期中

1. 简述Wiles、张益唐的贡献

Wiles：解决Fermat大定理

张益唐：~~将~~ 孪生素数猜想 将相邻素数之差下确界精进到七千万之下
推动

2. 令 p_n 表示第 n 个素数，试证 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_{3i+1}} = \infty$

反设其有界，则 $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_{3i+1}} > \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_{3i+2}} > \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_{3i+3}}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{p_{3+i}} < 3\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_{3i+1}} < 3M$.

令 $N \to \infty$ $\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_{3+i}} < 3+M$. 与 $\frac{1}{p_i}$ 发散矛盾.

3. 试确定20！的标准素因子分解式

~~20以下~~ 20！中只有20以内的素因子.

2、3、5、7、11、13、17、19.

$V_2(20!) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{20}{2^n}\right] = 10+5+2+1 = 18$

$V_3(20!) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{20}{3^n}\right] = 6+2 = 8$

$V_5(20!) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{20}{5^n}\right] = 4$

$V_7(20!) = 2$ $V_{17}(20!) = 1$

$V_{11}(20!) = 1$ $V_{19}(20!) = 1$

$V_{13}(20!) = 1$

$20! = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$.

4. 利用中国剩余定理求解 $\begin{cases} x \equiv 2 \mod 7 \\ x \equiv 3 \mod 5 \\ x \equiv 1 \mod 3 \end{cases}$

~~$x \equiv 30+63+70 \equiv \ldots \pmod{105}$~~

$x \equiv 15\times1\times2 + 21\times1\times3 + 35\times2\times1$

$\equiv 163$

$\equiv 58 \pmod{105}$

求 $\left(\frac{\ }{1009}\right)$

5. $\left(\frac{713}{1009}\right)\left(\frac{1009}{713}\right)=(-1)^{\frac{(713-1)(1009-1)}{4}}=1$ $\qquad$ ~~296~~ $\quad 4\,|\,296$, $2\,|\,74$, 37

$\left(\frac{1009}{713}\right)=\left(\frac{296}{713}\right)=\left(\frac{2}{713}\right)\left(\frac{37}{713}\right)$

$\cancel{\left(\frac{2}{713}\right)\left(\frac{713}{2}\right)=(-1)^{\frac{(2-1)(713-1)}{4}}}$ 而 $\left(\frac{2}{713}\right)=(-1)^{\frac{713^2-1}{8}}=1$

$\cancel{\Rightarrow\left(\frac{2}{713}\right)=1}$

$\left(\frac{37}{713}\right)\left(\frac{713}{37}\right)=(-1)^{\frac{(37-1)(713-1)}{4}}=1$

$\left(\frac{713}{37}\right)=\left(\frac{10}{37}\right)=\left(\frac{2}{37}\right)\left(\frac{5}{37}\right)$.

$\cancel{\left(\frac{2}{37}\right)\left(\frac{37}{2}\right)=(-1)}$ $\left(\frac{2}{37}\right)=(-1)^{\frac{37^2-1}{8}}=-1$

$\left(\frac{5}{37}\right)\left(\frac{37}{5}\right)=(-1)^{\frac{(5-1)(37-1)}{4}}=1$ $\quad \left(\frac{37}{5}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)=-1 \Rightarrow \left(\frac{5}{37}\right)=-1$.

$\Rightarrow \left(\frac{713}{37}\right)=1 \quad \Rightarrow \left(\frac{37}{713}\right)=1$.

$\Rightarrow \left(\frac{1009}{713}\right)=1. \quad \Rightarrow \left(\frac{713}{1009}\right)=1$

6. 当你学习了 Page 76 3个结论 进一步会思考什么.

对于 3次是否有类似结论？（将所有~~正定~~能表示所有自然数的 p元 ~~元素可的~~ 三次型写出，

~~①是否有限个~~ ①是否有:能表示前几项,就能表示所有

②对于无交叉项的系数正的 p元 三次型,是否只有有限个

7. 试估计个数数3且介于 10^5 到 10^p 中的素数的个数.

即 mod10 余3. ~~5 10 互素~~ $\varphi(10)=10(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5})=4$.

约为 10^5 到 10^p 中素数个数的 $\frac{1}{4}$

$0-10^p$ 中素数个数: $\pi(10^p)\sim\frac{10^p}{\ln 10^p}=\frac{10^p}{p\ln 10}$

$\pi(10^5)\sim\frac{10^5}{5\ln 10}$. $\quad \pi(10^p)-\pi(10^5)\approx\frac{10^p}{p\ln 10}-\frac{10^5}{5\ln 10}$.

原题中素数个数约为 $\frac{1}{4}\left(\frac{10^p}{p\ln 10}-\frac{10^5}{5\ln 10}\right)$.

8. 将 $3+\sqrt{2}$ 表示为连分数

$$3+\sqrt{2}=4+(\sqrt{2}-1)=4+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=4+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}=4+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}$$

$\Rightarrow 3+\sqrt{2}=[4;\overline{2}]$.

9. $$\sqrt{29}=5+(\sqrt{29}-5)=5+\frac{4}{\sqrt{29}+5}=5+\frac{1}{2+\frac{\sqrt{29}-3}{4}}=5+\frac{1}{2+\frac{5}{\sqrt{29}+3}}$$

$$=5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{\sqrt{29}-2}{5}}}=5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{5}{\sqrt{29}+2}}}$$

$$=5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{\sqrt{29}-3}{5}}}}=5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{4}{\sqrt{29}+3}}}}$$

$$=5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{\sqrt{29}-5}{4}}}}}=5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{29}+5}}}}}$$

$$=5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{10+(\sqrt{29}-5)}}}}}$$

$a_0=5$
$a_{5k+1}=2$
$a_{5k+2}=1$
$a_{5k+3}=1$
$a_{5k+4}=2$
$a_{5k+5}=10$.

$\sqrt{29}=[5;\overline{2,1,1,2,10}]$

$x^2-29y^2=-1$ 最小正解：$x=p_4,\ y=q_4$. $x=70,\ y=13$.

$x^2-29y^2=1$ 最小正解：$x=p_9,\ y=q_9$. $x=9801\ \ y=1820$

$\frac{p_0}{q_0}=5$, $\frac{p_1}{q_1}=\frac{11}{2}$, $\frac{p_2}{q_2}=5+\frac{1}{2+\frac{1}{1}}=\frac{16}{3}$ $p_3=a_3p_2+p_1=27$, $q_3=a_3q_2+q_1=5$

$$\frac{p_4}{q_4}=5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}=5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{2}{3}}}=5+\frac{1}{2+\frac{3}{5}}$$

$$=\frac{70}{13}$$

$p_5 = a_5 p_4 + p_3$, $q_5 = a_5 q_4 + q_3$

$\cancel{a_5}$ $p_5 = 727$, $q_5 = 135$

$p_6 = a_6 p_5 + p_4 = 1524$, $q_6 = a_6 q_5 + q_4 = 283$

$p_7 = a_7 p_6 + p_5 = 2251$, $q_7 = a_7 \cancel{p} q_6 + q_5 = 418$

$p_8 = a_8 p_7 + p_6 = 3775$, $q_8 = a_8 q_7 + q_6 = 701$

$p_9 = a_9 p_8 + p_7 = 9801$, $q_9 = a_9 q_8 + q_7 = 1820$