

复变函数 21 级试卷

日期: July 8, 2023

问题 1: 用留数定理阐述柯西定理。

问题 2: 极点的两个等价定义。

问题 3: 写出一个无穷为二阶极点, a 是一阶极点, b 为本性奇点的通式。

问题 4: 给出 $\sin z$ 的定义, 用 e^z 级数证明 $\sin z$ 的级数。计算出 $|\sin z|$ 。

问题 5: 计算

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{(x+1)(x+2)} dx$$

。

问题 6: 把 $z+i=2$, 虚轴以上的部分映射到单位圆。

问题 7: 用鲁歇定理计算半径 1 和 2 圆盘的根的个数, $z^5 - 5z^2 + 1$ 。

问题 8: 如果 f 在 D 上是解析函数, $|f|$ 有界, 证明 f 是常数。

问题 9: 在单位圆内证明 f 的 n 阶导数小于等于

$$(n+1)! \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

问题 10: 可去奇点的积分为零

问题 11: 证明一般域上的柯西定理

$$n(\gamma, a)f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int f \frac{dz}{z-a}$$

如果 $f(0) = 0$, 且在单位圆内解析, 且 $\operatorname{Re} f > 0$, 证明

$$|f| \leq 2\operatorname{Re} f \frac{|z|}{(1-|z|)}$$