P_2 1.

① $(1+2i)^3$

$= 1+6i+3(2i)^2+8(-i) = -11-2i$

② $\frac{5}{-3+4i} = \frac{5(-3-4i)}{25} = -\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$

③ $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2 = \frac{4+4i-1}{9-12i+4(-1)} = \frac{3+4i}{5-12i}$

$= \frac{(3+4i)(5+12i)}{25+144} = \frac{-33+56i}{169}$

④ $\sqrt{2}^n\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^n\right]$

$= \sqrt{2}^n\left[\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}i\right)^n+\left(\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}i\right)^n\right]$

$= 2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}$ (De Moivre公式)

2、 $z = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}i\right)$

$\tan\varphi = \frac{y}{x}$ $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$

z^4 实部 虚部

$(x^2+y^2)^2\cos 4\varphi$ $(x^2+y^2)^2\sin 4\varphi$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

$\frac{z-1}{z+1} = \frac{x-1+yi}{x+1+yi} = \frac{(x+yi-1)(x+1-yi)}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x^2-(yi-1)^2}{(x+1)^2+y^2}$

$= \frac{x^2+y^2+1+2yi}{(x+1)^2+y^2}$

$\frac{1}{z^2} = \frac{\bar{z}^2}{|z^2|^2}$ $z^2 = x^2-y^2+2xyi$

$= \frac{x^2-y^2-2xyi}{(x^2-y^2)^2+(2xy)^2}$

P_3 3.

$\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} = \cos\frac{4}{3}\pi \pm \sin\frac{4\pi}{3}i$

$\left(\cos\frac{4}{3}\pi\pm\sin\frac{4\pi}{3}i\right)^3$ 用到了 De Moivre公式

$= \cos 4\pi \pm \sin 4\pi i$ 而 $\sin 4\pi = 0$

又 $\sin 8\pi = 0$

$\square$

$\sqrt[4]{i} = z$ $z = re^{i\theta} \Rightarrow r^4e^{4i\theta} = i = e^{\frac{\pi}{2}i}$

而 $r^4=1$ $\theta = \frac{\pi}{8} \Rightarrow z = e^{\frac{\pi}{8}i}$

$\sqrt[4]{-i} = e^{-\frac{\pi}{8}i}$

4、由求根公式

$z = \frac{-\alpha-i\beta\pm\sqrt{(\alpha+i\beta)^2-4(\gamma+i\delta)}}{2}$

P_5 1.

$\varphi: \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix} \longrightarrow \alpha+\beta i$

先证同态.

加法同态、

$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+\alpha & b+\beta\\ -(b+\beta) & a+\alpha\end{pmatrix}$

作用 φ 得 $a+\alpha+(b+\beta)i$

$= a+bi+\alpha+\beta i \Rightarrow$ 是加法同态

乘法同态、

$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha a-\beta b & \alpha b+\beta a\\ -(\alpha b+\beta a) & \alpha a-\beta b\end{pmatrix}$

作用 φ 得 $\alpha a-\beta b+(\alpha b+\beta a)i$

$=(\alpha+\beta i)(a+bi)$

$\Rightarrow$ 是乘法同态.

为了符号表示方便,证其逆映射是双射

单射:

若 $\varphi(z_1)=\varphi(z_2)$

$\varphi(a+bi)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

$=\varphi(\alpha+\beta i)$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-\alpha & -b+\beta \\ b-\beta & a-\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow a=\alpha \quad b=\beta$

$\Rightarrow a+bi=\alpha+\beta i$

满射由定义

$\alpha+\beta i$ ~~必~~有 $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

$\square$

P7 3.

题目证明 $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|=1$

先假设 $|a|=|b|=1$ 不成立

则 $\Leftrightarrow \left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|^2=1$

$\Leftrightarrow (a-b)\overline{(a-b)}=(1-\bar{a}b)\overline{(1-\bar{a}b)}$

$\Leftrightarrow |a|^2+|b|^2-\bar{a}b-a\bar{b}=1-\bar{a}b-a\bar{b}+\bar{a}ba\bar{b}$

$\Leftrightarrow |a|^2+|b|^2=1+|a|^2|b|^2$

若 $|a|=1$ 或 $|b|=1$ 恒成立

若 $|a|=|b|=1$ 只要 $a\neq b$

则 $1-\bar{a}b\neq 0$

$\Rightarrow$ 上述变换仍成立.

$\Rightarrow$ 除 $a=b$ 且 $|a|=1$, $|a|=1$ 或 $|b|=1$ 的所有情况均成立.

4. 令 $a=a_1+a_2i \quad b=b_1+b_2i$

$c=c_1+c_2i \quad z=z_1+z_2i$

通过 $az+b\bar{z}=-c$ 的实部和虚部的对应关系

$(a_1+b_1)z_1+(b_2-a_2)z_2=-c_1$

$(a_2+b_2)z_1+(a_1-b_1)z_2=-c_2$

有唯一解 $z=z_1+z_2i$

$\Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} a_1+b_1 & b_2-a_2 \\ a_2+b_2 & a_1-b_1 \end{bmatrix}\right)\neq 0$

即 $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_2-a_2 \\ a_2+b_2 & a_1-b_1 \end{vmatrix}=a_1^2+a_2^2-b_1^2-b_2^2$

$=|a|^2-|b|^2$

$\Rightarrow$ 当 $|a|\neq|b|$ 时

$az+b\bar{z}+c=0$ 有唯一解

由克拉默法则

$$z_1 = \frac{-c_1(a_1-b_1)+c_2(b_2-a_2)}{|a|^2-|b|^2}$$

$$z_2 = \frac{-c_2(a_1+b_1)+c_1(a_2+b_2)}{|a|^2-|b|^2}$$

5、证明

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \sum_{i=1}^n |b_i|^2 - \sum_{1\le i<j\le n} |a_i\bar b_j - a_j \bar b_i|^2$$

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right|^2 = \sum_{j=1}^n a_j b_j \sum_{k=1}^n \bar a_k \bar b_k$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j b_j \bar a_k \bar b_k$$

$$= \mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j b_j \bar a_k \bar b_k\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n 2\mathrm{Re}(a_j b_j \bar a_k \bar b_k)$$

注意到 $2\mathrm{Re}(z) = z+\bar z$

$|z|^2 = z\bar z$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n 2\mathrm{Re}\, a_j b_j \bar a_k \bar b_k$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mathrm{Re}(a_j b_j \bar a_k \bar b_k + \bar a_j \bar b_j a_k b_k)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mathrm{Re}(a_j b_j \bar a_k \bar b_k + \bar a_j \bar b_j a_k b_k - a_j b_k \bar a_j \bar b_k - a_k b_j \bar a_k \bar b_j + a_j b_k \bar a_j \bar b_k + a_k b_j \bar a_k \bar b_j)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mathrm{Re}(a_j \bar b_k(\bar a_k b_j - \bar a_j b_k) - a_k \bar b_j(\bar a_k b_j - \bar a_j b_k) + a_j b_k \bar a_j \bar b_k + a_k b_j \bar a_k \bar b_j)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mathrm{Re}(-(a_j \bar b_k - a_k \bar b_j)(\bar a_j b_k - \bar a_k b_j) + a_j b_k \bar a_j \bar b_k + a_k b_j \bar a_k \bar b_j)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (-|a_j \bar b_k - a_k \bar b_j|^2 + |a_j|^2|b_k|^2 + |a_k|^2|b_j|^2)$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_j|^2 |b_k|^2 - \sum_{1\le k<j\le n} (|a_j \bar b_k - a_k \bar b_j|^2)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^2\right)$$

□

P9 (1) 类似 P7 (3)

$$\left|\frac{1-a}{1-\bar a b}\right| < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad |a|^2+|b|^2 < 1+|a|^2|b|^2$$

当 $|a|<1$ 且 $|b|<1$ 时我们可以忽略 $\bar a b=1$ 这种情况，将上述不等式写为

$$|a|^2+|b|^2-|a|^2|b|^2 < 1 \Leftrightarrow$$

$$|a|^2(1-|b|^2)+|b|^2 < 1$$

因为 $|b|<1$ $\quad 1-|b|^2>0$ 且 $|a|<$

有 $|a|^2(1-|b|^2) < (1-|b|^2)$

$\Leftrightarrow$ $|a|^2(1-|b|^2)+|b|^2 < (1-|b|^2)+|b|^2=1$

得到该式后 往回推即成立

□

P9 (3)

由三角不等式

$$|\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_n a_n| \le \sum_{j=1}^{n}|\lambda_j||a_j| < \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1$$

□

P9 (4)

$2|z| = |z$

由三角不等式

$$2|z|4= |z-a|+|z+a| \geqslant 2|a|$$

Ph2 Now 往面

3 $b=\sqrt{\frac{|c|^2}{|a|^2}-1}\ |a|$

5. $d(z,a)$ $z=0$ 等号成立

几何表示

6、圆 ellipse 椭圆

foci 中心点

perpendicular 垂直的

视为椭圆

1.2.1.2 P11 2.

乍一看，如果我们不把该三角形固定到某一特定的位置，该问题十分笼统.

先证明给定的等式满足平移不变的性质然后固定该三角形于原点处

$$(a_1-z)^2+(a_2-z)^2+(a_3-z)^2$$

$$= a_1^2+a_2^2+a_3^2-2a_1z-2a_2z-2a_3z+3z^2$$

$$= a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1-2a_1z-2a_2z-2a_3z+3z^2$$

$$= [a_1a_2-a_1z-z(a_1-z)]$$

$$+[a_2a_3-a_2z-z(a_2-z)]$$

$$+[a_3a_1-a_3z-z(a_3-z)]$$

$$= (a_1-z)(a_2-z)+(a_2-z)(a_3-z)$$

$$+(a_3-z)(a_1-z)$$

上述推导显示了题目中等式是平移不变的.

下面不妨设 $a_1=0$ $z=0$

下证

$0, a_2, a_3$ 即为等边三角形的三个顶点 $\Leftrightarrow$ $a_2^2+a_3^2=a_2a_3$

又在等式两边乘上 $\frac{\overline{a_2}}{|a_2|^2}$

其中 $|a_2|=0$ 时 $a_3=0$ 则图形收缩成一点. 故 $|a_2|\neq 0$

令 $\hat{a}_3 = \frac{a_3\bar{a}_2}{|a_2|^2}$.

所以现只用证明

$0, 1, \hat{a}_3$ 是三角形的三个顶点 $\Leftrightarrow 1+\hat{a}_2^2=\hat{a}_3$

而 $0, 1, \hat{a}_3$ 是三角形的三个顶点 $\Leftrightarrow \hat{a}_3 = \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

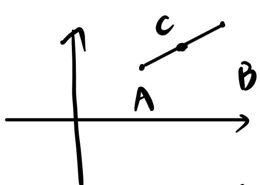
$\hat{a}_3 = \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 正是上面二次方程的2个根 □

P11 3

令 A, B 表示 a, b 各自的顶点. b-a 为 $\overrightarrow{AB}$

而将一个复数乘 i 表示将其逆时针转 90°, $(b-a)i$ 即为 $\overrightarrow{AB}$ 逆时针转 90° 后所得向量

① a, b 是正方形对角边所对应顶点.



$\overrightarrow{OC} = \frac{a+b}{2}$

另外两点为

$\frac{a+b}{2} \pm i\frac{b-a}{2}$

② a, b 是正方形相邻边所对应顶点.

从向量间几何关系

另外两点由 $a\pm i(b-a)$, $b\pm i(b-a)$ 给出.

P11 4

先将其外接圆公式表示成对称式.

令 c 为圆的中心, r 为圆的半径

有 $|c-a_i|^2 = r^2$

$= (\overline{c-a_i})(c-a_i)$

$= |c|^2 + |a_i|^2 - c\bar{a}_i - a_i\bar{c}$

⇒ 外接圆满足

$|c|^2 + |a_1|^2 - c\bar{a}_1 - a_1\bar{c} = r^2$ ①

$|c|^2 + |a_2|^2 - c\bar{a}_2 - a_2\bar{c} = r^2$ ②

$|c|^2 + |a_3|^2 - c\bar{a}_3 - a_3\bar{c} = r^2$ ③

而已知 a_1, a_2, a_3

②-① 且 ③-① 得方程组

$$\begin{cases} (\bar{a}_2-\bar{a}_1)c + (a_2-a_1)\bar{c} = |a_2|^2-|a_1|^2 \\ (\bar{a}_3-\bar{a}_1)c + (a_3-a_1)\bar{c} = |a_3|^2-|a_1|^2 \end{cases}$$

由克拉默法则

$$D=\begin{vmatrix}\bar a_2-\bar a_1 & a_2-a_1\\ \bar a_3-\bar a_1 & a_3-a_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar a_1 & a_1 & -1\\ \bar a_2 & a_2 & -1\\ \bar a_3 & a_3 & -1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1 & \bar a_1 & 1\\ a_2 & \bar a_2 & 1\\ a_3 & \bar a_3 & 1\end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix}|a_1|^2 & a_1 & -1\\ |a_2|^2 & a_2 & -1\\ |a_3|^2 & a_3 & -1\end{vmatrix}$$

$$c=\frac{D_1}{D}$$

代入即得 r.

P_{13} 2、

令 $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$

考虑 $S=1+z+z^2+\cdots+z^n$

由几何级数求和公式

$$S=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}=\frac{(1-\bar z)(1-z^{n+1})}{(1-z)(1-\bar z)}$$

$$=\frac{(1-\bar z)(1-z^{n+1})}{1+|z|^2-2\mathrm{Re}(z)}$$

$$=\frac{(1-\cos(n+1)\varphi-i\sin(n+1)\varphi)(1-\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2-2\cos\varphi}$$

$$=\frac{(1-\cos(n+1)\varphi)(1-\cos\varphi)+\sin(n+1)\varphi\sin\varphi}{2-2\cos\varphi}+\frac{(-\sin(n+1)\varphi(1-\cos\varphi)+\sin\varphi(1-\cos(n+1)\varphi))i}{2-2\cos\varphi}$$

$$1+\cos\varphi+\cos2\varphi+\cdots+\cos n\varphi=\frac{(1-\cos(n+1)\varphi)(1-\cos\varphi)+\sin(n+1)\varphi\sin\varphi}{2-2\cos\varphi}$$

$$=\frac{2\sin^2\frac{(n+1)\varphi}{2}\,2\sin^2\frac{\varphi}{2}+4\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\cos\frac{(n+1)\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\left(\cos\frac{(n+1)\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\right)}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\cos\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$1+\sin\varphi+\cdots+\sin n\varphi$$

$$=\frac{(-\sin(n+1)\varphi(1-\cos\varphi)+\sin\varphi(1-\cos(n+1)\varphi))}{2-2\cos\varphi}$$

$$=\frac{\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

4.

首先，根据 n 次单位根的几何意义与对称性 w 是 n 次单位根则有

$$1+w+w^2+\cdots+w^{n-1}=0$$

下面仅证 w^k 是一个 n 次单位根. 我们有

$$\arg(w^k)=k\arg(w)=\frac{2\pi k}{n}$$

由于 h 不是 n 的整数倍

若 $h>n$，则将幅角模 2π，最终得到的幅角一定是

$\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$ 其中之一

w^h 是 n 次单位根

$\Rightarrow$ 上式成立

当记 $w=e^{\frac{2\pi i}{n}}$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2\pi i h}{n}}\right)^k = \frac{e^{2\pi i h}-1}{e^{\frac{2\pi i h}{n}}-1}$$

而 h 为整数 $e^{2\pi i h}=1$

P13 5.

$$1-w^h+w^{2h}-\dots+(-1)^{n-1}w^{(n-1)h}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(-w^h)^k = \frac{1-(-w^h)^n}{1+w^h}$$

$$=\frac{1-(-1)^n}{1+w^h}=\begin{cases}0 & n\in 2\mathbb{Z}\\ \frac{2}{1+w^h} & n\in 2\mathbb{Z}+1\end{cases}$$

1.2.3.1

当 $b=\bar{a}$ 时才满足

令 $z=x+yi$

直线方程一般形式

$$Ax+By+C=0$$

$$\Rightarrow A\frac{z+\bar{z}}{2}+B\frac{z-\bar{z}}{2i}+C=0$$

$$\Rightarrow \frac{A-Bi}{2}z+\frac{A+Bi}{2}\bar{z}+C=0$$

令 $\frac{A-Bi}{2}=a$

则证明了上述结论

或者我们可以根据 1.1.4 (4) 来讨论，形成直线即

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_2-a_2 \\ a_1+b_2 & a_1-b_1\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{cases} C_1=kL_2 \\ a_1+b_1=k(a_2+b_2) \\ b_2-a_2=k(a_1-b_1)\end{cases}$$

1.2.3.2

椭圆 $|z-f_1|+|z-f_2|=14$

双曲线 $|z-f_1|-|z-f_2|=\pm 14$

抛物线 $|f-z|=\min\limits_{t\in\mathbb{R}}|z-(a+bt)|$

$(a-b)(\overline{a-b})$

$2|a|^2-t=|a|^2-\frac{1}{|a|^2}$

$|a|^2$

$2|a|^2=2\operatorname{Re}(\bar{a}b)$

$\operatorname{Re}\left(\frac{b}{a}\right)$

$z\bar{z}=|z|^2$

$\frac{|z|^2-b}{z}$

1.2.4 1

"⇐"

球面上的点 (x_1, x_2, x_3) 对应复数

$$z=\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}$$

假设 $z\bar{z'}=-1 \Rightarrow \bar{z}z'=-1$

z, z' 是黎曼球面上的两端点当且仅当它们之间是黎曼球面的直径

即 $d(z,z')=2$.

下面我将证明之.

$$d(z,z')=\frac{2|z-z'|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}}$$

$$\Leftrightarrow \quad d^2(z,z')=\frac{4(z-z')(\bar{z}-\bar{z'})}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}$$

$$=4\,\frac{|z|^2+|z'|^2-z\bar{z'}-\bar{z}z'}{1+|z|^2+|z'|^2+|z|^2|z'|^2}$$

$$=4 \Rightarrow d(z,z')=2$$

"⇒"

假设 z, z' 是黎曼球面上的两端点. 而 $\mathbb{C}$ 是一个域 (有逆)

$\exists!\, x\in\mathbb{C}$ s.t. $zx=-1$ 抽代

而黎曼球面上的端点仅有唯一一对应端点 $\Rightarrow x=z'$ □

1.2.4.2

由于正方体顶点满足

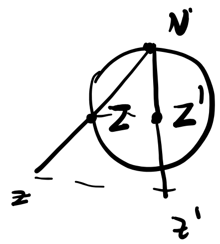
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$$

而 $|x_1|=|x_2|=|x_3|=\frac{1}{\sqrt{3}}$

⇒ 投影为

$$\left\{\frac{x_1+ix_2}{1-x_3} : x_1, x_2, x_3\in\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\right\}$$

4.



$Z(x_1, x_2, x_3)$ $\quad Z'(x_1', x_2', x_3')$

$N(0,0,1)$

$\overrightarrow{NZ}=(x_1, x_2, x_3-1)$

$\overrightarrow{NZ'}=(x_1', x_2', x_3-1)$

$$z=\frac{x_1+ix_2}{1-x_3} \qquad z'=\frac{x_1'+ix_2'}{1-x_3'}$$

$$\Rightarrow \vec{N_z}=\left(\frac{x_1}{1-x_3},\frac{x_2}{1-x_3},-1\right)$$

$$\vec{N_{z'}}=\left(\frac{x_1'}{1-x_3'},\frac{x_2'}{1-x_3'},-1\right)$$

$$\vec{NZ}=(x_3-1)\vec{Nz}$$

$$\vec{NZ'}=(x_3'-1)\vec{Nz'}$$

$\Rightarrow$ NZZ' 与 Nzz' 相似

从书中内容直接得出

$$d(z,z')=\frac{2|z-z'|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}}$$

5.

$$d(z,z')=\frac{2|z-z'|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|z'|^2}}$$

令 $z=a+R \quad z'=a-R$

$$\Rightarrow 2R=d(z,z')$$

$$R=\frac{1}{2}d(z,z')$$

$$=\frac{2|R|}{\sqrt{1+(a+R)(\overline{a+R})}\sqrt{1+(a-R)(\overline{a-R})}}$$

2.1.2

$z=x+iy$

$$z^2=\underbrace{x^2-y^2}_{u}+\underbrace{2xy}_{v}i \qquad z^3=\underbrace{x^3-3xy^2}_{u}+(\underbrace{3x^2y-y^3}_{v})i$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y=-\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-6xy=-\frac{\partial v}{\partial y}$$

2.1.4

设 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

$f(z)=u+iv$

假设 $|f(z)|=c$，c 是常数

则 $u^2+v^2=c^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=0 \\ 2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases}$$

由 Cauchy Rieman 方程

$$\begin{cases} u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}=0 \\ u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial x}=0 \end{cases}$$

消掉 $\frac{\partial u}{\partial y}$ $\Rightarrow (u^2+v^2)\frac{\partial u}{\partial x}=0$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=0$ 同理 $\frac{\partial u}{\partial y}=0$

由 C-R 方程

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad \frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$\Rightarrow$ u,v 是常数

$\Rightarrow$ $u+iv$ 是常数

其逆否命题即为所证结论.

2.1.5

仅用对 $\overline{f(\bar{z})}$ 验证 C-R 方程即可.

$f(z) = u(x,y) + V(x,y)i$

$z = x + iy$ 简记为 $u+vi$

$\Rightarrow \quad u_x(x,y) = V_y(x,y)$

$u_y(x,y) = -V_x(x,y)$

$\overline{f(\bar{z})} = u(x,-y) - V(x,-y)i$

下证 $\overline{f(\bar{z})}$ 满足 CR

由 $u_x(x,y) = V_y(x,y)$

$\Rightarrow u_x(x,-y) = V_{-y}(x,-y)$

$= -V_y(x,-y)$

另一边

由 $u_y(x,y) = -V_x(x,y)$

$\Rightarrow \quad u_{-y}(x,-y) = -V_x(x,-y)$

$-u_y(x,-y) = -V_x(x,-y)$

□

2.1.7

设 u 为一个调和函数

则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

由书上 $\frac{\partial f}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$

类似给出

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\frac{du}{d\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right) - i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - i\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

因为 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (调和函数)

且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$

$f(z) = \sqrt{|xy|}$ 在 $z=0$ 处满足 C-R 但不解析

$u(x,y) = \sqrt{|xy|}$

$V(x,y) = 0$

$u_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{u(h,0) - u(0,0)}{h}$

$= 0$

类似 $u_y(0,0) = 0$

$V_y = V_x = 0 \Rightarrow$ 满足 C-R

但 $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z}$ 令 $y=x$

$\frac{\sqrt{|x\cdot x|}}{x+ix} = \frac{|x|}{x}\frac{1}{1+i}$ 在 0 处

极限不存在（左导数有 -1，右导数有 1）

2.1.4.2

由每一个根 α_i 各不相同

$\Rightarrow Q(\alpha_i)=0$ 且 $Q'(\alpha_i)\neq 0$

由部分分式分解定理（数分 A 积分）

（有理分式能分解为部分分式之和）

$$\Rightarrow \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)}$$

$$= \frac{A_1}{z-\alpha_1} + \cdots + \frac{A_n}{z-\alpha_n}$$

$$\Rightarrow Q'(z) = [(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)]'$$

$$= [(z-\alpha_i)(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{i-1})(z-\alpha_{i+1})\cdots(z-\alpha_n)]'$$

$$= (z-\alpha_i)'[(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{i-1})(z-\alpha_{i+1})\cdots(z-\alpha_n)]$$

$$+ (z-\alpha_i)[(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{i-1})(z-\alpha_{i+1})\cdots(z-\alpha_n)]'$$

$\Rightarrow$

$$Q'(\alpha_i) = (\alpha_i-\alpha_1)\cdots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\cdots(\alpha_i-\alpha_n)$$

而 $\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A_1}{z-\alpha_1} + \cdots + \frac{A_n}{z-\alpha_n}$

$$P(z) = \frac{A_1 Q(z)}{z-\alpha_1} + \cdots + \frac{A_n Q(z)}{z-\alpha_n}$$

$$= A_1(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)\cdots(z-\alpha_n)$$

$$+ A_2(z-\alpha_1)(z-\alpha_3)\cdots(z-\alpha_n)$$

$$+ \cdots A_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{n-1})$$

我们要做的是解出 A_i

$P(\alpha_i) =$

$A_i(\alpha_i-\alpha_1)\cdots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\cdots(\alpha_i-\alpha_n)$

$= A_i Q'(\alpha_i)$

$\Rightarrow A_i = \frac{P(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)}$ $\forall i$ $1\le i\le n$ 成立

$$\Rightarrow \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)(z-\alpha_1)} + \cdots \frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)(z-\alpha_n)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)(z-\alpha_k)}$$

2.1.4.3

将证明其存在性和唯一性

存在性：

由 $\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)(z-\alpha_k)}$

令 $P(\alpha_k) = C_k$

$$P(z) = Q(z)\sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{Q'(\alpha_k)(z-\alpha_k)}$$

且 $\deg P(z) < n$

唯一性

假设多项式 $L(z)$ 满足

$L(\alpha_k) = C_k$ 且 $\deg L(z) < n$

$\Rightarrow P(z)-L(z)$ 是一个多项式 $\deg(P(z)-L(z)) < n$

且有n个根 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$

据 $Q(z)\sum_{k=1}^{n}\frac{C_k}{Q'(\alpha_k)(z-\alpha_k)}$

$p(z)-L(z)=0\Rightarrow p(z)=L(z)$

唯一。

当 $Q(z)=1$ 时有

$(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)=1$

$(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{j-1})(z-\alpha_{j+1})\cdots(z-\alpha_n)=\frac{1}{z-\alpha_j}$

代入 $p(z)=\sum_{k=1}^{n}c_k\prod_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{n}\frac{z-\alpha_m}{\alpha_k-\alpha_m}$

即为著明的拉格朗日插值多项式。

2.2.3.2

即证明

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(z_1-A)+(z_2-A)+\cdots(z_n-A)]=0$

因为 $\lim_{n\to\infty}z_n=A$ 由定义

$\forall\varepsilon>0\quad\exists n>N\quad s.t.$

$|z_n-A|<\varepsilon$

$\frac{1}{n}[(z_1-A)+(z_2-A)+\cdots(z_n-A)]$

$\leq\frac{1}{n}|(z_1-A)+\cdots(z_{N+1}-A)|+$

$\frac{1}{n}(|z_{N+2}-A|+|z_{N+3}-A|+\cdots|z_n-A|)$

$|(z_1-A)+\cdots(z_{N+1}-A)|$ 是一个确定的常数 而 $\lim_{n\to\infty}\frac{c}{n}=0$ c为常数

$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|(z_1-A)+\cdots(z_{N+1}-A)|<\varepsilon$

而 $\frac{1}{n}(|z_{N+2}-A|+|z_{N+3}-A|+\cdots|z_n-A|)$

$\leq\frac{1}{n}(n-N)\varepsilon=(1-\frac{N}{n})\varepsilon$

$\frac{1}{n}[(z_1-A)+(z_2-A)+\cdots(z_n-A)]\leq2\varepsilon-\frac{N}{n}\varepsilon$

$\leq2\varepsilon$

满足极限定义

$\Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(z_1-A)+(z_2-A)+\cdots(z_n-A)]=0$

2.2.3.4

$|z|\geq1$ 时 $n|z|^n\geq n$

而 $\lim_{n\to\infty}n=\infty$ 发散

$|z|<1$ 时

$\lim_{n\to\infty}n|z|^n=\frac{n}{(\frac{1}{|z|})^n}>0$

记 $\frac{1}{|z|}=a\quad a>1$

即求 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}$

令 $a=1+b\quad b>0$

$a^n=(1+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^k>\binom{n}{2}b^2$

$0<\frac{n}{a^n}<\frac{2}{b^2(n-1)}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{b^2(n-1)}=0$ 由夹逼定理

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$

$\Rightarrow n|z|^n$ 在 $|z|<1$ 时收敛

但它并不一致收敛 下证之

即证：$\exists \varepsilon_0>0 \quad \forall n>N$

$\exists |z_0| \in (0,1) \quad s.t.$

$$|f_n-f| = |n|z_0|^n| \geq \varepsilon_0$$

而 $\lim\limits_{|z_0|\to 1} n|z_0|^n = n$

取 $\varepsilon_0 \leq n$ 即可

或者用定理：

一致收敛的连续函数序列的极限函数也连续来证明

考虑其逆否命题

又知 $|z|<1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty} n|z|^n = 0$

$|z| \geq 1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty} n|z|^n = \infty$

知在 $|z|=1$ 处知其极限函数不连续

$\Rightarrow$ 不一致收敛.

2.2.4.3

(1) $a_n = n^p$

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = \left(\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{n}\right)^p = 1^p = 1$$

(2) $a_n = \frac{1}{n!}$ 收敛到 0

$\Rightarrow R=\infty$

(3) $a_n = n!$

由 $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\tfrac{1}{i})^i < e^n < \prod_{i=1}^{n}(1+\tfrac{1}{i})^{i+1}$$

$$\frac{2\cdot 3^2\cdot 4^3\cdots(n+1)^n}{1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdots n^n} < e^n < \frac{2^2\cdot 3^3\cdots(n+1)^{n+1}}{1^2\cdot 2^3\cdots n^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)^n}{e^n} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$$

夹逼 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

$\Rightarrow R=0$，仅在 $z=0$ 处收敛

(4) $a_n = q^{n^2} \quad |q|<1$

$\Rightarrow |a_n|^{\frac{1}{n}} = |q|^n \quad \lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = 0$

$\Rightarrow R=\infty$

(5) 这是一个在 $a_k=1 \ k=n!$ 其它点 $a_n=0$ 的幂级数

令 $b_k = \sqrt[k]{|a_k|} \Rightarrow b_k = 1 \quad (k=n!)$

其它点为 0

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup b_n = 1$

$\Rightarrow R=1$

2.2.4.4

$\sum a_n z^n$ 收敛半径

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

若 R' 为 $\sum a_n z^{2n}$ 收敛半径

$$R' = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \left(\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup \sqrt[n]{|a_n|}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{R}$$

R' 为 $\sum a_n^2 z^n$ 收敛半径

$$R'' = \frac{1}{R^2}$$

2.2.4.b

分两步证明，先证明

① $\sum a_n b_n z^n$ 在 R_1R_2 内收敛

再证明

② $\sum a_n b_n z^n$ 收敛半径大于等于 R_1R_2

① 假设 $\exists c \in \mathbb{R}$ $0 < c < R_1R_2$

s.t. $\sum a_n b_n z^n$ 收敛.

由于 $c < R_1R_2$

$$\Rightarrow \frac{c}{R_1} < R_2 \quad \frac{c}{R_2} < R_1$$

令 $z_1 = \frac{1}{2}(R_1 + \frac{c}{R_2}) < R_1$

$z_2 = \frac{1}{2}(R_2 + \frac{c}{R_1}) < R_2$

$\Rightarrow \sum a_n z_1^n$ 和 $\sum b_n z_2^n$ 绝对收敛

?

$\Rightarrow \sum a_n z_1^n b_n z_2^n = \sum a_n b_n z_1^n z_2^n$

绝对收敛

$$z_1 z_2 = \frac{1}{4}\left(R_1R_2 + 2c + \frac{c^2}{R_1R_2}\right)$$

$$= \frac{c}{2} + \frac{1}{4}\left(R_1R_2 + \frac{c^2}{R_1R_2}\right)$$

$$\geq \frac{c}{2} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{R_1R_2} \cdot \sqrt{\frac{c^2}{R_1R_2}}\right) = c$$

$\Rightarrow \forall\ |z| \leq c$

$\sum a_n b_n z^n$ 绝对收敛

由于 c 是任意的

$\Rightarrow \forall\ |z| < R_1R_2$

$\sum a_n b_n z^n$ 绝对收敛 $\Rightarrow$

$\sum a_n b_n z^n$ 在 R_1R_2 内绝对收敛

② 由于

$$R_1 = \frac{1}{\overline{\lim} \sup \sqrt[n]{|a_n|}} \quad R_2 = \frac{1}{\overline{\lim} \sup \sqrt[n]{|b_n|}}$$

令 R 为 $\sum a_n b_n z^n$ 的收敛半径

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sup \sqrt[n]{|a_n b_n|}}$$

$$\geq \frac{1}{\overline{\lim} \sup \sqrt[n]{|a_n||b_n|}}$$

$$= \frac{1}{\overline{\lim} \sup \sqrt[n]{|a_n|}\sqrt[n]{|b_n|}}$$

$$= \frac{1}{\overline{\lim} \sup \sqrt[n]{|a_n|}\ \overline{\lim} \sup \sqrt[n]{|b_n|}}$$

$$= R_1R_2$$

2.2.4.7

我们由以下不等式即可判断

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\le\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\le\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

先证明 $\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$

记 $\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$ 由下极限定义，$\forall\varepsilon>0\ \exists N\ s.t.\ \forall k>N\Rightarrow$

$$r-\varepsilon<\inf_{n\geq k}\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{a_{k+1}}{a_k}$$

$\Rightarrow$

$$(r-\varepsilon)^l<\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\cdot\frac{a_{N+3}}{a_{N+2}}\cdots\frac{a_{l+N+1}}{a_{l+N}}=\frac{a_{l+N+1}}{a_{N+1}}$$

$$\Rightarrow\quad(r-\varepsilon)^{\frac{l}{l+N+1}}\le\frac{1}{a_{N+1}^{\frac{1}{l+N+1}}}\sqrt[l+N+1]{a_{l+N+1}}$$

两边对 $l\to\infty$ 取下极限

$$r-\varepsilon\le\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$$

由 ε 的任意性（可据反证法易懂证明）

$$\Rightarrow\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\le\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\le\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

记 $\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$ 由上极限定义，$\forall\varepsilon>0\ \exists N\ s.t.\ \forall k>N$

$$r+\varepsilon>\sup_{n\geq k}\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq\frac{a_{k+1}}{a_k}$$

$\Rightarrow$

$$(r+\varepsilon)^l>\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\cdot\frac{a_{N+3}}{a_{N+2}}\cdots\frac{a_{l+N+1}}{a_{l+N}}=\frac{a_{l+N+1}}{a_{N+1}}$$

$$(r+\varepsilon)^{\frac{l}{l+N+1}}>\frac{1}{a_{N+1}^{\frac{1}{l+N+1}}}\sqrt[l+N+1]{a_{l+N+1}}$$

类似，不等式成立

由该不等式结合哈达马公式即证

2.3.2.1

$$\sin i=\frac{e^{-1}-e^{1}}{2i}=i\left(\frac{e}{2}-\frac{1}{2e}\right)$$

$$\cos i=\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}=\frac{1}{2e}+\frac{e}{2}$$

$$\tan(1+i)=\frac{\sin(1+i)}{\cos(1+i)}$$

$$=\frac{e^{i(1+i)}-e^{-i(1+i)}}{e^{i(1+i)}+e^{-i(1+i)}}(-i)$$

$$=\frac{e^{-1+i}-e^{1-i}}{e^{-1+i}+e^{1-i}}(-i)=\frac{e^{2i}-e^{2}}{e^{2i}+e^{2}}(-i)$$

$\cos(x+iy)$

$= \cos x \cos iy - \sin x \sin iy$

$= \frac{(e^{ix}+e^{-ix})}{2}\frac{(e^{-y}+e^{y})}{2} + \frac{(e^{ix}-e^{-ix})}{2}\frac{(e^{-y}+e^{y})}{2}$

$= \frac{1}{4}(e^{ix-y}+e^{-ix-y}+e^{ix+y}+e^{-ix+y}$

$+ e^{ix-y} - e^{-ix-y} + e^{ix+y} - e^{-ix+y})$

$= \frac{1}{2}(e^{ix-y}+e^{ix+y})$

$= \frac{1}{2}(\frac{e^{ix}}{e^{y}} + e^{ix}\cdot e^{y})$

$= \frac{1}{2e^{y}}(\cos x + i\sin x)$

$+ \frac{1}{2}e^{y}(\cos x + i\sin x)$

$= \frac{1}{2}(e^{-y}+e^{y})\cos x$

$+ \frac{1}{2}(e^{-y}+e^{y})\sin x\ i$

类似

$\sin(x+iy) = \frac{1}{2}(e^{-y}+e^{y})\sin x$

$- \frac{1}{2}(e^{-y}+e^{y})\cos x\ i$

2.3.4.1

首先明确题目要证什么.

题目要证一个级数的余项的符号和这些余数的首项相同. 比如

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ 的余项 $a_2+a_3+\ldots$

的符号和 a_2 相同.

回到题目本身.

下给出两种证法.

① 由于 $\sin(y+\frac{\pi}{2}) = \cos y$

y 的任意性和它们的对称性

我们仅证 $\cos y$ 在 $y>0$ 的情形

写出带积分余项的 Taylor 公式

$$f(y) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}y^k + \frac{1}{n!}\int_0^y (y-t)\, f^{(n+1)}(t)\,dt$$

对 $\cos y$, 令 $n=2m$

$$\cos y = \sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{(2k)!}y^{2k} + \frac{1}{(2m)!}\int_0^y (y-t)^{2m}\cos^{(2m+1)} t\,dt$$

由于 $(\cos t)' = -\sin t$

$(\cos t)'' = -\cos t$

$$\cos y = \sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{(2k)!}y^{2k} + \frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!}\int_0^y (y-t)^{2m}\cos t\,dt$$

而令 $n=2m+1$

$$\sin y=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}y^{2k+1}+\frac{1}{(2m-1)!}\int_0^y (y-t)^{2m-1}\sin^{(2m)} t\,dt$$

同样 由于 $\sin' y = \cos y$

$$\sin'' y = -\sin y$$

$$\sin y=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}y^{2k+1}+\frac{(-1)^m}{(2m-1)!}\int_0^y (y-t)^{2m-1}\sin t\,dt$$

由于前面对余项的讨论，我们仅需证明

$$\int_0^y (y-t)^k \sin t\,dt > 0$$

$\forall\, y>0$ 且 $k>0$

有 $(y-t)^k$ 是随着 t 增大严格单调递减的函数.

当 $y \geq 2\pi m$ 时

由于 $(y-t)^k$ 的单调性，代入 $t=2(m-1)\pi$

$$\int_{2(m-1)\pi}^{(2m-1)\pi}(y-t)^k\sin t\,dt > (y-(2m-1)\pi)^k\int_0^{\pi}\sin t\,dt$$

$$> \int_{(2m-2)\pi}^{2(m-1)\pi}(y-t)^k\sin t\,dt$$

由于 m 为整数 $\sin t = |\sin t|$

$$= \int_{(2m-2)\pi}^{2(m-1)\pi}(y-t)^k|\sin t|\,dt$$

若 y 不是 2π 的整数倍，上述讨论仍然成立，下证之：

$2m\pi < y < (2m+1)\pi$ 时

$$\int_{2m\pi}^{y}(y-t)^k\sin t\,dt$$

$$= \int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi}(y-t)^k\sin t\,dt - \int_{(2m+1)\pi}^{y}(y-t)^k|\sin t|\,dt$$

$$> (y-(2m-1)\pi)^k\int_0^{\pi}\sin t\,dt - (y-(2m+1)\pi)^k\int_0^{y-2m\pi}\sin t\,dt > 0$$

$$\Rightarrow \int_0^y (y-t)^k\sin t\,dt > 0$$

□

② 下面先证对所有交错级数 $\sum(-1)^n a_n$ 或 $\sum(-1)^{n+1}a_n$，其中 a_n 单调递减趋于零均成立余项的符号和余项首项的符号一致。再证 $\cos y$，$\sin y$ 的泰勒级数是满足 $\sum(-1)^n a_n$ 或 $\sum(-1)^{n+1}a_n$，其中 a_n 单调递减趋于零的。

(a)

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$$

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_n$$

又 S_{2n} 单调递减

S_{2n+1} 单调递增

$\Rightarrow \quad S_{2n+1}\leq S\leq S_{2n+2}\leq S_{2n}$

$\Rightarrow \quad u_{2n+1}\leq r_{2n+1}=S-S_{2n}\leq 0$

且 $\quad 0\leq r_{2n+2}=S-S_{2n+1}\leq u_{2n+2}$

r 是余项.

$\Rightarrow \quad |r_n|\leq |u_n|$

下面

$\cos y=\sum_{i=n}^{\infty}(-1)^i\frac{x^{2i}}{(2i)!}$

但 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对一致收敛因为

$\forall x\in\mathbb{R} \quad N\in\mathbb{Z}$ 且 $N>|x|$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right|=\left|\sum_{n=0}^{N-1}\frac{x^n}{n!}+\sum_{N}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right|$$

$$\leq\sum_{n=0}^{N-1}\frac{|x|^n}{n!}+\sum_{N}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!}$$

而 $\sum_{N}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!}\leq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n|x|^N}{n!N^n}$

$$\Rightarrow \quad <\sum_{n=0}^{N-1}\frac{|x|^n}{n!}+\frac{|x|^N}{N!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{N^n}$$

$\sum_{n=0}^{N-1}\frac{|x|^n}{n!}$ 是有限和

$\frac{|x|^N}{N!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{N^n}$ 是 $\left|\frac{x}{N}\right|^n$ 的几何级数，收敛

$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 绝对收敛.

或据比值判别法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{(n+1)!}=0$$

2.3.4.2

先给出 π 的定义

$\pi=2\sup\{t\geq 0:\ \forall s$

$0\leq s\leq t$，$Re(e^{is})\geq 0$ 且 $Im(e^{is})\geq 0\}$

已知 $e^{\frac{\pi}{2}i}=i \quad e^{\pi i}=-1$

$e^{2\pi i}=1$.

令集合 $\{t\geq 0: \forall s$

$0\leq s\leq t$, $Re(e^{is})\geq 0$ 且

$Im(e^{is})\geq 0\} \triangleq S$

S 具有如下性质

$\forall x\in S$ 则 $\forall y$ 满足

$0<y<x$, $y\in S$.

要证 $\pi>3$ 即证 $\frac{3}{2}\in S$

又 $e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} i$

$= 0 + i = i$

$Re(e^{\frac{3}{2}i}) = 1 - \frac{\frac{9}{4}}{2} + \frac{\frac{81}{16}}{4!} = \frac{11}{128} > 0$

$Im(e^{\frac{3}{2}i}) > 0$

又由莱布尼茨定理，它们的误差估计满足要求

$\Rightarrow \frac{3}{2}\in S$.

对于 $\sqrt{3}$

$Re(e^{\sqrt{3}i}) = 1-\frac{3}{2}+\frac{9}{4!} = -\frac{1}{8}<0$

同理 $\sqrt{3}\notin S$

$\Rightarrow 3<\pi<2\sqrt{3}$

2.3.4.3

$e^{-\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2} = -i$

$e^{\frac{3\pi}{4}i} = \cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

2.3.4.4

我们有 $\log w = \log|w| + i\arg w$

$\arg w = \theta$

而 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$\arg 2 = 2(1+0)$

$\arg w = 0$ 同理

$\arg(-1) = \pi \quad \arg i = \frac{\pi}{2}$

$\arg(-\frac{i}{2}) = -\frac{\pi}{2}$

$\arg(-1-i) = \arg(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i) = -\frac{3\pi}{4}$

$\arg(1+2i) = \arctan 2$

$\Rightarrow$ 由 $\log w = \log|w| + i\,\mathrm{arc}\,w$

$z(2) = \log 2 + 2\pi n i$

$z(-1) = \log|-1| + (\pi+2\pi n)i$

$z(i) = (2n+\frac{1}{2})\pi i$

… 均加上周期 $2\pi n$ 即可