1) T 的非零谱点一定是特征值;且零是 T 的谱点,从而 $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$;

2)若 $\lambda_k \in \sigma_p(T)$, $k = 1, 2, \cdots, m$,互不相同, x_k 是相应的特征向量, 则 $\{x_k\}_{k=1}^m$ 是线性无关的;

3) 对任意的 $\varepsilon > 0$, $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \,\big|\, |\lambda| \geq \varepsilon\}$, 只有有限多个点; 从而每个非零特征值 λ 是孤立的谱点;

4) 每个非零谱点 λ 是算子 T 的有限重本征值。

§7.3.2 典型例题

设 $\mathbb{X}$ 是无穷维Banach空间, $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$ 是紧线性算子, T 的谱具有特性:

1) T 的非零谱点一定是特征值, i.e., $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$;

2) 对应不同特征值的特征向量是线性无关的;

3) 对 $\lambda \in \sigma_p(T)$, $\lambda \neq 0$, $\mathcal{N}(\lambda I - T)$是有限维空间.

4) 对 $\lambda \in \sigma_p(T)$, $\lambda \neq 0$, $\mathcal{R}(\lambda I - T)$是闭子空间.

例 7.3.1　设 $k(s)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的以 2π 为周期的连续函数, 定义算子 $K : L^2[0, 2\pi] \to L^2[0, 2\pi]$

$$Kf(x) = \int_0^{2\pi} k(x-y)f(y)dy, \quad \forall f \in L^2[a, b]. \tag{7.3.3}$$

确定算子 K 的谱.

设 $\lambda \in \mathbb{C}$, 考虑特征值问题 $Kf = \lambda f$, 即有方程

$$Kf(x) = \int_0^{2\pi} k(x-y)f(y)dy = \lambda f(x).$$

由于 $k(s)$ 是以 2π 为周期的函数, 所以 $f(x)$ 可视为整个实轴上的以 2π 为周期的函数.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} k(x-y)(f(x)+f(y))dxdy = 2\pi\int_0^{2\pi} k(x-y)f(x)dx + 2\pi\int_0^{2\pi} k(x-y)f(y)dy$$

$L^2[0, 2\pi]$ 在内积

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

定义下是Hilbert 空间, $\{e_n(x) = e^{inx}, n \in \mathbb{Z}\}$ 是 $L^2[0, 2\pi]$ 的一个规范正交基.

对每个 $f \in L^2[0, 2\pi]$, 有Fourier展开

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (f, e_n)e_n(x), \quad \forall f \in L^2[0, 2\pi].$$

于是有

$$\begin{aligned}
Kf(x) &= \int_0^{2\pi} k(x-y)\sum_{n\in\mathbb{Z}}(f, e_n)e_n(y)dy \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(f, e_n)\int_0^{2\pi} k(x-y)e^{iny}dy \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(f, e_n)e^{inx}\int_0^{2\pi} k(x-y)e^{-in(x-y)}dy \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(f, e_n)e^{inx}\int_0^{2\pi} k(s)e^{-ins}ds \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\beta_n(f, e_n)e_n(x).
\end{aligned}$$

其中 $\beta_n = \int\limits_0^{2\pi} k(s)e^{-ins}ds = 2\pi(k, e_n)$. 在上面的运算过程中，我们利用到 $k(s)$ 是以 2π 为周期的函数,并用到周期函数的积分性质

$$\int_x^{x+2\pi} k(s)e^{-ins}ds = \int_0^{2\pi} k(s)e^{-ins}ds, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

利用Fourier级数系数的性质可得: $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |\beta_n|^2 < \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$.

明显地, 当 $f = e_n(x)$ 时, 有 $Kf = \beta_n f$. 所以 $\sigma_p(K) = \{\beta_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

考虑预解方程

$$(\lambda I - K)f = g, \quad g \in L^2[0, 2\pi].$$

上面方程等价于

$$\lambda \sum_{n\in\mathbb{Z}} (f, e_n)e_n - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_n(f, e_n)e_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (g, e_n)e_n.$$

当 $\lambda \neq \beta_n, n \in \mathbb{Z}$ 时, 上面方程有形式解

$$(f, e_n) = \frac{(g, e_n)}{\lambda - \beta_n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

所以当 $\lambda \notin \overline{\{\beta_n, n \in \mathbb{Z}\}}$ 时, 有 $\inf\limits_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda - \beta_n| = \delta > 0$. 于是

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |(f, e_n)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\frac{(g, e_n)}{\lambda - \beta_n}\right|^2 \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |(g, e_n)|^2.$$

即方程 $(\lambda I - K)f = g$ 有解

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(g, e_n)}{\lambda - \beta_n} e_n(x),$$

且有

$$\|(\lambda I - K)^{-1} g\| \leq \frac{1}{\delta}\|g\|, \quad \forall g \in L^2[0, 2\pi].$$

故有 $\lambda \in \rho(K)$. 因此 $\sigma(K) = \{\beta_n; n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$. □

注记 7.3.1　从上面证明可以看到,

$$Kf(x) \quad = \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_n(f, e_n)e_n(x).$$

由此可以证明, K是紧线性算子.

§7.3.3 练习题二十九解答

1. 设 $\mathbb{X}$ 是 Banach空间, $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$, 证明：若 $\mathcal{N}(I - T) = \{0\}$, 则 $\mathcal{R}(I - T) = \mathbb{X}$.

(提示：关键证明 $\mathcal{R}(I - T) = \mathbb{X}$, 利用反证法, 采用定理7.3.3证明中第二步中的方法)。

2. 设 $\mathbb{X}$ 是 Banach 空间, $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$, 证明 $\sigma_p(T) = \sigma_p(T^*)$, 并讨论它们特征向量之间的关系。