Lecture1. 复数

1.复数的加法与乘法. 一个复数表示为$z = a + \mathtt{i}b$, 其中a, b是实数. 所有复数构成的集合记为$\mathbb{C}$. 复数$z = a + \mathtt{i}b$的实部是a, 记为$\mathrm{Re}(z)$, 虚部是b, 记为$\mathrm{Im}(z)$. 加法按下面规则给出

$$(a + \mathtt{i}b) + (c + \mathtt{i}d) = (a + c) + \mathtt{i}(b + d)$$

且乘法按下面规则给出

$$(a + \mathtt{i}b)(c + \mathtt{i}d) = (ac - bd) + \mathtt{i}(ad + bc).$$

特别地, $\mathtt{i}^2 = -1$, 其中$\mathtt{i}$的实部是0虚部是1.

复数$z = a + \mathtt{i}b$的绝对值是$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, 且$|z| = 0$当且仅当$z = 0$. $z = a + \mathtt{i}b$的复共轭是$\bar{z} = a - \mathtt{i}b$. 可以看到

$$|z|^2 = z\bar{z},\ a = \frac{z + \bar{z}}{2},\ b = \frac{z - \bar{z}}{2\mathtt{i}}.$$

两个复数商$\frac{a+\mathtt{i}b}{c+\mathtt{i}d}$ $(c + \mathtt{i}d \neq 0)$的实部和虚部可以通过分子分母同时乘以分母的共轭得到, 即

$$\frac{a + \mathtt{i}b}{c + \mathtt{i}d} = \frac{(a + \mathtt{i}b)(c - \mathtt{i}d)}{(c + \mathtt{i}d)(c - \mathtt{i}d)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \mathtt{i}\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

因为所有复数构成的集合$\mathbb{C}$是一个交换环且每一个非零复数都有一个乘法逆, 所以$\mathbb{C}$构成一个域. 对于任意给定的正整数n, 当n个$\mathbb{C}$构成的乘积空间$\mathbb{C}^n$按分量形式定义向量加法和复数乘法时, $\mathbb{C}^n$构成一个复n维的向量空间. 取定向量$v = (v_1, \cdots, v_n),\ w = (w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{C}^n$, v和w的Hermite 内积$\langle v,\ w\rangle$定义为

$$\langle v,\ w\rangle = \sum_{j=1}^{n} v_j \bar{w}_j.$$

可以看到Hermite内积满足

- $\langle v,\ v\rangle \geq 0$ 且$\langle v,\ v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$;
- $\langle \alpha v + \beta w,\ \zeta\rangle = \alpha\,\langle v,\ \zeta\rangle + \beta\,\langle w,\ \zeta\rangle\,,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$;
- $\langle v,\ w\rangle = \overline{\langle w,\ v\rangle}$.

向量$v=(v_1,\cdots,v_n)$的范数$\| v \|$定义为

$$\| v \| = \langle v,\ v\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{n} |v_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

可以验证范数满足

- $\| v \| \geq 0$ 且$\| v \| = 0 \Leftrightarrow v = 0$;
- $\| \alpha v \| = |\alpha| \| v \|,\ \alpha \in \mathbb{C}$;
- $\| v + w \| \leq \| v \| + \| w \|$,

其中第三个三角不等式将由后面的Cauchy-Schwarz不等式证得.

给定两个非零复数$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, 如下的三角不等式

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

可以通过两边平方展开并利用一个复数的实部不大于它的绝对值的事实得到. 具体如下,

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\
&= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + z_2\bar{z}_2 \\
&= |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 \\
&\leq |z_1|^2 + 2|z_1 z_2| + |z_2|^2 \\
&= (|z_1| + |z_2|)^2,
\end{aligned}$$

其中"$=$"成立$\Leftrightarrow$ $z_1\bar{z}_2 \geq 0$, 即$z_1 = \lambda z_2$ $(\lambda > 0)$. 一般地, 利用归纳法可知: 给定n个非零复数$z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$, 有

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|,$$

其中"$=$"成立$\Leftrightarrow$ $z_j = \lambda_j z_1$ $(\lambda_j > 0)$ for $j = 2, \cdots, n$.

2.复数集的完备性. 给定一个复数列$\{z_1, z_2, \cdots\}$, 若存在某个复数w满足

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - w| = 0,$$

则称该复数列收敛到w, 记为$w = \lim_{n\to\infty} z_n$.
若记$z_n = a_n + \mathtt{i} b_n,\ w = a + \mathtt{i} b$, 则可知,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = w$$

成立等价于

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

成立.

一个复数列$\{z_1, z_2, \cdots\}$若满足

$$|z_n - z_m| \to 0(n, m \to \infty)$$

即给定任意$\epsilon > 0$, 存在整数$N(\epsilon) > 0$使得当$n, m > N(\epsilon)$时$|z_n - z_m| < \epsilon$成立, 则称为复柯西列.
我们知道实数集是完备的：每个实柯西列收敛到一个实数.由于一个复数列是复柯西列当且仅当它的实部和虚部所对应的实数列均是实柯西列, 故每个复柯西列收敛到一个复数. 因此, 复数集是完备的.

3.Cauchy-Schwarz不等式. 给定非零复向量$v = (v_1, \cdots, v_n)$, $w = (w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$|\langle v,\ w\rangle| \leq \| v \| \| w \|,$$

其中等号成立当且仅当向量v, w在$\mathbb{C}^n$中是复线性相关的, 即存在不全为零的复数a, b使得$av + bw = 0$成立.

一种证明方式(代数法)是利用Lagrange恒等式：

$$\left|\sum_{j=1}^{n} v_j \bar{w}_j\right|^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |v_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |w_j|^2\right) - \sum_{1\leq j<k\leq n} |v_j w_k - v_k w_j|^2,$$

该恒等式由下面的直接计算可得,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{n} v_j \bar{w}_j\right|^2 &= \left(\sum_{j=1}^{n} v_j \bar{w}_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \bar{v}_j w_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} v_j \bar{w}_j \bar{v}_j w_j + \sum_{1\leq j<k\leq n} (v_j \bar{w}_j \bar{v}_k w_k + v_k \bar{w}_k \bar{v}_j w_j) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} v_j \bar{v}_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j w_j\right) - \sum_{1\leq j<k\leq n} (v_j \bar{v}_j \bar{w}_k w_k + v_k \bar{v}_k \bar{w}_j w_j) \\
&\quad + \sum_{1\leq j<k\leq n} (v_j \bar{w}_j \bar{v}_k w_k + v_k \bar{w}_k \bar{v}_j w_j) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} v_j \bar{v}_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j w_j\right) - \sum_{1\leq j<k\leq n} |v_j w_k - v_k w_j|^2.
\end{aligned}$$

另一种证明方式(几何法)是利用复向量的Hermite正交投影. 在$\mathbb{C}^n$中, 由于

$$\left\langle v-\frac{\langle v,w\rangle}{\| w \|^2}w,w\right\rangle=0,$$

向量v在w方向的上的Hermite正交投影是$\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}w$. Cauchy-Schwarz不等式由下面可得：

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\|v-\frac{\langle v,w\rangle}{\| w \|^2}w\right\|^2 \\
&= \left\langle v-\frac{\langle v,w\rangle}{\| w \|^2}w, v-\frac{\langle v,w\rangle}{\| w \|^2}w\right\rangle \\
&= \|v\|^2-\frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\|w\|^2}.
\end{aligned}$$

这种几何法可以直接看到等号成立当且仅当$v=\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}w$, 即向量$v,w$是复线性相关的.

利用Cauchy-Schwarz不等式可以得到向量形式的三角不等式

$$\|v+w\|\leq\|v\|+\|w\|,$$

其中$v,w\in\mathbb{C}^n$. 具体如下,

$$\begin{aligned}
\|v+w\|^2 &= \langle v+w,v+w\rangle \\
&= \|v\|^2+2\mathrm{Re}\,\langle v,w\rangle+\|w\|^2 \\
&\leq \|v\|^2+2\,|\langle v,w\rangle|+\|w\|^2 \\
&\leq \|v\|^2+2\|v\|\|w\|+\|w\|^2 \\
&= (\|v\|+\|w\|)^2.
\end{aligned}$$

其中等号成立当且仅当$v=\lambda w(\lambda>0)$.

4.De Moivre公式, 单位根及三角函数的多角公式. 设$z=r\left(\cos\theta+\mathtt{i}\sin\theta\right)$和$w=\rho\left(\cos\varphi+\mathtt{i}\sin\varphi\right)$ 是两个复数的极坐标表示, 其中θ,φ分别是z,w的辐角, 记为$\arg z$, $\arg w$, 则

$$\begin{aligned}
zw &= r\left(\cos\theta+\mathtt{i}\sin\theta\right)\rho\left(\cos\varphi+\mathtt{i}\sin\varphi\right) \\
&= r\rho\left[\left(\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi\right)+\mathtt{i}\left(\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi\right)\right] \\
&= r\rho\left[\cos(\theta+\varphi)+\mathtt{i}\sin(\theta+\varphi)\right],
\end{aligned}$$

这意味着$|zw|=|z|\cdot|w|$, $\arg(zw)=\arg z+\arg w$, **注意**后者是一个集合等式.

De Moivre公式给出了n个相同复数(极坐标形式)的乘积. 设$z=r\left(\cos\theta+\mathtt{i}\sin\theta\right)$, 则

$$z^n=r^n\left(\cos n\theta+\mathtt{i}\sin n\theta\right).$$

从而可以得到$z=r(\cos\theta+\mathtt{i}\sin\theta)$的$n$次方根如下,

$$r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+\mathtt{i}\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right],\ k=0,1,\cdots,n-1.$$

可以看到这n个n次方根有相同模, 且它们的辐角是等间距的. 几何上这n个n次方根是以原点为中心的正n边形的n个顶点. 特别地, 1的n个n次方根之和为零.

利用De Moivre公式及二项式展开可以得到三角函数的多角公式. 取下列公式的实部和虚部

$$\cos n\theta+\mathtt{i}\sin n\theta=(\cos\theta+\mathtt{i}\sin\theta)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}\theta\,\mathtt{i}^k\sin^k\theta,$$

我们得到

$$\cos n\theta=\sum_{0\le j\le\frac{n}{2}}(-1)^j\binom{n}{2j}\cos^{n-2j}\theta\sin^{2j}\theta$$

和

$$\sin n\theta=\sum_{0\le j\le\frac{n-1}{2}}(-1)^j\binom{n}{2j+1}\cos^{n-2j-1}\theta\sin^{2j+1}\theta.$$

5.复解析几何. 复平面上的曲线
圆：$|z-a|=r$;
直线：$z=a+bt$ $(t\in\mathbb{R},b\neq 0)$;
过两点z_1,z_2的直线：$z=(1-t)z_1+tz_2$ $(t\in\mathbb{R})$.

给定两条直线$l:z=a+bt,\ l':z=a'+b't$, 可知
(1) l,l'表示同一条直线$\Leftrightarrow \frac{a'-a}{b},\frac{b'}{b}\in\mathbb{R}$;
(2) l平行于$l'\Leftrightarrow \frac{b'}{b}\in\mathbb{R}$;
(3) l,l'同方向$\Leftrightarrow \frac{b'}{b}\in\mathbb{R}^+$;
(4)l,l'(有方向)之间的夹角为$\arg\frac{b'}{b}$;
(5)l垂直于$l'\Leftrightarrow \frac{b'}{b}$是纯虚数.

复平面上的点集或区域
圆内部：$|z-a|<r$;
直线l上：$\mathrm{Im}\frac{z-a}{b}=0$;
直线l的左半平面：$\mathrm{Im}\frac{z-a}{b}>0$;
直线l的右半平面：$\mathrm{Im}\frac{z-a}{b}<0$.
注意:上面的区域划分与直线l的参数选取无关. 原因如下：设$z=a'+b't$是直线l的另一同方向的参数表示, 则

$$a'=a+b\lambda,\ b'=b\mu,\ \lambda\in\mathbb{R},\ \mu\in\mathbb{R}^+,$$

意味着

$$\frac{z-a'}{b'}=\frac{z-a-b\lambda}{b\mu}=\frac{z-a}{b}\cdot\frac{1}{\mu}-\frac{\lambda}{\mu},$$

可知$\mathrm{Im}\frac{z-a'}{b'}$与$\mathrm{Im}\frac{z-a}{b}$同号.

复平面上一般的直线或圆的方程表示如下：

$$\alpha z\bar{z}+\beta z+\bar{\beta}\bar{z}+\gamma=0,\ \alpha,\gamma\in\mathbb{R},\ \beta\in\mathbb{C},\ \Delta=|\beta|^2-\alpha\gamma>0.$$

一方面,前面刻画的直线或圆的方程一定可以化成该一般方程的形式. 反之,若$\alpha=0$,则方程退化为$\beta z+\bar{\beta}\bar{z}+\gamma=0,\ \beta\in\mathbb{C}\ (\beta\neq 0),\ \gamma\in\mathbb{R}$表示一条直线；若$\alpha\neq 0$,则方程变形为

$$x^2+y^2+2\frac{\mathrm{Re}\beta\cdot x-\mathrm{Im}\beta\cdot y}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}=0,$$

即

$$\left(x+\frac{\mathrm{Re}\beta}{\alpha}\right)^2+\left(y-\frac{\mathrm{Im}\beta}{\alpha}\right)^2-\frac{(\mathrm{Re}\beta)^2+(\mathrm{Im}\beta)^2}{\alpha^2}+\frac{\gamma}{\alpha}=0$$

它表示以点$-\frac{\bar{\beta}}{\alpha}$为圆心, $\frac{\sqrt{\delta}}{|\alpha|}$为半径的圆.

6.球极投影. 符号∞表示无穷远点, 它和有限数的关系如下：
(1)$a+\infty=\infty+a=\infty,\ \frac{a}{\infty}=0\ (a\neq\infty)$;
(2)$b\cdot\infty=\infty\cdot b=\infty,\ \frac{b}{0}=\infty\ (b\neq 0$可取$\infty)$;
(3)$\infty+\infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty$不是well-defined;
(4)∞的实部和虚部不是well-defined, 但是$|\infty|=+\infty$.

考虑一个理想点对应到∞, $\mathbb{C}_\infty=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 称为扩充复平面. **注意：**每条直线都通过∞, 且没有半平面包含∞.

我们把一个2-球S^2放在$\mathbb{R}^3$中使得$(0,0,0)$是它的中心, $(0,0,-1)$是它的南极点S, $(0,0,1)$是它的北极点N, 即

$$S^2=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\right\}.$$

球极投影以北极点N作为光源, 以(x,y)-坐标平面作为目标平面可以表示为

$$x=\frac{x_1}{1-x_3},\ y=\frac{x_2}{1-x_3},$$

其中点(x,y)是S^2上的点(x_1,x_2,x_3)在球极投影下的像. 其逆映射为

$$x_1=\frac{2x}{1+x^2+y^2},x_2=\frac{2y}{1+x^2+y^2},x_3=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}.$$

一种推导方式如下：在$\mathbb{R}^3$中, 过点$(0,0,1)$和点(x_1,x_2,x_3)的直线可以表示为

$$\gamma_1(t) = t(x_1,x_2,x_3) + (1-t)(0,0,1) = (tx_1, tx_2, tx_3 + 1 - t),$$

故$\gamma_1(t)$与(x,y)-平面的交点为$\left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, 0\right)$. 类似地, 过点$(0,0,1)$和点$(x,y,0)$的直线可以表示为

$$\gamma_2(t) = t(x,y,0) + (1-t)(0,0,1) = (tx, ty, 1-t),$$

故$\gamma_2(t)$与S^2的交点为$\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)$.

设$z = x + \mathtt{i}y$, 则球极投影映射及其逆映射分别表示为

$$z = \frac{x_1 + \mathtt{i}x_2}{1 - x_3},$$

及

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}, x_2 = \frac{z - \bar{z}}{\mathtt{i}(1 + |z|^2)}, x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2}.$$

记球极投影映射为f, 则$f(N) = \infty$, f, f^{-1}建立了S^2与$\mathbb{C}_\infty$之间的一一映射, 且f将S^2的下半球面$\{(x_1,x_2,x_3) \in S^2, x_3 < 0\}$映到$\mathbb{C}_\infty$上单位圆盘内部$\{|z| < 1\}$, 将$S^2$的上半球面$\{(x_1,x_2,x_3) \in S^2, x_3 > 0\}$映到$\mathbb{C}_\infty$上单位圆盘外部$\{|z| > 1\}$. 通常称$S^2$为黎曼球面. 更精细地, f将S^2上的圆映成$\mathbb{C}_\infty$上的圆或者直线; 将S^2上过北极点$N(0,0,1)$的圆映成$\mathbb{C}_\infty$上的直线. 具体计算如下：给定S^2上的圆, 它的方程可以表示为

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \cos\theta,\ 0 < \theta \le \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

其中$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$满足$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$. 将球极投影逆映射的表达式代入上述方程可得

$$\alpha_1 \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2} + \alpha_2 \frac{z - \bar{z}}{\mathtt{i}(1 + |z|^2)} + \alpha_3 \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2} = \cos\theta,$$

即

$$(\cos\theta - \alpha_3)|z|^2 + (-\alpha_1 + \mathtt{i}\alpha_2)z + (-\alpha_1 - \mathtt{i}\alpha_2)\bar{z} + \cos\theta + \alpha_3 = 0.$$

可以看到, 若$\cos\theta - \alpha_3 = 0$, 则该方程表示$\mathbb{C}_\infty$上的直线; 若$\cos\theta - \alpha_3 \ne 0$, 由于

$$\Delta = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - (\cos\theta - \alpha_3)(\cos\theta - \alpha_3) = 1 - \cos\theta^2 > 0,$$

故此时该方程表示$\mathbb{C}_\infty$上的圆.

设$z, z' \in \mathbb{C}$, $d(z,z')$表示它们在S^2上对应点(x_1,x_2,x_3), (x_1',x_2',x_3') 间的欧式距离, 则有

$$\begin{aligned}
d^2(z,z') &= (x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2 \\
&= 2-2\left[x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3'\right] \\
&= 2-2\left[\frac{(z+\bar{z})(z'+\bar{z}')}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}-\frac{(z-\bar{z})(z'-\bar{z}')}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}+\frac{(|z|^2-1)(|z'|^2-1)}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}\right] \\
&= \frac{4|z-z'|^2}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)},
\end{aligned}$$

从而有

$$d(z,z')=\frac{2|z-z'|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}}.$$

特别地,

$$d(z,\infty)=\frac{2}{\sqrt{(1+|z|^2)}}.$$

上述公式给出了扩充复平面$\mathbb{C}_\infty$上的一种距离公式.

Lecture2. 复可微与柯西-黎曼方程

1.实变量函数的可微性.

定义1: 考虑单变量实值函数$f(x), x \in (\alpha, \beta)$, 固定点$a \in (\alpha, \beta)$, $f(x)$在$x = a$可微意味着

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L.$$

具体地, 给定任意$\epsilon > 0$, 存在$\delta(\epsilon) > 0$ 使得x满足$0 < |x - a| < \delta(\epsilon)$时,

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - L \right| < \epsilon.$$

换句话说, 给定任意$\epsilon > 0$, 若x是$\delta(\epsilon)$-接近a, 则差商

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

是ϵ-接近L. 另一种描述为, 当x充分接近于a时,差商可以任意接近L. 由于差商在$x = a$时没有定义, 上述定义排除了$x = a$时对不等式的刻画. 这里的极限值L称为$f(x)$在$x = a$的导数, 记为$f'(a)$.

定义2. $f(x)$在$x = a$可微：在$x = a$处, 差一个消失阶> 1的项的意义下, $f(x)$可以由一个度≤ 1的多项式逼近. 即, 存在一个度≤ 1的多项式$A'x + B' = A(x - a) + B$使得

$$f(x) - [A(x - a) + B] = E(x)$$

其中误差项$E(x)$满足

$$\lim_{x \to a} \frac{|E(x)|}{|x - a|} = 0$$

上式即为$E(x)$在$x = a$的消失阶> 1的含义. 之所以这么说是因为$x - a$在$x = a$的消失阶为1, 而上式意味着$E(x)$在$x = a$的消失阶比$x - a$在$x = a$的消失阶高. 特别地, $\lim_{x \to a} E(x) = 0$.

注.定义1与定义2是等价的. 在方程$f(x) - [A(x - a) + B] = E(x)$两边取极限$x \to a$得到$f(a) = B$, 此时方程变为

$$f(x) - [A(x - a) + f(a)] = E(x),$$

即

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - A = \frac{E(x)}{x - a},\ x \neq a.$$

两边取极限$x \to a$得到$A = f'(a)$. 反之, 当

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

时, 在$x=a$处, 差一个消失阶>1的项的意义下, 度≤ 1的多项式$f(a)+f'(a)(x-a)$可以逼近$f(x)$. 注意逼近多项式$f(a)+f'(a)(x-a)$是$f(x)$在$x=a$处的度为1的泰勒多项式.

$f(x)$在$x=a$处可微的这种定义的几何解释为：在$x=a$处, 差一个消失阶>1的项的意义下, 切线$y=f(a)+f'(a)(x-a)$逼近图$y=f(x)$.

2.两个实变量的实值函数的可微性. 上面实可微的定义2的一个优势是可以直接延拓到关于两个实变量(x,y)的实值函数$f(x,y)$在点$(x,y)=(a,b)$的可微性: 在点$(x,y)=(a,b)$处, 差一个消失阶>1的项的意义下, 存在度≤ 1的多项式$A'x+B'y+C'=A(x-a)+B(y-b)+C$逼近$f(x,y)$, 即

$$f(x,y)=A(x-a)+B(y-b)+C+E(x,y),$$

其中

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{E(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0.$$

特别地,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}E(x,y)=0,$$

这意味着$C=f(a,b)$且

$$f(x,y)=f(a,b)+A(x-a)+B(y-b)+E(x,y).$$

在上式中令$y=b$, 得

$$f(x,b)=f(a,b)+A(x-a)+E(x,b),$$

取极限可得

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}-A\right|=\lim_{x\to a}\frac{|E(x,b)|}{|x-a|}=0.$$

从而可知偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$存在且为$A$. 类似地, 偏导数$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$存在且为$B$. 可以看到逼近多项式$A(x-a)+B(y-b)+C$是$f(x,y)$在$(x,y)=(a,b)$处的度为1的泰勒多项式

$$f(a,b)+(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

$f(x,y)$在$(x,y)=(a,b)$处可微的几何解释为：在$(x,y)=(a,b)$处, 差一个消失阶>1的项的意义下, 切平面

$$z=f(a)+(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

逼近图$z=f(x,y)$.

方向导数. 设$x=x(t), y=y(t)$在$t=t_0$可微且$x(t_0)=a, y(t_0)=b$, 则复合函数$t\mapsto f(x(t),y(t))$在$t=t_0$可微, 且由求导的链式法则可得

$$\left(\frac{d}{dt}f(x(t),y(t))\right)_{t=t_0}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y)=(a,b)}x'(t_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y)=(a,b)}y'(t_0).$$

特别地, 对于给定的角θ, $f(x,y)$ 在$(x,y)=(a,b)$沿线

$$(x,y)=(a,b)+t(\cos\theta,\sin\theta)$$

的方向导数为

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y)=(a,b)}\cos\theta+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y)=(a,b)}\sin\theta.$$

3.两个实变量的实值函数的可微性条件比两个偏导数的存在性条件更强. 考虑如下简单的例子

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

固定θ, $f(x,y)$限制在线$t\mapsto(t\cos\theta,t\sin\theta)$上得到关于$t$的一元实函数$g_\theta(t)=f(t\cos\theta,t\sin\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta$ $(t\neq 0)$. 可知, $f(x,y)$ 在$(0,0)$处各方向导数均存在且为0. 当$\theta=\frac{\pi}{4}$时,

$$g_{\frac{\pi}{4}}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin 2\theta=\frac{1}{2}, & t\neq 0\\ 0, & t=0,\end{cases}$$

在$t=0$处不连续. 因此, $f(x,y)$在$(x,y)=(0,0)$处不连续.

4.复变量函数的可微性. 设$w=f(z)$是关于复变量$z=x+\mathtt{i}y$的复值函数. 记$w=u+\mathtt{i}v$. 设$c=a+\mathtt{i}b$. 若差商的极限

$$\lim_{z\to c}\frac{f(z)-f(c)}{z-c}$$

存在, 则称$w=f(z)$在$z=c$处**复可微**(也称为**全纯**或**解析**), 该极限记为$f'(c)$. 也就是说, 给定任意$\epsilon>0$, 存在$\delta(\epsilon)>0$使得当$0<|z-c|<\delta(\epsilon)$时,

$$\left|\frac{f(z)-f(c)}{z-c}-f'(c)\right|<\epsilon.$$

我们写成下面的形式

$$f(z)=f(c)+f'(c)(z-c)+E(z),$$

其中

$$\lim_{z\to c}\frac{|E(z)|}{|z-c|}=0.$$

设$f'(c)=A+\mathtt{i}B,\ E(z)=E_1(x,y)+\mathtt{i}E_2(x,y)$, 则

$$u(x,y)+\mathtt{i}v(x,y)=u(a,b)+\mathtt{i}v(a,b)+(A+\mathtt{i}B)\left[(x-a)+\mathtt{i}(y-b)\right]+E_1(x,y)+\mathtt{i}E_2(x,y).$$

在上述等式两边分别取实部和虚部,得

$$u(x,y)=u(a,b)+A(x-a)-B(y-b)+E_1(x,y)$$

和

$$v(x,y)=v(a,b)+B(x-a)+A(y-b)+E_2(x,y).$$

由于

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{E_j(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0,\ j=1,2$$

所以$u(x,y),v(x,y)$在$(x,y)=(a,b)$是可微的, 且

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,b)=A,\ \frac{\partial u}{\partial y}(a,b)=-B,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)=B,\ \frac{\partial v}{\partial y}(a,b)=A.$$

从而得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial v}{\partial y}(a,b),\ \frac{\partial u}{\partial y}(a,b)=-\frac{\partial v}{\partial x}(a,b).$$

利用上述细节的逆过程, 我们获得下面的定理:

定理(柯西-黎曼方程). 设$w=u+\mathtt{i}v,\ z=x+\mathtt{i}y,\ c=a+\mathtt{i}b$. 设$w=f(z)$是定义在$c$的开邻域$U$上的关于复变量$z$的复值函数. $w=f(z)$在$z=c$复可微当且仅当它的实部$u(x,y)$和虚部$v(x,y)$在$(x,y)=(a,b)$处是实可微的且满足下面的柯西-黎曼方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial v}{\partial y}(a,b),\ \frac{\partial u}{\partial y}(a,b)=-\frac{\partial v}{\partial x}(a,b).$$

在这种情况下,

$$f'(c)=\frac{\partial u}{\partial x}(a,b)+\mathtt{i}\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}.$$

5.推导柯西-黎曼方程的另一种方法. 上面推导柯西-黎曼方程的方法是将函数分解成实部和虚部$w=u+\mathtt{i}v$. 另一种推导柯西-黎曼方程的方法是将自变量分解成实部和虚部$z=x+\mathtt{i}y$. 设$f(z)$在$z=c=a+\mathtt{i}b$是复可微的, 则有

$$\lim_{z\to c}\frac{f(z)-f(c)}{z-c}=f'(c).$$

当我们限制极限在水平线$y=b$上得到

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x+\mathtt{i}b)-f(a+\mathtt{i}b)}{x-a}=f'(c)$$

从而有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c)=f'(c).$$

类似地, 我们限制极限在垂直线$x=a$上得到

$$\lim_{y\to b}\frac{f(a+\mathtt{i}y)-f(a+\mathtt{i}b)}{\mathtt{i}(y-b)}=f'(c)$$

从而有

$$\frac{1}{\mathtt{i}}\frac{\partial f}{\partial y}(c)=f'(c).$$

这两种限制的关键区别在于在后者的分母中有因子$\mathtt{i}$. 因此得到

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c)=\frac{1}{\mathtt{i}}\frac{\partial f}{\partial y}(c)$$

在上式中令$f=u+\mathtt{i}v$并分别取实部和虚部可得柯西-黎曼方程.

柯西-黎曼方程的另一种表示方式是

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{\mathtt{i}}\frac{\partial f}{\partial y}$$

可写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathtt{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)f=0.$$

引入算子

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathtt{i}\frac{\partial}{\partial y}\right),\ \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathtt{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

柯西-黎曼方程可写成

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0.$$

注意. (1)$u(x,y),v(x,y)$偏导数连续且满足柯西-黎曼方程是$f(z)=u+\mathtt{i}v$复可微的充分条件.
(2) $u(x,y),v(x,y)$偏导数存在且满足柯西-黎曼方程不是$f(z)=u+\mathtt{i}v$复可微的充分条件. 考虑下面的例子

$$f(z)=\begin{cases}\frac{xy}{|z|^2},\ z\neq 0\\ 0,\qquad\ z=0.\end{cases}$$

所有四个偏导数存在且满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial v}{\partial y}(0,0)=\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)=0,$$

但是$f(z)$在$z=0$处不连续, 故在$z=0$处不是复可微的.
(3)$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在$z=c$连续, $u(x,y),v(x,y)$在$z=c$偏导存在且满足柯西-黎曼方程也不是$f(z)$在$z=c$复可微的充分条件. 比如,

$$f(z)=\begin{cases}\frac{z^5}{|z|^4}, & z\neq 0\\ 0, & z=0.\end{cases}$$

在$z=0$处连续, 由

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(\mathrm{i}y)-f(0)}{y}=\mathrm{i}$$

知偏导存在且满足柯西-黎曼方程$\frac{\partial f}{\partial x}(0)=\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial f}{\partial y}(0)$. 但是

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{z^4}{|z|^4}=\cos 4\theta+\mathrm{i}\sin 4\theta$$

告诉我们$f(z)$在$z=0$不是复可微的.
(4)Looman-Menchoff 定理: 设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$是区域$D\subset\mathbb{C}$上的连续函数, u,v偏导在D上处处存在且满足柯西-黎曼方程, 则$f(z)$在D上全纯.

6.从复线性变换的角度解释柯西-黎曼方程. $\mathbb{R}^2$上的实线性变换T可以看成一个2×2矩阵

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

当$\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$ $(a+\mathtt{i}b\leftrightarrow(a,b))$时, 映射$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$看成映射$T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$一般不是复线性的. 若$T$满足$T(\mathtt{i}v)=\mathtt{i}T(v)$, 则称$T$是复线性的. 这个条件意味着$T$与$\mathbb{C}$上乘$\mathtt{i}$的映射是可交换的. 设映射$J:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$看成映射$J:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$时表示乘$\mathtt{i}$, i.e., $J(a+\mathtt{i}\mathtt{b})=\mathtt{i}(a+\mathtt{i}\mathtt{b})$, 则矩阵形式为

$$J\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

从而可得T是复线性映射当且仅当$TJ=JT$, i.e.,

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},$$

这意味着

$$a_{11}=a_{22},\ a_{12}=-a_{21}.$$

因此$\mathbb{R}^2$上的一个实线性变换看成$\mathbb{C}$ 上的变换是复线性的当且仅当对应的2×2的实矩阵满足对角线上的元素相等, 反对角线上的元素互为相反数.

一个映射$(x,y)\mapsto(u(x,y),v(x,y))$的雅可比矩阵表示为如下$2\times 2$矩阵

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}.$$

雅可比矩阵表示$\mathbb{C}$上的复线性映射当且仅当u,v满足柯西-黎曼方程

$$u_x=v_y,\ u_y=-v_x.$$

7.全纯函数的基本性质. 设$f(z),g(z)$在区域D内全纯, 则$f(z)\pm g(z)$, $f(z)\cdot g(z)$, $\frac{f(z)}{g(z)}$ $(g(z)\neq 0)$在区域D内全纯, 且满足

$$[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z),$$
$$[f(z)\cdot g(z)]'=f'(z)\cdot g(z)+f(z)\cdot g'(z),$$
$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}.$$

定理: 若$\zeta=f(z)$在区域D内全纯, $g(\zeta)$在区域G内全纯, 且$f(D)\subset G$, 则$\varphi(z)=g[f(z)]$在区域D内全纯, 且$\varphi'(z)=g'[f(z)]\cdot f'(z)$.

Proof. 固定点$z_0\in D$, $\zeta_0=f(z_0)\in G$, 由已知得

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+E_1(z),$$
$$g(\zeta)=g(\zeta_0)+g'(\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)+E_2(\zeta),$$

其中

$$\lim_{z\to z_0}\frac{E_1(z)}{z-z_0}=0,\ \ \lim_{\zeta\to\zeta_0}\frac{E_2(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}=0.$$

从而有

$$\varphi(z)=g[f(z)]=g[f(z_0)]+g'[f(z_0)]\left[f'(z_0)(z-z_0)+E_1(z)\right]+E_2(\zeta)$$

即

$$\varphi(z)=\varphi(z_0)+g'[f(z_0)]f'(z_0)(z-z_0)+g'(\zeta_0)E_1(z)+E_2(\zeta).$$

因

$$\frac{g'(\zeta_0)E_1(z)+E_2(\zeta)}{z-z_0}=g'(\zeta_0)\frac{E_1(z)}{z-z_0}+\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\frac{E_2(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}=0,$$

故$\varphi(z)=g[f(z)]$在区域D内全纯, 且$\varphi'(z)=g'[f(z)]\cdot f'(z)$. □

洛必达法则(复形式): 若$f(z), g(z)$在点z_0全纯, 且$f(z_0)=g(z_0)=0,\ g'(z_0)\neq 0$, 则有

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

8.多项式. 定义在整个复平面$\mathbb{C}$上的全纯函数称为**整函数**. 多项式$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$是整函数, 且$P'(z)=a_1+2a_2z+\cdots+na_nz^{n-1}$. 若$a_n\neq 0$, 则称多项式$P(z)$的度为$n$,记为$\deg(P)=n$. 根据代数学基本定理(后面证明),

$$P(z)=a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n).$$

若$P(z)=(z-\alpha)^mP_m(z)$满足$P_m(\alpha)\neq 0$, 则α称为P的m**阶零点**, 即$P(\alpha)=P'(\alpha)=\cdots=P^{(m-1)}(\alpha)=0,\ P^{(m)}(\alpha)\neq 0$. 特别地, 1阶零点又称为**单零点**.

定理: 若$P(z)$的所有零点在一个半平面里,则$P'(z)$的所有零点在相同的半平面里.

Proof. 设$P(z)=a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$, 则$P'(z)=a_n\sum\limits_{k=1}^{n}(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{k-1})(z-\alpha_{k+1})\cdots(z-\alpha_n)$, 这意味着

$$\frac{P'(z)}{P(z)}=\frac{1}{z-\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{z-\alpha_n}.$$

设半平面$H=\left\{z\in\mathbb{C},\ \mathrm{Im}\frac{z-a}{b}<0\right\}$. 假定$\alpha_k\in H\ (k=1,\cdots,n)$.下面说明若$z\notin H$, 则$z$不是$P'(z)$的零点. 因$z\notin H$,有$\mathrm{Im}\frac{z-a}{b}\geq 0$,从而有

$$\mathrm{Im}\frac{z-\alpha_k}{b}=\mathrm{Im}\frac{z-a+a-\alpha_k}{b}=\mathrm{Im}\frac{z-a}{b}-\mathrm{Im}\frac{\alpha_k-a}{b}>0,$$

意味着$\mathrm{Im}\frac{b}{z-\alpha_k}<0$, 从而有$\mathrm{Im}\frac{bP'(z)}{P(z)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Im}\frac{b}{z-\alpha_k}<0$,故$P'(z)\neq 0$. □

包含$P(z)$零点的最小凸多边形也包含$P'(z)$的零点.

9.有理函数. 考虑$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$,其中多项式$P(z), Q(z)$没有公共零点. $Q(z)$的零点称为$R(z)$的极点, $Q(z)$零点的阶称为$R(z)$极点的阶. $R'(z)=\frac{P'Q-PQ'}{Q^2}$与$R(z)$有相同的极点,每个极点的阶$+1$.

将$R(z)$看成$\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty$的映射,设$R_1(z)=R(1/z)$,则$R_1(0)=R(\infty)$. 若$R_1(0)=0(\infty)$,则$R(z)$在$\infty$的零点(极点)阶定义为$R_1(z)$ 在0的零点(极点)阶. 具体地,设

$$R(z)=\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m},$$

则

$$R_1(z) = z^{m-n}\frac{a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0z^m + b_1z^{m-1} + \cdots + b_m}.$$

若$m > n$, 则0是$R_1(z)$的$m-n$阶零点,即,∞是$R(z)$的$m-n$阶零点; 若$m < n$,则0是$R_1(z)$的$n-m$阶极点, 即,∞是$R(z)$的$n-m$阶极点; 若$m=n$,则$R(\infty) = R_1(0) = \frac{a_n}{b_m} \neq 0, \infty$. 因此在$\mathbb{C}_\infty$上, $R(z)$的零点个数(计重数)$=$ $R(z)$的极点个数(计重数) $= \max(m,n)$,称为$R(z)$的**阶**.

问题：若一个有理函数在单位圆周$|z|=1$上取值是实数,则它的零点和极点怎样分布?

Proof. 在$|z|=1$上, $z=\frac{1}{\bar{z}}$,从而有$R(z) = R(\frac{1}{\bar{z}})$. 因为$R(z)$取值是实的,所以有$R(z) = \overline{R(\frac{1}{\bar{z}})}$, 故$R(z) - \overline{R(\frac{1}{\bar{z}})}$在$|z|=1$上取值为0. 可以断定$R(z) - \overline{R(\frac{1}{\bar{z}})}$在$\mathbb{C}$上恒为0.若不然,则$R(z) - \overline{R(\frac{1}{\bar{z}})}$是一个有限阶的有理函数,从而在$\mathbb{C}$上只有有限个零点, 与$R(z) - \overline{R(\frac{1}{\bar{z}})}$在$|z|=1$上取值为0(有无限个零点)矛盾. 因此有$z$是$R(z)$的零点(极点)当且仅当$\frac{1}{\bar{z}}$是$R(z)$的零点(极点).

注意:z与$\frac{1}{\bar{z}}$在球极投影逆映射下的球面像点分别为$\left(\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}, \frac{z-\bar{z}}{\mathrm{i}(1+|z|^2)}, \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}\right)$和$\left(\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}, \frac{z-\bar{z}}{\mathrm{i}(1+|z|^2)}, \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\right)$, 可以看到这两个点关于赤道($|z|=1$的球面像) 对称,因此通常称$z$与$\frac{1}{\bar{z}}$关于单位圆周$|z|=1$对称. $\square$

Lecture 3: 由幂级数定义的全纯函数及指数、正弦、余弦函数作为整函数

在上一节, 我们定义了复可微函数(或全纯函数). 现在我们想要讨论由幂级数定义的基本的全纯函数. 它们是指数、正弦、余弦函数.首先我们需要讨论幂级数的收敛性及求收敛半径的公式,并证明在收敛开圆盘内,一个幂级数确实定义了一个全纯函数. 然后利用正弦、余弦函数的泰勒展开, 我们介绍欧拉公式及指数函数的定义. 我们将利用积分估计的标准技巧(可用来证明预定初始条件的常微分方程解的唯一性), 证明指数函数的指数规律.

1.基本定义及定理. 考虑复变量复值函数项级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$, 设$S_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n-1} f_k(z)$, 若$\forall \epsilon>0,\ \exists N_\epsilon>0$使得$n\geq N_\epsilon$时, 对任意$z\in E$有

$$|S_n(z)-f(z)|<\epsilon,$$

则称$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$在集合$E\subset\mathbb{C}$上**一致收敛**于$f(z)$. 特别地, 若$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|$在$E$上一致收敛, 则称$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$在$E$上**一致且绝对**收敛.

柯西判别准则：级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$在$E$上一致收敛的充要条件是$\forall \epsilon>0,\ \exists N_\epsilon>0$使得$n\geq N_\epsilon$时, 对任意$z\in E$有

$$|f_{n+1}(z)+\cdots+f_{n+p}(z)|<\epsilon,\ p\in\mathbb{N}.$$

优级数判别法：若存在常数$M>0,\ N>0$使得当$n>N$时, 对任意$z\in E$有

$$|f_n(z)|\leq Ma_n,$$

且$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$收敛, 则$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$在$E$上一致且绝对收敛.

比如, 几何级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$在$\{|z|<1\}$内收敛, 在$\{|z|\leq r<1\}$内一致收敛, 在$\{|z|\geq 1\}$内发散.

2.求收敛半径的Hadarmard公式. 给定幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, 设

$$R=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}}=\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|^{1/n}}$$

(即为幂级数的收敛半径), 则当$|z| < R$时,幂级数收敛; 当$|z| \le R_0 < R$时,幂级数一致且绝对收敛; 当$|z| > R$时,幂级数发散. 特别地, 幂级数在一点z_0的收敛性意味着该幂级数在半径小于$|z_0|$的闭圆盘上的一致绝对收敛性.

Proof. 假设$|z| \le R_0 < R$, 则存在某个$\epsilon > 0$使得$R_0 < R - \epsilon$. 因为

$$R = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|^{1/n}},$$

所以存在某个$N \in \mathbb{N}$使得$n > N$时,

$$R_0 + \epsilon < \frac{1}{|a_n|^{1/n}},$$

这意味着

$$|a_n|(R_0 + \epsilon)^n < 1,$$

从而有

$$|a_n z^n| \le \left(\frac{|z|}{R_0 + \epsilon}\right)^n \le \left(\frac{R_0}{R_0 + \epsilon}\right)^n.$$

由于$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_0}{R_0+\epsilon}\right)^n$ 收敛, 故由优级数判别法知, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$在$|z| \le R_0$上一致绝对收敛.

另一方面, 假设$|z| > R$, 则存在某个$\epsilon > 0$使得$|z| > R + \epsilon$. 因为

$$R = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|^{1/n}},$$

所以存在一个递增的正整数序列n_ν $(\nu \in \mathbb{N})$ 使得

$$R + \epsilon > \frac{1}{|a_{n_\nu}|^{1/n_\nu}} \ (\nu \in \mathbb{N}),$$

特别地,

$$|a_{n_\nu} z^{n_\nu}| > 1 \ (\nu \in \mathbb{N}).$$

因为$\{a_{n_\nu} z^{n_\nu}\}$不趋近于0 $(\nu \to \infty)$,所以幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 不收敛.

最后, 设$|z| \le r < |z_0|$, 考虑

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \le M \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n.$$

□

3.推论. 由幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$逐项求导得到的新的幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$和原幂级数具有相同的收敛半径.

Proof. 因为
$$|na_n|^{\frac{1}{n-1}} = \left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{n-1}} n^{\frac{1}{n-1}}$$
且
$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n-1}} = 1,$$
所以
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{|na_n|^{\frac{1}{n-1}}} = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|^{\frac{1}{n}}}.$$
□

4.一致收敛的函数项级数的逐项可微性. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$是有限闭区间$[a,b]$上的复值函数项级数.
(1)若$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛, 每个$f_n(x)$在$[a,b]$上连续, 则$f(x)$在$[a,b]$上连续且$\int_\xi^\eta f(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_\xi^\eta f_n(x)dx$ $(a \le \xi < \eta \le b)$.
(2)若每个$f_n'(x)$在$[a,b]$上连续, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$在$[a,b]$ 上一致收敛,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在点$\xi \in [a,b]$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$收敛于$f(x)$, 且$f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$.

Proof. 第一个结论利用标准的3ϵ法则. 对于任意给定的$\epsilon > 0$, 存在$N_\epsilon \in \mathbb{N}$仅依赖于$\epsilon$, $\delta_{\epsilon,k} > 0$依赖于ϵ和k, 使得
$$|f(\xi) - f(\eta)| \le \left|f(\xi) - \sum_{k=1}^{n} f_k(\xi)\right| + \sum_{k=1}^{n} |f_k(\xi) - f_k(\eta)| + \left|f(\eta) - \sum_{k=1}^{n} f_k(\eta)\right|$$
with
$$\left|f(\xi) - \sum_{k=1}^{n} f_k(\xi)\right| < \epsilon \text{ for } n \ge N_\epsilon$$
$$|f_k(\xi) - f_k(\eta)| < \epsilon \text{ for } |\xi - \eta| < \delta_{\epsilon,k}$$
$$\left|f(\eta) - \sum_{k=1}^{n} f_k(\eta)\right| < \epsilon \text{ for } n \ge N_\epsilon.$$

结果, 在上述不等式中令$n = N_\epsilon$可得

$$|f(\xi) - f(\eta)| < 3\epsilon$$

for

$$|\xi - \eta| < \min_{1\le k\le N_\epsilon} \delta_{\frac{\epsilon}{N_\epsilon},k}.$$

而且

$$\begin{aligned}\left|\int_\xi^\eta f(x)dx - \sum_{k=1}^n \int_\xi^\eta f_k(x)dx\right| &\le \int_\xi^\eta \left|f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x)\right| dx \\ &< \int_\xi^\eta \epsilon dx \le \epsilon(b-a)\end{aligned}$$

for $n \ge N_\epsilon$ and $a \le \xi < \eta \le b$. 因此有

$$\int_\xi^\eta f(x)dx = \sum_{n=1}^\infty \int_\xi^\eta f_n(x)dx$$

for $a \le \xi < \eta \le b$.

考虑第二个结论. 设$g(x) = \sum\limits_{n=1}^\infty f'_n(x)$, 则有

$$\begin{aligned}\int_\xi^\eta g(x)dx &= \sum_{n=1}^\infty \int_\xi^\eta f'_n(x)dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty (f_n(\eta) - f_n(\xi)) \\ &= \sum_{n=1}^\infty f_n(\eta) - \sum_{n=1}^\infty f_n(\xi) \\ &= f(\eta) - f(\xi)\end{aligned}$$

for $a \le \xi < \eta \le b$. 由于$g(x)$是连续函数, 根据微积分基本定理知, $f(x)$在(a,b)上可导且$f'(x) = g(x)$, 从而有$f'(x) = \sum\limits_{n=1}^\infty f'_n(x)$. □

两个函数乘积或商的可微性法则也适用于复可微. 特别地,

$$(z^n)' = nz^{n-1},\ \frac{\partial}{\partial x} z^n = nz^{n-1},\ \frac{\partial}{\partial y} z^n = \mathtt{i} nz^{n-1}.$$

在收敛圆盘$|z| < R$上,幂级数$\sum\limits_{n=0}^\infty a_n z^n$定义了一个全纯函数. 原因是: 对幂级数关于$x, y$逐项求偏导得到相同收敛半径的幂级数, 因此由幂级数定义的函数在收敛圆盘上具有连续的一阶偏导数且满足柯西-黎曼方程.

5. 指数函数. 利用实三角函数的泰勒展式得

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \ \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

利用收敛的幂级数定义**指数函数**e^z如下：

$$e^z\triangleq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\ z\in\mathbb{C}.$$

对幂级数逐项关于x求偏导可知, $(e^z)'=e^z$. 从正弦、余弦和指数函数的幂级数可知, 当$z=\mathtt{i}\theta$ ($\theta\in\mathbb{R}$)时, 我们有下面的**欧拉公式**

$$e^{\mathtt{i}\theta}=\cos\theta+\mathtt{i}\sin\theta.$$

欧拉公式较重要的特殊情形是

$$e^{\mathtt{i}\pi}=-1,\ e^{\mathtt{i}2\pi}=1.$$

指数函数的**指数规律**如下：

$$e^{z+w}=e^ze^w,\ z,w\in\mathbb{C}.$$

Proof. **法一：** 固定$c\in\mathbb{C}$, 由$(e^z\cdot e^{c-z})'=e^z\cdot e^{c-z}-e^z\cdot e^{c-z}=0$知$e^z\cdot e^{c-z}=\text{constant}=e^c$. 令$c=z+w$, 得证.
法二： 固定$w\in\mathbb{C}$, 考虑整函数$F(z)=e^{z+w}-e^ze^w$,可以看到$F(0)=0$.由全纯函数的链式求导法则知, $F'(z)=F(z)$. 下面证明$F(z)\equiv 0$. 定义集合E如下

$$E=\{z\in\mathbb{C},\ F(z)=0\}.$$

由$0\in E$知$E\neq\emptyset$. 由$F(z)$的连续性知E是$\mathbb{C}$中的闭子集. 下面说明E是$\mathbb{C}$中的开子集.

取$c\in E,\ r\in(0,1/2)$,固定$\theta\in[0,2\pi]$,有

$$\begin{aligned}F(c+re^{\mathtt{i}\theta}) &= \int_{t=0}^{r}\frac{dF(c+te^{\mathtt{i}\theta})}{dt}dt\\ &= \int_{t=0}^{r}F'(c+te^{\mathtt{i}\theta})e^{\mathtt{i}\theta}dt\\ &= \int_{t=0}^{r}F(c+te^{\mathtt{i}\theta})e^{\mathtt{i}\theta}dt\end{aligned}$$

因此,

$$
\begin{aligned}
|F(c+re^{\mathtt{i}\theta})| &\leq \int_{t=0}^{r}\left|F(c+te^{\mathtt{i}\theta})e^{\mathtt{i}\theta}\right|dt \\
&= \int_{t=0}^{r}\left|F(c+te^{\mathtt{i}\theta})\right|dt \\
&\leq r\sup_{0\leq t\leq r}\left|F(c+te^{\mathtt{i}\theta})\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\sup_{0\leq t\leq r}\left|F(c+te^{\mathtt{i}\theta})\right|,
\end{aligned}
$$

从而有

$$\sup_{z\in B(c,1/2)}|F(z)|\leq\frac{1}{2}\sup_{z\in B(c,1/2)}|F(z)|,$$

意味着$F(z)$在$B(c,1/2)$上恒为0. 因此E为开集,又因$\mathbb{C}$是连通集,故$E=\mathbb{C}$. □

注意: 设$u(r)=|F(c+re^{\mathtt{i}\theta})|$, 由

$$u(r)\leq\int_{t=0}^{r}u(t)dt,\ u(0)=0$$

可知$u\equiv 0$.

Proof. 设$v(r)=e^{-r}\int_{t=0}^{r}u(t)dt$, 则有

$$v'(r)=-e^{-r}\int_{t=0}^{r}u(t)dt+e^{-r}u(r)=e^{-r}\left[u(r)-\int_{t=0}^{r}u(t)dt\right]\leq 0,$$

从而有

$$v(r)\leq 0,$$

即

$$u(r)\leq\int_{t=0}^{r}u(t)dt\leq 0,$$

因此有$u\equiv 0$. □

一般地, 我们有积分形式的Grönwall不等式：设α,β,u是$[a,b]$上的实值函数, β,u连续.

(1)若$\beta\geq 0$, u满足

$$u(t)\leq\alpha(t)+\int_{a}^{t}\beta(s)u(s)ds,$$

则有

$$u(t) \le \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s)e^{\int_s^t \beta(r)dr}ds.$$

(2)更进一步, 若α非减, 则

$$u(t) \le \alpha(t)e^{\int_a^t \beta(s)ds}.$$

根据指数规律和欧拉公式,我们有

$$e^{x+\mathtt{i}y} = e^x(\cos y + \mathtt{i}\sin y),\ x, y \in \mathbb{R}$$

这意味着$|e^z| = e^x > 0$, 而且指数函数e^z有周期$2\pi\mathtt{i}$, 即$e^{z+2\pi\mathtt{i}} = e^z$.

如果将复变量的复值函数$w = f(z)$看作由z平面上一个区域到w平面上一个区域的映射, 若映射是单射, 则称该映射是**单叶**的. 那么自然的问题是: e^z在怎样的区域上是单射? 设$e^{z_1} = e^{z_2}$, 则有$z_1 - z_2 = 2k\pi\mathtt{i}$ $(k \in \mathbb{Z})$. 因此可取宽度为2π的带形区域$D_k = \{z = x + \mathtt{i}y \in \mathbb{C}, 2k\pi < y < 2(k+1)\pi\}$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 作为e^z的单叶性区域. 比如取区域$D_0 = \{z = x + \mathtt{i}y \in \mathbb{C}, 0 < y < 2\pi\}$, 则$e^z$将$D_0$单叶地映为$E = \mathbb{C} \setminus \{z \ge 0\}$.

全纯函数的反函数：设$w = f(z)$在区域D内单叶全纯, 且$f'(z) \ne 0$, $G = f(D)$, 若反函数$z = g(w)$在G内连续, 则$g(w)$在G内全纯且$g'(w) = \frac{1}{f'[g(w)]}$.

Proof. 固定$w_0 \in G$, $z_0 = g(w_0) \in D$, 由

$$\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{g(w) - g(w_0)}{f[g(w)] - f[g(w_0)]} = \frac{1}{\frac{f[g(w)] - f[g(w_0)]}{g(w) - g(w_0)}}$$

可得结论. □

指数函数的反函数称为**对数函数**. 具体地, 对于$z \ne 0$, 满足$e^w = z$的复数w称为z的对数, 记为$w = \log z$. 由指数函数的周期性知, $\log z$是无穷多值的.

设$z = re^{\mathtt{i}\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi))$, $w = u + \mathtt{i}v$, 则有$e^u \cdot e^{\mathtt{i}v} = re^{\mathtt{i}\theta}$, 从而有$e^u = r$, $v = \theta + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, 即

$$w = \log r + \mathtt{i}(\theta + 2k\pi),$$

或记作

$$w = \log|z| + \mathtt{i}\arg z.$$

对数函数有性质

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2,$$

注意这是一个集合等式. 设$z \in E$, $\arg z \in (0, 2\pi)$,

$$(\log z)_k = \log|z| + \mathtt{i}\,(\arg z + 2k\pi)\ \ (k = 0, \pm 1, \cdots)$$

是区域E上的全纯函数, 称为$\log z$的**单值全纯分支 (无穷多)**, 而且有$[(\log z)_k]' = \frac{1}{z}$.

6. 三角函数. 我们可以利用单实变量正弦、余弦函数的幂级数展式定义整函数

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \ \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},\ \ z \in \mathbb{C}.$$

根据$e^z, \sin z, \cos z$的幂级数展式可得如下**整函数方程**

$$e^{\mathtt{i}z} = \cos z + \mathtt{i} \sin z,$$

其中$z = \theta \in \mathbb{R}$的特殊情形即为欧拉公式. 从而有

$$\cos z = \frac{e^{\mathtt{i}z} + e^{-\mathtt{i}z}}{2}, \sin z = \frac{e^{\mathtt{i}z} - e^{-\mathtt{i}z}}{2\mathtt{i}}.$$

因此指数函数的性质完全决定了三角函数的性质.
(1)$(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$;
(2)$\sin z, \cos z$以2π为周期;
(3)$\cos z$是偶函数, $\sin z$是奇函数;
(4)三角恒等式均成立, 比如,

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,\ \ \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z;$$

(5)$\sin z$仅在$z = k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$处为零, $\cos z$仅在$z = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$处为零.

以上可见实数域上定义的$\sin x$, $\cos x$的主要性质, 在复数域上依然成立, 但也有不同之处.
(6) $|\sin z|$, $|\cos z|$ 在$\mathbb{C}$上是无界的. 设$z = x + \mathtt{i}y$, 则有

$$|\cos z|^2 = |\cos x \cos(\mathtt{i}y) - \sin x \sin(\mathtt{i}y)|^2,$$

由于

$$\cos(\mathtt{i}y) = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \cosh y,$$

$$\sin(\mathtt{i}y)=\frac{e^{-y}-e^{y}}{2\mathtt{i}}=\mathtt{i}\sinh y,$$

故有

$$\begin{aligned}|\cos z|^2 &= |\cos x\ \cosh y-\mathtt{i}\sin x\ \sinh y|^2\\ &= \cos^2 x\ \cosh^2 y+\sin^2 x\ \sinh^2 y\\ &= \cos^2 x\ \cosh^2 y+\sin^2 x\ (\cosh^2 y-1)\\ &= \cosh^2 y-\sin^2 x,\end{aligned}$$

类似地,

$$|\sin z|^2=\sinh^2 y+\sin^2 x.$$

同样可以定义$\tan z\triangleq\frac{\sin z}{\cos z}$, $\cot z\triangleq\frac{\cos z}{\sin z}$.

7.一般幂函数. 对于$z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\alpha=a+\mathtt{i}b$, 定义

$$w=z^{\alpha}\triangleq e^{\alpha\log z}.$$

设$\log z=\log|z|+\mathtt{i}(\arg z+2k\pi)$, $\arg z\in[0,2\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$, 则有

$$z^{\alpha}=e^{(a+\mathtt{i}b)(\log|z|+\mathtt{i}(\arg z+2k\pi))}=e^{a\log|z|-b(\arg z+2k\pi)}\cdot e^{\mathtt{i}[b\log|z|+a(\arg z+2k\pi)]}.$$

记

$$\rho_k=e^{a\log|z|-b(\arg z+2k\pi)},\ \theta_k=b\log|z|+a(\arg z+2k\pi),$$

则有

$$w=z^{\alpha}=\rho_k e^{\theta_k},\ |z^{\alpha}|=\rho_k.$$

若$b\neq0$, 则$w=z^{\alpha}$是无穷多值函数; 若$b=0$, 则$\alpha=a\in\mathbb{R}$, 此时有

$$w=z^{\alpha}=e^{a\log|z|}\cdot e^{\mathtt{i}a(\arg z+2k\pi)},$$

故

(1)当$\alpha=a=n\in\mathbb{Z}$时, $z^{\alpha}=z^{n}$是单值的;

(2)当$\alpha=a=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$时, $z^{\alpha}=e^{\frac{p}{q}\log|z|}\cdot e^{\mathtt{i}\frac{p}{q}\arg z}\cdot e^{\mathtt{i}\frac{p}{q}2k\pi}=|z|^{\frac{p}{q}}\cdot e^{\mathtt{i}\frac{p}{q}\arg z}\cdot e^{\mathtt{i}\frac{p}{q}2k\pi}$,
因此对于给定的z, z^{α}有q个不同的值;

(3)当$\alpha=a$为无理数时, z^{α}是无穷多值的.

比如根式函数$\sqrt{z}$, 设$z\in E=\mathbb{C}\setminus\{z\geq0\}, \arg z\in(0,2\pi)$,

$$(\sqrt{z})_k=\sqrt{|z|}e^{\mathtt{i}\frac{\arg z+2k\pi}{2}}\ (k=0,1)$$

是E上的全纯函数, 称为$\sqrt{z}$的单值全纯分支(两个), 且$[(\sqrt{z})_k]'=\frac{1}{2(\sqrt{z})_0}$.

Lecture 4: 柯西-古萨定理、柯西积分公式及幂级数、洛朗级数展开

微分定义为差商的极限, 将这个定义从实函数延拓到复函数, 我们介绍了复变量的复值函数复可微的定义. 现在我们想要讨论在复变函数里, 什么对应着微积分基本定理. 首先我们介绍Stokes定理, 作为微积分基本定理的高维类似. 我们将仅需要2维的情形. 2维的Stokes定理即为**格林定理**. 高维的Stokes定理帮助我们在更广阔的视野下理解关键想法. 我们将讨论2维的Stokes定理怎样导出全纯函数的柯西-古萨定理和柯西积分公式, 从而导出泰勒级数展开和洛朗级数展开.

1.引导微分形式的外微分定义的启发式考虑. 微积分基本定理的高维类似应该是
$$\int_{\text{boundary of domain}} (\text{object}) = \int_{\text{domain}} (\text{object})',$$
原因是在微积分基本定理

$$f(b) - f(a) = \int_{[a,b]} f'(x)dx$$

里面, object是函数f, 其导数是f', domain是区间$[a,b]$, 其边界是$\{b\} - \{a\}$, 因此有
$$\int_{\text{boundary of domain}} (\text{object}) = f(b) - f(a)$$
和
$$\int_{\text{domain}} (\text{object})' = \int_{[a,b]} f'(x)dx = \int_{[a,b]} df.$$
在高维情形object是一个微分形式ω, 而且我们不得不定义它的导数$d\omega$. $d\omega$的定义可以由怎样从区域得到边界来引导. 有下面三种启发式的考虑:

(1)因边界的边界是空集, 故应有$d(d\omega) = 0$.

(2)取边界的过程遵循乘积公式. 比如, 取$R = [a,b] \times [c,d]$, 有

$$\partial R = [(a,c),(b,c)] + [(b,c),(b.d)] + [(b,d),(a,d)] + [(a,d),(a,c)].$$

另一方面, 由
$$\partial[a,b]=\{b\}-\{a\},\ \partial[c,d]=\{d\}-\{c\}$$
我们得到
$$(\partial[a,b])\times[c,d]=(\{b\}-\{a\})\times[c,d]=[(b,c),(b,d)]-[(a,c),(a,d)]$$
和
$$[a,b]\times(\partial[c,d])=[a,b]\times(\{d\}-\{c\})=[(a,d),(b,d)]-[(a,c),(b,c)].$$
因此有
$$\partial\left([a,b]\times[c,d]\right)=(\partial[a,b])\times[c,d]-[a,b]\times(\partial[c,d])\,.$$
启发性地, 应有
$$d(\omega\wedge\eta)=(d\omega)\wedge\eta\pm\omega\wedge(d\eta).$$

(3)当ω是一个函数f时, $d\omega=df$.

2.微分形式的外微分. 若F是开集$U\subset\mathbb{R}^n$上的实可微函数, $a\in U$, 则
$$(dF)(a):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$
是一个实线性映射. 也就是说, 它是$(\mathbb{R}^n)^*=\mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$中的一个元素, 可以表示为
$$(dF)(a)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_a(dx_j)(a).$$

我们说$\mathbb{R}^n$中的一个向量可以等同于一个微分算子. 原因是: 设向量$v=(v_1,\cdots,v_n)\in\mathbb{R}^n$, 点$a=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, 考虑$\mathbb{R}^n$中一条过点$a$方向为$v$的直

线, 给定一个函数φ, 我们可以定义一个实数如下:

$$\varphi \mapsto \frac{d}{dt}\varphi(a_1+v_1t,\cdots,a_n+v_nt)\mid_{t=0}=\sum_{j=1}^{n} v_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(a).$$

因此v可等同于微分算子$\xi:\varphi\mapsto\sum_{j=1}^{n} v_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(a)=\xi(\varphi)$. 反过来也是可能的, 给定一个微分算子$\xi$, 我们可以设$v_j=\xi(x_j)$, 从而得到一个向量$v=(v_1,\cdots,v_n)$.

因此我们能说

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_a,\cdots,\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_a\in\mathbb{R}^n$$

是$\mathbb{R}^n$的一组实基. 另一方面,

$$(dx_1)_a,\cdots,(dx_n)_a\in(\mathbb{R}^n)^*$$

是它的对偶基, 这里$dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\triangleq\frac{\partial x_i}{\partial x_j}=\delta_{ij}$.

我们定义切空间$T_a\mathbb{R}^n$为微分算子空间, 即,

$$T_a\mathbb{R}^n=\mathbb{R}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_a\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_a.$$

它的对偶空间可以表示为

$$(T_a\mathbb{R}^n)^*=\mathbb{R}(dx_1)_a\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}(dx_n)_a.$$

张量积: 设V,W是两个实向量空间, $f\in V^*,g\in W^*$, 定义实线性映射$f\otimes g:V\times W\to\mathbb{R}$如下:

$$(f\otimes g)(v,w)\triangleq f(v)g(w).$$

所有这样的实线性映射构成的集合称为V^*和W^*的**张量积**, 记为$V^*\otimes W^*$. 它是一个实向量空间. 设$V^*=\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{f_1,\cdots,f_m\}$, $W^*=\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{g_1,\cdots,g_n\}$,

则$\{f_j\otimes g_k\}_{1\le j\le m,1\le k\le n}$ 构成了$V^*\otimes W^*$的一组基. 这意味着

$$\dim_{\mathbb{R}}(V^*\otimes W^*)=(\dim_{\mathbb{R}}V^*)(\dim_{\mathbb{R}}W^*)$$

外积:

$$V^*\wedge V^*\triangleq\{T\in V^*\otimes V^*,\ T(v_1,v_2)=-T(v_2,v_1)\}.$$

一般地, 设$\wedge^k(V^*)=V^*\wedge V^*\wedge\cdots\wedge V^*$, $\otimes^k(V^*)=V^*\otimes V^*\otimes\cdots\otimes V^*$, 则

$$\wedge^k(V^*)\triangleq\left\{T\in\otimes^k(V^*),\ T(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(k)})=(-1)^\sigma T(v_1,\cdots,v_k)\right\},$$

其中$\sigma\in p(k)$表示关于指标$(1,\cdots,k)$的任意置换. $\wedge^k(V^*)$是一个向量空间. 若在$\otimes^k(V^*)$上面定义反称化算子$\mathcal{A}$如下:

$$\mathcal{A}(T)\triangleq\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in p(k)}(-1)^\sigma\sigma T,\ T\in\otimes^k(V^*),$$

其中$\sigma T(v_1,\cdots,v_k)\triangleq T(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(k)})$. 可以验证: 给定$T\in\otimes^k(V^*)$, $T\in\wedge^k(V^*)$当且仅当$\mathcal{A}(T)=T$.

对于$f,g\in V^*$, 外积$f\wedge g$定义为$f\otimes g$的反称化, 即,

$$f\wedge g\triangleq f\otimes g-g\otimes f\in\wedge^2(V^*).$$

直接可得下面性质

$$f\wedge f=0,\ f\wedge g=-g\wedge f.$$

一般地, 对$f_1,\cdots,f_k\in V^*$,

$$f_1\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_k\triangleq\sum_{\sigma\in p(k)}(-1)^\sigma f_{\sigma(1)}\otimes f_{\sigma(2)}\otimes\cdots\otimes f_{\sigma(k)}\in\wedge^k(V^*).$$

若$V^*=\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{f_1,\cdots,f_m\}$, 则$\{f_{i_1}\wedge\cdots\wedge f_{i_k}\}_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m}$构成了$\wedge^k(V^*)$的一

组基. 其维数是$\binom{n}{k}$.

给定开集$U \subset \mathbb{R}^n$上的 **微分k-形式**

$$\omega = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} \omega_{j_1, \cdots, j_k}(x_1, \cdots, x_n) dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k},$$

若$\omega_{j_1, \cdots, j_k}(x_1, \cdots, x_n)$在$U$上可微, 则称$\omega$在$U$上可微.

我们定义ω的**外微分**, 记为$d\omega$, 是U上的$k+1$-形式

$$d\omega \triangleq \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} d\omega_{j_1, \cdots, j_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}.$$

注意: 这个定义与坐标$x_1, \cdots, x_n$选取无关.

3.Stokes定理. 假设Ω是$\mathbb{R}^n$中的有界开集, 具有光滑边界$\partial\Omega$. 设

$$\omega = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_{n-1} \le n} \omega_{j_1, \cdots, j_{n-1}} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{n-1}}$$

是Ω的开邻域上的一个光滑$(n-1)$-形式, 则有

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega.$$

这里$\partial\Omega$可以适当地减弱成分段光滑. 一般地, Stokes定理对于$\mathbb{R}^N$中有分段光滑边界的n-维分段光滑区域也成立.

n=2(格林公式). 在上述条件下, 取1-形式$\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, 则有

$$\int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy = \int_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

n=3(高斯公式). 在上述条件下, 取2-形式$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$,

则有

$$\int_{\partial\Omega} Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz.$$

n=3(斯托克斯公式). 在上述条件下, 取1-形式$\omega=Pdx+Qdy+Rdz$, 则有

$$\int_{\partial\Omega} Pdx+Qdy+Rdz=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy.$$

4.线积分. (1)设实变量的复值函数$f(t)=u(t)+\mathtt{i}v(t)$在(a,b)上连续, 则

$$\int_a^b f(t)dt\triangleq\int_a^b u(t)dt+\mathtt{i}\int_a^b v(t)dt.$$

它是复线性的, 即,

$$\int_a^b cf(t)dt=c\int_a^b f(t)dt,\ c\in\mathbb{C},$$

且满足

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right|\leq\int_a^b|f(t)|dt.$$

(2) 设$\gamma:z=z(t),\ t\in[a,b]$是复平面上的分段光滑曲线, 复变量复值函数$f(z)$在$\gamma$上连续, 则

$$\int_\gamma f(z)dz\triangleq\int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

它有如下性质:

(i)$\int_\gamma f(z)dz$与积分曲线参数选取无关;

(ii)$\int_{\gamma^-} f(z)dz=-\int_\gamma f(z)dz$;

(iii)若$\gamma=\gamma_1+\cdots+\gamma_n$, 则$\int_\gamma f(z)dz=\int_{\gamma_1} f(z)dz+\cdots+\int_{\gamma_n} f(z)dz$;

(iv)$\left|\int_\gamma f(z)dz\right|\leq\int_\gamma|f(z)||dz|$.

5.Stokes定理怎样推导柯西定理. 若$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$, 则有$\int_{\partial\Omega}Pdx+Qdy=0$. 对于复变量的复值函数$f(z)$, 柯西-黎曼方程是$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{\mathtt{i}}\frac{\partial f}{\partial y}=0$. 若$f(z)$是全纯的, 取$Q=f$, $P=\frac{1}{\mathtt{i}}f$, 我们将得到

$$\int_{\partial\Omega}Pdx+Qdy=\int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{\mathtt{i}}fdx+fdy\right)=\frac{1}{\mathtt{i}}\int_{\partial\Omega}f(dx+\mathtt{i}dy)=\frac{1}{\mathtt{i}}\int_{\partial\Omega}fdz=0.$$

从而得到下面的柯西定理:

定理(柯西): 假设Ω是$\mathbb{C}$上的有界区域, 具有分段光滑的边界, U是$\bar{\Omega}$的开邻域, $f(z)$是U上的全纯函数且$f'(z)$在U上连续, 则有

$$\int_{\partial\Omega}f(z)dz=0.$$

古萨去掉了$f'(z)$在U上连续的条件, 改进了柯西定理

定理(古萨): 假设Ω是$\mathbb{C}$上的有界区域, 具有分段光滑的边界, U是$\bar{\Omega}$的开邻域, $f(z)$是U上的全纯函数, 则有

$$\int_{\partial\Omega}f(z)dz=0.$$

首先, 我们证明一种特殊情形: Ω是一个开矩形.

定理(古萨定理的特殊情形-沿矩形边界积分): 假设R是$\mathbb{C}$上的闭矩形区域, U是R的开邻域, $f(z)$是U上的全纯函数, 则有

$$\int_{\partial R}f(z)dz=0.$$

古萨定理的关键: 在$a\in R$处, 在差一个消失阶>1的项$E_a(z)$的意义下, 全

纯函数$f(z)$可以由度≤ 1的多项式$P_a(z) = f(a) + f'(a)(z-a)$逼近. 由$P_a'(z) = f'(a)$连续知

$$\int_{\partial R_a} P_a(z)dz = 0.$$

对于总周长为l_a的闭矩形R_a,

$$\left|\int_{\partial R_a} E_a(z)dz\right| \leq l_a \sup_{\partial R_a} |E_a| \leq l_a^2 \epsilon_a,$$

其中

$$\epsilon_a = \sup_{z\in R_a - \{a\}} \left|\frac{E_a(z)}{z-a}\right|.$$

现在设给定闭矩形R的总周长是l. 我们把R分成k^2个相同的子矩形, 并在每个子矩形中取点a. 为了解释我们的细节, 我们首先看这特殊情形: $E_a(z)$在每个子矩形上有一致的界$\epsilon_k \to 0$ $(k \to \infty)$. 因$\int_{\partial R} f(z)dz$是k^2个子矩阵边界积分之和, 且每个子矩阵上的积分有一致的界$\frac{l^2}{k^2}\epsilon_k$, 故$\int_{\partial R} f(z)dz$有界$l^2\epsilon_k \to 0$ $(k \to \infty)$.

Proof. 当考虑一致性问题(比如, 连续函数在有界闭区间上的一致连续性)时, 一种处理方式就是利用区域的紧性以及区域内柯西列极限的存在性. 假设

$$\left|\int_{\partial R} f(z)dz\right| = \alpha > 0,$$

下面推出矛盾. 我们将R分成四个全等的子矩阵, 选择其中一个$R^{(1)}$满足

$$\left|\int_{\partial R^{(1)}} f(z)dz\right| \geq \frac{\alpha}{4}.$$

用$R^{(1)}$代替R, 重复上述过程得到$R^{(\nu)}$满足

$$\left|\int_{\partial R^{(\nu)}} f(z)dz\right| \geq \frac{\alpha}{4^\nu}.$$

R^ν的中心a_ν形成了一个柯西列, 趋近于点$a \in \bar{R}$. $f(z)$在点a的复可微性意味着:

对任意$\epsilon > 0$, 存在$\delta_\epsilon > 0$使得

$$f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + E(z)$$

且当$0 < |z-a| < \delta_\epsilon$时

$$|E(z)| \leq |z-a|\epsilon.$$

取$\epsilon < \frac{\alpha}{l^2}$. 存在$\nu_\epsilon \in \mathbb{N}$使得当$\nu \geq \nu_\epsilon$时, $R^\nu \subset \{|z-a| < \delta_\epsilon\}$. 取$\nu \geq \nu_\epsilon$, 应用以上的细节到$R_a = R^{(\nu)}$,

$$l_a = \frac{l}{2^\nu},\ P_a(z) = f(a) + (z-a)f'(a),\ E_a(z) = E(z),\ \epsilon_a \leq \epsilon,$$

可得如下矛盾

$$\frac{\alpha}{4^\nu} \leq \left| \int_{\partial R^{(\nu)}} f(z)dz \right| \leq l_a^2 \epsilon_a \leq \frac{l^2}{4^\nu}\epsilon < \frac{\alpha}{4^\nu}.$$

□

沿矩形边界积分的古萨定理之推论: 设U是$\mathbb{C}$上的一个单连通开集, $f(z)$是U上的全纯函数, 则存在U上的全纯函数$F(z)$使得$F'(z) = f(z)$. 称$F(z)$是$f(z)$在U上的**原函数**.

Proof. U是单连通区域意味着: U中任一连续的闭曲线可以连续收缩成U中的一个点. 特别地, 它意味着连接U中两点的两条多边形路径(只含水平和竖直边)可以通过增加或者减少矩形边界有限步相互转化. 固定点$z_0 \in U$, 定义$F(z)$为$f(z)dz$沿连接z_0, z的多边形路径(只含水平和竖直边) 的积分. 由沿矩形边界积分的古萨定理知, $F(z)$是良好定义的, 与这样的多边形路径选取无关. 取多边形路径到达z的最后一段是水平的, 由微积分基本定理可知$\frac{\partial F}{\partial x} = f$. 取多边形路径到达$z$的最后一段是竖直的的, 由微积分基本定理可知$\frac{\partial F}{\partial y} = \mathtt{i}f$. 从而由$f(z)$的连续性知, $F(z)$在U上每一点都是全纯的且$F'(z) = f(z)$. □

古萨定理的证明: 假定U是单连通的, 则在U上存在$f(z)$的原函数$F(z)$.

因为$f(z)dz$沿U中分段光滑路径的积分等于$F(z)$在路径端点取值之差, 所以$\int_{\partial\Omega} f(z)dz = 0$.

一般情况, 我们选取Ω中的有限线段$\gamma_1, \cdots, \gamma_p$横截$\partial\Omega$(端点在$\partial\Omega$的光滑部分), 使得$\Omega \setminus \cup_{j=1}^p \gamma_j$是单连通的. 对于$\epsilon > 0$, 设$\gamma_{j,\epsilon} = \{z \in \mathbb{C}, d(z, \gamma_j) \leq \epsilon\}$, $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \cup_{j=1}^p \gamma_{j,\epsilon}$ 对$\epsilon > 0$充分小, $\bar{\Omega_\epsilon}$的某个开邻域是单连通的, 从而有

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} f(z)dz = 0.$$

令$\epsilon \to 0$, 我们有

$$\int_{\partial\Omega} f(z)dz = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial\Omega_\epsilon} f(z)dz = 0.$$

因此完成了古萨定理的证明.

注意: 古萨定理也称为柯西-古萨定理或者柯西定理.

假设$\mathbb{C}$中有界开集Ω的分段光滑边界$\partial\Omega = C - C_0$, 其中C_0, C_1是两个连通分支并给定逆时针定向. 若$f(z)$在$\bar{\Omega}$的开邻域U上全纯, 则由古萨定理知,

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_0} f(z)dz.$$

这个类似于一元实函数$g(x)$在有界闭区间$[a, b]$上的情形, $g'(x)$在$[a, b]$上恒为0意味着$g(a) = g(b)$. 在实的情形, 这个方程使得函数在两点取值相等, 而在复的情形, 方程使得函数沿两条闭曲线积分相等. 在复的情形, 我们想要压缩闭曲线C_0到一个点, 用函数在该点取值替代沿C_0的积分.

假设Ω是有界开集且有连通的分段光滑的边界C, $f(z)$是$\bar{\Omega}$的开邻域U上的全纯函数. 设$a \in \Omega$, $C_r = \{|z-a| = r\}$, 这里$r > 0$充分小使得$\overline{D_r(a)} \triangleq \{|z-a| \leq r\} \subset \Omega$. 用$\Omega \setminus \overline{D_r(a)}$替代$\Omega$, 古萨定理给出

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_r} f(z)dz.$$

我们可以取极限$r \to 0$, 但是$\int_{C_r} f(z)dz$将简单地给出0, 这对我们无用. 得到$f(z)$在点$z=a$取值的一种方式是用$\frac{f(z)}{z-a}$替代$f(z)$. 然后有

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_{C_r} \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

因为

$$\int_{C_r} \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_{C_r} \frac{f(a)}{z-a}dz + \int_{C_r} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz,$$

我们可以计算

$$\begin{aligned}
\int_{C_r} \frac{f(a)}{z-a}dz &= f(a)\int_{C_r} \frac{dz}{z-a} \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{d(a+re^{\mathtt{i}\theta})}{(a+re^{\mathtt{i}\theta})-a} \\
&= f(a)\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\mathtt{i}re^{\mathtt{i}\theta}d\theta}{re^{\mathtt{i}\theta}} \\
&= 2\pi\mathtt{i}f(a)
\end{aligned}$$

并估计

$$\left|\int_{C_r} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz\right| \le 2\pi r \sup_{z\in C_r}\left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right|$$

因此对于在包含分段光滑的简单闭曲线C及C包围的所有点的开集上全纯的函数$f(z)$, a是C包围的区域中任意点, 我们有下面的**柯西积分公式:**

$$f(a) = \frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

一般地, 若Ω是有界开集且有分段光滑的边界, $f(z)$是$U \supset \bar{\Omega}$上的全纯函数, 则柯西积分公式给出

$$f(a) = \frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-a}dz,\ a \in \Omega.$$

柯西积分公式应用到$\Omega = \{|z-a| < r\}$的情形可得如下结论: 若$f(z)$在$\{|z-$

$a| < r\}$上全纯, 则

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,\ |z-a| < r.$$

主要想法是: 柯西积分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathtt{i}} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,\ |z-a| < r$$

告诉我们若把积分解释成黎曼和的极限, 则$f(z)$可以表示为有限和

$$\sum_j f(\zeta_j)(\Delta\zeta)_j \frac{1}{\zeta_j - z},\ |\zeta_j - a| = r$$

的极限, 该有限和是形如$\frac{1}{\zeta_j - z}$函数与复系数$f(\zeta_j)(\Delta\zeta)_j$的复线性组合, 因此当我们将

$$\frac{1}{\zeta_j - z} = \frac{1}{(\zeta_j - a) - (z-a)} = \frac{1}{\zeta_j - a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta_j - a}}$$

展开成几何级数

$$\frac{1}{\zeta_j - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta_j - a} \right)^n$$

并跟踪极限过程时, 我们可以得到$f(z)$是$\{|z-a| < r\}$上收敛的幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$. 严格的证明过程如下:

Proof. 固定z满足$|z-a| < r = |\zeta - a|$,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

在$|\zeta - a| = r$上一致收敛. 乘以$f(\zeta)d\zeta$后在$\{|\zeta - a| = r\}$上逐项积分得

$$\int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \right) (z-a)^n.$$

因此我们得到幂级数展开

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,\ |z-a|<r,$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}.$$

□

我们可以用相同的细节得到全纯函数导数的柯西积分公式. 收敛的幂级数

$$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

逐项微分k次可得

$$\frac{k!}{(\zeta-z)^{k+1}}=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(z-a)^{n-k}}{(\zeta-a)^{n+1}}.$$

乘以$f(\zeta)d\zeta$后在$\{|\zeta-a|=r\}$上逐项积分得

$$\begin{aligned}k!\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}} &= \sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)(z-a)^{n-k}\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}\\ &= \sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)(z-a)^{n-k}2\pi\mathtt{i}c_n.\end{aligned}$$

另一方面, 对幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

逐项微分k次得

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(z-a)^{n-k}.$$

比较这两个表达式, 我们得到**全纯函数导数的柯西积分公式:** 若$f(z)$在$\{|z-a|<$

$R\}$ $(0 < r < R)$上全纯, 则

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi \mathtt{i}} \int_{|z-a|=r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}},\ |z-a| < r.$$

我们也能得到**一般情形下全纯函数导数的柯西积分公式**. 若Ω是有界开集且有分段光滑的边界, $f(z)$是$U \supset \bar{\Omega}$上的全纯函数, 则对于$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $z \in \Omega$

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi \mathtt{i}} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}.$$

原因是: 取$a \in \Omega$, $0 < r < R$且R充分小使得$D_R(a) \subset \Omega$. 利用开圆盘$D_R(a)$上全纯函数k-阶导数的柯西积分公式, 我们得到

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi \mathtt{i}} \int_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}},\ |z-a| < r.$$

另一方面, 固定z, 对关于$\zeta \in U \setminus \{z\}$的全纯函数$\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}$ 及围道$\partial\left(\Omega \setminus \overline{D_r(a)}\right)$用柯西-古萨定理可得

$$\int_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} = \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}.$$

因此对于$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $z \in \Omega$,

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi \mathtt{i}} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}.$$

6.对全纯函数的柯西积分公式求导并交换积分与微分次序得到高阶导数公式. 首先, 我们证明下面的**命题:** 设$\alpha < \beta$, $\gamma < c < d < \delta$是实数, $f(x,y)$是$(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$上的**复值**函数满足$\frac{\partial f}{\partial x}$在$(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$上连续. 设

$$F(x)=\int_{y=c}^{d} f(x,y)dy,\ \alpha<x<\beta,$$

则$\frac{dF}{dx}$存在, 在(α,β)上连续且满足

$$\frac{dF}{dx}(x)=\int_{y=c}^{d}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy,\ \alpha<x<\beta.$$

Proof. 因为$\frac{\partial f}{\partial x}$在$(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$上连续, 由交换积分次序的Fubini定理可知,

$$\int_{x=a}^{\xi}\left(\int_{y=c}^{d}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy\right)dx=\int_{y=c}^{d}\left(\int_{x=a}^{\xi}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx\right)dy,$$

其中$a,\xi\in(\alpha,\beta)$. 由微积分基本定理知,

$$\int_{x=a}^{\xi}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx=f(\xi,y)-f(a,y)$$

因此

$$\int_{x=a}^{\xi}\left(\int_{y=c}^{d}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy\right)dx=\int_{y=c}^{d}f(\xi,y)dy-\int_{y=c}^{d}f(a,y)dy,$$

即,

$$\int_{x=a}^{\xi}\left(\int_{y=c}^{d}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy\right)dx=F(\xi)-\int_{y=c}^{d}f(a,y)dy.$$

再次利用微积分基本定理, 两边关于ξ求导可得

$$\int_{y=c}^{d}\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)dy=\frac{d}{d\xi}F(\xi).$$

□

Lecture 5: 孤立奇点与留数定理

1.孤立奇点. 若一个全纯函数$f(z)$在点$z = a \in \mathbb{C}$的某去心开圆盘$\{0 < |z-a| < R\}$ $(R > 0)$上全纯, 则称点$z = a$是$f(z)$的**孤立奇点.** 点$z = a$的孤立奇点理论是为了研究当z趋近于a时$f(z)$的增长行为. 使用的工具是$f(z)$在退化的开圆环$\{0 < |z-a| < R\}$ $(R > 0)$上的洛朗级数展开

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathtt{i}} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}},\ n \in \mathbb{Z},\ r \in (0, R).$$

$f(z)$在点$z = a$的洛朗级数中的负幂次项部分

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$$

称为洛朗级数的**主部**. 根据主部有零项、有限非零项及无限非零项可以将孤立奇点分成三类.

(1)可去奇点: $c_n = 0$ **for** $n < 0$**.** 这意味着由幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

定义的函数是$\{|z-a| < R\}$上的全纯函数, 是给定函数$f(z)$的延拓. 原因是该幂级数的收敛半径$R_0 \geq R$.

Proof. 由Hadarmard公式知,

$$\frac{1}{R_0} = \limsup_{n \to \infty} |c_n|^{1/n}.$$

由于$|c_n|^{1/n} \leq \frac{M(r)^{1/n}}{r}$, 其中$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$, 对于任意$r \in (0, R)$成立,

故$\frac{1}{R_0} \leq \frac{1}{r}$, i.e. $R_0 \geq r$对于任意$r \in (0, R)$成立. 因此可得$R_0 \geq R$. □

可去奇点的另一种刻画: $f(z)$在点a的某去心邻域内有界.

Proof. 必要性: 若$c_n = 0$ for $n < 0$, 则$f(z)$可以延拓成$\{|z-a| < R\}$上的全纯函数, 因此存在$0 < R_0 < R$使得$f(z)$在$\{0 < |z-a| \leq R_0\}$上有界.
充分性: 由于

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathtt{i}} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}, \ n \in \mathbb{Z}, \ r \in (0, R),$$

若$f(z)$在$\{0 < |z-a| \leq R_0\}$ $(0 < R_0 < R)$上有界, 则取$r \to 0$可得$c_n = 0$ for $n < 0$. □

(2)极点: $c_n = 0$ $(n < -k)$and $c_{-k} \neq 0$ for some $k > 0$. 这里的正整数k称为$f(z)$在极点$z = a$的**阶**.

极点的另一种刻画: $\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$. 阶$k$的另一种刻画：$\lim_{z \to a} |(z-a)^k f(z)|$是一个有限正数.

Proof. 必要性: 若$c_n = 0$ $(n < -k)$and $c_{-k} \neq 0$ for some $k > 0$, 则$f(z)$可表示为

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k},$$

其中

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-k} (z-a)^n,$$

且$g(a) = c_{-k} \neq 0$, 因此有

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \lim_{z \to a} \frac{|g(z)|}{|z-a|^k} = +\infty$$

和

$$\lim_{z\to a}|(z-a)^k f(z)| = |g(a)| = |c_{-k}| > 0.$$

充分性: 设$\lim_{z\to a}|f(z)| = +\infty$, 则存在$0 < R_0 < R$使得$|f(z)| \geq 1$ for $0 < |z-a| < R_0$. 设

$$h(z) = \frac{1}{f(z)},$$

则全纯函数$h(z)$在$\{0 < |z-a| < R_0\}$内有界, 可知$z = a$是$h(z)$的可去奇点, 从而有

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-a)^n,\ 0 < |z-a| < R_0.$$

由$\lim_{z\to a}|f(z)| = +\infty$知$\lim_{z\to a}|h(z)| = 0$, 从而存在正整数$k$使得$d_k \neq 0$且$d_n = 0$ for $0 \leq n < k$, 故有

$$h(z) = (z-a)^k q(z),$$

其中

$$q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{n+k}(z-a)^n.$$

由于$q(z)$在$\{|z-a| < R_0\}$上全纯且$q(a) = d_k \neq 0$, 存在$0 < R_1 < R_0$使得$q(z)$在$\{|z-a| < R_1\}$无零点, 故有

$$\frac{1}{q(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(z-a)^n,\ |z-a| < R_1,$$

其中$e_0 \neq 0$. 从

$$f(z) = \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z-a)^k q(z)} = \frac{1}{(z-a)^k}\sum_{n=0}^{\infty} e_n(z-a)^n = \sum_{n=-k}^{\infty} e_{n+k}(z-a)^n$$

及洛朗系数的唯一性知$c_n = e_{n+k}$, 从而有$c_n = 0$ for $n < -k$ 且$c_{-k} \neq 0$. 这意味着$z = a$是$f(z)$的k阶极点. □

(3)本质奇点: $c_n \neq 0$ for 无穷负整数n.

本质奇点的另一种刻画(Casorati-Weierstrass定理): 对于任意$0 < r < R$, $\{0 < |z-a| < r\}$在映射$f(z)$下的像在$\mathbb{C}$中是稠密的($\mathbb{C}$中的任何非空开子集都包含某个像点). 换句话说, 全纯函数在本质奇点的任何去心邻域内可以任意接近任何复数.

Proof. 必要性: 反证法. 假设存在某个$0 < r < R$使得$\{0 < |z-a| < r\}$在$f(z)$下的像在$\mathbb{C}$中不是稠密的, 即存在$\mathbb{C}$中的某个非空开集U使得U与该像集不相交. 不失一般性, 假设$U = \{|w-b| < \rho\}$ $(\rho > 0)$. 设$g(z) = \frac{1}{f(z)-b}$, $0 < |z-a| < r$, 由$|g(z)| \leq \frac{1}{\rho}$知, 点$z = a$是$g(z)$的可去奇点, 因此$g(z)$定义了$\{0 < |z-a| < r\}$上的一个不恒为零的全纯函数. 设$k$是$g(z)$在$z = a$的消失阶, 则当$k = 0$时, $z = a$是$f(z) = \frac{1}{g(z)} + b$的可去奇点; 当$k > 0$时, $z = a$是$f(z)$的k阶极点. 这与$z = a$是$f(z)$的本质奇点矛盾.
充分性: 反证法. 假设孤立奇点$z = a$不是$f(z)$的本质奇点, 则要么是可去奇点, 要么是极点. 若是可去奇点, 则可以补充定义$f(a)$使得$f(z)$在$\{|z-a| < R\}$上全纯, 从而存在$0 < r < R$使得$|f(z)| < |f(a)| + 1$ for $0 < |z-a| < r$, 可以看到此时$\{0 < |z-a| < r\}$在映射$f(z)$下的像集在$\mathbb{C}$中不稠密, 矛盾. 若是极点, 则$\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$, 从而存在$0 < r < R$使得$|f(z)| \geq 1$ for $0 < |z-a| < r$, 也有$\{0 < |z-a| < r\}$在映射$f(z)$下的像集在$\mathbb{C}$中不稠密, 矛盾. □

注意:若$z = \infty$是$f(z)$的孤立奇点, 则$f(z)$在$z = \infty$的洛朗级数展开式中的正幂次项为其主部. 这种情况下经常考虑$z = 0$作为$f\left(\frac{1}{z}\right)$的孤立奇点.

例1, 证明以无穷远点为非本质奇点的整函数是多项式.

例2, 求有限复平面$\mathbb{C}$上的所有全纯自同构映射构成的集合$\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$.

Picard大定理: 全纯函数在本质奇点的任何去心邻域内可以**无穷次**取到任

何复数, 至多有一个例外.

Picard小定理:非常值的整函数可以取到任何复数, 至多有一个例外.

2.亚纯函数.设U是$\mathbb{C}$中的开集, E是U的离散子集, 对于$U \setminus E$上的全纯函数$f(z)$, 若E中所有点都是$f(z)$的极点, 则称$f(z)$是U上的亚纯函数.

3.孤立奇点的留数. 设$f(z)$在$\{0 < |z-a| < R\}$上全纯, $f(z)$在孤立奇点$z = a$的留数定义为

$$\mathrm{Res}_{z=a} f(z) \triangleq \frac{1}{2\pi \mathtt{i}} \int_{|z-a|=r} f(z) dz,$$

其中$0 < r < R$. 通过对洛朗展开式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

逐项积分可得

$$\mathrm{Res}_{z=a} f(z) = c_{-1}.$$

换句话说, 对于具有孤立奇点的全纯函数, 函数在该孤立奇点的留数等于函数在该孤立奇点的去心圆盘上的洛朗展开式中的-1次项系数.
若$z = a$是$f(z)$的可去奇点, 则$\mathrm{Res}_{z=a} f(z) = 0$.
若$z = a$是$f(z)$的k阶极点, 则

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

其中$c_{-k} \neq 0$. 故有

$$(z-a)^k f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-k} (z-a)^n,$$

直接可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{z=a}f(z)=c_{-1} &= \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left((z-a)^k f(z)\right)\\ &= \frac{1}{(k+m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{k+m-1}}{dz^{k+m-1}}\left((z-a)^{k+m} f(z)\right), m\in\mathbb{Z}^+.\end{aligned}$$

特别地, 若$m=1$, 则$\mathrm{Res}_{z=a}f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$; 更进一步地, 若$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, 其中$\varphi(z),\psi(z)$在点$z=a$复可微满足$\varphi(a)\neq 0,\ \psi(a)=0,\ \psi'(a)\neq 0$, 则

$$\mathrm{Res}_{z=a}f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

注意:

$$\mathrm{Res}_{z=\infty}f(z)=\frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\int_{\{|z|=R\}^-}f(z)dz=\frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\int_{|z|=1/R}f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{-1}{z^2}dz=-\mathrm{Res}_{z=0}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}\right].$$

4.留数定理. 假设Ω是$\mathbb{C}$上的有界区域, 具有分段光滑的边界$\partial\Omega$, U是$\bar{\Omega}$的开邻域. 设$a_1,\cdots,a_p$是Ω中的不同点, $f(z)$是$U\setminus\{a_1,\cdots,a_p\}$上的全纯函数, 则有

$$\int_{\partial\Omega}f(z)dz=2\pi\mathtt{i}\sum_{j=1}^{p}\mathrm{Res}_{z=a_j}f(z).$$

Proof. 取两两不相交的小圆盘$D_{r_j}(a_j)\ (j=1,\cdots,p)$使得$\overline{D_{r_j}(a_j)}\subset\Omega$. 对$f(z)$在$\Omega\setminus\cup_j\overline{D_{r_j}(a_j)}$上用柯西-古萨定理得

$$\int_{\partial\left(\Omega\setminus\cup_j\overline{D_{r_j}(a_j)}\right)}f(z)dz=0,$$

意味着

$$\int_{\partial\Omega}f(z)dz=\sum_{j=1}^{p}\int_{|z-a_j|=r_j}f(z)dz=2\pi\mathtt{i}\sum_{j=1}^{p}\mathrm{Res}_{z=a_j}f(z).$$

□

Lecture 6: 用留数定理计算定积分

Type1:

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta,$$

其中$R(x,y)$是有理函数(假定$R(\cos\theta,\sin\theta)$在每一点$\theta\in[0,2\pi]$取值有限).

设$z=e^{\mathtt{i}\theta}$, 则

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ \sin\theta = \frac{1}{2\mathtt{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right),\ d\theta = \frac{dz}{\mathtt{i}z}.$$

令$f(z) = R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2\mathtt{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{\mathtt{i}z}$, 则$f(z)$是亚纯函数. 由$R(\cos\theta,\sin\theta)$在每一点$\theta\in[0,2\pi]$取值有限知, $f(z)$在圆周$\{|z|=1\}$上没有极点. $f(z)$在单位圆盘$\{|z|<1\}$内只有有限个极点$a_1,\cdots,a_n$, 从而有

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta = \int_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi\mathtt{i}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}_{z=a_j} f(z).$$

例1, 求$I=\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$ $(a\in\mathbb{R},\ 0<a<1)$. (答案:$\frac{2\pi}{1-a^2}$)

Type2:

$$\int_{x=-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx,$$

其中$P(x),Q(x)$是多项式满足$\mathrm{deg}Q(x)\geq\mathrm{deg}P(x)+2$且$Q(x)$在实轴上没有零点.

取R充分大使得$Q(x)$在上半平面的零点$a_1,\cdots,a_n$在$\{|z|<R,\ \mathrm{Im}z>0\}$内. 由留数定理知,

$$\int_{x=-R}^{R}\frac{P(x)}{Q(x)}dx + \int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz = 2\pi\mathtt{i}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}_{z=a_j}\frac{P(z)}{Q(z)},$$

其中$C_R=\left\{Re^{\mathtt{i}\theta},\ 0\leq\theta\leq\pi\right\}$. 令$R\to\infty$, $\mathrm{deg}Q(x)\geq\mathrm{deg}P(x)+2$保证$\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz\to$

0, 从而可得
$$\int_{x=-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=2\pi\mathtt{i}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}_{z=a_j}\frac{P(z)}{Q(z)}.$$
类似地, 可以考虑下半平面.

例2, 求$I=\int_{x=-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}$. (答案:$\frac{3\pi}{8}$)

Type3:
$$\int_{x=-\infty}^{\infty}\frac{P(x)\cos x}{Q(x)}dx,\ \int_{x=-\infty}^{\infty}\frac{P(x)\sin x}{Q(x)}dx,$$
其中$P(x),Q(x)$是实系数多项式满足$\mathrm{deg}Q(x)\geq\mathrm{deg}P(x)+1$且$Q(x)$在实轴上可能分别有$\cos x,\sin x$的零点作为单零点外没有其他零点.

在上半平面用亚纯函数
$$f(z)=\frac{P(z)e^{\mathtt{i}z}}{Q(z)},$$
原因是当$y>0$时,$|e^{\mathtt{i}z}|=e^{-y}<1$, 在下半平面用亚纯函数
$$f(z)=\frac{P(z)e^{-\mathtt{i}z}}{Q(z)}.$$
原因是当$y<0$时,$|e^{-\mathtt{i}z}|=e^{y}<1$.

当$Q(x)$在实轴上有单零点x_0时, $f(z)=\frac{P(z)e^{\mathtt{i}z}}{Q(z)}$在积分曲线上有一个单极点$z=x_0$, 我们需要修正积分曲线, 用原点为心半径为$R$的上半圆盘边界减以$x_0$为心半径为$\epsilon>0$的上半圆盘. 对于$Q(x)$的每个单零点$x_0$(取$R$使得$|x_0|<R$)都可以这样做.

一般地,设z_0是亚纯函数的单极点,则在z_0的去心邻域内,
$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n.$$

令$C_{\epsilon,\alpha}(z_0)=\left\{z_0+\epsilon e^{\mathtt{i}\theta},\ \alpha\le\theta\le\alpha+\pi\right\}$ $(\epsilon>0,\alpha\in\mathbb{R})$, 则

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_{\epsilon,\alpha}(z_0)} f(z)dz=\pi\mathtt{i}c_{-1},$$

意味着

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\int_{C_{\epsilon,\alpha}(z_0)} f(z)dz=\frac{1}{2}c_{-1},$$

称为亚纯函数在单极点的**半留数**, 与$\alpha\in\mathbb{R}$选取无关.

下面需要证明

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{P(z)e^{\mathtt{i}z}dz}{Q(z)}=0,$$

其中$C_R=\left\{Re^{\mathtt{i}\theta},0\le\theta\le\pi\right\}$. 因为在上半平面有$|e^{\mathtt{i}z}|\le 1$, 若$\deg Q(z)\ge\deg P(z)+2$, 则有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{P(z)e^{\mathtt{i}z}dz}{Q(z)}=0.$$

若$\deg Q(z)=\deg P(z)+1$, 则需要用下面的分部积分

$$\int_{C_R}\frac{P(z)e^{\mathtt{i}z}dz}{Q(z)}=\left[\frac{P(z)e^{\mathtt{i}z}}{Q(z)\mathtt{i}}\right]_{z=-R}^{z=R}-\int_{C_R}\left(\frac{d}{dz}\frac{P(z)}{Q(z)}\right)\frac{e^{\mathtt{i}z}}{\mathtt{i}}dz.$$

由于

$$\left|\left[\frac{P(z)e^{\mathtt{i}z}}{\mathtt{i}Q(z)}\right]_{z=-R}^{z=R}\right|\le\left|\frac{P(-R)}{Q(-R)}\right|+\left|\frac{P(R)}{Q(R)}\right|$$

且

$$\frac{d}{dz}\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{P'(z)Q(z)-P(z)Q'(z)}{Q(z)^2}$$

分母的度比分子的度至少大2, 可得结论.

取$R\to\infty,\epsilon\to 0$, 得

$$\int_{x=-\infty}^{\infty}\frac{P(x)e^{\mathtt{i}x}}{Q(x)}dx=2\pi\mathtt{i}\sum_{\mathrm{Im}a>0}\mathrm{Res}_{z=a}\frac{P(z)e^{\mathtt{i}z}}{Q(z)}+\pi\mathtt{i}\sum_{\mathrm{Im}a=0}\mathrm{Res}_{z=a}\frac{P(z)e^{\mathtt{i}z}}{Q(z)}.$$

取实部和虚部得

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{P(x)\cos x}{Q(x)}dx = \mathrm{Re}\left(2\pi\mathtt{i}\sum_{\mathrm{Im}a>0}\mathrm{Res}_{z=a}\frac{P(z)e^{\mathtt{i}z}}{Q(z)} + \pi\mathtt{i}\sum_{\mathrm{Im}a=0}\mathrm{Res}_{z=a}\frac{P(z)e^{\mathtt{i}z}}{Q(z)}\right),$$

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{P(x)\sin x}{Q(x)}dx = \mathrm{Im}\left(2\pi\mathtt{i}\sum_{\mathrm{Im}a>0}\mathrm{Res}_{z=a}\frac{P(z)e^{\mathtt{i}z}}{Q(z)} + \pi\mathtt{i}\sum_{\mathrm{Im}a=0}\mathrm{Res}_{z=a}\frac{P(z)e^{\mathtt{i}z}}{Q(z)}\right).$$

例3, 求(1)$I=\int_{x=-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx$(答案:$\frac{\pi}{e}$), (2)$I=\int_{x=-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$(答案:$\pi$).

Type4:用多值函数的单值全纯分支计算定积分.

(1)$I=\int_{x=0}^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}dx$ (答案:$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$).

(2)$I=\int_{x=0}^{\infty}\frac{\log x}{x^2+1}dx$ (答案:0).

(3)$I=\int_{x=0}^{1}\frac{dx}{x^{\alpha}(1-x)^{1-\alpha}}$ $(0<\alpha<1)$ (答案:$\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$).

Lecture 7: 用留数计算无穷和及亚纯函数部分分式展开

1.用留数计算无穷和. 类似于计算

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

其中$P(x), Q(x)$是多项式满足$\deg Q(x) \geq \deg P(x) + 2$且$Q(x)$在实轴上没有零点, 我们讨论用留数的方法处理离散的无穷和(代替定积分), 比如, 计算

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)},$$

其中$P(x), Q(x)$是多项式满足$\deg Q(x) \geq \deg P(x) + 2$且$Q(n) \neq 0$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$.

想法是: 构造$\mathbb{C}$上的亚纯函数$f(z)$, 其极点包含$z = n \in \mathbb{Z}$. 用一列闭曲线C_n使得随n增大, 由C_n包围的区域增大直到整个$\mathbb{C}$ $(n \to \infty)$, 而且有

$$\lim_{n\to\infty} \int_{C_n} f(z)dz = 0, \ \mathrm{Res}_{z=n} f(z) = \frac{P(n)}{Q(n)},$$

故

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = -\sum_{a \notin \mathbb{Z}} \mathrm{Res}_{z=a} f(z).$$

取$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \pi \cot \pi z$, 显然$f(z)$是$\mathbb{C}$上的亚纯函数, 极点为$Q(z)$的零点$a_1, \cdots, a_k$及$z = n \in \mathbb{Z}$. C_n是以$(n+\frac{1}{2})(\pm 1 \pm \mathtt{i})$为顶点的正方形. 取$n$充分大使得$a_1, \cdots, a_k$在$C_n$内, 则由留数定理知,

$$\int_{C_n} f(z)dz = 2\pi\mathtt{i} \sum_{s=-n}^{n} \mathrm{Res}_{z=s} f(z) + 2\pi\mathtt{i} \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{z=a_j} f(z).$$

(1)直接计算可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z=n} f(z) &= \mathrm{Res}_{z=n} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z} \\
&= \lim_{z \to n} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{\pi (z-n) \cos \pi z}{(-1)^n \sin \pi (z-n)} \\
&= \frac{P(n)}{Q(n)}.
\end{aligned}
$$

(2)当$|y| > \frac{1}{2\pi}$时,$|\cot \pi z| \le M_1$; 当$z = \frac{1}{2} + \mathtt{i}y$, $-\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}$时, $|\cot \pi z| \le M_2$, 又$\cot \pi(z+1) = \cot \pi z$, 故$\cot \pi z$在$C_n (\forall n)$上一致有界. 因为$\mathrm{deg} Q - \mathrm{deg} P \ge 2$, 所以

$$\lim_{n \to \infty} \int_{C_n} \frac{P(z)}{Q(z)} \pi \cot \pi z dz = 0.$$

(3)取$n \to \infty$得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = -\sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{z=a_j} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \pi \cot \pi z \right).$$

例1, 求$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$ $(a > 0)$.(答案: $\frac{\pi \coth \pi a}{a}$)

类似地, 可以计算

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)},$$

其中$P(x), Q(x)$是多项式满足$\mathrm{deg} Q(x) \ge \mathrm{deg} P(x) + 2$且$Q(n) \ne 0$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$. 这种情况取$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \pi \csc \pi z$. 重复上述过程可得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)} = -\sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{z=a_j} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \pi \csc \pi z \right),$$

其中$a_1, \cdots, a_k$是$Q(z)$的互异零点.

2.亚纯函数的部分分式展开. 设$f(z)$是$\mathbb{C}$上的亚纯函数, 极点$\{a_n\}_{1\leq n<\infty}$为单极点满足$0<|a_1|\leq|a_2|\leq\cdots$且$\mathrm{Res}_{z=a_n}f(z)=b_n$. 假设有一列闭曲线$C_n$使得$C_n$包围的区域包含$a_1,\cdots,a_n$, 无其他极点. $R_n=\mathrm{dist}(0,C_n)\to\infty\ (n\to\infty)$, C_n长度$L_n=O(R_n)$, 即$\frac{L_n}{R_n}\leq K$(有限正数), 存在非负正数p使得在C_n上, $f(z)=o(R_n^{p+1})$, 即$\lim_{n\to\infty}\frac{|f(z)|}{R_n^{p+1}}=0$. 则有

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{p}\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}z^{\nu}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\left(\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}+\frac{z}{a_n^2}+\cdots+\frac{z^p}{a_n^{p+1}}\right).$$

Proof. 固定点$z\neq 0$, 取n充分大使得C_n包围点z. 考虑$F(w)=\frac{f(w)}{w^{p+1}(w-z)}$, 对$F(w)$在$C_n$上用留数定理得

$$\int_{C_n}F(w)dw=2\pi\mathtt{i}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}_{w=a_j}F(w)+2\pi\mathtt{i}\mathrm{Res}_{w=0}F(w)+2\pi\mathtt{i}\mathrm{Res}_{w=z}F(w).$$

由$\mathrm{Res}_{w=a_j}f(w)=b_j$知

$$\mathrm{Res}_{w=a_j}F(w)=\frac{b_j}{a_j^{p+1}(a_j-z)}.$$

在$\{|w|<\epsilon<|z|\}$内,

$$\frac{1}{w-z}=\frac{-1}{z}\frac{1}{1-\frac{w}{z}}=-\left(\frac{1}{z}+\frac{w}{z^2}+\frac{w^2}{z^3}+\cdots\right),$$

从而有

$$F(w)=\frac{-1}{w^{p+1}}\left(\frac{1}{z}+\frac{w}{z^2}+\frac{w^2}{z^3}+\cdots\right)\left[f(0)+f'(0)w+\frac{f''(0)}{2}w^2+\cdots\right],$$

意味着

$$\mathrm{Res}_{w=0}F(w)=\frac{-1}{z}\left[\frac{f^{(p)}(0)}{p!}+\frac{1}{z}\frac{f^{(p-1)}(0)}{(p-1)!}+\frac{1}{z^2}\frac{f^{(p-2)}(0)}{(p-2)!}+\cdots+\frac{1}{z^p}f(0)\right].$$

又有

$$\mathrm{Res}_{w=z}F(w)=\frac{f(z)}{z^{p+1}}.$$

取$n\to\infty$得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Res}_{w=a_n}F(w)+\mathrm{Res}_{w=0}F(w)+\mathrm{Res}_{w=z}F(w)=0,$$

意味着

$$\begin{aligned} f(z) &= f(0)+zf'(0)+\cdots+\frac{z^p}{p!}f^{(p)}(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n z^{p+1}}{a_n^{p+1}(z-a_n)} \\ &= \sum_{\nu=0}^{p}\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}z^{\nu}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{z-a_n}+\frac{b_n}{a_n}+\frac{b_n}{a_n^2}z+\cdots+\frac{b_n}{a_n^{p+1}}z^p\right), \end{aligned}$$

上面最后一个等式使用了$z^{p+1}=z^{p+1}-a_n^{p+1}+a_n^{p+1}=(z-a_n)\sum_{\nu=0}^{p}z^{\nu}a_n^{p-\nu}+a_n^{p+1}$. □

3.正弦函数的无穷乘积展开. 由于

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{\pi\coth\pi a}{a}\ (a>0),$$

且$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+z^2}$, $\frac{\pi\coth\pi z}{z}$是$\mathbb{C}$上的亚纯函数, 由全纯函数的唯一性知

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+z^2}=\frac{\pi\coth\pi z}{z}.$$

用$\mathtt{i}z$替代z得

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2-z^2} &= \frac{\pi\coth\pi\mathtt{i}z}{\mathtt{i}z} \\ &= \frac{\pi\left(e^{\pi\mathtt{i}z}+e^{-\pi\mathtt{i}z}\right)}{\mathtt{i}z\left(e^{\pi\mathtt{i}z}-e^{-\pi\mathtt{i}z}\right)} \\ &= -\frac{\pi\cot\pi z}{z}, \end{aligned}$$

或者

$$\pi\cot\pi z=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z}{z^2-n^2},$$

可以重写为

$$\begin{aligned}\pi\cot\pi z &= \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}\\ &= \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}+\frac{1}{z-n}\right)\\ &= \frac{1}{z}+\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

该恒等式

$$\pi\cot\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$$

表示余切函数的**部分分式展开**.

由于

$$\frac{d}{dz}\left(\log\sin\pi z\right)=\pi\cot\pi z,$$

有

$$\frac{d}{dz}\left(\log\frac{\sin\pi z}{\pi z}\right)=\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right).$$

利用

$$\int_{\zeta=0}^{z}\left(\frac{1}{\zeta-n}+\frac{1}{n}\right)d\zeta=\log\left(\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}\right),$$

我们得到

$$\frac{\sin\pi z}{\pi z}=C\prod_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}},$$

其中C是待定常数. 取$z=0$,得$C=1$. 我们有

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}.$$

这里无穷乘积的收敛性表示对通项取对数之后对应无穷和的收敛性.

Lecture 8: 黎曼Zeta函数

1.Gamma函数的无穷乘积展开. 实Gamma函数和Beta函数定义如下

$$\Gamma(x) \triangleq \int_{t=0}^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt,\ x>0,\ B(x,y) \triangleq \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

由分部积分知$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$, 从而根据

$$\Gamma(s)=\frac{\Gamma(s+1)}{s}=\frac{\Gamma(s+2)}{(s+1)s}=\cdots=\frac{\Gamma(s+n)}{(s+n-1)(s+n-2)\cdots(s+1)s},\ s>-n$$

可将$\Gamma(s)$延拓至$\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\cdots\}$. 对于$x>0,y>0$,

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= \left(\int_{t=0}^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt\right)\cdot\left(\int_{u=0}^{\infty} u^{y-1}e^{-u}du\right)\ (u=tv)\\
&= \int_{t=0}^{\infty} t^{x+y-1}e^{-t(1+v)}\left(\int_{v=0}^{\infty} v^{y-1}dv\right)dt\ (w=t(1+v))\\
&= \left(\int_{w=0}^{\infty} w^{x+y-1}e^{-w}dw\right)\cdot\left(\int_{v=0}^{\infty}\frac{v^{y-1}}{(1+v)^{x+y}}dv\right)\\
&= \Gamma(x+y)\cdot\int_{v=0}^{\infty}\frac{v^{y-1}}{(1+v)^{x+y}}dv,
\end{aligned}$$

从而有

$$B(x,y)=\int_{v=0}^{\infty}\frac{v^{y-1}}{(1+v)^{x+y}}dv,$$

利用$v=\frac{\lambda}{1-\lambda}$得

$$B(x,y)=\int_{\lambda=0}^{1}\lambda^{y-1}(1-\lambda)^{x-1}d\lambda,$$

关于x,y对称. 特别地,考虑$x+y=1$的情形, 有

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x},\ 0<x<1$$

称为**实Gamma函数的欧拉反射律**.

利用$\lambda=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\mu}$, 有$\lambda(1-\lambda)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\mu,\ d\lambda=-\frac{d\mu}{4\sqrt{\mu}}$, 从而有

$$\begin{aligned}
B(x,x) &= \int_{\lambda=0}^{1}\lambda^{x-1}(1-\lambda)^{x-1}d\lambda \\
&= 2\int_{\lambda=0}^{\frac{1}{2}}\lambda^{x-1}(1-\lambda)^{x-1}d\lambda \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mu=0}^{1}(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\mu)^{x-1}\mu^{-\frac{1}{2}}d\mu \\
&= 2^{1-2x}\int_{\mu=0}^{1}(1-\mu)^{x-1}\mu^{-\frac{1}{2}}d\mu \\
&= 2^{1-2x}B(x,\frac{1}{2}),
\end{aligned}$$

从而得到

$$\Gamma(2x)\Gamma(\frac{1}{2})=2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})$$

称为**实Gamma函数的加倍公式**.

复Gamma函数定义为

$$\Gamma(z)=\int_{t=0}^{\infty}t^{z-1}e^{-t}dt,\ \mathrm{Re}z>0$$

可由函数方程$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$延拓至$\mathbb{C}$上的亚纯函数, 且

$$\mathrm{Res}_{z=0}\Gamma(z)=\lim_{z\to 0}z\Gamma(z)=\lim_{z\to 0}\Gamma(z+1)=\Gamma(1)=1,$$

$$\mathrm{Res}_{z=-n}\Gamma(z)=\lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z)=\lim_{z\to -n}\frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n-1)\cdots(z+1)z}=\frac{(-1)^n}{n!}.$$

利用实Gamma函数的欧拉反射律及亚纯函数的唯一性可得**复Gamma函数的欧拉反射律**

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

正弦函数的无穷乘积展开建议Gamma函数的无穷乘积展开. 一种计算Gamma函数无穷乘积展开的方法是考虑对数导数$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$的无穷和展开, 然

后求积分取指数. 固定z, h是变量满足$\mathrm{Re}z > h > 0$, 利用

$$\frac{1}{h} = \int_{t=0}^{1} t^{h-1} dt$$

可得

$$\frac{\Gamma(z-h)\Gamma(h)}{\Gamma(z)} = \int_{t=0}^{1} (1-t)^{z-h-1} t^{h-1} dt = \frac{1}{h} + \int_{t=0}^{1} [(1-t)^{z-h-1} - 1] t^{h-1} dt.$$

右边的积分项在0的小邻域里关于h是全纯的, 可做泰勒展开得

$$\frac{\Gamma(z-h)\Gamma(h)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{h} + \int_{t=0}^{1} [(1-t)^{z-1} - 1] t^{-1} dt + o(h),$$

这是$B(z-h, z)$关于变量h在$h=0$的洛朗展开. 另一方面

$$\frac{\Gamma(z-h)\Gamma(h)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{\Gamma(z)} \left(\Gamma(z) - h\Gamma'(z) + \cdots\right) \left(\frac{1}{h} + A + \cdots\right),$$

其中A是常数. 比较上面两式的常数项可得

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_{t=0}^{1} [1 - (1-t)^{z-1}] t^{-1} dt + A, \ \mathrm{Re}z > 0.$$

利用

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{1-(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-t)^n$$

得

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = A + \int_{t=0}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} [(1-t)^n - (1-t)^{n+z-1}] dt = A + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z}\right),$$

即

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z}\right) - C,$$

其中C是待定常数. 对上式两边积分取指数得到

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{Cz} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}.$$

令$z=1$得

$$1=e^{C}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}},$$

因此

$$C=-\log\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}}=\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}-\log N\right)$$

等于**欧拉常数**γ. 最后得到$\Gamma(z)$的无穷乘积展开

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=e^{\gamma z}z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}.$$

利用实Gamma函数的加倍公式及亚纯函数的唯一性可得**复Gamma函数的加倍公式**

$$\Gamma(2z)\Gamma(\frac{1}{2})=2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}).$$

2.黎曼Zeta函数的亚纯延拓. 黎曼Zeta函数定义为

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}},\ \mathrm{Re}\ s>1.$$

这里$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$在$\{\mathrm{Re}\ s\geq\sigma_0>1\}$上一致收敛, 从而表示$\{\mathrm{Re}\ s>1\}$上的全纯函数, 原因是: 设$s=\sigma+\mathtt{i}\tau$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n^s}\right| &= \left|\frac{1}{e^{s\log n}}\right|\\ &= \left|\frac{1}{e^{\sigma\log n}e^{\mathtt{i}\tau\log n}}\right|\\ &= \left|\frac{1}{n^{\sigma}}\right|\\ &\leq \frac{1}{n^{\sigma_0}}\end{aligned}$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma_0}}$收敛.

对于Re $s > 1$,

$$\begin{aligned}\int_{t=0}^{\infty}\frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt &= \int_{t=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}t^{s-1}e^{-nt}dt\ (nt\to t)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\int_{t=0}^{\infty}t^{s-1}e^{-t}dt\\ &= \Gamma(s)\zeta(s),\end{aligned}$$

意味着

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_{t=0}^{\infty}\frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt.$$

我们用围道积分定义$\zeta(s)$的亚纯延拓, 来避免条件Re $s > 1$不满足时被积函数在$(0,\infty)$上的可积性问题. 设围道C从$+\infty$出发沿实轴上部分走到原点, 沿正方向绕原点一周, 然后沿实轴下部分走到$+\infty$, 则对于Re $s > 1$,

$$\zeta(s) = \frac{-1}{2\mathtt{i}\sin s\pi\Gamma(s)}\int_C\frac{(-w)^{s-1}}{e^w-1}dw.$$

Proof. 设$(-w)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-w)}$为定义在$\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$上的单值全纯分支, $\log(-w) = \log\rho + \mathtt{i}\phi,\ \phi\in(-\pi,\pi)$, 则有

$$\begin{aligned}\int_C\frac{(-w)^{s-1}}{e^w-1}dw &= \int_{\rho=\infty}^{0}\frac{e^{(s-1)(\log\rho-\mathtt{i}\pi)}}{e^\rho-1}d\rho + \int_{\rho=0}^{\infty}\frac{e^{(s-1)(\log\rho+\mathtt{i}\pi)}}{e^\rho-1}d\rho\\ &= \left(e^{(s-1)\pi\mathtt{i}} - e^{-(s-1)\pi\mathtt{i}}\right)\int_{\rho=0}^{\infty}\frac{e^{(s-1)\log\rho}}{e^\rho-1}d\rho\\ &= 2\mathtt{i}\sin((s-1)\pi)\int_{\rho=0}^{\infty}\frac{e^{(s-1)\log\rho}}{e^\rho-1}d\rho\\ &= -2\mathtt{i}\sin\pi s\int_{\rho=0}^{\infty}\frac{e^{(s-1)\log\rho}}{e^\rho-1}d\rho\\ &= -2\mathtt{i}\sin\pi s\Gamma(s)\zeta(s).\end{aligned}$$

□

当条件Re $s>1$不满足时, 我们可以用

$$\zeta(s)=\frac{-1}{2\mathtt{i}\sin s\pi\Gamma(s)}\int_C\frac{(-w)^{s-1}}{e^w-1}dw=\frac{\mathtt{i}\Gamma(1-s)}{2\pi}\int_C\frac{(-w)^{s-1}}{e^w-1}dw$$

定义$\zeta(s)$在整个$\mathbb{C}$上的亚纯延拓.

3.黎曼Zeta函数的极点集合. 由于积分$\int_C\frac{(-w)^{s-1}}{e^w-1}dw$是整函数, $\Gamma(1-s)$的极点为$s=1,2,\cdots\in\mathbb{Z}^+$, 但$\zeta(s)$在$\{\text{Re } s>1\}$内全纯, 因此$\zeta(s)$唯一可能的单极点是$s=1$. 因

$$\frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\int_C\frac{1}{e^w-1}dw=1$$

且

$$\Gamma(1-s)=\frac{-1}{s-1}+\cdots$$

故$\text{Res}_{s=1}\zeta(s)=1$. 利用

$$\zeta(s)=\frac{\mathtt{i}\Gamma(1-s)}{2\pi}\int_C\frac{(-w)^{s-1}}{e^w-1}dw$$

和

$$\frac{s}{e^s-1}=1-\frac{1}{2}s+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n)!}s^{2n}$$

我们知道, 对任意非负正数k, $s=-k$, $0<\epsilon<1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\int_C\frac{(-w)^{s-1}dw}{e^w-1} &= \frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\int_{|w|=\epsilon}\frac{(-w)^{-k-1}dw}{e^w-1}\\ &= \text{Res}_{w=0}\frac{(-1)^{k+1}}{w^{k+1}(e^w-1)}\\ &= \begin{cases}\frac{-1}{2} & k=0\\ 0 & k=2m\\ \frac{(-1)^{m-1}B_m}{(2m)!} & k=2m-1\end{cases}\end{aligned}$$

又因为$\Gamma(1+k)=k!$, 从而对于$m\in\mathbb{Z}^+$,有

$$\zeta(0)=-\frac{1}{2},\ \zeta(-2m)=0,\ \zeta(1-2m)=\frac{(-1)^m B_m}{2m}.$$

这里$s=-2m\ (m\in\mathbb{Z}^+)$称为黎曼Zeta函数的平凡零点.

4.黎曼Zeta函数的函数方程.

$$\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s).$$

Proof. 设围道C_n从$+\infty$开始, 沿着实轴上部分到$(2n+1)\pi$, 然后沿着$(\pm1\pm\mathtt{i})(2n+1)\pi$为顶点的矩形逆时针一周回到$(2n+1)\pi$, 再沿着实轴下部分到$+\infty$. 由留数定理知

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\int_{C_n-C}\frac{(-w)^{s-1}}{e^w-1}dw &= \sum_{m=1}^{n}\left[\mathrm{Res}_{w=2m\pi\mathtt{i}}\frac{(-w)^{s-1}}{e^w-1}+\mathrm{Res}_{w=-2m\pi\mathtt{i}}\frac{(-w)^{s-1}}{e^w-1}\right]\\ &= \sum_{m=1}^{n}\left[(2m\pi\mathtt{i})^{s-1}+(-2m\pi\mathtt{i})^{s-1}\right]\\ &= (2\pi)^{s-1}\left[(\mathtt{i})^{s-1}+(-\mathtt{i})^{s-1}\right]\sum_{m=1}^{n}m^{s-1}\\ &= (2\pi)^{s-1}\cdot 2\frac{e^{\mathtt{i}\frac{\pi}{2}s}-e^{-\mathtt{i}\frac{\pi}{2}s}}{2\mathtt{i}}\sum_{m=1}^{n}m^{s-1}\\ &= 2\cdot(2\pi)^{s-1}\sin\frac{\pi}{2}s\sum_{m=1}^{n}m^{s-1}.\end{aligned}$$

假定$\mathrm{Re}\ s<0$, 由$\int_{C_n}\frac{(-w)^{s-1}}{e^w-1}dw\to 0\ (n\to\infty)$知

$$2\mathtt{i}\sin s\pi\Gamma(s)\zeta(s)=4\pi\mathtt{i}\cdot(2\pi)^{s-1}\zeta(1-s)\sin\frac{\pi}{2}s,\ \mathrm{Re}\ s<0,$$

从而有

$$\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s),\ s\in\mathbb{C}.$$

□

由Gamma函数的加倍公式知

$$\Gamma(s) = 2^{s-1}\Gamma(\frac{s+1}{2})\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-\frac{1}{2}}$$

定义

$$\xi(s) \triangleq \frac{1}{2}s(s-1)\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s),$$

函数方程简化为

$$\xi(1-s) = \xi(s).$$

Lecture 9: 辐角原理与儒歇定理

1.辐角原理. 设U是$\mathbb{C}$中开集, $f(z)\in\mathcal{H}(U)$, $a\in U$, 若$z=a$是$f(z)$的$k(\geq 1)$阶零点, 则

$$f(z)=(z-a)^k g(z),$$

其中$g(z)\in\mathcal{H}(U)$满足$g(a)\neq 0$. 取$f(z)$的对数导数得

$$\frac{d}{dz}\log f(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{k}{z-a}+\frac{g'(z)}{g(z)},$$

这里$\frac{g'(z)}{g(z)}$在点a的小邻域内全纯, 故能展成以a为心的泰勒级数, 因此$z=a$是对数导数的孤立奇点, 主要部分为$\frac{k}{z-a}$.

设Ω是$\mathbb{C}$中的有界开集, 具有分段光滑边界, U是$\overline{\Omega}$的开邻域. 若$f(z)\in\mathcal{H}(U)$且在$\partial\Omega$上不取零, 则对U上亚纯函数$\frac{f'}{f}$用留数定理可得$f(z)$在Ω内的总零点个数(计重数)等于

$$\sharp_{\text{zeros}}(f,\Omega)=\frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\int_{\partial\Omega}\frac{f'}{f}dz=\frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\int_{\partial\Omega}d\log f.$$

类似地, 若$f(z)$是U上的亚纯函数且在$\partial\Omega$上无零点和极点, 则对U上亚纯函数$\frac{f'}{f}$用留数定理可得$f(z)$在Ω内的总零点个数(计重数)-总极点个数(计重数)等于

$$\sharp_{\text{zeros}}(f,\Omega)-\sharp_{\text{poles}}(f,\Omega)=\frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\int_{\partial\Omega}\frac{f'}{f}dz=\frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\int_{\partial\Omega}d\log f.$$

另一方面,

$$\frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\int_{\partial\Omega}d\log f=\frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\int_{\partial\Omega}(d\log|f|+\mathtt{i}d\arg f)=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}d\arg f.$$

因此, 可以得到如下辐角原理

辐角原理: 设Ω是$\mathbb{C}$中的有界开集, 具有分段光滑边界, U是$\overline{\Omega}$的开邻域.

若$f(z)$是U上的亚纯函数且在$\partial\Omega$上无零点和极点, 则

$$\sharp_{\text{zeros}}(f,\Omega)-\sharp_{\text{poles}}(f,\Omega)=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial\Omega}\arg f.$$

注:扩充复平面$\mathbb{C}_\infty$上亚纯函数的零点个数(计重数)与极点个数(计重数)相等.

2.儒歇定理. 设Ω是$\mathbb{C}$中的有界开集, 具有分段光滑边界, U是$\overline{\Omega}$的开邻域. 若$f(z)$是U上的亚纯函数且在$\partial\Omega$上无零点和极点, $g(z)$也是U上的亚纯函数, 在$\partial\Omega$上有$|g|<|f|$, 则

$$\sharp_{\text{zeros}}(f,\Omega)-\sharp_{\text{poles}}(f,\Omega)=\sharp_{\text{zeros}}(f+g,\Omega)-\sharp_{\text{poles}}(f+g,\Omega).$$

Proof. 对于$0\le t\le 1$, $f(z)+tg(z)$在$\partial\Omega$上没有零点和极点, 故有

$$\frac{1}{2\pi \mathtt{i}}\int_{\partial\Omega}\frac{f'+tg'}{f+tg}dz=\sharp_{\text{zeros}}(f+tg,\Omega)-\sharp_{\text{poles}}(f+tg,\Omega),$$

右边总是一个整数, 而关于$t\in[0,1]$的连续性意味着它是一个常数, 故在$t=0$的取值与在$t=1$的取值相等. □

3.利用儒歇定理证明代数学基本定理. 考虑n阶多项式$F(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ ($a_n\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $n\ge 1, a_0,\cdots,a_{n-1}\in\mathbb{C}$). 取$f(z)=a_nz^n$, $g(z)=\sum_{k=0}^{n-1}a_kz^k$. 对于充分大的$R$, 当$|z|=R$时$|f|>|g|$, 在$\Omega=\{|z|<R\}$上用儒歇定理得

$$\sharp_{\text{zeros}}(f,\Omega)=\sharp_{\text{zeros}}(f+g,\Omega),$$

从而有

$$\sharp_{\text{zeros}}(F,\Omega)=n.$$

4.Hurwitz定理. 设Ω是$\mathbb{C}$中的区域, $f_n(z)\in\mathcal{H}(\Omega)$在$\Omega$中内闭一致收敛于非常值(全纯) 函数$f(z)$. 若$f_n(z)$在$\Omega$上是单叶的, 则$f(z)$在$\Omega$上也是单叶的.

Proof. 假设存在两个不同点$a_1, a_2 \in \Omega$使得$f(a_1) = f(a_2) = b$. 因为$f(z)$非常值, 所以$f(z) - b$在Ω上不恒为零, 从而零点孤立. 这意味着存在某个$r > 0, \epsilon > 0$使得两个闭圆盘$\{|z - a_j| \leq r\}$在Ω中不相交, 且当$|z - a_j| = r\ (j = 1, 2)$时

$$|f(z) - b| \geq \epsilon.$$

由于$\{f_n(z)\}$在Ω上内闭一致收敛到$f(z)$, 存在充分大$n \in \mathbb{N}$使得在紧集$\{|z-a_1| \leq r\} \cup \{|z - a_2| \leq r\}$上有

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

由于

$$f_n(z) - b = f(z) - b + (f_n(z) - f(z)),$$

且在$\{|z - a_j| = r\}\ (j = 1, 2)$上

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon \leq |f(z) - b|,$$

利用儒歇定理, 我们知道$f_n(z) - b$与$f(z) - b$在$\{|z - a_j| < r\}\ (j = 1, 2)$内有相同的零点个数, 这意味着$f_n(z) - b$有两个互异零点, 与$f_n(z)$在$\Omega$上单叶矛盾. □

5.利用儒歇定理证明开映射定理. 设Ω是$\mathbb{C}$中的区域, $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$. $z_0 \in \Omega$, $\overline{D_r(z_0)} \subset \Omega\ (r > 0)$, $w_0 = f(z_0)$, z_0是$f(z) - w_0$的n阶零点$(n \geq 1)$. 对于充分小的$r > 0$,存在$\epsilon > 0$使得对任意$b \in D_\epsilon(w_0)$, $f(z) - b$在$D_r(z_0)$内有n个单零点, 即$D_\epsilon(w_0) \subset f(D_r(z_0))$.

Lecture 10: 共形映射

1.复导数的几何性质. 设$U \subset \mathbb{C}$是区域, $f(z) \in \mathcal{U}$, $z_0 \in U$, $f'(z_0) \neq 0$. 设$\gamma(t)$ $(0 \le t \le 1)$ 是过z_0的光滑曲线, $\gamma(0) = z_0$. 则$\Gamma(t) = f(\gamma(t))$是过点$w_0 = f(z_0)$的光滑曲线, $\Gamma(0) = w_0$. 由$\Gamma'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$知$\Gamma'(0) = f'(z_0)\gamma'(0)$, 这意味着$\arg\Gamma'(0) - \arg\gamma'(0) = \arg f'(z_0)$ 与$\gamma(t)$的选取无关. 因此, 在映射$w = f(z)$之下, 在z_0处两条光滑曲线的夹角的大小及旋转方向保持不变, 称为$f(z)$在z_0处的保角性.

由$f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$知

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \to z_0, z \in \gamma} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = \lim_{z \to z_0, z \in \gamma} \left| \frac{w - w_0}{z - z_0} \right|.$$

因此, 在映射$w = f(z)$之下, 任意以z_0为顶点的小三角形映成以w_0为顶点的曲边三角形, 它们的微分三角形是相似的.

以上这两个性质称为映射的共形性. 可以看到, 若$f(z) \in \mathcal{H}(U)$, $f'(z) \neq 0$, 则$f(z)$是**共形映射**.

2.双全纯映射.

(1) 设$U \subset \mathbb{C}$是区域, $f(z) \in \mathcal{H}(U)$, 则$f(U)$是一个区域.

(2) 若$w = f(z)$在U上单叶全纯, 将U映成G, 则反函数$z = g(w)$在G上单叶全纯将G映成U. 因此单叶全纯映射也称为**双全纯映射**, 自然是共形映射.

(3) **定理**: 设$U \subset \mathbb{C}$是区域, γ是U内分段光滑简单闭曲线, 其内部$\Omega_\gamma \subset U$. 若$f(z) \in \mathcal{H}(U)$且将γ一一映射成简单闭曲线Γ, 则$w = f(z)$在Ω_γ上单叶, 将Ω_γ映成Γ的内部Ω_Γ.

3.具有非零复导数的柯西黎曼方程的另一种解释: 保角大小保定向的实线性映射. 一个从$\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$到$\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$的实线性映射是一个复线性同构当且仅当它是保角大小保定向的. 这里保定向意味着实线性映射对应的二阶矩阵行列式大于零.

Proof. 设$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是一个实线性映射. 假设T保角度大小, 则

$$\left\langle T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \ \left\langle T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$

意味着

$$ab + cd = 0, \ a^2 + c^2 = b^2 + d^2.$$

由于a, c不全为零, 不妨假设$a \neq 0$($c \neq 0$是完全类似的). 设$\lambda \in \mathbb{R}$使得$d = \lambda a$, 代入$ab + cd = 0$得$b = -\lambda c$. 由$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$知$a^2 + c^2 = \lambda^2(c^2 + a^2)$, 从而$\lambda = \pm 1$. 故当$\lambda = 1$时,

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

当$\lambda = -1$时,

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

因为T保定向, 所以$\det T > 0$. 故$\lambda = 1$且

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

这意味着实线性映射T是复线性同构.

另一方面, 假设实线性映射是复线性同构, 则

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

其中$\det T = a^2 + b^2 > 0$. 从而有

$$T^t T = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = (a^2 + b^2) I_2.$$

由$\mathbb{R}^2$中两个向量之间的夹角余弦公式知

$$\frac{(T\vec{\xi})\cdot(T\vec{\eta})}{\parallel T\vec{\xi}\parallel\parallel T\vec{\eta}\parallel}=\frac{\vec{\xi}^t T^t T\vec{\eta}}{\sqrt{\vec{\xi}^t T^t T\vec{\xi}}\sqrt{\vec{\eta}^t T^t T\vec{\eta}}}=\frac{\vec{\xi}^t\vec{\eta}}{\sqrt{\vec{\xi}^t\vec{\xi}}\sqrt{\vec{\eta}^t\vec{\eta}}}=\frac{\vec{\xi}\cdot\vec{\eta}}{\parallel\vec{\xi}\parallel\parallel\vec{\eta}\parallel}$$

这意味着$\vec{\xi},\vec{\eta}$夹角等于$T\vec{\xi},T\vec{\eta}$夹角, 即T保角大小. $\det T=a^2+b^2>0$意味着T保定向.

$\square$

4.局部单叶全纯函数的另一种刻画. 设$z=x+\mathtt{i}y$, $w=u+\mathtt{i}v$, $U\subset\mathbb{C}$是区域, 则$w=f(z)\in\mathcal{H}(U)$, $f'(z)\neq 0$等价于$w=f(z)$是实可微保定向映射$(x,y)\mapsto(u(x,y),v(x,y))$, 且将$(u,v)$-空间的欧式度量$du^2+dv^2$拉回到$(x,y)$-空间上, 是$(x,y)$-空间上欧式度量$dx^2+dy^2$的正函数$\lambda(x,y)$倍. 这个正函数$\lambda(x,y)$称为**共形因子**.

Proof. 若$w=f(z)$双全纯映射, 则雅可比矩阵

$$T=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$$

其中$a = \frac{\partial u}{\partial x}$, $b = \frac{\partial v}{\partial x}$. 拉回度量为

$$\begin{aligned}
f^*(du^2+dv^2) &= f^*\left(\begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} T^t T \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} ((a^2+b^2)I_2) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \\
&= (a^2+b^2) \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \\
&= \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)(dx^2+dy^2) \\
&= |f'(z)|^2(dx^2+dy^2),
\end{aligned}$$

其中$|f'(z)|^2$是共形因子.

另一方面, 若

$$f^*(du^2+dv^2) = \lambda(x,y)(dx^2+dy^2),$$

其中$\lambda(x,y) > 0$, 且雅可比矩阵

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix},$$

则由

$$f^*(du^2+dv^2) = f^*\left(\begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} T^t T \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

和

$$\lambda(x,y)(dx^2+dy^2) = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} (\lambda(x,y)I_2) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

可得

$$\begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} T^t T \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} (\lambda(x,y) I_2) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

且$T^t T = \lambda(x,y) I_2$. 从而可知T保角大小, 又由f保定向得$\det T > 0$, 故有柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

□

5.1维复流形之黎曼球面. 设

$$S^2 \quad = \quad \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\},$$

$N(0,0,1)$是北极点, $\mathbb{C}$表示(x_1, x_2)-平面, $z = x + \mathtt{i}y$表示$\mathbb{C}$中的点, $f_N : S^2 \setminus N \to \mathbb{C}$是球极投影映射

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3},\ y = \frac{x_2}{1 - x_3},$$

其逆映射f_N^{-1}为

$$x_1 = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, x_2 = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, x_3 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

直接计算可得f_N^{-1}映射下的诱导度量为

$$(f_N^{-1})^* \left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \right) = \frac{4}{(1 + |z|^2)^2} dz d\bar{z}.$$

$S(0,0,-1)$是南极点, $\mathbb{C}$表示(x_1, x_2)-平面, $z' = x' + \mathtt{i}y'$表示$\mathbb{C}$中的点, $f_S : S^2 \setminus S \to \mathbb{C}$是球极投影映射

$$x' = \frac{x_1}{1 + x_3},\ y' = \frac{x_2}{1 + x_3},$$

其逆映射f_N^{-1}为

$$x_1=\frac{-2x'}{1+x'^2+y'^2},x_2=\frac{2y'}{1+x'^2+y'^2},x_3=\frac{1-x'^2-y'^2}{1+x'^2+y'^2}.$$

复合映射$f_S\circ f_N^{-1}:(x,y)\mapsto(x_1,x_2,x_3)\mapsto(x',y')$为

$$x'=\frac{x}{x^2+y^2},y'=\frac{y}{x^2+y^2},$$

直接计算可得

$$\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y}\\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\\ \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\end{pmatrix}=\frac{-1}{(x^2+y^2)^2},$$

故$f_S\circ f_N^{-1}$是反定向的. 为了使得保定向, 我们考虑映射

$$(x,y)\mapsto(x_1,x_2,x_3)\mapsto(x',-y'),$$

是$\mathbb{C}\setminus\{0\}$到$\mathbb{C}\setminus\{0\}$的保定向共形映射, 因此定义了一个双全纯映射. 直接计算可知

$$(x+\mathtt{i}y)(x'-\mathtt{i}y')=1.$$

因此, 我们得到坐标图$S^2\setminus N$以$z=x+\mathtt{i}y$为复坐标, 坐标图$S^2\setminus S$以$z'=x'-\mathtt{i}y'$为复坐标, 它们通过$zz'=1$双全纯相关. 这使得S^2成为复1维的复流形, 称为**黎曼球面**, 自然等同于扩充复平面$\mathbb{C}_\infty$. 度量$ds^2=\frac{4}{(1+|z|^2)^2}dzd\bar{z}$ 称为**球度量**或**椭圆度量**.

6.分式线性变换. 一个分式线性变换(莫比乌斯变换)$T:S^2\to S^2$定义为

$$w=T(z)\triangleq\frac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d\in\mathbb{C},\ ad-bc\neq 0.$$

直接计算可知

$$T'(z)=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2},\ z=T^{-1}(w)=\frac{dw-b}{-cw+a}.$$

可见分式线性变换T是S^2上的亚纯自同构.

设$z_1,z_2,z_3,z_4\in S^2$是4个互异的点,

$$(z_1,z_2,z_3,z_4)\triangleq\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}:\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$$

称为这四个点的**交比**, 其中

$$(\infty,z_2,z_3,z_4)\triangleq\lim_{z_1\to\infty}\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}:\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right).$$

(1)分式线性变换保交比. 设$z_1,z_2,z_3,z_4\in S^2$是4个互异点, $w_j=T(z_j)=\frac{az_j+b}{cz_j+d}$ $(j=1,2,3,4)$, 则有

$$\begin{aligned}w_j-w_k&=\frac{az_j+b}{cz_j+d}-\frac{az_k+b}{cz_k+d}\\&=\frac{(az_j+b)(cz_k+d)-(az_k+b)(cz_j+d)}{(cz_j+d)(cz_k+d)}\\&=\frac{(ad-bc)(z_j-z_k)}{(cz_j+d)(cz_k+d)},\end{aligned}$$

从而可得

$$(w_1,w_2,w_3,w_4)=(z_1,z_2,z_3,z_4).$$

注意:虽然在分式线性变换中有4个复常数a,b,c,d, 但这4个常数不是相互独立的, 因为这4个常数乘以相同的非零复数不改变分式线性变换的取值. 故在分式线性变换中仅有3个复参数. 在S^2上给定两组不同的复数(z_1,z_2,z_3)和(w_1,w_2,w_3), 存在唯一的分式线性变换$w=T(z)$使得$T(z_j)=w_j$ $(j=1,2,3)$, 具体表达为

$$\frac{w_1-w_3}{w_1-w}:\frac{w_2-w_3}{w_2-w}=\frac{z_1-z_3}{z_1-z}:\frac{z_2-z_3}{z_2-z}.$$

(2)S^2**上的亚纯自同构群**

$$\mathrm{Aut}(S^2)=\left\{T(z)=\frac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d\in\mathbb{C},\ ad-bc=1\right\}.$$

Proof. 首先, $T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, $(a,b,c,d\in\mathbb{C},\ ad-bc=1)$ 是S^2上的亚纯自同构映射.

反之, 若$f(z)$是S^2上的亚纯自同构映射, 则存在分式线性变换T使得$g=f\circ T\in\mathrm{Aut}(S^2)$满足$g(0)=0$, $g(\infty)=\infty$. 从而可知$g\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, 故$g(z)=az+b$ $(a,b\in\mathbb{C},a\neq 0)$, 因此$f(z)$是分式线性变换. □

(3)分式线性变换将直线或圆构成的集合映成集合自身. 复平面$\mathbb{C}$上一般的直线或圆的方程表示如下：

$$\alpha z\bar{z}+bz+\bar{b}\bar{z}+\gamma=0,\ \alpha,\gamma\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{C},\ \Delta=|b|^2-\alpha\gamma>0.$$

考虑分式线性变换

$$w=\frac{az+b}{cz+d},\ ad-bc\neq 0,$$

若$c\neq 0$, 则

$$w=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c}}{cz+d},$$

意味着分式线性变换可以分解为映射的复合

$$z\mapsto cz+d\mapsto\frac{1}{cz+d}\mapsto\frac{\frac{bc-ad}{c}}{cz+d}\mapsto w.$$

由于平移或者乘非零复数保持集合不变, 故只需验证映射$z\mapsto\frac{1}{z}$保持集合不变, 在该映射下直线或圆的方程变成

$$\gamma z\bar{z}+\bar{b}z+b\bar{z}+\alpha=0,$$

也为直线或圆的方程.

(4)分式线性变换保直线或圆的定向. 四个相异点在同一直线或圆上当且仅当$\mathrm{Im}(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$. 若$z_1 \to z_2 \to z_3$是圆或直线$C$的定向, 则称$\{z|\mathrm{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0\}$为$C$右边; $\{z|\mathrm{Im}(z, z_1, z_2, z_3) < 0\}$为$C$左边. 设$T$是一个分式线性变换, $\gamma = T(C)$, 则T将C的左边和右边分别映成γ关于定向$T(z_1) \to T(z_2) \to T(z_3))$ 的左边和右边.

比如, 求分式线性变换$T(z)$将$D = \{z||z| > 1, |z-1| < 2\}$共形映射成$G = \{w|0 < \mathrm{Re}w < 1\}$.

(5)分式线性变换保对称性. 若分式线性变换T满足$T(\mathbb{R}\cup\{\infty\}) = \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, 则存在$a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0$使得$Tz = \frac{az+b}{cz+d}$. 这意味着$\overline{Tz} = T\bar{z}$. 若$T(\mathbb{R}\cup\{\infty\}) = C$(圆), 则$w = Tz$与$w^* = T\bar{z}$关于$C$对称当且仅当$T^{-1}w = \overline{T^{-1}w^*}$. **注意:**这个刻画与$T$的选取无关. 因此, 我们有如下定义:

设C(圆或直线)过点z_1, z_2, z_3, 若$(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}$, 则称$z, z^*$**关于$C$对称**. 若$C$是直线, 不妨设$z_3 = \infty$, 则有$(z^*, z_1, z_2, \infty) = \overline{(z, z_1, z_2, \infty)}$, 意味着

$$\frac{z^* - z_2}{z_1 - z_2} = \overline{\frac{z - z_2}{z_1 - z_2}},$$

从而可得

$$z^* = z_2 + (z_1 - z_2)\overline{\frac{z - z_2}{z_1 - z_2}}.$$

若C是圆周$|z - a| = R$, 则

$$\begin{aligned}
\overline{(z, z_1, z_2, z_3)} &= \overline{(z-a, z_1-a, z_2-a, z_3-a)} \\
&= (\bar{z} - \bar{a}, \frac{R^2}{z_1 - a}, \frac{R^2}{z_2 - a}, \frac{R^2}{z_3 - a}) \\
&= (\frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}}, z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a) \\
&= (\frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a, z_1, z_2, z_3),
\end{aligned}$$

可知
$$z^*=\frac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}}+a.$$

分式线性变换保对称性. 具体地, 设C_1, C_2是圆或直线, T是分式线性变换, 若$T(C_1)=C_2$, z和z^*关于C_1对称, 则$T(z)$和$T(z^*)$关于C_2对称.

Proof. 若C_1或C_2是实轴, 则由对称的定义可得结论. 若C_1, C_2均不是实轴, 固定分式线性变换S使得$S(C_1)=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, 设$z, z^*$关于$C_1$对称, 则
$$Sz^*=\overline{Sz},$$
意味着
$$\overline{S\circ T^{-1}(Tz)}=S\circ T^{-1}(Tz^*),$$
又因$S\circ T^{-1}(C_2)=S(C_1)=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, 故有$Tz$与$Tz^*$关于$C_2$对称. □

比如, 求分式线性变换$T(z)$将$C_1=\{|z|=2\}$映射成$C_2=\{|z+1|=1\}$满足$T(-2)=0,\ T(0)=\mathtt{i}$.

7.常见的共形映射. 设上半平面$\mathbb{H}=\{\mathrm{Im}z>0\}$, 单位圆盘$\mathbb{D}=\{|z|<1\}$.
(1)求所有分式线性变换$T:\mathbb{H}\to\mathbb{D}$ 满足$T(z_0)=0,\ z_0\in\mathbb{H}$.
(2)求所有分式线性变换$T:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 满足$T(z_0)=0,\ z_0\in\mathbb{D}$.
(3)求所有分式线性变换$T:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$.

8.一个特殊2-1全纯映射. 映射
$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

是指数函数与余弦函数之间的桥梁. 设$z=re^{\mathtt{i}\theta}$, $w=u+\mathtt{i}v$, 则

$$u=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\left(re^{\mathtt{i}\theta}+\frac{1}{r}e^{-\mathtt{i}\theta}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta,$$

$$v=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{2}\left(re^{\mathtt{i}\theta}+\frac{1}{r}e^{-\mathtt{i}\theta}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta.$$

我们用

$$\begin{cases} u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta \\ v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta \end{cases}$$

其中$\theta\in[0,2\pi]$, 表示半径为r的圆$(r\cos\theta, r\sin\theta)$在映射$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$下的像.

当$r>1$时,

$$\begin{cases} u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta \\ v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta \end{cases}$$

定义的曲线为以原点为中心,长半轴为$\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$, 短半轴为$\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)$ 的椭圆, θ从0变到2π时该椭圆为逆时针方向.

当$r<1$时,

$$\begin{cases} u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta \\ v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta \end{cases}$$

定义的曲线为以原点为中心,长半轴为$\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$, 短半轴为$\frac{-1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)$ 的椭圆, θ从0变到2π时该椭圆为顺时针方向.

当$r=1$时,曲线恰好是区间$[-1,1]$(覆盖两次).

Lecture 11:正规族

1.定义. (1)设$\Omega\subset\mathbb{C}$是一个区域, (S,d)是一个度量空间, $\mathcal{F}\triangleq\{f(z):\Omega\to(S,d)\}$是区域$\Omega$上的一个函数族, $E\subset\Omega$是一个子集, 若对任意$\epsilon>0$, 存在$\delta(\epsilon)>0$ 使得对任意$z_1,z_2\in E$, $|z_1-z_2|<\delta$, 对任意$f\in\mathcal{F}$有$d(f(z_1),f(z_2))<\epsilon$, 则$\mathcal{F}$在$E$上**等度连续**.

(2)若$\mathcal{F}$在任意紧集$K\subset\Omega$上等度连续, 则$\mathcal{F}$在Ω上**内闭等度连续**.

(3)若对任意紧集$K\subset\Omega$, 任意$z\in K$, 任意$f\in\mathcal{F}$, 存在$M(K)>0$使得$|f(z)|\le M(K)$, 则称$\mathcal{F}$在Ω上**内闭一致有界**.

(4)若对于$\mathcal{F}$中的任意函数列$\{f_n\}$, 存在子列$\{f_{n_k}\}$在Ω中内闭一致收敛到f, 则称$\mathcal{F}$是**正规**的. 有时内闭一致收敛也称为**正规收敛**.
注意:极限函数f可能不属于$\mathcal{F}$.

2.Arzela-Ascoli定理(连续函数族). 设$\Omega\subset\mathbb{C}$是一个区域, (S,d)是一个完备度量空间, $\mathcal{F}=\{f(z):\Omega\to(S,d)\}$ 是区域Ω上的一个连续函数族, 则$\mathcal{F}$是正规族当且仅当
(1)$\mathcal{F}$在Ω上内闭等度连续;
(2)对任意$z\in\Omega$, $G_z\triangleq\{f(z),f\in\mathcal{F}\}$在$S$中具有紧的闭包.

Proof. **必要性.** (1)反证法. 假设存在紧集$K\subset\Omega$使得$\mathcal{F}$在K上不是等度连续的, 则存在$\epsilon>0$, 点列$\{z_n\},\{z_n'\}\subset K$, $\{f_n\}\subset\mathcal{F}$ 使得$|z_n-z_n'|<\frac{1}{n}$, 而$d(f_n(z_n),f_n(z_n'))\ge\epsilon$对所有$n$成立. 由$K$是紧集可取$\{z_n\},\{z_n'\}$的子列收敛到一个公共的极限$z''\in K$. 由$\mathcal{F}$正规, 存在$\{f_n\}$的子列在$K$上一致收敛. 取相同的子列指标$n_k$. $\{f_{n_k}\}$的极限函数f 在K上是一致连续的. 因此, 存在k_0使

得$k\geq k_0$时,

$$\begin{aligned} d(f_{n_k}(z_{n_k}),f_{n_k}(z'_{n_k})) &\leq d(f_{n_k}(z_{n_k}),f(z_{n_k}))+d(f(z_{n_k}),f(z'_{n_k}))+d(f(z'_{n_k}),f_{n_k}(z'_{n_k})) \\ &< \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

矛盾.

(2)设$\{w_n\}\subset\overline{G_z}$, 对每个$w_n$, 存在$f_n\in\mathcal{F}$使得$d(f_n(z),w_n)<\frac{1}{n}$. 由$\mathcal{F}$正规知, 存在$\{f_{n_k}\}$内闭一致收敛, 从而$\{f_{n_k}(z)\}$收敛到$w_0\in\overline{G_z}$. 故有$\{w_{n_k}\}$收敛到$w_0\in\overline{G_z}$. 因此$\overline{G_z}\subset S$是紧集.

充分性. 在Ω中取有理点列(稠密可数)$\{\zeta_k\}$, 考虑函数列$\{f_n\}\subset\mathcal{F}$, 由(2)知$\{f_n(\zeta_1)\}$包含于$S$中的某个紧集, 故存在子列

$$f^{(1)}_{n_1}(z),f^{(1)}_{n_2}(z),\cdots,f^{(1)}_{n_k}(z),\cdots \text{在}\zeta_1\text{收敛}$$

由$\{f^{(1)}_{n_j}(\zeta_2)\}$包含于$S$中的某个紧集知, 存在子列

$$f^{(2)}_{n_1}(z),f^{(2)}_{n_2}(z),\cdots,f^{(2)}_{n_k}(z),\cdots \text{在}\zeta_1,\zeta_2\text{收敛}$$

以此类推, 存在子列

$$f^{(s)}_{n_1}(z),f^{(s)}_{n_2}(z),\cdots,f^{(s)}_{n_k}(z),\cdots \text{在}\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_s\text{收敛}$$

取对角线序列

$$f^{(1)}_{n_1}(z),f^{(2)}_{n_2}(z),\cdots,f^{(k)}_{n_k}(z),\cdots$$

记为$\{f_{n_k}(z)\}$, 在$\{\zeta_k\}$中任一点均收敛.

固定紧集$K\subset\Omega$, $\rho=d(K,\partial\Omega)>0$. 令$G=\{z\in\mathbb{C},d(z,K)\leq\frac{\rho}{2}\}$, 则$G$是$\Omega$中的紧集且$K\subset G$. 由(1)知$\{f_n\}$在$G$上等度连续知, 任意$\epsilon>0$, 存在$\delta(\epsilon,G)>0$, 使得对任意$z_1,z_2\in G$, $|z_1-z_2|<\delta$, 对任意n, 有$d(f_n(z_1),f_n(z_2))<\epsilon$. 取$\delta_0=$

$\min\{\delta,\rho\}$, 则$K\subset\cup_{z\in K}D_{\frac{\delta_0}{2}}(z)$, 由$K$紧知存在$m\in\mathbb{N}$使得$K\subset\cup_{1\le j\le m}D_{\frac{\delta_0}{2}}(z_j)$. 取$\zeta_j\in D_{\frac{\delta_0}{2}}(z_j)$ $(j=1,\cdots,m)$, 则$\zeta_j\in G$(这里不一定属于K). 由$\{f_{n_k}(\zeta_j)\}$ $(j=1,\cdots,m)$收敛知存在$N>0$使得$k,l>N$时$d(f_{n_k}(\zeta_j),f_{n_l}(\zeta_j))<\epsilon$ $(j=1,\cdots,m)$. 任意$z\in K$, 存在p使得$z\in D_{\frac{\delta_0}{2}}(z_p)$, 又$\zeta_p\in D_{\frac{\delta_0}{2}}(z_p)$, 故有$|z-\zeta_p|<\delta_0\le\delta$, 从而对任意$n$, 有$d(f_n(z),f_n(\zeta_p))<\epsilon$, 进一步有

$$d(f_{n_k}(z),f_{n_l}(z))\le d(f_{n_k}(z),f_{n_k}(\zeta_p))+d(f_{n_k}(\zeta_p),f_{n_l}(\zeta_p))+d(f_{n_l}(\zeta_p),f_{n_l}(z))<3\epsilon.$$

因此$\{f_{n_k}\}$在K中一致收敛, 由K的任意性知, $\{f_{n_k}\}$在Ω中内闭一致收敛. 由函数列$\{f_n\}$的任意性知, $\mathcal{F}$正规. $\square$

注意:若$S=\mathbb{R}^n$,则条件(2)换成"$\mathcal{F}$在Ω中内闭一致有界", 上述结论仍然成立.

3.Montel定理(全纯函数族). 设$\Omega\subset\mathbb{C}$是一个区域, $\mathcal{F}$是Ω上的全纯函数族, 则$\mathcal{F}$是正规族当且仅当$\mathcal{F}$在Ω上内闭一致有界.

Proof. 只需证明充分性, 根据Arzela-Ascoli定理只需证明$\mathcal{F}$在Ω上内闭等度连续. 固定紧集$K\subset\Omega$, 设$\rho=d(K,\partial\Omega)>0$, $\cup_{w_i\in K,1\le i\le n}D_{\frac{\rho}{4}}(w_i)$是$K$的开覆盖. 由$\mathcal{F}$在$\cup_{1\le i\le n}\overline{D_{\frac{3\rho}{4}}(w_i)}$上一致有界知, 存在$M>0$使得任意$z\in\overline{D_{\frac{3\rho}{4}}(w_i)}$有$|f(z)|\le M$. 对任意$\epsilon>0$, 取$\delta=\min\{\frac{\rho}{4},\frac{\epsilon\rho}{6M}\}$, 对于$z,w\in K$满足$|z-w|<\delta$, 存在$w_i$使得$|w-w_i|<\frac{\rho}{4}$, 意味着$|z-w_i|<\delta+\frac{\rho}{4}\le\frac{\rho}{2}$. 对任意$f\in\mathcal{F}$, 在$\{|\zeta-w_i|=\frac{3\rho}{4}\}$上用柯西积分公式得

$$f(z)-f(w)=\frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\int_{|\zeta-w_i|=\frac{3\rho}{4}}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}-\frac{f(\zeta)}{\zeta-w}\right)d\zeta=\frac{z-w}{2\pi\mathtt{i}}\int_{|\zeta-w_i|=\frac{3\rho}{4}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-w)}d\zeta$$

意味着

$$|f(z)-f(w)|\le\frac{|z-w|}{2\pi}\frac{M}{\frac{\rho}{4}\cdot\frac{\rho}{2}}\cdot 2\pi\cdot\frac{3\rho}{4}=\frac{6M}{\rho}|z-w|<\frac{6M}{\rho}\delta\le\epsilon.$$

故有$\mathcal{F}$在K上等度连续, 由K的任意性知$\mathcal{F}$在Ω上内闭等度连续. $\square$

注意: (1)若全纯函数族正规, 则其导函数族正规.
(2)一般情况下,实值函数没有Montel定理, 比如

$$\mathcal{F}=\{\sin(kx)\}_{k=1,2,\cdots},\ x\in l=(0,2\pi)$$

可以看到对任意$f\in\mathcal{F}$, $|f|\leq 1$,因此$\mathcal{F}$在l上一致有界, 但是对任意函数列$\{f_n\}\subset\mathcal{F}$, 没有内闭一致收敛子列(甚至没有逐点收敛子列).

事实上, 将该实函数族延拓到包含l的开集Ω上的复函数族

$$\mathcal{F}^{\mathbb{C}}=\{\sin kz\}_{k=1,2,\cdots},$$

由$\sin kz=\frac{e^{\mathtt{i}kz}-e^{-\mathtt{i}kz}}{2\mathtt{i}}$, 取$z_0$满足$\mathrm{Im}z_0>0$, 有

$$|e^{\mathtt{i}kz_0}|=e^{-k\mathrm{Im}z_0}\to 0(k\to+\infty),\ |e^{-\mathtt{i}kz_0}|=e^{k\mathrm{Im}z_0}\to\infty(k\to+\infty)$$

因此$\mathcal{F}^{\mathbb{C}}$不是逐点有界的.

Lecture 12: 黎曼映射定理

黎曼映射定理. 设$\Omega \subset \mathbb{C}$是单连通区域, $\Omega \neq \mathbb{C}$ $z_0 \in \Omega$, 则存在唯一的一个从Ω到单位圆盘$\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$的双全纯映射$f(z)$使得$f(z_0) = 0$且$f'(z_0) > 0$.

Proof. 首先证明满足条件的双全纯映射是唯一的. 设f, g是满足条件的两个双全纯映射, 则$f \circ g^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$且$f \circ g^{-1}(0) = 0$, $(f \circ g^{-1})'(0) > 0$, 从而$f \circ g^{-1} = \mathrm{id}$, 即$f = g$.

下面证明存在性. 考虑全纯函数族

$$\mathcal{F} = \left\{ f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)\text{单叶}, |f(z)| < 1, f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0 \right\}.$$

证明

(1)$\mathcal{F} \neq \varnothing$;

(2)存在$g(z) \in \mathcal{F}$使得$g'(z_0) = \sup\{f'(z_0), f \in \mathcal{F}\}$;

(3)$g(\Omega) = \mathbb{D}$.

Claim1:$\mathcal{F} \neq \varnothing$. 由于$\Omega \neq \mathbb{C}$, 故存在$\alpha \in \mathbb{C}$使得$\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$, 从而$J(z) = z - \alpha$在$\Omega$上不取零. 因$\Omega$单连通, $\sqrt{J(z)}$可以在Ω上定义两个单值全纯分支, 分别记为$G_1(z), G_2(z) = -G_1(z)$, 且$G_1(\Omega) \cap G_2(\Omega) = \varnothing$. 记$w_0 = G_2(z_0)$, 由$\Omega$是开集, $G_2(z)$是开映射知$G_2(\Omega)$是开集, 故存在$\rho > 0$使得$\overline{D_\rho(w_0)} \subset G_2(\Omega)$. 取

$$h(z) = \frac{\rho}{G_1(z) - w_0},$$

则$h(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$单叶且满足$|h(z)| < 1$. 令

$$h_1(z) = \varphi_{h(z_0)} \circ h = \frac{h(z_0) - h(z)}{1 - \overline{h(z_0)} h(z)}, \ h_2(z) = e^{-\mathrm{i} \arg h_1'(z_0)} h_1(z),$$

则$h_2(z) \in \mathcal{F}$.

Claim2:存在$g(z) \in \mathcal{F}$使得$g'(z_0) = \sup\{f'(z_0), f \in \mathcal{F}\}$. 取$r > 0$使得$\overline{D_r(z_0)} \subset$

Ω. 对任意$f(z)\in\mathcal{F}$, $f'(z_0)=|f'(z_0)|\leq\frac{1}{r}$. 令

$$\lambda=\sup\{f'(z_0),f\in\mathcal{F}\},$$

则存在$f_n\in\mathcal{F}$使得$f_n'(z_0)>\lambda-\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$, 即$\lim_{n\to\infty}f_n'(z_0)=\lambda$. 由Montel定理知, $\mathcal{F}$是Ω上的正规族, 故函数列$\{f_n\}$中存在子列$\{f_{n_k}\}$在Ω上内闭一致收敛于全纯函数$g(z)$, 且$\{f_{n_k}'\}$在Ω上内闭一致收敛于$g'(z)$, 从而可得

$$g'(z_0)=\lim_{n_k\to\infty}f_{n_k}'(z_0)=\lambda>0,$$

因此$g(z)$非常值. 由Hurwitz定理知, $g(z)$在Ω上单叶且$g(z_0)=\lim_{n_k\to\infty}f_{n_k}(z_0)=0$. 由$|f_{n_k}(z)|<1$知$|g(z)|=\lim_{n_k\to\infty}|f_{n_k}(z)|\leq 1$, 根据最大模原理知,$|g(z)|<1$, 因此$g(z)\in\mathcal{F}$.

Claim3:$g(\Omega)=\mathbb{D}$**.** 反证法. 假设存在$a\in\mathbb{D}$使得$a\notin g(\Omega)$, 下面构造$\tau(z)\in\mathcal{F}$使得$\tau'(z_0)>g'(z_0)$. 令

$$g_1(z)=\frac{g(z)-a}{1-\bar{a}g(z)},$$

则$g_1(\Omega)\subset\mathbb{D}$不取零值, 从而可以定义单值全纯分支$g_2(z)=\sqrt{g_1(z)}$. 记

$$b=g_2(z_0)=\sqrt{g_1(z_0)}=\sqrt{-a},$$

令

$$\tau(z)=\frac{b}{|b|}\cdot\frac{g_2(z)-b}{1-\bar{b}g_2(z)},$$

则$\tau(z)\in\mathcal{F}$且

$$\tau'(z_0)=\frac{1+|b|^2}{2|b|}g'(z_0)>g'(z_0).$$

矛盾. □

注意: (i)设Ω是S^2上的单连通区域, 则Ω全纯同胚于S^2, $\mathbb{C}$或$\mathbb{D}$. 对于黎曼曲面, 我们有如下**单值化定理:** 单连通黎曼曲面全纯同胚于S^2, $\mathbb{C}$或$\mathbb{D}$.

(ii)$\mathbb{C}$不能全纯同胚于$\mathbb{D}$(由于刘维尔定理), 但是$\mathbb{C}$同胚于$\mathbb{D}$, 相应的同胚映射可以

定义为

$$w = \frac{z}{1+|z|},\ z = \frac{w}{1-|w|}.$$