2023.2.

教材：Lars V. Ahlfors, Complex Analysis
阿尔福斯 复分析

参考教材：
1. 复变函数论. 钟玉泉(第四版). 高教.
2. 复变函数. 庄圻泰. 张南岳. 北大.
3. 复变函数. 史济怀. 刘太顺. 中国科大.

复变函数

$y=f(x) \rightarrow w=f(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

- 可微(可导) ⟶ 解析函数
- 积分 — 积分理论 (Cauchy)
- 级数 — 级数理论 (Weierstrass)
- 几何 — 几何理论 (Riemann)

重要性：
- 多复变. 解析数论. 方程. 量子理论等.
- 在工程科学中广泛应用.

第一章 复数

§1.1 复数域

在集合 $\mathbb{C} \triangleq \{(\alpha,\beta): \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$ 上定义加法 $(+)$ 和乘法 $(\cdot)$

$$(\alpha,\beta)+(\gamma,\delta) \triangleq (\alpha+\gamma,\beta+\delta).$$

$$(\alpha,\beta)\cdot(\gamma,\delta) = (\alpha\gamma-\beta\delta,\ \alpha\delta+\beta\gamma).$$

易证：$(\mathbb{C},+,\cdot)$ 是一个整环。

设 $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$，则 $\alpha^2+\beta^2\neq 0$。设 (γ,δ) s.t.

$$(\alpha,\beta)\cdot(\gamma,\delta)=(1,0) \Rightarrow \begin{cases}\alpha\gamma-\beta\delta=1\\ \alpha\delta+\beta\gamma=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\gamma=\dfrac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\\ \delta=\dfrac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}\end{cases} \Rightarrow (\alpha,\beta) \text{ 有逆元} \Rightarrow (\mathbb{C},+,\cdot) \text{ 为一个域}$$

记 $\tilde{\mathbb{R}}=\{(\alpha,0): \alpha\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{C}$，易证 $(\tilde{\mathbb{R}},+,\cdot)$ 是 $(\mathbb{C},+,\cdot)$ 的子域。

$\sigma: \tilde{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}$，$(\alpha,0)\to\alpha$，则 σ 为域间同构，$(\alpha,0)\sim\alpha$。

$(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)\sim -1$，即 $(0,1)^2=-1$，记 $(0,1)=i$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (\alpha,\beta) &= (\alpha,0)+(0,\beta)\\ &= (\alpha,0)+(\beta,0)\cdot(0,1)\sim\alpha+\beta i\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{C}=\{\alpha+i\beta: \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}.$$

Thm1 $(\mathbb{C},+,\cdot)$ 是一个域，称之为复数域。$\mathbb{R}$ 为 $\mathbb{C}$ 之一个子域。

Def1（有序域） 域 F，在 F 中定义一个二元关系，记为 $a<b$，s.t.

(1) $\forall a,b\in F$，下面的三种关系有且只有一种成立。

$$a=b,\quad a<b,\quad b<a.$$

(2) 若 $a<b$，$b<c$，则有 $a<c$。

(3) 若 $a<b$，对 $\forall c$，则有 $a+c<b+c$。

(4) 若 $a<b$，$0<c$，则有 $ac<bc$。

Thm2 $\mathbb{C}$ 不是有序域。

证：反证。考虑 0 和 i，$i\neq 0$。

若 $i<0$，$\Rightarrow i-i<0-i \Rightarrow 0<-i$。由(4)，

$0\cdot(-i)<(-i)\cdot(-i)$，即 $0<-1 \overset{(3)}{\Rightarrow} 0+1<-1+1 \Rightarrow 1<0$

$\overset{(4)}{\Rightarrow} 1\cdot(-i)<0\cdot(-i) \Rightarrow -i<0 \Rightarrow i-i<i$，即 $0<i$

矛盾，即 $i<0$ 不成立。

同理可证，$0<i$ 不成立。

二、平方根

Prop1 在 $\mathbb{C}$ 中，任何复数都有平方根。

证：设 $a=\alpha+i\beta$，设 $\gamma+i\delta$，s.t. $(\gamma+i\delta)^2=\alpha+i\beta$。

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma^2 - \delta^2 = \alpha \\ 2\gamma\delta = \beta. \end{cases} \Rightarrow \gamma^2 + \delta^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\left((\gamma^2+\delta^2)^2 = (\gamma^2-\delta^2)^2 + 4\gamma^2\delta^2 = \alpha^2+\beta^2 \right)$$

$\Rightarrow \gamma =$ $\qquad\qquad$ $\delta =$

注：后面会讲 $\sqrt{a}$，$a \in \mathbb{C}$.

三、合理性

1. 数系的发展：

自然数 $\longrightarrow$ 整数 $\longrightarrow$ 有理数 $\longrightarrow$ 实数域 $\longrightarrow$ 复数域.

有理数域到实数域是一个完备化的过程，也可以认为是在上加了一个拓扑结构

2. 代数的角度

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}(\sqrt{-1})$$

Prop2. $\mathbb{C}$ 是包含 $\mathbb{R}$ 的使得 $x^2+1=0$ 有根的最小的域

作业 P_2. 1. 2. 3. $\quad P_3$. 3. 4. $\quad P_5$. 1.

四. 共轭运算

2023. 2. 2

$a=\alpha+i\beta \to \bar{a}=\alpha-i\beta$ $\sigma: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ $a\to\sigma(a)=\bar{a}$

性质: (1) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$ (2) $\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$

(3) 设 $p(x)$ 为实系数多项式 ($p(x)\in\mathbb{R}[x]$). 则 $p(z)=0\Rightarrow p(\bar{z})$

证. 设 $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$

$$p(z)=a_nz^n+\cdots+a_0=0$$

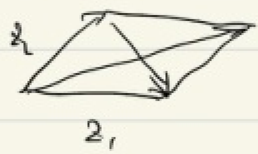
$$\Rightarrow p(\bar{z})=\bar{a}_n\bar{z}^n+\cdots+\bar{a}_0=\overline{a_nz^n+\cdots+a_0}=0.$$

(4) $z\cdot\bar{z}=(\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)=\alpha^2+\beta^2=|z|^2$. $|z|$ 称为 z 的模
绝对

(5) $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

(6) $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\cdot(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}\, z_1\bar{z}_2$

$$\Rightarrow |z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$



注. 由 $\left.\begin{array}{l} z=x+iy \\ \bar{z}=x-iy \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{z+\bar{z}}{2} \\ y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i} \end{array}\right.$

五 常用不等式

1. $-|z|\le \mathrm{Re}\,z, \mathrm{Im}\,z\le|z|$

2. $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$.

Thm. $|z_1+z_2+\cdots+z_n| \le |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$. $z_i\ne 0$. $i=1,\cdots,n$

"=" 成立 $\Leftrightarrow$ $z_i/z_j>0$. $\forall\, i,j$.

证. $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2| \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2>0$

$$\Leftrightarrow \frac{z_1\cdot z_2\cdot \bar{z}_2}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\cdot|z_2|^2>0 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}>0.$$

Thm (Cauchy) $\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right|^2 \le \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^2\right)$.

证: 显然 $\sum_{i=1}^n |b_i|^2=0$ 时成立.

不妨设 $\sum_{i=1}^n |b_i|^2=1$. 即证: $\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right|^2 \le \sum_{i=1}^n |a_i|^2$.

对 $\forall\,\lambda\in\mathbb{C}$.

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{|a_i-\lambda \bar{b}_i|^2}_{\shortparallel} = \sum_{i=1}^n |a_i|^2+|\lambda|^2-2\operatorname{Re}\bar{\lambda}\sum_{i=1}^n a_i b_i \ge 0$$

$$|a_i|^2+|\lambda b_i|^2-2\operatorname{Re} a_i\bar{\lambda} b_i$$

取 $\lambda=\sum_{i=1}^n a_i b_i$ 可得.

§1.2 复数的几何表示

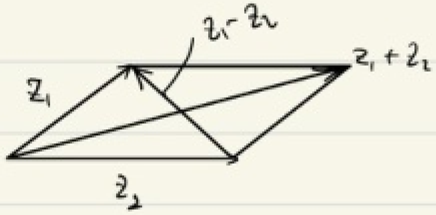
$$\mathbb{C}=\{\alpha+i\beta:\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\} \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \mathbb{R}^2=\{(\alpha,\beta):\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$$

$a=\alpha+i\beta \longleftrightarrow$ 点 $P(\alpha,\beta) \longleftrightarrow$ 向量 $\overrightarrow{OP}$ $\mathbb{C}$ — 复平面.

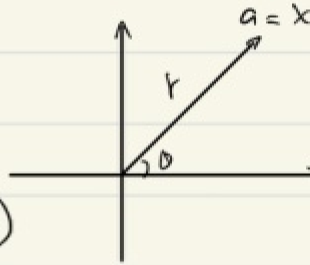
用 $\mathbb{R}^2$ 上的点或向量表示一个复数称为复数的几何表示.

一、几何加法和几何乘法

1. 加减法



2. 复数的三角形式



$$a = r\cos\theta + i r\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (= re^{i\theta})$$

$r = |a| \geq 0$ —— 模长

θ —— a 的辐角 (argument)，记为 $\arg z$.

辐角不唯一. $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3 三角形式下的复数的乘法

$$a_1 \cdot a_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2 \left(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i\left(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2\right) \right)$$

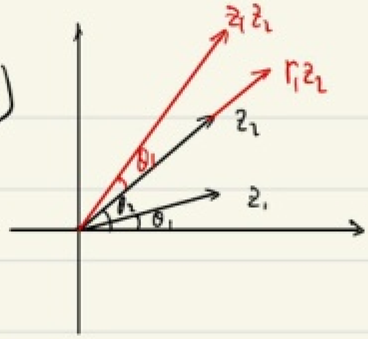
$$= r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \right)$$

$$\left(e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |a_1 \cdot a_2| = |a_1| \cdot |a_2| \\ \arg a_1 \cdot a_2 = \arg a_1 + \arg a_2 \end{cases}$$

注. ① $\operatorname{Arg} a_1 a_2 = \operatorname{Arg} a_1 + \operatorname{Arg} a_2$ 是合理.

② 乘法的几何意义: 旋转与伸缩



$z_1\cdot z_2 = r_1 z_2\cdot(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$. $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$

$(r_1>1)$

③ 除法.

$$z_2\neq 0.\quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right)$$

二. 二项方程 (乘方和开方)

1. 乘方: $a^n=(r(\cos\theta+i\sin\theta))^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

2. 开方: 设 $a=r(\cos\theta+i\sin\theta)$. 求 z. s.t. $z=\sqrt[n]{a}$.

设 $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. 由 $z^n=a$ 得

$$\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\rho^n=r\\ n\varphi=\theta+2k\pi\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\rho=\sqrt[n]{r}\\ \varphi=\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\end{cases}.\ k\in\mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow\quad z=\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).\ k=0,1,\cdots,n-1.$$

注: ① $w=\sqrt[n]{z}$ $(n>1)$ 为多值函数.

② 当 $a=1$ 时. $z=\sqrt[n]{1}$ 是 $z^n-1=0$ 的根. 记 $w=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin$

则 $w^0, w, w^2, \cdots, w^{n-1}$ 为所有根. 构成一个循环群. 当 $(p.n)=$

ω^p 也是生成元.

三. 分析几何.

1. 平面曲线之复形式: $F(x,y)=0 \Rightarrow F(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i})=0$.

2. 圆之方程.

① $|z-a|=r$. $a\in\mathbb{C}$. $r\in\mathbb{R}$. $r>0$.

② $D(x^2+y^2)+Ax+By+C=0$. $A.B.C.D\in\mathbb{R}$

$$\Downarrow \; ?$$

$\tilde{D}z\bar{z}+az+\bar{a}\bar{z}+\tilde{C}=0$. $a\in\mathbb{C}$. $\tilde{D}.\tilde{C}\in\mathbb{R}$.

$|a|^2>\tilde{D}\cdot\tilde{C}$

作业 P_7. 3. 4. 5. P_9. 1. 3. 4. P_{11}. 2. 3. 4

3. 直线方程

2023. 2

① 一般形式：$az + \bar{a}\bar{z} + c = 0$. $a \in \mathbb{C}$. $c \in \mathbb{R}$.

$Ax + By + c = 0$. $A, B, C \in \mathbb{R}$

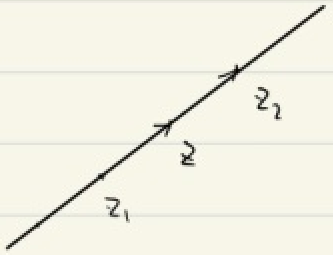
$\Downarrow$

$$A\frac{z+\bar{z}}{2} + B\cdot\frac{z-\bar{z}}{2i} + C = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{A-Bi}{2}}_{= a \in \mathbb{C}} z + \frac{A+Bi}{2}\bar{z} + C = 0$$

$$\Rightarrow az + \bar{a}\bar{z} + C = 0.$$

② 参数方程.



$$\frac{z-z_1}{z_2-z_1} = t \in \mathbb{R}$$

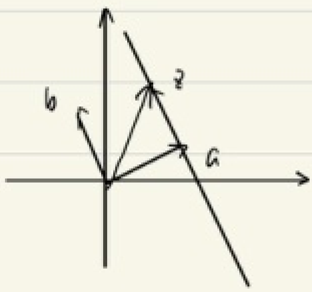
$$\Rightarrow z = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

$$\begin{cases} 0<t<1. & \text{连接 } z_1 \text{ 与 } z_2 \text{ 的线段.} \\ t \in \mathbb{R}. & \text{直线} \end{cases}$$

③ $z = a + bt$. $a, b \in \mathbb{C}$. $\Rightarrow t = \frac{z-a}{b}$ ($t \in \mathbb{R}$)

$\downarrow$

过 a 以 b 为方向的直线.



注：$\mathrm{Im}\frac{z-a}{b} > 0$ 与 $\mathrm{Im}\frac{z-a}{b} < 0$ 对应于以直线为边界的两个半平面.

四. 球面表示（扩充复平面）

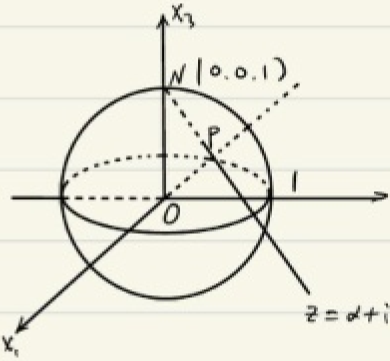
记 $\mathbb{C}^*$（或 $\hat{\mathbb{C}}$）$= \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

1. 规定.

$$a + \infty = \infty \quad \forall a \in \mathbb{C}.$$

$$b \cdot \infty = \infty. \qquad b \in \mathbb{C} \quad b \neq 0.$$

$$\frac{b}{\infty} = 0.$$



2. 球和平面投影.

复平面 $\mathbb{C} \longleftrightarrow x_1 O x_2$ 平面

球面 S^2: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$（黎曼球面）

如图. $\underset{\neq N}{P(x_1, x_2, x_3)} \in S^2 \setminus \{N\} \longleftrightarrow z \in \mathbb{C}$

规定. $N \longleftrightarrow \infty \Rightarrow S^2 \longleftrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}^*$.

由 $N(0.0.1)$. $P(x_1. x_2. x_3)$. $z(\alpha. \beta. 0)$ 共线

$$\Rightarrow \frac{x_1}{\alpha} = \frac{x_2}{\beta} = \frac{x_3 - 1}{-1}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{x_1}{1 - x_3}. \quad \beta = \frac{x_2}{1 - x_3} \Rightarrow z = \alpha + i\beta = \frac{x_1 + i x_2}{1 - x_3}$$

反过来，有 $$|z|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}$$

$\Rightarrow\ x_3=\dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1},\quad x_1=\dfrac{z+\bar z}{|z|^2+1},\quad x_2=\dfrac{z-\bar z}{i(|z|^2+1)}.$

Thm 在复数的球面表示下，S^2 上的任一圆周对应于复平面上的圆周或直线，反之亦然。

证：设 S^2 上的圆周所在平面为 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3=\alpha_0$. 不妨设 $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1$ 且 $0\le\alpha_0<1$. 由投影表达式有

$$\alpha_1\cdot(z+\bar z)-i\alpha_2\cdot(z-\bar z)+\alpha_3\cdot(|z|^2-1)=\alpha_0\cdot(|z|^2+1)$$

$$\Rightarrow\ (\alpha_3-\alpha_0)|z|^2+(\alpha_1-i\alpha_2)z+(\alpha_1+i\alpha_2)\bar z-\alpha_3-\alpha_0=0$$

若 $\alpha_3=\alpha_0$，为直线.

若 $\alpha_3\ne\alpha_0$. $|\alpha_1-i\alpha_2|^2+(\alpha_3-\alpha_0)\cdot(\alpha_3-\alpha_0)=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2-\alpha_0^2>0$

为圆周. 反过来，显然.

Thm 记 $d(z,z')$ 表示 $\mathbb{C}$ 上二点 z, z' 在 S^2 上的像在 $\mathbb{R}^3$ 中的欧氏距离

则
$$d(z,z')=\frac{2|z-z'|}{\sqrt{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)}},\quad d(z,\infty)=\frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}}.$$

注：可以定义 $\tilde d(z,z')$ 为 $\mathbb{C}$ 上的点 z, z' 的球面距离，设 z, z' 在 S^2 上的像为 P, P'，则 $\tilde d(z,z')$ 为 S^2 上连接 P 和 P' 的最短的大圆弧的长度.

第二章 复变函数

$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. $\mathbb{C}\to\mathbb{R}$. $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$.

复函数 f 之表示:

$f: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ $\quad f(t) = u(t) + iv(t)$

$f: \underset{z}{\overset{\Uparrow}{\mathbb{C}}} \to \underset{w}{\overset{\Uparrow}{\mathbb{C}}}$ $\quad w = f(z) = u(z) + iv(z)$

或 $w = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$.

一. 极限与连续性

Def 1 (1) 设复函数 $f(z)$, $\lim\limits_{z\to a} f(z) = A \Leftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, 当 $0<|z-a|<\delta$

有 $|f(z)-A|<\varepsilon$

(2) $f(z)$ 在 a 连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to a} f(z) = f(a)$.

Thm 1 设 $f(z) = u(z) + iv(z)$. $\lim\limits_{z\to a} f(z) = A = \alpha + i\beta$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to a} u(z) = \alpha$ 且 $\lim\limits_{z\to a} v(z) = \beta$.

证. 由 $|u(z)-\alpha| = \left|\mathrm{Re}(f(z)-A)\right| \leq |f(z)-A|$

$(|v(z)-\beta|)$

$|f(z)-A| = (u(z)-\alpha)^2 + (v(z)-\beta)^2$ 易得.

注. $f(z) = u(z) + iv(z)$ 在 $z=a$ 连续 $\Leftrightarrow u(z)$ 和 $v(z)$ 在 $z=a$ 连续.

二. 解析函数

Def 2. $f(z)$ 在 a 可导 $\Leftrightarrow f'(a)=\lim\limits_{z\to a}\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$

注. ① 若 $f: \mathbb{C}\to\mathbb{R}$. 则 f' 或者恒为0, 或者不存在

$$f'(a)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\frac{f(a+ih)-f(a)}{ih}$$

② 若 $f: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$. $f(t)=u(t)+iv(t)$

定义: $f'(t)=u'(t)+iv'(t)$.

练习 P_{13}. (1.2.2) 2. 4. 5 ;

P_{13}. (1.2.3). 1. 2. 5.

P_{16}. 1. 2. 4. 5.

2023. 2.

问题：设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$，则 $f(z)$ 在 $z = x+iy$ 可导是否等价于 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在 (x,y) 可导或可[微]

Def 3 设 $D \subset \mathbb{C}$ 为开集. 若 $f(z)$ 在 D 上可导，则称 f 为 D 上[的]

解析函数 或 全纯函数，D 上的解析函数的全体记为
(Analytic) (Holomorphic)

$H(D)$ 或 $\mathcal{O}(D)$.

注 ① f 在 z 解析 $\Leftrightarrow$ f 在 z 的某个邻域内可导.

② 解析函数是复函数中性质较好的一类函数

③ 解析函数对四则运算封闭

④ 解析(可导) $\Rightarrow$ 连续

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \in H(D)$.

$\forall z \in D$. $$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

设 $h = \Delta x + i\Delta y$. 若令 $\Delta y = 0$. 则 $h = \Delta x \to 0$. 有

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z+\Delta x) - f(z)}{\Delta x}$$
$$\parallel$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y) + i\left(v(x+\Delta x,y) - v(x,y)\right)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

—— ①

再令 $\Delta x=0$. 则 $h=i\Delta y\to 0$. 有 $(-i)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial f}{\partial y}(-i$

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(z+i\Delta y)-f(z)}{i\Delta y}$$

$$=-i\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad \text{②}$$

由 ① ② 可得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-i\frac{\partial f}{\partial y}$$

或

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.\end{cases}$$

Cauchy-Riemann 方

(C.-R. 方程)

Thm 若 $f=u+iv\in H(D)$. 则有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-i\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{或} \quad \begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.\end{cases}$$

注 ① 逆命题不成立:

例1 $f(z)=\bar{z}$ 在 $\mathbb{C}$ 上不解析.

解. $f(z)=\bar{z}=x-iy \Rightarrow u(x,y)=x,\quad v(x,y)=-y$

由 $\frac{\partial u}{\partial x}=1\neq\frac{\partial v}{\partial y}=-1 \Rightarrow f$ 不可导.

例2. $f(z)=(\operatorname{Re} z)^2=x^2$ 在 $z=0$ 可导. 但不解析.

② 由 Thm 可知，当 f 可导时，有

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \cdots$$

③ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，当 f 解析时，$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \triangleq A$ 为 f 的导

$$|A| = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2.$$

Def：若 $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$，且 $\Delta u \triangleq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$，则称 u 为调和函

注：① 设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \in H(D)$（后面会证明 f 的任

导数都解析），则 u, v 为 D 上的调和函数.

事实上，由 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ 解析，则 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$

$\frac{\partial v}{\partial y}$ 连续. 进而 $f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - i\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - i\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \cdots$

解析. 则 $u, v \in C^2$. 由归纳法，有 $u, v \in C^\infty$.

进而

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$$

同理有 $\Delta v = 0$.

② 若 u, v 是调和函数，且满足 C-R 方程，称 v 是 u 的共轭调和

Thm（解析的充分条件）设 $f = u + iv$，$u, v \in C^1$ 且 u, v 满足 C-R 方

则 f 解析.

证. 由 $u, v \in C^1 \Rightarrow u, v$ 可微. 则有

$$\Delta u = u(x+h, y+k) - u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot k + \rho_1$$

$$\Delta v = v(x+h, y+k) - v(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot k + \rho_2$$

这里 $\lim\limits_{h,k \to 0} \frac{\rho_j}{h+ik} = 0$, $j = 1, 2$. 记 $z = x+iy$, 则有

$$\Delta f = f(z+h+ik) - f(z) = \Delta u + i \Delta v$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial u}{\partial y} k + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot ih + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot ik + \rho_1 + i\rho_2$$

$$\overset{\text{C-R方程}}{=} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot h - \frac{\partial v}{\partial x} k + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot ih + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot ik + \rho_1 + i\rho_2$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot (h+ik) + \rho_1 + i\rho_2$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta f}{h+ik} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\rho_1 + i\rho_2}{h+ik}$$

$$\Rightarrow \lim_{h,k \to 0} \frac{\Delta f}{h+ik} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$ 即 f 在 z 可导.

注. ① 若 v 是 u 的共轭调和函数, 则 $f = u + iv$ 解析. (u, v 调和 $\Rightarrow$

② 已知 u 为调和函数, 求 v, s.t. $f = u + iv$ 解析. ?

法: (i) 由 $\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$ 两边求不定积分即可.

(ii) $$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

$$\Rightarrow v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + C$$

"解析"的理解:

把 $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 看成 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ 即 $f(x,y)$.

代入 $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, 可把 $f(x,y)$ 看成 $z, \bar{z}$ 的"二元"函数.

进而, 有

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

若 f 解析, 则有 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

注: ① 在上述形式求导意义下, 有 $\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)}$, $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$

练习 P_{22}. 2. 4. 5. 7.

2023.

例1. 证明: $f(z)=\sqrt{|xy|}$ 在 $z=0$ 满足可导的必要条件. 但 f 在 $z=0$ 不可导. ($u(x,y)=\sqrt{|xy|}$. $v(x,y)\equiv 0$)

例2. 写出下列函数的复形式. $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z}$ 不存在

(1) $f(z)=xy+iy^2=\dfrac{z+\bar z}{2}\cdot\dfrac{z-\bar z}{2i}+i\left(\dfrac{z-\bar z}{2i}\right)^2$

(2) $f(z)=x^2-y^2+i2xy=\cdots=z^2$

三. 多项式

$$p(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0.\quad a_n\neq 0.\quad \deg p(z)=n$$

关于 $p(z)$. 有

(1) $p(z)\in H(\mathbb{C})$. 称为整函数.

(2) 代数基本定理: $\forall\ p(z)=0$ ($\deg p(z)\geq 1$) 在 $\mathbb{C}$ 上至少有一个根

($\forall\ p(z)=0$ 在 $\mathbb{C}$ 上有 n 个根 (包含重数)).

(3) 因式分解: $p(z)=a_n(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n)$. $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 $p(z)$ 的零点.

Def 5 (零点的阶) 若 $p(z)=a_n(z-\alpha)^k p_1(z)$. 且 $p_1(\alpha)\neq 0$. 则称 α 为 $p(z)$ 的 k 阶零点.

Prop 1. α 为 $p(z)$ 的 k 阶零点 $\Leftrightarrow$ $p(\alpha)=p'(\alpha)=\cdots=p^{(k-1)}(\alpha)=0$. 但 $p^{(k)}(\alpha)\neq 0$

证: "⇒" 设 $p(z)=a_n(z-\alpha)^k p_1(z)$.

$$\Rightarrow p^{(m)}(z)=a_n\sum_{l=0}^{m} C_m^l\left((z-\alpha)^k\right)^{(l)}\left(p_1(z)\right)^{(m-l)} \quad m\le k-1$$

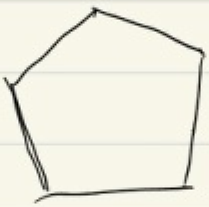
$$\Rightarrow p^{(m)}(\alpha)=0$$

"⇐" 反证. 显然.

注. 对一般函数, 结论也成立.

<u>Thm</u> (Lucas) 若 $p(z)$ 的零点都在一个凸多边形内, 则 $p'(z)$ 的零点也在这个凸多边形内.

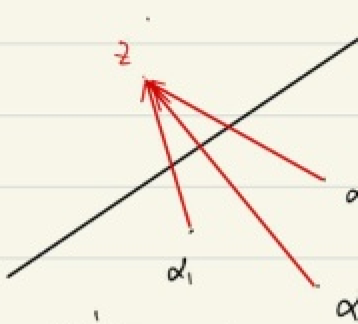
证. 只需证明: 若 $p(z)$ 的零点在某直线 l 的一侧, 则 $p'(z)$ 的零点也在 l 的同一侧.



设 $p(z)=a_n(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n)$.

则 $p'(z)=a_n(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)+\cdots+a_n(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{n-1})$

$$\Rightarrow \frac{p'(z)}{p(z)}=\frac{1}{z-\alpha_1}+\frac{1}{z-\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{z-\alpha_n}.$$



不妨设 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 在半平面 H: $\mathrm{Im}\frac{z-a}{b}>0$ 上,

下证: 当 $z\notin H$ 时, 有 $\frac{p'(z)}{p(z)}\neq 0$ $\left(\Leftrightarrow \mathrm{Im}\frac{bp'(z)}{p(z)}\neq 0\right)$

当 $z \notin H$ 时. 有 $\operatorname{Im}\frac{z-a}{b}<0$. $\alpha_k \in H \Rightarrow \operatorname{Im}\frac{\alpha_k - a}{b}>0$.

则 $\operatorname{Im}\frac{z-\alpha_k}{b} = \operatorname{Im}\frac{z-a}{b} + \operatorname{Im}\frac{a-\alpha_k}{b}$

$= \operatorname{Im}\frac{z-a}{b} - \operatorname{Im}\frac{\alpha_k - a}{b} < 0$. $k=1,\cdots,n$.

$\Rightarrow \operatorname{Im}\frac{b}{z-\alpha_k}>0$. $\forall k=1,\cdots,n$

$\therefore \operatorname{Im}\frac{b\,p'(z)}{p(z)} = \sum_{k=1}^{n}\operatorname{Im}\frac{b}{z-\alpha_k}>0$. 即 $p'(z)\neq 0$.

四. 有理函数

Def. $R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$. $P(z)$. $Q(z)$ 为多项式. 且无公因式

注: ① $R(z)$ 可以扩充到 C^* 上.

规定: $R(\infty)\triangleq \lim_{z\to\infty}\frac{P(z)}{Q(z)}$; 当 $Q(z_0)=0$ 时. $R(z_0)=\infty$.

② $Q(z)$ 的零点称为 $R(z)$ 的极点. 称 $Q(z)$ 的零点 z_0 的阶

称为 z_0 作为 $R(z)$ 的极点的阶数.

Ref (1) ∞ 是 $R(z)$ 的零点和极点 是指 $R(\infty)=0$ 和 $R(\infty)=\infty$.

(2) 记 $R_1(z)=R(\frac{1}{z})$. 规定: $z=0$ 为 $R_1(z)$ 的零点或极点的阶

就作为 ∞ 作为 $R(z)$ 的零点或极点的阶数.

例 $R(z)=\dfrac{a_n z^n+\cdots+a_0}{b_m z^m+\cdots+b_0}$ $a_n, b_m \neq 0$.

解. (1) 当 $m=n$ 时. $\lim\limits_{z\to\infty} R(z)=\dfrac{a_n}{b_m}\neq 0$. $\Rightarrow \infty$ 不是零点. 也不是

(2) 当 $m>n$ 时. $\lim\limits_{z\to\infty} R(z)=0 \Rightarrow \infty$ 为零点.

Let.
$$R_1(z)=\frac{a_n\frac{1}{z^n}+\cdots+a_0}{b_m\frac{1}{z^m}+\cdots+b_0}=z^{m-n}\cdot\frac{a_n+\cdots+a_0z^n}{b_m+\cdots+b_0z^m}$$

$\Rightarrow z=0$ 为 $R_1(z)$ 的 $(m-n)$ 阶零点, 即 $z=\infty$ 为 $R(z)$ 的 $(m-n)$ 阶零点.

(3) 当 $m<n$ 时. $\lim\limits_{z\to\infty} R(z)=\infty$ $\Rightarrow \infty$ 为 $R(z)$ 的极点.

且 $$R_1(z)=\frac{1}{z^{n-m}}\frac{a_n+\cdots+a_0z^n}{b_m+\cdots+b_0z^m}$$

$\Rightarrow z=0$ 为 $R_1(z)$ 的 $(n-m)$ 阶极点. 即 ∞ 为 $R(z)$ 的 $(n-m)$ 阶极点.

[illegible]. 当 $m=n$ 时. $R(z)$ 有 n 个零点, m 个极点.

当 $m>n$ 时. $R(z)$ 有 m 个极点, $R(z)$ 有 n 个有限的零点. 且 ∞ 是 $R(z)$ 的 $(m-n)$ 阶零点, 共有 m 个零点.

当 $m<n$ 时. $R(z)$ 有 n 个零点 且有 n 个极点.

综上.

Prop 2. 设 $R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$. 记 $d=\max\{\deg P(z), \deg Q(z)\}$, 则

$R(z)$ 在 $\mathbb{C}^*$ 上有 d 个零点和 d 个极点, 称 d 为 $R(z)$ 的阶

Lem 1 在 $\mathbb{C}^*$ 无极点的有理函数必为常数.

证. 反之. 若 $R(z)$ 为多项式(非常数), 则 ∞ 为极点; 若 $R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$,

$\deg Q(z)\geq 1$, 则 $Q(z)$ 的零点为 $R(z)$ 的极点.

推导 首先, 设 ∞ 为 $R(z)$ 的极点, 则有

$$R(z)=G(z)+H(z)$$

其中 $G(z)$ 是一个多项式, $H(z)$ 是一个有理函数且分子的次数不大于

的次数. (若 ∞ 不是极点, 则 $G(z)=0$)

设 $\beta_1,\cdots,\beta_k$ 为 $H(z)$ 的极点. 对 β_j $(j=1,\cdots,k)$, 作替换 $\xi=$

即 $z=\frac{1}{\xi}+\beta_j$, 则有 $(z=\beta_j\rightarrow$

$$R(z)=R\left(\frac{1}{\xi}+\beta_j\right)\triangleq\tilde{R}(\xi)$$

则 $\tilde{R}(\xi)$ 以 $\xi=\infty$ 为极点, 则有

$$R(z)=\tilde{R}(\xi)=G_j(\xi)+H_j(\xi)$$

$$= H_j\left(\frac{1}{z-\beta_j}\right) + H_j\left(\frac{1}{z-\beta_j}\right). \qquad j=1,2,\cdots,k.$$

考虑.

$$R(z) - G(z) - \sum_{j=1}^{k} H_j\left(\frac{1}{z-\beta_j}\right)$$

则这是一个有理函数且在 $\mathbb{C}^*$ 上无极点 (?)，从而为常

即 $$R(z) = G(z) + \sum_{j=1}^{k} H_j\left(\frac{1}{z-\beta_j}\right) + C$$

(?)

练习 P_{25} 2. 3. 4.

2023.3.

§2.2 幂级数

一. 复数列

Def1 $a_n\in\mathbb{C}$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \iff$ "$\varepsilon - N$".

Thm1 $a_n=\alpha_n+i\beta_n$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha+i\beta \iff \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$. $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=\beta$.

Thm2 $\{a_n\}\subset\mathbb{C}$ 收敛 $\iff$ $\{a_n\}$ 是一个 Cauchy 列. 即对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists n_0$. 当 $n,m\geq n_0$ 时. 有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$.

二. 级数

Def2 (1) $\{a_n\}\subset\mathbb{C}$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ —— 级数.

(2) $S_n=a_1+\cdots+a_n$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. 称级数收敛于 S. 否则称…

(3) 条件收敛与绝对收敛

Thm3 (1) $\sum\limits_{n} a_n$ 收敛 $\iff$ $\forall\varepsilon>0$. $\exists n_0$. 当 $n\geq n_0$. 对 $\forall p\in\mathbb{N}$. 有

$$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon.$$

(2) 绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛.

三. 一致收敛性

Def3 对 $\sum\limits_{n} f_n(z)$. 点态收敛. 一致收敛.

Thm4 (1) 一致收敛的 Cauchy 准则.

(2) 一致收敛的 Weierstrass-M 判别法. $|f_n(z)|\leq a_n$ $\forall z\in E$

且 $\sum\limits_{n} a_n$ 收敛 $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛.

Thm5 (1) 若 $\sum_n f_n(z)$ 在 E 上一致收敛于 $f(z)$ 且 $f_n(z)$ 连续，则 $f(z)$ 也连

(2) 若 $f_n(z)$ 在 E 上有连续的导数，$\sum_n f_n'(z)$ 在 E 上一致收敛，且

$\sum_n f_n(z)$ 在 E 上某一点收敛，则 $\sum_n f_n(z)$ 在 E 上一致收敛于 $f(z)$，$f(z)$

E 上也连续可导，且有 $f'(z) = \left(\sum_n f_n(z)\right)' = \sum_n f_n'(z)$.

注. 当 $f_n(z)$ 解析时，条件可以减弱.

四. 幂级数

Def4 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$，一般考虑 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 即可.

例. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ $\begin{cases} |z|<1 & \text{收敛} \\ |z|\geq 1, & \text{发散} \end{cases}$

Thm6 (Abel). 对 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ——(*)，$\exists R$，$0\leq R\leq +\infty$，称为收敛半径，

(1) (*) 在 $|z|<R$ 内绝对收敛，当 $0<\rho<R$ 时，(*) 在 $|z|\leq\rho$ 内一

(2) (*) 在 $|z|>R$ 时发散.

(3) 当 $|z|<R$ 时，$f(z)=\sum_n a_n z^n$，且 $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ 的

称半径为 R.

注. ① $R = 1 \big/ \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$，$|z|<R$ 称为收敛圆.

② 若 $\sum_n a_n z^n$ 在 $|z|<R$ 内收敛于 $f(z)$，则 (3) 表明 f 在 $|z$

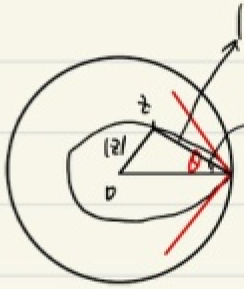
内解析，进而有 f 在 $|z|<R$ 内有任意阶可导数，且 $f^{(k)}(z)$ 在 $|z|<R$ 内

后面会证明：逆命题也成立.

五. Abel 极限定理.

Thm7 对 $\sum_n a_n z^n$. $R=1$. 且 $\sum_n a_n$ 收敛. 则 (当 $z \to 1$ 且使得 $|1-z|/(1-|z|)$ 有界时). 有 $f(z)=\sum_n a_n z^n \to f(1)$.

记. 略. → 非切向极限



证. 设 $\exists M>1$. s.t.

$$|1-z|/(1-|z|) \le M$$

考虑. $|1-z| = M(1-|z|)$.

$$\cos\theta = \frac{1+|1-z|^2-|z|^2}{2\cdot|1-z|} = \frac{1-|z|^2+M^2(1-|z|)^2}{2\cdot M(1-|z|)}$$

$$= \frac{1}{2M}\left(1+|z|+M^2(1-|z|)\right)$$

$\Rightarrow \cos\theta \to \frac{1}{M} < 1$. $\qquad z\to 1$

$\Rightarrow \theta \to \arccos\frac{1}{M}$. $\qquad z\to 1$.

§2.3 指数函数与三角函数

一. 指数函数

Def 1. 定义指数函数 $f(z)$. s.t. $f'(z)=f(z)$, $\forall z\in\mathbb{C}$ $\wedge$ $f(0)=1$ 记为

设 $f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots$ 则

$$f'(z)=a_1+2a_2z+\cdots+na_nz^{n-1}+\cdots$$

由 $f'(z)=f(z)$. $\Rightarrow$ $a_{n-1}=na_n$.

由 $a_0=f(0)=1$ $\Rightarrow$ $a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}=\cdots=\frac{1}{n!}$.

$\therefore$ $f(z)=e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots$

注. $R=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$. (?)

[由 $(1+\frac{1}{n})^n\uparrow$, $(1+\frac{1}{n})^{n+1}\downarrow$ 且 $(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

$$\Rightarrow\quad \frac{(n+1)^n}{n!}=\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k<e^n<\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^{k+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$$

$$\Rightarrow\quad (\frac{n+1}{e})^n<n!<(\frac{n+1}{e})^n\cdot(n+1)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{n+1}{e}<\sqrt[n]{n!}<\frac{n+1}{e}\cdot\sqrt[n]{n+1}$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty.$$

作业 P_{29}. 2. 4. P_{32}. 3. 4. 6. 7.

2023.3

Prop1. 关于 e^z，有

(1) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$，有 $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ —— 加法原理.

(2) $e^z \neq 0$，$\forall z \in \mathbb{C}$；$z = x > 0$，则 $e^x > 1$；$z = x < 0$，则 $0 < e^x$

(3) $z = x+iy$，$|e^z| = 1 \Leftrightarrow z = iy$ $\Rightarrow |e^z| = e^x$.

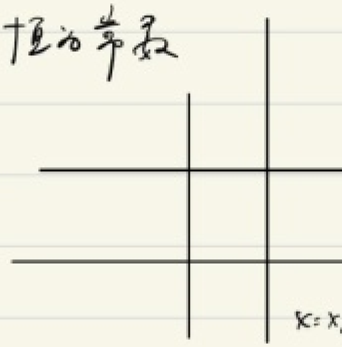
证 (1) 先证：若 $f \in H(\mathbb{C})$ 且 $f' = 0$，则 $f =$ 常数.

事实上，设 $f = u+iv$，则 $f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$，$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

对 $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow$ 对 $\forall y_0 \in \mathbb{R}$，$u$ 在 $y = y_0$ 上恒为常数.

同理 u 和 v 在任意平行或垂直于 x 轴的直线上恒为常数



$\Rightarrow u =$ 常数，$v =$ 常数.

$\Rightarrow f = u+iv$ 为常数

考虑 $e^z \cdot e^{a-z}$ $(a \in \mathbb{C})$，有

$$(e^z \cdot e^{a-z})' = e^z \cdot e^{a-z} - e^z \cdot e^{a-z} = 0$$

$\Rightarrow e^z \cdot e^{a-z} =$ 常数 $= e^a$ （代入 $z = a$）

令 $z = z_1$，$a = z_1 + z_2$，有

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$$

(2) 由 (1). $e^{z}\cdot e^{-z}=e^{0}=1 \Rightarrow e^{z}\neq 0$.

当 $x>0$ 时 $e^{x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots>1$.

当 $x<0$ 时 $-x>0 \Rightarrow 0<e^{x}=\frac{1}{e^{-x}}<1$

$\Rightarrow x\in\mathbb{R}$ 时. $e^{x}=1 \Leftrightarrow x=0$.

(3) 由 $e^{z}=1+z+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots \Rightarrow \overline{e^{z}}=e^{\bar{z}}$.

显然 $|e^{iy}|^2=e^{iy}\cdot\overline{e^{iy}}=e^{iy}\cdot e^{-iy}=e^{0}=1. \Rightarrow |e^{iy}|=1$.

而 $|e^{x+iy}|^2=|e^{x}|^2\cdot|e^{iy}|^2=|e^{x}|^2=1 \Leftrightarrow e^{x}=1 \Leftrightarrow x=0$.

故 $|e^{z}|=1 \Leftrightarrow z=iy$.

并且有 $|e^{x+iy}|=e^{x}\cdot|e^{iy}|=e^{x}$.

二. 三角函数

Def 2 $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$. $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

Prop 2. 关于 $\sin z$, $\cos z$, 有

(1) $\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots$, $\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots$

(2) $\sin^2 z+\cos^2 z=1$, $\forall z\in\mathbb{C}$.

(3) $e^{iz}=\cos z+i\sin z$. —— Euler 公式

(4) $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$.

(5) $\sin z$, $\cos z$ 在 $\mathbb{C}$ 上无界.

证. (1) (2) (3) 显然.

(4). $(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{e^{iz}\cdot i - e^{-iz}\cdot(-i)}{2i} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z$.

$\left(\overline{\sin z} = \sin \bar{z},\ \overline{\cos z} = \cos \bar{z} \right)$

(5) 取 $z = iy$

$$\cos iy = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} \to +\infty, \quad y \to \pm\infty$$

注: $\tan z$, $\cot z$ 等可由 $\sin z$, $\cos z$ 来定义.

三. 周期性

Prop 3. (1) e^{iz} 是周期函数. 且有一个最小正周期 $\omega_0 \in \mathbb{R}$.

(2) e^{iz} 的任意一个周期为 $n\omega_0$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

证. (1) 设 $\omega_0 \neq 0$. $e^{i(z+\omega_0)} = e^{iz}\cdot e^{i\omega_0} = e^{iz}$

$\Rightarrow e^{i\omega_0} = 1 \Rightarrow \omega_0 \in \mathbb{R}$.

当 $y>0$ 时, 有 $\sin y < y$, $\cos y > 1-\frac{y^2}{2}$, $\sin y > y - \frac{y^3}{6}$.

$\cos y < 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24}$.

（由 $(\sin y)' = \cos y \le 1$ 及 $\sin 0 = 0$

$$\Rightarrow \int_0^y \cos u\, du \le \int_0^y 1\, du \Rightarrow \sin y \le y$$

或 $\sin y - \sin 0 = (\sin y)'|_{y=\xi} \cdot y = \cos\xi \cdot y \le y$ ）

记示 $\cos 0 = 1$， $\cos\sqrt{3} < 1 - \frac{3}{2} + \frac{3^2}{24} < 0$.

由介值定理，$\exists\, y_0 \in (0, \sqrt{3})$. s.t. $\cos y_0 = 0$.

由 $\cos' y = -\sin y < 0$ （ $0 < y < \sqrt{3}$ ） $\Rightarrow \cos y \downarrow \Rightarrow y_0$ 唯一.

由 $\sin^2 y_0 + \cos^2 y_0 = 1 \Rightarrow \sin y_0 = \pm 1$.

$\Rightarrow e^{iy_0} = \cos y_0 + i\sin y_0 = \pm i \Rightarrow (e^{iy_0})^4 = e^{i4y_0} = 1$.

则 $\omega_0 = 4y_0$ 为 e^{iz} 的一个周期.

（上面 y_0 的唯一性讨论表明 $4y_0$ 是最小的周期）.

(2) 首先，$n\omega_0$ 皆为周期.

反之，若 T 为 e^{iz} 之周期，则 $T \in \mathbb{R}$，则 $\exists\, n \in \mathbb{Z}$. s.t.

$n\omega_0 < T < (n+1)\omega_0$. 若 $T \ne n\omega_0$，则 $\omega_0 > T - n\omega_0 > 0$ 且 $T - n\omega_0$ 仍

周期. 与 ω_0 为最小正周期矛盾. 故 $T = n\omega_0$.

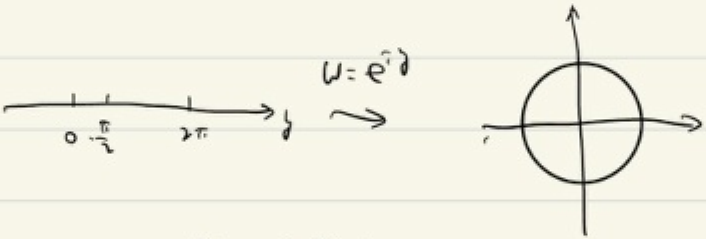
注. ① 记 $4y_0 = 2\pi$. 即 e^{iz} 的最小正周期为 2π.

进而 e^z 的周期为 $2\pi i \cdot n$. $n \in \mathbb{Z}, n \ne 0$ （ $e^{2\pi i n} = 1$ ）

② 由上述证明可知

$$e^{2\pi i} = e^{i4y_0} = 1. \qquad e^{\pi i} = e^{i2y_0} = (e^{iy_0})^2 = -1.$$

③ 当 $0 \le y < 2\pi$ 时，$w = e^{iy}$ 对应于 $|w| = 1$ 之一周，且是一一对应



④ $\sin z$, $\cos z$ 之最小正周期为 2π.

四. 对数函数

Def 3. $e^z = w \ (w \neq 0) \Rightarrow z = \log w$ 为对数函数.

设 $z = x + iy$，则 $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = w = |w| \cdot \frac{w}{|w|}$

$\Rightarrow e^x = |w|$，$e^{iy} = w/|w|$

$\Rightarrow x = \log|w|$

由 $\left| w/|w| \right| = 1$ 及上述注③，$\exists!\, y \in [0, 2\pi)$ s.t. $e^{iy} = w/|w|$.

进而 $e^{i(y+2k\pi)} = w/|w|$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

这说明 $\log w$ 是多值函数.

Def 4 $\log w$ 之虚部称为 w 之辐角（即上面之 $y \in [0, 2\pi)$）显然.

$\operatorname{Im}\log w + 2k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$) 也是 w 的辐角

Prop 4. $z_1 \cdot z_2 \neq 0 \Rightarrow \log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$.

证. $e^{\log z_1 + \log z_2} = e^{\log z_1} \cdot e^{\log z_2} = z_1 \cdot z_2 = e^{\log z_1 z_2}$

注. $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$ 应当理解为集合相等更好. 它与 $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg$

意义相同.

$\left(\log z = \log|z| + i(\arg z + 2k\pi) \quad \forall k\in\mathbb{Z} \right)$

Def 5. (1) $a, b\in\mathbb{C}$. $a \cdot b \neq 0$. 定义 $a^b \triangleq e^{b\cdot\log a}$

(2) $w = \arccos z = \pm i \log(z + \sqrt{z^2-1})$ 为 $z = \cos w$ 的反函数

$$\Uparrow$$

$$z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} \Rightarrow (e^{iw})^2 - 2z\cdot e^{iw} + 1 = 0$$

作业 P_{35}. 1. 3.

P_{37-38} 1. 2. 3. 4. 5.

2023.3.

第三章 作为映射的解析函数

§3.1 初等点集拓扑

一. 集合与元素. S — 全空间. $X\subset S$. $\sim X$ — X在S中的余集

二. 度量空间

Def1. $S\neq\emptyset$ 集合. $d: (x,y)\in S\times S \to \mathbb{R}^+$ s.t.

(1) $d(x,y)\geq 0$, 且 $d(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$.

(2) $d(x,y)=d(y,x)$

(3) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$.

Eg1. (1) $\mathbb{R}^n$中. $d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

(2) $\mathbb{C}^*$. $\begin{cases} d(z,z')=2|z-z'|\Big/\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)} & z,z'\in\mathbb{C}^* \\ d(z,z') \text{ — 球面距离.} \end{cases}$

(3) $C[a,b]$ — $[a,b]$上连续函数的全体. $f,g\in C[a,b]$

$$d(f,g)=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$$

Def2. (1) $y\in S$. d. $\delta>0$, $B(y,\delta)=\{x\in S: d(x,y)<\delta\}$ 称为y的δ

也称为球 $B(y,\delta)$.

(2) $N\subset S$. $B(y,\delta)\subset N$. 称N为y的一个邻域.

Def3. (1) $A\subset S$ 为开集 $\Leftrightarrow$ A是它的每一个点的邻域

$\Leftrightarrow \forall y\in A$, $\exists B(y,\delta)$. s.t. $B(y,\delta)\subset A$.

(2) $B\subset S$ 为闭集 $\Leftrightarrow$ B的余集为开集.

例 ∀一个 $\mathbb{C}$ 中的圆盘是开集. $\{z\in\mathbb{C}: |z-z_0|<R\}$

Prop1. (1) 任意多个开集的并仍是开集, 有限多个开集的交仍是开集.

(2) ------闭---交---闭.. ------闭--并---闭--.

Def4. 设 $A\subset S$.

(1) A的内部, 记为 $\mathrm{Int}\,A = \mathring{A} = \{y.\ B(y,\delta)\subset A\}$ = 包含在A中的最大的开集

$= \bigcup_B \{B\subset A,\ B为开集\}$.

(2) A的闭包. 记为 $\bar{A}$ 或 $\mathrm{cl}A$ = 包含A的最小的闭集 $= \bigcap_B \{B\supset A.$

(3) A的边界. $\partial A = \bar{A} - \mathrm{Int}\,A = \{x\in S: \forall\delta>0,\ B(x,\delta)\cap A\neq\phi,\ B(x,\delta)\cap$

(4) $x\in A$ 为孤立点 $\Leftrightarrow \exists B(x,\delta)$ s.t. $B(x,\delta)\cap A=\{x\}$.

(5) $x\in A$ 为聚点 $\Leftrightarrow \forall\delta>0$. $B(\hat{x},\delta)\cap A\neq\phi$.

$\Leftrightarrow \exists\{x_n\}\subset A$. s.t. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

$\Updownarrow$

对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists n_0$ 当 $n>n_0$ 时, 有

$d(x_n, x) < \varepsilon$.

注. ① $\mathrm{Int}A \subset A \subset \mathrm{cl}A$.

② $\mathrm{Int}A = A \Leftrightarrow A$ 为开集.

$\mathrm{cl}A = A \Leftrightarrow A$ 为闭集 $\Leftrightarrow \forall x \in A,\ \exists \{x_n\} \subset A,\ \text{s.t. } \lim\limits_{n\to\infty} x_n =$

③ $A \subset B \subset S \Rightarrow \mathrm{Int}A \subset \mathrm{Int}B,\ \mathrm{cl}A \subset \mathrm{cl}B$.

三. 连通性

Def5 (相对开集) S 空间. $E \subset S$. $\underbrace{A \subset E \text{ 为 } E \text{ 中的开集}}_{\text{称为 } A \text{ 是相对开集}} \Leftrightarrow \exists\ S$ 中的开集 B

s.t. $A = E \cap B$.

注. $E \subset S$ 为开(闭)集. 则 $A \subset E$ 为相对开(闭)集 $\Leftrightarrow A \subset S$ 为开(闭)

Def6 (1) S 不连通 $\Leftrightarrow \exists A, B \neq \phi$. 都为开集. $A \cap B = \phi$. 且 $S = A \cup B$

(2) $E \subset S$ 不连通 $\Leftrightarrow \exists$ 相对开集 $A, B \neq \phi$. $A \cap B = \phi$. s.t. $E = A \cup B$

注 ① S 连通 $\Leftrightarrow S$ 不能表示为两个非空不相交的开集之并.

② 定义中的 A, B 可换为闭集.

③ 在证明 S (或 $E \subset S$) 连通时. 设 $S = A \cup B \Rightarrow A \cap B \neq \phi$.

或 $A = \phi$. 或 $B =$

Thm1. $\mathbb{R}$ 中的非空连通子集是区间. 即 (a,b). $[a,b]$. $[a,b)$. a, b 可

证. (1) 先证 $\mathbb{R}$ 是连通.

设 $\mathbb{R}=A\cup B$. $A\cap B=\phi$. $A.B$ 为闭集. $A.B\neq\phi$. 取 $a_1\in A$. $b_1\in$

不妨设 $a_1<b_1$. 取 $(a_1.b_1)$ 的中点 $\frac{a_1+b_1}{2}$ 把它分成两个子区间. 记其中

为 $(a_2.b_2)$. s.t. $a_2\in A$. $b_2\in B$. 依次取区间 $(a_n.b_n)$. s.t. $a_n\in A$. $b_n\in$

易想. $a_n\to c\leftarrow b_n$. $n\to\infty$. 由 $A.B$ 为闭集. 有 $c\in A\cap B$. 与 A

矛盾.

(2) 设 $E\subset\mathbb{R}$ 连通. 设 $a.b$ 为 E 的下确界和上确界. 对 $\forall\xi\in(a$

设 $\xi\notin E$. 考虑 $A=\{x.\ x<\xi\}$. $B=\{x.\ x>\xi\}$. 则 $E=(E\cap A)\cup(E$

由 E 连通. 若 $E\cap A=\phi$. 则 ξ 为 E 的一个下界. 这与 $\xi>a$ 且 a 为

的下确界矛盾. 故 $E\cap A\neq\phi$. 同理 $E\cap B\neq\phi$. 这与 E 连通矛盾

所有 $(a.b)\subset E$.

另一方面. 由 $a=\inf E$. $b=\sup E$ 知 E 的所有点都在 a 与 b 之间. 这

E 是 $(a.b)$ 或 $[a.b]$ 或 $[a.b)$. $(a.b]$.

Thm 2 平面上的一个非空开集连通 $\Leftrightarrow$ 该集合中任意两点都可以

位于这个集合中的一条折线连接起来 (道路连通)

证 "$\Rightarrow$" $A\subset\mathbb{R}^2$. $A\neq\phi$. 开集. 连通.

取 $a\in A$. 记

$A_1=\{A$ 中与 a 能用位于 A 中的折线连接的所有点$\}$

$A_2=\{\cdots\cdots$ 不能 $\cdots\cdots\}$

显然 $A_1 \cap A_2 = \phi$. $A = A_1 \cup A_2$. $a \in A_1$. 下证 A_1, A_2 为开集.

$\forall a_1 \in A_1 \subset A$ 开, 则 $\exists B(a_1, \delta) \subset A$. 显然 $B(a_1, \delta)$ 中之折

都能与 a_1 连接, 进而可以与 a 连接. 即 $B(a_1, \delta) \subset A_1$. 故 A_1 为开集.

再设 $a_2 \in A_2 \subset A$, 则 $\exists B(a_2, \delta') \subset A$. 则 $B(a_2, \delta')$ 中任意点都不

与 a 连接, 即 $B(a_2, \delta') \subset A_2$. 故 A_2 为开集.

由 A 连通及 $a \in A_1$, 故 $A_2 = \phi$, 即 $A = A_1$.

$\Leftarrow$: 设 $A = A_1 \cup A_2$. $A_1, A_2 \neq \phi$. $A_1 \cap A_2 = \phi$. A_1, A_2 为闭集.

取 $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$. 由已知, $\exists$ 一折线连接 a_1 与 a_2. 不妨设连接

直线段. 考虑 $z = a_1 + t(a_2 - a_1)$, $0 \le t \le 1$.

$$T_1 = \{ t \in [0,1] : a_1 + t(a_2 - a_1) \in A_1 \}.$$

$$T_2 = \{ t \in [0,1] : a_1 + t(a_2 - a_1) \in A_2 \}$$

则 $T_1, T_2 \neq \phi$. $T_1 \cup T_2 = [0,1]$. $T_1 \cap T_2 = \phi$, 易知 T_1, T_2 为闭集. 这与 [0

连通矛盾. 故 A 连通.

作业. P42. 4. 7.

P46. 3. 4.

2023.3

Def (区域). $D\subset\mathbb{C}$ 为区域 $\Leftrightarrow$ D 是连通的开集.

Def 一个集合的最大的连通子集称为连通分支.

Thm 每一个集合都有唯一的连通分支的分解.

证. 设 $E\neq\phi$. $\forall a\in E$. 记

$C(a)=$ E 中包含 a 的所有连通子集的并.

首先. $\{a\}\subset C(a)$ $\Rightarrow$ $C(a)\neq\phi$.

其次, $C(a)$ 连通. 反证. 设 $C(a)=A\cup B$. A,B 非空相对开集.

设 $a\in A$, $b\in B$. 则 $b\in C(a)$. 则 $\exists$ 连通集 $E_0\subset C(a)$ s.t. a,b

则 $E_0=(E_0\cap A)\cup(E_0\cap B)$. 这与 E_0 连通矛盾. 故 $C(a)$ 连通.

再证. $C(a)$ 是最大的连通子集. 若 A 连通. 且 $C(a)\subset A$. 则 $a\in A$

则 $A\subset C(a)$ $\Rightarrow$ $C(a)=A$.

最后. 若 $C(a)\cap C(b)=c$. 则 $c\in C(a)$ $\Rightarrow$ $C(a)\subset C(c)$ 且 $C(c)$

$\Rightarrow C(a)=C(c)$. 同理 $C(c)=C(b)$. 故 $C(a)=C(b)$.

四. 紧致性

Def 一个度量空间 S 完备 $\Leftrightarrow$ S 中的 Cauchy 列收敛 (极限在 S

Thm1 设 S 一度量空间.

(1) S的完备子集是闭集.

(2) 若S完备, $A\subset S$为闭集, 则A也完备.

证 (1) 设$A\subset S$, A完备. 下证$\overline{A}\subset A \Rightarrow A$为闭集.

对$\forall y\in\overline{A}$, 则$\exists\{y_n\}\subset A$ s.t. $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$. 则$\{y_n\}$为Cauchy列

由A完备有$y\in A$. 故$\overline{A}\subset A$.

(2) 任取Cauchy列$\{y_n\}\subset A$. 则$\{y_n\}$也为S中的Cauchy列.

由S完备. $y_n\to y\in S$. 又A为闭集. $y\in A$. 故A完备.

Def. 集合$X\subset S$是紧致的 $\Leftrightarrow$ $\forall$ X的开覆盖必有有限的子覆盖

即$U=\{U_\lambda, U_\lambda\subset S$为开集, $\lambda\in\Lambda\}$. $X\subset\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$. 则$\exists\lambda_1\cdots\lambda_n$ s.t.

$X\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_{\lambda_i}$

Thm2 (1) 每个紧致空间必完备.

(2) 任意紧致集必是有界的.

证 (1) 设S紧致. 对$\forall$ Cauchy列$\{x_n\}\subset S$. 设$\{x_n\}$为无穷序列

反证. 若$\{x_n\}$不收敛于$\forall y\in S$. 则$\exists\varepsilon>0$ s.t. $B(y,\varepsilon)$只含有有限

则所有这样的$B(y,\varepsilon)$构成S的一个开覆盖. 由S紧致, 则有限

个$B(y,\varepsilon)$覆盖S. 这与$\{x_n\}$为无穷序列矛盾. 故$\{x_n\}$收敛. 即S完

(2) 设 X 紧致. 取 $x_0 \in X$. 则 $B(x_0, r)$ 构成 X 的一个开覆盖.
$\exists$ 有限个 $B(x_0, r)$ 覆盖 X. 即 $X \subset B(x_0, r_1) \cup \cdots \cup B(x_0, r_k)$. 取 $\tilde{r} = \max\{r_1, \cdots, r_k\}$. 则 $X \subset B(x_0, \tilde{r})$. 则对 $\forall x, y \in X$. 有

$$d(x, y) \le d(x, x_0) + d(y, x_0) < 2\tilde{r}.$$

即 X 有界.

注. ① 完备空间不一定紧致. 如 $\mathbb{R}$. $\{(-n, n), n \in \mathbb{N}\} \supset \mathbb{R}$.

② 有界的集合也不一定紧致. 如 $(0, 1)$. $\{(0, 1-\frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}\}$

Def. 集合 $X \subset S$ 全有界 $\iff$ 对 $\forall \varepsilon > 0$. X 可用有限个半径为 ε 的球

注. ① 紧致 $\Rightarrow$ 全有界.

② 全有界 $\Rightarrow$ 有界.

证. $X \subset B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_m, \varepsilon)$. 则对 $\forall x, y \in X$. $\exists i, j$ s.t. $x \in B(x_i, \varepsilon)$. $y \in B(x_j, \varepsilon)$. 则有

$$\begin{aligned} d(x, y) &\le d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y) \\ &< 2\varepsilon + d(x_i, x_j). \end{aligned}$$

记 $M = \max\limits_{1 \le i, j \le k} d(x_i, x_j)$ $\Rightarrow$ $d(x, y) < 2\varepsilon + M$. $\Rightarrow$ X 有界.

Thm3. 集合X紧致 $\Leftrightarrow$ X完备且全有界.

证 "$\Rightarrow$"已证. "$\Leftarrow$"反证. 设$\exists X$的一个开覆盖U. 但

有子覆盖. 取$\varepsilon_n=\frac{1}{2^n}$. 对$\varepsilon_1$. 由$X$全有界. 则$X$可用有限个半

径为ε_1的球覆盖. 则$\exists$一个球. 记为$B(x_1,\varepsilon_1)$. 不能被U中的有

个子覆盖. 对$\varepsilon_2=\frac{1}{2^2}$. $B(x_1,\varepsilon_1)$也是全有界. 则$B(x_1,\varepsilon_1)$也可以

有限个半径为ε_2的球覆盖. 同理. $\exists B(x_2,\varepsilon_2)$. s.t. 它不存在

有限子覆盖. 依次进行下去. 找到$B(x_n,\varepsilon_n)$. s.t. $B(x_n,\varepsilon_n)$

存在U的有限子覆盖. $x_{n+1}\in B(x_n,\varepsilon_n)$. 即$d(x_{n+1},x_n)<\varepsilon_n$. 故

对$\forall p\in\mathbb{N}$. 有

$$\begin{aligned}
d(x_n,x_{n+p}) &\le d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots d(x_{n+p-1},x_{n+p}) \\
&< \varepsilon_n+\varepsilon_{n+1}+\cdots\varepsilon_{n+p-1} \\
&= \frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\cdots\frac{1}{2^{n+p-1}} < 2^{-n+1}\to 0. \quad n\to\infty
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \{x_n\}$为Cauchy列. 又X完备. 则$x_n\to\alpha\in X$. 则$\exists U$中的开

A. s.t. $\alpha\in A$. 则$\exists\delta>0$. s.t. $B(x,\delta)\subset A$. 取n充分大. s.t.

$d(x_n,x)<\frac{\delta}{2}$. 且 $\varepsilon_n<\frac{\delta}{2}$. 则对$\forall y\in B(x_n,\varepsilon_n)$. 有

$$d(x,y)\le d(x,x_n)+d(x_n,y)<\frac{\delta}{2}+\varepsilon_n<\delta$$

$\Rightarrow y \in B(x, \delta) \subset A$. 即 $B(x_n, \varepsilon_n)$ 可以由 $A \subset U$ 覆盖. 矛盾

<u>Cor.</u> 在 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 中. 一个集合紧致 $\Leftrightarrow$ 它是有界闭集.

<u>Thm 4</u> 一个度量空间 S 紧致 $\Leftrightarrow$ S 中每个无穷序列均有一个极限点

证. "$\Rightarrow$" 基本上与 Thm 2 的 (1) 类似.

"$\Leftarrow$" 首先, S 是完备的. 由 Thm 3, 只需证明 S 全有界.

反证. 若 S 不全有界. 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$. s.t. S 不能被有限个半径为 ε_0 的球覆盖. 取 x_1. 则 $\exists x_2 \in S$. s.t. $x_2 \notin B(x_1, \varepsilon_0)$. 由归纳法. 可找到 x_{n+1} s.t. $x_{n+1} \notin B(x_1, \varepsilon_0) \cup \cdots \cup B(x_n, \varepsilon_0)$. 则 $\{x_n\}$ 无极限点 $(\because \forall m, n.\ d(x_m, x_n) > \varepsilon_0)$. 矛盾.

五. 连续函数　　2023.

Def. (1) 设 S. S' 为度量空间.

(i) $f: S \to S'$ 连续 $\Leftrightarrow$ $\forall a \in S$. $\forall \varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$. 当 $d(x,a) < \delta$ 时. 有

$d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

(ii) $f: S \to S'$ 一致连续 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$. 当 $x_1, x_2 \in S$ 且 $d(x_1, x_2) < \delta$ 时

$d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

(2) 设 S. S' 为拓扑空间. 则 $f: S \to S'$ 连续 $\Leftrightarrow$ 对 S' 中的任意开集 U.

是 S 中的开集.

Thm. 设 f 连续. X 紧致. A 连通. 则有

(1) $f(X)$ 也紧致 $\Rightarrow$ $f(X)$ 闭

(2) $f(A)$ 也连通.

(3) f 在 X 上一致连续.

Cor. $f: X \to \mathbb{R}$ 连续. X 紧致. 则 $f(X)$ 为有界闭集. 从而 f 在 X 上有最大最

小值. 若将 $\mathbb{R}$ 换成 $\mathbb{C}$. 则 $|f|$ 在 X 上有最大和最小值.

§3.2 共形性

一. 弧与闭曲线

Def. 平面上的曲线 γ: $z=z(t)=x(t)+iy(t)$, $\alpha\le t\le\beta$.

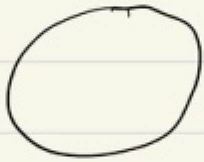
(1) γ 连续 $\Longleftrightarrow$ $x(t)$, $y(t)$ 连续.

(2) $t_1\ne t_2 \Rightarrow z(t_1)\ne z(t_2)$, 即 $z(t)$ 关于 t 单射 $\Rightarrow$ 称 γ 为简单曲线

即 γ 不自相交.

(3) 若 $z(\alpha)=z(\beta)$ $\Rightarrow$ γ 为闭曲线

(2) (3) 结合 $\Longrightarrow$ γ 为 Jordan 曲线.



(4) 若 $z'(t)=x'(t)+iy'(t)$ 存在且连续,

$\Rightarrow$ 称 γ 是可微的

即: $z'(t)\ne 0$ $\Rightarrow$ γ 上的点有切线.

(5) $z'(t)$ 存在且连续 且 $z'(t)\ne 0$ $\Rightarrow$ 称 γ 正则

注. ① $z(t)$ — 映射, γ — 像, 一般可以等同.

② 参数变换: φ: $\tau\in[\alpha',\beta']\to t\in[\alpha,\beta]$. $t=\varphi(\tau)$ 非降函数.

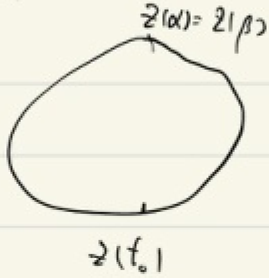
Lem. $z=z(t)$ 与 $z(\varphi(\tau))$ 是 γ 的两个不同的参数表示.

① 分别可微或分别正则.

④ 反向曲线: γ^-. $z = z(-t)$, $-\beta \le t \le -\alpha$.

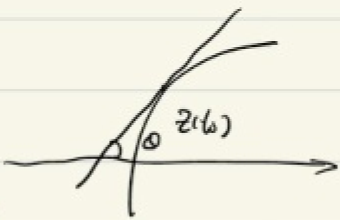
⑤ 闭曲线. 取 $t_0 \in (\alpha, \beta)$.

$$\tilde{z}(t) = \begin{cases} z(t), & t_0 \le t < \beta \\ z(t-\beta+\alpha), & \beta \le t \le t_0+\beta-\alpha \end{cases}$$



⑥ 当 γ 光滑时. 切线存在. 则

$$\theta = \arg z'(t_0)$$



$z'(t_0) = x'(t_0) + i y'(t_0) \Longleftrightarrow (x'(t_0), y'(t_0))$ ~ 切向量

二. 共形映射

导数的模与辐角的几何意义. 设 $f'(z_0)$ 存在且不为 0.

设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 为区域. $f \in H(\Omega)$. 曲线 $\gamma \subset \Omega$. 则

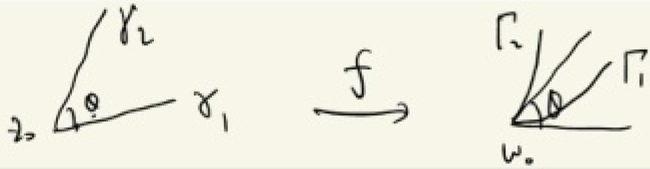
$z = z(t)$, $z(t_0) = z_0$ $\longrightarrow$ Γ: $w(t) = f(z(t))$

$$\Rightarrow \quad w'(t_0) = f'(z(t_0)) \cdot z'(t_0) = f'(z_0) \cdot z'(t_0)$$

$$\Rightarrow \quad \arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0)$$

$$\Rightarrow \quad \arg w'(t_0) - \arg z'(t_0) = \arg f'(z_0)$$

几何.



设 $\gamma_1: z=z_1(t)$. $\gamma_2: z=z_2(t)$. $\to$ $\Gamma_1: w_1(t)=f(z_1(t))$. $\Gamma_2: w_2$

则 $\arg w_1'(t_0) - \arg z_1'(t_0) = \arg f'(z_0) = \arg w_2'(t_0) - \arg z_2'(t_0)$

$\Rightarrow \arg w_2'(t_0) - \arg w_1'(t_0) = \arg z_2'(t_0) - \arg z_1'(t_0)$

称这种保持夹角的大小和方向不变的性质为保角性

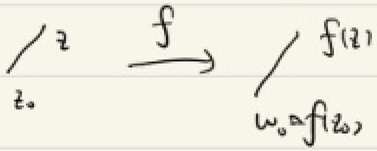
此外. 由

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

$$\Rightarrow |f'(z_0)| = \lim_{z\to z_0} \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|$$

即当 $z\to z_0$ 时.

$|f(z)-f(z_0)| = |w-w_0| \approx |f'(z_0)|\cdot|z-z_0|$.



称 f 在 z_0 是有保伸缩性.

Def1. 若一个映射具有保角性和保伸缩性. 则称其为共形映射

注. ① 当 $f'(z_0)\neq 0$ 时. f 在 z_0 共形.

② "共形"之充要条件:

③ 若 $f:\Omega\to\Omega'$ 是一一的. f 解析. f^{-1} 连续. 则 $f'\neq$

f^{-1} 也解析. 事实上, $(f^{-1}(w))' = \dfrac{1}{f'(z)}$. $w=f(z)$.

(以后会证明: f 单射且解析 $\Rightarrow f'(z)\neq 0$)

④ 若 f 解析且 $f'(z_0)\neq 0$. $\Rightarrow$ f 在 z_0 邻近是单射

记 $f=u+iv$, 则 f 等同于

$$\varphi:\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y)\end{cases} \text{ . 则}$$

$$f'(z_0)\neq 0 \iff J\varphi=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}\Bigg|_{z_0} \text{ 非退化. } (\because |J\varphi| = |f'(z_0)|^2\neq$$

⑤ $f=u+iv \Longleftrightarrow \varphi:\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y)\end{cases}$

$f' \Leftrightarrow J\varphi = |J\varphi|\cdot A$. A — 正交矩阵

⑥ 记 $f=u+iv$. 且 $u,v\in C^1$. 由 f 只保角性或只保伸缩性

$\Rightarrow$ f 解析 (或反解析).

记 $\gamma: z=z(t) \xrightarrow{\ f\ } \Gamma: f(z(t)) = w(t)$

$\Rightarrow\quad w'(t_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot x'(t_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\, y'(t_0)$. $\qquad z'(t_0) = x'(t_0)+i y'(t_0)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) z'(t_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \overline{z'(t_0)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{w'(t_0)}{z'(t_0)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \frac{\overline{z'(t_0)}}{z'(t_0)} = w$$

若 f 保角，则 w 与 $z'(t_0)$ 无关，而

$$\left| w - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \right| = \left| \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \right|$$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$ — C-R 方程，故 f 解析.

若 f 保伸缩率，则有 $\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$ 或 $\frac{\partial f}{\partial x} = i\frac{\partial f}{\partial y}$，后一种情况

对应于 $\overline{f(z)}$ 解析 或 f 关于 $\bar{z}$ 解析（称为反解析）

$$\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)} \right.$$

如：$f(z) = \bar{z}$

三. 长度与面积

1. 设 γ: $z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ 可求长，则其长度

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_\alpha^\beta \underbrace{|z'(t)|\, dt}_{\text{弧长微元}}$$

若 f 共形，γ 变为 Γ: $w(t) = f(\gamma(t))$，其长度为

$$L(\Gamma) = \int_\alpha^\beta |w'(t)|\, dt = \int_\alpha^\beta |f'(z(t))| \cdot |z'(t)|\, dt$$

2. 设 $E\subset\mathbb{C}$ 为集合，其面积为

$$A(E)=\iint_E dx\,dy$$

若 $f=u+iv: E\to E'$ 为映射，则有

$$A(E')=\iint_E \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| dx\,dy$$

若 f 在 E 上共形，则有

$$A(E')=\iint_E |f'(z)|^2\, dx\,dy$$

§3.3 分式线性变换 2023.3.

(FLT: Fractional Linear Transformation)

Def1. FLT 是指

$$w = S(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a.b.c.d \in \mathbb{C}, \quad ad \neq bc$$

注 ① 规定: $S(\infty) = \frac{a}{c}$, $S(-\frac{d}{c}) = \infty$.

易知 $\Rightarrow z = S^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}$. 故 $S: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ 一一.

② $S \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 非退化

易证: 若 $S_1 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$, $S_2 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$. 则

$$S_1 \circ S_2 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}.$$

又 $S^{-1} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, 故所有FLT在复合作用下成一个群.

③ (I): $w = z+b$ —— 平移

(II) $w = az$ —— 伸缩. 旋转.

(III) $w = \frac{1}{z}$ —— 反演

$$\Rightarrow w = \frac{az+b}{cz+d} = \begin{cases} \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} & c = 0 \\ \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2(z+\frac{d}{c})} & c \neq 0 \end{cases}$$

Thm1. ∀ FLT 具有保圆性. 即它把圆映为圆. 这里的圆包括

证. 显然 (I) 和 (II) 具有保圆性.

对 (III). 设圆的方程为

$$Az\bar{z} + \bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + C = 0$$

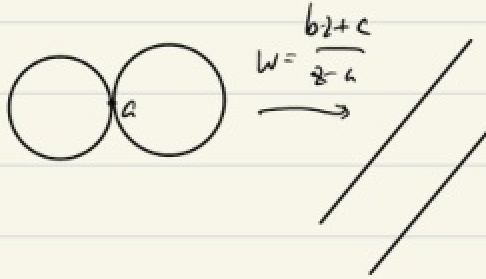
($A, C \in \mathbb{R}$. $\alpha \in \mathbb{C}$. $A=0$ — 直线. $A \neq 0$ 且 $|\alpha|^2 > AC$ — 圆)

$$\xRightarrow{w=\frac{1}{z}} \quad A\frac{1}{w}\frac{1}{\bar{w}} + \bar{\alpha}\frac{1}{w} + \alpha\frac{1}{\bar{w}} + C = 0$$

$$\Rightarrow \quad C w\bar{w} + \bar{\alpha}\bar{w} + \alpha w + A = 0 \quad \text{— 仍是一个圆}$$

注. 圆 $\xrightarrow[?]{w=\frac{az+b}{cz+d}}$ 直线

(包括直线)



Prop1. ∀ 一个 FLT $S(z)$ 最多只有两个不动点, 除非 $S(z)=z$.

证. $S(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = z \Rightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$

Def2. 设 z_1, z_2, z_3, z_4 是复平面四个(不同)的点. 称比值

$$\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$ 为这4个点的交比. 记为 (z_1, z_2, z_3, z_4)

注 ① 当 z_1, z_2, z_3, z_4 中有一个是 ∞ 时, 交比定义为上式对该

→ ∞ 的相应值. 如 $z_1=\infty$. $(\infty, z_2, z_3, z_4) = \dfrac{z_2-z_4}{z_2-z_3}$.

② 令 $L(z) = \dfrac{z-z_3}{z-z_4} : \dfrac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$. 则 $L(z_1) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$

且 $L(z_2)=1$. $L(z_3)=0$. $L(z_4)=\infty$.

Thm2 存在且仅有一个 FLT 把 $\mathbb{C}^*$ 上三个不同的点 z_2, z_3, z_4 映为(

给定的三个不同的点 w_2, w_3, w_4. 且这个 FLT $w=T(z)$ 为

$$(w, w_2, w_3, w_4) = (z, z_2, z_3, z_4).$$

证. 记 $L(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$. 则 $L(z_2)=1$. $L(z_3)=0$. $L(z_4)=\infty$

又记 $S(w) = (w, w_2, w_3, w_4)$ 则 $S(w_2)=1$. $S(w_3)=0$. $S(w_4)=$

$\Rightarrow S^{-1}(1)=w_2$. $S^{-1}(0)=w_3$. $S^{-1}(\infty)=w_4$.

则 $T \triangleq S^{-1}\circ L$ s.t. $T(z_j) = S^{-1}\circ L(z_j) = w_j$ $j=2,3,4$.

而 T 即为所求.

设 $\tilde{T}$ s.t. $\tilde{T}(z_j)=w_j$. 则 $\tilde{T}^{-1}\circ T(z_j) = z_j$ $j=2,3,4$

由 Prop1. $\tilde{T}^{-1}\circ T(z)=z$. $\Rightarrow T(z)=\tilde{T}(z)$.

此时. 由 $S^{-1}\circ L(z_j)=w_j$. $\Rightarrow L(z_j)=S(w_j)$.

即 $(w, w_2, w_3, w_4) = (z, z_2, z_3, z_4)$.

Thm3 交比是 FLT 下的不变量. 即对四个不同点 z_1, z_2, z_3, z_4 及

(保交比性)

$\forall$ T 为 FLT. 有

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4)$$

证. 令 $T(z_j) = w_j$. $j = 2.3.4$. 由 Thm2. $w = T(z)$ 由下式确

$$(w, w_2, w_3, w_4) = (z, z_2, z_3, z_4)$$

设 $w_1 = Tz_1$. $\Rightarrow$ $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$.

Prop2. 四点 z_1, z_2, z_3, z_4 共圆 $\Longleftrightarrow$ $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

证 "$\Rightarrow$" 记 $L(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$. 由 $L(z)$ 把过 z_2, z_3, z_4

圆 γ 映为实轴. 则 $z_1 \in \gamma$ 时. 有 $L(z_1) = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

"$\Leftarrow$" 若 $(z_1, z_2, z_3, z_4) = t \in \mathbb{R}$. 由 $L^{-1}(1) = z_2$. $L^{-1}(0) = z_3$. L^{-1}

即 L^{-1} 把实轴映为过 z_2, z_3, z_4 的圆 γ. 则 $L(z_1) = t \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow z_1 = L^{-1}($

Prop3. 设 z_2, z_3, z_4 不确定一个圆 γ. 则圆内(或圆外)的点 z 使

$\mathrm{Im}(z, z_2, z_3, z_4)$ 符号不变.

证. 设 $\exists$ z_1 和 $\tilde{z}_1$ 在圆内. s.t. $\mathrm{Im}(z_1, z_2, z_3, z_4) > 0$. 但

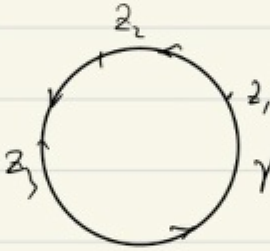
$\mathrm{Im}(\tilde{z}_1, z_2, z_3, z_4) < 0$. 记线段 l 连接 z_1 与 $\tilde{z}_1$. 则 l 在 γ 内

显然, $\mathrm{Im}(z, z_2, z_3, z_4)$ 连续, 则 $\exists$ $z \in l$ s.t. $\mathrm{Im}(z, z_2, z_3, z_4) = 0$

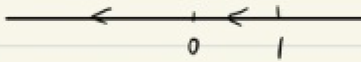
Def 3 (有向圆) 设 $\mathbb{C}^*$ 上的圆 γ 上有三个不同的点 $z_1, z_2.$

规定以 $z_1 \to z_2 \to z_3$ 为 γ 的方向. 称沿此方向

的右边 (左边) 就是 γ 的右边 (左边)



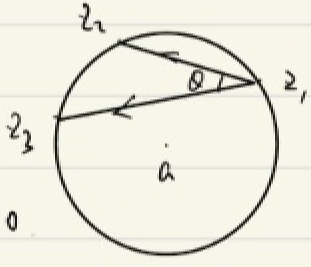
注: γ 为实轴, $\mathrm{Im}(i, 1, 0, \infty) = \mathrm{Im}\, i = 1 > 0$.



Prop 4. 设 $\mathbb{C}^*$ 上的圆 γ 的方向由 $z_1 \to z_2 \to z_3$

所定. 则 $\mathrm{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0 \iff z$ 在 γ 的右边
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad (<0) \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ (左边)

证 ① 设 γ 为有限圆. 圆心为 a.



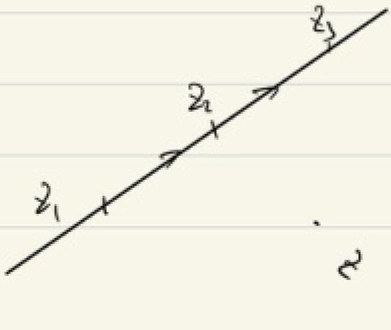
由 Prop 3. 只需证:

$\mathrm{Im}(\infty, z_1, z_2, z_3) > 0$ 且 $\mathrm{Im}(a, z_1, z_2, z_3) < 0$

$\because (\infty, z_1, z_2, z_3) = \dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} = \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = r \cdot e^{i\theta}, \quad 0 < \theta < \pi$

$\therefore \mathrm{Im}(\infty, z_1, z_2, z_3) = r \cdot \sin\theta > 0$.

② γ 为直线 $\cdots$



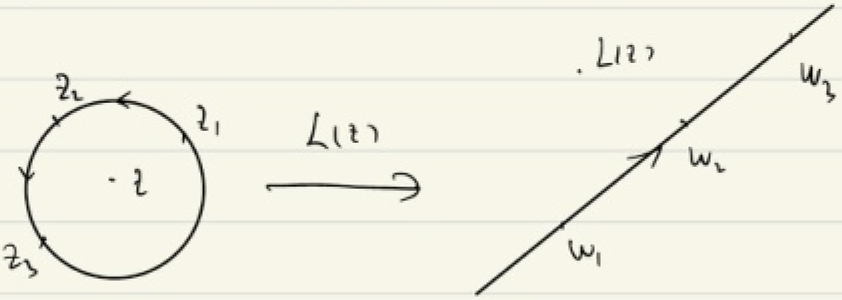
由 Prop 4 及 Thm 3 易得

Thm4 设 γ_1 和 γ_2 是 $\mathbb{C}^*$ 上的两个圆. γ_1 由三个点 $z_1 \to z_2 \to$

确定方向. T 为把 $\gamma_1 \to \gamma_2$ 的 FLT. 则 T 把 γ_1 的左边(右边)

为 γ_2 关于方向 $Tz_1 \to Tz_2 \to Tz_3$ 的左边(右边).

注. 如图.



Def4 设 γ 是以 a 为心 R 为半径的圆 γ. z 与 z^* 在以 a 为始点的射

若 $$|z-a|\cdot|z^*-a| = R^2$$

则称 z 与 z^* 关于 γ 对称. 若 γ 是直线. 则为通常意义下的对称

作业 P63. 1. 3. 4.

P66. 1. 2. 4

2023. 3.

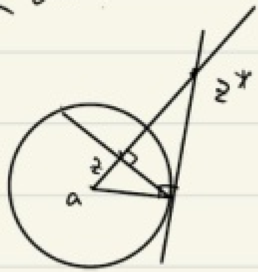
证 ① $z-a$ 与 z^*-a 方向相同. 则有

$$(\bar z-\bar a)(z^*-a)=R^2 \Rightarrow z^*=a+\frac{R^2}{\bar z-\bar a}$$

② 圆周上的点关于圆的对称点是自身.

规定: 圆心 ------- 是 ∞

③ 几何作法作出对称点.



④ $\frac{1}{\bar z}$ 与 z 关于 $|z|=1$ 对称

$\Rightarrow$ $w=\frac{1}{z}$ 的几何意义. $z\to\bar z\to\frac{1}{\bar z}$ $\Rightarrow$ $w=\frac{1}{z}$.

⑤ $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k>0$ 表示一个圆 $<$ $k=1$ 直线, $k\neq 1$ 圆.

且 z_1 与 z_2 关于此圆对称.

props 设 γ 为 C^* 上一个圆. 则 z 与 z^* 关于 γ 对称 $\Leftrightarrow$ 对 γ 上的

任三个不同点 z_1, z_2, z_3 有

$$(z^*, z_1, z_2, z_3)=\overline{(z, z_1, z_2, z_3)}$$

证. ① 设 γ 是有限圆. 圆心为 a. 半径为 R. 则有

$$(z^*, z_1, z_2, z_3)=\left(a+\frac{R^2}{\bar z-\bar a}, z_1, z_2, z_3\right)$$

$$\overset{T_1(z)=z-a}{=\!=}\left(\frac{R^2}{\bar z-\bar a}, z_1-a, z_2-a, z_3-a\right)$$

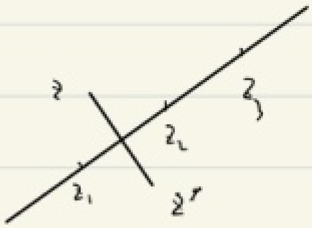
$$\overset{T_2(z)=\frac{R^2}{z}}{=} \left(\bar z-\bar a,\ \frac{R^2}{z_1-a},\ \frac{R^2}{z_2-a},\ \frac{R^2}{z_3-a}\right)$$

$$= (\bar z-\bar a,\ \bar z_1-\bar a,\ \bar z_2-\bar a,\ \bar z_3-\bar a)$$

$$= \overline{(z-a,\ z_1-a,\ z_2-a,\ z_3-a)}$$

$$\overset{T_3(z)=z+a}{=} \overline{(z,\ z_1,\ z_2,\ z_3)}$$

② 直线情形类似.



证. 令 $T(z)=(z, z_1, z_2, z_3)$. 则 T 将过 z_1, z_2, z_3 的圆 γ 映为实

$(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)} \Rightarrow Tz^* = \overline{Tz}$, 即 Tz 与 Tz^* 关于实轴

Thm5 (保对称点性) 对称点在FLT下不变. 即若 T 把圆

的圆 Γ. z 与 z^* 关于 γ 对称. 则 Tz 与 Tz^* 关于 Γ 对称.

证. 设 $w_1, w_2, w_3 \in \Gamma$. 则 $\exists\, z_j \in \gamma$. s.t. $T(z_j)=w_j$. $j=1,2$

则有 $(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}$

$$\overset{\text{Thm3}}{\Rightarrow} (Tz^*, Tz_1, Tz_2, Tz_3) = \overline{(Tz, Tz_1, Tz_2, Tz_3)}$$

即. $(Tz^*, w_1, w_2, w_3) = \overline{(Tz, w_1, w_2, w_3)}$.

Thm 6 $\forall$ FLT 在 $\mathbb{C}^*$ 上是共形的.

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow T'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0.$$

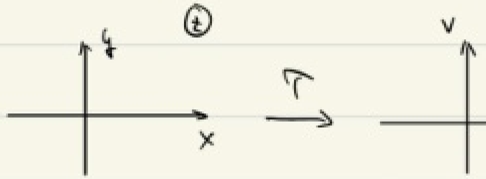
$$\begin{tikzcd} z=0 \arrow[r, "w=\frac{1}{z}"] \arrow[dr, "\zeta=z"'] & w=\infty \arrow[d, "\zeta=\frac{1}{w}"] \\ & \zeta=0 \end{tikzcd}$$

$\zeta'\big|_{z=0}=1\neq 0.$

$$\begin{tikzcd} z=\infty \arrow[r, "w=z"] \arrow[d, "\zeta=\frac{1}{z}"'] & w=\infty \arrow[d, "\xi=\frac{1}{w}"] \\ \zeta=0 \arrow[r, "\xi=\zeta"'] & \xi=0 \end{tikzcd}$$

例1. 求FLT把实轴映为实轴，把 $\operatorname{Im} z>0$ 映为 $\operatorname{Im} w>0$.

解. 设 $w=T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 则



$a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

$$\overline{w}=\frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d} \Rightarrow w-\overline{w}=\frac{ad-bc}{|cz+d|^2}(z-\overline{z})$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} w=\frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\operatorname{Im} z$$

故 $ad-bc>0$ 时，$T: \operatorname{Im} z \longrightarrow \operatorname{Im} w>0$

例2. 求FLT把实轴映为单位圆，且 $\operatorname{Im} z>0$ 映为 $|w|<1$，s.t. T(a

$\operatorname{Im} a>0$

证. $T(a)=0 \xRightarrow{\text{Thm 5}} T(\overline{a})=\infty.$

则设 $T(z)=\lambda\dfrac{z-a}{z-\overline{a}}$

再由 $|T(0)|=1 \Rightarrow |\lambda|=1$.

设 $\lambda=e^{i\theta}$, $\theta\in\mathbb{R}$，则有 $T(z)=e^{i\theta}\dfrac{z-a}{z-\overline{a}}.$

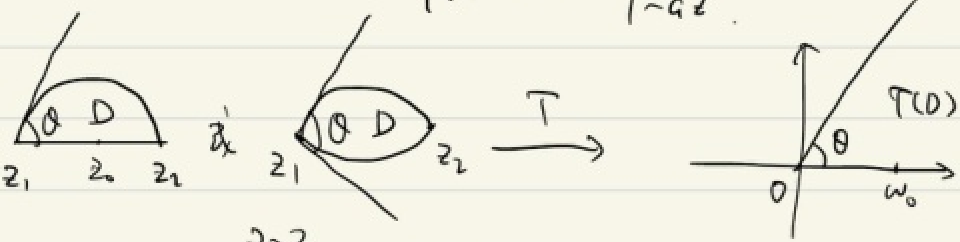
例3. 求一FLT把 $|z|<1$ 映为 $|w|<1$. s.t. $T(a)=0$. $|a|<1$.

解. 由 $T(a)=0 \Rightarrow T(\frac{1}{\bar{a}})=\infty$

设 $$T(z)=\lambda\frac{z-a}{z-\frac{1}{\bar{a}}}=-\bar{a}\lambda\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\triangleq\mu\frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

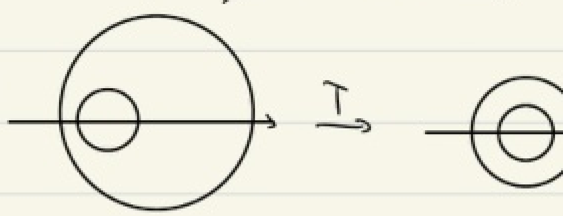
由 $|T(1)|=1$. $\Rightarrow$ $1=\left|\mu\frac{1-a}{1-\bar{a}}\right|=|\mu|$

设 $\mu=e^{i\theta}$. $\theta\in\mathbb{R}$. 故有
$$T(z)=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

例4. 

解. $T(z)=\lambda\frac{z-z_1}{z-z_2}$ $\quad T(z_0)=w_0$.

例5. 求一FLT.把 $D=\{z:\ |z-3|>9.\ |z-8|<16\}$ 映为 $E=\{w:\ \frac{2}{3}<|$

解. 找D中两个圆之一对公共 

对称点. z_1. z_2. 则有

$$\begin{cases}(z_1-3)\cdot(z_2-3)=81\\(z_1-8)(z_2-8)=256\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z_1=0\\z_2=-24.\end{cases}$$

设 $T(z)=\lambda\frac{z}{z+24}$

设 T 把 $|z-8|=16$ 映为 $|w|=1$，而 $z=24 \Rightarrow |T(24)|=1=\left|\frac{\lambda}{2}\right|$

$\Rightarrow |\lambda|=2$，设 $\lambda=2e^{i\theta}$.

$\therefore \quad T(z)=e^{i\theta}\dfrac{2z}{z+24}$.

§3.4 初等函数映射

一般方法：$\quad w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

$$x=x_0 \longrightarrow \begin{cases} u=u(x_0,y) \\ v=v(x_0,y) \end{cases} \Rightarrow F(u,v)=$$

$$y=y_0$$

$$|z|=\rho$$

$$\arg z=\theta$$

$$\begin{matrix} u(x,y)=u_0 \\ v(x,y)=v_0 \end{matrix} \longleftarrow \begin{matrix} u=u_0 \\ v=v_0 \end{matrix}$$

一. $w=z^\alpha \ (\alpha\in\mathbb{R}^+)$

$$|z|=\rho \xrightarrow{w=z^\alpha} |w|=|z|^\alpha=\rho^\alpha$$

$$\arg z=\theta \longrightarrow \arg w=\alpha\arg z=\alpha\theta.$$

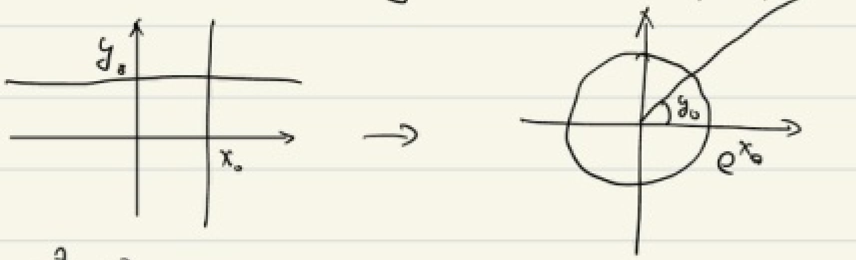
故 $w=z^\alpha$ 把 $\theta_1<\arg z<\theta_2 \ \left(\theta_2-\theta_1<\frac{2\pi}{\alpha}\right)$ 映为

$$\alpha\theta_1<\arg w<\alpha\theta_2$$

二. $w=e^z$　　$e^x\cdot e^{iy}$　　$e^z=e^{z+2\pi i}$

$x=x_0$ $\xrightarrow{w=e^z}$ $|w|=|e^z|=e^{x_0}$ —— 圆

$y=y_0$ 　　　　 $\arg w=y_0$ —— 射线



故 $w=e^z$ 将

$$\{z=x+iy:\ x\in\mathbb{R},\ y_1<y<y_2,\ y_2-y_1<2\pi\}$$

映为 $\{w:\ y_1<\arg w<y_2\}$.

特别地，将 $\{z=x+iy:\ x\in\mathbb{R},\ 0<y<2\pi\}$ 映为: w平面\正实轴

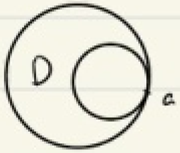
将 $\{z=x+iy:\ x\in\mathbb{R},\ 0<y<\pi\}$ 映为 $\mathrm{Im}\,w>0$.

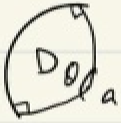
作业　P65. 4. 5. 6. 7

　　　P75. 1. 2. 3.

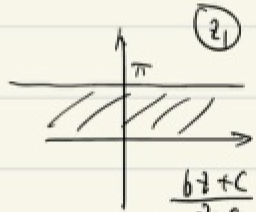
例6 求共形映射满足下列条件.

2023.3.2

(1)  $\longrightarrow \operatorname{Im} w > 0$

(2)  $\longrightarrow \operatorname{Im} w > 0$

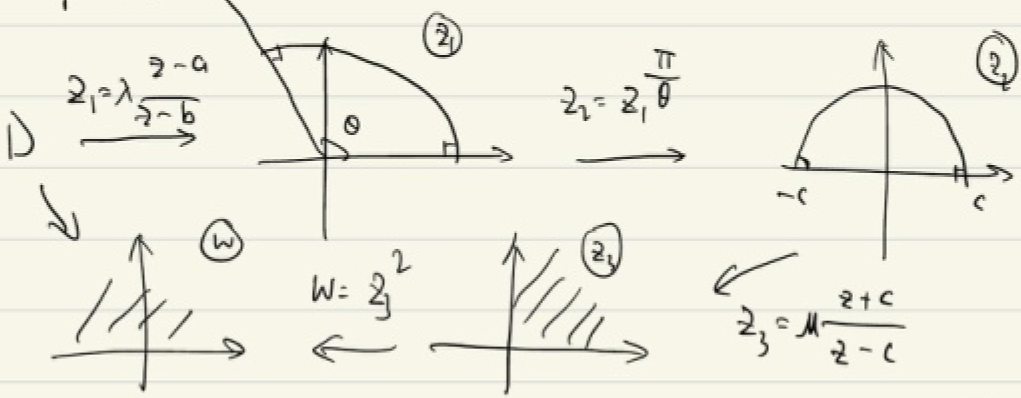
(3) $D = \{ z平面 \setminus [-1,1] \} \longrightarrow |w| < 1.$

解 (1) $D \xrightarrow{z_1 = \frac{bz+c}{z-a}}$  $\xrightarrow{w = e^{z_1}} \operatorname{Im} w > 0.$

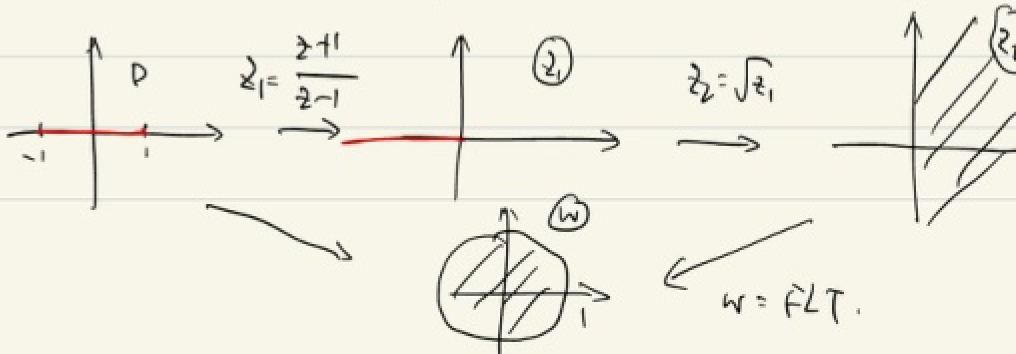
$$w = e^{\frac{bz+c}{z-a}}$$

(2) 设交于a点两圆弧的另一交点为b，夹角为θ.

$z_1 = \lambda \frac{z-a}{z-b}$, $z_2 = z_1^{\frac{\pi}{\theta}}$, $z_3 = \mu \frac{z+c}{z-c}$, $w = z_3^2$



(3) $z_1 = \frac{z+1}{z-1}$, $z_2 = \sqrt{z_1}$, $w = \text{FLT}.$



三、其他映射

1. $w=z^2$.　$x=x_0 \to$　$y=y_0 \to$　$F(u,v)=0$.

$\quad\;\; \parallel$

$\underset{u}{x^2-y^2}+i\,\underset{v}{2xy}$

2. $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ — 儒可夫斯基函数

$z=\rho e^{i\theta}$, $w=u+iv \Rightarrow u=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\theta$.　$v=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)$

$|z|=\rho \longrightarrow \dfrac{u^2}{\left(\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\right)^2}+\dfrac{v^2}{\left(\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\right)^2}=1$.

$\arg z=\theta \longrightarrow \dfrac{u^2}{\cos^2\theta}-\dfrac{v^2}{\sin^2\theta}=1$

3. $w=z^3-3z$. (略)

四、多值函数

1. $w=\sqrt[n]{z}$ ($n\in\mathbb{N}$, $n>1$).

Prop. $w=\sqrt[n]{z}$ 在 $\Omega=\{z平面 \mid \mathrm{Re}\,z\le 0\}$ 上有n个单值解析分支.

证. 以 $n=2$ 为例. $w=\sqrt{z}$.

首先,在 Ω 内, $\sqrt{z}$ 有且只有一个使得其实部为正. 记这个分支

$\sqrt{z}$. 下证: $\sqrt{z}$ 在 Ω 内解析.

先证 $\sqrt{z}$ 连续. $\forall z_0, z\in\Omega$. 记 $w_0=\sqrt{z_0}=u_0+iv_0$, $w=\sqrt{z}=u$

这里 $u_0, u>0$, 则

$$|z-z_0| = |w^2-w_0^2| = |w-w_0|\cdot|w+w_0|$$

由于 $|w+w_0| \geqslant u_0+u > u_0$

故 $$|w-w_0| = \frac{|z-z_0|}{|w+w_0|} < \frac{|z-z_0|}{u_0}$$

$\Rightarrow$ $z\to z_0$ 时, $w\to w_0$, 故 $w=\sqrt{z}$ 在 z_0 连续.

进而, 由连续, $\Delta z\to 0$, 有 $\Delta w\to 0$.

故 $$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta w\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta z}{\Delta w}} = \frac{1}{2w} = \frac{1}{2\sqrt{z}}. \quad (z=w^2 \Rightarrow z'=2w)$$

同样可证 $\sqrt{z}$ 的另一分支 $(\sqrt{z})_2$ 在 Ω 内也解析. 且 $\left((\sqrt{z})_2\right)' = \frac{1}{2(\sqrt{z})_2}$

注: ① 类似可证 $\sqrt[n]{z}$ 在 $\tilde{\Omega}=\{z平面\setminus \arg z=0\}$ 内也有 n

单值分支

② 所谓"单值分支"可以理解为 $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\,e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}}$

$k=0,1,\cdots,n-$

中 k 取 $0,1,\cdots,n-1$ 时分别表示出来.

③ 若在 Ω 内, $\arg z$ 不能限制在 2π 范围内, 则

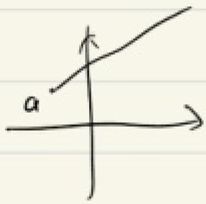
$\sqrt[n]{z}$ 在Ω内就不能分出 n 个解析的分支.

2. $w=\log z \quad (z\neq 0) \longleftarrow z=e^{w}$.

$$\begin{aligned} &\ \ \| \\ &\log|z|+i(\arg z+2k\pi),\quad k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Prop　$w=\log z$ 在 $\Omega=\{z平面 \mid \operatorname{Re} z\leq 0\}$ 上有无穷多个解析分

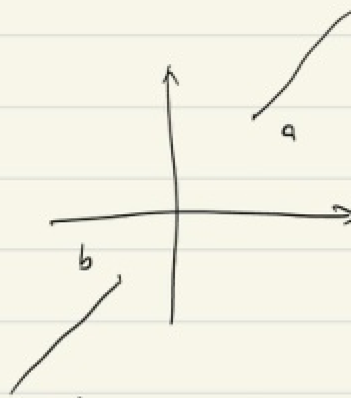
且 $(\log z)'=\frac{1}{z}$.

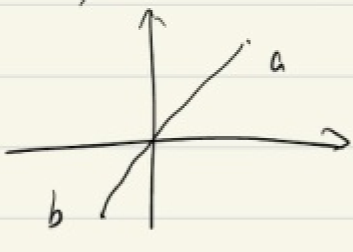


注. ① $w=\log(z-a)$

② $w=\log(z-a)(z-b)$

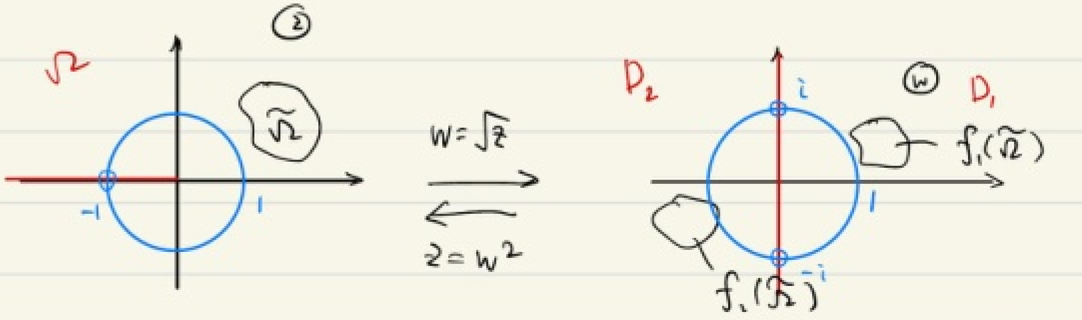
③ $w=\log\dfrac{z-a}{z-b}$.





3. 黎曼面简介.

2023.3.2



$\Omega = z$平面$\setminus \mathrm{Re}\, z \le 0$

$D_1 = -\frac{\pi}{2} < \arg w < \frac{\pi}{2}$ (右半平

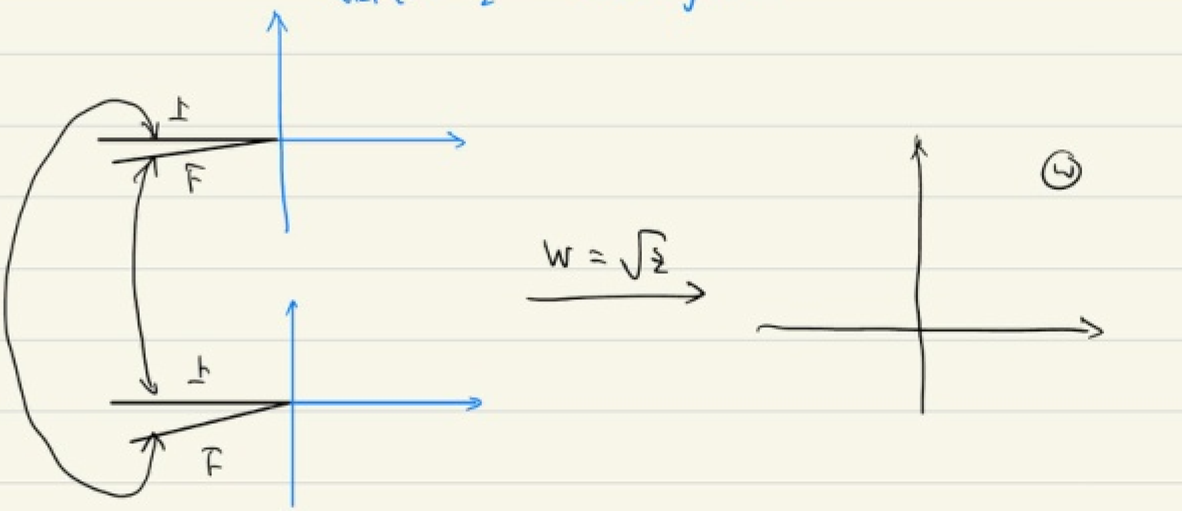
$D_2 = \frac{\pi}{2} < \arg w < \frac{3}{2}\pi$ (左半平

则 $z = w^2$ 将 D_1 和 D_2 都映为 Ω

反过来. $w=\sqrt{z}$ 的两个分支把 Ω 分别映为 D_1 和 D_2.

$f_1(z) = (\sqrt{z})_1$, $f_2(z) = (\sqrt{z})_2 = \sqrt{|z|}\, e^{i\frac{\arg z + 2\pi}{2}}$

$= \sqrt{|z|}\, e^{i\frac{\arg z}{2}}$ $\quad -\pi < \arg z < \pi$



第四章 复积分

§4.1 基本定理

一. 线积分

<u>Def 1</u>. 设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 连续. $f = u(t) + iv(t)$. 定义

$$\int_a^b f(t)\,dt \triangleq \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$$

<u>Prop 1</u>. (1) 线性性质. $\int_a^b cf(t)\,dt = c\int_a^b u(t)\,dt + ci\int_a^b v(t)\,dt$

(2) 积分不等式: $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt \quad (a<b)$

注 (2) 记 $\arg\int_a^b f(t)\,dt = \theta$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = e^{-i\theta}\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}f(t)\right)dt$$

$$\le \int_a^b |e^{-i\theta}f(t)|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

<u>Def 2</u> 设 γ: $z = z(t) = x(t) + iy(t)$. $a \le t \le b$ 可微. 设 $f: \gamma \to \mathbb{C}$

定义:

$$\int_\gamma f(z)\,dz \triangleq \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$$

<u>注</u> ① 定义与 γ 之参数表示无关.

设 γ: $z = z(\mu)$, $\alpha \le \mu \le \beta$. 且 $\exists\, \mu = \mu(t)$: $t \in [a,b] \to [\alpha,\beta]$ 递增

即 $z(t) = z(\mu(t))$. 则

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(\mu))\, z'(\mu)\, d\mu$$

$$\overset{\mu=\mu(t)}{=\!=} \int_a^b f(z(\mu(t)))\, z'(\mu(t))\cdot \mu'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt$$

② 与方向之关系：$\int_{\gamma^{-1}} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$.

③ 对 γ 的可加性：若 $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$. 则

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)dz.$$

④ 定义对闭曲线也成立.

Def3. f. γ 同 def2. 定义

$$\int_\gamma f\, \overline{dz} \triangleq \overline{\int_\gamma \bar{f}\, dz}$$

注 ① $\int_\gamma f\, \overline{dz} + \int_\gamma f\, dz = \overline{\int_a^b \bar{f}(z(t))\, z'(t)\, dt} + \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt$

$$= \int_a^b \left(f(z(t))\, \overline{z'(t)} + f(z(t))\, z'(t) \right) dt \qquad z'(t) = x'(t) + i y'(t)$$

$$= \int_a^b f(z(t))\, 2x'(t)\, dt = 2\int_a^b f(z(t))\, dx = 2\int_\gamma f(z)\, dx$$

类似地，有 $\int_\gamma f\,dz - \int_\gamma f\,d\bar{z} = 2i\int_\gamma f(z)\,dy$

$$\Longrightarrow \int_\gamma f\,dz = \int_\gamma f\,dx + i\int_\gamma f\,dy$$

② 在注①之意义下，若 $f = u + iv$，有

$$\int_\gamma f\,dz = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma v\,dx + u\,dy$$

这表明，复积分本质上是第二类曲线积分。

③ 若 γ: $z = z(t) = x(t) + iy(t)$，$a \le t \le b$，则

$$\int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma v\,dx + u\,dy = \int_a^b \left(u(z(t))\,x'(t) - v(z(t))\,y'(t)\right)$$

$$+ \int_a^b i\left(v(z(t))\,x'(t) + u(z(t))\,y'(t)\right)dt$$

$$= \int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)\,dt = \int_\gamma f\,dz.$$

Def 4 f, γ 同上，记 $|dz| = ds$ 一弧长微元，定义

$$\int_\gamma f\,|dz| = \int_\gamma f\,ds \triangleq \int_a^b f(z(t))\,|z'(t)|\,dt \qquad (a<b)$$

—— 第一类曲线积分。

$$\Longrightarrow \left|\int_\gamma f\,dz\right| \le \int_\gamma |f|\,|dz| = \int_\gamma |f|\,ds.$$

二. 线积分与路径的原函数.

<u>Thm1</u> 设区域 Ω. $\gamma\subset\Omega$. p, q 在 Ω 上连续. 则下面的条件等价

(1) $\int_\gamma p\,dx+q\,dy$ 只与 γ 的端点有关.

(2) 对 Ω 内任意闭曲线 γ. 有 $\oint_\gamma p\,dx+q\,dy=0$.

(3) $\exists$ Ω 上的可微函数 $u(x,y)$. s.t.

$$du = p\,dx+q\,dy$$

即 $\frac{\partial u}{\partial x}=p$. $\frac{\partial u}{\partial y}=q$.

$$\left(u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} p\,dx+q\,dy + C \quad , (x_0,y_0).\,(x,y)\in\Omega \right)$$

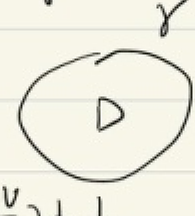
<u>注</u> ① Thm1 中的 $p.\,q.\,u$ 都可以是复函数.

② 若 Ω 为单连通区域. 则 (1). (2). (3) $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}$.

下面来看 $\int_\gamma f\,dz$ 与路径无关之问题.

<u>角度1</u> $\oint_\gamma f\,dz=\oint_\gamma u\,dx-v\,dy+i\oint_\gamma v\,dx+u\,dy$

若 $f\in H(\Omega)$ 且 f' 连续 $\Rightarrow u.\,v\in C^1$ 则



$$\oint_\gamma f\,dz \overset{\text{Green}}{=\!=} \iint_D \underbrace{\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{=0} dx\,dy + i\iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0} dx\,dy$$

f 解析 $\underset{=}{}$ 0

<u>充分性</u>. $\int_\gamma f\,dz = \int_\gamma f\,dx + i\int_\gamma f\,dy = \int_\gamma f\,dx + if\,dy$

则由 Thm1. $\int_\gamma f\,dz$ 与路径无关 $\Longleftrightarrow$ $\exists\ F(z)$. s.t.

$$dF = f\,dx + if\,dy$$

即 $\frac{\partial F}{\partial x} = f \quad \frac{\partial F}{\partial y} = if$

即 $\frac{\partial F}{\partial x} = -i\frac{\partial F}{\partial y}$.

由 f 连续. 有 $F \in H(\Omega)$. 且 $F'(z) = f(z)$.

综上. 有

Prop2. f. γ. Ω 同上. 则 $\int_\gamma f\,dz$ 在 Ω 内与路径无关 $\Longleftrightarrow$

$\exists\ F(z) \in H(\Omega)$. 且 $F'(z) = f(z)$.

作业 P_{84-85} 1. 2. 3. 4. 5. 6.

三. 矩形上的柯西定理

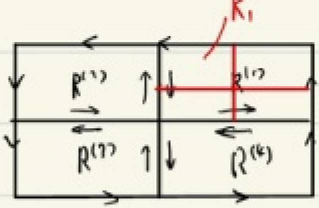
2023. 3.

设 $R=\{(x,y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$. $f\in H(R) \Leftrightarrow \exists$ 开域 $\Omega\supset R$, s.t. $f\in$

<u>Thm 2</u> (Cauchy-Goursat) 设 $f\in H(R)$. ∂R 表示 R 的边界. 则有

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0.$$

<u>证</u>. 记 $\eta(R)=\int_{\partial R} f(z)\,dz$. 下证 $|\eta(R)|=0$



或对 $\forall \varepsilon>0$. 有 $|\eta(R)|<\varepsilon$.

将 R 平行分成四个矩形 $R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)}, R^{(4)}$. 则由积分可加性, 有

$$\eta(R) = \eta(R^{(1)})+\eta(R^{(2)})+\eta(R^{(3)})+\eta(R^{(4)}).$$

则至少 $\exists$ 一个小矩形, 不妨记其中的一个为 R_1. s.t.

$$|\eta(R_1)| \ge \frac{1}{4}|\eta(R)|.$$

继续这个过程, 可得一列矩形, $R\supset R_1\supset\cdots\supset R_n\supset\cdots$ s.t.

$$|\eta(R_n)| \ge \frac{1}{4}|\eta(R_{n-1})|.$$

$$\Rightarrow \quad |\eta(R_n)| \ge \frac{1}{4^n}|\eta(R)|.$$

另一方面, 当 $n\to\infty$ 时, $R_n\to z^*\in R$. 则 f 在 z^* 解析. 由于.

(闭集套定理: 设一列非空闭集 $F_n\subset\mathbb{R}^2$ s.t. $F_n\subset F_{n-1}$ 且 $\operatorname{diam} F_n=\sup\{|z-w|:$
$\forall z,w\in F_n\}\to 0$, $n\to\infty$. 则有 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n=\{\xi\}$.)

s.t. f 在 $|z-z^*|<\delta$ 内解析. 且当 n 充分大时, $\partial R_n \subset \{z: |z-z^*|<\delta$

由 f 在 z^* 的解析, 对充分小的 $\varepsilon>0$, $\exists\delta$ (可以取成与上述δ相同), 当 $|z-z^*|<$

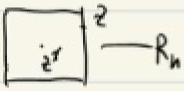
$$\left|\frac{f(z)-f(z^*)}{z-z^*}-f'(z^*)\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \left|f(z)-f(z^*)-f'(z^*)(z-z^*)\right|<\varepsilon|z-z^*|$$

注意到 $\displaystyle\int_{\partial R_n} dz = 0 = \int_{\partial R_n} z\,dz \quad \left(\because\ z'=1,\ \left(\tfrac{1}{2}z^2\right)'=z\right)$

$$\Longrightarrow \int_{\partial R_n} f(z^*)\,dz = 0, \quad \int_{\partial R_n} f'(z^*)(z-z^*)\,dz = 0$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ \left|\int_{\partial R_n} f(z)\,dz\right| &= \left|\int_{\partial R_n}\left(f(z)-f(z^*)-f'(z^*)(z-z^*)\right)dz\right| \\
&\le \int_{\partial R_n}\left|f(z)-f(z^*)-f'(z^*)(z-z^*)\right||dz| \\
&< \varepsilon\int_{\partial R_n}|z-z^*|\,|dz|
\end{aligned}$$

设 R 的周长和对角线分别为 L 和 d. 故 R_n 的周长为 

$\frac{L}{2^n}$, 对角线为 $\frac{d}{2^n}$. 故有

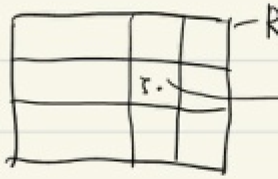
$$\begin{aligned}
\left|\int_{\partial R_n} f(z)\,dz\right| &\le \varepsilon\cdot\int_{\partial R_n}|z-z^*|\,|dz| \\
&\le \varepsilon\cdot\frac{d}{2^n}\cdot\int_{\partial R_n}|dz| = \varepsilon\cdot\frac{d}{2^n}\cdot\frac{L}{2^n} = \frac{dL}{4^n}\varepsilon.
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{dL}{4^n}\varepsilon \ge \frac{1}{4^n}|\eta(R)| \Rightarrow |\eta(R)| \le dL\varepsilon \Rightarrow \eta(R)=0.$$

Thm 3 记 $R' = R\setminus\{\zeta_1, \cdots, \zeta_n\}$. 若 $f \in H(R')$, 且 $\lim_{z\to\zeta_j}(z-\zeta_j)f(z) = 0$.

则 $\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$.

证. 只需证明 $n=1$ 的情形.



作如图所示之 R 之分割. s.t. ζ 在 $\tilde{R}$ 内. 则

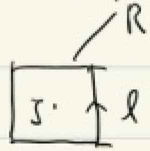
只需证明 $\int_{\partial\tilde{R}} f(z)\,dz = 0$. $|re^{i\theta_j}|$

由 $\lim_{z\to\zeta}(z-\zeta)f(z) = 0$. 对 $\forall\varepsilon>0$ ∃充分小的正方形 $\tilde{R}$ (中心为 ζ), s.t.

当 $z \in \partial\tilde{R}$ 时, 有 $z = e^{i}$

$$|f(z)| < \frac{\varepsilon}{|z-\zeta|}.$$

$$\Rightarrow \left|\int_{\partial\tilde{R}} f(z)\,dz\right| \le \int_{\partial\tilde{R}} \frac{\varepsilon}{|z-\zeta|}|dz| = \varepsilon\cdot\int_{\partial\tilde{R}} \frac{|dz|}{|z-\zeta|}$$



记 l 的长度为 d. 则当 $z \in l$ 时. 有

$$|z-\zeta| \ge \frac{d}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{\partial\tilde{R}} \frac{|dz|}{|z-\zeta|} = 4\int_l \frac{|dz|}{|z-\zeta|} \le 4\cdot\frac{2}{d}\int_l |dz| = 4\cdot\frac{2}{d}\cdot d = 8.$$

即 $\left|\int_{\partial\tilde{R}} f(z)\,dz\right| \le 8\varepsilon \Rightarrow \int_{\partial\tilde{R}} f(z)\,dz = 0$.

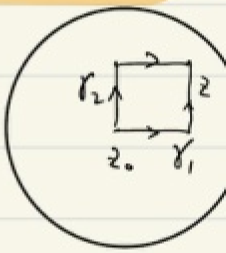
注. 若 f 在 ζ 附近有界. 则定理成立.

三. 圆盘上的柯西定理.

记 $\Delta=\{z: |z-z_0|<\rho\}$.

Thm 4. 设 $f\in H(\Delta)$. 则对 $\forall\,\Delta$ 内的闭曲线 γ. 有 $\int_\gamma f\,dz=0$.

证. 考虑: 对 $\forall z\in\Delta$.



$$F(z)=\int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

这里 γ_1 为从 z_0 沿先水平再竖直到 z 的折线. 则有

$$\frac{\partial F}{\partial y}=i f(z).$$

由 Thm 2. 有 $F(z)=\int_{\gamma_2} f(z)\,dz$. 同理有

$$\frac{\partial F}{\partial x}=f(z).$$

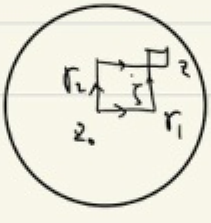
即 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-i\dfrac{\partial F}{\partial y}$. 或者 $F'(z)=f(z)$. 由 Prop 2. $\int_\gamma f(z)\,dz=0$.

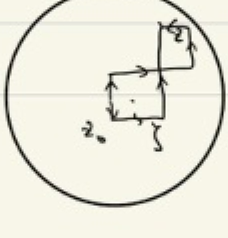
Thm 5. 记 $\Delta'=\Delta\setminus\{\zeta_1,\cdots,\zeta_n\}$. $f\in H(\Delta')$ 且 $\lim\limits_{z\to\zeta_j}(z-\zeta_j)f(z)=0$. 则对 $\forall\,\Delta'$ 内任意闭曲线 γ. 有

$$\int_\gamma f(z)\,dz=0.$$

存在可去奇点的圆盘仍然满足柯西定理

证. 和 Thm 4 一样. 仍然可以找到 $F(z)$. s.t. $F'(z)=f(z)$. $\forall z\in$

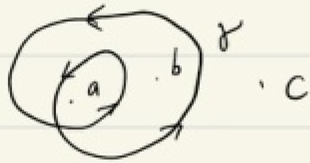




三. 一点关于闭曲线的指数

2023. 3

Lem1 设γ为可微的闭曲线. $a \notin \gamma$. 则



$\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ 是$2\pi i$的倍数.

证. 设γ: $z=z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$. 考虑

$$h(t) = \int_\alpha^t \frac{z'(t)}{z(t)-a}\,dt \qquad \alpha \le t \le \beta$$

$\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$

γ可微 $\Rightarrow$ $h'(t) = z'(t)/z(t)-a$.

令 $f(t) = e^{-h(t)}(z(t)-a)$, 则有

$$f'(t) = e^{-h(t)}(z(t)-a)\cdot(-h'(t)) + e^{-h(t)} z'(t)$$

$$= e^{-h(t)}\left(z'(t) - h'(t)(z(t)-a)\right) \equiv 0 \quad \forall t$$

$\Rightarrow f(t) = \text{常数} = f(\alpha) = e^{-\overset{=0}{h(\alpha)}}(z(\alpha)-a) = z(\alpha)-a$

$$\Rightarrow e^{-h(t)}(z(t)-a) = z(\alpha)-a$$

$$\Rightarrow e^{h(t)} = \frac{z(t)-a}{z(\alpha)-a}.$$

由γ闭 $\Rightarrow z(\alpha)=z(\beta) \Rightarrow e^{h(\beta)} = \frac{z(\beta)-a}{z(\alpha)-a} = 1$

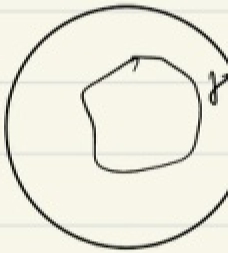
$\Rightarrow h(\beta) = 2k\pi i$. 即 $\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2k\pi i$. $k \in \mathbb{Z}$.

Def1. 设a和γ同上. 定义a关于γ的指数为$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$, 记为$n(\gamma, a)$

环路γ关于a的<u>环绕次数</u>.

Prop 1　(1) 若γ位于一个圆Δ内，对$\forall\,\Delta$外的点a，有$n(\gamma,a)=0$

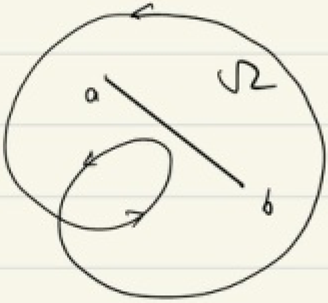
$$\left(\because\ \frac{1}{z-a}\in H(\Delta)\overset{\text{Thm4}}{\Longrightarrow}\int_\gamma\frac{1}{z-a}dz=0.\right)$$



(2) 将$n(\gamma,a)$看成a的函数，则在γ所确定的不同区域（连通分支）中$n(\gamma,a)$是常值函数.

特别地，当a在无界的连通分支中，$n(\gamma,a)=0$.

证 (2) 只需取某一个连通分支Ω中的两个不同点a和b，只需证



$$n(\gamma,a)=n(\gamma,b)$$

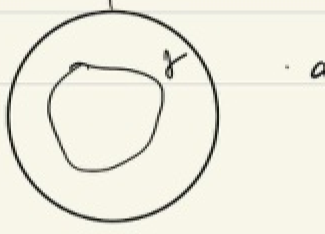
不妨设连接a, b的线段L在Ω中，由于$\log\frac{z-a}{z-b}$在$\mathbb{C}\setminus L$能取单值解析分支，且$\left(\log\frac{z-a}{z-b}\right)'=\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}$，故有

$$\int_\gamma\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)dz=0.$$

$\Rightarrow\ n(\gamma,a)=n(\gamma,b)$.

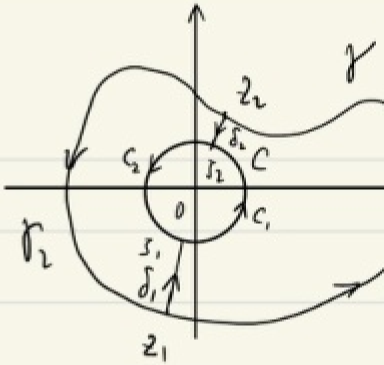
由前述证明，取圆充分大 s.t. γ含在$|z|<\rho<|a|$.

此时，由(1)，有$n(\gamma,a)=0$.



Lem 2 设γ如图所示. 则有

$$n(\gamma, 0) = 1.$$



证: 作圆C, 使C及其内部含在γ内, C为逆时针. 则有

$$n(C, 0) = 1. \quad \left(\because \int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i. \right)$$

故只需证 $n(\gamma, 0) = n(C, 0)$.

由图示. 记

$$\sigma_1 = \gamma_1 + \delta_2 + C_1^- + \delta_1^- , \quad \sigma_2 = \gamma_2 + \delta_1 + C_2^- + \delta_2^-$$

则有 $$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{1}{z} dz$$

$$= \int_{\underbrace{\gamma_1 + \delta_2 + C_1^- + \delta_1^-}_{\sigma_1} + \underbrace{\gamma_2 + \delta_1 + \delta_2^- + C_2^-}_{\sigma_2} + C_1 + C_2} \frac{1}{z} dz$$

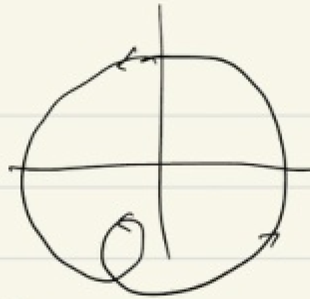
$$= \int_{\sigma_1} \frac{1}{z} dz + \int_{\sigma_2} \frac{1}{z} dz + \int_C \frac{1}{z} dz$$

即 $$n(\gamma, 0) = n(\sigma_1, 0) + n(\sigma_2, 0) + n(C, 0)$$

由于0在σ_1(σ_2)所围区域的无界区域内. 故$n(\sigma_1, 0) = 0 = n(\sigma_2, 0)$

$$\Rightarrow n(\gamma, 0) = n(C, 0) = 1.$$

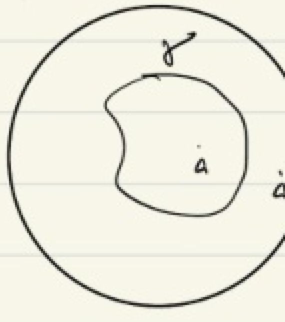
注：① Lem2 中的 γ 可以是非简单曲线.



二.

设 Δ 为圆. $f \in H(\Delta)$. γ 为 Δ 内的闭曲线,

$a \in \Delta$, $a \notin \gamma$. 考虑



$$F(z) = \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

$z \neq a$ 时, F 为解析, 但

$$\lim_{z\to a}(z-a)F(z) = \lim_{z\to a}\left(f(z)-f(a)\right) = 0.$$

这表明 $F(z)$ 在 $\Delta\setminus\{a\}$ 满足 Thm5 之条件. 故有

$$\int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a)\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i\cdot f(a)\cdot n(\gamma, a).$$

$$\Rightarrow n(\gamma, a)\cdot f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

由此有

Thm6 (柯西积分公式)

设 $f \in H(\Delta)$, γ 为 Δ 内的闭曲线, $a \notin \gamma$. 则有

$$n(\gamma,a)\cdot f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

注 ① a 在圆 γ 外时，$n(\gamma,a)=0$. $\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz=0$.

② 当 $n(\gamma,a)=1$ 时. 由 a 的任意性（即 a 在 γ 所确定

某个连通分支中），则有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \quad ——(*)$$

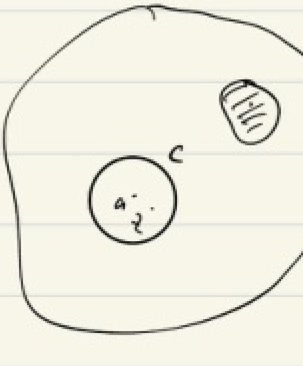
③ (*)式给出了解析函数的积分表示.

三. 高阶导数

设 $f\in H(\Omega)$. 对 $\forall a\in\Omega$. 作圆 C, $|z-a|=r$

s.t. C 及其内部含在 Ω 内. 由 Thm7.

对 $\forall$ C 中的 z，有



$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

下证：$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$. $n=1,2,\cdots$

Lem3 设 $\varphi(\zeta)$ 在弧 γ 上连续，则对 $F_n(z)=\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^n}d\zeta$（$z$ 不在

有 $F_n'(z)=nF_{n+1}(z)$.

作业 §4.2.2 1. 2. 3

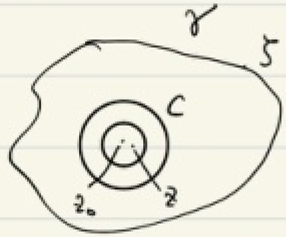
证. 用归纳法.

① 当$n=1$时, 要证 $F_1'(z)=F_2(z)$. 即

$$F_1'(z)=\left(\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right)'=\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta = F_2(z).$$

先证 $F_1(z)$ 连续. $\forall z_0\notin\gamma$. 作圆C: $|\zeta-z_0|=\delta$

s.t. C 不与γ相交. 考虑 $|\zeta-z_0|=\frac{\delta}{2}$ 中的z, 则有



$$|\zeta-z|=|\zeta-z_0+z_0-z|\geq|\zeta-z_0|-|z-z_0|\geq\frac{\delta}{2}.$$

由$\varphi(\zeta)$在γ上连续. 则$\exists M>0$. s.t. $|\varphi(\zeta)|\leq M$. $\forall \zeta\in\gamma$. 再设γ的

则有

$$F_1(z)-F_1(z_0)=\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta$$

$$=(z-z_0)\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}d\zeta \quad ——(*)$$

由于 $$\left|\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}d\zeta\right|\leq\int_\gamma\frac{|\varphi(\zeta)|}{|\zeta-z||\zeta-z_0|}|d\zeta|$$

$$\leq\frac{2M}{\delta^2}\int_\gamma|d\zeta|=\frac{2ML}{\delta^2}$$

故 $\lim\limits_{z\to z_0}(F_1(z)-F_1(z_0))=0$. 即 $F_1(z)$ 在 z_0 连续.

由(*)$\Rightarrow$
$$\frac{F_1(z)-F_1(z_0)}{z-z_0}=\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}d\zeta=\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)/(\zeta-z_0)}{\zeta-z}d\zeta$$

由 $\varphi(\zeta)/(\zeta-z_0)$ 在γ上连续, 类似上述证明可得

$$\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}\,d\zeta \longrightarrow \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}\,d\zeta, \quad z\to z_0.$$

即 $F_1'(z_0)=F_2(z_0)$.　　$\left(\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n-1}}\,d\zeta\right)' \Rightarrow (n-1)\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z_0)^n}\,d\zeta$

② 设 $F_{n-1}'(z)=(n-1)F_n(z)$. 则

$$F_n(z)-F_n(z_0)=\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^n}\,d\zeta-\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z_0)^n}\,d\zeta$$

$$=\int_\gamma \frac{(\zeta-z_0)\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^n(\zeta-z_0)}\,d\zeta-\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z_0)^n}\,d\zeta \qquad \zeta-z_0=\zeta-z+z-z_0$$

$$=\left(\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n-1}(\zeta-z_0)}\,d\zeta-\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z_0)^n}\,d\zeta\right)+(z-z_0)\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^n(\zeta-z_0)}\,d\zeta$$

$$\triangleq \mathrm{I}+\mathrm{II}$$

对 II. 类似于上面的证明, 当 $z\to z_0$ 时 $\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^n(\zeta-z_0)}\,d\zeta$ 有界. 故 II –

对 $\varphi(\zeta)/(\zeta-z_0)$ 利用 $F_{n-1}(z)$ 连续 可得 $\mathrm{I}\to 0$. $z\to z_0$. 综合,有 $F_n(z)$

进一步,有
$$\frac{F_n(z)-F_n(z_0)}{z-z_0}=\frac{\mathrm{I}}{z-z_0}+\frac{\mathrm{II}}{z-z_0}\triangleq \tilde{\mathrm{I}}+\tilde{\mathrm{II}}$$

对 $\tilde{\mathrm{I}}$, 对 $\varphi(\zeta)/(\zeta-z_0)$ 利用归纳假设. 有 $\tilde{\mathrm{I}}\to(n-1)F_{n+1}(z_0)$. $z\to z_0$

利用上述连续性证明. $\tilde{\mathrm{II}}=\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^n(\zeta-z_0)}\,d\zeta\to\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta=F_{n+1}$

$z\to z_0$

综合起来,有 $F_n'(z_0)=nF_{n+1}(z_0)$.

证 ① 由 Lem3. 有 $= \int_\gamma \left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\right)^{(n)} d\zeta$

$$F_1^{(n)}(z) = \left(\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta\right)^{(n)} = n! \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta = n!\, F_{n+1}(z).$$

$\left(F_1'(z) = 1\cdot F_2(z) \Rightarrow F_1^{(n)}(z) = F_2^{(n-1)}(z) = 2\cdot F_3^{(n-2)}(z) = \cdots n!\, F_{n+1}(z) \right)$

② 由 Lem3. 有

<u>Thm7</u>. 设 $f \in H(\Omega)$. 则对 $\forall z \in \Omega$. 有 $f^{(n)}(z) \in H(\Omega)$. 且有

$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta$. $n = 1, 2, \cdots$. 这里 C 为 Ω 内包含 z 的一个圆

③ Thm7 中. 只需到 $f'(z) \in H(\Omega)$ 是由 $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, 这

求 $f \in H(\Omega)$.

④ 若 $f = u + iv \in H(\Omega) \Rightarrow f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \in H(\Omega)$

$\Rightarrow f'$ 连续. 即 $u, v \in C^1(\Omega)$. 进一步. 有 $u, v \in C^\infty(\Omega)$.

<u>Thm8</u> (Morera) 设 f 在域 Ω 内连续. 若对 Ω 内任意闭曲线 γ.

$\int_\gamma f(z)dz = 0$. 则有 $f \in H(\Omega)$.

证. 定义 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta) d\zeta$. $z_0 \in \Omega$ 固定. $z \in \Omega$.

则有 $F'(z) = f(z)$. $\forall z \in \Omega$. 即 $F \in H(\Omega)$.

由 Thm7. $f \in H(\Omega)$.

#

Thm 9 (Liouville 刘维尔) 有界的整函数必为常数.

证. 设 $f \in H(\mathbb{C})$. 且 $\exists M>0$. s.t. $|f(z)| \le M$. $\forall z \in \mathbb{C}$.

对 $\forall a \in \mathbb{C}$ 作圆 C: $|z-a| = R$. 则有

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$$

$$\Rightarrow \quad |f'(a)| \le \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{|f(z)|}{|z-a|^2}|dz| \le \frac{M}{2\pi}\cdot\frac{1}{R^2}\cdot 2\pi R = \frac{M}{R}.$$

令 $R \to +\infty$. $\Rightarrow$ $f'(a) = 0$. 由 a 的任意性. 有 $f'(z) \equiv 0$. $\forall z \in \mathbb{C}$.

故 f 为常数.

Thm 10 (代数基本定理) 任意次数大于0的多项式 $p(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上至少有一个零点

证. 反证. 设 $p(z) \ne 0$. $\forall z \in \mathbb{C}$. 则 $\frac{1}{p(z)} \in H(\mathbb{C})$.

由 $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{p(z)} = 0$. 则 $\exists R$. s.t. 当 $|z| \ge R$ 时. 有 $\left|\frac{1}{p(z)}\right| \le 1$.

又 $\frac{1}{p(z)}$ 在 $|z| \le R$ 上有界. 故 $\frac{1}{p(z)}$ 在 $\mathbb{C}$ 上有界. 由 Thm 9.

$\frac{1}{p(z)}$ 为常数. 这是不可能的.

#

§4.3 解析函数的局部性质

一、可去奇点 黎曼定理

设 $\Omega' = \Omega \setminus \{a\}$，$f \in H(\Omega')$，且 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$，则对

a心作圆C，含于 Ω' 内，在C内柯西积分公式仍成立。

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \quad z\text{在}C\text{内且 } z \neq a.$$

但是由 Lem 3，上式右边的积分在 $z=a$ 可导。令 $F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$

则 当 $z \neq a$ 时，$F(z) = f(z)$。当 $z = a$ 时，$F(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}$

称 F 为 f 从 Ω' 到 Ω 的解析延拓。

反过来，若 $F(z)$ 为 $f(z)$ 从 Ω' 到 Ω 的解析延拓，则

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)F(z) = 0.$$

注：解析延拓唯一。事实上，若 $\tilde{F}$ 为 f 从 Ω' 到 Ω 的解析

则 $z \neq a$ 时，$F(z) = f(z) = \tilde{F}(z)$。而

$$F(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\,d\zeta = \tilde{F}(a).$$

$\therefore$ $F(z) = \tilde{F}(z)$，$\forall z \in \Omega$。

作业 §4.2.3 (P96). 1. 2. 3. 4.

综上可得:

Thm 1 Ω为域，$\Omega' = \Omega \setminus \{a\}$，设 $f \in H(\Omega')$，则 $\exists f$ 从 Ω' 到 Ω 的解析延拓 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z \to a} (z-a) f(z) = 0$，并且这种延拓是唯一的.

Def 1 Thm 1 中的 a 称为 f 的可去(孤立)奇点.

注 ① a 为可去奇点，则 $\lim\limits_{z \to a} f(z)$ 存在. $(= F(a))$

② "可去"：若令 $f(a) = \lim\limits_{z \to a} f(z)$，则 $f \in H(\Omega)$.

设 $f \in H(\Omega)$，$a \in \Omega$，考虑

$$F(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

则 a 为 $F(z)$ 的可去奇点 $\left(\lim\limits_{z \to a} (z-a) F(z) = 0 \right)$，进而 F 的解析延拓存在

记延拓后的函数为 $f_1(z) \in H(\Omega)$，即

$$f_1(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}, & z \neq a \\ f'(a) = \lim\limits_{z \to a} F(z), & z = a \end{cases}$$

对 f_1，考虑 $\dfrac{f_1(z) - f_1(a)}{z - a}$，类似地，也有解析延拓 $f_2(z) \in H(\Omega)$.

一直进行下去，找到 $f_n(z) \in H(\Omega)$，$\forall z \neq a$，s.t.

$$f(z) = f(a) + (z-a) f_1(z)$$

$$f_1(z) = f_1(a) + (z-a) f_2(z)$$

$$\vdots$$

$$f_{n-1}(z) = f_{n-1}(a) + (z-a) f_n(z)$$

对 $z=a$ 时 上式也成立. 逐加后得

$$f(z) = f(a) + f_1(a)(z-a) + \cdots + f_n(z)(z-a)^n$$

这里 $f_n(z) \in H(\Omega)$. 求 n 阶导. 代入 $z=a$ 得

$$f^{(n)}(a) = n!\, f_n(a)$$

即 $f_n(a) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$ 故

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + f_n(z)(z-a)^n.$$

由此得

$(z-a) f(z)$ $\quad$ $f(z) - af'(z)$

Thm2 (泰勒定理). 设 $f \in H(\Omega)$, $a \in \Omega$. 有

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + f_n(z)(z-a)^n.$$

其中 $f_n \in H(\Omega)$.

$[f(z) - af'(z)]$ 泰勒公式 $(z-a)$

$0 + f'(a)(0$

$+f'(z)$

$-af''(z)$

$(z-a)$

设 C 为 Ω 中以 a 为心的圆. 由 $f_n \in H(\Omega)$. 则有

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad z \text{ 在 } C \text{ 内}.$$

由泰勒公式.

$$f_n(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^n} - \frac{f(a)}{(\zeta-a)^n} - \frac{f'(a)}{(\zeta-a)^{n-1}} - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\frac{1}{\zeta-a}.$$ $\geq$!

考虑
$$F_k(a) = \int_C \frac{d\zeta}{(\zeta-a)^k(\zeta-z)} \quad k=1,\cdots n.$$

首先, $F_1(a) = \int_C \frac{d\zeta}{(\zeta-a)(\zeta-z)}$

$$= \frac{1}{a-z}\int_C\left(\frac{1}{\zeta-a} - \frac{1}{\zeta-z}\right)d\zeta = 0.$$ $\forall a$ 在 C 内. $\Rightarrow F_1(a) \equiv$
a在

由 Lem 3, 有 $F_{k-1}'(a) = (k-1)F_k(a)$. 即 $F_k(a) = \frac{1}{k-1}F_{k-1}'(a) = \cdots = \frac{1}{(k-1)}$

$= 0$. $k = 1, 2, \cdots, n$.

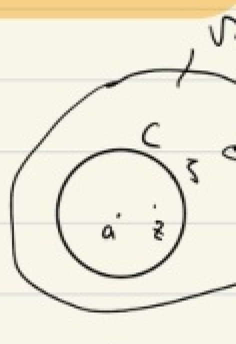
$$\therefore \quad f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^n(\zeta-z)}d\zeta$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

二. 零点和极点 ([illegible])

Thm3 设 $f \in H(\Omega)$. $a \in \Omega$. 若对 $\forall n \in \mathbb{N}$. $f^{(n)}(a) = 0$. 则 $f(z) \equiv 0$. $\forall z \in$

证. 由引理.



$f(z) = f_n(z)(z-a)^n$. $\forall n \in \mathbb{N}$. $f_n \in H(\Omega)$. 且

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^n(\zeta-z)}d\zeta.$$

其中 C 是以 a 为心 R 为半径的圆. z 在 C 内.

由 f 在 C 上连续, 则 $\exists M>0$. s.t. $|f(\zeta)| \leq M$. $\forall \zeta \in C$. 又对 $\zeta \in C$

$$|\zeta - z| \geq |\zeta-a| - |z-a| = R - |z-a|$$

$$\Rightarrow \quad |f_n(z)| \le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{R^n}\cdot\frac{1}{R-|z-a|}\cdot\int_C |dz| = \frac{M}{R^{n-1}(R-|z-a|)} \qquad z在C内.$$

$$\Rightarrow \quad |f(z)| = |f_n(z)|\cdot|z-a|^n \le \left(\frac{|z-a|}{R}\right)^{n-1}\frac{MR}{R-|z-a|}$$

由 $\frac{|z-a|}{R}<1 \Rightarrow \left(\frac{|z-a|}{R}\right)^{n-1}\to 0.\ n\to\infty$.

$\therefore\ f(z)\equiv 0.\ \forall z$ 在 C 内.

下证: $f(z)\equiv 0.\ \forall z\in\Omega.$

记 $E_1=\{z\in\Omega:\ f^{(n)}(z)=0.\ \forall n=0,1,2,\cdots\}$

$E_2=\{z\in\Omega:\ f^{(n)}(z)\neq 0,\ \exists n\in\mathbb{N}\}$

则 $E_1\cap E_2=\phi$. 且 $E_1\cup E_2=\Omega$.

由上述证明知. $a\in E_1$. 且 $B(a,R)\subset E_1$. 即 E_1 为开集. 若 $b\in$

则 $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$. s.t. $f^{(n_0)}(b)\neq 0$. 由 $f^{(n_0)}(z)$ 连续. 则 $\exists\, B(b,\delta)$, s.t. $f^{(n_0)}(z$

$z\in B(b,\delta)$. 即 $B(b,\delta)\subset E_2$. 故 E_2 为开集. 由 Ω 连通 $\Rightarrow E_2=\phi$

即 $\Omega=E_1$. 故 $f(z)\equiv 0.\ \forall z\in\Omega$.

设 $f\in H(\Omega)$. $f\not\equiv 0$. $a\in\Omega$. $f(a)=0$. 由 Thm3. 则 $\exists$ 最小的自然数

s.t. $f^{(n)}(a)\neq 0$. 则由泰勒公式, 有

$$f(z)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+f_{n+1}(z)(z-a)^{n+1}$$

$$=(z-a)^n\left(\underline{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+f_{n+1}(z)(z-a)}\right)\triangleq(z-a)^n f_n(z).$$

定义 $f_n(z) \in H(\Omega)$ 且 $f_n(a) = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} \neq 0$.

Def 2 f, a, Ω 同上，若 $f(z) = (z-a)^n f_n(z)$，其中 $f_n \in H(\Omega)$ 且 $f_n(c) \neq$

则称 a 为 f 的 n 阶零点.

Prop 1 (零点孤立性) 设 $f \in H(\Omega)$, $f \not\equiv 0$, $f(a) = 0$, $a \in \Omega$. 则 $\exists \delta > 0$.

$B(a, \delta) \subset \Omega$, s.t. $f(z) \neq 0$, $\forall z \in B(a, \delta)$ 且 $z \neq a$.

证. 由 $f(z) = (z-a)^n f_n(z)$ 及 $f_n \in H(\Omega)$ 且 $f_n(c) \neq 0$ 可得.

Cor.1 设 $f\in H(\Omega)$, $a\in\Omega$. 若 a 是 f 的非孤立零点, 即 $\exists\{z_n\}\subset\Omega$, s.t. $z_n\to a$, 且 $f(z_n)=0$ ($\Rightarrow f(a)=0$), 则 $\exists B(a,\delta)\subset$

s.t. $f(z)=0$, $z\in B(a,\delta)$, 进而有 $f(z)=0$, $\forall z\in\Omega$.

Cor.2 设 $f\in H(\Omega)$, $D\subset\Omega$ 且 D 中存在 Ω 的一个聚点, 且 $f(z)=0$.

则 $f(z)\equiv 0$, $\forall z\in\Omega$.

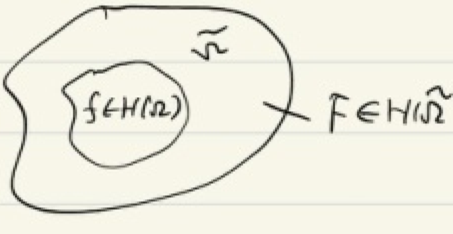
Cor.3 设 $f, g\in H(\Omega)$, D 同 Cor.2, 若 $f(z)=g(z)$, $\forall z\in D$, 则有

$f(z)=g(z)$, $\forall z\in\Omega$. (考虑 $f-g$ 即可)

注. ① Cor.2.3 中 D 可以是 Ω 的一个子域, 也可以是 Ω 中的一段弧(非

② Cor.1.2.3 也称为唯一性定理.

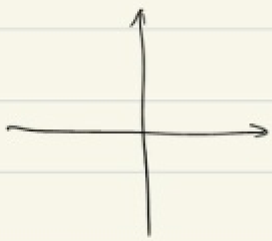
③ "唯一": 解析延拓是唯一的.



$\tilde F|_\Omega = f$.

例1. (1) $f(z)=x^2-y^2+i\,2xy = \underset{\in H(\mathbb{C})}{z^2}$

代入 $\begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=0 \\ y=-iz \end{cases}$ $\Rightarrow f(z)=z^2$.



(2) 用 Cor.3 解释: $\sin^2 z+\cos^2 z=1$, $\forall z\in\mathbb{C}$. (已知 $z=x$ 时成立)

令 $f(z)=\sin^2 z+\cos^2 z$, $g(z)=1$, $f, g\in H(\mathbb{C})$, 当 $z=x$ 时, $f(x)=g($

$\Rightarrow f(z)=g(z)$, $\forall z\in\mathbb{C}$.

Def 3 (孤立奇点). 若 f 在 a 不解析, 但在 $0<|z-a|<\delta$ 内解析, 则称

a 为 f 的孤立奇点.

注 ① 孤立可去奇点是孤立奇点的一种, 且 $\lim_{z\to a} f(z)$ 有限

② $z=0$ 是 $\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ 的非孤立奇点. ($\frac{1}{k\pi}\to 0$, $k\to\infty$)

设 $\lim_{z\to a} f(z)=\infty$, 则 $\exists\,\delta>0$, s.t. $0<|z-a|<\delta$, $f(z)\neq 0$.

考虑 $g(z)=\frac{1}{f(z)}$, 则 $g(z)$ 在 $0<|z-a|<\delta$ 内解析 且 $\lim_{z\to a} g(z)=0$.

即 a 为 $g(z)$ 的可去奇点. 则 $g(z)$ 可解析延拓到 a (记其解析延拓后

即 $g(a)=0$. 即 a 是 g 的零点. 设其阶数为 n. 即 $g(z)=(z-a)^n g_n(z)$

其中 $g_n(z)$ 在 a 处解析且 $g_n(a)\neq 0$. 故有 $f(z)=(z-a)^{-n}\frac{1}{g_n(z)} \triangleq (z-a)^{-n} f_n(z)$

其中 $f_n(z)$ 在 a 解析且 $f_n(a)\neq 0$.

Def 4. 若 a 为 f 的孤立奇点且 $\lim_{z\to a} f(z)=\infty$. 则称 a 为 f 的极点. 且

表达式 $f(z)=(z-a)^{-n} f_n(z)$ 中 n 称为极点 a 的阶.

Def 5 f 在域 Ω 中除了有极点外处处解析. 称 f 为亚纯函数.

例 (1) 有理函数是亚纯函数

(2) $\frac{1}{e^z-1}$, $\frac{1}{\sin z}$ 也是亚纯函数

(3) $f, g\in H(\Omega)$. f, g 无公共零点 则 f/g 是亚纯函数.

假设 $f\not\equiv 0$，a 是 f 的孤立奇点。

记

$$\text{(I)}\ \lim_{z\to a}|z-a|^{\alpha}|f(z)|=0 \qquad \text{(II)}\ \lim_{z\to a}|z-a|^{\alpha}|f(z)|=\infty. \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

Prop 2. 若 (I) 或 (II) 对某个 α 成立，则 $\exists\, h\in\mathbb{Z}$ s.t. 当 $\alpha>h$ 时，(I) 成立；当 $\alpha<h$ 时，(II) 成立。

证. 只证 (I). 若 (I) 成立，则对 $\forall\,\beta>\alpha$，(I) 也成立

$\left(\lim_{z\to a}|z-a|^{\beta}|f(z)|=\lim_{z\to a}|z-a|^{\beta-\alpha}|z-a|^{\alpha}|f(z)|=0\right)$ 特别地，$\exists$ 一个整数 $m=[\alpha]$ 或 $m=[\alpha]+1$，即 $\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)=0$，则 $z=a$ 是 $(z-a)^m f(z)$ 的可去奇点，进而 a 可以看成是其零点，设其阶为 $k\in$

即 $(z-a)^m f(z)=(z-a)^k\underline{(z-a)^{m-k}f(z)}\triangleq(z-a)^k f_h(z)$，其中 $f_h(z)=(z-a)^{m-k}$

$h=m-k\in\mathbb{Z}$，且 $f_h(a)\neq 0$，则当 $\alpha>h$ 时，有

$$\lim_{z\to a}|z-a|^{\alpha}|f(z)|=\lim_{z\to a}|z-a|^{\alpha-h}|z-a|^{h}|f(z)|=0.$$

当 $\alpha<h$ 时，有

$$\lim_{z\to a}|z-a|^{\alpha}|f(z)|=\lim_{z\to a}|z-a|^{\alpha-h}\underbrace{|z-a|^{h}|f(z)|}_{|f_h(z)|}=\infty.$$

Def 6. (1) Prop 2 中的 h 称为 f 在 a 处的阶。事实上，有 $\lim_{z\to a}(z-a)^h f$

是一个非零常数.

(2) 若(I)和(II)都不成立 对 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. 则称 a 为 f 的本性(本质)奇点

例. $z=0$ 是 $e^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点.

对 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_{z\to 0}|z|^{\alpha}|e^{\frac{1}{z}}|$ 既不是常数也不为 ∞ (?)

考虑左右极限

Prop3. 设 a 是 f 的 n 阶极点. 则有

$$f(z)=\frac{B_n}{(z-a)^n}+\frac{B_{n-1}}{(z-a)^{n-1}}+\cdots+\frac{B_1}{z-a}+\varphi(z)$$

其中 φ 在 a 解析.

证. $(z-a)^n f(z)$ 在 a 解析. 由 Taylor 公式有

$$(z-a)^n f(z)=B_n+B_{n-1}(z-a)+\cdots+B_1(z-a)^{n-1}+\varphi(z)(z-a)^n$$

$$\Rightarrow \quad f(z)=\frac{B_n}{(z-a)^n}+\frac{B_{n-1}}{(z-a)^{n-1}}+\cdots+\frac{B_1}{z-a}+\varphi(z).$$

注. Prop3中, 称 $\frac{B_n}{(z-a)^n}+\frac{B_{n-1}}{(z-a)^{n-1}}+\cdots+\frac{B_1}{z-a}$ 为 f 在 a 处的奇异部

$\varphi(z)$ 为 f 在 a 处的解析部分.

Thm4 若 a 是 f 的本性奇点. 则对 $\forall A\in\mathbb{C}$. $\exists\, z_n\to a$. $n\to\infty$. s.

$f(z_n)\to A$. $n\to\infty$.

证. 反证. 对 A. $\exists\, \varepsilon_0>0$. $\delta>0$. s.t. 当 $0<|z-a|<\delta$ 时.

$|f(z)-A| \geqslant \varepsilon_0$. 则当 $\alpha<0$ 时, 有

$$\lim_{z\to a} |z-a|^{\alpha} |f(z)-A| = \infty.$$

即 a 不是 $f(z)-A$ 的本性奇点.

由上面的论证. $\exists\, \beta>0$. (不妨设 $\beta\in\mathbb{N}$). s.t.

$$\lim_{z\to a} |z-a|^{\beta} |f(z)-A| = 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to a} (z-a)^{\beta}(f(z)-A) = \lim_{z\to a}\Big((z-a)^{\beta} f(z) - \underset{\downarrow\atop 0}{(z-a)^{\beta}A}\Big) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to a} (z-a)^{\beta} f(z) = 0.$$

即 a 不是 $f(z)$ 的本性奇点. 矛盾.

作业 §4.3.2 ($P_{101-102}$).

1. 2. 3. 4. 5

2023.

Def 7 (∞点的孤立奇点) 若 $f(z)$ 在 $|z|>R$ 内解析，则称 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点. 称它 $z=0$ 作为 $g(z)=f(\frac{1}{z})$ 的可去奇点，极点或本性奇点 即为 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的相应的孤立奇点.

注. ① 若 $\exists\, n\in\mathbb{Z}$ s.t. $\lim\limits_{z\to\infty} z^{-n}f(z)$ 为非零常数，则称 f 在 ∞ 处的阶

(f 在 ∞ 处的阶为 n $\Longleftrightarrow$ $g(z)=f(\frac{1}{z})$ 在 0 处的阶为 n $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to 0} z^{n}g$ 为非零常数 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to\infty} z^{-n}f(z)$ 为非零常数)

② 若 ∞ 为 f 的 n 阶极点，则 f 在 ∞ 处的奇异部分是 n 次多项式.

(0 是 $g(z)$ 的 n 阶极点

$$\Rightarrow\quad g(z)=\frac{B_n}{z^n}+\frac{B_{n-1}}{z^{n-1}}+\cdots+\frac{B_1}{z}+\varphi(z)$$

$$\Rightarrow\quad g(\tfrac{1}{z})=B_n z^n+B_{n-1}z^{n-1}+\cdots+B_1 z+\varphi(\tfrac{1}{z})$$

即
$$f(z)=\underbrace{B_n z^n+\cdots+B_1 z}_{f\text{ 在 }\infty\text{ 的奇异部分.}}+\varphi(\tfrac{1}{z})$$
)

例 (1) $f(z)=z^n+\cdots+a_n$ $(n\in\mathbb{N})$. 则 ∞ 为 n 阶极点.

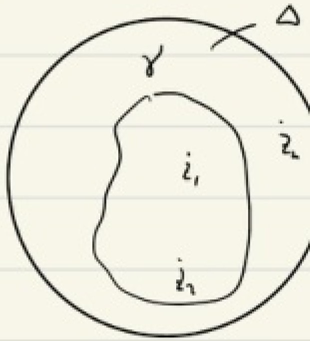
(2) $f(z)=\dfrac{1}{z^n+\cdots+a_n}$ 则 ∞ 为 n 阶零点 (定义 $f(\infty)=0$)

(3) $f(z)=e^z$ 则 $z=\infty$ 为本性奇点.

三. 局部映射

设 Δ 为圆. $f \in H(\Delta)$. $f \not\equiv 0$. 设 f 在 Δ 内有 $z_1, \cdots, z_n$ (包括重数

γ 为 Δ 内不过这些零点的闭曲线.



设 $f(z) = (z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)\,g(z)$.

其中 $g \in H(\Delta)$ 且 $g(z) \neq 0$. $\forall z \in \Delta$.

$$\Big(\quad f(z) = \underset{\shortparallel}{f(z_1)} + \underline{f'(z_1)(z-z_1) + \varphi_1(z)(z-z_1)^2} = (z-z_1) f_2(z) = \cdots \quad \Big)$$
$$\ 0$$

$$\Rightarrow \quad f'(z) = (z-z_2)\cdots(z-z_n)g(z) + \cdots + (z-z_1)\cdots(z-z_{n-1})g(z) + (z-z_1)\cdots(z-$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-z_1} + \cdots + \frac{1}{z-z_n} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

由 $g'/g \in H(\Delta)$, 则有

$$\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_1} + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_n}$$

$$= n(\gamma, z_1) + \cdots + n(\gamma, z_n) \qquad \text{———} \quad (*)$$

(*) 对 f 在 Δ 内有无穷多个零点的情形也成立. 此时 γ 内只有有限

零点. 否则, $\exists$ 圆 Δ'. s.t. $\gamma \subset \Delta' \subset \Delta$. s.t. f 在 Δ' 内有一个非

零点. 从而 $f \equiv 0$. 矛盾. (*) 式在 Δ' 内成立. 此时有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_j n(\gamma, z_j)$$

这里的j对f在Δ内的所有零点求和.（∵对Δ外的零点，有$n(\gamma, z$

∫等上. 有

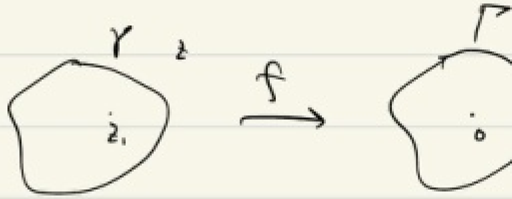
Thm5 Δ为圆盘. $f\in H(\Delta)$. $f\not\equiv 0$. z_j为f在Δ内的所有零点(按重

则对Δ内的$\forall$闭曲线γ. $z_j\notin\gamma$. 有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_j n(\gamma, z_j).$$

注 ① 设f将γ映为Γ. 则有

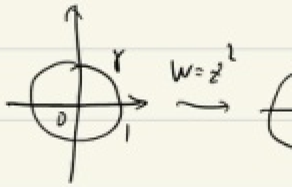
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \overset{f(z)=w}{=\!=} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w}$$



$$= n(\Gamma, 0) = \sum_j n(\gamma, z_j).$$

例(1) $w=f(z)=z^2$. $\gamma: |z|=1 \xrightarrow{f} \Gamma: w=1$

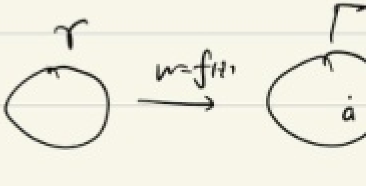
$n(\gamma, 0) = 2 = n(\Gamma, 0)$



(2) $w=f(z)=z(z-1)$ $\gamma: |z|=2 \xrightarrow{f} \Gamma$.

$\sum_j n(\gamma, z_j) = 2 = n(\Gamma, 0)$

(3) $w=f(z)=\frac{z-1}{z}$ $\gamma: |z|=2$



② γ. Γ. f 同上. $a\notin\Gamma$.

$$n(\Gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w-a}$$

$\overset{w=f(z)}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-a}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(f(z)-a)'}{f(z)-a}dz$.

$\Rightarrow$ $f(z)$ 在 γ 内取 a 的次数为 $\sum_j n(\gamma, z_j(a))$，即为 $n(\Gamma, a)$

进而可知，当 a, b 在 Γ 所确定的同一个连通分支中时，有

$n(\Gamma, a) = n(\Gamma, b)$，故有

$$\sum_j n(\gamma, z_j(a)) = \sum_k n(\gamma, z_k(b)).$$

<u>Thm 6</u> 设 f 在 z_0 解析，$w_0 = f(z_0)$，设 z_0 是 $f(z)-w_0$ 的 m 阶零

$(m \geq 1)$，则对充分小的 $\varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，s.t. 对于满足 $|a-w_0| <$

的所有 a，$f(z)-a$ 在 $|z-z_0| < \varepsilon$ 内也有 m 个零点

证 取 ε 充分小，s.t. f 在 $|z-z_0| \leq \varepsilon$ 上解析，且由零点

孤立性可使 $f(z)-w_0$ 在 $\gamma: |z-z_0| = \varepsilon$ 内除 z_0 外无其他的零点

γ 在 f 下的像记为 Γ，则 $w_0 = f(z_0) \notin \Gamma$，则 $\exists \delta > 0$，s.t. $B(w_0, \delta$

$= \varnothing$，则由注②，当 $a \in B(w_0, \delta)$ 时，有 $n(\Gamma, a) = n(\Gamma, w_0)$

由此有

$$\sum_j n(\gamma, z_j(a)) = \sum_j n(\gamma, z_j(w_0)) = m$$

注 ① Thm 6 表明：

$$B(w_0,\delta) \subset f(B(z_0,\varepsilon))$$

② 在 Thm 6 中，$m=1$ 时，f 在 z_0 的一个邻域内是单射，

而 $f(z_0)=0$，$f'(z_0)\neq 0$ 意味着 z_0 是 $f(z)$ 的一个一阶零点。

Cor.1（开映射定理）若 $f\in H(\Omega)$ 且 f 不为常数，则 $f(\Omega)$ 为

证 $\forall w_0\in f(\Omega)$，由注①，$\exists\,\delta>0$ s.t.

$$B(w_0,\delta) \subset f(B(z_0,\varepsilon)) \subset f(\Omega)$$

$\Rightarrow$ w_0 为 $f(\Omega)$ 的内点。

Cor 2. f 在 z_0 解析且 $f'(z_0)\neq 0$，则 f 把 z_0 的一个邻域一一

映为 $f(z_0)$ 的一个邻域。

Cor 3. 若 f 在域 D 上解析且为单射，则有 $f'(z)\neq 0$，$\forall z\in D$。

作业 §4.3.3（P104–105）1. 2. 4

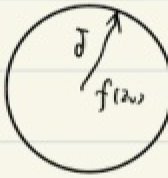
四. 最大模原理

2023. 4.

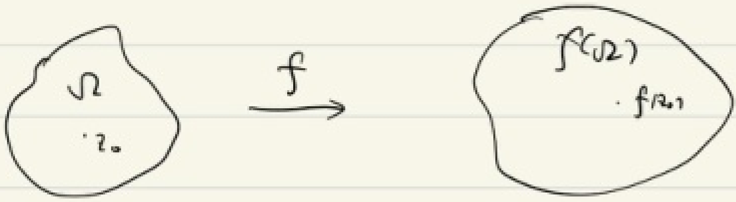
Thm7 设 $f\in H(\Omega)$ 且 f 不为常数, 则 $|f(z)|$ 不能在 Ω 上取到最大

证: 反证. 设 f 在 $z_0\in\Omega$ 取到最大模. 由开映射定理. $f(z_0)$ $\in f(\Omega)$ 为内点, 则 $\exists\,\delta>0$, s.t. $B(f(z_0),\delta)\subset f(\Omega)$.

则 $|f(z_0)|$ 不可能是 f 在 $B(f(z_0),\delta)$ 上的最大模. #



注.



Cor.4 若 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 为有界闭集. 设 f 在 Ω 上连续, $f\in H(\Omega^\circ)$, 则 $|f(z)|$

$\partial\Omega$ 上取到最大值.

注. 设 $f\in H(\Omega)$ 且 $f\neq 0$, 则 $|f|$ 不能在 Ω 内取到最小值. (考虑

Thm 8 (Schwarz 引理)

记 $D=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$ 为单位圆. $f\in H(D)$, $|f(z)|\le 1$, f

则有 (1) $|f(z)|\le |z|$, $\forall z\in D$. (2) $|f'(0)|\le 1$.

且 (1) 或 (2) 中 "=" 成立 $\Longleftrightarrow f(z)=e^{i\theta}z$, $\theta\in\mathbb{R}$.

证: 考虑

$$F(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)}{z}, & z\neq 0\\ f'(0), & z=0\end{cases}$$

则 $F\in H(\mathbb{D})$. ($z=0$ 为 $F(z)$ 的可去奇点 且 $\lim\limits_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}=f'(0)=F(0)$)

在 $|z|\le r$ ($r<1$) 上由最大模原理, 有

$$|F(z)|\le\max_{|z|=r}|F(z)|=\max_{|z|=r}\left|\frac{f(z)}{z}\right|\le\frac{1}{r}\qquad |z|<r$$

令 $r\to 1$, 得 $|F(z)|\le 1\quad \forall z\in\mathbb{D}$.

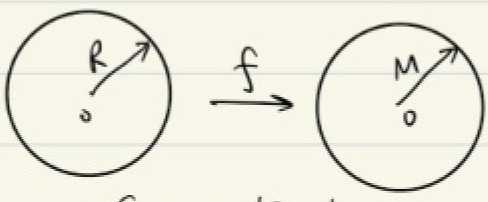
即 $|f(z)|\le|z|$ 及 $|f'(0)|\le 1$.

若 "=" 成立, 即 $\exists z\in\mathbb{D}$ s.t. $|F(z)|=1$, 由最大模原理 F 为常数, 即 $F(z)=e^{i\theta}$, $\theta\in\mathbb{R}$. 故有 $f(z)=e^{i\theta}z$.

注 ① $|f(z)|\le|z|$ 及 $|f'(0)|\le 1$ 的几何意义.

$$|f(z)-\underset{\substack{\shortparallel\\0}}{f(0)}|\le|z-0|$$

② Thm 8 可以推广到更一般的情形.



$f\in H(B(0,R))$, $f(0)=0$, $|f(z)|\le M$.

$\Rightarrow |f(z)|\le\frac{M}{R}|z|$.

$$\begin{array}{ccc}|z|<R & \xrightarrow{w=f(z)} & |w|\le M\\ z_1=\frac{z}{R}\downarrow & & \downarrow w_1=\frac{w}{M}\\ |z_1|<1 & \longrightarrow & |w_1|\le 1\end{array}$$

$w_1=\frac{1}{M}f(Rz_1)\triangleq f_1(z_1)$

$\Rightarrow |f_1(z_1)|\le|z_1|$

③ Thm8 中的 $f(0)=0$ 也可换成更一般的条件: $f(z_0)=w_0$.

这里 $|z_0|<1$, $|w_0|<1$.

$$
\begin{tikzcd}
z_0 \in |z|<1 \arrow[r, "w=f(z)"] \arrow[d, "z_1=L_1(z)"'] & |w|<1 \ni w_0 \arrow[d, "w_1=L_2(w)"] \\
|z_1|<1 \arrow[r, "w_1=f_1(z_1)"'] & |w_1|<1
\end{tikzcd}
$$

作 FLT: $z_1=L_1(z)=\dfrac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$, 和 $w_1=L_2(w)=\dfrac{w-w_0}{1-\bar{w}_0 w}$. 则令

$$w_1=f_1(z_1)=L_2\circ f\circ L_1^{-1}(z_1)$$

则 $f_1(0)=L_2\circ f\circ L_1^{-1}(0)=L_2(f(z_0))=L_2(w_0)=0$. 由 Schwarz 引理, 有

$$|f_1(z_1)|\le |z_1|, \quad \forall |z_1|<1.$$

即 $\left|L_2\circ f\circ \underbrace{L_1^{-1}(z_1)}_{z}\right| \le |z_1|$ 　　令 $L_1^{-1}(z_1)=z$ $\Downarrow$ $z_1=L_1(z)$

$\Rightarrow$ $|L_2(f(z))|\le |L_1(z)|$

即
$$\underbrace{\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{1-\overline{f(z_0)}f(z)}\right|}_{\rho(f(z),\,f(z_0))} \le \underbrace{\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|}_{\rho(z,\,z_0)} \quad \forall z\in \mathbb{D}.$$

(即为 Schwarz-Pick 引理)

Def (域的自同构群) Ω 为域. 若 $f: \Omega \to \Omega$ 为双射, 且解析.

则称 f 为 Ω 的解析自同构. 记为 $\mathrm{Aut}(\Omega)$

注. $\mathrm{Aut}(\Omega)$ 在函数复合的意义下成为一个群.

Thm9 ($\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$)

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ \varphi : \varphi(z) = e^{i\theta} \frac{a-z}{1-\bar{a}z},\ a \in \mathbb{D},\ \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

证. 首先. $\varphi_\theta(z) = e^{i\theta} z \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. 且 $\varphi_a(z) = \dfrac{a-z}{1-\bar{a}z} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$

$\Downarrow$

则 $\varphi(z) = \varphi_\theta \circ \varphi_a(z) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. $\quad$ ($\varphi_a(0) = a$, $\varphi_a(a) = 0$, $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$)

反过来. 若 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. 设 $f(a) = 0$.

$$\begin{tikzcd} a \in \mathbb{D} \arrow[r, "w=f(z)"] & \mathbb{D} \ni \\ 0 \in \mathbb{D} \arrow[u, "\varphi_a(z)"] \arrow[ur, "g \triangleq f\circ\varphi_a"'] & \end{tikzcd}$$

考虑. $g(w) = f \circ \varphi_a(w)$.

则有 $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. 且

$$g(0) = f \circ \varphi_a(0) = f(a) = 0.$$

由 Schwarz 引理. 有 $\quad |g'(0)| \leq 1$.

对 $g^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ 用 Schwarz 引理. 有

$$\left|(g^{-1})'(0)\right| = \left|\frac{1}{g'(0)}\right| \le 1$$

即 $|g'(0)| \ge 1$

故有 $|g'(0)| = 1. \Longrightarrow g(w) = e^{i\theta} w. \quad \theta \in \mathbb{R}.$

$\Rightarrow \quad f \circ \varphi_a(w) = e^{i\theta} w$

令 $\varphi_a(w) = z \Rightarrow f(z) = e^{i\theta} \cdot \varphi_a^{-1}(z) = e^{i\theta} \varphi_a(z).$

$$= e^{i\theta} \frac{a - z}{1 - \bar{a} z}.$$

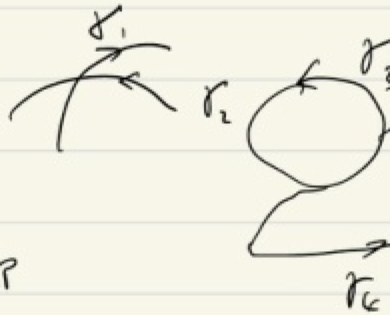
§4.6 柯西定理的一般形式

一. 链与闭链.

Def 1. (1) 设$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$是$n$条弧. 称$\gamma_1+\cdots+\gamma_n$为一个链.

(2) 若$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$为闭曲线, 称

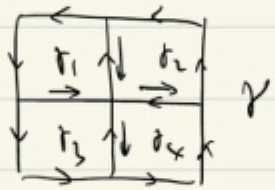
$\gamma_1+\cdots+\gamma_n$为闭链.



注. ① 可以定义f在$\gamma_1+\cdots+\gamma_n$上的积分 即

$$\int_{\gamma_1+\cdots+\gamma_n} f\,dz \triangleq \int_{\gamma_1} f\,dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f\,dz.$$

② 一个链可能有不同的表示.



$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4 = \gamma$

③ 有限个链可以相加. $\gamma = a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \cdots + a_n\gamma_n$.

其中$a_j \in \mathbb{Z}$. γ_j互不相同.

④ 前面证明的关于闭曲线的结论对闭链也成立.

⑤ 一点关于一个闭链的指标类似定义. 如

$n(\gamma, a) = n(\gamma_1, a) + \cdots + n(\gamma_n, a) \quad a \notin \gamma \quad \gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n.$

作业. $P_{106-107}$ 1. 2. 3. 4.

二、单连通域

2023.4.

Def 2 域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是单连通的，是指 Ω 在 $\mathbb{C}^*$ 上的余集连通.

Thm1 Ω 是单连通域 $\Longleftrightarrow$ 对 $\forall$ Ω 中的闭链 γ，及 $\forall a \notin \Omega$，有 $n(\gamma, a)$

证 "$\Rightarrow$" Ω 单连通 $\Rightarrow$ Ω^c 连通，且 $\infty \in \Omega^c$. 故对 Ω 中的 $\forall$ 闭链

有 $n(\gamma, \infty) = 0$. 则对 $\forall a \notin \Omega$，即 $a \in \Omega^c$，则 a 与 ∞ 在 γ 所确定

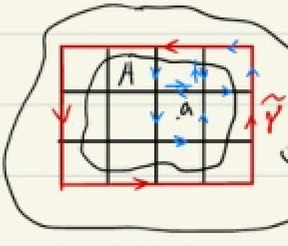
同一个连通分支中，故 $n(\gamma, a) = 0$.

"$\Leftarrow$" 反证. 设 Ω^c 不连通，则有 $\Omega^c = A \cup B$，这里 $A \cap B = \phi$，

A, B 为闭集. 设 $\infty \in B$，则 A 为有界闭集. 由 A 紧，B 闭，且 $A \cap B =$

则 $d(A, B) = \delta > 0$. 则作边长小于 $\delta/\sqrt{2}$ 的有限个正方形网覆盖 A.

取 A 中的一点 a 使 a 在某个正方形的中心.



设有 Q_j $(j=1, \cdots, n)$ 与 A 相交的，∂Q_j 表示 Q_j

的边界，取相对于 A 为正向. 记

$$\gamma = \sum_{j=1}^{n} \partial Q_j$$

则 γ 为一个闭链，且 γ 与图中红线所示的矩形的边界曲线 $\tilde{\gamma}$ 相等.

由于 a 含且仅含在一个正方形 Q_j 中，则有 $\underset{n(\tilde{\gamma}, a)}{\overset{}{}} n(\gamma, a) = 1$. $a \in A \subset$

Why. 由 Q_j 的取法，$\tilde{\gamma} \cap A = \phi$，$\tilde{\gamma} \cap B = \phi$，即 $\tilde{\gamma}$ 在 Ω 中，故

$n(\tilde{\gamma}, a) = 1$，与已知矛盾.

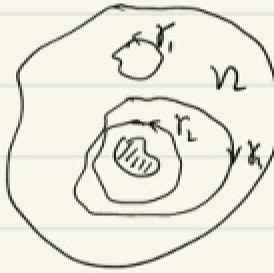
#

注 由Thm1，前述之柯西定理对非单连通区域一定不成立。

事实上，若 Ω 不是单连通，则 $\exists a \notin \Omega$，及 Ω 中之闭链 γ，s.t. $n(\gamma, a)$

则 $\frac{1}{z-a} \in H(\Omega)$，但是

$$\int_\gamma \frac{1}{z-a} dz = n(\gamma, a) \cdot 2\pi i \neq 0.$$



Def3 称开集 Ω 中之闭链 γ 同调于零，是指对 $\forall a \notin \Omega$，有 $n(\gamma, a) = 0$，记为 $\gamma \sim 0 \pmod \Omega$

三、柯西定理之一般形式

Thm2 设 Ω 为开域，$f \in H(\Omega)$，γ 为 Ω 中之闭链且 $\gamma \sim 0$，有 $\int_\gamma f$

注 ① Ω 为单连通时，有 Cor.1

② 由 Cor.1，单连通区域上之解析函数必有原函数。

Cor.1 Ω 为单连通域，$f \in H(\Omega)$，则对 $\forall$ Ω 中之闭链 γ，有 $\int_\gamma f dz = 0$.

Cor.2 Ω 为单连通域，$f \in H(\Omega)$ 且 $f \neq 0$，则在 Ω 中，$\log f(z)$ 与 $\sqrt[n]{f(z)}$ (n

可定义其单值解析分支。

注 由已知，$f'/f \in H(\Omega)$，由 Cor.1，$\exists F(z)$，s.t. $F'(z) = f'(z)/f(z)$

则 $\left(f(z) e^{-F(z)}\right)' = e^{-F(z)}\left(f'(z) - f(z) F'(z)\right) = 0$，$\forall z \in \Omega$.

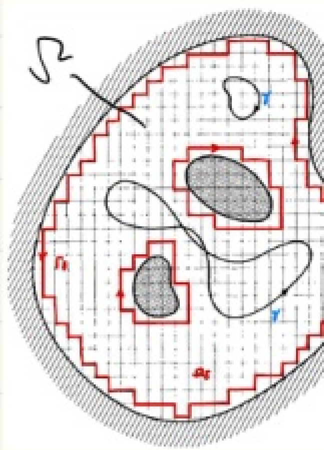
故 $f(z) e^{-F(z)}$ 为常数，取 $z_0 \in \Omega$，再取 $\log f(z_0)$ 中之一个固定值

5.1. $$f(z)e^{-F(z)} = f(z_0)e^{-F(z_0)} \qquad e^{\log f(z_0)}$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = f(z_0)e^{F(z)-F(z_0)} = e^{F(z)-F(z_0)+\log f(z_0)}$$

故可定义 $\log f(z) = F(z)-F(z_0)+\log f(z_0)$，即为 $\log f(z)$ 的一个单值解析

支. 此时 $\sqrt[n]{f(z)} \triangleq e^{\frac{1}{n}\log f(z)}$

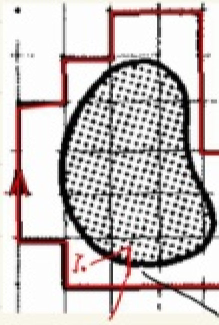


四 Thm 2 的证明.

证. 先设Ω有界. 则取定δ>0. 作边长为δ的正方形网. 记为 Q_j (Q_j为闭正方形). 由于Ω有界. 故∃ Q_j ($j=1,\cdots,n$). $Q_j \subset \Omega$. 记

$$\Gamma_\delta = \sum_{j=1}^{n} \partial Q_j$$

注意每一个 Q_j 有向边界. 则 Γ_δ 为有向闭道. $\Gamma_\delta \subset \Omega$. ($\Gamma_\delta$ 为图中红线所示的曲线) 记 Ω_δ 为 Γ_δ 所围的内部.



$\zeta \in \Omega\backslash\Omega_\delta$

设γ为Ω中之任意一个闭道. 则可取δ充分小. 使γ全在 Ω_δ 中. 对 $\forall \zeta \in \Omega\backslash\Omega_\delta$. 则ζ在某一个正方形 $\tilde{Q}$ 中. 则 $\exists \zeta_0 \in \tilde{Q}$. 但 $\zeta_0 \notin \Omega$. 且∃线段 l 连接 ζ_0.与ζ, $l \subset \tilde{Q}$. 由 $n(\gamma, \zeta_0)$

故亦有 $n(\gamma,\zeta)=0$. 特别地. 当 $\zeta \in \Gamma_\delta$ 时. 有 $n(\gamma,\zeta)=0$.

若 $f \in H(\Omega)$. 对 $z \in \Theta_{j_0}^{\circ}$ $(j_0 = 1, \cdots, n)$. 对 f 在 Θ_j 上用柯西

积分公式，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Theta_j}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \begin{cases} f(z), & j = j_0 \\ 0, & j \neq j_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Theta_j}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = f(z), \quad z \in \Theta_{j_0}^{\circ} \quad \text{—}(*)$$

$$\left(\Gamma_\delta = \sum_{j=1}^{n}\partial\Theta_j\right)$$

由于 $(*)$ 式两边关于 $z \in \Omega_\delta$ 上都连续，则 $(*)$ 式对 $\forall z \in \Omega_\delta$ 成立.

($\because z \in \partial\Theta_j$, 则 $\exists z_k \in \Theta_j^{\circ}$ s.t. $z_k \to z$, 两边对 $k \to \infty$ 取极限

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\right)dz$$

由于 $f(\zeta)/(\zeta - z)$ 关于 $z \in \gamma$, $\zeta \in \Gamma_\delta$ 连续. 故有

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\Gamma_\delta}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,dz\right)d\zeta$$

$$= \int_{\Gamma_\delta}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{\zeta - z}\,dz\right)f(\zeta)\,d\zeta$$

由 $n(\gamma, \zeta) = 0$, $\forall \zeta \in \Gamma_\delta$. 即 $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{\zeta - z}\,dz \equiv 0$. 故 $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

$n(\gamma', a) = n(\gamma, a) - n(\gamma, a)\, C(c, a)$

$\int_{\gamma'} f\,dz = \int_\gamma$

(练习！)　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　2023.4.1

证明：设 f 在 Ω 中除 a 外解析，且 $\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=0$.

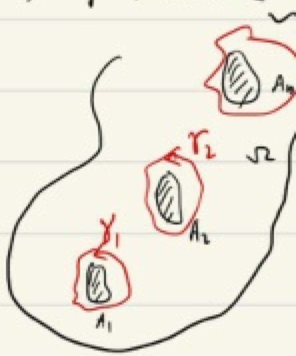
则对 Ω 中任意同调于0且不过 a 的闭链 γ，有 $\int_\gamma f\,dz=0$.

$\Omega\setminus\{a\}=\Omega'$

五 多连通域

Def 4 (1) 若 Ω 不是单连通域，则称 Ω 为多连通域.

(2) 若 Ω 为多连通域，且 Ω^c 有 n 个连通分支，则称 Ω 是 n



设 Ω 为 n 连通域. $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 Ω^c 的 n 个连通分支. 设 $\infty\in A_n$. 若 γ 为 Ω 中的一个闭链，则有

(1) 当 $a\in A_i$ 时，$n(\gamma,a)$ 为常数；当 $a\in A_n$ 时，$n(\gamma,a)=n(\gamma,\infty)$
$(i=1,\cdots,n-1)$

(2) 类似于 Thm 1 的证明，可以构造闭链 γ_i s.t. 当 $a\in A_i$ 时，有 $n(\gamma_i,a)=1$. 当 $a\in A_j$ $(j\neq i, j\neq n)$ 时，有 $n(\gamma_i,a)=0$.

Def 5. 上述(2)中闭链 γ_i $(i=1,\cdots,n-1)$ 称为 Ω 的同调基.

注 ① $\gamma_1,\cdots,\gamma_{n-1}$ 在同调于0的意义下是线性无关的.

事实上，若 $\gamma=c_1\gamma_1+\cdots+c_{n-1}\gamma_{n-1}\sim 0 \pmod{\Omega}$，则对 $a\in$

$n(\Gamma, a) = c_i n(\gamma_i, a) = c_i = 0.\ \forall i$

② 对Ω中的任意闭链γ. 有 $\gamma \sim c_1\gamma_1 + \cdots + c_{n-1}\gamma_{n-1}$. 其中

$c_i = n(\gamma, a)$. $a \in A_i$. 即γ可以用 $\gamma_1, \cdots, \gamma_{n-1}$ 线性表示. 且唯一

③ 同调基不唯一. 但是一组同调基的个数是一样的. 为(n-1)

这里的 n 是 Ω^c 的连通分支的个数.

④ 若 $\gamma_1 \sim \gamma_n$ 为同调基. $f \in H(\Omega)$. γ为Ω中的 ∀ 一个闭

则有 $\tilde{\gamma} = \gamma - c_1\gamma_1 - c_2\gamma_2 - \cdots - c_{n-1}\gamma_{n-1} \sim 0$.

由 Thm2. $\int_{\tilde{\gamma}} f\,dz = 0$

$$\Rightarrow \int_\gamma f\,dz = c_1\int_{\gamma_1} f\,dz + \cdots + c_{n-1}\int_{\gamma_{n-1}} f\,dz.$$

记 $P_i = \int_{\gamma_i} f\,dz$, 称之为周期.

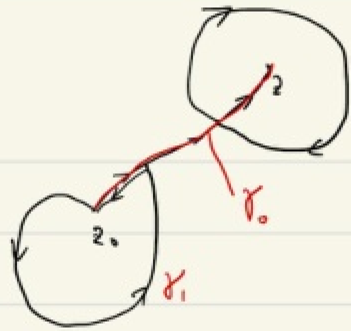
⑤ $z_0, z \in \Omega$. γ为Ω内连接 z_0 与 z 的弧. 则

(i) $\int_{z_0}^{z} f\,dz$ 不为这一个多值函数 ⟺ $P_i\ (i=1,\cdots,n-1)$ 不全为 0.

(ii) $\int_{z_0}^{z} f\,dz$ ---- 单值函数 ⟺ $P_i = 0$. $(i=1,\cdots,n-1)$

例. 设 $\gamma = \gamma_0 + \underline{\gamma_1 + \gamma_2} = \gamma_0 + \tilde{\gamma}$ 　　设 $\tilde{\gamma} = c_1\Gamma_1 + \cdots + c_{n-1}\Gamma$

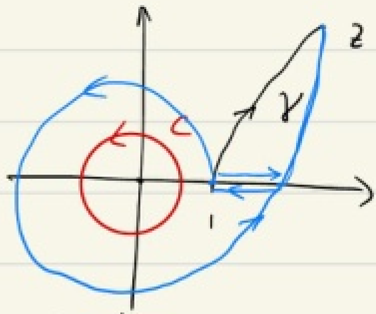
这里 $\Gamma_1 \cdots \Gamma_{n-1}$ 为 Ω 的同调基.



则 $\displaystyle\int_\gamma f\,dz = \int_{\gamma_0} f\,dz + \int_{\tilde{\gamma}} f\,dz$

$\displaystyle= \int_{\gamma_0} f\,dz + c_1 P_1 + \cdots + c_{n-1} P_{n-1}.$

例2. $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. $f(z) = \dfrac{1}{z}$.



$$\int_1^z \frac{1}{\zeta}\,d\zeta = \int_\gamma \frac{1}{z}\,dz + 2k\pi i$$

$$= \log z + 2k\pi i$$

$$= \mathrm{Ln}\, z.$$

$P = \displaystyle\int_C \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i.$

P_{116} 2 3 4

§4.5 留数的计算

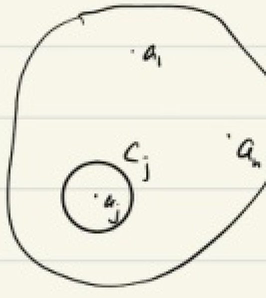
一、

<u>Thm1</u> 设 $f \in H(\Omega)$. 则对 Ω 中 $\forall$ 同调于0的闭链 γ, 有

$$n(\gamma, a)\cdot f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz. \quad a\in\Omega,\ a\notin\gamma.$$

设 f 在 Ω 中除 $a_1,\cdots,a_n$ 外解析. $\Omega' = \Omega\setminus\{a_1,\cdots,a_n\}$

取 a_j. 作 C_j: $|z-a_j|=\delta$. s.t. $\overline{C_j}\subset\Omega$. 且 C_j 内不会有其他奇点. 则 C_j $(j=1,\cdots,n)$ 为 Ω' 的同调基. 且 f 关于 C_j 的周期为



$n(\gamma_j, a)$

$$P_j = \int_{C_j} f(z)\,dz \quad . \ j=1,\cdots,n.$$ $a\in A_i$ 上为1 其余为0

记 $R_j = \frac{P_j}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_j} f(z)\,dz$. 则 $f(z)-\frac{R_j}{z-a_j}$ 对于 a_j 的1

为 $\int_{C_j}\left(f(z)-\frac{R_j}{z-a_j}\right)dz = 0$. 则 $f(z)-\frac{R_j}{z-a_j}$ 在 $0<|z-a_j|<\delta$ 内是

导函数 (即 $f(z)-\frac{R_j}{z-a_j}$ 在 $0<|z-a_j|<\delta$ 内的积分与路径无关

2
Therom COV 1

<u>Def 1</u> 设 a_j 为 f 的孤立奇点. 则上述的 $R_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_j} f(z)\,dz$ 称为

f 在 a_j 处的<u>留数</u>. 记 $\operatorname*{Res}_{z=a_j} f(z)$.

分析：设 f 在 Ω 中除 $a_1, \cdots, a_n$ 外解析. 对每个 a_j. 取 c_j (

对 Ω 内任一个闭链 $\gamma \sim 0 \ (\mathrm{mod}\ \Omega)$. $a_j \notin \gamma$. $j=1,\cdots,n$. 考虑

$$\tilde{\gamma} = \sum_{j=1}^{n} n(\gamma, a_j)\, c_j$$

则对 $\forall$ 固定的 a_{j_0}. 有

$$n(\tilde{\gamma}, a_{j_0}) = \sum_{j=1}^{n} n(\gamma, a_j)\, n(c_j, a_{j_0}) = n(\gamma, a_{j_0})$$

又对 $\forall\, a \notin \Omega$，记 $\Omega' = \Omega \setminus \{a_1, \cdots, a_n\}$. 则 $a \notin \Omega'$. 则有

$n(\gamma, a) = 0$. 又对 $\forall\, c_j$. 有 $n(c_j, a) = 0$. 故有

$$n(\tilde{\gamma}, a) = \sum_{j=1}^{n} n(\gamma, a_j)\, n(c_j, a) = 0 = n(\gamma, a)$$

即 $\tilde{\gamma} \sim \gamma \ (\mathrm{mod}\ \Omega')$

作业 P_{116}. 2. 3. 4.

分析：设 f 在 Ω 中除 $a_1,\cdots,a_n$ 外解析，对每个 a_j，取 C_j (

对 Ω 内的一个闭链 $\gamma \sim 0 \pmod{\Omega}$，$a_j \notin \gamma$，$j=1,\cdots,n$。考虑

$$\tilde{\gamma} = \sum_{j=1}^{n} n(\gamma, a_j)\, C_j$$

则对 $\forall$ 固定的 a_{j_0}，有

$$n(\tilde{\gamma}, a_{j_0}) = \sum_{j=1}^{n} n(\gamma, a_j)\, n(C_j, a_{j_0}) = n(\gamma, a_{j_0})$$

又对 $\forall\, a \notin \Omega$，记 $\Omega' = \Omega \setminus \{a_1,\cdots,a_n\}$，则 $a \notin \Omega'$，则有

$n(\gamma, a) = 0$，又对 $\forall\, C_j$，有 $n(C_j, a) = 0$，故有

$$n(\tilde{\gamma}, a) = \sum_{j=1}^{n} n(\gamma, a_j)\, n(C_j, a) = 0 = n(\gamma, a)$$

即 $\tilde{\gamma} \sim \gamma \pmod{\Omega'}$

2023. 4

由柯西定理，

$$\int_{\gamma - \tilde{\gamma}} f\, dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} f\, dz = \int_{\tilde{\gamma}} f\, dz = \sum_{j=1}^{n} n(\gamma, a_j) \int_{C_j} f\, dz$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f\, dz = \sum_{j=1}^{n} n(\gamma, a_j)\, R_j.$$

若f在Ω中有无穷多个孤立奇点，则对γ，只有有限个a_j

s.t. $n(\gamma, a_j) \neq 0$. 事实上，若$n(\gamma, a) = 0$，则a在γ的无界区域

无界区域 ($\because n(\gamma, \infty) = 0$)，从而使得$n(\gamma, a_j) \neq 0$的$a_j$会

有界区域内. 若有无穷多个这样的a_j，则存在$\{a_j\}$的极限点

且$\tilde{a} \in \Omega$，则$\tilde{a}$为f的非孤立奇点，矛盾. 故上述结论也成

即
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f\,dz = \sum_{j=1}^{\infty} n(\gamma, a_j) R_j$$

综上，有

Thm 2 (留数定理)

设f在Ω中除a_j ($j=1,\cdots$) 外解析，则对Ω内任意同调于

0且不过a_j的闭链γ，有
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f\,dz = \sum_j n(\gamma, a_j) R_j .$$

注. ① 当γ使得$n(\gamma, a_j) = 0$或1时，有
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f\,dz = \sum_j R_j$$

② 若 a_j 是 h 阶极点，则有

$$f(z)=\frac{B_h}{(z-a_j)^h}+\cdots+\frac{B_1}{z-a_j}+\varphi(z) \qquad B_h\neq 0$$

$\varphi(z)$ 在 a_j 处解析，则

$$f(z)-\frac{B_1}{z-a_j}=\frac{B_h}{(z-a_j)^h}+\cdots+\frac{B_2}{(z-a_j)^2}+\varphi(z)$$

在 $0<|z-a_j|<\delta$ 内存在原函数，由 Def 1 有

$$\operatorname*{Res}_{z=a_j} f(z)=B_1.$$

即 f 在 a_j 的留数为 f 在 a_j 处的展开式的负一次项的系数

特别地，当 $h=1$ 时 有

$$f(z)=\frac{B_1}{z-a}+\varphi(z)$$

$$\Rightarrow (z-a)f(z)=B_1+(z-a)\varphi(z).$$

$$\Rightarrow B_1=\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z). \qquad e^z=\sum\frac{z^n}{n!}$$

例. (1) $\operatorname*{Res}_{z=a}\frac{e^z}{z-a}=\lim_{z\to a}(z-a)\cdot\frac{e^z}{z-a}=e^a.$

(2) $\operatorname*{Res}_{z=a}\frac{e^z}{(z-a)^2}=e^a.$ $\qquad e^z=e^{z-a+a}=e^a\cdot e^{z-a}=e^a\sum_{n=0}^{\infty}$

$$\Rightarrow \frac{e^z}{(z-a)^2}=e^a\left(\frac{1}{(z-a)^2}+\frac{1}{z-a}+\varphi(z)\right)$$

③ 柯西积分公式可以看成留数定理的特例.

← 设 $f \in H(\Omega)$

事实上, 若 f 在 a 解析, 设 $f(z) = f(a) + \varphi(z)(z-a)$.

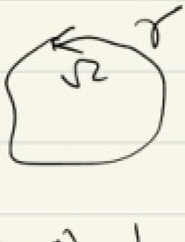
$$\Rightarrow \quad \frac{f(z)}{z-a} = \frac{f(a)}{z-a} + \varphi(z)$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname*{Res}_{z=a} \frac{f(z)}{z-a} = f(a) \xRightarrow{\text{Thm 2}} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = n(\gamma, a)\cdot f(a)$$

与一般的复分析教材的区别:

Def 2 一个闭链 γ 称为域 Ω 的围线, 是指当 $a \in \Omega$ 时 $n(\gamma, a) = 1$, 当 $a \notin \Omega$ 时, $n(\gamma, a)$ 或者无意义, 或者等于

注 ① 当 $a \in \gamma$ 时, $n(\gamma, a)$ 无意义.



② 若 $\exists$ 域 Ω', s.t. $\Omega + \gamma \subset \Omega'$, 则有 $\gamma \sim 0 \ (\mathrm{mod}$

($\because$ 当 $a \notin \Omega'$ 时, $a \notin \Omega$, 且 $a \notin \gamma$, 由 Def 2, $n(\gamma, a) =$

由此有.

Thm3. 若γ为域Ω的闭曲线. 设f在$\Omega' \supset \Omega+\gamma$上解析.
则有

(1) $\int_\gamma f\,dz = 0$.

(2) $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$. $\forall z \in \Omega$.

若a_j为f在$\Omega+\gamma$上的孤立奇点, 则有

(3) $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_j \operatorname*{Res}_{z=a_j} f(z)$.

注. ① 可以证明: $\partial\Omega \subset \gamma$, 反之不一定.

二. 辐角原理.

设a为f的n阶零点. 即 $f(z) = (z-a)^n f_n(z)$. $f_n(z)$在

解析且$f_n(a) \neq 0$. 则

$$f'(z) = n(z-a)^{n-1} f_n(z) + (z-a)^n f_n'(z).$$

$$\to \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}$$

这里 $\frac{f_n'}{f_n}$ 在a附近解析. 则有 a为$\frac{f'}{f}$的一阶极点, —

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{f'(z)}{f(z)} = h.$$

若 b 为 f 的 h 阶极点，即 $f(z) = (z-b)^{-h} f_h(z)$. $f_h(z)$

b 的邻域解析且 $f_h(b) \neq 0$. 则

$$f'(z) = -h(z-b)^{-h-1} f_h(z) + (z-b)^{-h} f_h'(z)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-h}{z-b} + \frac{f_h'(z)}{f_h(z)}$$

则 b 为 $f'(z)/f(z)$ 的一阶极点，且

$$\operatorname*{Res}_{z=b} \frac{f'(z)}{f(z)} = -h.$$

由留数定理，有

Thm 4（辐角原理） 设 f 是 Ω 中的亚纯函数. 零点

极点分别为 a_j 和 b_k（包含阶数），则对 Ω 内与 0 同调于

不过 a_j 和 b_k 的闭链 γ，有

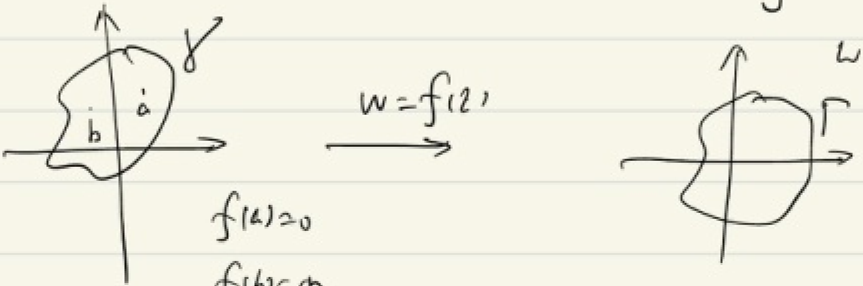
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_j n(\gamma, a_j) - \sum_k n(\gamma, b_k).$$

2023.4

证. n(可意义.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz \xlongequal[\gamma\to\Gamma]{w=f(z)} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w} = n(\Gamma, 0)$$

$$= \sum_j n(\gamma, a_j) - \sum_k n($$



$f(a)=0$

$f(b)=\infty$

例. $f(z)=z^2/(z-1)$. γ: $|z|=2 \to \Gamma$.

Thm5 (儒歇定理) 设 γ 在 Ω 内同调于0. 对 $z \notin \gamma$.

$n(\gamma, z) = 0$ 或 1. 设 $f, g \in H(\Omega)$ 且对 $z \in \gamma$ 时. 有

$$|f(z)-g(z)| < |f(z)|.$$

则 f 与 g 在 γ 内有相同个数的零点.

证: 对 $z \in \gamma$ 时. $|f(z)| > |f(z)-g(z)| \geq 0 \Rightarrow f(z)$

$|g(z)| = |g(z)-f(z)+f(z)| \geq |f(z)| - |f(z)-g(z)| > 0$

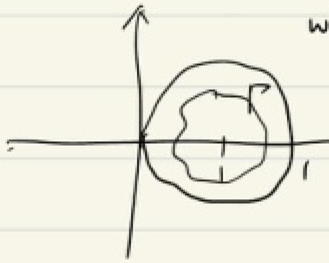
$\Rightarrow g(z) \neq 0$ 即 f 和 g 在 γ 上不为0.

由 $|f(z)-g(z)| < |f(z)|$

$$\Rightarrow \left|\frac{g(z)}{f(z)} - 1\right| < 1$$

记 $F(z)=\frac{g(z)}{f(z)}$. 设 $F: \gamma \to \Gamma$. 则对于 $z\in\gamma$ 时. 有

$$|F(z)-1|<1.$$



即 $\Gamma \subset \{w: |w-1|<1\}$

$\Rightarrow n(\Gamma, 0)=0$.

由 Thm4. 有

$$0=\sum_j n(\gamma, a_j) - \sum_k n(\gamma, b_k)$$

这里 a_j 是 $F(z)$ 的零点. 即 $g(z)$ 的零点. b_k 为 $F(z)$ 的极点. 即为 $f(z)$ 的零点. 故 f 和 g 在 γ 内的零点个数相同.

例1（代数基本定理）任意 n 次 $(n\geq 1)$ 多项式 $P_n(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上必有 n 个（包含重数）.

证. 设 $P_n(z)=z^n+Q_{n-1}(z)$. 由 $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{P_n(z)}{z^n}=1$

则对 $\varepsilon=\frac{1}{2}$. 则 $\exists$ 充分大的 $R>0$. s.t. $|z|\geq R$ 时. 有

$$\left|\frac{P_n(z)}{z^n}-1\right|<\frac{1}{2}<1$$

$\Rightarrow \quad |P_n(z) - z^n| < |z^n|. \qquad |z| \geqslant R$

由于 z^n 在 $|z|<R$ 内有 n 个零点. 由 Thm 5, $P_n(z)$ 在 $|z|<$ R

也有 n 个零点.

由 $\underline{\left|\frac{P_n(z)}{z^n} - 1\right| < \frac{1}{2}} \Rightarrow \left|\frac{P_n(z)}{z^n}\right| \geqslant \frac{1}{2}. \quad |z| \geqslant R$. 即 $P_n(z)$ 在 $|z| \geqslant$

不为

$\left(1 - \left|\frac{P_n(z)}{z^n}\right| \leqslant \left|\frac{P_n(z)}{z^n} - 1\right| < \frac{1}{2} \right)$

例 2. 设 n 次多项式 $P_n(z) = a_0 z^n + \cdots + a_t z^{n-t} + \cdots + a_n$ $(a_0 \neq 0)$

s.t. $\quad |a_t| > |a_0| + \cdots + |a_{t-1}| + |a_{t+1}| + \cdots + |a_n|$.

则 $P_n(z)$ 在 $|z|<1$ 内有 $(n-t)$ 个零点.

$\gamma: |z|=1 \qquad$ 当 $|z|=1$ 时.

$|P_n(z) - a_t z^{n-t}| \leqslant |a_0 z^n| + \cdots + |a_n|$

$= |a_0| + \cdots + |a_{t-1}| + |a_{t+1}| + \cdots + |a_n| < |a_t| = |a_t z^{n-t}$

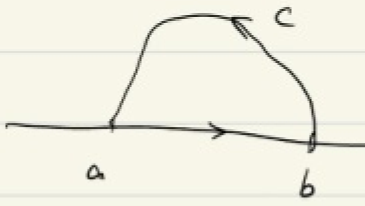
如, $\quad p(z) = z^5 - 4z^3 + 2$

例. 设 f 解析. 考虑 f 在 $|z| \leqslant R$ 内的零点个数

解. 设 $f(z) = P_{n-1}(z) + z^n f(z)$. 找到适当的 n. s.t.

$$|f(z) - P_{n-1}(z)| < |P_{n-1}(z)|. \quad |z| = R.$$

三. 定积分的计算



一般来说 $\underline{\int_a^b f(x)\,dx}$

$$\downarrow$$

$\gamma = \gamma + [a.b]$ $\quad \int_\gamma F(z)\,dz$

若 $F(z) = f(z)$ $\quad \int_\gamma F(z)\,dz = \int_a^b f(x)\,dx + \int_C f(z)\,dz$

(一) $I_1 = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$

其中 $R(\cos\theta, \sin\theta)$ 表示关于 $\cos\theta, \sin\theta$ 的有理函数

令 $z = e^{i\theta}$, 则 $0 \le \theta \le 2\pi \Longleftrightarrow |z| = 1$. 逆时针.

$$dz = ie^{i\theta}\,d\theta = iz\,d\theta \Longrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}$$

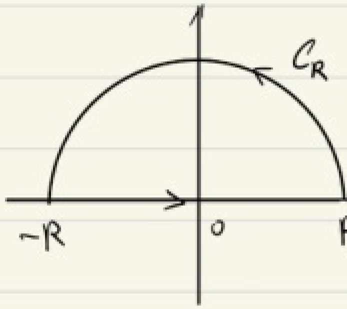
$$\Longrightarrow I_1 = \int_{|z|=1} \boxed{R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{1}{iz}}\,dz$$

(二) $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$.

其中 $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ 为有理函数. $\deg Q(x) \geq \deg P(x) + 2$. 且对

$\forall x \in \mathbb{R}$. $Q(x) \neq 0$. 此时. I_2 收敛. 则有

$$I_2 = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} R(x)\,dx$$



作半圆 C_R: $|z| = R$. $z: R \to -R$

记 $\gamma = C_R + [-R, R]$

考虑 $R(z)$ 在 γ 上的积分. 有

$$\int_\gamma R(z)\,dz = \int_{C_R} R(z)\,dz + \int_{-R}^{R} R(x)\,dx$$

令 $R \to +\infty$.

$$\int_\gamma R(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{Q(z_j)=0 \\ \operatorname{Im} z_j > 0}} \operatorname*{Res}_{z=z_j} R(z)$$

下证: $\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} R(z)\,dz = 0$

证. $\left|\int_{C_R} R(z)\,dz\right| \overset{z=Re^{i\theta}}{=\!=} \left|\int_0^\pi \frac{P(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})} R \cdot i e^{i\theta}\,d\theta\right|$

$$\leq \int_0^{\pi} \left| \frac{R\,P(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})} \right| d\theta \longrightarrow 0. \quad R \to +\infty$$

$$\left(由\ \deg Q(x) \geq \deg p(x) + 2 \Rightarrow \lim_{R\to+\infty} \left| \frac{R\,P(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})} \right| = 0 \right)$$

综上 有

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{\substack{Q(z_j)=0 \\ \operatorname{Im} z_j > 0}} \operatorname*{Res}_{z=z_j} R(z).$$

例 $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$

解. 令 $R(z) = \frac{1}{z^4+1}$.

由 $z^4+1=0 \Rightarrow z^4=-1 \Rightarrow z_k = \sqrt[4]{-1} = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ $k=0.1.$

知 $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ 和 $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ 在上半平面

$(z^4+1) = (z-z_0)(4z_0^3)$

且 $\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{1}{z^4+1} = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{4z_0^3} = \frac{z_0}{4z_0^4} = -\frac{z_0}{4}$

$\operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{1}{z^4+1} = -\frac{z_1}{4}$. $f(x) = u(x,y) + iv(x,y)$

$\therefore\ I = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{4}e^{i\frac{3\pi}{4}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$

作业 P121. 1. 2. 3.

2023.

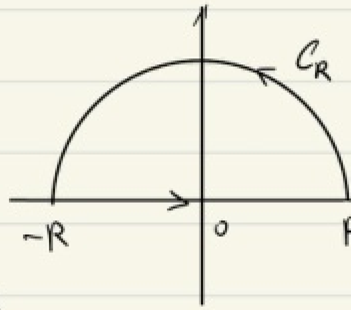
(三) $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{ix} dx$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos x \, dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin x \, dx$$

其中 $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ 为有理函数. $\deg Q(x) \geq \deg P(x) + 1$, $Q(x) \neq 0$.

此时, I_3 收敛. 则有

$$I_3 = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{+R} R(x) e^{ix} dx$$



记 $\gamma = C_R + [-R, R]$. 考虑 $R(z) e^{iz}$ 在 γ 上的积分. 则有

$$\int_\gamma R(z) e^{iz} dz = \int_{C_R} R(z) e^{iz} dz + \int_{-R}^{R} R(x) e^{ix} dx$$

当 $R \to +\infty$. 由留数定理,

$$\int_\gamma R(z) e^{iz} dz = 2\pi i \cdot \sum_{\substack{Q(z_j)=0 \\ \mathrm{Im}\, z_j > 0}} \operatorname{Res}_{z=z_j} \left(R(z) e^{iz} \right)$$

下证: $\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} R(z) e^{iz} dz = 0$.

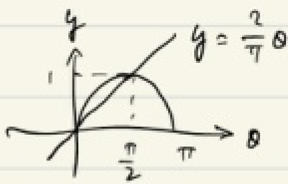
$$\left| \int_{C_R} R(z) e^{iz} dz \right| \xlongequal[0 \leq \theta \leq \pi]{z = Re^{i\theta}} \left| \int_0^\pi \frac{P(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})} e^{iRe^{i\theta}} \cdot Ri e^{i\theta} d\theta \right|$$

$$\leq \int_0^\pi \left| \frac{R P(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})} \right| \left| e^{iRe^{i\theta}} \right| d\theta$$

$$\le M(R)\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}\,d\theta$$

记 $M(R)=\max\limits_{0\le\theta\le\pi}\left|\dfrac{RP(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})}\right|$

而 $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}\,d\theta$



(当 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{2}{\pi}\theta\le\sin\theta\le\theta$)

$$\le 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\cdot\frac{2}{\pi}\theta}\,d\theta$$

$$=2\cdot-\frac{\pi}{2R}\cdot e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{R}\left(1-e^{-R}\right)\to 0. \qquad R\to+\infty$$

又 $\lim\limits_{R\to\infty}M(R)$ 有界. 故 $\lim\limits_{R\to+\infty}\displaystyle\int_{C_R}R(z)e^{iz}\,dz=0$.

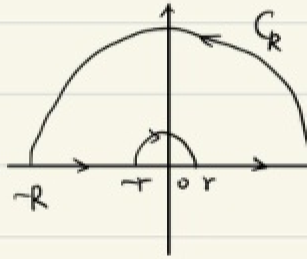
综上,

$$I_3=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{ix}\,dx=2\pi i\sum_{\substack{Q(z_j)=0\\ \operatorname{Im}z_j>0}}\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}e^{iz},\ z=z_j\right)$$

(四) $I_4=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$

I_4 收敛. 且 $I_4=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}e^{ix}\,dx$

记 $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,dx$



考虑 $\dfrac{e^{iz}}{z}$ 在 $\gamma=C_R+[-R,-r]+C_r+[r,R]$

上的积分. 有

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}dz = \int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz + \underbrace{\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x}dx}_{\downarrow\ I}$$

令 $r\to 0^+$. $R\to+\infty$. 由柯西定理. 有

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$

由(三)已证得. $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz = 0$.

约当

下证: $\lim\limits_{r\to 0^+}\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz = -i\pi$.

证. $\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz = \int_{C_r}\frac{e^{iz}-1}{z}dz + \int_{C_r}\frac{1}{z}dz$

则 $\int_{C_r}\frac{1}{z}dz \overset{z=re^{i\theta}}{=\!=\!=} \int_\pi^0 \frac{1}{r\cancel{e^{i\theta}}}\cdot r\cancel{e^{i\theta}}\cdot i\,d\theta = -i\pi$.

记 $M(r) = \max\limits_{z\in C_r}|e^{iz}-1|$. 则 $\lim\limits_{r\to 0}M(r) = 0$. 从而有

$$\left|\int_{C_r}\frac{e^{iz}-1}{z}dz\right| \le M(r)\cdot\int_{C_r}\left|\frac{1}{z}\right||dz|$$

$$= M(r)\cdot\frac{1}{r}\cdot\pi r = \pi\cdot M(r) \longrightarrow 0,\quad r\to 0$$

$\therefore$ 有 $\quad I = \pi i$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

第五章 级数与乘积展开

§5.1 幂级数展开式

一、Weierstrass 定理

<u>Def 5.1</u> 若函数列 $\{f_n(z)\}$ 在 Ω 上的任意一个紧子集上（有界闭集）一致收敛于 $f(z)$，则称 $\{f_n(z)\}$ 在 Ω 上内闭一致收敛于 $f(z)$。

注. 一致收敛 "$>$" 内闭一致收敛 "$>$" 逐点收敛

<u>Thm 5.1</u> (Weierstrass) 设 $f_n(z)\in H(\Omega)$，$n\in\mathbb{N}^*$，且 $\{f_n(z)\}$ 在 Ω 上内闭一致收敛于 $f(z)$，则有

(1) $f\in H(\Omega)$

(2) $\{f_n^{(k)}(z)\}$ $(k\in\mathbb{N})$ 在 Ω 上内闭一致收敛于 $f^{(k)}(z)$。

证. (1) 对 $\forall a\in\Omega$，取圆 C: $|z-a|=r$，使 C 及其内部含于 Ω

由 $\{f_n(z)\}$ 在 $|z-a|\le r$ 上一致收敛于 $f(z)$，则 f 在 $|z-a|\le r$ 连续

取 C 中任意闭曲线 γ，由柯西定理，有

$$\int_\gamma f_n(z)\,dz=0,\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f\,dz=\int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n(z)\,dz=\lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(z)\,dz=0.$$

由 Morera 定理，f 在 $|z-a|<r$ 内解析，特别地，f 在 a 解析。

由 a 之任意性. $f \in H(\Omega)$.

(2) 由柯西积分公式. 有

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

这里 C: $|\zeta - a| = r$. $|z-a| < r$.

由 $\{f_n(\zeta)\}$ 关于 $\zeta \in C$ 一致收敛于 $f(\zeta)$. 有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

(此式也表明 $f \in H(\Omega)$).

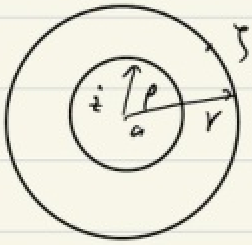
进而有

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta.$$

同理

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta = f'(z).$$

对 $\forall \rho < r$. 当 $|z-a| \le \rho$ 时. $|\zeta - z| \ge r - \rho$.



由 $\{f_n(\zeta)\}$ 在 C 上一致收敛于 $f(\zeta)$. 对 $\forall \varepsilon > 0$.

$\exists N$. 当 $n > N$ 时. 有

$$|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \varepsilon. \quad \forall \zeta \in C.$$

则有 $|f_n'(z) - f'(z)|$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_C \frac{f_n(\zeta)-f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta\right|$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2\pi}\cdot\frac{1}{(r-\rho)^2}\cdot 2\pi r = \frac{r}{(r-\rho)^2}\cdot\varepsilon$$

即 $\{f_n'(z)\}$ 在 $|z-a|\le\rho$ 上一致收敛于 $f'(z)$.

对 Ω 中任意紧集 D. 则 D 也可以用有限个小的圆覆盖. 则 $\{f_n'(z)\}$ 在 D 上一致收敛于 $f'(z)$.

对 $\forall k\in\mathbb{N}$. $\{f_n^{(k)}(z)\}$ 在 Ω 上也内闭一致收敛于 $f^{(k)}(z)$

(证明类似)

作业 $P_{125-126}$. 1.

3. (a). (b) (c). (d) (e) (f).

4.

对于 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$，有 2023.

Thm 5.1′ 设 $f_n(z) \in H(\Omega)$，$\forall n \in \mathbb{N}$. 且 $\sum_n f_n(z)$ 在 Ω 上内闭一致

于 $f(z)$，则有

(1) $f \in H(\Omega)$.

(2) $\sum_n f_n^{(k)}(z)$ 在 Ω 上内闭一致收敛于 $f^{(k)}(z)$.

Thm 5.2 (Hurwitz) 设 $f_n(z) \in H(\Omega)$ 且 $f_n(z) \neq 0$，$\forall z \in \Omega$. $\{f_n(z)\}$

Ω 上内闭一致收敛于 $f(z)$，则 f 或者恒为 0，或者恒不为 0.

证. 设 f 不恒为 0，任取 $z_0 \in \Omega$. 由 Thm 5.1. $f \in H(\Omega)$.

$\exists r>0$, s.t. $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|\leq r$ 上不为 0. 由 $\frac{1}{f_n(z)}$ 在 $C: |z-z_0|$

一致收敛于 $\frac{1}{f(z)}$ (且有 $\frac{1}{f_n'(z)}$ 在 C 上一致收敛于 $\frac{1}{f'(z)}$). 则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

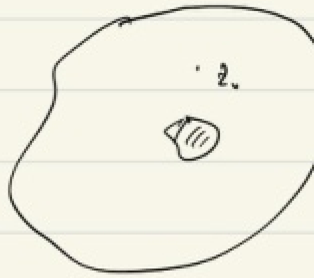
由 $f_n(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega$. 由辐角原理，上式左边 $=0$，则右边也为 0.

f 在 C 内不为 0. 特别地，有 $f(z_0) \neq 0$. 由 z_0 的任意性，$f(z) \neq 0$.

二. 泰勒级数

Thm 5.3 (泰勒展开定理). 设 $f \in H(\Omega)$. $z_0 \in \Omega$. 则 f 在 Ω 内以 z_0 为心的最大的圆盘上, 有

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \cdots$$



证. 由泰勒公式 (P98. Thm8), 对 $z_0 \in \Omega$,

$\exists\, f_{n+1}(z) \in H(\Omega)$, s.t.

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n +$$

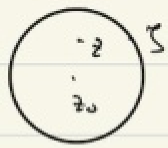
$$+ f_{n+1}(z)(z-z_0)^{n+1}$$

其中 $$f_{n+1}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}(\zeta-z)}$$

这里 C: $|z-z_0| = \rho$. s.t. $\{z : |z-z_0| \le \rho\} \subset \Omega$.

$$\left| f_{n+1}(z)(z-z_0)^{n+1} \right| = \frac{1}{2\pi}\left| \int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}(\zeta-z)} \cdot (z-z_0)^{n+1} \right|$$

$$\le \frac{M|z-z_0|^{n+1}}{\cancel{2\pi}} \cdot \frac{1}{\rho^{n+1}} \cdot \frac{1}{\rho-|z-z_0|} \cdot \cancel{2\pi\rho}$$



(这里 $M = \max\limits_{\zeta \in C}|f(\zeta)|$. $|\zeta - z| \ge |\zeta - z_0| - |z-z_0| = \rho - |z-z_0|$)

$$= \frac{M|z-z_0|}{\rho-|z-z_0|} \cdot \left(\frac{|z-z_0|}{\rho}\right)^n \longrightarrow 0. \quad n\to\infty$$

故有

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\cdots$$

事实上，$f_{n+1}(z)(z-z_0)^n$ 在 $|z-z_0|<\rho$ 上内闭一致收敛于 0，因为对 z

$|z-z_0|\le r<\rho$，有

$$\left|f_{n+1}(z)(z-z_0)^{n+1}\right|\le\frac{M|z-z_0|^{n+1}}{\rho^n(\rho-|z-z_0|)}\le\frac{Mr^{n+1}}{\rho^n(\rho-r)}=\frac{Mr}{\rho-r}\cdot\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\to 0$$

此外，从上述证明可知，只要使得 f 解析的圆盘 $\{|z-z_0|<\rho\}\subset\Omega$

展开式都成立，故可取 $\rho=d(z_0,\partial\Omega)$

注，设 f 在 $\mathbb{C}$ 上除 $z_1,\cdots,z_n$ 外解析，若 f 在 z_0 解析，则 f 在

z_0 泰勒级数的收敛圆的半径 $R=\min\{|z_0-z_j|,\ j=1,\cdots,n\}$

例 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)}$，　$z=0\to R=1$

$z=1+i\to R=1$

三、洛朗级数

考虑：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_nz^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n+\sum_{n=-\infty}^{-1}a_nz^n\triangleq\Sigma_1+\Sigma_2$$

对 Σ_1，$\exists R_2$，s.t. Σ_1 在 $|z|<R_2$ 收敛于 $f_1(z)$，且 f_1 在 $|z$

内解析.

对 Σ_2，令 $\frac{1}{z}=\zeta$. 则 $\Sigma_2 = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \zeta^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}\zeta^{n}$.

则 ∃ r s.t. Σ_2 在 $|\zeta|<r$ 内收敛于 $g(\zeta)$. 即 Σ_2 在

$|z|>\frac{1}{r} \triangleq R_1$ 内收敛于 $g(\frac{1}{z}) \triangleq f_2(z)$. 且 $f_2(z)$ 在 $|z|>R_1$ 内

解析. $\frac{1}{z-1} =$ $e^{z} = z+\frac{z^2}{2!}$ $\frac{1}{z(1+p(z))}$

当 $R_1<R_2$ 时，$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ 在 Ω: $R_1<|z|<R_2$ 内收敛于 $f_1(z$ $\triangleq f$

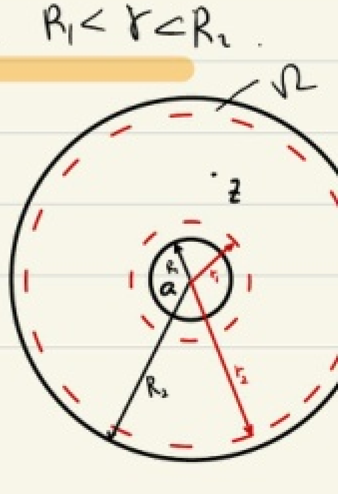
且 $f(z)$ 在 Ω 内解析.

Thm 5.6 (洛朗展开定理) 设 $f(z)$ 在 Ω: $R_1<|z-a|<R_2$ 内

则对 $\forall z\in\Omega$，有

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n (z-a)^n.$$

其中 $A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$. $n\in\mathbb{Z}$. $R_1<r<R_2$.



证. 对 $\forall$ 固定的 $z\in\Omega$，∃

$R_1<r_1<r_2<R_2$ s.t.

$R_1<r_1<|z-a|<r_2<R_2$.

记 $\gamma = C_1^- + C_2$，其中 $C_2: |z-a| = r_2$，$C_1: |z-a| = r_1$，则

$\gamma \sim 0 \pmod{\Omega}$，由柯西积分公式有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta}_{f_1(z)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta}_{f_2(z)} \triangleq f_1(z) + f_2(z)$$

对 $f_1(z)$，当 $\zeta \in C_2$ 时，有 $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| < 1$，则有

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z-a)} = \frac{1}{\zeta - a}\,\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}}$$

$$= \frac{1}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} f(\zeta)\,d\zeta$$

$$\overset{\text{一致收敛}}{=\!=} \sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta\right)}_{=A_n}\cdot (z-a)^n \triangleq \sum_{n=0}^{+\infty} A_n (z-a)^n$$

对 $f_2(z)$，当 $\zeta \in C_1$ 时，有 $\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right| < 1$，则有

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z-a)} = -\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1 - \frac{\zeta-a}{z-a}}$$

$$= -\frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(z-a)^{-n}}{(\zeta-a)^{-n+1}}$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}f(\zeta)\,d\zeta$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta}_{=B_n}\Bigg)(z-a)^n \triangleq \sum_{n=-\infty}^{-1}B_n(z-a)^n$$

显然有 $A_n = B_n$

(由柯西定理，$\int_{\gamma=C_1+C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta = 0$)

综上有 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_n(z-a)^n$ #

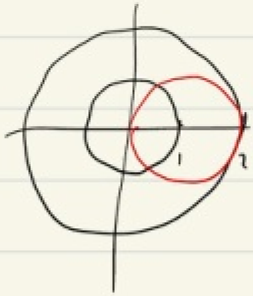
作业 P143–144 1. 2. 3

P145–146 1. 3. 4.

2023.4.

例 求下列函数的洛朗展开式

1. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)^2}$ $\quad 0<|z|<1$. $\quad 1<|z|<2$, $\quad 1<|z-1|<\infty$



2. $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}-\dfrac{1}{z}$ $\quad 0<|z|<\pi$.

解. $f(z)=\dfrac{A}{z-1}+\dfrac{B}{z-2}+\dfrac{C}{(z-2)^2}$

$$=-\frac{A}{1-z}-\frac{B}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$=-A\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{B}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n+C\left(\frac{1}{2-z}\right)'=-A\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{B}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n+\frac{C}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}$$

当 $1<|z|<2$ 时, $\Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<1$

$$f(z)=\frac{A}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-\frac{B}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n+\frac{C}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{A}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n-\frac{B}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n+\frac{C}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}$$

当 $1<|z-1|<\infty$ 时.

$$f(z)=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}+\frac{C}{(z-2)^2}$$

$$=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-1-1}+\frac{C}{(z-2)^2}$$

$$=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-1}\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}+C\left(\frac{1}{2-z}\right)'$$

$$=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1}\right)^n-C\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}\right)'$$

(2) $f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$. $\quad 0<|z|<\pi$.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots\right)} = \frac{1}{z}\left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\right)$$

即 $\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots\right)\left(a_0+a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\right) = 1$.

$\Rightarrow a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{6}$ ---

$\therefore \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{6}z + \cdots$

$\therefore f(z) = \frac{1}{6}z + \cdots \qquad 0<|z|<\pi$.

利用洛朗级数讨论孤立奇点.

设 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 即 f 在 $0<|z-a|<R$ 内解析. 则有

$$f(z) = \underbrace{\cdots + \frac{B_n}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{B_1}{z-a}}_{\text{奇异部分}} + \underbrace{A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \cdots}_{=\varphi(z)}$$

① 无负幂次项 $\Longleftrightarrow$ a为f的可去奇点 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to a} f(z) = A$，有限

② 有有限负幂次项（设最高次负幂次项为n） $\Longleftrightarrow$ a为f的n阶极点 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$

($f(z) = \dfrac{B_n}{(z-a)^n} + \cdots + \dfrac{B_1}{z-a} + \varphi(z)$ ， $B_n \neq 0$

$$= \frac{B_n + \cdots B_1(z-a)^{n-1} + \varphi(z)(z-a)^n}{(z-a)^n} \doteq \frac{g(z)}{(z-a)^n},$$ g(z)在a处解析且 $g(a) = B_n$

③ 有无限多项负幂次项 $\Longleftrightarrow$ a为f的本性奇点 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 不存在（即不为有限数也不为 ∞）

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{z})^n}{n!} \qquad 0<|z|<\infty$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

求f在n阶极点a处的留数

① $$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{B_1}{z-a}\,dz = B_1 = \operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$$

② $$(z-a)^n f(z) = B_n + B_{n-1}(z-a) + \cdots + B_1(z-a)^{n-1} + (z-a)^n\varphi(z).$$

有 $$B_1 = \lim_{z\to a} \frac{\left((z-a)^n f(z)\right)^{(n-1)}}{(n-1)!}$$

§5.2 部分分式与因子分解

一、部分分式

Thm 5.6 设 f 在 $\mathbb{C}$ 上是亚纯的，且 f 在 $\mathbb{C}$ 上除 $b_1, \cdots, b_n$ 这 n 个极点外解析，若 ∞ 是 f 的可去奇点或极点，则 f 必为有理函数，且

$$f(z) = \sum_{j=1}^{n} P_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right) + g(z)$$

其中 P_j 为不含常数项的多项式，其次数为 b_j 的阶数，$g(z)$ 为多项式

证. 设 f 在 ∞ 处的奇异部分为 $p(z)$，则 $p(z)$ 或为常数或为多项式。又设 f 在 b_j 处的奇异部分为 $P_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right)$.

考虑
$$f(z) - \sum_{j=1}^{n} P_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right) - p(z) \triangleq \tilde{g}(z)$$

则 $\tilde{g}(z) \in H(\mathbb{C}^*)$，故 $g(z) = c$.

$$\Rightarrow \quad f(z) = \sum_{j=1}^{n} P\left(\frac{1}{z-b_j}\right) + g(z)$$

思考：若 f 在 $\mathbb{C}^*$ 上以 ∞ 为 n 阶极点，a 和 b 分别是 m 阶和 l 阶极点，除此之外 f 解析，f 的一般形式是？

注：① 若 Thm 5.4 中，∞ 是 f 的本性奇点，则有

$$f(z)=\sum_{j=1}^{n}P_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right)+g(z).$$

这里 $g(z)$ 是超越整函数（即为非多项式的整函数）

问题：若 f 在 $\mathbb{C}$ 上亚纯且有无穷多个极点：$b_1, b_2, \cdots$，则有

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$，是否有

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\infty}P_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right) \quad ?$$

Thm 5.5 (Mittag-Leffler) 设 f 是 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数，$\{b_j\}$ 为其极点

且 $\lim\limits_{j\to\infty} b_j=\infty$（不妨设 $|b_j|\nearrow$），$P_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right)$ 为 f 在 b_j 处的奇异

部分，则有

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(P_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right)-Q_j(z)\right)+g(z)$$

这里 $Q_j(z)$ 为多项式，$g(z)\in H(\mathbb{C})$.

证．不妨设 $b_j\neq 0$（若 0 为 f 的极点，考虑 $f-P(\frac{1}{z})$，这里

$P(\frac{1}{z})$ 为 f 在 0 处的奇异部分）．

取正数列 $\{\varepsilon_j\}$ s.t. $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j<+\infty$．对 b_j，$P_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right)$ 在 $|z$

内解析. 则有

$$P_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots, \quad |z|<|b_j|.$$

且上述级数在 $|z|\le \frac{1}{2}|b_j|$ 上一致收敛. 即 $\exists\, n_j\in\mathbb{N}$, s.t.

$$\left|P_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right) - (a_0+a_1z+\cdots+a_{n_j}z^{n_j})\right| < \varepsilon_j.$$

记 $Q_j(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n_j}z^{n_j}$. 即有

$$\left|P_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right) - Q_j(z)\right|<\varepsilon_j, \quad |z|\le\frac{1}{2}|b_j|.$$

对 $\forall$ 固定的正实数 R. $\exists\, N\in\mathbb{N}$. s.t. 当 $j>N$ 时. $|b_j|>2R$; 当

时. $|b_j|\le 2R$. 则当 $j>N$ 时. 对 $\forall\, |z|\le R$ (此时有, $|z|\le$

$<\frac{1}{2}|b_j|$. 均有

$$\left|P_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right) - Q_j(z)\right|<\varepsilon_j.$$

由 $\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j$ 收敛. 故 $\sum_{j=N+1}^{\infty}\left(P_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right)-Q_j(z)\right)$ 在 $|z|\le R$ 时一致收敛. 而

对 $|b_j|>2R$, $P_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right)-Q_j(z)$ 在 $|z|\le R$ 内解析. 由 Thm 5.1.

$\sum_{j=N+1}^{\infty}\left(P_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right)-Q_j(z)\right)$ 在 $|z|\le R$ 内解析. 从而 $\sum_{j=1}^{\infty}\left(P_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right)-Q_j(z)\right)$ 在

$|z|\le R$ 内除了 $b_1,\dots,b_N$ 外解析. 由 R 的任意性, $\sum_{j=1}^{\infty}\left(P_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right)-Q_j(z)\right)$

在 $\mathbb{C}$ 上除 b_j $(j=1,\dots)$ 外解析. (事实上, $\sum_{j=1}^{\infty}\left(P_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right)-Q_j(z)\right)$ 在 $\mathbb{C}$

上内闭一致收敛).

记 $g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{\infty}\left(P_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right) - Q_j(z)\right)$，则 b_j 为 $g(z)$ 的可

若定义 $g(b_j) = \lim_{z\to b_j}\left(f(z) - \sum_{j=1}^{\infty}\left(P_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right) - Q_j(z)\right)\right)$，则 $g\in H(\mathbb{C})$.

故有
$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(P_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right) - Q_j(z)\right) + g(z).$$

例 求 (1) $\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}$；(2) $\pi\cot\pi z$；(3) $\frac{\pi}{\sin\pi z}$ 的部分分式展开.

解 (1) $z = n\in\mathbb{Z}$ 为 $\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}$ 的二阶极点.（∵ $z=n$ 为 $\sin^2\pi z$ 的

二阶零点）.

$z=0$ 时. $\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}$ 的奇异部分为 $\frac{1}{z^2}$.

$$\left(\sin^2\pi z = \left(\pi z - \frac{(\pi z)^3}{3!} + \cdots\right)^2 = \pi^2 z^2\left(1 - \frac{(\pi z)^2}{3!} + \cdots\right)^2\right.$$

$$\left.\Rightarrow \frac{\pi^2}{\sin^2\pi z} = \frac{1}{z^2}\,\frac{1}{\underbrace{\left(1-\frac{(\pi z)^2}{3!}+\cdots\right)^2}_{=\,1+a_1 z + a_2 z^2 + \cdots}} = \frac{1}{z^2} + \cdots\right)$$

又当 $z=n$ 时. $\sin^2\pi(z-n) = \sin^2\pi z \Rightarrow \frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}$ 在 $z=n$ 处的奇异部分为

考虑 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}$. 当 $z\neq n$，$\frac{1}{(z-n)^2}\sim\frac{1}{n^2}$，$n\to\infty$. 故

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}$ 在 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ 上内闭一致收敛. 由 Thm5.5 有

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2} + g(z).$$

下证：$g(z)=0$，$\forall z\in\mathbb{C}$.

证 首先 $\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}$ 和 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}$ 都是以 1 为周期，故 $g(z)$ 以 1 为周期.

设 $z=x+iy$，有

$$|\sin\pi z|^2=\left(\frac{e^{\pi y}+e^{-\pi y}}{2}\right)^2-\cos^2\pi x \quad (P_{35}.\ 习题 4)$$

则 $|y|\to\infty$，$|\sin\pi z|^2\to+\infty$（关于 x 一致）$\Rightarrow \frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}\to 0$.

又 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-n+iy)^2}$ 当 $|y|\to+\infty$ 关于 x 一致趋于 0. 故 $g(z)$ 当 $|y|\to\infty$ 时一致趋于 0. 从而 $g(z)$ 在 $\{z=x+iy:\ 0\le x\le 1,\ y\in\mathbb{R}\}$ 上有界. 由周期性，$g(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有界. 而 $g\in H(\mathbb{C})$. 由 Liouville 定理，$g(z)$ 为常数. 由 $\lim_{y\to\infty} g(z)=0 \Rightarrow g(z)\equiv 0$，$\forall z\in\mathbb{C}$. 综上，有

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}.$$

(2) $\pi\cot\pi z=\pi\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}$ 的极点为 $n\in\mathbb{Z}$. 且在 $z=n$ 处的奇异部分为

由 Thm 5.5，$\pi\cot\pi z$ 可以展开为 $\sum_n \frac{1}{z-n}$ 的形式.

考虑 $\frac{1}{z}+\sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$.

它的部分和在 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ 上内闭一致收敛. 记其和函数为 $f(z)$. 则 f 在 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$

解析. 易有

$$f'(z)=-\frac{1}{z^2}+\sum_{n\neq 0}-\frac{1}{(z-n)^2}=-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}$$

由 $(\pi\cot\pi z)'=-\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}$，故有

$$\pi\cot\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}.$$

$$\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}=\frac{2z}{z^2-n^2}\right)$$

(3) 显然，$\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2}$ 收敛. 即

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=-m}^{+m}\frac{(-1)^n}{z-n}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2}$$

而 $$\sum_{n=-(2k+1)}^{2k+1}\frac{(-1)^n}{z-n}=\sum_{n=-k}^{k}\frac{1}{z-2n}-\sum_{n=-k-1}^{k}\frac{1}{z-2n-1}$$

由(2)，有

$$\lim_{k\to+\infty}\sum_{n=-k}^{k}\frac{1}{z-2n}=\frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi z}{2}$$

(所求函数以且仅以 $2n$ 为极点，且在 $z=2n$ 处的主要部分为 $\frac{1}{z-2n}$)

同理，有 $$\lim_{k\to+\infty}\sum_{n=-k-1}^{k}\frac{1}{z-2n-1}=\frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi(z-1)}{2}$$

故有 $$\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=-m}^{+m}(-1)^n\frac{1}{z-n}=\frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi z}{2}-\frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi(z-1)}{2}=\frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

二、无穷乘积.

Def 5.1 (1) $p_n \in \mathbb{C}$，称 $p_1 \cdots p_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 为一个无穷乘积.

(2) 记 $T_n = p_1 \cdots p_n$，若 $\lim_{n\to\infty} T_n$ 收敛且极限不为0，称 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收

Thm 5.6 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_n = 1$.

注 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n \triangleq \prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ 则 $\lim_{n\to\infty} p_n = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Thm 5.7 $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ $(1+a_n \neq 0)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n)$ 同敛散，这里

$\log(1+a_n)$ 取对数函数的主值.

Def 5.2 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛是指 $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n)$ 绝对收敛.

Thm 5.8 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛 $\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，即 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_n|$ 收

$\sum_{n=1}^{\infty} |\log(1+a_n)|$ 收敛 $\Longleftarrow$ $\lim_{n\to\infty} \frac{|\log(1+a_n)|}{|a_n|}$

三. 典型乘积

2023. 4.

Prop 5.1 设 $f \in H(\mathbb{C})$ 且 $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, 则 $\exists\, g \in H(\mathbb{C})$ s.t. $f(z) = e^{g(z)}$.

证. $\left.\begin{array}{l} f' \in H(\mathbb{C}) \\ f \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{f'}{f} \in H(\mathbb{C})$ 则 $\exists\, \varphi(z)$ s.t.

$$\varphi'(z) = f'(z) / f(z)$$

定义 $\psi(z) := e^{-\varphi(z)} f(z)$. 则 $\psi \in H(\mathbb{C})$. 且

$$\psi'(z) = f'(z) e^{-\varphi(z)} - e^{-\varphi(z)} f(z) \cdot \varphi'(z) = 0, \ \forall z \in \mathbb{C}$$

$\Rightarrow \psi(z) = c \neq 0$

$\Rightarrow f(z) = \psi(z) e^{-\varphi(z)} = c\, e^{-\varphi(z)} \triangleq e^{g(z)}, \quad g \in H(\mathbb{C})$.

Cor 5.1 设 $f \in H(\mathbb{C})$. 0 是 f 的 m 阶零点. 此外 $a_1, \cdots, a_n$ 为其他零点(全含

则有

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{a_j}\right)$$

证. 令 $p(z) = z^m (a_1 - z) \cdots (a_n - z)$

$$= z^m \underline{a_1 \cdots a_n} \left(1 - \frac{z}{a_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

$$= A z^m \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{a_j}\right)$$

考虑 $f(z)/p(z) \triangleq h(z)$. 则 $h \in H(\mathbb{C})$ 且 $h(z) \neq 0$. 故由 prop5.1

$f(z)/p(z) = e^{\tilde{g}(z)}$. $\tilde{g} \in H(\mathbb{C}) \Rightarrow f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{a_j}\right)$.

Thm 5.8 (Weierstrass) 设 $f \in H(\mathbb{C})$. 零点为 $\underbrace{0, \cdots, 0}_{m个}$, $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$. (不妨设 $|a_n| \uparrow$). 则有

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \cdot e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}}$$

其中 $g \in H(\mathbb{C})$, $\{m_n\}$ 是一自然数列.

证. 由 $\lim\limits_{n} a_n = \infty$, 对任意的 $R>0$, $\exists N$, 当 $n>N$ 时, 有 $|a_n| > R$

当 $n \le N$ 时, $|a_n| \le R$. 当 $|z| \le R$ 时, 有

$$\log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) = -\frac{z}{a_n} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 - \cdots - \frac{1}{n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n - \cdots$$

取 $P_n(z) = \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}$. 记

$$r_n(z) = \log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + P_n(z) = -\frac{1}{m_n+1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n+1} - \frac{1}{m_n+2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n+2} - \cdots$$

$$\Rightarrow |r_n(z)| \le \frac{1}{m_n+1}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{m_n+1} + \frac{1}{m_n+2}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{m_n+2} + \cdots$$

$$\le \frac{1}{m_n+1}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{m_n+1}\left(1 + \left|\frac{z}{a_n}\right| + \cdots + \left|\frac{z}{a_n}\right|^k + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{m_n+1}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{m_n+1} \frac{1}{1 - \left|\frac{z}{a_n}\right|} \qquad \left(\begin{array}{c} n>N \\ |z| \le R \end{array}\right)$$

$$\le \frac{1}{m_n+1}\left|\frac{R}{a_n}\right|^{m_n+1} \cdot \frac{1}{1 - \left|\frac{R}{a_{N+1}}\right|}.$$

对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n+1}\left|\frac{x}{a_n}\right|^{m_n+1}$, 易知其收敛半径为 $+\infty$. 即对 $\forall R>0$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n+1}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{m_n+1}$ 收敛. $\Rightarrow$ $\sum_{n=N+1}^{\infty} r_n(z)$ 在 $|z|\le R$ 内一致收敛.

$\Rightarrow$ $\prod_{n=N+1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{P_n(z)}$ 在 $|z|\le R$ 内一致收敛.

$\Rightarrow$ $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{P_n(z)}$ 在 $|z|\le R$ 内解析. 且以 $a_1,\cdots,a_N$ 为其零点.

由 R 的任意性. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{P_n(z)}$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析. 以 $a_1,\cdots,a_n,\cdots$ 为零

考虑. $f(z)\Big/ z^m\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{P_n(z)} \triangleq h(z)$. 则 $h\in H(\mathbb{C})$ 且

$h(z)\neq 0$. $\forall z\in\mathbb{C}$. 由 Cor. 5.1, 有

$$f(z) = z^m e^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{P_n(z)}.$$

例 求 $\sin\pi z$ 的闭式分解.

解. $z=n\in\mathbb{Z}$ 为零点. 则由 Thm 5.8. 有

$$\sin\pi z = z e^{g(z)}\prod_{n\neq 0}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}$$

$\log\left(1-\frac{z}{n}\right)+\frac{z}{n}$

两边取对数再求导. 有

$$\pi\cot\pi z = \frac{1}{z} + g'(z) + \sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$$

由上节结果. $\pi\cot\pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow$ $g'(z)=0$. $\forall z\in\mathbb{C}$. $\Rightarrow$ $g(z)$ 为常数.

$$\pi = \lim_{z\to 0} \frac{\sin \pi z}{z} = \lim_{z\to 0} e^{g(z)} \prod_{n\neq 0} \left(1-\frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} = e^{g(0)}$$

$$\Rightarrow \quad \sin \pi z = \pi z \cdot \prod_{n\neq 0}^{\infty} \left(1-\frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}$$

$$= \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Cor. 5.2 $\mathbb{C}$上的亚纯函数必是两个整函数之商.

证. 设 $F(z)$ 在 $\mathbb{C}$上亚纯. 则 $\exists$ 整函数 $g(z)$. s.t. $g(z)$ 以 $F(z)$ 的极点为零点. 则 $F(z)\cdot g(z) = f(z) \in H(\mathbb{C})$. 故有

$$F(z) = f(z)/g(z).$$

期末考试说明:

1. 考试时间地点: 2023.5.6上午 10:15—12:15.
   33教113

2. 总成绩 = 平时成绩20% + 期末成绩80%.

3. 答疑:
   5.3晚上 7:00—8:00 线上.
   5.5 上课时间. 33—112.

4. 其他.