第一周作业

1. 计算各数的值

① $(1+2i)^3=(1+2i)^2\cdot(1+2i)=(1-4+4i)(1+2i)=(-3+4i)(1+2i)=-3-8+4i-6i=-11-2i$

② $\dfrac{5}{-3+4i}=\dfrac{5(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}=\dfrac{-15-20i}{9+16}=-\dfrac{3+4i}{5}$

③ $\left(\dfrac{2+i}{3-2i}\right)^2=\dfrac{(2+i)^2}{(3-2i)^2}=\dfrac{4-1+4i}{9-4-12i}=\dfrac{3+4i}{5-12i}=\dfrac{(3+4i)(5+12i)}{(5-12i)(5+12i)}=\dfrac{15-48+36i+20i}{25+144}=\dfrac{-33+5}{196}$

②

④ $(1+i)^n+(1-i)^n=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^n+\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^n=\sqrt{2}^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)+\sqrt{2}^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\right.$

先变形式

$=2(\sqrt{2}^n)\cos\frac{n\pi}{4}$

③

$$\begin{cases} z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) \\ z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \end{cases}$$

提示：① $i^2=-1$ ② 化简后分母无 i

④ $\begin{cases} (a+bi)^2=a^2-b^2+2abi \\ |a+bi|^2=(a+bi)(\overline{a+bi})=(a+bi)(a-bi)= \end{cases}$

2、若 $z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ 求下列实部虚部

① $z^4=(x^2-y^2+2xyi)^2=\underbrace{(x^2-y^2)^2-4x^2y^2}_{Re}+\underbrace{2(2xy(x^2-y^2))}_{Im}i$

② $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+iy}=\dfrac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}=\underbrace{\dfrac{x}{x^2+y^2}}_{Re}\underbrace{-\dfrac{y}{x^2+y^2}}_{Im}i$ $\quad(x^2+y^2\neq0)$

③ $\dfrac{z-1}{z+1}=\dfrac{x+iy-1}{x+iy+1}=\dfrac{(x-1+iy)(x+1-iy)}{(x+1+iy)(x+1-iy)}=\dfrac{(x^2-1)+y^2+((x+1)y-(x-1)y)i}{(x+1)^2+y^2}$

$=\underbrace{\dfrac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}}_{Re}+\underbrace{\dfrac{2y}{(x+1)^2+y^2}}_{Im}i$ $\quad((x+1)^2+y^2\neq0)$

④ $\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{1}{(x+iy)^2}=\dfrac{1}{x^2-y^2+2ixy}=\dfrac{x^2-y^2-2xyi}{(x^2-y^2+2xyi)(x^2-y^2-2xyi)}=\underbrace{\dfrac{x^2-y^2}{x^2-y^2+4x^2y^2}}_{Re}-\underbrace{\dfrac{2xy}{x^2-y^2+4x^2y^2}}_{Im.}i$

提示：$\mathrm{Im}\,z$ 注意带着负号

(计算)

3. 证明 $\left(\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)^3=1$ 和 $\left(\frac{\pm1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)^6=1$ 其中符号可任意组合.

pf: $w_1=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^3=\cos2\pi+i\sin2\pi=1$

$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6=w_1^2=1$

$w_2=\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^3=\cos4\pi+i\sin4\pi=1$

$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6=w_2^2=1$

$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6=\left(-\cdot\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6=1$

$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6=\left(-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6=1$ □

1. 计算 $\sqrt[4]{i}$ 和 $\sqrt[4]{-i}$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ $k=0,\cdots,n-1$

$\sqrt[4]{i}=\sqrt[4]{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=\sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}\right)$

$=\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)$ $k=0,1,2,3$

$\sqrt[4]{-i}=\sqrt[4]{\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}}=\sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4}\right)$

$=\cos\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)$ $k=0,1,2,3$ □

4. 解二次方程 $z^2+(\alpha+i\beta)z+\gamma+i\delta=0$ 复数域上任意二次方程都有解.

解: 由求根公式

$$z = \frac{-(\alpha+i\beta) \pm \sqrt{(\alpha+i\beta)^2-4(\gamma+i\beta)}}{2} \qquad \square$$

证明形如 $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}$ 的所有矩阵用矩阵加法和矩阵乘法组合成体系 $\cong \mathbb{C}$

pf: 构造同构映射 φ:　　注: 构造 ψ: $\alpha+\beta i \in \mathbb{C} \longmapsto M=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ -\beta & \alpha\end{pmatrix} \middle| \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}\right.$

$$\varphi: M=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ -\beta & \alpha\end{pmatrix} \middle| \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\} \longmapsto \alpha+\beta i \in \mathbb{C}$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}m & n \\ -n & m\end{pmatrix}\right)=\varphi\begin{pmatrix}\alpha+m & n+\beta \\ -n-\beta & \alpha+m\end{pmatrix}=(\alpha+m)+(n+\beta)i=(\alpha+\beta i)+(m$$

$$=\varphi\left(\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}\right)+\varphi\left(\begin{pmatrix}m & n \\ -n & m\end{pmatrix}\right)$$　保持加法

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m & n \\ -n & m\end{pmatrix}\right)=\varphi\begin{pmatrix}\alpha m-\beta n & \alpha n+\beta m \\ -(\alpha n+\beta m) & \alpha m-\beta n\end{pmatrix}=(\alpha m-\beta n)+i(\alpha n+\beta m)$$

$$=(\alpha+\beta i)(m+ni)=\varphi\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix}m & n \\ -n & m\end{pmatrix}.$$　保持乘法

$$\varphi\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=1$$

$\varphi\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}=\varphi\begin{pmatrix}m & n \\ -n & m\end{pmatrix}=a+bi$ 有 $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m & n \\ -n & m\end{pmatrix}$ 则 φ 为单射

$\forall\ \alpha+i\beta\in\mathbb{C}$ $\exists \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}\in M$ s.t. $\varphi\left(\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}\right)=\alpha+i\beta$ 则 φ 为

故 φ 为双射. 故 φ 为同构映射 $\square$

设 f 是群 G 到群 G'（不必异于G）的映射，若 f 保持运算，即对所有的$x,y\in G$，总有 f(xy)=f(x)f(y)（或$(xy)^f=x^f\bullet y^f$），则称 f 是群 G 到群 G' 的同态映射，简称同态，若同态映射 f 还是一个双射，则称 f 为 G 到 G' 的同构映射，记为$G\cong G'$。这时称群 G 和 G'同构，记为$G\cong G'$。

特别地，若$G\cong G'$时，则分别称 f 为群 G 的自同态和自同构。[1]

3. 若 $|a|=1$ 或 $|b|=1$ 证明 $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|=1$ 若 $|a|=|b|=1$ 则上式成立的
条件？

pf: 设 $|a|=1$ 则 $a\bar{a}=|a|^2=1$

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = \frac{|a-b|}{|a|\cdot|(1-\bar{a}b)|} = \frac{|a-b|}{|a(1-\bar{a}b)|} = \frac{|a-b|}{|a-a\bar{a}b|} = \frac{|a-b|}{|a-b|} = 1$$

设 $|b|=1$ 则 $b\bar{b}=|b|^2=1$，$|\bar{b}|=1$

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = \frac{|a-b|}{|\bar{b}|\cdot|1-\bar{a}b|} = \frac{|a-b|}{|\bar{b}(1-\bar{a}b)|} = \frac{|a-b|}{|\bar{b}-\bar{a}(b\bar{b})|} = \frac{|a-b|}{|\bar{a}-\bar{b}|} = 1$$

$a=e^{i\theta}$ $\bar{a}=e^{-i\theta}$
$b=e^{i\varphi}$ $\bar{a}b=e^{i(\varphi-$

若 $|a|=|b|=1$ 则使分母不为0，必须有 $a\neq b$. □

4. 在什么条件下一个复未知量的方程 $az+b\bar{z}+c=0$ 只有一个解？并求出这个解

pf 取上式共轭得到方程组

$$\begin{cases} az+b\bar{z}+c=0 \\ \bar{b}z+\bar{a}\bar{z}+\bar{c}=0 \end{cases}$$ 即此方程组只有一个解.

2个未知量2个方程的非齐次线性方程组的求解 Cramer 法则.

唯一解 → $D=\begin{vmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{vmatrix} = |a|^2-|b|^2 \neq 0$ 即条件: $|a|\neq|b|$

$$z=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -\bar{c} & \bar{a} \end{vmatrix}}{|a|^2-|b|^2}=\frac{-c\bar{a}+b\bar{c}}{|a|^2-|b|^2}$$

$$\left(\bar{z}=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a & -c \\ \bar{b} & -\bar{c} \end{vmatrix}}{|a|^2-|b|^2}=\frac{-a\bar{c}+c\bar{b}}{|a|^2-|b|^2}\right)$$

注① $\dfrac{z}{z}$ $\dfrac{\bar{z}}{\bar{z}}$ 对应.

$(m\leq$

$A_{m\times n}$：m个方程，n个
$\bar{A}$
① 唯一解 $r(A)=r(\bar{A})=$
② 无穷多个解 $r(A)=r(\bar{A})$
③ 无解 $r(A)\neq r(\bar{A})$.

$A_{n\times n}$.
$D\neq0$. 有解
$D=0$ 无解.

5. 证明复形式拉格朗日恒等式 $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 = \sum_{i=1}^{n}|a_i|^2 \sum_{i=1}^{n}|b_i|^2 - \sum_{1\le i<j\le n} |a_i\overline{b_j} - a_j\overline{b_i}|^2$

左排
右排
错项

pf: $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)\cdot\left(\overline{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{a_i}\,\overline{b_i}\right)$

$= \sum_{i=1}^{n}|a_i|^2|b_i|^2 + \sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i b_i \overline{a_j}\,\overline{b_j} + a_j b_j \overline{a_i}\,\overline{b_i}\right)$

$= \sum_{i=1}^{n}|a_i|^2|b_i|^2 + \sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i b_j \overline{a_i}\,\overline{b_j} + a_j b_i \overline{a_j}\,\overline{b_i}\right) + \sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i b_i \overline{a_j}\,\overline{b_j} + a_j b_j \overline{a_i}\,\overline{b_i} - a_i b_j \overline{a_i}\,\overline{b_j} - a_j b_i \right.$

凑　　　　减.

$= \sum_{i=1}^{n}|a_i|^2|b_i|^2 + \sum_{1\le i<j\le n}\left(|a_i|^2|b_j|^2 + |a_j|^2|b_i|^2\right) - \sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i\overline{b_j} - a_j\overline{b_i}\right)\left(b_j\overline{a_i} - b_i\overline{a_j}\right.$

$= \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^2\right) - \sum_{1\le i<j\le n}|a_i\overline{b_j} - a_j\overline{b_i}|^2$. □

1. 证明 $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1$ 如果 $|a|<1$ $|b|<1$.

pf: 即 $|a-b|^2 < |1-\bar{a}b|^2$

$(a-b)(\bar{a}-\bar{b}) < (1-\bar{a}b)(1-a\bar{b})$

$a\bar{a} - a\bar{b} - b\bar{a} + b\bar{b} < 1 - a\bar{b} - \bar{a}b + a\bar{a}b\bar{b}$

$(a\bar{a}-1)(b\bar{b}-1) > 0$，其中 $a\bar{a}<1$ $b\bar{b}<1$ □

3. 如果 $|a_i|<1$ $\lambda_i \geq 0$ $(i=1,\cdots,n)$ 且 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$ 证明

$|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n| < 1$.

pf: 由三角不等式 $|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n| \le \lambda_1|a_1| + \lambda_2|a_2| + \cdots + \lambda_n|a_n|$

$\le (\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\max\{a_i\} < 1$. □

4 证明：复数 z 满足 $|z-a|+|z+a|=2|c|$ 当且仅当 $|a|\le|c|$. 如果这个条件成

那么 $|z|$ 的最小值和最大值分别是什么？

pf: 设 $z=x+yi$，$|z-a|+|z+a| = \sqrt{(x-a+yi)(x-a-yi)} + \sqrt{(x+a+yi)(x+a+yi)}$

$= \sqrt{(x-a)^2+y^2} + \sqrt{(x+a)^2+y^2}$

由复数在 $\mathbb{R}^2$ 上的坐标表示，$|z-a|+|z+a|=2|c|$ 即 (x,y) 到 $(|a|,0)$ 和 $(-|a|,0)$ 的距离之和

不妨以 $\pm a$ 为 x 轴建立 $\mathbb{R}^2$ 坐标系

若 (x,y) 在 x 轴上且横坐标在 $(-|a|,|a|)$ 间 即 (x,y) 在以 $(\pm|a|,0)$ 为端点的线段上. 此时 $2|c|=2|a| \to$

若 (x,y) 在 x 轴上但不在上述线段上, 则 $|2c|>|2a| \to |c|>|a|$

若 (x,y) 不在 x 轴上 则由三角形三边关系 $|2c|>|2a|$, $c>a$, 综上 $|z-a|+|z+a|=2|c|$

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ 即与原点 $(0,0)$ 的距离.

$|a|<|c|$ 时, (x,y) 的轨迹为以 $(-|a|,0)$ $(|a|,0)$ 为焦点, 长轴长度为 $2|c|$ 的椭圆.

在椭圆轨迹上, $|z|_{max}=|c|$ 即半长轴长度. $|z|_{min}=\sqrt{c^2-a^2}$ (>0) 即半短轴长度

$|a|=|c|$ 时. (x,y) 轨迹为以 $(\pm|a|,0)$ 为端点所连接的直线段.

此时 $|z|_{max}=|a|$ $|z|_{min}=0$ 在 $(0,0)$ 上. □

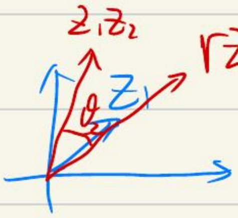
2. 证明点 a_1 a_2 a_3 当且仅当 $a_1^2+a_2^2+a_3^2=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$ 时为

三角形的三个顶点、

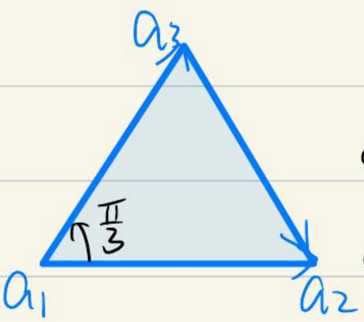
pf: 乘法的几何意义: 平移旋转

$re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

$z_1z_2=z_1\cdot(r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2))$



旋转 $e^{i\theta_2}$ (逆)



$a_1a_2a_3$ 是正三角形的三个顶点、

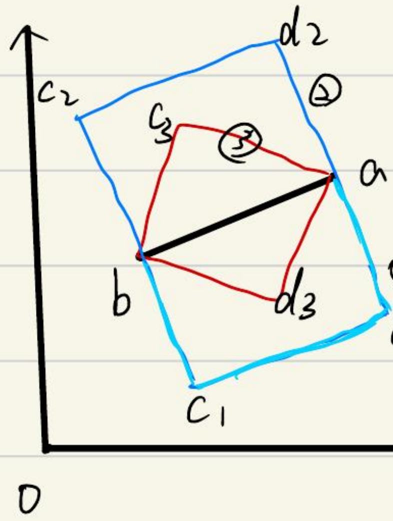
$\Leftrightarrow a_3-a_1=(a_2-a_1)e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$ ← 包含2个信息 $\begin{cases}\text{夹角}60^\circ\\ |a_1a_3|=|a_1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \frac{a_3-a_1}{a_2-a_1}=e^{\pm\frac{\pi}{3}i} \Leftrightarrow a_1^2+a_2^2+a_3^2=a_1a_2+a_2a_3+$

3. 设 a和b 为一个正方形的两个顶点，求所有可能情形下的另外

顶点

考察 $\mathbb{R}^2$ 上复数的坐标表示



解：共有3种情形

① $c_1 = b + (a-b)e^{-\frac{\pi}{2}i} = b+(b-a)i$

$d_1 = a + (b-a)e^{\frac{\pi}{2}i} = a+(b-a)i$

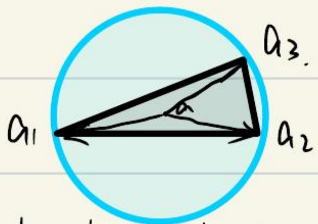
② $c_2 = b + (a-b)e^{\frac{\pi}{2}i} = b+(a-b)i$

$c_2 = a + (b-a)e^{-\frac{\pi}{2}i} = a+(a-b)i$

③ $c_3 = b + (a-b)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}i$

$d_3 = b + (a-b)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}i} = \frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}i$ □

4. 一个三角形的三顶点分别为 a_1 a_2 a_3 求其外接圆的圆心和半径 **结果写成对称形**



$|a-a_1| = |a-a_2| = |a-a_3|$

$$\Rightarrow a = \frac{\overline{a_1}(|a_3|^2-|a_2|^2)+\overline{a_2}(|a_1|^2-|a_3|^2)+\overline{a_3}(|a_2|^2-|a_1|^2)}{a_2\overline{a_3}+a_1\overline{a_2}+a_3\overline{a_1}-a_3\overline{a_2}-a_2\overline{a_1}-a_1\overline{a_3}}$$

$$r = \left|\frac{|c_3-a_2|\cdot|a_2-a_1||a_1-a_3|}{a_2\overline{a_3}+a_1\overline{a_2}+a_3\overline{a_1}-a_3\overline{a_2}-a_2\overline{a_1}-a_1\overline{a_3}}\right| \quad □$$

P_{13} 2. 简化 $1+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cdots+\cos n\varphi$ 和 $\sin\varphi+\sin 2\varphi+\cdots+\sin n\varphi$

解：设 $z=e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ $\qquad$ $\cos\theta,\sin\theta \Rightarrow e^{i\theta}$ 表示.

则 $\sum_{k=0}^{n}\cos k\varphi=\mathrm{Re}(1+z+z^2+\cdots+z^n)$

$$=\mathrm{Re}\,\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

$$=\mathrm{Re}\,\frac{1-\cos(n+1)\varphi-i\sin(n+1)\varphi}{1-\cos\varphi-i\sin\varphi}=\mathrm{Re}\,\frac{(1-\cos(n+1)\varphi-i\sin(n+1)\varphi)(1-\cos\varphi+i\sin\varphi)}{(1-\cos\varphi-i\sin\varphi)(1-\cos\varphi+i\sin\varphi)}$$

$$=\frac{1-\cos\varphi-\cos(n+1)\varphi+\cos n\varphi}{2-2\cos\varphi}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\varphi=\mathrm{Im}\,\frac{1-z^{n+1}}{1-z}=\frac{\sin\varphi-\sin(n+1)\varphi+\sin n\varphi}{2-2\cos\varphi}$$ $\square$

4. 如果 w 由 $w=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ 给定，证明对任意不是 n 的整倍数 h 有

$1+w^h+w^{2h}+\cdots+w^{(n-1)h}=0$

pf: $w=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}=e^{\frac{2\pi}{n}i}$

$$\text{左式}=\frac{1-w^{nh}}{1-w^h}=\frac{1-e^{2\pi i}}{1-w^h}=0$$ $\square$ （h不是n的整倍数保证了

5. 求 $1-w^h+w^{2h}-\cdots+(-1)^{n-1}w^{(n-1)h}$ 的值，$w=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$

解：
$$\text{左式}=\frac{1-(-w^h)^n}{1-(-w^h)}=\frac{1-(-1)^n w^{hn}}{1+w^h}=\frac{1-(-1)^n}{1+w^h}=\begin{cases}\frac{2}{1+w^h} & n=2k+1\\ 0 & n=2k.\end{cases}$$

2. 写出椭圆 双曲线 抛物线 的复形式方程.

解:

椭圆 $|z-a_1|+|z-a_2|=2|a|$ $\quad (2|a|>|a_1-a_2|)$

双曲线 $\big||z-a_1|-|z-a_2|\big|=2|a|$ $\quad (|a_1-a_2|>2|a|)$

抛物线 $y^2=2px \Rightarrow \left(\frac{z-\bar z}{2i}\right)^2 = 2p\,\frac{z+\bar z}{2}$ 以x,y轴为对称轴

$$\Rightarrow (z-\bar z)^2 = -4p(z+\bar z)$$

$$x^2=2py \Rightarrow (z+\bar z)^2 = -4p(z-\bar z)i$$

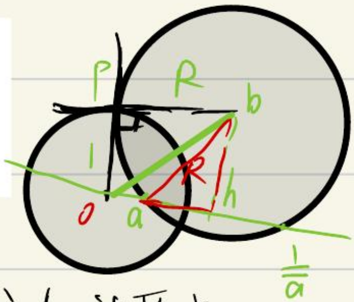
5. 证明: 过a和$\frac{1}{\bar a}$的所有圆都与圆$|z|=1$正交

pf:

正交圆

两个交角为直角的圆

正交圆是指两圆相交，过其中一交点分别作两圆的切线，两切线夹角（圆的交角）为直角，即两个交角为直角的圆称为正交圆，可以说一圆与另一圆正交。

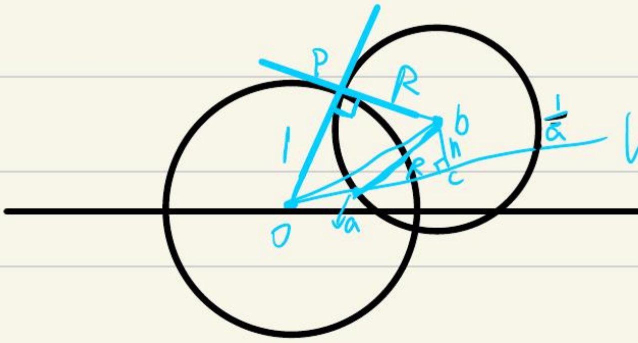


设 $a=x+iy \neq 0$

$\frac{1}{\bar a} = \frac{1}{\frac{|a|^2}{a}} = \frac{a}{|a|^2}$ 即 a 与 $\frac{1}{\bar a}$ 两点连成的直线 l 过原点.

设任意过a和$\frac{1}{\bar a}$的圆的圆心b, 半径为R, 与$|z|=1$的交点为p. b到直线l的距离

若证圆b与圆 $|z|=1$ 正交，只需证 $op\perp pb$. 由勾股定理.



$$R^2=h^2+\left(\frac{|a|-\frac{1}{|a|}}{2}\right)^2$$

$$ob^2=h^2+oc^2=h^2+\left(|a|+\frac{\frac{1}{|a|}-|a|}{2}\right)^2$$

$$=h^2+\frac{1}{4}\left(|a|+\left|\frac{1}{a}\right|\right)^2$$

$op^2=1$，$bp^2=R^2$

则 $op^2+bp^2=1+R^2=1+h^2+\frac{1}{4}\left(|a|-\frac{1}{|a|}\right)^2$

$$=h^2+\frac{1}{4}\left(|a|+\left|\frac{1}{a}\right|\right)^2=ob^2 \quad \square$$

1. 证明 z 和 z' 对应于黎曼球面上一个直径的两端点，当且仅当 $z\overline{z'}=-1$

pf:

z 和 z' 对应于黎曼球面上一个直径的两端点

$\Leftrightarrow d(z,z')=2$

$\Leftrightarrow \frac{2|z-z'|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}}=2$ → 公式书 P15 (28)

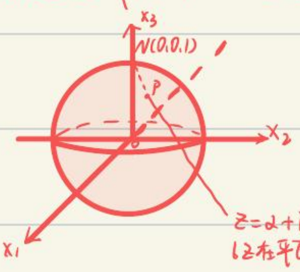
$$d(z,z')=\frac{2|z-z'|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}}.$$

$\Leftrightarrow |z-z'|^2=(1+|z|^2)(1+|z'|^2)$

$\Leftrightarrow (z\overline{z'}+1)(\overline{z'}\bar{z}+1)=0$

$\Leftrightarrow z\overline{z'}=-1 \quad \square$

$p(x_1,x_2,x_3)\in S^2\setminus\{N\}\leftrightarrow z\in$



由于 $N(0,0,1)$，$p(x_1,x_2,x_3)$，$z(\alpha,\beta,0)$ 共线

$\Rightarrow \frac{x_1}{\alpha}=\frac{x_2}{\beta}=\frac{x_3-1}{-1}$ $\quad \frac{\vec{NP}}{\vec{NZ}}$

$\Rightarrow \alpha=\frac{x_1}{1-x_3}$ $\quad \beta=\frac{x_2}{1-x_3}$ $\Rightarrow z=\alpha+i\beta=$

反过来 有 $|z|^2=\alpha^2+\beta^2=\frac{x_1^2+x_2^2}{(1-x_3)^2}=\frac{1-x_3^2}{(1-x_3)^2}=$

$\Rightarrow x_1=\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}$

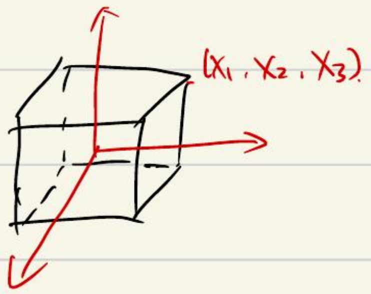
$x_2=\frac{z-\bar{z}}{i(|z|^2+1)}$ (P点坐标)

$=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$

记 $d(z,z')$ 表示 $\mathbb{C}$ 上的 z，z' 在 S^2 上的像在 $\mathbb{R}^3$ 中的

则 $d(z,z')=\frac{2|z-z'|}{\sqrt{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)}}$ 三维空间中两

1. 一个立方体所有的顶点都在球面S上，其各棱平行于坐标轴，求各顶点的球极平面投影



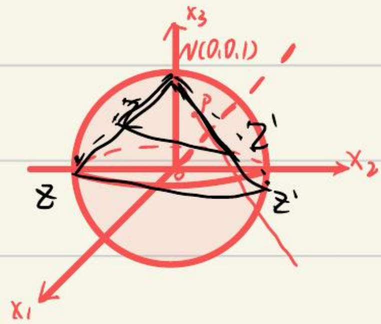
$(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3})$

顶点(x_1, x_2, x_3)的球极投影为 $z = \frac{x_1+ix_2}{1-x_3}$. □

4. Z和Z'的球极平面投影为 z. z', 北极N 证：$\triangle NZz'$ 和 $\triangle NZ'z$ 相似，并导出 $d(z, z$

pf: $Z: \left(\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}, \frac{z-\bar{z}}{i(|z|^2+1)}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$

$Z' = \left(\frac{z'+\bar{z}'}{1+|z'|^2}, \frac{z'-\bar{z}'}{i(|z'|^2+1)}, \frac{|z'|^2-1}{|z'|^2+1}\right)$



$z = \left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2}, 0\right)$

$z' = \left(\frac{z'+\bar{z}'}{2}, \frac{z'-\bar{z}'}{2}, 0\right)$

从而 $NZ^2 = \left(\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{i(|z|^2+1)}\right)^2 + \left(\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)^2$

$NZ'^2 = \left(\frac{z'+\bar{z}'}{1+|z'|^2}\right)^2 + \left(\frac{z'-\bar{z}'}{i(|z'|^2+1)}\right)^2 + \left(\frac{|z'|^2-1}{|z'|^2+1}\right)^2$

$Nz^2 = \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2}\right)^2 + 1^2$

$Nz'^2 = \left(\frac{z'+\bar{z}'}{2}\right)^2 + \left(\frac{z'-\bar{z}'}{2}\right)^2 + 1^2$

得到 $\frac{NZ^2}{Nz'^2} = \frac{NZ'^2}{Nz^2} = \frac{4}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}$ 相似比 $\frac{2}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}}$

故 $\triangle NZz' \sim \triangle NZ'z$

$d(z, z') = \frac{2|z-z'|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}}$ □

7. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|/|a_{n+1}|=R$，证明 $\sum a_n z^n$ 的收敛半径为R.

pf: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||z| = \frac{1}{R}|z|$

当 $\frac{1}{R}|z|<1$，$|z|<R$ 时 $\sum a_n z^n$ 绝对收敛

当 $|z|>R$ 时 $\sum a_n z^n$ 发散 从而收敛半径为 R. □

第三周作业

1. 求 sin i、cos i 和 tan(1+i)的值.

三角函数由下式定义：

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{i}}{}$$

解: $\sin i = \frac{e^{i^2}-e^{-i^2}}{2i} = \frac{e^{-1}-e}{2i} = \frac{i}{2}(e-\frac{1}{e})$

$\cos i = \frac{e^{i^2}+e^{-i^2}}{2} = \frac{e^{-1}+e}{2}$

$\tan(1+i) = \frac{\sin(1+i)}{\cos(1+i)} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})} = \frac{i(e^{1-i}-e^{i-1})}{e^{1-i}+e^{-1+i}}$

3. 用加法公式将 $\cos(x+iy)$、$\sin(x+iy)$分解为实部和虚部.

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos$

$\sin\alpha$

$\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha\ s$

$+\sin\alpha\cos$

解：$\cos(x+iy)=\cos x\cos(iy)-\sin x\sin(iy)$

$$=\cos x\cdot\frac{e^{i^2y}+e^{-i^2y}}{2}-\sin x\frac{e^{i^2y}-e^{-i^2y}}{2i}$$

$$=\frac{1}{2}\cos x\cdot(e^{-y}+e^{y})+\frac{i}{2}\sin x(e^{-y}-e^{y})$$

$\sin(x+iy)=\cos x\sin iy+\sin x\cos iy$

$$=\cos\frac{e^{i^2y}-e^{-i^2y}}{2i}+\sin x\frac{e^{i^2y}+e^{-i^2y}}{2}$$

$$=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}\sin x+i\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\cos x$$

1. 对实的 y，证明在 $\cos y$ 和 $\sin y$ 的级数中，每一个余项具有与首项相同的符号(这推广了证明周期时用到的不等式，见 2.3.3 节).

pf:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots$ 的余项为 $\sum_{k=i}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!}$

① i 为偶数 $\quad \cos y < \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} y^{2k}$

余项 $\frac{y^{2i}}{(2i)!} - \frac{y^{2(i+1)}}{(2i+2)!} + \frac{y^{2(i+2)}}{(2(i+2))!} - \frac{y^{2(i+3)}}{(2(i+3))!} + \cdots$

首项 $\frac{y^{2i}}{(2i)!} > 0$

② i 为奇数 $\quad \cos y > \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} y^{2k}$

余项 $\frac{-y^{2i}}{(2i)!} + \frac{y^{2(i+1)}}{(2(i+1))!} - \frac{y^{2(i+2)}}{(2(i+2))!} + \frac{y^{2(i+3)}}{(2(i+3))!} - \cdots < 0$

首项 $-\frac{y^{2i}}{(2i)!} < 0$

2. 证明 $3<\pi<2\sqrt{3}$.

由 $\sin\pi=0$， $\sin 3>3-\frac{3^3}{3!}+\frac{3^5}{5!}-\frac{3^7}{7!}>0$

$\sin 2\sqrt{3}<2\sqrt{3}-\frac{(2\sqrt{3})^3}{3!}+\frac{(2\sqrt{3})^5}{5!}-\frac{(2\sqrt{3})^7}{7!}+\frac{(2\sqrt{3})^9}{9!}<0$

~~再由~~ $\sin x$ 在 $(3, 2\sqrt{3})\downarrow$

则 $\sin 2\sqrt{3}<\sin\pi<\sin 3$

故 $3<\pi<2\sqrt{3}$.

$e^{iz}=\cos z+i\sin z$ 欧拉公式

3. 对 $z=-\frac{\pi i}{2}$，$\frac{3}{4}\pi i$，$\frac{2}{3}\pi i$，求 e^z 的值.

$z=x+iy$

$e^z=e^x\cdot e^{iy}$

$=e^x\cdot(\cos y$

$i\sin y$

解：$z=-\frac{\pi i}{2}$， $e^z=\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2})=-i$

$z=\frac{3\pi}{4}i$， $e^z=\cos(\frac{3\pi}{4})+i\sin(\frac{3\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z=\frac{2\pi}{3}i$， $e^z=\cos(\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

4. 当 z 分别为何值时，e^z 等于 2，−1，i，−i/2，−1−i，1+2i?

5. 求 $\exp(e^z)$的实部和虚部

方程 $e^{x+iy}=w$ 等价于

$$e^x=|w|,\quad e^{iy}=w/|w|$$

解：$z=x+iy$. $e^z=e^x e^{iy}$

$e^z=2 \Leftrightarrow e^x=2,\ e^{iy}=1 \Leftrightarrow x=\ln 2,\ y=2k\pi \Leftrightarrow z=\ln 2+$

$e^z=-1 \Leftrightarrow e^x=1,\ e^{iy}=-1 \Leftrightarrow x=0,\ y=(2k+1)\pi \Leftrightarrow z=(2k+1)$

$e^z=i \Leftrightarrow e^x=1,\ e^{iy}=i \Leftrightarrow x=0,\ y=(\frac{1}{2}+2k)\pi \Leftrightarrow z=\frac{4k+1}{2}\pi i$

$e^z=-\frac{i}{2} \Leftrightarrow e^x=\frac{1}{2},\ e^{iy}=-i \Leftrightarrow x=-\ln 2,\ y=(\frac{3}{2}+2k)\pi \Leftrightarrow z=-\ln 2+\frac{3+}{2}$

$e^z=-1-i \Leftrightarrow e^x=\sqrt{2},\ e^{iy}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln 2,\ y=(\frac{5}{4}+2k)\pi \Leftrightarrow z=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{5}{}$

$e^z=1+2i \Leftrightarrow e^x=\sqrt{5},\ e^{iy}=\underline{\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}i} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln 5,\ y=\arctan 2+2k\pi \Leftrightarrow$

$\tan\theta=2$ $\qquad z=\frac{1}{2}\ln 5+(\arctan$

$\theta=\arctan 2$

5. 求 $\exp(e^z)$ 的实部和虚部.

令 $z=x+iy$

$e^z=e^x(\cos y+i\sin y)=e^x\cos y+ie^x\sin y$

$\exp\{e^z\}=\exp\{e^x\cos y\}(\cos(e^x\sin y)+i\sin(e^x\sin y))$

$=\underbrace{\exp\{e^x\cos y\}\cos(e^x\sin y)}_{Re}+i\,\underbrace{\exp\{e^x\cos y\}(\sin(e^x\sin y))}_{Im}$

$e^{Re}\cdot\cos Im+ie^{Re}\sin$

4. 如果 X 是一个复数集合，其实部和虚部均为有理数，问 $\mathrm{Int}X$、X^-、∂X 是什么？

$X=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$

令 $z\in X$，考虑 $B(z,\delta)$，$\forall\delta>0$. 取 $w\in\mathbb{C}$，s.t $\mathrm{Im}w=\mathrm{Im}z$，$|\mathrm{Re}w-\mathrm{Re}z|<\delta$

总能找到一个 $w=x+iy\in B(z,\delta)$ 且 $y\in\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. 故 $\mathrm{Int}X=\phi$.

($\forall x\in X$，x 任一邻域均含有无穷多系数不全为有理数的点)

闭包 $X^-=\mathbb{C}$

$\partial X=X^-\setminus \mathrm{Int}X=\mathbb{C}$

(i)集 X 的内部是包含在 X 中的最大开集．它是存在的，因为它可以刻画成所有开集 $\subset X$ 的并．也可以把它说成是以 X 为邻域的所有点组成的集合．记为 $\mathrm{Int}X$.

(ii)X 的闭包是包含 X 的最小闭集，或者所有闭集 $\supset X$ 的交．一个点属于 X 的闭包，当且仅当所有它的邻域都与 X 相交．闭包常记为 X^-，有时记为 $\mathrm{Cl}X$.

(iii)X 的边界是闭包减去内部．一个点属于边界，当且仅当所有它的邻域与 X 和 $\sim X$ 都相交．记为 $\mathrm{Bd}X$ 或 ∂X.

注意 $\mathrm{Int}X\subset X\subset X^-$，如果 $\mathrm{Int}X=X$，则 X 是开的；如果 $X^-=X$，则 X 是闭的．又 $X\subset Y$ 蕴涵着 $\mathrm{Int}X\subset\mathrm{Int}Y$，$X^-\subset Y^-$．为了方便，下面引进孤立点和聚

7. 证明：任一集合的聚点组成一个闭集.

pf: 设集合 X 的聚点集为 X'

$\forall x\in X\setminus X'$　$\exists\delta>0$ s.t $\hat{B}(x,\delta)\cap X=\phi$

$\Rightarrow B(x,\delta)\subset X\setminus X'$　即 x 为 $X\setminus X'$ 的内点

由 x 任意性　$X\setminus X'$ 为开集 $\Rightarrow$ X' 为闭集

$\overline{X} = A \cap B$

3. 证明连通集的闭包是连通的.

设连通集X的闭包不连通

则∃非空不交开集A, B, s.t. $\overline{X} = A \cup B$

故 $X = (X \cap A) \cup (X \cap B)$ 且 $X \cap A$ 与 $X \cap B$ 非空不交

与X是连通集矛盾

4. 设 A 是点 $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ 且 $x=0$、$|y| \leqslant 1$ 的集合，并设 B 是 $x>0$、$y=\sin 1/x$ 的集合. 问 $A \cup B$ 是不是连通的?

$A = \{ (0, y) \mid -1 \leq y \leq 1 \}$

$B = \{ (x, y) \mid x > 0,\ y = \sin\frac{1}{x} \}$

A, B 均为连通集

$A \cup B = \overline{B}$

故 $A \cup B$ 是连通集

45B210 14:00

第五周作业

1. 计算

$$\int_{\gamma} x\,dz,$$

其中 γ 为由 0 至 $1+i$ 的有向线段.

$z(t)=x(t)+iy(t)=t+it \quad t\in[0,1]$

$\int_{r} x\,dz = \int_{r} x\,dx + i\int_{r} x\,dy$

$= \int_0^1 t\,dt + i\int_0^1 t\,dt$

$= \frac{1}{2}+\frac{i}{2} \quad \square$

2. 试就圆的正向按下列两种方法计算

$$\int_{|z|=r} x\,dz,$$

第一种方法是应用一个参数，第二种方法是在圆上取 $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})=\frac{1}{2}\left(z+\frac{r^2}{z}\right)$.

① 应用一个参数 t

由于 $|z|=r$，设 $z=x(t)+iy(t)$ 且 $\begin{cases} x(t)=r\cos t \\ y(t)=r\sin t \end{cases}$ $t\in[0$

$$\int_{|z|=r} x\,dz=\int_0^{2\pi} r\cos t\cdot(-r\sin t)\,dt+i\int_0^{2\pi} r\cos t\cdot(r\cos t)\,dt$$

$$=r^2\pi i \quad \square$$

② 圆上取 $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})=\frac{1}{2}\left(z+\frac{r^2}{z}\right)$

代入得

$$\int_{|z|=r} x\,dz=\int_{|z|=r}\frac{1}{2}\left(z+\frac{r^2}{z}\right)dz=\frac{1}{2}\underbrace{\boxed{\int_{|z|=r} z\,dz}}_{=0}+\frac{r^2}{2}\underbrace{\boxed{\int_{|z|=r}\frac{1}{z}\,d}}_{=2\pi i}$$

$$=2\pi i\cdot\frac{r^2}{2}=r^2\pi i \quad \square$$

$z(t)=re^{i\theta}$

$$\int_{|z|=r} z\,dz=\int_0^{2\pi} z(t)\,z'(t)\,dt=\int_0^{2\pi} re^{it}\cdot rie^{it}\,dt=0$$

$$\int_{|z|=r}\frac{1}{z}\,dz=\int_0^{2\pi}\frac{1}{z(t)}z'(t)\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{ire^{it}}{re^{it}}\,dt=2\pi i$$

3. 试对圆的正向计算

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2-1}.$$

$z=2e^{i\theta}$

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2-1}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{z^2(\theta)-1}\cdot z'(\theta)\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{2ie^{i\theta}}{4e^{2i\theta}-1}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{2ie^{i\theta}(4e^{-2i\theta}-1)}{(4e^{2i\theta}-1)(4e^{-2i\theta}-1)}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{8ie^{-i\theta}-2ie^{i\theta}}{17\underbrace{-4e^{2i\theta}-4e^{-2i\theta}}_{=-8\cos 2\theta}}\,d\theta$$

$$\left(\cos\theta=\frac{e^{\theta i}+e^{-\theta i}}{2}\right)$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{\boxed{6i\cos\theta+10\sin\theta}}{17-8\cos 2\theta}\,d\theta$$

$$8ie^{-i\theta}-2ie^{i\theta}=x\cos\theta+y\sin\theta$$

$$=\frac{xe^{\theta i}+xe^{-\theta i}}{2}+\frac{ye^{\theta i}-ye^{-\theta i}}{2i}$$

$$=\frac{x-yi}{2}e^{\theta i}+\frac{x+yi}{2}e^{-\theta i}$$

$$\begin{cases}8i=\dfrac{x+yi}{2}\\[2mm]-2i=\dfrac{x-yi}{2}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=6\\y=10i\end{cases}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{6i\cos\theta}{17-8\cos 2\theta}\,d\theta+\int_0^{2\pi}\frac{10\sin\theta}{17-8\cos 2\theta}\,d\theta$$

由于 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\,d\theta}{17-8\cos 2\theta}$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta\,d\theta}{17-8\cos 2\theta}+\int_\pi^{2\pi}\frac{\cos\theta\,d\theta}{17-8\cos 2\theta}=\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta}{17-8\cos 2\theta}\,d\theta+\int_0^{\pi}\frac{\cos(\theta-\pi)\,d(\theta}{17-8\cos(2\theta-2\pi}$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta}{17-8\cos 2\theta}\,d\theta+\int_0^{\pi}\frac{-\cos\theta}{17-8\cos 2\theta}\,d\theta=0$$

同理 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{17-8\cos 2\theta}=0$

故 $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2-1}=0$ ∎

4. 计算

$$\int_{|z|=1} |z-1| \cdot |dz|.$$

设 $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_{|z|=1} |z-1| \cdot |dz| = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos t - 1)^2 + \sin^2 t} \cdot |z'(t)|\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} \cdot dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\sqrt{(\sin\tfrac{t}{2})^2}\, dt$$

$$= 2\int_0^{2\pi} |\sin\tfrac{t}{2}|\, dt = 2\int_0^{2\pi} \sin\tfrac{t}{2}\, dt$$

$0 \le t \le 2\pi$

$0 \le \frac{t}{2} \le \pi$

$$= 2 \cdot \left(-2\cos\tfrac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 8 \quad \square$$

5. 假设 $f(z)$ 在闭曲线 γ 上解析（即 f 在包含 γ 的一个区域内是解析的），证明

$$\int_\gamma \overline{f(z)}\, f'(z)\,\mathrm{d}z$$ 是纯虚数.（$f'(z)$ 被认为是连续的.）

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \in H(\gamma)$

则 $\overline{f}(z)=u-iv$

$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

即 $\overline{f(z)}f'(z)=(u-iv)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)+i\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right.$

$$\int_\gamma \overline{f(z)}f'(z)dz=\int_\gamma\left[\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)+i\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]dz$$

得 $\mathrm{Re}\left(\int_\gamma \overline{f(z)}f'(z)dz\right.$

$=\int_\gamma \left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx+\left(-u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy\left.\right)$

$\triangleq \int_\gamma P\,dx+Q\,dy$，其中由CR方程 $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$ $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$，$\frac{\partial P}{\partial y}=u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+v\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-v$

即 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$ 由Green公式 $\mathrm{Re}\left(\int_\gamma \overline{f(z)}f'(z)dz\right)=0$

即 $\int_\gamma \overline{f(z)}f'(z)dz$ 为纯虚数 □

设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy \quad (1)$$

其中 L 是 D 的取正向的边界曲线。

公式(1)叫做格林(green）公式。[1]

6. 假设 $f(z)$ 在域 Ω 内解析，并满足不等式 $|f(z)-1|<1$，证明对 Ω 中的任一闭曲线 γ，

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0.$$

（$f'(z)$ 被认为是连续的.）

$$\int_r \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int_r \frac{1}{f(z)}df(z) \quad \Rightarrow \quad \ln' f = \frac{f'}{f}$$

设 $F(z)=\ln z$ 则 $F(z)$ 在 $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ 上解析

$|f(z)-1|<1$ 故 $\{f(z)\,|\,z\in\Omega\} \subseteq \mathbb{C}\setminus(-\infty,0)$

（即 $f(z)$ 一定不在负实轴上）.

又 $f(z)$ 在 Ω 内解析

故有 $F(f(z))=\ln f(z)$ 在 Ω 内解析

$(\ln f(z))' = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$. 故 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在 Ω 内解析.

由于

连续函数 f 的积分 $\int_\gamma dz$ 只依赖于 γ 的两个端点，当且仅当 f 为 Ω 内一个解析函数的导数.

且 r 是闭曲线

则 $\int_r \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0$ $\square$

第六周作业

1. 计算

$$\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz.$$

引理 1 如果一条分段可微的闭曲线 γ 并不通过点 a，则积分

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

的值是 $2\pi i$ 的一个倍数.

现在我们可以把一点 a 关于曲线 γ 的指数用下面的等式来定义：

$$n(\gamma,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{z-a}.$$

用示意性的术语，指数又称为曲线 γ 关于点 a 的卷绕数.

显然，$n(-\gamma, a)=-n(\gamma, a)$.

(i)若 γ 位于一个圆的内部，则对于该圆外部的所有点 a，有 $n(\gamma, a)=0$.

(ii)把 $n(\gamma, a)$看成是 a 的一个函数，则它在 γ 所确定的各个域内是一个常数，而在无界域内则等于零.

引理 2 设 z_1，z_2 为不通过原点的闭曲线 γ 上的两点. 在曲线方向将由 z_1 至 z_2 的子弧记为 γ_1，由 z_2 至 z_1 的子弧记为 γ_2. 设 z_1 位于下半平面，而 z_2 位于上半平面. 如果 γ_1 不与负实轴相交，γ_2 不与正实轴相交，则

$$n(\gamma,0)=1.$$

定理 6 设 $f(z)$在开圆盘 Δ 内解析，并设 γ 是 Δ 中的一条闭曲线，那么对不在 γ 上的任一点 a，必有

$$n(\gamma,a)\cdot f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{z-a}dz, \tag{20}$$

其中 $n(\gamma, a)$是点 a 关于 γ 的指数.

柯西积分公式. $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z},$

由柯西积分公式

$f(z)=e^z$

$$\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=2\pi i f(0)=2\pi i \quad \square$$

2. 将被积函数分解为部分分式计算

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}.$$

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1} dz$$

$$= \int_{|z|=2} \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right) dz$$

$$= \frac{1}{2i}\int_{|z|=2} \frac{1}{z-i} dz - \frac{1}{2i}\int_{|z|=2} \frac{1}{z+i} dz \qquad (f(z)=1)$$

柯西积分公式

$$= \frac{1}{2i}\cdot 2\pi i\cdot 1 - \frac{1}{2i}\cdot 2\pi i\cdot 1 = \pi - \pi = 0$$

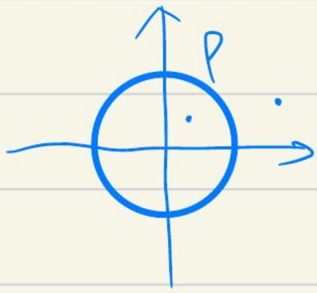
。

3. 计算

$$\int_{|z|=\rho}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|^2},$$

条件是 $|a|\neq\rho$. 提示：应用方程 $z\bar{z}=\rho^2$ 及

$$|\mathrm{d}z|=-i\rho\frac{\mathrm{d}z}{z}.$$



$$\int_{|z|=\rho}\frac{|dz|}{|z-a|^2}$$

$$=\int_{|z|=\rho}\frac{-i\rho\frac{1}{z}}{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}dz$$

$$=\int_{|z|=\rho}\frac{-i\rho}{(z-a)\underline{z(\bar{z}-\bar{a})}}dz=\int_{|z|=\rho}\frac{-i\rho}{(z-a)(\rho^2-\bar{a}z)}dz$$

$$=\frac{i\rho}{\rho^2-|a|^2}\int_{|z|=\rho}\left(\frac{\bar{a}}{\bar{a}z-\rho^2}-\frac{1}{z-a}\right)dz$$

$(\rho\neq|a|)$

$$=\frac{i\rho}{\rho^2-|a|^2}\int_{|z|=\rho}\frac{\bar{a}}{\bar{a}z-\rho^2}dz-\frac{i\rho}{\rho^2-|a|^2}\int_{|z|=\rho}\frac{1}{z-a}dz$$

想上下同乘 $\frac{1}{\bar{a}}$，讨论 $a\overset{?}{=}0$

若 $a=0$ 则 $\int_{|z|=\rho}\frac{|dz|}{|z-a|^2}=0-\frac{i\rho}{\rho^2-a^2}\cdot 2\pi i=\frac{2\pi}{\rho}$

若 $a\neq0$ 则 $\int_{|z|=\rho}\frac{|dz|}{|z-a|^2}$

$$=\frac{i\rho}{\rho^2-|a|^2}\int_{|z|=\rho}\frac{\bar{a}}{z-\frac{\rho^2}{\bar{a}}}dz-\frac{i\rho}{\rho^2-|a|^2}\int_{|z|=\rho}\frac{1}{z-a}dz$$

比较 $\left|\frac{\rho^2}{a}\right|, |a|$ 与 ρ $\Rightarrow$ $\frac{\rho^2}{a}>\rho \to \rho>|a|$, $|a|>\rho$

当 $|a|>\rho$ 时 $\frac{\rho^2}{a}<\rho$ ，即 $\left|\frac{\rho^2}{a}\right|$ 包含于 $|z|=\rho$ 且 a 不包含于 $|z|=\rho$

$$\int_{|z|=\rho}\frac{|dz|}{|z-a|^2}=\frac{i\rho}{\rho^2-|a|^2}\int_{|z|=\rho}\frac{1}{z-\frac{\rho^2}{a}}dz+0$$

$$=\frac{i\rho}{\rho^2-|a|^2}\cdot 2\pi i\cdot 1=\boxed{\frac{2\pi\rho}{|a|^2-\rho^2}}$$

当 $|a|<\rho$ 时 a 包含于 $|z|=\rho$ ，且 $\frac{\rho^2}{a}$ 不包含于 $|z|=\rho$

$$\int_{|z|=\rho}\frac{|dz|}{|z-a|^2}=0-\frac{i\rho}{\rho^2-|a|^2}\int_{|z|=\rho}\frac{1}{z-a}dz$$

$$=-\frac{i\rho}{\rho^2-|a|^2}\cdot 2\pi i\cdot 1=\boxed{\frac{2\pi\rho}{\rho^2-|a|^2}}.$$

$a=0$ 时满足上式

综上

$$\begin{cases}\frac{2\pi\rho}{|a|^2-\rho^2} & |a|>\rho\\ \frac{2\pi\rho}{\rho^2-|a|^2} & |a|<\rho\end{cases}$$

□

1. 计算：

$$\int_{|z|=1} e^z z^{-n} dz;\quad \int_{|z|=2} z^n(1-z)^m dz;\quad \int_{|z|=\rho} |z-a|^{-4}\,|dz|\ (|a|\neq\rho).$$

引理 3 设 $\varphi(\zeta)$ 是弧 γ 上的一个连续函数，则函数

$$F_n(z)=\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^n}$$

在 γ 所确定的任意域内都解析，且其导数为 $F_n'(z)=nF_{n+1}(z)$.

刘维尔定理：

在整个平面中有界的解析函数必是一个常数.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}.$$

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}.$$

① $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} dz$ ， $f(z)=e^z$, $C: |z|=1$, $0\in C$

$$f^{(n-1)}(0)=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{z^n} dz$$

即 $\int_{|z|=1} e^z z^{-n} dz=\frac{2\pi i}{(n-1)!}$ □

② $\int_{|z|=2} z^n (1-z)^m dz$

$m \geq 0$ 且 $n \geq 0$　$f(z) = z^n (1-z)^m$ 在 $|z|=2$ 内解析，故为 0

$m \geq 0$ 且 $n < 0$　$f(z) = (1-z)^m$

$$\int_{|z|=2} z^n (1-z)^m dz = \frac{2\pi i}{(-n-1)!} f^{(-n-1)}(0)$$

$$= \begin{cases} 0, & -n-1 > m \\ \dfrac{2\pi i \cdot (-1)^{(-n-1)} m!}{(-n-1)!\,(m+n+1)!} & -n-1 \leq m \end{cases}$$

$m < 0$ 且 $n \geq 0$　$f(z) = z^n$

$$\int_{|z|=2} z^n (1-z)^m dz = \frac{2\pi i}{(-m-1)!} f^{(-m-1)}(1)$$

$$= \begin{cases} 0, & -m-1 > n \\ \dfrac{n!\, 2\pi i}{(-m-1)!\,(n+m+1)!} & -m-1 \leq n, \end{cases}$$

$m<0\ ,\ n<0$

$z^n(1-z)^m = p(z)z^n + Q(z)(1-z)^m$ 其中 $\deg p \le -n-1$ $\deg Q \le -$

由于 $Q(z)z^{-n} + p(z)(1-z)^{-m} = 1$ (1)

则 $\int_{|z|=2} p(z) z^n dz = \frac{2\pi i\ p^{(-n-1)}(0)}{(-n-1)!} = 2\pi i \cdot p$，其中 p 是 $p(z)$ 的首

同理 $\int_{|z|=2} Q(z)(1-z)^m dz = (-1)^m 2\pi i \times q$，其中 q 是 $Q(z)$ 的首项系数

(1)式左边 z^{-m-n-1} 的系数为 $(-1)^m p + q = 0$ 即

$p + (-1)^m q = 0$

故 $\int_{|z|=2} z^n(1-z)^m dz = 0$

③ $\int_{|z|=\rho} |z-a|^{-4}|dz| = \int_{|z|=\rho} \frac{-i\rho}{|z-a|^4 z} dz = -i\rho \int_{|z|=\rho} \frac{z}{(z-a)^2(\rho}$

① $|a|<\rho$. $f(z)=\frac{z}{(\rho^2-\bar{a}z)^2} \in H(\Omega)$ 原式 $= -i\rho 2\pi i f'(a) = \frac{2\pi\rho(\rho^2+|a|^2}{(\rho^2-|a|^2)^3}$

② $|a|>\rho$, $f(z)=\frac{z}{(z-a)^2\bar{a}^2} \in H(\Omega)$ 原式 $= -i\rho 2\pi i f'(\frac{\rho^2}{\bar{a}}) = \frac{2\pi\rho(\rho^2+|a|^2}{-(\rho^2-|a|^2)}$

2. 证明，在整个平面中解析的函数如果对于某些 n 及所有充分大的 $|z|$，能满足不等式 $|f(z)|<|z|^n$，则必为一个多项式.

pf: 设解析函数 f，由题意 $\exists M$，对所有充分大的 $|z|$ s.t. $|f(z)|\leq M\cdot|z|^n$.

设 $P(z)$ 为 $f(z)$ 在0点的 $n-1$ 阶泰勒多项式，$\deg P(z)=n-1$.

$f(z)-P(z)=z^n g(z)$

由 $\frac{|P(z)|}{|z|^n}\leqslant 1$

有 $|g(z)|\leq\frac{|f(z)|}{|z|^n}+\frac{|P(z)|}{|z|^n}\leq M+1$

则 $g(z)$ 是平面中有界的解析函数.

由刘维尔公式. g 是一个常数

故 $f(z)=g z^n+P(z)$ 是一个多项式.

3. 设 $f(z)$是解析函数，对于 $|z|\leqslant R$，有 $|f(z)|\leqslant M$，试求 $|f^{(n)}(z)|$ 在 $|z|\leqslant\rho<R$ 中的上界.

解:

$C:\{z:|z|=R\}$ ， $f^{(n)}(z)=\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi.$

由 $|f(z)|\leq M$，

$$|f^{(n)}(z)|\leqslant\left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{|\xi|=R}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi\right|\leqslant\frac{n!}{2\pi}\cdot M\cdot\left|\int_{|\xi|=R}\frac{d\xi}{(|\xi|-|z|)^{n+1}}\right|$$

$$\leqslant\frac{n!}{2\pi}M\frac{1}{(R-\rho)^{n+1}}\left|\int_{|\xi|=R}d\xi\right|=\frac{n!MR}{(R-\rho)^{n+1}}$$

4. 设 $f(z)$ 当 $|z|<1$ 时解析，且 $|f(z)|\leqslant 1/(1-|z|)$，试由柯西不等式求 $|f^{(n)}(0)|$ 的最优估值.

解: $C:\{z: |z|=\rho<1\}$

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!\max|f(z)|}{r^n}$$

$$\max|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|} \leq \frac{1}{1-r}$$

$|f^{(n)}(0)| \leq \dfrac{n!}{r^n(1-r)}$ 当 $r=\dfrac{n}{n+1}$ 时取最小值 即最优估值 $\dfrac{(n+1)!\,(n+1)^n}{n^n}$

第七周作业

1. 若函数 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在 $z=a$ 处具有代数阶 h 及 k，证明 fg 的阶为 $h+k$；f/g 的阶为 $h-k$；$f+g$ 的阶不大于 $\max(h,k)$.

pf: $f(z)$在$z=a$的代数阶为h，则

$$\lim_{z\to a}|z-a|^{\alpha}|f(z)|=0 \quad \alpha>h$$

$$\lim_{z\to a}|z-a|^{\alpha}|f(z)|=\infty \quad \alpha<h$$

$g(z)$在$z=a$的代数阶为k，则

$$\lim_{z\to a}|z-a|^{\alpha}|g(z)|=0 \quad \alpha>k$$

$$\lim_{z\to a}|z-a|^{\alpha}|g(z)|=\infty \quad \alpha<k$$

则

$$\lim_{z\to a}|z-a|^{\alpha}|f(z)g(z)|=\lim_{z\to a}(|z-a|^{\alpha_1}|f(z)|\cdot|z-a|^{\alpha_2}|g(z)|)$$

$$=\begin{cases}\infty & \alpha_1<h,\ \alpha_2<k\\ 0 & \alpha_1>h,\ \alpha_2>k\end{cases}=\begin{cases}\infty & \alpha<h+k\\ 0 & \alpha>h+k.\end{cases}$$

从而 fg的阶为$h+k$.

由于 $\lim_{z\to a}|z-a|^{\alpha}\left|\frac{1}{g(z)}\right|=\begin{cases}\infty & \alpha<-k\\ 0 & \alpha>-k\end{cases}$

从而 $\frac{1}{g(z)}$ 的代数阶为 $-k$.

故 $\frac{f}{g}=f\cdot\frac{1}{g}$ 阶为 $h-k$.

由于 $|z-a|^\alpha|f(z)+g(z)|\le|z-a|^\alpha|f(z)|+|z-a|^\alpha|g(z)|$

若 $f+g$ 的阶大于 $\max\{h,k\}$，则

$$\lim_{z\to a}|z-a|^\alpha|f(z)|+|z-a|^\alpha|g(z)|=0.$$

故 $\lim\limits_{z\to a}|z-a|^\alpha|f(z)+g(z)|=0$

故 $f+g$ 阶不大于 $\max\{h,k\}$. $\square$

2. 证明，在整个平面上解析而在∞处具有一个非本性奇点的函数是一个多项式.

Pf: 若∞是$f(z)$的可去奇点，则

在∞的一邻域$|z|>R$处有界.

又f在$|z|\le R$上连续 则 f在$|z|\le R$上也有界.

于是f在$\mathbb{C}$上有界. 又$f\in H(\mathbb{C})$ 则由刘维尔定理

f是常值.

若∞是$f(z)$的极点，由于$f(z)$在$\mathbb{C}$上解析 则

$f(z)$的幂级数展开 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$在复平面收敛，故其为$f(z)$在$\infty$处Laurent

由于∞为$f(z)$极点，则在∞处Laurent展开主部只有有限项.

故$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$只有有限项，是一个多项式 ▪

3. 证明，函数 e^z，$\sin z$ 及 $\cos z$ 在∞处具有本性奇点.

pf：（方法不唯一）

e^z 在∞处 Laurent 展开：

$e^z = 1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots$ 正幂项数为无穷，故∞有本性

同理 $\sin z$，$\cos z$ 在∞处均有本性奇点

4. 证明，在扩充平面上的任意亚纯函数是有理函数.

pf: 设 $f(z)$ 是扩充复平面上的亚纯函数. 则

$f(z)$ 只有有限个极点. 否则

在扩充复平面上的聚点是非孤立奇点, 矛盾!

故设 $f(z)$ 的有限个极点 $\{a_1, \cdots, a_n\}$, 阶 $h_1, h_2, \cdots, h_n$

则 $g(z) = (z-a_1)^{h_1} \cdots (z-a_n)^{h_n} f(z)$

$z_1, \cdots, z_n$ 都是 $g(z)$ 的可去奇点

因此 $g(z) \in H(\mathbb{C})$

对于 ∞. 为 $g(z)$ 的可去奇点. 或极点.

由题之知 $g(z)$ 为多项式

故 $f(z) = = \dfrac{g(z)}{(z-a_1)^{h_1} \cdots (z-a_n)^{h_n}}$

$g(z) \prod\limits_{i=1}^{n} (z-a_i)^{-h_i}$ 是有理函数. $\square$

5. 证明 $f(z)$的一个孤立奇点是可去的，只要 $\mathrm{Re}f(z)$或 $\mathrm{Im}f(z)$上有界或下有界. 提示：应用一个分式线性变换.

Pf: 假设 f 有一个孤立奇点 a. 阶数为 h. 那么 $(z-a)^h f(z)$ 在 a 解析.

如果 Re f 或 Im f 在此点心邻域内有界，则 $f(z)$ 在其内不能逼近任一复数值

故此奇点不是本质奇点.

$(z-a)^h f(z) = B_h + B_{h-1}(z-a) + \cdots + B_1 (z-a)^{h-1} + \varphi(z)(z-a)^h$

其中 $\varphi(z)$ 是解析函数

则 $f(z) = B_h (z-a)^{-h} + \cdots + B_1 (z-a)^{-1} + \varphi(z) = (z-a)^{-h} g(z)$

其中 $g(z)$ 是解析函数

令 $z = a + re^{i\theta}$ $0<r<\delta$

$f(z) = r^{-h} e^{-ih\theta} g(z)$

$\mathrm{Re} f(z) = r^{-h} \mathrm{Re}(e^{ih\theta} g(z))$

由于 $|e^{-ih\theta}| = 1$, $|e^{-ih\theta} g(z)| = |g(z)|$ 在 $0<|z-a|<\delta$ 有界

故 $\mathrm{Re}(e^{ih\theta} g(z)) \to \infty$, $r \to 0$

同理 $\mathrm{Im}(e^{-ih\theta} g(z)) \to \infty$, $r \to 0$

故 a 不是极点

从而 a 是可去奇点. ▪

1. 试确定原点周围的最大圆盘，它在映射 $w=z^2+z$ 下的象是一对一的.

解:

$z_1^2+z_1=z_2^2+z_2$

$(z_1+z_2)(z_1-z_2)=z_2-z_1$

$w(0)=0$，$w'(0)\neq 0$，$z=0$ 阶为1

$\exists z=0$ 的邻域 s.t w 是一一对应的

若 $w'(z_0)=0$，则 z_0 的阶数 $m\geq 2$，

$\exists z_0$ 的邻域，$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，$|z-z_0|<\varepsilon$ 中有 m 个点，s.t

$|w(z)-w(z_0)|<\delta$，即在 z_0 附近 w 不一一对应.

$w'(z)=0$ 则 $z=-\frac{1}{2}$ 在半径最大为 $\frac{1}{2}$ 处圆盘一一对应.

若 $\forall z_1, z_2\in\{z \mid |z|<\frac{1}{2}\}$，满足 $z_1\neq z_2$ 且 $w(z_1)=w(z_2)$ 则

有 $z_1^2+z_1=z_2^2+z_2 \Rightarrow (z_1+z_2)(z_1-z_2)=z_2-z_1 \Rightarrow |z_1+z_2|=1$

又 $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|<1$ 矛盾，则在圆盘内一一对应. □

2、试对 $w=e^z$ 解上题.

$w'=e^z\neq 0$，无驻点，设 $z=x+iy$

$w=e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$，最小正周期为 $2\pi i$ 为使一一对应，

故最大圆盘 $|z|<\pi$

4. 如果 $f(z)$ 在原点解析，且 $f'(0)\neq 0$，证明：存在一个解析函数 $g(z)$，使得在原点的邻域中，有 $f(z^n)=f(0)+g(z)^n$.

pf: 设 $F = f(z)-f(0)$

$F(0)=0$

$F'(0)=f'(0)\neq 0$

故 $F(z)=z\,h(z)$ ， $h(0)\neq 0$

$F'(z)=h(z)+z h'(z)$

$\Rightarrow h(0)=F'(0)=f'(0)$

设使得 $h(z)$ 解析的原点处最小开邻域为 U

则在 U 中有

$F(z)=z h(z) \Rightarrow f(z)-f(0)=z h(z)=f(z)=f(0)+z h(z)$

$\Rightarrow f(z^n)=f(0)+z^n\cdot h(z)$

要使 $g(z)^n=z^n h(z^n)$

$\Rightarrow g(z)=z\cdot h(z^n)^{\frac{1}{n}}$ ▯

第八周作业

1. 用(36)式或直接证明，当 $|z|\leqslant 1$ 时 $|f(z)|\leqslant 1$ 蕴涵着

$$\frac{|f'(z)|}{(1-|f(z)|^2)}\leqslant\frac{1}{1-|z|^2}.$$

$$\left|\frac{M(f(z)-w_0)}{M^2-\overline{w_0}f(z)}\right|\leqslant\left|\frac{R(z-z_0)}{R^2-\overline{z_0}z}\right|.$$

pf:

$|z|\leq 1$，$|f(z)|\leq 1$ f解析

对 $\forall z_0\in\{z:|z|<1\}$，令 $w_0=f(z_0)$

由 Schwarz-Pick 引理

$$\left|\frac{f(z)-w_0}{1-\overline{w_0}f(z)}\right|\leq\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|$$

$$\frac{|f'(z_0)|}{1-|f(z_0)|^2}=\lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-w_0}{(z-z_0)(1-\overline{w_0}f(z))}\right|\leq\lim_{z\to z_0}\left|\frac{1}{1-\overline{z_0}z}\right|=\frac{1}{1-|z_0|^2}$$

又 z_0 任意，$\forall|z|<1$，$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}\leq\frac{1}{1-|z|^2}$ 成立 ▫

2. 若 $f(z)$ 解析，且当 $\operatorname{Im} z>0$ 时 $\operatorname{Im} f(z)\geqslant 0$，证明

$$\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|f(z)-\overline{f(z_0)}|}\leqslant\frac{|z-z_0|}{|z-\overline{z_0}|}$$

和

$$\frac{|f'(z)|}{\operatorname{Im} f(z)}\leqslant\frac{1}{y}\quad(z=x+\mathrm{i}y).$$

Pf 记 $w_0=f(z_0)$

作线性变换 T：将 z_0 映到 0，实轴映到单位圆。

作线性变换 S：将 w_0 映到 0，实轴映到单位圆。

$$T(z)=\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}\qquad S(w)=\frac{w-w_0}{w-\overline{w_0}}$$

则 $Sf\cdot T^{-1}(z)$ 满足 Schwarz 引理。

从而 $|SfT^{-1}(\xi)|\leq|\xi|$

$$|Sf(z)|\leq|T(z)|.$$

$$\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|f(z)-\overline{f(z_0)}|}\leq\frac{|z-z_0|}{|z-\bar{z}_0|}$$

$$SfT^{-1}(z)=\frac{f\left(\frac{\bar{z}_0-z_0}{z-1}+\bar{z}_0\right)-w_0}{f\left(\frac{\bar{z}_0-z_0}{z-1}+\bar{z}_0\right)-\overline{w_0}}$$

$|(SfT^{-1})'(0)|\leq 1$ 得 $\dfrac{|f'(z_0)|\,|w_0-\overline{w_0}|\,|\bar{z}_0-z_0|}{|w_0-\overline{w_0}|^2}\leq 1.$

即 $\dfrac{f'(z_0)}{\operatorname{Im} f(z_0)}\leq\dfrac{1}{y_0}$ $z_0=x_0+iy_0$，$y_0>0$.

由 z_0 的任意性知 $\dfrac{|f'(z)|}{\operatorname{Im} f(z)}\leq\dfrac{1}{y}$ □

3. 在练习 1 和练习 2 中，证明：等号成立就意味着 $f(z)$ 是一个线性变换.

练习1中

$$\begin{array}{ccc} |z|<1 & \xrightarrow{w=f(z)} & |w|<1 \\ \big\downarrow z_1=L_1(z) & & \big\downarrow w_1=L_2(w) \\ |z_1|<1 & \xrightarrow[w_1=f_1(z)]{} & |w_1|<1 \end{array}$$

$\forall z_0\in\{z:|z|<1\}$ $w_0=f(z_0)$. $L_1(z_0)=0$ $L_2(z_0)=0$

$z_1=L_1(z)=\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$ $w_1=L_2(w)=\dfrac{w-w_0}{1-\overline{w_0}w}$.

等式成立 $\Leftrightarrow \exists z,\ z_1=L_1(z)=L_2(f(z))=w_1=f_1(z_1)$

$\Leftrightarrow f_1(z_1)=e^{i\theta}z_1$

$f(z)=L_2^{-1}f_1L_1(z)=L_2^{-1}(e^{i\theta}L_1(z))$

练习2中，S. T 均为FLT 则 f 也是FLT

4. 若 $f(z)$ 将 $|z|<1$ 映入上半平面，试导出相应的不等式.

① $\operatorname{Im} f(z) \geq 0$

$$\begin{array}{ccc} z & \xrightarrow{f} & f(z) \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_3 \\ z_1 & \xrightarrow{f_2} & w_1 \end{array}$$

$f_1(z_0)=0$ $\quad \dfrac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}=f_1$ $\quad f_3=e^{i\theta}\dfrac{w-w_0}{w-\bar{w}_0}$ $\quad f_3(w_0)=0.$

$|z_1|<1$ $\quad |w_1|\leq 1$

$f_2(0)=0.$

则有 $w_1=f_3 f f_1^{-1}(z_1)$

$|w_1|\leq|z_1|$ 则 $|f_3 f(z)|\leq|f_1(z)|$

$$\left|e^{i\theta}\frac{f(z)-f(z_0)}{f(z)-\overline{f(z_0)}}\right| \leq \left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|$$

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{f(z)-\overline{f(z_0)}}\right| \leq \left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|.$$

② $w(z)=\dfrac{z-f(0)}{z-\overline{f(0)}}$ 把上半平面映到 $D=\{z:|z|<1\}$.

则 $wf\in H(D)$

且 $|w\circ f(z)|<1$ $\quad w\circ f(0)=0$

由 Schwarz 引理 $|w\circ f(z)|\leq|z|$ 即 $\left|\dfrac{f(z)-f(0)}{f(z)-\overline{f(0)}}\right|\leq|z|$

2. 证明从一个单连通域中移去 m 个点所成的区域是 $m+1$ 连通的，并求一个同调基.

pf: 设 Ω 为单连通域

则 $\mathbb{C}\setminus\Omega$ 是连通的.

设 $\Omega' = \Omega \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$

则 $\mathbb{C}\setminus\Omega' = \{\mathbb{C}\setminus\Omega\} \cup \{a_1\} \cup \cdots \cup \{a_m\}$ 有 $m+1$ 个连通分支.

故 Ω' 是 $m+1$ 连通的

令 $\delta = \min\limits_{i\neq j} |a_i - a_j|$ $\quad r_i = \{z \in \Omega' \mid |z-a_i| = \frac{\delta}{4}\}$ 于是 $r_1 \cdots r_m$ 是 Ω' 的一组

3. 证明由一条闭曲线所确定的有界域是单连通的，而无界域则是双连通的.

设闭曲线 γ. ，$\mathbb{C}\setminus\gamma$ 被分成至多可数个连通开集.

其中 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ 有界　A_0 无界.

考虑 $U_i=\overline{\mathbb{C}}\setminus A_i=\bigcup_{k\neq i}A_k\cup\gamma\cup\{\infty\}$.

由于 A_k 连通，则 $\overline{A_k}$ 连通.

从而 $\bigcup_{k\neq i}A_k\cup\gamma$ 在 U_i 的同一连通分支内.

如果 $i\neq 0$ 则 $\infty\in A_0\subset U_i$. 因此 U_i 连通，则 A_i 单连通.

如果 $i=0$，因为 A_i 有界. 取一充分大的圆 $|z|=R$ 不与闭曲线 γ 相交

从而两个开集 $|z|>r$ 和 $|z|<r$ 将 U_0 分成两部分

即 U_0 有两个连通分支：$\{\infty\}$ 和 $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\cup\gamma$

因此 A_0 是双连通的　□

4. 证明 $\log z$，z^a 及 z^z 的单值解析分支可定义于任意不包含原点的单连通域内.

设任意不含原点的单连通域为 Ω.

由于 $z^a = e^{a\log z}$

$z^z = e^{z\log z}$

故只需证明 $\log z$ 成立.

对于 $\log z$ 令 $f(z) = \frac{1}{z}$ 则 $f(z) \in H(\Omega)$.

故有 $F(z)$. $F'(z) = f(z) = \frac{1}{z}$

$(ze^{-F(z)})' = e^{-F(z)}(1 - zF'(z)) = 0$

故 $ze^{-F(z)}$ 为常数

取 $z_0 \in \Omega$ 及 $\log z_0$ 中一个固定值 s.t.

$ze^{-F(z)} = z_0 e^{-F(z_0)}$

$z = z_0 e^{F(z) - F(z_0)}$

故 $\log z = \log z_0 + F(z) - F(z_0)$ 是 $\log z$ 的单值解析分支

第九周

1. 方程 $z^7-2z^5+6z^3-z+1=0$ 在圆盘 $|z|<1$ 中有几个根？提示：注意当 $|z|=1$时最大的项并应用儒歇定理.

$f(z)=6z^3$

$g(z)=z^7-2z^5-z+1$

$|f(z)|>|g(z)|\quad \forall |z|=1$

$f(z)+g(z)=z^7-2z^5+6z^3-z+1$

由儒歇定理 f 与 $f+g$ 有相同个数的零点

故 $f+g$ 有 3 个零点在 $|z|<1$ 中 $\square$

2. 方程 $z^4-6z+3=0$ 有多少个模在 1 与 2 之间的根？

$f(z)=z^4$

$g(z)=-6z+3$

$|f(z)|>|g(z)| \quad \forall |z|=2$

由儒歇定理

z^4-6z+3 在 $|z|<2$ 内有4个根

$f(z)=-6z \quad g(z)=z^4+3$

$|f(z)|>|g(z)| \quad \forall |z|=1$

由儒歇定理 z^4-6z+3 在 $|z|<1$ 内有1个根

故与模在1与2间有3个根。

$f(z)$

3. 方程 $z^4+8z^3+3z^2+8z+3=0$ 在右半平面内有几个根？提示：作虚轴的象，再对一个大的半圆盘应用幅角原理.

$$f(it)=t^4-3t^2+3+i(-8t^3+8t)$$

$$\operatorname{Re} f(it)=\left(t^2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

$$\operatorname{Im} f(it)=8t^3+8t$$

当 t 由 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时

$$\Delta\arg f(it)=0$$

考虑圆盘 $D:\{\operatorname{Re} z\geq 0 \mid |z|\leq R\}$

$R\to+\infty$,

半圆盘的周线 Γ 在 $f(z)$ 下的像绕原点圈数取决于半圆周的像

$$f(Re^{i\theta})=R^4e^{4i\theta}\left(1+\frac{8}{R}e^{-i\theta}+\frac{3}{R^2}e^{-2i\theta}+\frac{8}{R^3}e^{-3i\theta}+\frac{3}{R^4}e^{-4i\theta}\right)$$

θ 从 $\frac{\pi}{2}$ 变到 $-\frac{\pi}{2}$ 时

$\lim\limits_{R\to\infty}\Delta\arg f(Re^{i\theta})=4\pi$ ，即绕原点两圈

从而 $f(z)=0$ 在右半平面有2个根 □

1. 求下列函数的极点与留数.

(a) $\dfrac{1}{z^2+5z+6}$,

原式 $= \dfrac{1}{(z+3)(z+1)}$

极点 $z_1=-2 \quad z_2=-3$

$\mathrm{Res}(f;z_1) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z+2|=\frac{1}{2}} \dfrac{(z+3)^{-1}}{z+2}\,dz = \dfrac{1}{z+3}\Big|_{z=-2} = 1$

$\mathrm{Res}(f;z_2) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z+3|=\frac{1}{2}} \dfrac{(z+2)^{-1}}{z+3}\,dz = \dfrac{1}{z+2}\Big|_{z=-3} = -1$

(b) $\frac{1}{(z^2-1)^2}$, $= \frac{\quad}{(z-1)^2(z+1)^2}$

$z_1 = -1 \quad z_2 = -1$

$$\mathrm{Res}(f; z_1) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z+1|=1} \frac{(z-1)^{-2}}{(z+1)^2}\,dz = -2(z-1)^{-3}\Big|_{z=-1} = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{Res}(f; z_2) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-1|=1} \frac{(z+1)^{-2}}{(z-1)^2}\,dz = -2(z+1)^{-3}\Big|_{z=1} = -\frac{1}{4}$$

(c) $\frac{1}{\sin z}$,

$z_k = k\pi$ 一阶极点

$$\operatorname*{Res}_{z=k\pi} \frac{1}{\sin z} = \lim_{z \to k\pi} \frac{z-k\pi}{\sin z} = (-1)^k$$

(d) $\cot z$, $= \dfrac{\cos z}{\sin z}$

$z_k = k\pi$ 一阶极点

$$\operatorname*{Res}_{z=k\pi} \cot z = \lim_{z\to k\pi} (z-k\pi)\cot z = 1$$

(e) $\frac{1}{\sin^2 z}$,

$z_k = k\pi$

$$\operatorname*{Res}_{z=k\pi} = \lim_{z\to k\pi} \frac{d}{dz}\left(\frac{(z-k\pi)^2}{\sin^2 z}\right) = 0$$

(f) $\dfrac{1}{z^m(1-z)^n}$ (m，n 为正整数).

$z_1=0 \qquad z_2=1$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{(1-z)^{-n}}{z^m}dz = \frac{(n+m-2)!}{(n-1)!(m-1)!}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{z^{-m}}{(z-1)^n}$$

$$= \frac{-(m+n-2)!}{(m-1)!}$$

3. 试用留数方法计算下列积分：

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a+\sin^2 x}$, $|a|>1$,

$$a+\sin^2 x = a + \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\left[(2a+1)-\cos 2x\right]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a+\sin^2 x} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(2a+1)-\cos 2x}$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \frac{dt}{(2a+1)-\cos t} = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{0} \frac{ds}{(2a+1)+\cos s}$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \frac{ds}{(2a+1)+\cos s} = \frac{\pi}{2\sqrt{a^2+a}}$$

(b) $\int_0^{\infty} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^4+5x^2+6}$,

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+5x^2+6} \quad \text{收敛}$$

$$I_1 = \int_{-R}^{R} \frac{x^2\,dx}{x^4-5x^2+6}$$

考虑 Γ : $[-R, R] + \Gamma_R$ 　　Γ_R 为半径为 R 的上半圆

$$\oint_\Gamma \frac{z^2\,dz}{z^4+5z^2+6} = \int_{-R}^{R} \frac{x^2\,dx}{x^4+5x^2+6} + \int_{\Gamma_R} \frac{z^2\,dz}{z^4+5z^2+6}$$

$$\frac{z^2}{z^4+5z^2+6} = \frac{z^2}{(z^2+3)(z^2+2)}$$ 一阶极点 $\pm\sqrt{3}i$, $\pm\sqrt{2}i$,

$R \to +\infty$, $\oint_\Gamma \frac{z^2\,dz}{z^4+5z^2+6} = 2\pi i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2i}\right) = \pi(\sqrt{3}-$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{z^2\,dz}{z^4+5z^2+6} = 0$$

故原式 $= \frac{\pi}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} \mathrm{d}x$,

$z = \pm i, \pm 3i$

$\underset{z=i}{\mathrm{Res}}\, f(z) = \frac{-1 - i + 2}{8 \cdot 2i} = \frac{1-i}{16i}$

$\underset{z=3i}{\mathrm{Res}}\, f(z) = \frac{-9 - 3i + 2}{6i(-8)} = \frac{7+3i}{48i}$

原式 $= 2\pi i \left(\frac{1-i}{16i} + \frac{7+3i}{48i} \right) = \frac{5\pi}{12}$

(d) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 \mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3}$，$a$ 为实数，

$$(z^2+a^2)^3 = (z-ai)^3(z+ai)^3$$

$$\operatorname*{Res}_{z=ai} \frac{z^2}{(z-ai)^3(z+ai)^3} = \frac{1}{2!}\lim_{z\to ai}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z^3(z-ai)^3}{(z-ai)^3(z+ai)^3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to ai}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z^2}{(z+ai)^3}\right) = \frac{1}{16a^3 i}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^3}$$

$$= \pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{(z^2+ai)^3}\right) = \frac{\pi}{16a^3}$$

(e) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx$，$a$ 为实数，

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dx$$

考虑 Γ：半径为R的半圆周，$[-R,R]$

$$\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}dz = \int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dx + \int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}dz$$

$\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}$ 有一阶极点 $\pm ai$

$$R\to\infty \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=ai} = 2\pi i\frac{e^{-a}}{2ai} = \pi\frac{e^{-a}}{a}$$

$$\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}dz = 0$$

原式 $= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi e^{-a}}{2a}$

(f) $\int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx$，$a$ 为实数，

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+a^2}dx\right)$$

令 $R(z) = \frac{z}{z^2+a^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(z)e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{y>0} \mathrm{Res}\, R(z)e^{iz} + \pi i \sum_{y=0} \mathrm{Res}\, R(z)e^{iz}$$

$$\mathrm{Res}_{z=ai} \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2} = \frac{e^{-a}}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix}dx = \pi e^{-a} i$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\pi e^{-ai}) = \frac{\pi e^{-a}}{2}$$

4. 计算

$$\int_{|z|=\rho}\frac{|dz|}{|z-a|^2},\quad |a|\neq\rho.$$

提示：用 $z\bar{z}=\rho^2$ 把积分变成一个有理函数的线积分.

$$\int_{|z|=\rho}\frac{|dz|}{|z-a|^2}=\int_{|z|=\rho}\frac{-i\rho\, dz}{z(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}=i\rho\int_{|z|=\rho}\frac{dz}{(z-a)(\bar{a}z-\rho^2)}$$

① 若 $|a|<\rho$ $\rho^2/|\bar{a}|>\rho$

$$\operatorname*{Res}_{z=a}\frac{1}{(z-a)(\bar{a}z-\rho^2)}=\frac{1}{\bar{a}a-\rho^2}=\frac{1}{|a|^2-\rho^2}$$

$$\int_{|z|=\rho}\frac{|dz|}{|z-a|^2}=i\rho\int_{|z|=\rho}\frac{dz}{(z-a)(\bar{a}z-\rho^2)}=\frac{2\pi\rho}{\rho^2-|a|^2}$$

② 若 $|a|>\rho$, $\rho^2/|\bar{a}|<\rho$

$$\operatorname*{Res}_{z=\rho^2/\bar{a}}\frac{1}{(z-a)(\bar{a}z-\rho^2)}=\lim_{z\to\rho^2/\bar{a}}\frac{z-\rho^2/\bar{a}}{\bar{a}(z-a)(z-\rho^2/\bar{a})}=\frac{1}{\rho^2-|a|^2}$$

$$\int_{|z|=\rho}\frac{|dz|}{|z-a|^2}=i\rho\int_{|z|=\rho}\frac{dz}{(z-a)(\bar{a}z-\rho^2)}=\frac{2\pi\rho}{|a|^2-\rho^2}.$$

1. 将 $1/(1+z^2)$展开为 $z-a$ 的幂级数，其中 a 为实数．求系数的通项公式，如果 $a=1$，试化为最简形式．

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{(a-i)+(z-a)}-\frac{1}{(a+i)(z-a)}\right)$$

由于 $\frac{1}{b+(z-a)}=\frac{1}{b}\left(\frac{1}{1+\frac{z-a}{b}}\right)=\frac{1}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{z-a}{b}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-a)^n}{b^{n+1}}$

则 $\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-a)^n}{(a-i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-a)^n}{(a+i)^{n+1}}\right)$

$$=\frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+i)^{n+1}-(a-i)^{n+1}}{(a-i)^{n+1}}(-1)^n(z-a)^n\right)$$

$$=2\sum_{1\le k\le n+1}\binom{n+1}{k}i^k a^{n+1-k}$$

$$=2\sum_{k=0}^{N}\binom{n+1}{2k+1}i\,2^{k+1}a^{n-2k}$$

$$=2i\sum_{k=0}^{N}\binom{n+1}{2k+1}(-1)^k a^{n-2k}$$

2. 勒让德多项式定义为下述展开式中的系数 $P_n(\alpha)$，即

$$f(z)=(1-2\alpha z+z^2)^{-\frac{1}{2}}=1+P_1(\alpha)z+P_2(\alpha)z^2+\cdots.$$

试求 P_1，P_2，P_3，P_4.

$$f'(z)=-\frac{1}{2}(1-2\alpha z+z^2)^{-\frac{3}{2}}(2z-2\alpha)=(1-2\alpha z+z^2)^{-\frac{3}{2}}(\alpha-z)$$

$$f''(z)=(\alpha-z)\left(-\frac{3}{2}(1-2\alpha z+z^2)^{-\frac{5}{2}}(2z-2\alpha)\right)-(1-2\alpha z+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=3(\alpha-z)^2(1-2\alpha z+z^2)^{-\frac{5}{2}}-(1-2\alpha z+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(z)=3(z-\alpha)(1-2\alpha z+z^2)^{-\frac{5}{2}}+15(\alpha-z)^3(1-2\alpha z+z^2)^{-\frac{7}{2}}$$

$$f^{(4)}(z)=3(1-2\alpha z+z^2)^{-\frac{5}{2}}+3(z-\alpha)\left(-\frac{5}{2}(1-2\alpha z+z^2)^{-\frac{7}{2}}(2z-2\alpha)\right)+$$

$$15(\alpha-z)^3\left(-\frac{7}{2}(1-2\alpha z+z^2)^{-\frac{9}{2}}(2z-2\alpha)\right)-45(z-\alpha)^2(1-2\alpha z+z^2)^{-\frac{7}{2}}$$

$$P_1(\alpha)=f'(0)=\alpha$$

$$P_2(\alpha)=\frac{1}{2!}f''(0)=\frac{1}{2}(3\alpha^2-1)$$

$$P_3(\alpha)=\frac{1}{3!}f'''(0)=\frac{5}{2}\alpha^3-\frac{1}{2}\alpha$$

$$P_4(\alpha)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(0)=\frac{35}{8}\alpha^4-\frac{5}{2}\alpha^2+\frac{1}{8}$$

3. 试将 $\log(\sin z/z)$ 展开成 z 的幂级数，写到项 z^6.

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!}$$

$$\log(w+1)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}w^k$$

$$\log\frac{\sin z}{z}=\log\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!}\right)$$

$$=-\frac{1}{6}z^2-\frac{1}{180}z^4-\frac{1}{2835}z^6+[z^8]$$

1. 证明洛朗展开式是惟一的.

设 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n$ 在 $r<|z-a|<R$ 内闭一致收敛

设 $\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n' (z-a)^n$ 是 $f(z)$ 的另一个展式

$$\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{m+1}} d\xi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_C C_n' (z-a)^{n-m-1} dz = 2\pi i C_m'$$

$$C_m' = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{m+1}} d\xi = C_m \quad m \in \mathbb{Z}$$

故 $f(z)$ 洛朗展开式唯一

3. 表达式

$$\{f,z\}=\frac{f'''(z)}{f'(z)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

称为 f 的施瓦茨导数. 若 f 只有一个重零点或极点，求$\{f, z\}$的洛朗展开式的首项. 答：如果 $f(z)=a(z-z_0)^m+\cdots$，则$\{f, z\}=\frac{1}{2}(1-m)^2(z-z_0)^{-2}+\cdots$.

若 f 有一个 m 阶零点 z_0 则 f 在 z_0 处洛朗展开

$$f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots$$

$$f'(z)=ma_m(z-z_0)^{m-1}+(m+1)a_{m+1}(z-z_0)^m+\cdots$$

$$f''(z)=m(m-1)a_m(z-z_0)^{m-2}+\cdots$$

$$=\frac{m-1}{z-z_0}\left(ma_m(z-z_0)^{m-1}+(m+1)\frac{m\,a_{m+1}}{m-1}(z-z_0)^m+\cdots\right)$$

$$\frac{f''(z)}{f'(z)}=\frac{m-1}{z-z_0}\left(\frac{1+\frac{m+1}{m-1}\frac{a_{m+1}}{a_m}(z-z_0)+\cdots}{1+\frac{m+1}{m}\frac{a_{m+1}}{a_m}(z-z_0)+\cdots}\right)$$

$$\{f,z\}=\frac{f^{(3)}(z)}{f'(z)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2=\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)'-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

首项 $\left(\frac{m-1}{z-z_0}\right)'-\frac{3}{2}\left(\frac{m-1}{z-z_0}\right)^2=\frac{1}{2}(1-m^2)(z-z_0)^{-2}$.

4. 证明$(e^z-1)^{-1}$在原点处的洛朗展开式为

$$\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}z^{2k-1},$$

其中 B_k 称为伯努利数，都是正的. 求 B_1，B_2，B_3.（由 5.2.1 节练习 5，B_k 都是正的.）

$$\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{z}{e^z-1}$$

$\frac{z}{e^z-1}$ 在 $z=0$ 有可去奇点，$0<|z|<2\pi$ 一致收敛 故有展开式

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n}z^n$$

$$e^z-1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}z^n-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$$

$$z=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n\right)$$

$b_0=1$，$b_1=-\frac{1}{2}$，$b_n=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}b_k$

$$\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{2}z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n\right)$$

$$=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^{n-1}$$

$B_1=-\frac{1}{2}$，$B_2=\frac{1}{6}$，$B_3=0$

祝大家考出好成绩！

未来一切顺利，学业有成，幸福美