时间最优控制理论

（汪更生 2022 成都 暑期）

第一章 简介

· 整个讲义中的控制系统以 O.D.E 为基础，以 P.D.E 为延伸。

· 回顾具有终端约束的最优控制问题：

$$(\mathrm{P}) \qquad \inf_{u\in\mathcal{U}_c} J(u) \triangleq \inf_{u\in\mathcal{U}_c} \int_0^T f^0(t, y, u)\,dt \qquad (1)$$

（其中，T 为固定的终端时间，f^0 为给定函数，y 为控制方程的解，u 为控制，$\mathcal{U}_c$ 为控制约束集）

$y(\cdot) \equiv y(\cdot\,; y_0, u)$ 为下列控制方程之解：

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), u(t)), & t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad (2)$$

（其中，f 为给定的函数，y_0 为给定的初始状态。）

且 $$y(T) = y_T \qquad (3)$$

（其中，y_T 为给定的终端状态）

这里涉及两个空间：状态空间 Y（讲~~义~~中要么 $\mathbb{R}^n$ 或一个 Hilbert 空间），它是 (2) 的解曲线所在的空间；控制空间 U（要么 $\mathbb{R}^m$ 或一个 Hilbert 空间）。

· $\mathcal{U}_c$ 的元是从 $\mathbb{R}^+ \triangleq [0, +\infty)$ 到 U 上的函数，它们满足一定的约束条件。例如，

$\mathcal{U}_c = \{ u: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^m 可测 \mid |u_i(t)| \le a_i,\ i=1,\cdots,m \}$

（上式中 $u=(u_1,\cdots,u_m) \in \mathbb{R}^m$，$a_i > 0$ 给定）

这时的控制约束称为矩形型约束.（它不易推广到无限维）。

又例如，$\mathcal{U}_c = B(0,r) \triangleq \{ u: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^m 可测 \mid \|u(t)\| \le r \}$

（上式中 $r>0$）. 它易于推广到无穷维。

• (3) 也可有一般形式：$y(T) \in S \subset Y$.

在问题 (P) 中，J 称为 cost functional（它是关于控制函数的泛函）；$\mathcal{U}_c$ 称为控制约束集合；y_T（或 S）称为目标集。

• 当 T "动起来" 时，问题 (P) 就变成了一个时间最优控制问题 (TP)，再求 Inf 就得考虑 "动起来的" T 了. 对于时间最优控制问题，我们可以做许多问题，一般关心：

(i) 最优控制的存在性；

(ii) 最优控制与最优时间满足的充要条件、一阶必要条件、二阶充分条件等.

(iii) 最优控制的性质、最优时间的计算等.

有限维 ODE 的时间最优控制问题研究时间较长，对于线性 ODE，理论基本完善，但对非线性 O.D.E，大有可为。

无限维 P.D.E. 的时间最优控制问题的理论~~最~~还不完善.

我们将介绍两类特殊的时间最优控制问题，它们是典型的。

问题I　最短时间控制问题 $(TP)_1$，它是 (TP) 中 $f^0=1$ 的情形.

$(TP)_1$
$$\inf_{u\in\mathcal{U}_c}\{T \mid y(T;y_0,u)=y_T\}$$

- 以后用 $y(\cdot\,;y_0,u)$ 表示 (2) 的对应初值 y_0，控制 u 的解.
- $(TP)_1$ 是依赖 y_0 的.
- 我们总假设 $y_0\neq y_T$（或 $y_0\notin S$），否则问题归于平凡.

关于 $(TP)_1$，给出如下定义：

(D1) 令 $T^*=\inf\limits_{u\in\mathcal{U}_c}\{T \mid y(T;y_0,u)=y_T\}$.

称 T^* 为最优时间.

(D2) 若 $v\in\mathcal{U}_c$ 满足：$\exists\, T>0$ s.t. $y(T;y_0,v)=y_T$，则称 v 为一个允许控制，对应的解 $y(\cdot\,;y_0,v)$ 称为允许轨线（或允许状态）。

(D3) 若 $u^*\in\mathcal{U}_c$ 满足 $y(T^*;y_0,u^*)=y_T$，则称 u^* 为最优控制，对应的 $y(\cdot\,;y_0,u^*)$ 称为最优轨线（或最优状态）。

注1　对每个允许控制 v，其允许轨线有一个第一时间到达目标（这只需要轨线关于时间的连续性），它是 $y(\cdot\,;y_0,v)$ 到达 y_T 的最短时间，而 T^* 是所有允许轨线到达目标的最短时间.

注2　$(TP)_1$ 的复杂性：令 $T(\cdot): \mathcal{U}_c \to [0,+\infty]$ 定义如下：

$$T(u) \triangleq \{ y(\cdot\,; y_0, u) \text{ 达到目标的第一时间} \}.$$

于是，$(TP)_1$ 是这样一个变分问题：

$$\inf_{u \in \mathcal{U}_c} T(u).$$

而 $T(\cdot)$ 如何依赖 u？这相当复杂！

注3　$(TP)_1$ 应用背景：通过控制 s.t. 的轨线在最短时间击中目标.

问题 II　最长时间控制问题.

给定 $\hat{T} > 0$. 考虑控制系统：

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), u(t)), & t \in [0, \hat{T}], \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad (2)'$$

给定目标 y_T (或 S).

$$(TP)_2 \qquad \sup_{u \in \mathcal{U}_c} \{ 0 \le T \le \hat{T} \mid y(T; y_0, \chi_{[T,\hat{T}]} u) \},$$

其中 $\chi_{[T,\hat{T}]}$ 为 $[T, \hat{T}]$ 的特征函数。

类似地，可以定义 $(TP)_2$ 的最优时间、允许控制、最优控制等。

- $(TP)_2$ 要求在 $[0, \hat{T}]$ 上尽可能晚地开始控制 s.t. 轨线在 $\hat{T}$ 达到目标.

<u>应用背景</u>　在"从时刻 $t=0$、位置 y_0 发射，在时刻 T，位置 y_T 接收的飞行器的过程中"，使得打开控制器的时间最晚。

<u>注</u>　对不少研究对象而言，$(TP)_2$ 比 $(TP)_1$ 简单.

参考书

[1] H. O. Fattorini. Infinite Dimensional Linear Control Systems, the time and Norm optimal problems. North-Holland Math. studies, 2005.

[2] G. Wang, L. Wang, Y. Xu, Y. Zhang. Time Optimal Control of Evolution Equations, Birkhäuser, 2018.

[3] X. Li, J. Yong, Optimal Control Theory for Infinite-Dimensional Systems, Birkhäuser, 1995.

[4]. E. D. Sontag, Mathematical Control Theory. Deterministic Finite-Dim. Systems, Texts in Applied Mathematics, 6, Springer-Verlag, New York, 1998.

[5] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mischenko, The Mathematical Theory of Optimal Processes. Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc. New-York-London, 1962.

第二章　时间最优控制的存在性

在这一章，我们总取目标集为 $\{0\}$ ～ 状态空间的原点。

我们将介绍某些 $(TP)_1$（第一类时间最优控制，或最短时间控制）的最优控制的存在性。注意：$(TP)_1$ 依赖初值 y_0，故可记为 $(TP)_{1,y_0}$。于是存在性有两种：其一，给定 y_0，(证明) $(TP)_{1,y_0}$ 存在最优控制；其二，对任意 y_0，$(TP)_{1,y_0}$ 有最优控制。前者称 $(TP)_1$ 最优控制"局部"$\exists$；后者称 $(TP)_1$ 最优控制整体存在。由此还产生了下列问题：

令 $\hat{Y} \triangleq \{ y_0 \mid (TP)_{1,y_0}$ 存在最优控制 $\}$.

求 $\hat{Y}$。

推导 $(TP)_{1,y_0}$ 的最优控制存在性，分为两个过程：

过程一：证明允许控制的存在性。

过程二：由允许控制的存在性，结合方程，推出最优控制的存在性。

最优控制的存在性是 (TP) 问题的基本问题。

§2.1. 过程二.

从下面例子看怎么做.

$$(TP)_1 \qquad \inf_{u\in\mathcal{U}} \{ T \mid y(T; y_0, u) = 0 \} \qquad (1)$$

其中，$\mathcal{U}_c \triangleq \{u(\cdot): \mathbb{R}^+ \to X \text{ 可测} \mid \|u(t)\| \le r\}$；

目标集为 $\{0\}$；控制方程为

$$\begin{cases} y' = f(y, u), & t \ge 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{2}$$

假设 $(TP)_{1,y_0}$ 有一个允许控制，~~如何推出其最优控制的~~存在性？这当然需要对 f 作一些假设（它们需要我们探索）

令 $\mathcal{U}_{ad}\{y_0\} \triangleq \{u \in \mathcal{U}_c \mid \exists\ T \text{ s.t. } y(T; y_0, u) = 0\}$.

则 $\mathcal{U}_{ad}(y_0)$ 是 $(TP)_{1,y_0}$ 的允许控制集。于是，

问题 (1) $\Longleftrightarrow$ 下列问题：

$$\inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}(y_0)} T(u) \tag{3}$$

$\mathcal{U}_{ad}(y_0) \ne \phi \Longleftrightarrow (TP)_{1,y_0}$ 有允许控制。我们很难从 (3) 出发进行过程：允许控制 $\exists \Longrightarrow$ 最优控制 $\exists$。原因：$T(\cdot): u \to T(u)$ 是一个复杂的泛函。

注 研究泛函 $T(\cdot): u \to T(u)$ 是一个有意义的研究，例如：能否对某些例子给出 $T(u)$ 的表达式？退而求次，能否得到 $T(u)$ 的一些性质？

我们下面介绍的是通用方法（仅介绍思路）：

令 $T^* = \inf_{u \in \mathcal{U}_c} \{T \mid y(T; y_0, u) = 0\}$.

$\because\ \mathcal{U}_{ad}(y_0) \neq \phi$，$\therefore \exists\ t_k \searrow T^*$，$\exists\ u_k \in \mathcal{U}_c$ s.t.

$y(t_k; y_0, u_k) = 0 \quad \forall k.$

令 $\quad y_k(t) \triangleq y(t; y_0, u_k), \quad t \geq 0, \quad k = 1, 2\cdots$

$f_k(t) \triangleq f(y_k(t), u_k(t)), \quad t \geq 0, \quad k = 1, 2, \cdots.$

回到方程 (2) 有

$$\begin{cases} y_k'(t) = f_k(t) \\ y_k(0) = y_0 \end{cases} \tag{3}$$

我们有的条件如下：

(i) $\{u_k\} \subset \mathcal{U}_c$ (隐含 $\{u_k\}$ 在 $L^\infty(\mathbb{R}^+; U)$ 中有界)；

(ii) f 可假设满足一些条件；

(iii) 对每个 k，方程 (3) 成立；

(iv) $t_k \searrow T^*$.

从 (i)—(iv)，我们 (希望) 得到

$u_k \longrightarrow \hat{u} \in \mathcal{U}_c$ (在适当空间、适当拓扑下)；

$y_k(\cdot) \longrightarrow \hat{y}(\cdot)$ (在适当空间适当拓扑下)；

$y_k(t_k) \longrightarrow \hat{y}(T^*)$ (在 X 中适当拓扑下)；

$f_k(\cdot) \longrightarrow f(\hat{y}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ 在适当空间、适当拓扑下.

希望：由以上的收敛性，我们可以在 (3) 中取极限 $\lim\limits_{k\to\infty}$ 得

$$\begin{cases} \hat{y}'(t) = f(\hat{y}(t), \hat{u}(t)), & t \in [0, T^*], \\ \hat{y}(0) = y_0 \\ \hat{y}(T^*) = 0 \\ (\text{Note that } \hat{u} \in \mathcal{U}_c) \end{cases} \quad (*)$$

由 (*) 知：$\hat{u}$ 是一最优控制 而 $\hat{y}$ 是相应的最优轨线.

<u>小结</u> 在<u>过程二</u>中，主要是想法得到相应的收敛性使得可以在(3)中取极限。而这些收敛性来源于：

(i) $\{u_k\}$ 收敛性从 $\mathcal{U}_c$ 中来；

(ii) $\{y_k\}$ 从方程中来.

§2.2 过程一（允许控制的存在性）

§2.2.1. 例子.

首先注意：“$\forall y_0$, $(TP)_{1,y_0}$ 有允许控制”意味下列有约束的能控性：“$\forall y_0$, $\exists\, u_{y_0} \in \mathcal{U}_c$, $\exists\, \hat{T}_{y_0} > 0$ s.t. $y(\hat{T}_{y_0}; y_0, u_{y_0}) = 0$”。后者与我们熟知的 $[0,T]$ 上的零能控不一样。我们通常的能控性中的控制没有约束 (i.e. $u \in L^p(0,T;U)$) 而终端时刻 T 固定。但即使不固定 T，有约束的零能控性与无约束的也有本质区别.

下面的例子可以给我们某些提示。

$\mathbb{R}^1$ 中的控制方程：$y' = \pm y + u$ （对应 $y' = Ay + Bu$）。

由 Kalman 秩条件知：它们在任何 $[0, T]$ 上（无约束）零能控（等价于精确能控）。但一旦有了控制约束：

$$u \in \mathcal{U}_c \triangleq \{u \text{ 可测} \mid |u(t)| \leq 1 \ \ a.e.\ t\},$$

结果就完全不一样了。这时，

- 约束零能控 $\not\Rightarrow$ 约束精确能控.
- (A, B) 满足 Kalman $\not\Rightarrow$ 约束零能控.
- (A, B) 满足 Kalman $+$ $\sigma(A)$ 的条件 $\Rightarrow$ 约束零能控。

(5)

先看 $y' = y + u$，$y(0) = y_0$.

$\because$ $y(t) = e^t y_0 + \int_0^t e^{(t-s)} u(s)\,ds$

$\therefore$ $y(t) = 0 \iff y_0 = -\int_0^t e^{-s} u(s)\,ds.$

上面右边 $\Rightarrow$ $|y_0| \leq \int_0^t e^{-s}\,ds$ （$\because |u(s)| \leq 1 \ \ a.e.\ s$）

$= 1 - e^{-t}$

这对 $|y_0| \geq 1$ 显然不对，

故 (5) 不是约束零能控的。但对小的 y_0，$\exists\ u \in \mathcal{U}_c$ 将 y_0 达到 0.

在这个例子中，$A = [1]$，$\sigma(A) = 1$ $\therefore$ A 不稳定.

再看 $$y' = -y + u, \quad y(0) = y_0. \tag{6}$$

在(6)中，$A = [-1]$，$B = [1]$. (A,B)满足 Kalman，

$\sigma(A) = \{-1\}$ 好！ i.e. A 稳定。

$\because$ $$y(t) = e^{-t}\left[y_0 + \int_0^t e^s u(s)\,ds\right] \quad \forall t > 0. \tag{7}$$

取 $\hat{T} > 0$ s.t. $|e^{-\hat{T}} y_0| \leq \delta < 1$.

令 $\tilde{T} > \hat{T}$ s.t. $(\tilde{T} - \hat{T})\delta \leq 1$.

令 $$u_{y_0,\tilde{T}}(s) = \begin{cases} 0, & s \in [0, \hat{T}] \\ (\tilde{T} - \hat{T})\, y_0 e^{-s}, & s > \hat{T}. \end{cases}$$

显然， $|u_{y_0,\tilde{T}}(s)| \leq 1$ a.e. s. 故 $u_{y_0,\tilde{T}} \in \mathcal{U}_c$.

此外，
$$\int_0^{\tilde{T}} e^s u_{y_0,\tilde{u}}(s)\,ds = \int_{\hat{T}}^{\tilde{T}} y_0 \cdot (\tilde{T} - \hat{T})\,ds = y_0. \tag{8}$$

由(7)和(8)得： $y(\tilde{T}; y_0, u_{y_0,\tilde{T}}) = 0$.

由此，我们推导出： $\forall y_0$，$(TP)_{1,y_0}$ 有允许控制.

($\Leftrightarrow$ (6)是约束零能控的)

但可验证：(6)不是约束精确能控的.

§ 2.2.2 一般线性系统的允许控制的存在性.

$$y' = A(t)y + B(t)u, \quad t > 0 \qquad (\rho)$$

$A(\cdot) \in L^{\infty}_{loc}(R^+; R^{n\times n})$, $B(\cdot) \in L^{\infty}(R^+; R^{n\times m})$.

给定 $r > 0$，令

$$\mathcal{U}_c \triangleq \mathcal{U}_c(r) \triangleq \{u: R^+ \to R^m \text{ 可测} \mid |u(t)| \le r \text{ a.e.}\}.$$

记 $y(\cdot; y_0, u)$ 为 (ρ) 对应 u 且满足 $y(0)=y_0$ 之解.

假设 $y_0 \neq 0$，考虑时间最优控制问题：

$$(TP)_{1,y_0,r} \qquad \inf_{u \in \mathcal{U}_c(r)} \{T > 0 \mid y(T; y_0, u) = 0\}.$$

对这个问题，我们可以给出 (A, B) 满足的充要条件 s.t.

$\forall r$, $\forall y_0$, $(TP)_{1,y_0,r}$ $\exists$ 允许控制.

首先，定义下列 (ρ) 的能控集：

$$Y_c^r(t) \triangleq \{y_0 \in Y \mid \exists u \in \mathcal{U}_c(r) \text{ s.t. } y(t; y_0, u) = 0\}.$$

称之为 (ρ) 在 t 时刻的能控集.（实际上是零能控集.）

设 $$Y^r \triangleq \bigcup_{t>0} Y_c^r(t) = \{y_0 \in Y \mid \exists \hat{u} \in \mathcal{U}_c^r, \exists \hat{t} > 0 \text{ s.t. } y(\hat{t}; y_0, \hat{u}) = 0\}$$

称之为 (ρ) 的能控集.

命题 2.1 设 $r>0$, $y_0\in\mathbb{R}^n$。则 $(TP)_{1,y_0,r}$ 有允许控制当且仅当 $y_0\in\nabla^r$.

命题 2.2 令 $r>0$. 则下列命题成立.

(i) $\forall\, t>0$, $\nabla_c^r(t)$ 是凸的、闭的和对称的 (i.e., $y_0\in\nabla_c^r(t)$ iff $-y_0\in\nabla_c^r(t)$).

(ii) 若 $0<t_1\le t_2$, 则 $\nabla_c^r(t_1)\subseteq\nabla_c^r(t_2)$.

(iii) ∇_c^r 是凸的且对称的.

定义 令 $r>0$. 称 (P) 是全体具有 r-球约束零能控的, 若 $\forall\, y_0\in\mathbb{R}^n$ $\exists\ u\in\mathcal{U}_c(r)$, $\exists\, T>0$ s.t. $y(T;y_0,u)=0$.

记 $\Phi(t,s)$ 为 $A(t)$ 产生的转移矩阵, 则

$$y(t;y_0,u)=\Phi(t,0)y_0+\int_0^t\Phi(t,s)B(s)\,ds. \qquad (10)$$

定理 2.1 下列命题等价:

(i) $\forall\, r>0$, (P) 是全体具有 r-球约束零能控的.

(ii) $[A(\cdot),B(\cdot)]$ 满足下列 Conti 条件: 若 φ 是下列对偶系统之非0解:

$$\dot\varphi=-A(t)^*\varphi(t),\quad t\in(0,\infty), \qquad (11)$$

则

$$\int_0^\infty\|B(s)^*\varphi(s)\|\,ds=+\infty. \qquad (12)$$

(iii) $\forall\, r>0$，(9) 的能控集 $\mathcal{Y}_c^r$ 是整个状态空间 $\mathbb{R}^n$.

(iv) $\forall\, r>0$，$\forall\, \varphi_0\neq 0$，$(TP)_{1,\varphi_0,r}$ 有允许控制。

<u>证明</u> (i) ⇒ (ii) 假设 (i) 成立。任给 $\varphi_0\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. 令 φ 是 (10) 的具有初值 $\varphi(0)=\varphi_0$ 的解. 令 $r>0$. 由 (i) 知：对每个 $k\varphi_0$ $(k=1,2,\cdots)$，$\exists$ $t_k>0$ 和 $u_k\in\mathcal{U}_c^r$ s.t.

$y(t_k;\,-k\varphi_0,\,u_k)=0$。于是由 (10) 以

$$\Phi(t_k,0)(-k\varphi_0)+\int_0^{t_k}\Phi(t_k,s)B(s)u_k(s)ds=0.$$

上式推出

$$k\varphi_0=\int_0^{t_k}\Phi(s,0)^{-1}B(s)u_k(s)ds,\ \forall k. \quad (13)$$

因为 $\|u_k(s)\|_{\mathbb{R}^m}\le r$ a.e. $s\in(0,t_k)$，我们有

$$\int_0^{\infty}\|B(s)^*\varphi(s)\|_{\mathbb{R}^m}ds$$

$$\ge\int_0^{t_k}\|B(s)^*\varphi(s)\|_{\mathbb{R}^m}ds$$

$$\ge\frac{1}{r}\int_0^{t_k}\langle B(s)^*\varphi(s),\,u_k(s)\rangle_{\mathbb{R}^m}ds. \quad (14)$$

此外，我们还有

$$\varphi(s)=\left[\Phi(s,0)^{-1}\right]^*\varphi_0 \qquad \forall\ s\ge 0. \quad (15)$$

由 (13), (14), (15) 得

$$\int_0^\infty \|B(s)^*\varphi(s)\|\,ds \ge \frac{1}{r}\int_0^{t_k} \langle \varphi_0, \varphi(s,0)^{-1}B(s)u_k(s)\rangle ds$$

$$= \frac{k}{r}\|\varphi_0\|^2.$$

在上式中，令 $k\to\infty$，得 (12).

(附：关于 (15) 的证明：令 $y(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$ 为 $y'=A(t)y(t)$ 与

$\varphi'=-A(t)^*\varphi(t)$ 之解. 则 $y(t)=\Phi(t,s)y(s)$ $\forall t\ge s$.

$\therefore$ $y(s)=\Phi(T,s)^{-1}y(T)$ $\forall\ s\le T$.

注意 $$\frac{d}{dt}\langle\varphi(t), y(t)\rangle = \langle\varphi', y\rangle + \langle\varphi, y'\rangle$$

$$= \langle -A(t)^*\varphi, y\rangle + \langle\varphi, A(t)y\rangle = 0.$$

在上式中对 t 从 S 到 T 积分得

$$\langle\varphi(T), y(T)\rangle = \langle\varphi(s), y(s)\rangle$$

$$= \langle\varphi(s), \Phi(T,s)^{-1}y(T)\rangle$$

$$= \langle[\Phi(T,s)^{-1}]^*\varphi(s), y(T)\rangle.$$

上式对任何 $y(T)\in\mathbb{R}^n$ 成立，故有

$$\varphi(T) = [\Phi(T,s)^{-1}]^*\varphi(S) \qquad \forall\ s\le T.$$

$$\therefore\quad \varphi(t) = [\Phi(t,0)^{-1}]^*\varphi(0), \quad \forall\, t\ge 0.$$)

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 矛盾地假设 (ii) 对但 (iii) 不对。则 $\exists\, r_0 > 0$ s.t.

$\mathcal{V}_c^{r_0} \neq \mathbb{R}^n$. 于是 $\partial \mathcal{V}_c^{r_0} \neq \phi$. 又 $\because$ $\mathcal{V}_c^{r_0}$ 凸 (命题

2.2) $\therefore$ 由分离定理 $\Rightarrow$: 对任意固定的 $z \in \partial \mathcal{V}_c^{r_0}$,

$\exists\ \lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ s.t.

$$\langle \lambda, y \rangle_{\mathbb{R}^n} \leq \langle \lambda, z \rangle_{\mathbb{R}^n} \quad \forall\ y \in \mathcal{V}_c^{r_0}. \qquad (16)$$

与此同时，任意固定 $t > 0$，再定义如下控制：

$$u(s) \triangleq \begin{cases} r_0 \dfrac{B(s)^* \left(\Phi(s,0)^{-1}\right)^* \lambda}{\| B(s)^* \left(\Phi(s,0)^{-1}\right)^* \lambda \|} & \text{if 分母} \neq 0, \\ 0 & \text{if 分母} = 0. \end{cases}$$

则可直接验证：

$$\left\langle \lambda, \int_0^t \Phi(s,0)^{-1} B(s)\, u(s)\, ds \right\rangle = r_0 \int_0^t \| B(s)^* \varphi(s) \|\, ds, \qquad (17)$$

其中 $\varphi(\cdot)$ 为 (11) 满足 $\varphi(0) = \lambda$ 之解.

由 (16), (17) 有

$$\int_0^t \| B(s)^* \varphi(s) \|\, ds \leq \frac{1}{r_0} \langle \lambda, z \rangle \qquad \forall\, t > 0.$$

上式推得

$$\int_0^{\infty} \| B(s)^* \varphi(s) \|\, ds \leq \frac{1}{r_0} \langle \lambda, z \rangle,$$

这与 (ii) 矛盾. $\therefore$ (ii) $\Rightarrow$ (iii).

(iii) ⇒ (iv) 是根据命题 2.1；(iv) ⇒ (i) 是根据定义.

这样，我们完成了定理 2.1 的证明. ※.

当 [A, B] 时不变时，方程为

$$y' = Ay + Bu, \quad t > 0. \qquad (9)'$$

这时对应的 Conti 条件（它是对偶方程组的一个条件）是 [A, B] 满足的秩条件与 A 的谱条件.

<u>定理 2.2</u> 下列命题等价

(i) [A, B] 满足 Conti 条件.

(ii) [A, B] 满足：(a1) $\mathrm{rank}(B, AB, \cdots, A^{n-1}B) = n$. (18)

(a2) $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}^- \triangleq \{c \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(c) \leq 0\}$. (19)

<u>注1</u> 将定理 2.1 推广到无穷维系统有意义. K. D. Phung, Xu. Zhang, G. Wang (2006) 做过探索，不完善.

<u>注2</u> 若仅仅来考虑这样的 $(TP)_1$：

- 方程的初始：$y(0) = 0$
- 目标 y_E 为 $\mathbb{R}^n$ 中任一点.

记为 $(TP)_1^{y_E}$

问："$\forall\, y_E$, $(TP)_1^{y_E}$ 有允许控制" ⟺ $(A(t), B(t))$ 满足什么？

当 (A,B) 时不变时，将定理 2.2 中的 (ii) 换成：$\sigma(A)\subseteq \mathbb{C}^+$.

这些在 E.D. Sontag 1988年的书中有。但对 $(A(t),B(t))$ 不知道.

§2.2.3. 一个半线性热方程的允许控制的存在性.

控制方程为

$$\begin{cases} y_t-\Delta y+f(y)=\chi_\omega u & \text{in } \Omega\times(0,\infty), \\ y=0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,\infty), \\ y(x,0)=\hat{y}_0(x)\in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (20)$$

这里，$\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$ $(d\geq 1)$ 为一有界光滑区域；$\omega\subset\Omega$ 为一非空开集（χ_ω 为 ω 的特征函数）；$\hat{y}_0\in L^2(\Omega)$；u 属于下列的集：

$$\mathcal{U}_c(\rho)\triangleq\{u:(0,\infty)\to L^2(\Omega) \text{ 可测} \mid \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}\leq\rho \text{ a.e.}\};$$

而 f 满足.

(A1) f 是全体 Lip 且连续可微.

(A2) $f(r)r\geq 0 \quad \forall r\in\mathbb{R}$.

$$(TP)_{1,\hat{y}_0}:\quad \inf_{u\in\mathcal{U}_c(\rho)}\{T \mid y(T;\hat{y}_0,u)=0\}.$$

（目标集是 $L^2(\Omega)$ 中的原点！）.

这时，状态空间 $=L^2(\Omega)=$ 控制空间. 控制算子为 χ_ω.

回顾 1：(20) 在 t 时刻的能达集为

$$Y_c^{\rho}(t)=\{y_0\in Y \mid \exists\, u\in \mathcal{U}_c(\rho) \text{ s.t. } y(t;y_0,u)=0\}.$$

(20) 的能控~~制为~~集为：

$$Y_c^{\rho}=\{y_0\in Y \mid \exists\, \hat{t}>0,\ \exists\, \hat{u}\in \mathcal{U}_c(\rho) \text{ s.t. } y(\hat{t};y_0,\hat{u})=0\}.$$

回顾 2：对固定的 $\rho>0$，有

"$\forall\, \hat{y}_0$，$(TP)^{\rho}_{1,\hat{y}_0}$ 有允许控制" Ⅲ "$Y_c^{\rho}=Y\,(=L^2(\Omega))$".

<u>定理 2.3</u>　$\forall\, \rho>0$ 有 $Y_c^{\rho}=Y$.

<u>注</u>　上面定理说明 $\forall\, \rho>0$，$\forall\, y_0\in Y$，$(TP)^{\rho}_{1,y_0}$ 有允许控制.

下面介绍证明思路：　固定 $\rho>0$.

<u>Step 1.</u>　证明 (20) 具有下列零终能控性：

$\exists\, K>0$ s.t. $\forall\, z_0\in L^2(\Omega)$，$\exists\, u\in L^{\infty}(0,1;L^2(\Omega))$ with

$$\|u\|_{L^\infty_t L^2_x}\le K\|z_0\|_{L^2_x}$$

s.t. 下列方程存在 $z\in C([0,1];L^2_x)$：

$$
\begin{cases}
z_t - \Delta z + f(z) = \chi_\omega u & \text{in } \Omega \times (0,1), \\
z = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,1), \\
z(0) = z_0 & \text{in } \Omega, \\
z(1) = 0 & \text{in } \Omega.
\end{cases} \tag{21}
$$

证明手段： Kakutani 不动点定理 + (20) 的线性化方程的能控性.

这是处理半线性热方程的零能控常用手段. 需要说明：这一手段一般只能证到 (20) 的局部零能控 (在 [0,1] 上), i.e., $\exists\, \delta > 0$ s.t. 当 $\|z_0\| \le \delta$ 时, $\exists\, u_{z_0}$ s.t. $z(1; z_0, u_{z_0}) = 0$.

但我们的 (A1), (A2) 很强，保证了 (20) 的全体零能控. 在这方面 X. Zhang 曾证到过一个最优结果：当 $f(r) \sim r(\ln r)^{\frac{3}{2}}$ 时，有全体零能控。

Step 2. 利用 (21) 的解的衰减性：

$$\|y(t_0)\|_{L^2_x} \le e^{-\lambda_1 t_0} \|y_0\|_{L^2_x} \quad \forall\, t_0 > 0$$

(λ_1 为 $-\Delta$ 第一特征值).

我们先让方程 (20) 无控制地走一段时间：

$$
\begin{cases}
y_t - \Delta y + f(y) = \chi_\omega \cdot 0 & \text{in } [0, t_0] \\
y(0) = y_0
\end{cases}
$$

取 $t_0 \gg 1$ s.t. $\|y(t_0; y_0, 0)\|_{L^2_x} \ll 1$. 再利用 step 1，

通过在 $[t_0, t_0+1]$ 上加控制 $\hat{u}$：

$$\hat{u}(t) \triangleq \begin{cases} 0 & \text{in } [0, t_0] \\ u(t) & \text{in } [t_0, t_0+1] \end{cases}$$

s.t. $y(t_0+1, y_0, \hat{u}) = 0$

而 $\|\hat{u}(t)\|_{L^2_x} \leq K \cdot \|y(t_0; y_0, 0)\|_{L^2_x} \leq \rho$.

故 $\hat{u} \in \mathcal{U}_c^{\rho}$. $\therefore$ $\hat{u}$ 是 $(TP)^{\rho}_{1, y_0}$ 的允许控制.

<u>注</u> 条件 (A1), (A2) 可以放松，研究放松到 X. Zhang 的最优情形 $f(r) \sim r(\ln r)^{\frac{3}{2}}$ 是一个好问题.

<u>补充问题</u> 对 T-周期的 $[A(t), B(t)]$, i.e.

$$A(T+t) = A(t), \quad B(T+t) = B(t), \quad \text{a.e. } t.$$

利用 Poincare map 以及 X. Xu 和 G. Wang (2018) 的书（关于周期的稳）中的方法，应该可以得到 $[A(t), B(t)]$ 约束零能控(条件) 的一个充要条件（不是定理 2.1，而是定理 2.2 的形式）.

本章最后，我们证明定理 2.2.

这时，$\varphi' = -A^*\varphi$ 的解为 $\varphi(t) = e^{-A^*t}\varphi(0)$.

Step 1. 证明 (12) $\Rightarrow$ (18) 和 (19).

矛盾地假设 (12) 对但 (18) 与 (19) 中有一个不对。

情形1. (18) 不对。则 $\exists\ \eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ s.t.

$$\eta^T A^k B = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

上式结合 Cayley 定理推出

$$\eta^T e^{tA} B = 0 \quad \forall\ t \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

令 $\hat\varphi(\cdot)$ 为 $\varphi'(t) = -A^*\varphi(t)$, $\varphi(0) = \eta$ 之解.

由 (22) 得 $\quad B^*\hat\varphi(t) = 0 \quad \forall\ t \in (0, \infty)$. 这与 (12) 矛盾.

情形2. (19) 不对。则 A^* 有一个特征根 $\alpha + i\beta$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

(这里用了 $\sigma(A) = \sigma(A^*)$). 设 $\xi_1 + i\xi_2$ ($\xi_i \in \mathbb{R}^n$) 为对应的特征向量, i.e.,

$$A^*(\xi_1 + i\xi_2) = (\alpha + i\beta)(\xi_1 + i\xi_2). \tag{23}$$

若 $\xi_1 = 0$, 则由 (23) $\Rightarrow$ $A^*\xi_2 = \alpha\xi_2$ 且 $\beta = 0$. $\quad$ (24)

$\because \|B^* e^{-A^*t}\xi_2\|_{\mathbb{R}^m} \le \|B\|\,\|e^{-A^*t}\xi_2\|_{\mathbb{R}^n}$,

$\therefore$ 由 (24) $\Rightarrow$

$$\|B^* e^{-A^*t}\xi_2\| \le e^{-\alpha t}\|B\|\cdot\|\xi_2\| \qquad \forall\ t > 0.$$

这与 (12) 矛盾.

若 $\xi_1 \neq 0$，可用(23)以上法一样得出一了矛盾。

$\therefore$ 我们已证 $(12) \Rightarrow (18) + (19)$.

Step 2. 证明 (18) 和 $(19) \Rightarrow (12)$.

设 (18) 和 (19) 成立。由定理 2.1，我们只需证明：$\forall\, r>0,\ \mathcal{V}_c^r = \mathbb{R}^n$.

反证地假设上式不对。则 $\exists\ r_0>0$ s.t. $\mathcal{V}_c^{r_0} \neq \mathbb{R}^n$. 由 $\mathcal{V}_c^{r_0}$ 的凸性得：$\exists\ y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{V}_c^{r_0}$，$\exists\ \lambda_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ s.t.

$$\langle \lambda_0, y \rangle_{\mathbb{R}^n} \le \langle \lambda_0, y_0 \rangle \quad \forall\, y \in \mathcal{V}_c^{r_0}. \tag{25}$$

定义：

$$v(t) \triangleq B^* e^{-tA^*} \lambda_0, \quad t \ge 0. \tag{26}$$

由 (18) 知，$v(\cdot)$ 不恒为 0.

断言：
$$\int_0^\infty \|v(t)\|_{\mathbb{R}^m}\, dt = +\infty. \tag{27}$$

当 (27) 得证，则 $\exists\ t_0>0$ s.t.

$$r_0 \int_0^{t_0} \|v(t)\|^2 dt > \langle \lambda_0, y_0 \rangle_{\mathbb{R}^n}. \tag{28}$$

令

$$u(t) \triangleq \begin{cases} \dfrac{r_0\, v(t)}{\|v(t)\|} & \text{if } v(t) \neq 0 \\ 0 & \text{if } v(t) = 0 \end{cases} \qquad t \in (0, t_0) \tag{29}$$

显然，$u \in \mathcal{U}_c^r$. 由此有

$$\int_0^{t_0} e^{-tA} B u(t)\, dt \in \mathcal{V}_c^{r_0}.$$

上式，结合(25),(26),(29)，推出

$$r_0 \int_0^{t_0} \|v(t)\| dt \leq \langle \lambda_0, y_0 \rangle .$$

这与(28)矛盾.

剩下任务：证(27).

设

$$g(t) \triangleq \int_t^{\infty} v(s) ds, \quad t > 0. \tag{30}$$

矛盾地假设(27)不对. 则由(30)有

$$\|g(t)\| \leq \int_t^{\infty} \|v(s)\| ds \longrightarrow 0 \quad \text{as } t \to \infty. \tag{31}$$

令 $p(\cdot)$ 为 A 的特征多项式。则由 Cayley 定理有 $p(A)=0$。再由(26)得：

$$p(-\tfrac{d}{dt})\, v(t) = B^*\left(p(-\tfrac{d}{dt})\, e^{-tA^*}\right)\lambda_0$$

$$= B^* p(A^*) e^{-tA^*} \lambda_0 = 0 \qquad \forall\, t \geq 0.$$

上式结合(30)得

$$-\frac{d}{dt}\, p(-\frac{d}{dt})\, g(t) = p(-\frac{d}{dt})\, v(t) = 0, \quad t \geq 0.$$

故 $g(\cdot)$ 是下列 $(n+1)$ 阶 ODE 之解：

$$\frac{d}{dt}\, p(-\frac{d}{dt})\, z(t) = 0. \tag{32}$$

若 $g(\cdot) \equiv 0$，则由(30)知 $v(\cdot) \equiv 0$，这与 v 不恒为0矛盾.

故 $g(\cdot)$ 不为0函数. 令 $\mu_1, \cdots, \mu_{n+1}$ 为(32)的特征多项式：

$\mu\, p(-\mu)$ 的根。不失一般性，可以假设：

$u_{n+1}=0$ （∵ 0是 $u p(-u)=0$ 的一个解）；且

$u_k=-\lambda_k$, $k=1,\cdots,n$, 而 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征根（∵ P 为 A 的特征多项式）. 由 (19) 有

$$\mathrm{Re}\ u_k \geq 0, \qquad 1\leq k\leq n. \tag{33}$$

另一方面，∵ g 为 (32) 的解 ∴

$$g(t)=\sum_{k=1}^{n+1} p_k(t)\, e^{-u_k t} \qquad (p_k \text{ 为一些多项式}) \tag{34}$$

这，结合 (33)，导出了与 (31) 的矛盾.

∴ (27) 成立. ※.

<u>注</u> 由 (26) 定义的 $v(t)$ 是实向量值函数. 故 $g(t)$ 也是实向量值函数，(34) 的写法应解释为：$g(t)$ 的每个分量有 (34) 表达式. 我们书上 p.73 这个地方有错，没写清楚.

第三章 最大值原理

§3.1. 介绍

- 状态空间 Y ~ Hilbert space

  控制空间 U ~ Hilbert space，要求可分！

- 方程 $y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad t \geq 0$ (1)

  其中 A 生成一个 C_0－半群 e^{tA}，$B \in \mathcal{L}(U, Y)$.

注 本章大多结果，除 §3.4 之外，均可行于下列方程

$$y' = Ay + D(t)y + B(t)u \qquad (1)'$$

$$D(\cdot) \in L^\infty(R^+; \mathcal{L}(Y)), \quad B(\cdot) \in L^\infty(R^+; \mathcal{L}(U, Y)).$$

- 初始条件 $y(0) = y_0$，$y_0 \in Y$ 固定.

- 目标：$S \subset Y$ 为一有界、凸、闭集.

- 控制约束集：$\mathcal{U}_c \triangleq \{u: R^+ \to U \text{ 可测} \mid \|u(t)\|_U \leq r \text{ a.e. } t\}$

  （$\mathcal{U}_c$ 中的元 u 满足 $u(t) \in B(0, r) \subset U$ a.e. t.）

- 问题 $(TP)_1$ $\inf\limits_{u \in \mathcal{U}_c} \{T \mid y(T; y_0, u) \in S\} \triangleq T^*$ (2)

本讲义只介绍 $(TP)_1$ 的最大值原理。$(TP)_2$ 简单一些，但似乎研究得少.

我们总是假设：

$\boxed{\text{假设 1}}$ $y_0 \notin S$.

$\boxed{\text{假设 2}}$ $(TP)_1$ 有最优控制.

注1　在大多研究最大值原理的文章或书中，没有 $\boxed{\text{假设 2}}$，但含在定理的叙述中。

注2　T^* 总是表示最优时间。

在最优控制理论中，最大值原理（或 Pontryagin 最大值原理）是指一个最优控制所满足的某种一阶必要条件，其中控制系统的对偶方程扮演重要角色。通常有两种方法推出最大值原理。

方法一　变分法（分析手段）。比如 对问题：

$$\inf_{u\in \mathcal{U}_c} \int_0^T f^0(y,u)\,dt \qquad (T\text{ 可变}),$$

轨线、时间。则有两个出发点：

设 u^*, y^*, T^* 为最优控制、轨线、时间。

其一，$$\int_0^{T^*} f^0(y,u) \geq \int_0^{T^*} f^0(y^*,u^*) \quad \forall\ u\in \mathcal{U}_c.$$

于是，可令 $u=u_\varepsilon$，它是在 $\mathcal{U}_c$ 中 u^* 的一个小扰动（在某个方向），

再令 y_ε 为方程对应 u_ε 的解。则

$$\int_0^{T^*} \frac{f^0(y_\varepsilon,u_\varepsilon)-f^0(y^*,u^*)}{\varepsilon} \geq 0 \qquad \forall\ \varepsilon.$$

由此，可令 $\varepsilon\to 0$ 得到一些必要条件。

其二，$$\int_0^{T^*+h} f^0(\hat{y},\hat{u}) \geq \int_0^{T^*} f^0(y^*,u^*) \qquad \forall\ h>0$$

其中 $$\hat{u}(t)=\begin{cases} u^*(t), & t\in[0,T^*] \\ \hat{v}\in B(0,r), & t\in(T^*,T^*+h) \end{cases}$$

而 $\hat{y}$ 是 $\hat{u}$ 对应的解。

方法二：几何方法（手段为分离定理＋表示定理）

本讲义介绍方法二。

注 对无穷维系统而言，传统的最大值定理不一定成立。

我们将分三节介绍三种不同的最大值定理。首先我们看看

几何直观：先定义方程(1)的能达集如下

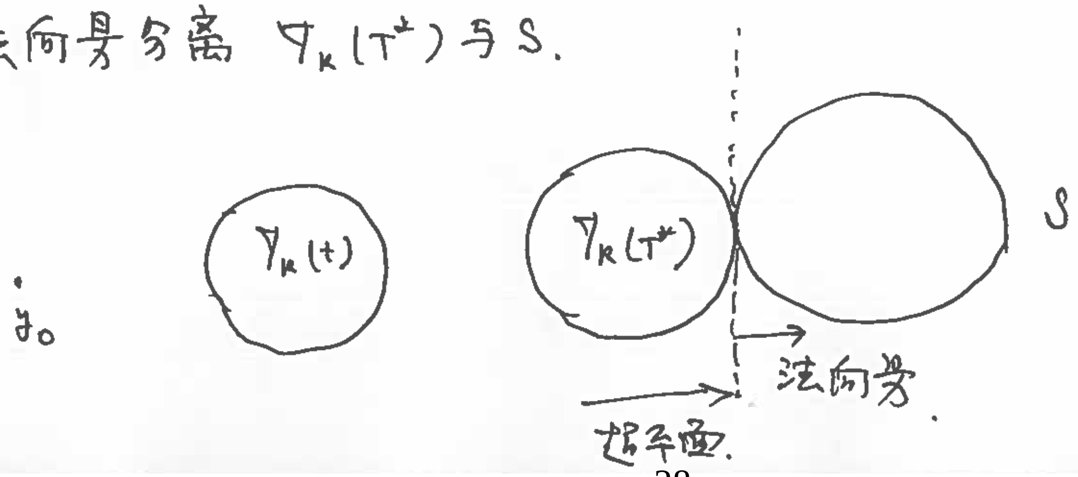
$$Y_R(t) \triangleq \{ y(t;y_0,u) \mid u\in \mathcal{U}_c \},\quad t\geq 0. \qquad (2)$$

它是(1)在时刻 t 的能达集。再定义

$$d(t) \triangleq \inf\{ \|y_1-y_2\| \mid y_1\in Y_R(t),\ y_2\in S\},\quad t\in[0,T^*]. \qquad (3)$$

$d(t)$ 是 $Y_R(t)$ 与 S 之间的距离。注意 $Y_R(0)=\{y_0\}$。在初始时刻 $t=0$，y_0 与 S 有正距离（i.e. $d(0)>0$），这是因为 $\boxed{\text{假设1}}$。随时间前移，$Y_R(t)$ 与 S 越来越近（i.e., $d(t)$ 越来越小）。而 $Y_R(t)$ 与 S 第一个相交时刻就是最优时间，第一个相交点应该在 $\partial Y_R(t)\cap\partial S$ 上。

• 可以直接验证：$Y_R(T^*)$ 是凸集。于是当 $\dim Y$，$\dim U$ 有限时，它们可以用一个超平面分离。我们将称这个超平面的法向量分离 $Y_R(T^*)$ 与 S.



注一. 这种法向是不唯一.

注二. 对无穷维情形, $Y_R(T^*)$ 与 S 的凸性不能保证分离性。

§3.2. 经典最大值原理

定义3.1 (i) 令 (u^*, y^*) 为 $(TP)_1$ 的最优对(最优控制与最优轨线配对)。称 u^* 满足经典最大值原理 (CMP for short), 若 $\exists$ 一个非平凡 $\varphi(\cdot) \in C([0,T^*]; Y)$ s.t. 下列成立:

$$\varphi'(t) = -A^* \varphi(t), \quad a.e.\ t \in (0, T^*); \tag{4}$$

$$H(y^*(t), u^*(t), \varphi\rangle = \max_{v \in B(0,r)} H(y^*(t), v, \varphi(t)\rangle \quad a.e.\ t; \tag{5}$$

其中,

$$H(y, u, \varphi) \triangleq \langle \varphi, Bu \rangle, \quad (y, u, \varphi) \in Y \times U \times Y; \tag{6}$$

$$\langle \varphi(T^*), z - y^*(T^*) \rangle_Y \geq 0, \quad z \in S. \tag{7}$$

(ii) 称 $(TP)_1$ 满足 CMP, 若它的每一个最优控制满足 CMP.

注1 (4) 称对方程(1)的对偶方程 (dual or co-state)

(5) 称为最大值条件, u^* 之信息由它给出.

(7) 称为横截面条件。

注2　(6) 中的 H 称为 (TP)$_1$ 的 Hamiltionian. 这是可延伸到非线性：$y' = f(y,u)$. 这时，对偶方程 $\varphi' = -f_y(y^*,u^*)\varphi$. 而

$$H(y,u,\varphi) = \langle \varphi, f(y,u) \rangle.$$

沿 $(y^*(t), u^*(t), \varphi(t))$ 有

$$\frac{\partial H}{\partial y} = y'(t), \quad -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \varphi'(t).$$

这是一个 Hamiltionian 系统。这些可以理解为名称 Hamiltionian 的由来。

定理 3.1　(TP)$_1$ 满足 CMP 当且仅当 $Y_R(T^*)$ 与 S 在 Y 中可分离。

注. 上面的定理的证明基于分离性和下面的表示公式.

引理 3.1 (表示公式) 令 $T>0$，$\psi_T \in Y$。令 $\psi(\cdot)$ 为对偶方程 $\psi'(t) = -A^*\psi(t)$, $t\in(0,T)$; $\psi(T)=\psi_T$ 之解。则 $\forall\, y_0 \in Y$, $\forall\, u \in \mathcal{U}_c$ (或 $u \in L^2(0,T;U)$), 下列公式成立:

$$\langle y(T;y_0,u), \psi_T \rangle_Y = \langle y_0, \psi(0) \rangle_Y + \int_0^T \langle B^*\psi(s), u(s) \rangle_U \, ds. \quad (8)$$

定理 3.1 之证明：

step1. 证充分性. 假设 $Y_R(T^*)$ 与 S 可分。令 (u^*, y^*) 为一最优对。由可分性有：$\exists\ \varphi_0 \in Y$ $(\|\varphi_0\|=1)$, $\exists$ $c \in \mathbb{R}$ s.t.

$$\langle z_1, \varphi_0 \rangle_Y \geq c \geq \langle z_2, \varphi_0 \rangle_Y \quad \forall z_1 \in Y_R(T^*), z_2 \in S. \tag{9}$$

$\because$ $y^*(T^*) \in Y_R(T^*) \cap S$ $\therefore$ 由 (9) 有

$$\min_{z_1 \in Y_R(T^*)} \langle z_1, \varphi_0 \rangle_Y = \langle y^*(T^*), \varphi_0 \rangle = \max_{z_2 \in S} \langle z_2, \varphi_0 \rangle. \tag{10}$$

(分离定理的作用就是得到 (10)。下面要用表示公式将 (10) 中的量与控制产生联系。)

令 φ 为方程 $\varphi' = -A^*\varphi$, $\varphi(T) = -\varphi_0$ 之解。由引理 3.1 有.

$$\langle y(T^*; y_0, u), -\varphi_0 \rangle = \langle y_0, \varphi(0) \rangle + \int_0^{T^*} \langle B^*\varphi(t), u(t) \rangle dt \quad \forall u \in \mathcal{U}_c. \tag{11}$$

由 (10), 和 (11) 得

$$\max_{u \in \mathcal{U}_c} \int_0^{T^*} \langle B^*\varphi(t), u(t) \rangle dt = \int_0^{T^*} \langle B^*\varphi(t), u^*(t) \rangle dt. \tag{12}$$

上式 (12) 是积分型的最大值条件。以下将 (12) 转化为关于时间逐点的最大值条件 (步), i.e.,

$$\langle B^*\varphi(t), u^*(t) \rangle_U = \max_{v \in B(0,r)} \langle B^*\varphi(t), v \rangle_U \quad \text{a.e. } t \in (0, T^*). \tag{13}$$

为此，利用 U 的可分性得：$U_0 \triangleq \{u_\ell\}_{\ell\geq 1}$ s.t. U_0 在 $B(0,r)$ 中稠密。由 (12) 有：$\forall$ $u \in \mathcal{U}_c$，

$$\int_0^{T^*} \left[\langle B^*\varphi(t), u^*(t) \rangle - \langle B^*\varphi(t), u(t) \rangle \right] dt \geq 0. \qquad (14)$$

$\forall$ $u_\ell \in U_0$，定义下列函数：

$$g_\ell(t) \triangleq \langle B^*\varphi(t), u^*(t) \rangle - \langle B^*\varphi(t), u_\ell \rangle, \quad t \in (0, T^*).$$

显然，$g_\ell \in L^1(0,T^*)$。故 $\exists$ 可测集 $E_\ell \subseteq [0,T^*]$ $(|E_\ell| = T^*)$ s.t. E_ℓ 中的每一个点都是 g_ℓ 的 Lebesgue 点，

i.e., $\lim\limits_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta} \int_{t-\delta}^{t+\delta} |g_\ell(s) - g_\ell(t)| ds = 0$, $\forall$ $t \in E_\ell$.

任意固定 $t \in E_\ell$，$\delta > 0$。令

$$u_\delta(s) \triangleq \begin{cases} u^*(s), & s \in [0,T^*] \setminus B_\delta(t) \\ u_\ell, & s \in [0,T^*] \setminus B_\delta(t). \end{cases}$$

（$B_\delta(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 中以 t 为中心，长度为 2δ 的开区间）。显然，

$u_\delta \in \mathcal{U}_c$. 故由 (14) 知 $g_\ell(t) \geq 0$. 由此有：

$\forall$ $t \in E \triangleq \bigcap\limits_{\ell\geq 1} E_\ell$（注意 $|E| = T^*$），$\forall$ $u_\ell \in U_0$ 有

$$\langle B^*\varphi(t), u^*(t) \rangle - \langle B^*\varphi(t), u_\ell \rangle \geq 0. \qquad (15)$$

$\because$ $\overline{U_0}^{\|\cdot\|_U} = B(0,r)$，$\therefore$ (15) 推得：

$$< B^*\varphi(t),\ u^*(t) > - < B^*\varphi(t),\ v > \geq 0,\ \forall t\in E,\ \forall v\in B(0,r)$$

$\Longrightarrow$ (13).

最后，由 (13) 和 $(10)_2$ 知：u^* 满足 CMP.

Step 2. 证必要性. 假设 (TP) 满足 CMP。设 (u^*, y^*) 为一最优对。由定义 3.1，$\exists$ 非平凡 $\varphi(\cdot)\in C([0,T^*];Y)$ s.t. (4)–(7) 成立. 由 (4) 有

$$\varphi(s) = e^{-A^*(T^*-s)}\varphi(T^*), \qquad 0\leq s\leq T^*.$$

再由 (5) 得

$$\begin{aligned}&\int_0^{T^*} < \varphi(T^*),\ e^{(T^*-s)A} B u^*(s) > ds \\ &= \int_0^{T^*} \max_{v\in B(0,r)} < \varphi(T^*),\ e^{(T^*-s)A} B v > ds.\end{aligned} \tag{16}$$

任给 $u(\cdot)\in \mathcal{U}_c$. 由 (16) 有

$$\begin{aligned}&\int_0^{T^*} < \varphi(T^*),\ e^{(T^*-s)A} B u(s) > ds \\ &\leq \int_0^{T^*} \max_{v\in B(0,r)} < \varphi(T^*),\ e^{(T^*-s)A} B v > ds \\ &\leq \int_0^{T^*} < \varphi(T^*),\ e^{(T^*-s)A} B u^*(s) > ds.\end{aligned} \tag{17}$$

上式推出 $\forall u\in\mathcal{U}_c$,

$$< \varphi(T^*),\ y^*(T^*) > \ \geq\ < \varphi(T^*),\ y(T^*, y_0, u) >.$$

上式结合 $\mathcal{Y}_R(T^*)$ 之定义推出

$$\langle \varphi(T^*),\ y^*(T^*) \rangle_{\mathcal{Y}} \geq \sup_{z\in \mathcal{Y}_R(T^*)} \langle \varphi(T^*), z \rangle_{\mathcal{Y}}. \tag{18}$$

$\because$ $y^*(T^*) \in \mathcal{Y}_R(T^*)$ $\therefore$ (18) 推出

$$\langle \varphi(T^*),\ y^*(T^*) \rangle = \max_{z\in \mathcal{Y}_R(T^*)} \langle \varphi(T^*), z \rangle. \tag{19}$$

又 $\because$ $y^*(T) \in S$ $\therefore$ 由横截面条件 (7) 以及 (19) 得

$$\min_{z\in S} \langle \varphi(T^*), z \rangle = \langle \varphi(T^*), y^*(T^*) \rangle$$

$$= \max_{z\in \mathcal{Y}_R(T^*)} \langle \varphi(T^*), z \rangle.$$

由此，S 与 $\mathcal{Y}_R(T^*)$ 在 $\mathcal{Y}$ 中可分，而 $\varphi(T^*)$ 是分离法向量。 ※.

注1　当 X, U 为有限维时，(TP)，有 CMP.

　　当 S 在 X 中有内点时，(TP)，有 CMP.

注2　(TP)，是一个有状态约束的最优控制问题，所以它的最大值原理中应该有一个拉格朗日乘子。从定理3.1的证明中，我们发现：分离向量 φ。就是一个拉格朗日乘子，它在定理3.1中的体现是：$-\varphi(T^*)$. 如果需要表达 u^* 或计算 u^*，我们必须清楚这个乘子是什么。几何方法告诉我们：~~确定~~找到

分离法向量是一条可能的路。

注3 虽然定理3-1保证了 $\varphi(\cdot)$ 的非平凡性，但最大值条件 (5), i.e.,

$$\langle u^*(t), B^*\varphi(t)\rangle_U = \max_{v\in B(0,r)} \langle v, B^*\varphi(t)\rangle \quad a.e.\ t. \tag{20}$$

也可能是平凡的。这与控制器 B 有关系，与 φ_0 也有关系：

$\varphi\neq 0$ 不能保证 $B^*\varphi\neq 0$.

- 当 $B^*\varphi=0$ for a.e. $t\in[0,T^*]$ 时，(20) 就是 $0=0$. 它提供不了 u^* 的任何信息. 在此情况下，称 φ_0 是 non-qualified;
- 当 $B^*\varphi(t)\neq 0$ for a.e. $t\in[0,T^*]$ 时，(20) 可提供 u^* 在 $[0,T^*]$ 上的信息，这时 φ_0 (至少有可能提供) 称为 qualified.
- 当 $B^*\varphi(t)\neq 0$ $\forall\ t\in G$ (其中 G 为 $[0,T^*]$ 中一正可测集) 时，(20) 可提供 u^* 在 G 上的信息. 这时称 φ_0 为 semi-qualified.

注4 对某个 u^*，可能有两个分离向量，一个是 qualified，另一个是 non-qualified. 所以如何选取 φ_0 十分重要. 而对 u^* 是否一定有 qualified φ_0，或何时有，

何时没有，都是值得研究的。这方面，人们似乎关注不够。

注5　若 u^* 满足 MP，则下列条件 $(\hat{H})$ 能保证任何分离向量是 qualified:

$(\hat{H})$　若 $\varphi'(t) = -A^*\varphi(t)$, $t\in[0,T^*]$ 且 ∃ 正可测集 $G\subset[0,T^*]$ s.t. $B^*\varphi(t)=0$ $\forall\, t\in G$, 则 $\varphi\equiv 0$.

上面的 $(\hat{H})$ 是对偶方程可测集上的定性唯一连续性.

以下给出几个例子，它们都在我们 (TP) 的框架下，都有最优控制.

例1.　令 $B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $y_0=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$　$Y=\mathbb{R}^2$, $U=\mathbb{R}^1$.

控制方程：$y'(t) = B\,u(t)$

目标：　$\{0\}$.

控制约束：　$\mathcal{U}_c = \{u: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 可测 $\mid |u(t)|\le 1\}$.

可以证明：$T^*=1$,　$u^*(\cdot)\equiv -1$,　$y^*(t) = (1-t, 0)^T$, $t\in[0,1]$.

更重要的是：$\varphi_0 = (0,1)^T$, $\hat{\varphi}_0 = (1,0)^T$ 均为关于 u^* 的分离向量。前者是 non-qualified，后者是 qualified.

例2.　$Y = U = L^2(0,\infty)$;

控制系统为：
$$\begin{cases} \partial_t y(x,t) = -\partial_x y(x,t) + u(x,t), & 0\le x,\ t<+\infty;\\ y(x,0)=y_0(x), & y(0,t)=0 \end{cases} \tag{21}$$

令 $(Ay)(x) = -y'(x)$, $x \in (0,\infty)$. 则 A 生成半群:

$$S(t)y(x) = \begin{cases} y(x-t) & 当\ x \geq t \\ 0 & 当\ x < t \end{cases}$$

考虑控制约束 $\mathcal{U}_c = \{u : R^+ \to U \mid \|u(t)\|_U \leq 1 \ \text{a.e.}\ t\}$.

初值: $\{0\}$.

目标: $\{\hat{y}\}$, $\hat{y} \in X \setminus \{0\}$.

• (21) 为传输方程，它的时间最优控制问题值得关注.

关于 (21), 下列是一有趣结果.

命题 3.1 (Fattorini) 令 $T > 0$, $\delta \in (0,T)$. 则 $\exists\, \hat{y} \in X$

s.t. 将 0 转移到 $\hat{y}$ (从时间 0 到 T) 的控制 $\hat{u} \in L^\infty(0,T;U)$

满足: T 是最优时间 且

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} \dfrac{S(T-t)^* \varphi_0}{\|S(T-t)^* \varphi_0\|_Y}, & T-\delta < t \leq T \\ 0, & 0 \leq t \leq T-\delta \end{cases} \tag{22}$$

其中 $\varphi_0 \in Y \setminus \{0\}$ s.t.

$$\varphi(t) \triangleq \begin{cases} S(T-t)^* \varphi_0 \neq 0 & 当\ T-\delta < t \leq T; \\ S(T-t)^* \varphi_0 = 0 & 当\ 0 \leq t \leq T-\delta. \end{cases} \tag{23}$$

(命题 3.1 完)

在命题(3.1)的帮助下，我们得到 $(TP)_1$ 的如下结论：

它满足 CMP，φ_0 是 non-qualified 但 qualified. 分离向量.

例3. 控制系统为

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = u & \text{in } \Omega \times (0,\infty); \\ y = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,\infty), \end{cases}$$

其中 $\Omega = (0,\pi)$. 取 $X = U = L^2(\Omega)$.

控制约束：$\mathcal{U}_c = \{u : \mathbb{R}^+ \to U \mid \|u(t)\|_U \leq 1 \text{ a.e. } t\}$

初值：$\{0\} \subset L^2(\Omega) = Y$.

目标：$z \in L^2(\Omega) = Y$. （它是特殊构造的. 见我们的书，P. 142）

结论：$(TP)_1$ 的任何最优控制不满足 CMP.

注 传输方程的时间最优控制问题会包含许多有意义的现象，值得研究. $(TP)_2$ 没有研究过. $(TP)_1$ 的研究也很浅.

我们以下列定理结束此节：

定理 3.2 集合 $Y_R(T^*)$ 与 S 可分性在下列情形成立：

(i) $\dim Y < \infty$;

(ii) $\dim Y = \infty$ 且 $\mathrm{Int}(Y_R(T^*) - S) \neq \phi$.

§3.3 局部最大值原理

在研究 $y_t - \Delta y + a(x)y = \chi_\omega u$ 的(TP)，（目标为 $L^2(\Omega)$ 中的原点）的某些性质时，我们期待 CMP 的帮助，但无论如何得不到它，但意外发现我们只需要 u^* 满足某种局部性质就够了。于是我们开始研究这种局部性质，并称之为局部最大值原理（LMP for short）。我们的发现如下：

要想使得最大值原理在 $[0, T^*]$ 上成立，$\varphi(\cdot)$ 在 T^* 的值 $\varphi(T^*)$ 可能存在于一个"很大"的空间中，$\varphi(T^*)$ 的正则性可能"很差"。但热传导方程有光滑效应，所以尽管 $\varphi(T^*)$ 很差，但是 $\varphi(\cdot) \in C([0, T^*), Y)$（而不是 $\varphi(\cdot) \in C([0, T^*], Y)$!）

于是，我们就在最大值条件中将 $[0, T^*]$ 缩为 $[0, T^*-\varepsilon]$。当时，我们是用分析方法做的。从几何观点看：当 $\varphi(T^*)$ 在一个"很大"空间时 $\mathcal{Z}$ 时，我们需要在 $\mathcal{Z}^*$ 中对 S 与 $Y_R(T^*)$ 做分离，而 $\mathcal{Z}^*$"很小"，同时，我们还需要有相应的表示公式（引理3.1）。这其实是 Fattorini 研究弱最大值原理的原因（我们猜想是这样）。但有时我们可以跳过 $\varphi(T^*)$ 这个麻烦，在 $[0, T^*-\varepsilon]$ 上考虑最大值原理，这是我们提出"LMP 的原因。

为了给出 LMP 之定义，我们引入下列记号：

用 $y(\cdot;t_1,z_0,u)$ 表示下列方程之解：

$$\begin{cases} y' = Ay + Bu, & t \ge t_1 \\ y(t_1) = z_0 ; \end{cases}$$

$\forall \ t_1 < t_2$ 令

$$\widehat{Y}_c(t_1,t_2) \triangleq \{ z_0 \in Y \mid \exists \ u \in \mathcal{U}_c \ s.t. \ y(t_2;t_1,z_0,u) \in S \} \tag{24}$$

称之为方程在 (t_1,t_2) 上的能控集（相对 S 而言）.

令 $$\widehat{Y}_c(t_1,t_2) \triangleq \bigcup_{\tau \in (t_1,t_2)} Y_c(t_1,\tau). \tag{25}$$

定义 3.2. (i) 设 (u^*,y^*) 为 $(TP)_1$ 的一最优对。称 u^* 满足 LMP，若 $\forall \ T \in (0,T^*)$，$\exists$ 非平凡 $\varphi_T(\cdot) \in C([0,T];Y)$ s.t.

$$\varphi_T'(t) = -A^* \varphi_T(t) \quad a.e. \ t \in (0,T); \tag{26}$$

$$\max_{v \in B(0,r)} \langle \varphi_T(t), Bv \rangle = \langle \varphi_T(t), Bu^*(t) \rangle, \ a.e. \ t \in (0,T); \tag{27}$$

$$\langle \varphi_T(T), z - y^*(T) \rangle \ge 0 \quad \forall \ z \in Y_c(T,T^*). \tag{28}$$

(ii) 若 $(TP)_1$ 的任一最优控制均满足 LMP，则称 $(TP)_1$ 满足 LMP.

注1　LMP 与 CMP 分别给出了 u^* 在 $[0,T]$ $(T<T^*)$ 和 $[0,T^*]$ 上的必要条件. 这造成需引入 $Y_c(T,T^*)$ 于 (28) 中，它代替了 S.

注2. LMP 实质上给出了 u^* 在 $(0,T^*)$ 上的信息，但我们对 $\varphi(T^*)$ 不了解，故这种信息是有缺失的。

注3 $CMP \not\Rightarrow LMP$. 原因：$[0,T^*]$ 上对偶方程的非平凡解不一定在 $[0,T]$ 上也非平凡。（见关于传输方程的命题 3.1.）

CMP + 某些条件 $\Rightarrow LMP$.

$LMP \not\Rightarrow CMP$.

例3 中的 (TP)，不满足 CMP，但可证它满足 LMP.

（见我们的书 P.149.）

例4 $Y = U = L^2(\Omega)$. 控制方程为

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (a_1(x) + a_2(t))y = \chi_\omega u & \text{in } \Omega \times R^+, \\ y = 0 & \text{on } \partial\Omega \times R^+; \end{cases}$$

$\mathcal{U}_c = \{u: R^+ \to U \text{ 可测} \mid \|u(t)\|_U \le \rho \text{ a.e.}\}$;

目标：$S = \{0\} \subset L^2(\Omega)$.

可以证明：对应的 (TP)，满足 LMP.

定理 3.3 (TP)，有 LMP 当且仅当 $\forall T \in (0,T^*)$，

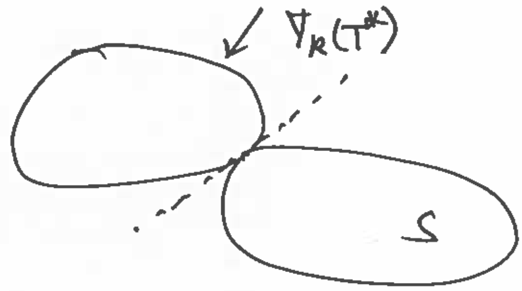
$Y_R(T)$ 与 $Y_c(T,T^*)$ 在 Y 中可分离.

注1　$\mathcal{Y}_c(T,T^*)$ 中的元是 $\mathcal{Y}$ 中这样的点 z s.t.

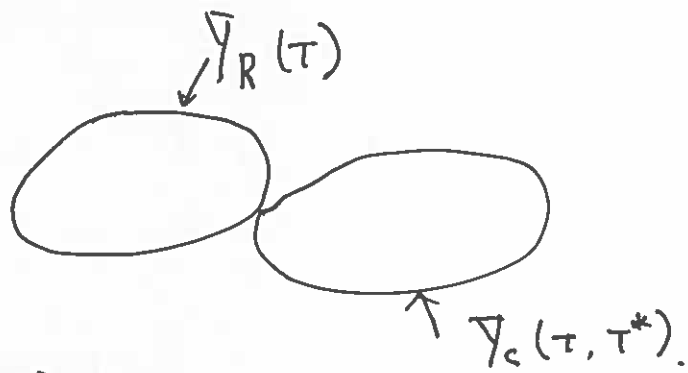
方程
$$\begin{cases} y' = Ay + Bu, & t\in[T,T^*] \\ y(T) = z \end{cases} \qquad (*)$$

的解 $y(\cdot)$ 满足 $y(T^*)\in S$.

在 T^* 时刻，希望：



在 T 时刻，希望



而 $[T,T^*]$ 上的方程 $(*)$ 将 $\mathcal{Y}_c(T,T^*)$ 转移到 S.

注2　定理3.3的证明思路与定理3.1的相似。略去其证明。

注3　LMP 中的拉格朗日乘子（对每个T）就是 $\mathcal{Y}_R(T)$ 与 $\mathcal{Y}_c(T,T^*)$ 的分离法向量。在应用中会有下列不便：对 $T_1\ne T_2$，我们有两个法向量 φ_{T_1} 与 φ_{T_2}，这样就有两个对偶方程的解 φ^1,φ^2. 这会在用最大值条件时产生麻烦.

幸运的是我们有以下结果：

命题 3.2 令 $T\in(0,T^*)$. 设 $\phi\in\nabla\setminus\{0\}$ 分离 $\nabla_R(T)$ 与 $\nabla_C(T,T^*)$. 令 $\varphi(\cdot)$ 为下列方程之解：

$$\begin{cases}\varphi'(t)=-A^*\varphi(t), & t\in(0,T)\\ \varphi(T)=\phi\end{cases}$$

则 当 $\hat{T}\in(0,T)$ 且 $\varphi(\hat{T})\neq 0$ 时，$\varphi(\hat{T})$ 分离 $\nabla_R(\hat{T})$ 与 $\nabla_C(\hat{T},T^*)$.

这样，对给定 $T>0$，找到 φ_T（法向量）后，在 T 之前的个时刻的法向量就可由命题 3.2 那样给出. 这样最大值条件对所有 $\hat{T}\leq T$ 都共享一个 $\varphi(\cdot)$.

对热传导方程，这个过程还可以向 T 的右边推进，但到不了 T^*. 而 $\forall\ T<T^*$，最大值条件中的 $\varphi(\cdot)$ 可共享.

（见 G. Wang, Y. Xu, Y. Zhang, SICON 2015）.

• 什么时候 CMP $\Rightarrow$ LMP ?

给出一条件：

(H_B) 若 $\varphi'(t)=-A^*(t)$, $t\in[0,T^*]$ 的解 $\varphi(\cdot)$ 在某一时刻 $t_0\in[0,T^*]$ 为 0 (i.e. $\varphi(t_0)=0$) 则 $\varphi\equiv 0$.

注. (i) (HB)中的 $\varphi(\cdot)$ 要求: $\varphi(T^*) \in Y$.

(ii) 线性 O.D.E 和线性抛物方程 (具有充分正则的系数) 具有 (HB).

<u>命题 3.3</u> 假设 (HB) 成立. 则对 (TP), 有:

$$CMP \Rightarrow LMP.$$

我们以下列例子结束这一节.

<u>例5</u> 控制方程为

$$\begin{cases} y_t = x^2 u & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ y = 0 & \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \qquad \Omega = (0,1).$$

$$Y = U = L^2(0,1).$$

取 $y_0(x) = -\sqrt{3}\, x^3$, $x \in (0,1)$.

目标 $S = \{0\} \subset L^2(0,1)$.

可以证明: (TP), 既不满足 CMP 也不满足 LMP.

(见我们的书 p.167).

§3-4. 弱最大值原理.

这是一种在 Fattorini 思想的基本上, 我们总结提出的一种最大值原理. 在 CMP 和 LMP 中, 分离性都是在 Y 中的, 其法向量在 Y^* 中. 所以对偶方程的轨线在 Y^* 中. 这于我们的通常认知的对偶方程是一致的. 现在 $\because Y$ 是一个 Hilbert 空间 $\therefore Y^* = Y$. 当 CMP 和 LMP 都不成立时说明 ~~[illegible]~~ 上述分离没有了。

<u>思法</u> 将 Y 换一个范数 s.t. S 与 $Y_R(T^*)$ 在这个范数下能分离! 这时的 Y^* 也不是原来的了. 或者, 在 Y 的一个子空间 Y_1 上换拓扑: 这要求 $S, Y_R(T^*) \subset Y_1$ 且它们在 Y_1 中可分!

控制方程为:

$$y' = Ay + Bu, \quad t \geq 0 \tag{29}$$

初始条件为:

$$y(0) = \hat{y}_0 \tag{30}$$

目标: $S = \{0\}$

<u>注</u> 我们不知道如何将本节结果延伸至方程:

$$y' = Ay + D(t)y + B(t)u. \tag{29'}$$

<u>回顾1</u> (29)-(30) 的能达集 (在 t 时刻的) 为

$$Y_R(t) \triangleq \{ y(t; \hat{y}, u) \mid u \in \mathcal{U}_r \}. \tag{31}$$

回顾2. 我们有 $\boxed{\text{假设2}}$: (TP), 有最优控制 u^*.

$$\therefore \quad y(T^*;\hat{y}_0,u^*)=0. \tag{32}$$

现在, $\forall\, t>0$, 定义(29)的能达子空间:

$$R_t \triangleq \left\{ y(t;0,u)\in Y \;\middle|\; u\in L^\infty(0,t;U) \right\}. \tag{33}$$

赋予其范数:

$$\|z\|_{R_t} \triangleq \operatorname{Min}\left\{ \|u\|_{L^\infty(0,t;U)} \;\middle|\; y(t;0,u)=z \right\},\quad z\in R_t \tag{34}$$

由(31)—(33), 易推出: $R_{T^*}\supseteq Y_R(T^*)$.

(于是, $Y_R(T^*)$ 可以继承 R_{T^*} 上的拓扑!)

我们要做的事: 其一, 在 R_{T^*} 中分离 $\{0\}$ 与 $Y_R(T^*)$.

其二, 建立一个对应引理3.1的表示公式. (这比其一难!)

定义3.3 称 $Y_R(T^*)$ 和 $\{0\}$ 在 R_{T^*} 中可分, 若 $\exists$

$$\psi\in\left(R_{T^*}\right)^*\setminus\{0\} \quad \text{s.t}$$

$$\sup_{z\in Y_R(T^*)} \langle \psi, z\rangle_{(R_{T^*})^*,\,R_{T^*}} \le 0.$$

定义3.4 称 $\psi\in(R_{T^*})^*$ 是正规的，若 $\exists f_\psi\in L^1(0,T^*;U)$

s.t.

$$\langle\psi, y(T^*;0,u)\rangle_{(R_{T^*})^*,R_{T^*}}=\int_0^{T^*}\langle u(t), f_\psi(t)\rangle dt \qquad (35)$$

称(35)为表示公式.

注 空间 R_T 可以是不可分的，非自反的。当它非自反时，R_T^* 是一个"非常大"的空间，包含"非常不正规"的元，对这些元，(35)不一定对。

• 空间 O_T $(T>0)$ 之定义. 令

$$\mathbb{X}_T \triangleq \left\{ B^* e^{A^*(T-\cdot)}z \;\middle|\; z\in D(A^*) \right\}$$

注意 $\varphi(t)=e^{A^*(T-t)}\eta,\ t\in[0,T]$ $(\eta\in Y)$ 是对偶方程

$$\begin{cases}\varphi'(t)=-A^*\varphi(t), & t\in[0,T]\\ \varphi(T)=\eta\end{cases} \qquad (36)$$

之解.

令 $\quad O_T \triangleq \overline{\mathbb{X}_T}^{\|\cdot\|_{L^1(0,T;U)}}$.

这个空间"非常大"。对热传导方程我们作过关于它的研究。不能期待 O_T 中的每个元都是(36)的解（即使"η 很差"）.

但我们对 $\mathcal{O}_T$ 中的某些元素的性质(与控制相关)有如下刻画.

引理 3.2. 令 $T>0$, $f\in L^1(0,T;U)$. 则下列等价:

(i) 若 $u_1, u_2\in L^\infty(0,T;U)$ 满足

$$y(T;0,u_1)=y(T;0,u_2)$$

则 $$\int_0^T \langle f(t), u_1(t)\rangle_U\,dt=\int_0^T\langle f(t), u_2(t)\rangle dt.$$

(ii) $f\in \mathcal{O}_T$.

定义 3.5 (i) 设 u^* 为 $(TP)_r$ 的最优控制. 称 u^* 满足弱最大值原理 (WMP for short), 若 ∃ 非平凡 $f\in \mathcal{O}_{T^*}$ s.t.

$$\langle u^*(t), f(t)\rangle_U=\max_{v\in B(0,r)}\langle v, f(t)\rangle_U \quad \text{a.e. } t\in[0,T^*] \qquad \text{——(3.7)}$$

(ii) 若 $(TP)_r$ 的每个最优控制均满足 WMP, 则称 $(TP)_r$ 满足 WMP.

定理 3.4 假设目标 $\{0\}$ 与 $Y_R(T^*)$ 在 R_{T^*} 中可由一非零向量 $\psi\in (R_{T^*})^*\setminus\{0\}$ 分离, 则 $(TP)_r$ 满足 WMP.

注1　它的证明与前面的类似，略去.

注2　关键点：在什么条件下，∃非平凡正规向量分离 $\{0\}$ 与 $\mathcal{R}\,\mathcal{V}_R(T^*)$（在 R_{T^*} 中）？

我们做过一些研究，主要是对热方程，相当浅.

注3　WMP 有什么用？　它可帮助我们得到最优控制的某些性质，如 bang-bang 性（以后会介绍）.

第四章 几类最优控制问题的等价性

问题：Y ～ 状态空间；U ～ 控制空间．它们都是 Hilbert；

方程为 $y' = Ay + Bu$，$t \in (0, \infty)$； (1)

目标 $S = \{0\} \subset Y$； 控制约束：$\|u(t)\| \leq M$ a.e. t；

初值 $y_0 \in Y \setminus \{0\}$.

记 $y(\cdot\,; y_0, u)$ 为 (1) 的满足 $y(0) = y_0$ 之解；

记 $y(\cdot\,; \tau, y_0, u)$ 为 (1) 的满足 $y(\tau) = y_0$ 的解 $(\tau \geq 0)$.

这一章，我们有如下假设：

$\boxed{\text{假设 4.1}}$ 方程 (1) 在任何 $[0,T]$ 上是 L^∞-零能控的，即，

$\exists\ C(T) > 0$ s.t. $\forall\ \hat{y}_0 \in Y$ $\exists\ \hat{u} \in L^\infty(0,T;U)$ s.t.

$y(T; \hat{y}_0, \hat{u}) = 0$ 且 $\|\hat{u}\|_{L^\infty(0,T;U)} \leq C(T) \cdot \|\hat{y}_0\|$.

$\boxed{\text{假设 4.2}}$ 方程 (1) 有倒向唯一性，即，若 $\exists\ t_0 > 0$，$\exists\ y_0 \in Y$

s.t. $e^{At} y_0 = 0$，则 $y_0 = 0$.

注 1 $\boxed{\text{假设 4.1}}$ 能被更弱的条件代替（G. Wang, Y. Zhang, (2017)）。

注 2 $y_t - \Delta y = \chi_\omega u$ 具有 L^∞-零能控；

$y_t - \Delta y = 0$ 具有倒向唯一性。

§4.1 最短时间与最小范数问题

• 最短时间控制问题 (TP)，依赖 y_0 与 M. 当 y_0 固定时，记为 $(TP)_M$. 记

$$\mathcal{U}_M \triangleq \{ u: \mathbb{R}^+ \to U \text{ 可测} \mid u(t) \in B_M(0) \}.$$

记 $T^* = T(M)$. 则问题为：

$$(TP)_M: \quad T(M) \triangleq \inf_{u \in \mathcal{U}_M} \{ T > 0 \mid y(T; y_0, u) = 0 \}. \qquad (2)$$

<u>注</u>　$(TP)_M$ 的每个最优控制 u^* 在 (T^*, ∞) 上的值对问题没有任何影响，它有影响的是在 $(0, T^*)$ 上的值. 所以

<u>我们规定</u>：最优控制在 $(T(M), \infty)$ 上均取零值.

• 最小范数问题是另一类最优控制问题，我们要学习的是：

$$(NP)_T: \quad N(T) \triangleq \inf \{ \|v\|_{L^\infty(0,T;U)} \mid y(T; y_0, v) = 0 \}. \qquad (3)$$

• $N(T)$ 称为最小范数；

• 若 $v \in L^\infty(0,T;U)$ s.t. $y(T; y_0, v) = 0$，则称 v 为一个允许控制；

• 若 $v^* \in L^\infty(0,T;U)$ s.t. $y(T; y_0, v^*) = 0$ 且 $\|v^*\|_{L^\infty(0,T;U)} = N(T)$，则称 v^* 为最优控制.

<u>注1</u>　$(NP)_T$ 要求具有最小代价的控制使得在 $[0,T]$ 上将 y_0 转移到 0.

<u>注2</u>　$(NP)_T$ 与 $(TP)_M$ 相同之处：都具有终端约束 $\{0\}$；

不同之处：前者没有控制约束，后者有；前者终端时间固定，后者的不固定。

注3　令 $\mathcal{F} \triangleq \{v \in L^\infty(0,T;U) \mid y(T;y_0,v)=0\}$

令 $G: \mathcal{F} \to R^+$: $G(v)=\|v\|_{L^\infty(0,T;U)}$.

则 $(NP)_T$ 为 $\inf\limits_{v\in\mathcal{F}} G(v)$.

而 G 有显示表达。本质上，$(NP)_T$ 是一个凸最优控制问题。令 $\hat{G}(v)=\begin{cases} G(v), & v\in\mathcal{F} \\ +\infty, & v\in L^\infty(0,T;U)\setminus\mathcal{F}. \end{cases}$

则 $(NP)_T$ 为 $\inf\limits_{v\in L^\infty(0,T;U)} \hat{G}(v)$，而 $\hat{G}$ 是凸泛函。

所以，$(NP)_T$ 比 $(TP)_M$ 简单！

本章目的　学习 $(NP)_T$ 与 $(TP)_M$ 之间的等价性。

定义4.1　令 $M\geq 0$，$T>0$. 称 $(TP)_M$ 与 $(NP)_T$ 等价，若下列成立：

(i) 它们均有最优控制；

(ii) 若 u^* 为 $(TP)_M$ 的最优控制，则 $u^*|_{[0,T]}$ 是 $(NP)_T$ 的最优控制；

(iii) 若 v^* 是 $(NP)_T$ 的最优控制，将其0延拓到 (T,∞)，则延拓函数是 $(TP)_M$ 的最优控制。

注　当 $M=0$ 时，$(TP)_M$ 无解。我们之所以允许 $M=0$ 是为了以后叙述结论时方便。

- 从(3)看出：$T \to N(T)$ 给出了 $(0,\infty)$ 上一个单调下降的函数，记为 $N(\cdot)$. 它在后面起重要作用。

令 $\hat{N} \triangleq \lim_{T\to\infty} N(T)$. (4)

记 $\mathcal{E} \triangleq \{ (N(T), T) \in \mathbb{R}^2 \mid T \in (0, +\infty) \}$. (5)

注 由 $\boxed{\text{假设 4.1}}$ 知：$\forall T>0$, $N(T) \in (0, +\infty)$. ($y_0 \neq 0$!)

本节主要定理如下：

<u>定理 4.1</u> 令 $\mathcal{E}$ 由 (5) 给出. 则下列结论成立：

(i) 若 $(M,T) \in \mathcal{E}$, 则 $(TP)_M$ 与 $(NP)_T$ 等价.

(ii) 若 $(M,T) \in [0,\infty) \times (0,\infty) \setminus \mathcal{E}$, 则 $(TP)_M$ 与 $(NP)_T$ 不等价.

<u>注1</u> 当 M, T 满足 $M = N(T)$ 时，$(TP)_M$ 与 $(NP)_T$ 等价. 这个定理需要结合前面的引理方能更好的应用。

<u>注2</u> 由等价性，可以将 $(TP)_M$ 的研究转化为 $(NP)_T$ 的研究.

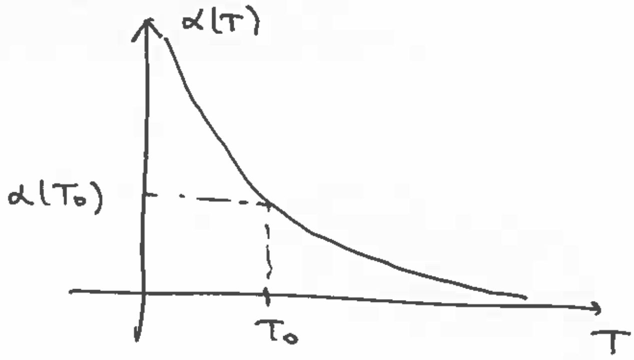
<u>注3</u> 定理 4.1 原始来源： G. Wang, E. Zuazua 2012. 方程为

$$y_t - \Delta y = \chi_\omega u, \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+;$$

$$y_t - \Delta y = \chi_\omega f, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T).$$

令 $\alpha(T) \triangleq N(T)$, $T>0$.

$\tau(M) \triangleq T(M)$, $M>0$.



我们发现：$\alpha(\cdot)$, $\tau(\cdot)$ 均为从 $(0,\infty)$ 到 $(0,\infty)$ 到上的连续的，严格单调函数，且互为反函数，即

$$\alpha(\tau(M))=M \quad \forall M>0; \quad \tau(\alpha(T))=T \quad \forall T>0.$$

所以

$$T_0 \to (NP)_{T_0} \to \alpha(T_0) \to (TP)_{\alpha(T_0)} \to \tau(\alpha(T_0)) = T_0.$$

上面推出：T_0 就是 $(TP)_{\alpha(T_0)}$ 的最优时间，而 $(NP)_{T_0}$ 与 $(TP)_{\alpha(T_0)}$ 有相同的最优控制.（需要将 $(NP)_{T_0}$ 的最优控制在 (T_0,∞) 上作0延拓).

$$M_0 \to (TP)_{M_0} \to \tau(M_0) \to (NP)_{\tau(M_0)} \to \alpha(\tau(M_0)) = M_0.$$

上面推出：M_0 是 $(NP)_{\tau(M_0)}$ 的最小范数.

而 $(TP)_{M_0}$ 与 $(NP)_{\tau(M_0)}$ 有相同最优控制.

（需将 $(TP)_{M_0}$ 的最优控制限制在 $(0,\tau(M_0))$ 上！）

在证明定理 4.1 之前，介绍几个引理.

引理4.1　令 $T\in(0,\infty)$. 则 $(NP)_T$ 有最优控制.

证明. 由 $\boxed{假设4.2}$，$(NP)_T$ 有允许控制。然后，用第二章中"允许控制的∃ ⇒ 最优控制∃"类似方法可证 $(NP)_T$ 有最优控制。

引理4.2　函数 $N(\cdot)$ 是从 $(0,\infty)$ 到 $(\hat{N},\infty)$ 上的连续且严格单调的函数，其中 $\hat{N}$ 由(4)给出。

注　这个引理是关键。引理4.2 含有：$N(\cdot):(0,\infty)\to(\hat{N},\infty)$ 一一到上.

证明：step1. 证明 $\forall T>0$ 有 $+\infty>N(T)>0$.　(6)

由引理 4.1 知：$N(T)<+\infty\ \ \forall T>0$。若 (6) 不对，则 $\exists\ \hat{T}>0$ s.t. $N(\hat{T})=0$. 这说明 $u\equiv0$ 是 $(NP)_{\hat{T}}$ 的一个最优控制。故 $e^{A\hat{T}}y_0=0$，再由 $\boxed{假设4.2}$ 得：$y_0=0$，矛盾。∴ (6) 对.

step2. 证明

$N(T_1)>N(T_2)$，当 $0<T_1<T_2<\infty$ 时.　(7)

由引理 4.1，$(NP)_{T_1}$ 有一个最优控制 v_1^*. 故

$y(T_1;y_0,v_1^*)=0$ 且 $\|v_1^*\|_{L^\infty(0,T_1;U)}=N(T_1)$.　(8)

再由 $\boxed{假设4.1}$，$\exists\ v_2\in L^\infty(0,T_2-T_1;U)$ s.t.

$y(T_2-T_1;\ e^{AT_1}y_0,\ v_2)=0$.　(9)

$\because \quad \infty > N(T_1) > 0 . \quad \therefore \quad \exists \ \lambda \in (0,1)$ s.t.

$$\lambda \| v_2 \|_{L^\infty(0, T_2 - T_1; U)} < \frac{N(T_1)}{2} . \tag{10}$$

现在构造一个控制：

$$v_\lambda(t) \triangleq \begin{cases} (1-\lambda) \ v_1^*(t), & t \in (0, T_1), \\ \lambda v_2(t - T_1), & t \in (T_1, T_2). \end{cases} \tag{11}$$

由(11)構构造的 v_λ 是 $(NP)_{T_2}$ 的允许控制。事实上，

$$y(T_2; y_0, v_\lambda) = e^{AT_2} y_0 + (1-\lambda) \int_0^{T_1} e^{A(T_2 - t)} B v_1^*(t) dt$$

$$+ \lambda \int_{T_1}^{T_2} e^{A(T_2 - t)} B v_2(t - T_1) dt$$

$$= (1-\lambda) e^{A(T_2 - T_1)} \left[e^{AT_1} y_0 + \int_0^{T_1} e^{A(T_1 - t)} B v_1^*(t) dt \right]$$

$$+ \lambda \left[e^{A(T_2 - T_1)} e^{AT_1} y_0 + \int_0^{T_2 - T_1} e^{A(T_2 - T_1 - s)} B v_2(s) ds \right]$$

（作了变换 $t - T_1 = s$ ）

上式，结合 (8)，(9) 得

$$y(T_2; y_0, v_\lambda) = (1-\lambda) e^{(T_2 - T_1)A} y(T_1; y_0, v_1^*)$$

$$+ \lambda y((T_2 - T_1); e^{AT_1} y_0, v_2)$$

$$= 0.$$

所以，v_λ 是 $(NP)_{T_2}$ 的允许控制。再由 $N(T_2)$ 的最优性有

$$N(T_2) \le \| v_\lambda \|_{L^\infty(0, T_2)}$$

$$\le \max \left\{ (1-\lambda) \| v_1^* \|_{L^\infty(0, T_1)} , \ \lambda \| v_2 \|_{L^\infty(0, T_2 - T_1)} \right\}$$

上式结合 $(8)_2$ 和 (10) 推出 (7)。

Step 3. 证明：$\forall\ 0<\eta<T_1<T_2<\tau^+$，$\exists\ C(\eta)>0$ s.t.

$$N(T_1)\le N(T_2)+C(\eta)\left[\|e^{A(T_2-T_1)}y_0\|+N(T_2)(T_2-T_1)\right]. \tag{12}$$

（注. $(12)\Rightarrow N(\cdot)$ 的连续性！）

由引理 4.1，$(NP)_{T_2}$ 有一个最优控制 v_2^*。故

$$y(T_2;\,y_0,\,v_2^*)=0 \quad 且 \quad \|v_2^*\|_{L^\infty(0,T_2)}=N(T_2). \tag{13}$$

记

$$\hat{y}\triangleq y(T_2-T_1;\,y_0,\,v_2^*). \tag{14}$$

由 $\boxed{\text{假设 4.1}}$，$\exists\ C(\eta)$ 和 $v_3\in L^\infty(0,T_1)$ s.t.

$$y(T_1;\,y_0-\hat{y},\,v_3)=0;\quad \|v_3\|_{L^\infty(0,T_1)}\le C(\eta)\|y_0-\hat{y}\|。 \tag{15}$$

定义一个控制：

$$v_4(t)\triangleq v_2^*(t+T_2-T_1)+v_3(t),\qquad t\in(0,T_1). \tag{16}$$

~~则~~ 我们要证：v_4 是 $(NP)_{T_1}$ 的允许控制. 事实上，

$$y(T_1;\,y_0,\,v_4)=e^{AT_1}y_0+\int_0^{T_1}e^{A(T_1-t)}B\,v_2^*\underbrace{(t+T_2-T_1)}_{s=t+T_2-T_1}ds$$

$$+\int_0^{T}e^{A(T_1-t)}B\,v_3(t)\,dt$$

$$=\left[e^{AT_1}\hat{y}+\int_{T_2-T_1}^{T_2}e^{A(T_2-t)}B\,v_2^*(t)\,dt\right]$$

$$+\left[e^{AT_1}(y_0-\hat{y})+\int_0^{T_1}e^{A(T_1-t)}B\,v_3(t)\,dt\right].$$

$$= \left[e^{AT_1}\tilde{y} + \int_{T_2-T_1}^{T_2} e^{A(T_2-t)} B\, V_2^*(t)\, dt \right]$$

$$+ \; y(T_1;\, y_0 - \tilde{y},\, V_3)$$

上式，结合 (14)，$(13)_1$，$(15)_1$ 得

$$y(T_1;\, y_0,\, V_4) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{by}(14)}}{=\!=} y(T_2;\, y_0,\, V_2^*) + y(T_1;\, y_0 - \tilde{y},\, V_3)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{by } (13)_1, (15)_1}}{=\!=} 0 + 0 = 0.$$

$\because$ V_4 为 $(NP)_{T_1}$ 的允许控制。

$\therefore$ $N(T_1) \le \|V_4\|_{L^\infty(0,T_1)}$.

上式结合 (16)，$(13)_2$，$(15)_2$ 推得

$$N(T_1) \le \|V_2^*\|_{L^\infty(0,T_2)} + \|V_3\|_{L^\infty(0,T_1)}$$

$$\le N(T_2) + C(\eta)\|y_0 - \tilde{y}\|.$$

上式，结合 (14)，$(13)_2$，得

$$N(T_1) \le N(T_2) + C(\eta)\left[\|y_0 - e^{A(T_2-T_1)}y_0\| + N(T_2)(T_2 - T_1)\right].$$

$\therefore$ (12) 成立.

step 4. 证明：$\lim\limits_{T\to 0^+} N(T) = +\infty.$ (17)

若 (17) 不成立，则 $\exists\ \{T_k\}\ (T_k \to 0)$，$\exists\ C > 0$ s.t.

$$N(T_k) \le C \quad \forall\ k.$$

由引理4.1，每个 $(NP)_{T_k}$ 有一个最优控制 v_k^*。故

$$\|v_k^*\|_{L^\infty(0,T_k)} = N(T_k) \le C\ ;\quad y(T_k\ ;\ y_0, v_k^*) = 0.$$

$$\therefore\quad y_0 = \lim_{k\to\infty} y(T_k\ ;\ y_0,\ 0)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left[y(T_k\ ;\ y_0, v_k^*) - y(T_k\ ;\ 0, v_k^*) \right]$$

$$= \lim_{k\to\infty} y(T_k\ ;\ y_0,\ v_k^*) = 0.$$

这与 $y_0 \ne 0$ 矛盾。 $\therefore$ (17) 成立。

※.

综合上述 steps，该引理得证。

<u>引理 4.3</u>　$(TP)_M$ 有最优控制当且仅当 $M > \hat{N}$，

其中 $\hat{N}$ 由 (4) 给出。

注．$(TP)_M$ 与 $\hat{N}$ 都依赖 y_0。上述引理中，它们对应同一个 y_0。

<u>引理 4.3 之证明</u>　由 $\hat{N}$ 的定义、$N(\cdot)$ 的单调下降性、以及 $(NP)_T$ 最优控制的存在性得

$$\hat{N} < +\infty.$$

Step 1. 证明：若 $M>\hat{N}$，则 $(TP)_M$ 有最优控制。

令 $M>\hat{N}$。由 $\hat{N}$ 的定义(4)有：$\exists\ \hat{T}\in(0,\infty)$ s.t.

$$N(\hat{T})<\hat{N}+(M-\hat{N})=M. \tag{18}$$

由引理 4.1，$(NP)_{\hat{T}}$ 有最优控制 v^* s.t.

$$y(\hat{T};y_0,v^*)=0 \quad 且 \quad \|v^*\|_{L^\infty(0,\hat{T};U)}=N(\hat{T}). \tag{19}$$

令
$$\hat{v}^*(t)=\begin{cases} v^*(t), & t\in(0,\hat{T}),\\ 0, & t\in(\hat{T},\infty).\end{cases}$$

由(18),(19)有：$\hat{v}^*$ 是 $(TP)_M$ 的一个允许控制。于是，我们可以令 $\{T_k\}\subset(0,\infty)$，$\{v_k\}\subset L^\infty(R^+;U)$ s.t.

$$T_k\to T(M) \tag{20}$$

$$y(T_k;y_0,v_k)=0 \quad 且 \quad \|v_k\|_{L^\infty(R^+;U)}\le M \quad \forall\ k. \tag{21}$$

由 $(21)_2$，$\exists$ 一个子序列（依然用 $\{v_k\}$ 表示）和 $\hat{v}\in L^\infty(R^+;U)$

s.t.
$$v_k\to\hat{v} \quad w^* \quad in\ L^\infty(R^+;U); \tag{22}$$

$$\|\hat{v}\|_{L^\infty(R^+;U)}\le\underline{\lim}_{k\to\infty}\|v_k\|_{L^\infty(R^+;U)}\le M. \tag{23}$$

由(22),(20)结合方程可推出

$$y(T_k;y_0,v_k)\to y(T(M);y_0,\hat{v}).$$

上式，结合 (21)，得 $y(T(M); y_0, \hat{v}) = 0$。这，结合(23)，以：

$\hat{v}$ 是 $(TP)_M$ 的最优控制。

Step 2. 证明：若 $0 \le M \le \hat{N}$，则 $(TP)_M$ 没有最优控制。

反证地假设：$(TP)_M$ 有最优控制 且 $0 \le M \le \hat{N}$。则

$\exists\ u^* \in L^\infty(R^+; U)$ s.t.

$$y(T(M); y_0, u^*) = 0 \quad 且 \quad \|u^*\|_{L^\infty(R^+; U)} \le M. \tag{24}$$

$\because y_0 \ne 0$，$\therefore$ 由 (24) 有 $T(M) \in (0, \infty)$ 且 $u^*\big|_{(0, T(M))}$

是 $(NP)_{T(M)}$ 的一个允许控制。再由 $N(T(M))$ 的最优

性得 $N(T(M)) \le \|u^*\|_{L^\infty(0, T(M); U)}$。

$\because M \le \hat{N}$ $\therefore$ 上式结合(24)得

$$N(T(M)) \le M \le \hat{N}. \tag{25}$$

由 (25)、引理 4.2 得：$\forall\ T > T(M)$，

$$N(T) < N(T(M)) \le \hat{N}.$$

另一方面，由引理 4.2 以及 $\hat{N}$ 的定义 (4) 有：

$$N(T) > \hat{N} \quad \forall\ T > 0.$$

这样，我们导出了一个矛盾。故 step 2 之结论正确。证毕。

推论 4.1 令 $(M,T)\in[0,\infty)\times(0,\infty)$. 则

$$M=N(T) \text{ 当且仅当 } T=T(M).$$

注. $M(\cdot):(\hat{N},+\infty)\to(0,\infty)$

$$T \longrightarrow M(T)$$

是 $T(\cdot)$ 的反函数. (互为反函数!)

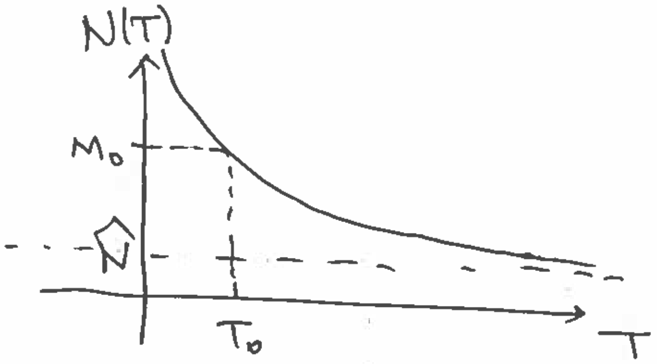


图 1

$$M_0 \xrightarrow{\boxed{图}1\text{找}T_0} M_0=N(T_0)$$

$$\xrightarrow{\text{推论}4.1} T_0=T(M_0)$$

$$\Longrightarrow M_0=N(T(M_0))$$

$$T_0 \xrightarrow{\boxed{图}1} N(T_0) \xrightarrow{\text{令}} M_0=N(T_0)$$

$$\xrightarrow{\text{推论}4.1} T_0=T(M_0)$$

$$\Longrightarrow T_0=T(N(T_0)).$$

推论 4.1 之证明

Step 1. 证明

$$M=N(T) \Longrightarrow T=T(M). \qquad (26)$$

由引理 4.1, $\exists\ u_1^*\in L^\infty(0,T;U)$ s.t.

$$y(T; y_0, u_1^*) = 0 \text{ 且 } \|u_1^*\|_{L^\infty(0,T;U)} = N(T). \tag{27}$$

令 $u_1^*(t) = \begin{cases} u_1^*(t), & t \in (0,T) \\ 0, & t \in (T, \infty). \end{cases}$

$\because$ $M = N(T)$ $\therefore$ 由 (27) 知 u_1^* 是 $(TP)_M$ 的一个允许控制. 故有

$$T(M) \leq T < \infty. \tag{28}$$

又 $\because$ $M = N(T)$, $\therefore$ 由引理 4.2 => $M > \hat{N}$. 这结合引理 4.3 知: $(TP)_M$ 有最优控制 u_2^* (隐含 $T(M) > 0$).

故有

$$y(T(M); y_0, u_2^*) = 0 \text{ 且 } \|u_2^*\|_{L^\infty(R^+;U)} \leq M. \tag{29}$$

从 (29), 得: $u_2^*\big|_{(0,T(M))}$ 是 $(NP)_{T(M)}$ 的允许控制.

$$\therefore \quad N(T(M)) \leq \|u_2^*\|_{L^\infty(0,T(M);U)} \leq M. \tag{30}$$

还是因为 $M = N(T)$, 由 (30) => $N(T(M)) \leq N(T)$.

$\because$ $N(\cdot)$ 是严格递减的 (引理 4.2),

$\therefore$ 上式推出: $T(M) \geq T$.

这与 (28) 一起得 $T = T(M)$.

Step 2. 证明 $T=T(M) \Rightarrow M=N(T)$. (31)

$\because$ $T(M)=T\in(0,\infty)$, $\therefore$ $(TP)_M$ 有允许控制. 然后用"标准方法"可证 $(TP)_M$ 有最优控制. 再由引理4.3有: $M>\hat{N}$. 这与引理4.2一起推出: $\exists\ \hat{T}\in(0,\infty)$ s.t.

$$M=N(\hat{T}). \tag{32}$$

由(32)和(26)得

$$\hat{T}=T(M). \tag{33}$$

$\because$ $T=T(M)$ $\therefore$ 由(32),(33)得 $M=N(T(M))=N(T)$,

即(31)成立.

step 3. 由(26)和(33), 推论4.1得证. ※.

下面证明定理4.1

回顾1 $\mathcal{E}$ 之定义(5): $\mathcal{E}\triangleq\{(N(T),T)\mid T\in(0,\infty)\}$.

回顾2 $N(\cdot):(0,\infty)\to(\hat{N},\infty)$ ——到上, 严格递减, 连续.

step 1. 证明(i). 设 $(M,T)\in\mathcal{E}$. 三个事实如下:

其一, 由(5)、引理4.2、推论4.1有

$$M=N(T)\in(\hat{N},\infty) \text{ 且 } T=T(M); \tag{34}$$

由(34)、引理4.3, 4.1推出: $(TP)_M$ 和 $(NP)_T$ 均有最优控制.

其二. 令 u^* 为 $(TP)_M$ 的一个最优控制。则

$$y(T(M); y_0, u^*)=0 \text{ 且 } \|u^*\|_{L^\infty(R^+;U)} \leq M. \quad (35)$$

由(34)、(35)得: $u^*|_{(0,T)}$ 是 $(NP)_T$ 的最优控制。

其三. 令 v^* 是 $(NP)_T$ 的一个最优控制。则

$$y(T; y_0, v^*)=0 \text{ 且 } \|v^*\|_{L^\infty(0,T;U)} = N(T). \quad (36)$$

令

$$\tilde{v}^*(t) = \begin{cases} v^*(t), & t\in(0,T), \\ 0, & t\in(T,\infty). \end{cases}$$

由(36)、(34)得

$$y(T(M); y_0, \tilde{v}^*)=0; \quad \|\tilde{v}^*\|_{L^\infty(R^+;U)} \leq N(T) = M.$$

$\therefore$ $\tilde{v}^*$ 是 $(TP)_M$ 的最优控制。

上面三个事实，结合定义4.1，说明: $(TP)_M$ 与 $(NP)_T$ 等价。

Step 2. 证明 (i).

矛盾地假设结论(ii)不对。则存在

$$(\hat{M}, \hat{T}) \in [0,\infty) \times (0,\infty) \setminus \mathcal{E}, \quad (37)$$

s.t. $(TP)_{\hat{M}}$ 与 $(NP)_{\hat{T}}$ 等价。

断言:
$$\hat{T} = T(\hat{M}). \quad (38)$$

先假设(38)成立。则由推论4.1得 $\hat{M}=N(\hat{T})$。这与(5)结合推出：$(\hat{M},\hat{T})\in\mathcal{E}$。这与(37)矛盾。

剩下任务：证明(38)。

$\because$ $(TP)_{\hat{M}}$ 与 $(NP)_{\hat{T}}$ 等价 $\therefore$ 由定义4.1(i)知 $(NP)_{\hat{T}}$ 有一最优控制 v^*。故

$$y(\hat{T};y_0,v^*)=0 \quad \text{且} \quad \|v^*\|_{L^\infty(0,\hat{T};U)}=N(\hat{T}). \qquad (39)$$

令
$$\hat{v}^*(t)=\begin{cases} v^*(t), & t\in(0,\hat{T}) \\ 0, & t\in(\hat{T},\infty). \end{cases}$$

则由上述等价性以及定义4.1的(iii)得：$\hat{v}^*$是$(TP)_M$的最优控制。这结合(39)得 $\hat{T}\geq T(\hat{M})$。

接下来，仅需证明下列不对：

$$\hat{T}>T(\hat{M}). \qquad (40)$$

反证地假设(40)成立。首先，由定义4.1的(i)知：$(TP)_{\hat{M}}$有一最优控制 $\hat{u}^*$。故

$$T(\hat{M})\in(0,\infty);\quad y(T(\hat{M});y_0,\hat{u}^*)=0;\quad \|\hat{u}^*\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;U)}\leq M. \qquad (41)$$

任取 $u_0\in U$ s.t.

$$\|u_0\|_U=\hat{M}. \qquad (42)$$

令
$$\hat{u}(t)\triangleq\begin{cases} \hat{u}^*(t), & t\in(0,T(\hat{M})] \\ u_0, & t>T(\hat{M}). \end{cases} \qquad (43)$$

则由(40)–(43)知：

$$\|\hat{u}\|_{L^\infty(0,\hat{T})} = \|\hat{u}\|_{L^\infty(R^+)} = \hat{M}. \tag{44}$$

((44)中用了 $\hat{T} > T(\hat{M})$。) 由(41)–(43)还有

$$y(T(\hat{M}); y_0, \hat{u}) = 0. \tag{45}$$

由(44)，(45)知：$\hat{u}$ 是 $(TP)_{\hat{M}}$ 的最优控制。

$\because$ $(TP)_{\hat{M}}$ 与 $(NP)_{\hat{T}}$ 等价，$\therefore$ $\hat{u}|_{(0,\hat{T})}$ 是 $(NP)_{\hat{T}}$ 的最优控制。$\therefore$ $\|\hat{u}\|_{L^\infty(0,\hat{T};U)} = N(\hat{T})$. (46)

由(44)和(46)有 $N(\hat{T}) = \hat{M}$。这与 $\mathcal{E}$ 之定义(5)结合推出 $(\hat{M}, \hat{T}) \in \mathcal{E}$，矛盾于(37)。

$\therefore$ (40)不对。

证毕。※

注 可推广：其一．$y' = Ay + D(t)y + Bu(t)$；

其二．目标 S 为一凸、闭、有界、对内点集。

前者见我们的书

后者见书或 S. Qin, G. Wang 2018.

§4.2 等价性之应用

令 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ 有界光滑，$\omega \subset \Omega$ 开，χ_ω 为 ω 特征函数。

考虑两个控制热方程：

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = \chi_\omega u, & \text{in } \Omega\times(0,\infty); \\ y_t - \Delta y = \chi_\omega f, & \text{in } \Omega\times(0,T). \end{cases} \qquad (4.7)$$

状态空间为 $Y = L^2(\Omega)$；控制空间 $U = L^2(\Omega)$.

初值 $y_0 \in L^2(\Omega)$. 目标 $S = \{0\} \subset L^2(\Omega)$.

对应两个最优控制问题 $(TP)_M$ 和 $(NP)_T$。

有两个函数 $\alpha: (0,\infty) \to (0,\infty)$ 与

$\tau: (0,\infty) \to (0,\infty)$

$\alpha(T) \triangleq N(T)$，$\tau(M) \triangleq T(M)$.

它们都是从 $(0,\infty) \to (0,\infty)$ 一一到上的连续、严格单调的函数（$\alpha \searrow$；$\tau \nearrow$），且互为反函数.

（注：这时 $\hat{N} = 0$ ！）

$$\alpha(\tau(M)) = M \qquad \forall\ M \in (0,\infty)$$

$$\tau(\alpha(T)) = T \qquad \forall\ T \in (0,\infty).$$

<u>目的</u> 给出 $(TP)_M$ 的最优时间 $\tau(M)$、最优控制 u^* 的充要条件.

注1　$(TP)_M$ 最优控制的存在性已知，唯一性下章会给出．
故 $(NT)_T$ 最优控制也是唯一存在的．

注2　前面介绍过 $(TP)_M$ 的研究难度．直接导出 $\tau(M)$、u^* 的充要条件不易。

手段：利用 $(TP)_M$ 与 $(NP)_{\tau(M)}$ 的等价性，将 $(TP)_M$ 问题转化为 $(NP)_{\tau(M)}$．后者是一个凸问题（后面会解释），可利用变分法得到其必要条件（最优控制满足的），它也是充分条件（由于 $(NP)_{\tau(M)}$ 是一个凸最优控制问题），然后再转化回 $(TP)_M$．

从 $(NP)_T$ 出发。定义泛函 $J^T: L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ 如下：

$$J^T(\varphi_T) = \frac{1}{2}\left(\int_0^T \|\varphi(t;\varphi_T)\|_w dt\right)^2 + \langle \varphi(0;\varphi_T), y_0\rangle,\quad \varphi_T \in L^2(\Omega), \qquad (4.8)$$

其中 $\varphi(\cdot;\varphi_T)$ 为下列对偶方程之解：

$$\begin{cases} \varphi_t + \Delta\varphi = 0 & \text{in } \Omega\times(0,T); \\ \varphi = 0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,T); \\ \varphi(T) = \varphi_T. \end{cases}$$

（$\|\cdot\|_w$ 表示 $\|\cdot\|_{L^2(w)}$.）

注1 在最小范数问题的研究中，J^T 的极小点与最优控制有密切关系。最初人们研究：

$$(NP)_T^2: \quad \operatorname{Inf}\left\{ \|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \;\middle|\; y(T;y_0,u)=0 \right\}.$$

它对应

$$J_2^T(\varphi_T) \triangleq \frac{1}{2}\|\varphi(\cdot;\varphi_T)\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega))} + \langle \varphi(0;\varphi_T), y_0 \rangle. \quad (50)$$

而(48)右边第一项是 $\frac{1}{2}\|\varphi(\cdot;\varphi_T)\|^2_{L^1(0,T;L^2(\omega))}$.

这是因为 $(NP)_T$: $\operatorname{Inf}\left\{ \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \;\middle|\; y(T;y_0,u)=0 \right\}$

注2 易证 J_2^T 在 $L^2(\Omega)$ 中有唯一极小点。(直接证：它是连续的、严格凸的且满足强制性条件，后者需要用能观性不等式。) 但 J^T 在 $L^2(\Omega)$ 上可能没有极小点 (至少目前没人证明)。这体现 J^T 与 J_2^T 有很大差别。

注3 J_2^T 是严格凸的。而 J^T 的严格凸性是在 (G. Wang, Y. Xu, Y. Zhang 2015) 中得到的。

$\therefore$ J_2^T 和 J^T 的极小点，若∃，一定唯一。

注4 我们用变分法中一种常用方法：将定义域 $L^2(\Omega)$ 扩大至一个空间 X_T；证明 $J^T(\cdot)$ 在 X_T 有极小点，且

$$\inf_{\varphi_T \in X_T} J^T(\varphi_T) = \inf_{\varphi \in L^2(\Omega)} J(\varphi_T).$$

我们的 X_T 是 $L^2(\Omega)$ 在某个范数下的闭包。

我们不详细介绍它。

引理 4.4 (i) J^T 在 X_T 上有唯一极小点。(ii) 0 不是 J^T 的极小点.

证明. 略.

引理 4.5 令 $T>0$. 令 $\hat{\varphi}_T$ 为 J^T 的极小点。令 $\hat{\varphi}(t) = \varphi(t;\hat{\varphi}_T)$。则 M 和 f^* 为 $(NP)_T$ 的最小范数和最优控制当且仅当

$$f^*(t) = \left[\int_0^T \|\hat{\varphi}(t)\|_w \, dt\right] \frac{\chi_w \hat{\varphi}(t)}{\|\hat{\varphi}(t)\|_w} \qquad a.e.\ t \in [0,T]$$

$$\left(\text{or } \langle f^*(t), \chi_w \hat{\varphi}(t) \rangle = \max_{v^0 \in B(0,M)} \langle v^0, \chi_w \hat{\varphi}(t) \rangle \right)$$

且 $M = \int_0^T \|\hat{\varphi}(t)\|_w \, dt$.

注1. 热方程有下列唯一延拓性: 若 $\exists\, t_0 \in [0,T]$ s.t.

$\varphi(t_0;\varphi_T)\big|_w = 0$ 则 $\varphi_T = 0$.

这保证了 $\|\hat{\varphi}(t)\|_w \neq 0 \quad \forall\, t \in [0,T]$.

(这里注意: $\hat{\varphi}_T \neq 0$!)

注2　因为 $(NP)_T$ 是一个凸问题，所以最大值原理是最优控制的充分必要条件.

注3　引理 4.5 的证明用了 X_T 的构造，本质上是用 $J^T(\cdot)$ 极小点的 Euler 方程。略去.

定理4.2　令 $M>0$. 令 $\hat{\varphi}_{\tau(M)}$ 为 $J^{\tau(M)}$ 的极小点（在 X_T 中，唯一）. 记 $\hat{\varphi}(t)=\varphi(t;\hat{\varphi}_{\tau(M)})$.

则 T^*, u^* 为 $(TP)_M$ 的时间最优和最优控制当且仅当

$$M=\int_0^{T^*}\|\hat{\varphi}(t)\|\,dt; \qquad (5[illegible])$$

$$u^*(t)=M\chi_w\frac{\hat{\varphi}(t)}{\|\hat{\varphi}(t)\|_W}\quad a.e.\ t\in(0,T^*).$$

证明　由 $(TP)_M$ 与 $(NP)_{\tau(M)}$ 的等价性以及引理 4.5，立即推出所需结论。 ※.

§4.3 最长时间、最小范数、最优目标控制问题

框架：

- Y 和 U 分别为状态与控制空间，均为 Hilbert.
- $T>0$ ~ 终端时间固定。
- 方程为

$$y'(t) = Ay(t) + B\chi_{(\tau,T)}(t)\, u(t), \quad t\in[0,T] \tag{52}$$

其中 $\tau\in[0,T)$；A 生成半群 e^{At}；$B\in\mathcal{L}(U;Y)$。

- 初始条件为 $y(0)=y_0\in Y$.
- 目标 $B_r(z_d)=\{z\in Y \mid \|z-z_d\|_Y\le r\}$，$z_d\in Y$.

$\boxed{\text{假设 4.3}}$ z_d 与 y_0 满足

$$r_T \triangleq \|y(T;y_0,0)-z_d\|>0. \tag{53}$$

注 $\boxed{\text{假设 4.3}}$ 要求目标球中心 z_d 不是 $e^{TA}y_0$. 这是为了后面介绍最优目标控制问题有意义提出的.

本节另一假设如下：

$\boxed{\text{假设 4.4}}$ $[A,B]$ 具有下列唯一延拓性：

若 $\exists\ (a,b)\subset(0,T)$，$\exists\ z\in Y$ s.t.

$$B^* e^{(T-t)A^*} z = 0,$$

则 $z=0$.

注1 $\boxed{\text{假设 4.4}}$ 指：若 $\varphi(\cdot)$ 满足 (i) $\varphi' = -A^*\varphi$ in $(0,T)$
$\varphi(T) \in Y$;
(ii) $\exists (a,b) \subset (0,T)$ s.t. $B^*\varphi(t) = 0 \quad \forall t \in (a,b)$

则 $\varphi(\cdot) \equiv 0$.

注2 $\boxed{\text{假设 4.4}}$ 等价于 $[A, B]$ 在任何区间 $[0,\hat{T}]$ 上的逼近能控性：$\forall y_T \in Y$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \hat{u} \in L^\infty(0,\hat{T}; U)$ s.t.
$$y(T; y_0, \hat{u}) \in B_\varepsilon(y_T).$$

我们先介绍本节第一类最优控制问题，它属于 $(TP)_2$.

给定 $r>0$, $M \geq 0$. 考虑

$(TP)_M^r$
$$\tau(M,r) \triangleq \sup_{u \in \mathcal{U}_M} \left\{ \tau \in [0,T) \,\middle|\, y(T; y_0, \chi_{(\tau,T)} u) \in B_r(z_d) \right\} \qquad (54)$$

其中，
$$\mathcal{U}_M \triangleq \left\{ u \in L^\infty(0,T; U) \,\middle|\, \|u(t)\| \leq M \text{ a.e. } t \in [0,T] \right\}. \qquad (55)$$

- 称 $\tau(M,r)$ 为最优时间.
- 称 u^* 是最优控制，若 $u^* \in \mathcal{U}_M$ 且
$$y(T; y_0, \chi_{(\tau(M,r),T)} u^*) \in B_r(z_d).$$
- u^* 在 $[0, \tau(M,r))$ 上的值对问题不起作用。故我们规定 $u^* \equiv 0$ over $(0, \tau(M,r))$.

注 当 $M=0$ 时，$\mathcal{U}_M$ 中只有 0 控制。不同于 (TP)，(那时 $S=\{0\}$)。虽然 $y(T;y_0,0)=e^{TA}y_0\neq z_d$，但不排除 $y(T;y_0,0)\in B_r(z_d)$.

必须强调：M 是否取 0 是要紧问题！

本节第二类最优控制问题如下：给定 $M\geq 0$，$\tau\in[0,T)$，考虑下列最优控制问题：

$$(OP)_M^\tau \qquad r(M,\tau)\triangleq \inf_{u\in\mathcal{U}_M}\|y(T;y_0,\chi_{(\tau,T)}u)-z_d\|. \qquad (5.6)$$

注1 这是一个无状态约束（有控制约束）的最优控制问题。它要求在控制 $\chi_{(\tau,T)}u$ 的帮助下，使在终端时刻的值与目标 z_d 最接近。它与下列问题有同解：

$$\widehat{(OP)}_M^\tau \qquad \inf_{u\in\mathcal{U}_M}\|y(T;y_0,\chi_{(\tau,T)}u)-z_d\|^2$$

而后者是一种特殊的 LQ 问题，用 LQ 理论（思想）可得反馈最优控制.

注2 在 $(OP)_M^\tau$ 中，称 $r(M,\tau)$ 为最优距离；称 u^* 为最优控制，若 $u^*\in\mathcal{U}_M$ 且 $\|y(T;y_0,\chi_{(\tau,T)}u^*)-z_d\|=r(M,\tau)$.

同样，u^* 在 $[0,\tau]$ 上不起作用，所以规定 $u^*=0$ on $(0,\tau)$.

第三类最优控制问题如下：给定 $\tau\in[0,T)$，$r\in[0,\infty)$，

$$(NP)^r_\tau \qquad M(\tau,r)\triangleq\inf\left\{\|v\|_{L^\infty(\tau,T;U)}\ \middle|\ y(T;y_0,\chi_{(\tau,T)}v)\in B_r(z_d)\right\} \tag{57}$$

<u>注1</u> $(NP)^r_\tau$ 是一个最小范数问题，其目标集为 $B_r(z_d)$.

<u>注2</u> $M(\tau,r)$ 称为最小范数；v^* 称为最优控制，若

$$\|v^*\|_{L^\infty(\tau,T;U)}=M(\tau,r) \text{ 且 } y(T;y_0,v^*)\in B_r(z_d).$$

v^* 在 $(0,\tau)$ 上不起作用，所以令 <u>$v^*=0$ on $(0,\tau)$.</u>

- 上述三类问题中，$(OP)^\tau_M$ 最简单，因为它没有状态约束，$(TP)^r_M$ 最复杂。

- 这一节的目的：给出它们的等价性.

<u>定义 4.2</u> 令 $M\geq 0$，$\tau\in[0,T)$，$r\in(0,\infty)$.

(i) 称 $(TP)^r_M$ 与 $(OP)^\tau_M$ 等价，若它们有相同的最优控制

且 $$(\tau;r)=(\tau(M,r),r(M,\tau)); \tag{58}$$

(ii) 称 $(TP)^r_M$ 与 $(NP)^r_\tau$ 等价，若它们有相同的最优控制

且 $$(M,\tau)=(M(\tau,r),\tau(M,r)); \tag{59}$$

(iii) 称 $(OP)^\tau_M$ 与 $(NP)^r_\tau$ 等价，若它们有相同的最优控制

且 $$(M,r)=(M(\tau,r),r(M,\tau)). \tag{60}$$

注　设 $(TP)^r_M$ 与 $(OP)^\tau_M$ 有相同的最优控制 u^*。

$\because$ u^* 为 $(TP)^r_M$ 的最优控制，　　(61)

$\therefore$ u^* 的有效作用区间为 $(\tau(M,r),T)$，而在 $(0,\tau(M,r))$ 上取 0 值.

又 $\because$ u^* 是 $(OP)^\tau_M$ 的最优控制，　　(62)

$\therefore$ u^* 的有效区间为 (τ,T) 而在 $(0,\tau)$ 上取 0 值.

由此，必须有 $\underline{\tau=\tau(M,r)}$.

另一方面，由 (61) 还有 $y(T;y_0,\chi_{(\tau,T)}u^*)\in\partial B_r(z_d)$；

由 (62) 还有 $\|y(T;y_0,\chi_{(\tau,T)}u^*)-z_d\|=r(M,\tau)$

$\therefore$ $r=r(M,\tau)$.

这意味：当 $(OP)^\tau_M$ 与 $(NP)^r_\tau$ 有相同最优控制时，(58) 自动成立。

同理，(59)，(60) 也是自动成立的.

定理 4.3　下列结论成立：

(i) $\forall\ \tau\in[0,T)$，$\forall\ M\in(0,M(\tau,0))$，

$(OP)^\tau_M$，$(TP)^{r(M,\tau)}_M$，$(NP)^{r(M,\tau)}_\tau$ 等价.

(ii) $\forall\ \tau\in[0,T)$，$r\in(0,r_T)$，

$(NP)^\tau_r$，$(OP)^\tau_{M(\tau,r)}$，$(TP)^r_{M(\tau,r)}$ 等价.

(iii) $\forall\ M\in(0,\infty),\ r\in[r(M,0),\ r_T)\cap(0,r_T)$,

$(TP)^r_M$, $(NP)^r_{\tau(M,r)}$, $(OP)^{\tau(M,r)}_M$ 等价.

注1 上述三类问题提供了三个二元函数:

$$\tau:(M,r)\to\tau(M,r);\quad r:(M,\tau)\to r(M,\tau);\quad (\tau,r)\to M(\tau,r). \tag{63}$$

于是，在 τ, M, r 三个参数中任给两个，可通过(63)中某个函数造出第三个参数，如由 τ, M 造出 $r=r(M,\tau)$.

反过来，对这样的三个参数(其中一个由另两个造出)，如 $\tau, M, r(M,\tau)$，我们可以构造三个最优控制问题，如 $(TP)^{r(M,\tau)}_M$, $(OP)^{\tau}_M$, $(NP)^{r(M,\tau)}_\tau$. 它们是等价的。这就是定理 4.3 表述的主要意思.

注2 对(63)中的三个函数，我们需要确定其定义域 s.t. 注1中的三个问题等价. 这在定理4.3中已经做了.

注3 上述三个问题的最优控制的存在性与参数有关:

(i) $\forall\ M\geq 0,\ \tau\in[0,T)$, $(OP)^\tau_M$ 有解;

(ii) $\forall\ \tau\in[0,T)$, $r\in(0,\infty)$, $(NP)^r_\tau$ 有解;

(iii) $(TP)^r_M$ $(r\in(0,r_T),\ M\geq 0)$ 有解当且仅当

$$M\geq M(0,r).$$

证明略. 见书 p.256.

注4　证明定理4·3的主要元素是研究上述三个函数的性质：

(i)　固定 $\tau \in [0,T)$，$r(\cdot,\tau)$ 是从 $[0, M(\tau,0))$ 到 $(0,r_T)$ 的一一到上的、连续的、严格递减的函数。它的反函数是 $M(\tau,\cdot)$，即

$$r = r(M(\tau,r),\tau) \quad \forall\, r\in(0,r_T); \quad M = M(\tau, r(M,\tau)) \quad \forall\, M\in[0,M(\tau,0)).$$

(ii)　固定 $r\in(0,r_T)$，$M(\cdot,r)$ 是从 $[0,T)$ 到 $[M(0,r),\infty)$ 的一一到上的、连续的，严格递~~减~~增函数。它的反函数是 $\tau(\cdot,r)$。

第五章 时间最优控制的其它性质

§5.1 Bang-bang 性

§5.1.1 介绍及应用

- 方程 $y'(t) = Ay(t) + Bu(t)$, $t \geq 0$,

  $A \sim e^{tA}$ 半群; $B \in \mathcal{L}(U, Y)$.

- 初始条件 $y(0) = y_0 \in Y$.

- 控制约束: $\mathcal{U}_c = \{u(\cdot): \mathbb{R}^+ \to U \text{ 可测} \mid u(t) \in \mathbb{U}\}$,

  其中 $\mathbb{U}$ 为 U 中一有界、有内点、闭集，边界记为 $\partial\mathbb{U}$.

- 目标: $S \subset Y$ 为一子集 s.t. $y_0 \notin S$.

- 问题 $(TP)_1$ $T^* \triangleq \inf\limits_{u \in \mathcal{U}_c} \{T \mid y(T; y_0, u) \in S\}$.

定义 5.1 (i) 设 u^* 为 $(TP)_1$ 的一个最优控制. 称 u^* 具有 bang-bang 性，若 $u^*(t) \in \partial\mathbb{U}$ a.e. $t \in (0, T^*)$.

(ii) 称 $(TP)_1$ 具有 bang-bang 性，若它的每一个最优控制都有 bang-bang 性.

(iii) 一个具有 bang-bang 性的控制称为 bang-bang 控制。

注1 当 $\mathbb{U} = B_r(0)$ 时, u^* 的 bang-bang 性意味着:

$$\|u^*(t)\| = r \quad a.e.\ t \in (0, T^*).$$

注2　有两种方法导出 bang-bang 性：其一，利用最大值原理（CMP或LMP）与对偶方程的定性 唯一延拓性；其二，利用时间可测集上的零能控。

在介绍这些方法之前，我们给出 bang-bang 性的一个应用.

定理5.1　设 $S\subset Y$ 为一凸集。设 U 为 U 中一闭球。假设 $(TP)_1$ 具有 bang-bang 性，则最优控制唯一。

证明：记 $U=B_R(v_0)$ $(v_0\in U)$。设 u^*, v^* 为 $(TP)_1$ 的两个不同的最优控制。则 $\exists$ 一正可测集 $E_1\subset(0,T^*)$

$$\text{s.t.}\quad u^*(t)\neq v^*(t),\quad \forall t\in E_1; \tag{1}$$

$$\text{且}\quad y(T^*;y_0,u^*),\ y(T^*;y_0,v^*)\in S. \tag{2}$$

令 $w^*(t)\triangleq \dfrac{u^*(t)+v^*(t)}{2}$　a.e. $t\in(0,\infty)$。

则
$$\|w^*(t)\|\leq R\quad \text{a.e.},\quad \text{i.e.},\quad w^*\in\mathcal{U}_c. \tag{3}$$

$\because$ S 是凸集　$\therefore$ 由(2)有

$$y(T^*;y_0,w^*)=\frac{y(T^*;y_0,u^*)+y(T^*,y_0,v^*)}{2}\in S. \tag{4}$$

由(3),(4)得：w^* 也是 $(TP)_1$ 的最优控制。

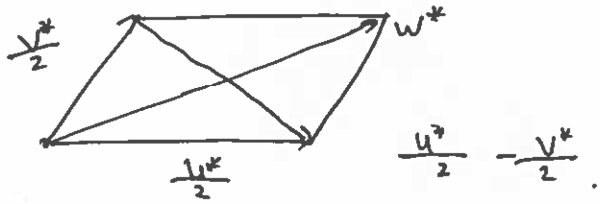
另一方面，由平行四边形法则有：当对 a.e. $t\in E_1$

$$\|w^*(t)-v_0\|^2=2\left(\left\|\frac{u^*(t)-v_0}{2}\right\|^2+\left\|\frac{v^*(t)-v_0}{2}\right\|^2\right)-\left\|\frac{u^*(t)-v_0}{2}-\frac{v^*(t)-v_0}{2}\right\|^2$$

$$= R^2 - \frac{1}{4}\|u^*(t) - v^*(t)\|^2 \quad (\text{由 bang-bang of } u^*, v^*)$$

$$< R^2 \quad (\text{由 } (1).)$$

$\therefore$ W^* 不具 bang-bang 性，这与 $(TP)_1$ 的 bang-bang 性矛盾. ※.



设 $V_0 = 0$.

§ 5.1.2 Bang-bang 与 O.D.E.

当 A、B 为 $n \times n$ 与 $n \times m$ 矩阵时 ($Y = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^m$), 有两类重要的控制约束: (i) $\mathbb{U} = B_\rho(0)$, 称其为球形约束;

(ii) $\mathbb{U} = \prod_{j=1}^{m} [-a_j, a_j]$ $(a_j \in (0, \infty))$

称其为矩阵约束.

球形约束的 bang-bang: $\|u^*(t)\| = \rho$ a.e. $t \in (0, T^*)$;

矩阵约束的 bang-bang 有两种。其一，弱 bang-bang: $u^*(t) \in \partial \mathbb{U}$; 其二，强 bang-bang: $u^*(t)$ 在矩形顶点。

(顶点是边界的边界!)

例 5.1 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y_T = \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix}$.

方程: $y' = Ay + Bu$, $t \geq 0$. $(y(t) \in \mathbb{R}^2,\ u(t) \in \mathbb{R}.)$

$\mathbb{U} = [-1, 1]$, $\quad S = y_T = \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix}$.

可以验证：$T^*=1$；$u_1^*(t)\equiv 0$ 和 $u_2^*(t)=\begin{cases}1, & t\in(0,\frac{1}{2})\\ -1, & t\in(\frac{1}{2},1)\end{cases}$

均为最优控制。u_1^* 不是 bang-bang 控制而 u_2^* 是。

定理 5·2　令 $U=B_\rho(0)$ $(\rho>0)$。假设 (A,B) 满足

$$\operatorname{rank}(B, AB, \cdots, A^{n-1}B)=n, \tag{5}$$

则 $(TP)_1$ 有 bang-bang 性。

证明　step1. 当 $S=\{y_T\}$（y_T 为 Y 中某个不同于 y_0 的元）时，证明 bang-bang 性。

设 u^* 为一最优控制。则 $T^*>0$。

回顾能达集 $Y_R(T^*)\triangleq\{y(T^*;y_0,u)\,|\,u\in\mathcal{U}_c\}$.

它是 $\mathbb{R}^n$ 中凸集且与目标 $\{y_T\}$ 可分（见定理3·2）。

故 $(TP)_1$ 满足 CMP。$\therefore\ \exists\, z^*\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ s.t.

$$\langle u^*(t), B^*e^{A^*(T^*-t)}z^*\rangle=\max_{v\in B_\rho(0)}\langle v, B^*e^{A^*(T^*-t)}z^*\rangle \quad \text{a.e. } t\in(0,T^*) \tag{6}$$

此外，由 (5) 以及 $t\to B^*e^{A^*t}z^*$ 的解析性可得：

$$B^*e^{A^*(T^*-t)}z^*\neq 0 \qquad \text{a.e. } t\in(0,T^*)。$$

上式结合 (6) 得：

$$u^*(t)=\rho\,\frac{B^*e^{A^*(T^*-t)}z^*}{\|B^*e^{A^*(T^*-t)}z^*\|} \qquad \text{a.e. } t\in(0,T^*)。$$

上面两个式子推出 $\|u^*(t)\|=\rho$ a.e. $t\in(0,T^*)$.

故 $(TP)_1$ 有 bang-bang 性。

Step2 对一般 S，证明 $(TP)_1$ 有 bang-bang 性。

设 (u^*, y^*) 为最优对。则 $y^*(T^*) \in S$。令 $\hat{S} = \{y^*(T^*)\}$

而令 $\widehat{(TP)}_1$ 是对应目标 $\hat{S}$ 的时间最优控制问题。

则 u^* 也是 $\widehat{(TP)}$ 的最优控制。再由 step1 得 u^* 是

bang-bang 控制。 ※

例 5.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$y' = Ay + Bu, \quad t \geq 0.$$

$$S = \{y_T\} \text{ 而 } y_T = \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix}. \quad \mathbb{U} = [-1, 1].$$

注意：$\because (B, AB) = 1 \quad \therefore$ (5)不成立。

可验证：$T^* = 1$，$u^* \equiv 0$ 是一最优控制但非 bang-bang。

定理 5.2 令 $m \geq 2$。$B \triangleq (b_1, \cdots, b_m)$ （b_j 为 $\mathbb{R}^n$ 中列向量）。

令 $\mathbb{U} = \prod_{j=1}^{m} [-a_j, a_j]$ （$a_j > 0$）。则下列成立：

(i) 若 $\operatorname{rank}(b_j, Ab_j, \cdots, A^{n-1}b_j) = n \quad \forall j = 1, \cdots, m$，则

$(TP)_1$ 有强 bang-bang 性。

(ii) 若 $\operatorname{rank}(b_1, Ab_1, \cdots, A^{n-1}b_1) < \operatorname{rank}(B, AB, \cdots, A^{n-1}B)$，

则 $\exists\, y_0 \in$ 在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ s.t. 对应的 $(TP)_1$（其中 $S = \{0\}$）

不具强 bang-bang 性。

注1. 证略。见书 P.292–293.

注2 (i) 相当于 (A, b_j) $(\forall j)$ 能控.

§5.1.3 无穷维情形 I — bang-bang 与零能控

框架为§5.1开始时介绍的。

假设5.1 系统 $y' = Ay + Bu$ 称为具有时间可测集上的零能控(简称 E-能控),若 $\forall T>0$, $\forall$ 正可测集 $E \subset (0,T)$, $\exists\, C(T,E)>0$ s.t. $\forall y_0 \in Y$ $\exists$ $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; U)$ s.t.

$$y(T; y_0, \chi_E u) = 0 \quad 且 \quad \|\chi_E u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; U)} \le C(T,E)\|y_0\|. \tag{7}$$

注1. 因为 (A, B) 时不变 $\therefore$ E-能控 $\Longleftrightarrow$ 下列成立:

$\forall\, 0 \le T_1 < T_2 < \infty$, $\forall\, E \subset (T_1, T_2)$, $\exists\, C(T_2 - T_1, E) > 0$

s.t. $\forall y_0$ $\exists\, u \in L^\infty(T_1, T_2)$ s.t.

$$y(T_2; T_1, y_0, \chi_E u) = 0 \quad 且 \quad \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; U)} \le C(T_2 - T_1, E)\|y_0\|.$$

注2 E-能控等价于下列 E-能观不等式:

$\forall\, T>0$, $\forall$ 正可测集 $E \subset [0,T]$, $\exists\, C(T,E)$ s.t.

$$\varphi' = -A^* \varphi, \quad t \in [0,T], \quad \varphi(T) \in Y \quad (对偶方程)$$

的任何解 φ 满足

$$\|\varphi(0)\|_Y \le C(T,E) \int_0^T \|B^* \chi_E(t)\varphi(t)\|_U \, dt$$

$$= C(T,E)\, \|B^*\varphi\|_{L^1(E;U)}.$$

注3 · $y_t - \Delta y = \chi_w u$ 具有E-能观性 (G. Wang 2008)

· $y_t - \Delta y + a(x) y + b(x)\cdot\nabla y = \chi_w u$ 具有 E-能控性.

(K·D· phung, G. Wang 2013)

· 当 e^{tA} 为解析半群时, $y' = Ay + Bu$ 具有 E-能控,

若下列成立: $\exists\, d>0, \sigma>0$ s.t. $\forall\, L\in(0,1)$ 有

$$\|e^{A^*L} z\|^2 \le d\, e^{\frac{d}{L^\sigma}} \int_0^L \|B^* e^{A^*(L-t)} z\|^2 dt, \quad \forall z \in Y.$$

(G. Wang, C. Zhang 2017).

在此方向, L. Escauriaza, C. Zhang. ect 做过更深入研究.

<u>定理 5.3</u> 设 (A, B) 具有 E-能控性。则 (TP)$_1$ 具有 bang-bang 性。

<u>证明</u> 矛盾地假设: 最优控制 u^* 不具 bang-bang 性。则

$\exists$ 正可测集 $E\subset(0,T^*)$ s.t.

$$u^*(t) \notin \partial U \qquad \forall\, t\in E. \tag{8}$$

(以下给出思路!)

由于 u^* 没有尽力, 我们期待造一个新控制 v_δ $(\delta \ll 1)$

s.t.

$$v_\delta(t) \in U \quad \text{a.e. } t\in(0,T^*); \tag{9}$$

$$y(T^*-\delta;\, y_0, v_\delta) = y(T^*;\, y_0, u^*). \tag{10}$$

(若这成功了, 则 $T^*-\delta$ 变成了比最优时间 T^* 还短的时间, 矛盾!)

V_δ 的构造要利用：当 $t\in E$ 时，$u^*(t)\notin\partial U$，故在E上，$u^*(t)$ 可以再加一个 $\hat{u}^*(t)$ s.t. $u^*(t)+\hat{u}^*(t)\in U$，而 $\hat{u}^*$ 能帮助解在 T^* 之前达到目标.

V_δ 形如：

$$V_\delta(t)=\begin{cases} u^*(t+\delta)+\chi_E(t+\delta)\,u_\delta(t+\delta), & t\in[0,T^*-\delta],\\ 0, & t>T^*-\delta. \end{cases} \tag{11}$$

第一. (11) 需保证：当 $\|u_\delta\|<<1$ 时，(9) 成立。可能性：

当 $t+\delta\notin E$ 时，$V_\delta(t)=u^*(t+\delta)\in U$；

当 $t+\delta\in E$ 时，$d(u^*(t+\delta),\partial U)>0$，于是对"很小的" u_δ 有 $V_\delta(t)=u^*(t+\delta)+u_\delta(t+\delta)\in U$。

第二. (11) 需保证：当 $\|u_\delta\|<<1$ $(u_\delta\neq0)$ 时，(10) 成立.

可行性分析：记 $G(t)=e^{At}$，$t\geq0$. 则

$$y(T^*;y_0,u^*)=G(T^*)y_0+\int_0^{T^*}G(T^*-t)\chi_\omega u^*(t)\,dt; \tag{12}$$

$$\begin{aligned} y(T^*-\delta;y_0,V_\delta)&=G(T^*-\delta)y_0+\int_0^{T^*-\delta}G(T^*-\delta-t)\chi_\omega V_\delta(t)\,dt \\ &=G(T^*-\delta)y_0+I_1+I_2, \quad (\text{by } (11)) \end{aligned} \tag{13}$$

其中，$I_1\triangleq\int_0^{T^*-\delta}G(T^*-\delta-t)\chi_\omega u^*(t+\delta)\,dt$;

$I_2\triangleq\int_0^{T^*-\delta}G(T^*-\delta-t)\chi_\omega\chi_E(t+\delta)\,u_\delta(t+\delta)\,dt$.

作变换 $s=t+\delta$ （这里需要方程的时不变性）得：

$$I_1 = \int_\delta^{T^*} G(T^*-s)\chi_w u^*(s)ds, \tag{14}$$

$$I_2 = \int_0^{T^*-\delta} G(T^*-\delta-t)\chi_w \chi_{E_\delta}(t) w_\delta(t)dt$$

其中，$E_\delta \triangleq \{t \mid t+\delta \in E\}$； $w_\delta(t) = u_\delta(t+\delta)$

由(12), (13), (14)知

$$y(T^*; y_0, u^*) = y(T^*-\delta; y_0, V_\delta) \iff$$

$$G(T^*)y_0 + \int_0^{T^*} G(T^*-t)\chi_w u^*(t)dt$$

$$= G(T^*-\delta)y_0 + \int_\delta^{T^*} G(T^*-t)\chi_w u^*(t)dt + \int_0^{T^*-\delta} G(T^*-\delta-t)\chi_w \chi_{E_\delta}(t) w_\delta(t)dt.$$

上式 $\iff$

$$G(T^*-\delta)z_\delta + \int_0^{T^*-\delta} G(T^*-\delta-t)\chi_w \chi_{E_\delta}(t) w_\delta(t)dt = 0 \tag{15}$$

其中 $z_\delta = -\left[(G(\delta)-I)y_0 + \int_0^\delta G(\delta-t)\chi_w u^*(t)dt\right]$

注意：当 $\delta \ll 1$ 时，$\|z_\delta\| \ll 1$.

$$(15) \iff y(T^*-\delta; z_\delta, \chi_{E_\delta} w_\delta) = 0. \tag{16}$$

由 E-能控性有：$\exists\, C\left(\frac{T^*}{2}\right) > 0$ s.t. $\forall z_d$ $\exists\, w_\delta$ s.t.

$$\|w_\delta\|_{L^\infty(0,T^*-\delta;U)} \le C\|z_d\|_Y \tag{17}$$

由(16), (17)看出：(11)可能保证(9), (10)同时成立（当 $\delta \ll 1$ 时）.

#

注1. ‘E-能控 $\Rightarrow$ $(TP)_1$ 的 bang-bang 性’ 需要方程时不变！

但 “E-能控” $\Rightarrow$ $(TP)_2$ 的 bang-bang 性” 不需要.

(见书 p.315。)

§ 5.1.4. 无穷维系统 II — bang-bang 与最大值原理.

$\boxed{\text{假设 } 5.2}$ 下列唯一延拓性成立：若 ∃ 正可测集 $E \subset [0,T]$,

∃ $z \in Y$ s.t. $B^* e^{A^* t} z = 0$ $\forall\, t \in E$, 则 $z = 0$.

注. 它说的是：若 $\varphi(\cdot)$ 满足 (i) $\varphi' = -A^*\varphi$, $\varphi(T) \in Y$

(ii) $B^*\varphi(t) = 0$ $\forall\, t \in E$ (E为某个正可测集)

则 $\varphi \equiv 0$.

定理 5.4 令 $\boxed{\text{假设 } 5.2}$ 成立。若 $(TP)_1$ 满足 CMP 或 LMP，则

$(TP)_1$ 有 bang-bang 性。

证明 Step 1. 证：$\boxed{\text{假设 } 5.2}$ + CMP $\Rightarrow$ bang-bang 性.

令 u^* 为最优控制。则由 CMP，∃ $z^* \in Y \setminus \{0\}$ s.t.

$$\langle u^*(t), B^* e^{A^*(T-t)} z^* \rangle = \max_{w \in U} \langle w, B^* e^{A^*(T^*-t)} z^* \rangle \quad \text{a.e. } t \in (0,T^*). \qquad (18)$$

现在，我们用 (18) 和 $\boxed{\text{假设 } 5.2}$ 证明：

$$u^*(t) \in \partial U \quad \text{a.e. } t \in (0, T^*). \qquad (19)$$

若 (19) 不成立，则 ∃ 正可测集 $E \subset (0, T^*)$ s.t.

$$u^*(t) \in \operatorname{Int} U \quad \forall\, t \in E. \qquad (20)$$

首先，∵ $z^* \neq 0$ ∴ 由 $\boxed{\text{假设 5.2}}$ 有：∃ 正可测集 $E_1 \subset E$

s.t. $B^* e^{A^*(T^*-t)} z^* \neq 0 \quad \forall\, t \in E_1.$ (21)

现在，$\forall\, t \in E_1$ 定义线性泛函 $F_t : U \to \mathbb{R}$ 如下：

$$F_t(w) \triangleq \langle w, B^* e^{A^*(T^*-t)} z^* \rangle_U, \quad w \in U.$$

则由 (21) 知 F_t 是一非 0 泛函。故它不能在 U 中任一含内点的闭集的内部取最大值。但 (20) 与 (18) 表示：它在 U 的内部取到了最大值，矛盾！所以 (19) 成立。

Step 2. 用类似方法可证：$\boxed{\text{假设 5.2}}$ + LMP ⇒ bang-bang. #

注1 Bang-bang 性是非常值得研究的问题.
对波方程的时间最优控制以及 bang-bang 性研究是很有意义的，
但有难度，即使对传输方程.

注2 考虑
$$\begin{cases} y_t(x,t) - \Delta y(x,y) = \chi_\omega(x)\, u(x,t), & (x,t) \in \Omega \times R^+ \\ y = 0 & \text{on } \partial\Omega \times R^+ \\ y(x,0) = y_0(x) & (y_0 \in L^2(\Omega)) \end{cases}$$

记解为 $y(x,t; y_0, u)$. $((x,t) \in \Omega \times R^+)$.

令 $\hat{\mathcal{U}}_C \triangleq \{u : \Omega \times R^+ \to \mathbb{R}$ 可测 $\mid |u(x,t)| \le \rho$ a.e. $(x,t) \in \Omega \times R^+\}$

$(TP)_1$ $\inf\limits_{u \in \hat{\mathcal{U}}_c} \{ T \mid y(x,T) = 0 \text{ a.e. } x \in \Omega \}.$

这时的 bang-bang 性为 $|u^*(x,t)| = \rho$ a.e. $(x,t) \in \omega \times (0, T^*)$.

§5.2 最优控制的动力行为

这节考虑有限维情形： $Y=\mathbb{R}^n$, $U=\mathbb{R}^m$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$.

方程： $y'=Ay+Bu$, $t\geq 0$.

初始条件： $y(0)=y_0$. $y_0\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$.

控制约束： $\mathcal{U}_c=\{u\in PC(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^m)\,|\,\|u(t)\|\leq 1\ \ \forall t\}$.

其中, $PC(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^m)\triangleq\{f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^m\,|\,f$ 分段连续，处处左连续、只有有限个间断点$\}$.

目标： $S=\{0\}\subset\mathbb{R}^n$.

问题： $(TP)_1$.

注. 通常控制约束集 $\hat{\mathcal{U}}_c=\{u:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^m$ 可测$\,|\,\|u(t)\|\leq 1$ a.e.$\}$.

它对应我们熟悉的 $(\widehat{TP})_1$。

结论： $(TP)_1$ 与 $(\widehat{TP})_1$ 有相同的最优控制和最优时间

(S. Qin, G. Wang, H. Yu, 2021)

$\boxed{\text{假设 5.3}}$ $(TP)_1$ 有最优控制.

注1 $(TP)_1$ 依赖 y_0。

$\forall y_0$, $(TP)_1$ 有最优控制 $\Leftrightarrow$ (A,B) 满足 Kalman 能控秩条件 且 $\sigma(A)\subseteq\mathbb{C}^-$.

(见讲义定理 2.2)

但是，$\forall (A,B)$（注意 $B\neq 0$），$\exists\, y_0$ s.t. (TP)$_1$ 有解.

事实上，可以把这样的 y_0 组成的子~~空间~~集写出来.（见

S. Qin, G. Wang, H. Yu. 2021.）

<u>命题 5.1</u> 令 $\boxed{\text{假设 5.3}}$ 成立。则下列结论正确：

(i) $\exists\ z^*\in \operatorname{Span}\{B, AB, \cdots, A^{n-1}B\}$ with

$$B^* e^{A^*(T^*-\cdot)} z^* \neq 0 \quad \text{in } C((0,T^*);\mathbb{R}^m),$$

s.t. <u>任何一最优控制</u> u^* 满足

$$\langle u^*(t), B^* e^{A^*(T^*-t)} z^*\rangle = \max_{v\in B_1(0)} \langle v, B^* e^{A^*(T^*-t)} z^*\rangle \quad \text{a.e. } t.$$

(ii) 若 u^* 是最优控制，则

$$u^*(t) = \begin{cases} \dfrac{B^* e^{A^*(T^*-t)} z^*}{\| B^* e^{A^*(T^*-t)} z^*\|}, & t\in (0,T^*)\setminus(\{T^*\}-\mathcal{O}_{z^*}), \\[2ex] \lim\limits_{s\to t^-} \dfrac{B^* e^{A^*(T^*-t)} z^*}{\| B^* e^{A^*(T^*-t)} z^*\|}, & t\in(\{T^*\}-\mathcal{O}_{z^*})\cap(0,T^*), \end{cases}$$

其中 z^* 由(i)给出，而

$$\mathcal{O}_{z^*} \triangleq \{t\in\mathbb{R}^+ \mid B^* e^{A^* t} z^* = 0\}. \qquad \text{—(22)}$$

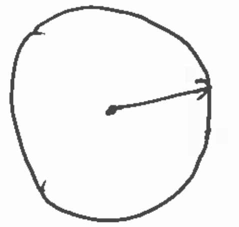
(iii) 每个最优控制 u^* 都是 bang-bang 的，i.e. $\|u^*(t)\|=1\ \forall t$.

(vi) 最优控制是唯一的。

注 1. $\mathcal{O}_z$ 只含有限个点.（见下面的引理 5.1）

注2 引理5.1是经典结果。改动地方：其一，用 $\boxed{\text{假设5.3}}$ 代替其它假设；其二，(ii)中的 $\hat{z}^*$ 与 u^* 无关，直接由(i)给出.

由命题5.1(ii)知： $u^*(t)\in\partial B(0,1)\quad \forall\ t\in(0,T^*)$.



想知道：当 t 在 $[0,T^*]$ 上变化时，$u^*(t)$ 是如何沿 $\partial B(0,1)$ 运动的。

定义5.1 设 u^* 为最优控制，令

$\mathcal{S} \triangleq \{u^*$ 在 $(0,T^*)$ 上的所有切换点，i.e., u^* 的不连续点$\}$.

注. $\because\ u^*\in PC\quad \therefore\ u^*$ 只有有限个切换点。

定义5.2 当 $\mathcal{S}\neq\emptyset$ 时，记

$$D\triangleq\{v\in\partial B_1(0)\ |\ \exists\ \hat{\tau}\in\mathcal{S}\ \text{s.t.}\ \lim_{t\to\hat{\tau}^-}u^*(t)=v\}.$$

D 中的元称为 u^* 的切换方向。

问题：(i) $\#\mathcal{S}=?$ 未知！只有局部估计。

(ii) 令 $\hat{\tau}\in\mathcal{S}$，$u^*(t)$ 是如何跳跃的？（将介绍）。

(iii) $u^*(t)$ 是如何随 t 变化而运动的？（将介绍）

(iv) D 中有哪些方向？

((iv) 已知，不介绍，见 Qin, Wang, Yu 2021)

先引入下列记号及引理：

$$d_A \triangleq \min\left\{\frac{\pi}{|\ln\lambda|} \;\middle|\; \lambda\in\sigma(A)\right\}; \tag{23}$$

$$q_{A,B} \triangleq \max\left\{\dim V_A(b) \;\middle|\; b \text{ 为 } B \text{ 的列向量}\right\}, \tag{24}$$

其中 $V_A(b) \triangleq \mathrm{span}\{b, Ab, \cdots, A^{n-1}b\}$.

引理 5.1 令 d_A, $q_{A,B}$, θ_z 由 (23), (24), (22) 给出。则 $\forall z\in \mathrm{Span}\{B, AB, \cdots, A^{n-1}B\}\setminus\{0\}$，$\forall$ 长度不超过 d_A 的开区间 I，θ_z 在 I 上至多只有 $(q_{A,B}-1)$ 个零。

注 证略. 主要运用下面结论 (S. Qin, G. Wang, 2017)

任给 $t_1<t_2<\cdots<t_{q_{A,B}}$ s.t. $t_{q_{A,B}}-t_1<d_A$，有

$$\mathrm{Span}\left\{e^{At_1}B, \cdots, e^{At_{q_{A,B}}}B\right\} = \mathrm{span}\{B, AB, \cdots, A^{n-1}B\}. \tag{25}$$

这也是引理 5.1 中需要 $|I|<d_A$ 的原因。

关键：能否去掉 “$t_{q_{A,B}}-t_1<d_A$” ?

已知：当 $t_{q_{A,B}}-t_1=d_A$ 时，有反例说明 (25) 不对！

这个问题与下列 O.D.E. 的唯一延拓性密切相关：

$$\text{(Q)}\quad x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\cdots a_{n-1}x'(t)+a_nx(t)=0. \tag{26}$$

(a_j 为实数)，令 $x(\cdot)$ 为 (26) 的一个解。

若 $\exists\ t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ s.t. $x(t_j)=0,\ j=1,\cdots,n$,

是否有 $x(\cdot)\equiv 0$?

令 $d_A = \min\left\{ \frac{\pi}{|\mathrm{Im}\lambda|} \;\middle|\; \lambda \text{ 为(26)的特征多项式之根} \right\}$.

现在结果 (S. Qin, G. Wang, 2017):

当 $t_n - t_1 < d_A$ 时, ($\hat{Q}$) 对!

当 $t_n - t_1 = d_A$ 时, 有反例说($\hat{Q}$)不对.

猜想: 任给 $t_1 < \cdots < t_n$ s.t. $t_i - t_j \neq d_A$,

则 ($\hat{Q}$) 对!?

<u>定理 5.5</u> 令 $\boxed{\text{假设 5.3}}$ 成立。则下列成立.

(i) 若 $I \subset (0, T^*)$ 是一个长度 $|I| \leq d_A$ 的开区间. 则

$$\#(\mathcal{S} \cap I) \leq (q_{A,B} - 1).$$

(ii) 设 u^* 是最优控制. 令 $\hat{t} \in S$. 则

$\lim\limits_{t\to\hat{t}^-} u^*(t)$ 和 $\lim\limits_{t\to\hat{t}^+} u^*(t)$ 关于原点对称, 即

$$\lim_{t\to\hat{t}^-} u^*(t) + \lim_{t\to\hat{t}^+} u^*(t) = 0. \tag{27}$$

<u>注!</u> (i) 只能说明在 I 上至多有 $(q_{A,B}-1)$ 个切换点。若 $\sigma(A)$ 只含实特征值, 则 $d_A = \infty$. 故 u^* 至多只有 $(q_{A,B}-1)$ 个切换点。这改善了 Pontryagin 1962 书中一个结果.

注2 定理5.5(ii)说明：在每个切换点处，u^* 从一个方向跳到其反方向.

在证明定理5.5之前，回顾：

其一. $\$ \triangleq \{u^*$ 在 $(0,T^*)$ 上的所有切换点$\}$.

其二. 令
$$F(t)=\frac{B^*e^{A^*(T^*-t)}z^*}{\|B^*e^{A^*(T^*-t)}z^*\|},\quad t\in\mathbb{R}^+, \tag{28}$$

则
$$\mathcal{O}_{z^*}=\{F(t)\text{ 的所有零点}\}.$$

其三. 由命题5.1(ii),
$$u^*(t)=\begin{cases}F(t), & t\in(0,T^*)\setminus(\{T^*\}-\mathcal{O}_{z^*}),\\ \lim\limits_{s\to t^-}F(t), & t\in(\{T^*\}-\mathcal{O}_{z^*})\cap(0,T^*).\end{cases} \tag{29}$$

注意 显然，$\$\subset(\{T^*\}-\mathcal{O}_{z^*})\cap(0,T^*)$.

但反之不对！(见反例, S. Qin, G. Wang, H. Yu. 2021)

定理5.5之证明

令 z^* 由命题5.1给出。令 u^* 为最优控制。

Step1 证(i).

令 I 为 $(0,T^*)$ 中一开区间且 $|I|\le d_A$。记
$$\$(I)\triangleq\$\cap I.$$
则
$$\$(I)\subset(\{T^*\}-\mathcal{O}_{z^*})\cap I. \tag{30}$$

$\because$ $z^* \in \operatorname{span}\{B, AB, \cdots, A^{n-1}B\} \setminus \{0\}$ 且 $|\{T^*\} - I| \le d_A$,

$\therefore$ 由引理5.1有

$$|(\{T^*\} - O_{z^*}) \cap I| \le (q_{A,B} - 1).$$

$\therefore$ (i) 成立。

Step 2　证(ii).

令 $\hat{t} \in \$$. 由(29)、(28)得：$\exists\ \hat{\varepsilon} \in (0, \hat{t})$ s.t.

$$u^*(t) = F(t), \quad t \in (\hat{t} - \hat{\varepsilon}, \hat{t} + \hat{\varepsilon}) \setminus \{\hat{t}\}. \qquad (31)$$

$\because$ $t \to B^* e^{A^*(T^*-t)} z^*$ 是非平凡实解析函数,

$\therefore$ 由 Talor 公式, $\exists\ j \in \mathbb{N}$, $\exists\ a_j \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ s.t.

当 $t \sim \hat{t}$ 时,

$$B^* e^{A^*(T^*-t)} z^* = a_j (t - \hat{t})^j + b_j(t)(t - t)^{j+1}$$
$$= (t - \hat{t})^j \left[a_j + b_j(t)(t - \hat{t})\right]$$

其中 $b_j(\cdot): \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^m$ 是 $(\hat{t} - \varepsilon, \hat{t} + \varepsilon)$ 上有界实解析函数 $(\forall\ \varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon}])$。上式, 结合(31), 得：

(a) 若 j 为奇数, 则 $\lim\limits_{t \to \hat{t}^+} u^*(t) = -\lim\limits_{t \to \hat{t}^-} u^*(t) = \dfrac{-a_j}{\|a_j\|_{\mathbb{R}^m}}$;

(b) 若 j 为偶数, 则 $\lim\limits_{t \to \hat{t}^+} u^*(t) = \lim\limits_{t \to \hat{t}^-} u^*(t) = \dfrac{a_j}{\|a_j\|_{\mathbb{R}^m}}$.

因为 $\hat{t}$ 是 u^* 的切换点, $\therefore$ $\lim\limits_{t \to \hat{t}^+} u^*(t) \ne \lim\limits_{t \to t^-} u^*(t)$.

故 (b) 不可能. ∴ (a) 成立. ※.

<u>定理 5.6</u>. 令 $\boxed{\text{假设 } 5.3}$ 成立。令 u^* 为 $(TP)_1$ 的最优控制。则

u^* 满足且仅满足下列之一：

(A1) 在 $(0, T^*)$ 上，$u^*(t)$ 一直吊在一个方向；

(A2) u^* 在 $\partial B_1(0)$ 上连续运动，且在 $(0, T^*)$ 的任意子区间上

不会~~呆~~在一个方向；

(A3) u^* 是非常值阶梯函数，取值为两个互反方向；

(A4) u^* 是分段连续函数且在 $(0, T^*)$ 的任何子区间上不能

呆在一个方向。

<u>注</u> 可举例说明：对不同的 (A, B)，(A1) —(A4) 均可发生。

(见 S. Qin, G. Wang, H. Yu 2021)