HW1

1. 根据例 1.2.6, 证明: $\mathbb{C}^n$ 中所有**代数集** (即代数簇) 构成的集合满足闭拓扑的三个条件 (F1), (F2), (F3).

2. (1) 设 $\mathcal{B}$ 是集合 X 上的一个拓扑基. $\mathcal{B}_1$ 是 X 的子集族满足 $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_1 \subset \overline{\mathcal{B}}$. 证明: $\mathcal{B}_1$ 是拓扑空间 $(X, \overline{\mathcal{B}})$ 的拓扑基.

   (2) 利用 (1) 的结论, 证明: 实欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ (已赋予了欧式拓扑) 上存在不可数个不同的拓扑基.

3. 令集合 $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{B} = \{\{1\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$. 问: $\mathcal{B}$ 能否构成集合 X 上的一个拓扑基, 请说明理由.

证明 1. 令 $\mathcal{F}$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 中所有代数集构成的集合. 即 V 是 $\mathbb{C}^n$ 中的代数集, 当且仅当存在子集 $T \subset \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$, 满足 $V = Z(T)$ 是零点集.

因为 $\mathbb{C}^n = Z(0)$ 和 $\varnothing = Z(1)$ 都是代数集, 其中 0 和 1 分别表示取值为 $0, 1$ 的常值多项式, 因此 $\mathbb{C}^n, \varnothing \in \mathcal{F}$. (F1) 成立.

考虑任意代数集 $Z(T_1), Z(T_2) \in \mathcal{F}$, 其中 T_1, T_2 是多项式环 $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ 的两个子集. 对于任意 $z \in Z(T_1) \cup Z(T_2)$, 有 $f_1(z) = 0, \forall\ f_1 \in T_1$; 或者 $f_2(z) = 0, \forall\ f_2 \in T_2$. $T_1T_2 = \{f_1f_2 \mid \forall\ f_1 \in T_1, \forall\ f_2 \in T_2\}$. 则显然有 $z \in Z(T_1T_2)$. 因此 $Z(T_1) \cup Z(T_2) \subset Z(T_1T_2)$. 反之, $\forall\ z \in Z(T_1T_2)$, 若 $z \notin Z(T_1)$, 则必存在某个多项式 $f_1 \in T_1$, 满足 $f_1(z) \neq 0$. 而对每个 $f_2 \in T_2$, $(f_1f_2)(z) = 0$, 所以必有 $f_2(z) = 0$, 即 $z \in Z(T_2)$. 因此 $Z(T_1) \cup Z(T_2) = Z(T_1T_2) \in \mathcal{F}$. (F2) 成立.

对于 $\mathcal{F}$ 中任意多个 $Z(T_\alpha)$, $\alpha \in \Lambda$, 易证 $\cap_{\alpha\in\Lambda} Z(T_\alpha) = Z(\cup_{\alpha\in\Lambda} T_\alpha)$. 因此 (F3) 成立.

2. (1) 即验证 $\overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{B}}_1$. 已知 $\overline{\mathcal{B}}$ 是拓扑, 且 $\mathcal{B}_1 \subset \overline{\mathcal{B}}$, 说明 $\mathcal{B}_1$ 中每个成员都是开集. 而任意多个开集的并集仍是开集, 说明 $\overline{\mathcal{B}}_1 \subset \overline{\mathcal{B}}$. 由条件 $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_1$ 可得 $\overline{\mathcal{B}} \subset \overline{\mathcal{B}}_1$. 综上, $\overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{B}}_1$.

(2) $\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{Q}\}$ 是实欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个拓扑基. 对于任意正无理数 $r \in \mathbb{R}^+$, 定义 $\mathcal{B}_r = \mathcal{B} \cup \{B(x, r) \mid \forall\ x \in \mathbb{R}^n\}$. 则 $\mathcal{B}_r$, 当 r 取遍所有正无理数, 彼此互不相同, 有可数多个, 都是实欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的拓扑基.

3. 因为 $\{2\} = \{1, 2\} \cap \{2, 3\}$ 不在 $\overline{\mathcal{B}} = \{X, \varnothing, \{1\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$ 中, 因此 $\mathcal{B}$ 不是集合 X 的拓扑基. $\square$

习题 1.1.3. 设 (X, d) 是度量空间, A 为 X 的非空子集. 证明: A 是 X 的闭集, 当且仅当对任意 $x \in X \setminus A$, 有 $d(x, A) > 0$, 其中 $d(x, A) = \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$.

Answer 1.1.3. 若 A 是闭集, 则 $X \setminus A$ 是开集, $\forall\ x \in X \setminus A$, $\exists\ B(x, \varepsilon) \subset X \setminus A$. 于是对于任意 $y \in A$, $d(x, y) > \varepsilon$, 即 $d(x, A) \geqslant \varepsilon > 0$.

反之, 对于任意 $x \in X \setminus A$, 若 $d(x, A) > 0$, 则取 $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x, A)$, 则 $x \in B(x, \varepsilon) \subset X \setminus A$, 即 $X \setminus A$ 是开集, A 是闭集. $\square$

习题 1.2.3. 在 Sorgenfrey 直线 $\mathbb{R}_l$ 中, 对于任意 $a, b \in \mathbb{R}$, $[a, b)$ (当 $a < b$), $[a, \infty)$, $(-\infty, b)$ 既是开集, 又是闭集.

习题 1.2.4. 设 (X, d) 是度量空间. 证明: 由

$$\bar{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$$

所定义的函数 $\bar{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ 是一个度量, 并且 $\bar{d}$ 和 d 拓扑等价.

Answer 1.2.3. 子集族 $\mathcal{B}_l = \{[a, b) \mid a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ 是 $\mathbb{R}_l$ 的拓扑基, 则

$[b, +\infty) = \bigcup_{x>b}[b, x)$ 与 $(-\infty, a) = \bigcup_{y<a}[y, a)$ 是开集 $\Rightarrow [a, b)$ 是闭集.

$[b, +\infty)$ 是开集 $\Rightarrow (-\infty, b)$ 是闭集.

$(-\infty, a)$ 是开集 $\Rightarrow [a, +\infty)$ 是闭集. □

Answer 1.2.4. 易证 $\bar{d}$ 满足度量的正定性, 对称性条件. 下面验证 $\bar{d}$ 三角不等式, 即

$$\bar{d}(x, z) \leqslant \bar{d}(x, y) + \bar{d}(y, z),\ \forall\ x, y, z \in X.$$

若 $d(x, y) \geqslant 1$ 或 $d(y, z) \geqslant 1$, 则不等式右端至少为 1. 而根据定义, 其左边最多为 1, 所以不等式成立.

下面只考虑 $d(x, y) < 1$ 且 $d(y, z) < 1$ 的情形. 这时有

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) = \bar{d}(x, y) + \bar{d}(y, z).$$

根据定义, $\bar{d}(x, z) \leqslant d(x, z)$, 所以对于 $\bar{d}$, 三角不等式成立. 因此 $\bar{d}$ 是 X 上的度量.

在任何一个度量空间中, 满足 $\varepsilon < 1$ 的 ε-球形成邻域构成度量拓扑的一个拓扑基 (命题 1.2.9). 因为对于两种度量 d 和 $\bar{d}$ 而言, 满足 $\varepsilon < 1$ 的 ε-球形邻域的集合是同一个集合, 从而这两种度量诱导出的是 X 上的同一个拓扑. □

习题 1.3.2. 设 $(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间, $A \subset X$ 是非空集合. 证明下述结论:

(1) $\partial A \subset A \Leftrightarrow A$ 是闭集;

(2) $A \cap \partial A = \varnothing \Leftrightarrow A$ 是开集;

(3) $\partial A = \varnothing \Leftrightarrow A$ 既是开集又是闭集.

Answer 1.3.2. (1) 设 $\partial A \subset A$, 证明 A 是闭集, 即证明 $\overline{A} \subset A$. 用反证法. 假设 $\exists\, x \in \overline{A}$, 使得 $x \notin A$, 则 $x \in X \setminus A \Rightarrow x \in \overline{X \setminus A}$. 于是 $x \in \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \partial A$. 故 $x \in A$. 这与假设 $x \notin A$ 矛盾. 从而有 $\overline{A} \subset A$, 因此 $A = \overline{A}$.

法二: 若 $\partial A \subset A$, 则 $\overline{A} = \mathrm{Int}A \cup \partial A \subset A \cup A = A$, 故 A 是闭集.

反之, 若 A 为闭集, 由 $\overline{A} = A$ 知, $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} \subset \overline{A} = A$. 因此 $\partial A \subset A$.

(2) $A \cap \partial A = \varnothing \Leftrightarrow \partial(X \setminus A) = \partial A \subset X \setminus A \Leftrightarrow X \setminus A$ 是闭集 $\Leftrightarrow A$ 是开集.

设 $A\cap\partial A=\varnothing$, 则有

$$\begin{aligned}X&=X\setminus(A\cap\partial A)=X\setminus(A\cap\overline{A}\cap\overline{X\setminus A})\\&=(X\setminus A)\cup(X\setminus\overline{A})\cup(X\setminus\overline{X\setminus A})\\&=(X\setminus A)\cup\operatorname{Int}(X\setminus(X\setminus A))\\&=(X\setminus A)\cup\operatorname{Int}A.\end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}A&=A\cap X=A\cap((X\setminus A)\cup\operatorname{Int}A)\\&=(A\cap(X\setminus A))\cup(A\cap\operatorname{Int}A)=\operatorname{Int}A.\end{aligned}$$

因此 A 为开集.

法二: $A\cap\partial A=\varnothing\Rightarrow\partial(X\setminus A)=\partial A\subset X\setminus A\Rightarrow X\setminus A$ 是闭集 (由结论 (1))$\Rightarrow A$ 是开集.

反之, 若 A 为开集, 则 $A=\operatorname{Int}A$. 从而, $A\cap\partial A=A\cap(\overline{A}\setminus\operatorname{Int}A)=A\cap(\overline{A}\setminus A)=\varnothing$. 因此 $A\cap\partial A=\varnothing$.

(3) 由 (1) 和 (2) 可得. □

HW2

习题 1.4.2. 设 $\mathcal{A}=\{A_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ 是拓扑空间 X 的一个子集族, 满足 $X=\cup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$, Y 是任意的拓扑空间. 对于给定的连续映射族 $\{f_\lambda:A_\lambda\to Y\mid\lambda\in\Lambda\}$, 满足 $\forall\ \lambda,\nu\in\Lambda$, $f_\lambda|_{A_\lambda\cap A_\nu}=f_\nu|_{A_\lambda\cap A_\nu}$. 定义 $f:X\to Y$, $\forall\ x\in X$, 若 $x\in A_\lambda$, $f(x)=f_\lambda(x)$, 则 f 是映射. 证明:

(1) 若 $\mathcal{A}$ 是 X 的一个开子集族, 则 f 连续.

(2) 若 $\mathcal{A}$ 是 X 的一个闭子集族, 且 $\forall\ x\in X$, 存在 x 的邻域 U, 使得 U 仅与 $\mathcal{A}$ 中有限个元素相交非空, 则 f 连续.

Answer 1.4.2. (1) 对于 Y 中任意开集 V, $f_\lambda:A_\lambda\to Y$ 连续, 则 $f_\lambda^{-1}(V)$ 是 A_λ 中开集. 而 A_λ 是 X 中开集, 故 $f_\lambda^{-1}(V)$ 是 X 中开集. 由于

$$f^{-1}(V)=\cup_{\lambda\in\Lambda}f_\lambda^{-1}(V).$$

故 $f^{-1}(V)$ 是 X 中开集. 从而 $f:X\to Y$ 连续.

(2) 对于任意 $x\in X$, 令 U 是 x 的邻域, 使得 $U\cap A_{\lambda_i}\neq\varnothing$, $i=1,2,\dots,n$, 且 $U\cap A_\lambda=\varnothing$, $\forall\ \lambda\in\Lambda\setminus\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$. 由粘接引理 $f|_{A_{\lambda_1}\cup\cdots\cup A_{\lambda_n}}$ 连续. 由于 $U\subset A_{\lambda_1}\cup\cdots\cup A_{\lambda_n}$ 可得 $f|_U$ 连续, 即 f 在 x 连续.

习题 1.4.6. 证明: 连续映射 $f: X \to Y$ 是同胚, 当且仅当 f 是既单又满的开 (闭) 映射.

Answer 1.4.6. 设 $f: X \to Y$ 是同胚, $g = f^{-1}: Y \to X$ 是 f 的同胚逆映射. 任给 X 中开集 U, $gf(U) = 1_X(U) = U$ 蕴含 $f(U) = g^{-1}(U)$. 再根据 g 的连续性, $g^{-1}(U)$ 是 Y 中开集. 于是 $f(U)$ 是 Y 中开集, 从而 f 是开映射.

设 F 是 X 中闭集, 同理, $f(F) = g^{-1}(F)$. 根据 $g: Y \to X$ 的连续性, $g^{-1}(F)$ 是 Y 中闭集, 于是 $f(F)$ 是 Y 中闭集, 从而 f 是闭映射.

由于 f 是双射, f 有逆映射 $g = f^{-1}: Y \to X$. 余下只需证 g 连续. 任给 X 中闭集 F, 因为 $g^{-1}(F) = f(F)$, f 是闭映射, 故 $f(F) = g^{-1}(F)$ 是 Y 中闭集, 从而 $g: Y \to X$ 连续. □

习题 1.5.3. 设 $f: X \to Y$ 是连续映射, 设 $F: X \to X \times Y$ 为 $F(x) = (x, f(x))$, $\forall\, x \in X$. 证明 F 是嵌入映射.

Answer 1.5.3. 要证 $F: X \to F(X)$ 是同胚. F 是双射明显. 用命题1.5.6得 $F: X \to X \times Y$ 连续. 对于 $F(X)$ 的任意开集 W, 存在 $X \times Y$ 的开集 T, 使得 $W = T \cap F(X)$. 而 $F^{-1}(W) = F^{-1}(T)$ 是 X 的开集, 所以可得 $F: X \to F(X)$ 连续. 而 $F: X \to F(X)$ 的逆映射 $F^{-1}: F(X) \to X$ 是投射 $X \times Y \to X$ 在子空间 $F(X)$ 上的限制, 存在且连续, 所以 $F: X \to F(X)$ 是同胚映射. □

习题 1.5.5. 对于拓扑空间 X_1 和 X_2, $X_1 \times X_2$ 上的乘积拓扑是使得投射 $p_i: X_1 \times X_2 \to X_i$, $i = 1, 2$, 连续的最小的拓扑.

Answer 1.5.5. 设 $\mathcal{T}$ 是集合笛卡尔积 $X_1 \times X_2$ 上的拓扑, 使得投射 $p_i: X_1 \times X_2 \to X_i$, $i = 1, 2$, 连续. 乘积拓扑是由子集族

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \mid U_i \text{ 是 } X_i \text{ 的开集}, i = 1, 2\}$$

生成的拓扑. 只需证明 $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ (因为由此可得 $\overline{\mathcal{B}} \subset \mathcal{T}$).

对于 X_i 中的任意开集 U_i, p_i 连续, $i = 1, 2$, 则 $p_1^{-1}(U_1) = U_1 \times X_2 \in \mathcal{T}$, $p_2^{-1}(U_2) = X_1 \times U_2 \in \mathcal{T}$, 于是 $U_1 \times U_2 = (U_1 \times X_2) \cap (X_1 \times U_2) \in \mathcal{T}$. 从而 $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. □

习题 2.1.6. 设 $f, g: X \to Y$ 是拓扑空间之间的两个连续映射. 如果 Y 是 Hausdorff 空间, 则子集 $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ 是闭子集.

Answer 2.1.6. 定义映射 $\psi: X \to Y \times Y$, $\psi(x) = (f(x), g(x))$. 由命题1.5.6可知, ψ 是连续映射, 且 $A = \psi^{-1}(\Delta_Y)$, 其中 Δ_Y 是 $Y \times Y$ 的对角子空间. Y 是 Hausdorff 空间, Δ_Y 是 Y 的闭子集, 于是 $A = \psi^{-1}(\Delta_Y)$ 是 X 的闭子集. □

习题 2.1.8. 如果 X 是 C_1 空间, 则

(1) X 中任意一点都有一个可数的递降邻域基 $\{V_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$, 使得 $V_{n+1} \subset V_n$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

(2) 若 $A \subset X$, 则 $x \in \overline{A} \Leftrightarrow A$ 中存在收敛到 x 的序列.

(3) 若 $x \in X$, 则 $f : X \to Y$ 在 x 处连续 $\Leftrightarrow$ 当 $x_n \to x$ 时, $f(x_n) \to f(x)$.

Answer 2.1.8. (1) 任取 x 的一个可数邻域基 $\{U_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$. 令 $V_n = \cap_{i=1}^n U_n$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$. 则 $V_n \subset U_n$, 从而 $\{V_n\}$ 也是可数邻域基. 显然 $V_{n+1} \subset V_n$.

(2) 如果 $x \in \overline{A}$, 取 x 处的递降可数邻域基 $\{V_n\}$, 使得 $m > n$ 时, $V_m \subset V_n$. 则 $V_n \cap A \neq \varnothing$, 所以 $\exists\, x_n \in V_n \cap A$, 可得 A 中的序列 $\{x_n\}$. 对于 x 的任意邻域 U, 在 x 的可数邻域基中存在 V_N 使得 $V_N \subset U$, 从而当 $m > N$, $V_m \subset U$, 有 $x_m \in U$. 按收敛的定义, 有 $\{x_n\}$ 收敛到 x.

反之, 若 A 中存在序列 $\{x_n\}$ 收敛到 x, 则对于 x 的任意邻域 U, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 使得当 $m > N$ 时, 有 $x_m \in U$. 即 $x_m \in U \cap A \neq \varnothing$, 于是 $x \in \overline{A}$.

(3) 必要性由习题1.4.1可得.

充分性: 如果 f 在 x 不连续, 则存在 $f(x)$ 的邻域 W, 使得 $f^{-1}(W)$ 不是 x 的邻域. 则对于 x 的可数邻域基 $\{V_n\}$, 每个 $V_n \not\subset f^{-1}(W)$. 从而 $V_n \cap (X \setminus f^{-1}(W)) \neq \varnothing$. 可得 $x \in \overline{X \setminus f^{-1}(W)}$. 由 (2), 在 $X \setminus f^{-1}(W)$ 中存在序列 $\{x_n\}$ 收敛到 x. 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛到 $f(x)$. 于是对于几乎所有的 n, 都有 $f(x_n) \in W$. 这与序列 $\{x_n\}$ 的取法矛盾. 因此 f 在 x 点连续. $\square$

习题 2.2.6. 设 $\mathcal{B}$ 是拓扑空间 X 的拓扑基. 证明 X 紧致, 当且仅当任意由 $\mathcal{B}$ 的成员组成的开覆盖总有有限子覆盖.

Answer 2.2.6. 必要性显然, 下证充分性. 设 $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ 是 X 的任意开覆盖. 对于每一个开集 $U_\alpha \in \mathcal{U}$, 存在拓扑基 $\mathcal{B}$ 的一个子集 $\mathcal{B}_\alpha$, 使得 $U_\alpha = \bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}_\alpha} B$. 令 $\widetilde{\mathcal{U}} = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{B}_\alpha$ $(\subset \mathcal{B})$. 由于

$$\begin{aligned}\bigcup_{B\in\widetilde{\mathcal{U}}} B &= \bigcup_{B\in \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{B}_\alpha} B \\ &= \bigcup_{\alpha\in\Lambda}\left(\bigcup_{B\in\mathcal{B}_\alpha} B\right) \\ &= \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha = X.\end{aligned}$$

故 $\widetilde{\mathcal{U}}$ 是一个由 $\mathcal{B}$ 的成员构成的 X 的开覆盖, 所以有一个有限子覆盖, 设为 $B_1, \ldots, B_n$. 对于每一个 B_i, 由于 $B_i \in \widetilde{\mathcal{U}} = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{B}_\alpha$, 所以存在 $\alpha_i \in \Lambda$ 使得 $B_i \in \mathcal{B}_{\alpha_i}$. 因此 $B_i \subset U_{\alpha_i}$. 于是 $\mathcal{U}$ 有有限个成员 $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\}$, 满足

$$U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n} \supset B_1 \cup \cdots \cup B_n = X.$$

也即 $\mathcal{U}$ 有一个子覆盖 $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\}$. 即证明了 X 紧致. $\square$

HW3 (3 月 30 日周四交)

习题 2.2.11. 证明命题2.2.26.

命题2.2.26 $(X^*, \mathcal{T}^*)$ 是紧致的 Hausdorff 空间, $(X, \mathcal{T})$ 是 $(X^*, \mathcal{T}^*)$ 的稠密子空间 (习题).

Answer 2.2.11. 设 $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ 是 $(X^*, \mathcal{T}^*)$ 的开覆盖, 由于它们包含 ∞, 故存在某个 $U_{\alpha_0} = X^* \setminus C$, 其中 C 是 X 的紧致子集. $\mathcal{U} \setminus \{U_{\alpha_0}\}$ 必然覆盖 C, 由于 C 是 X 的紧致子集, 可以在其中找到有限子覆盖, 加上 U_{α_0}, 即可得到 X^* 的有限子覆盖, 故 X^* 是紧致空间.

由于 X 是 Hausdorff 空间, 要证 X^* 是 Hausdorff 空间, 只要证明任意一点 $x \in X$ 与 ∞ 有不相交的开邻域即可. 因为 X 是局部紧的 Hausdorff 空间, 取 x 的紧致邻域 C, 再取 ∞ 的开邻域 $X^* \setminus C$ 即可满足要求.

显然 X 是 X^* 的子空间. 要证 X 在 X^* 中稠密, 只要证明 ∞ 是 X 的聚点即可. 显然, ∞ 的任意开邻域含有某个形如 $X^* \setminus C$ 的开集, 其中 C 是 X 的紧致子集. 由于 X 不紧致, 故 $X \setminus C$ 非空, 从而 $(X^* \setminus C) \cap (X \setminus \{\infty\}) = (X^* \setminus C) \cap X = X \setminus C \neq \varnothing$. 即 ∞ 是 X 的聚点. □

习题 2.2.12. 证明: 紧致度量空间满足 C_2 公理.

Answer 2.2.12. 设 (X, d) 为紧致度量空间, 取定一个正整数 n, 对于任意 $x \in X$, $\{B(x, \frac{1}{n})\}_{x \in X}$ 是 X 的开覆盖. 由 X 的紧致性, 存在有限子覆盖, 记 A_n 为由这有限个开球的中心构成的子集. 子集 A_n 满足, 对于任意 $y \in X$, $d(y, A_n) = \inf\{d(x, y) \mid x \in A_n\} < \frac{1}{n}$. 令 $A = \cup_{n \in \mathbb{Z}^+} A_n$, A 是 X 的可数子集. 对于任意 $y \in X$ 和任意 $n \in \mathbb{Z}^+$, $d(y, A) \leqslant d(y, A_n) < \frac{1}{n}$. 因此可得 $d(y, A) = 0 \Rightarrow y \in \overline{A}$, 也即 $X = \overline{A}$. 于是 X 是可分的度量空间, 根据命题2.1.13, X 满足 C_2 公理.

习题 2.3.2. 设 Y 为不少于两点的离散拓扑空间. 证明: 拓扑空间 X 为连通空间当且仅当每一连续映射 $f : X \to Y$ 都是常值映射.

Answer 2.3.2. 必要性. 设 X 是连通空间, $f : X \to Y$ 为连续映射, 则 $f(X)$ 为连通子集. 若 $f(X)$ 多于一点, 设 $y \in f(X)$, 则 $f(X) \setminus \{y\} \neq \varnothing$. 由于 Y 是离散拓扑空间, 所以 $\{y\}, f(X) \setminus \{y\}$ 皆为 Y 的非空开集, 也是 $f(X)$ 的非空开集, 且它们不相交. 这与 $f(X)$ 连通矛盾. 故 $f(X)$ 是单点集, 即 f 为常值映射.

充分性. 设每一连续映射 $f : X \to Y$ 都是常值映射. 若 X 不连通, 则存在非空不交闭集 A, B, 使 $A \cup B = X$. 定义映射 $f : X \to Y$, 使 $f(A) = \{y_1\}, f(B) = \{y_2\}$, 其中 $y_1, y_2 \in Y$, 且 $y_1 \neq y_2$. 根据粘接引理, f 为连续映射, 但 f 不是常值映射, 矛盾. 因此 X 为连通空间. □

习题 2.3.7. 设 A 是拓扑空间 X 的一个连通子集, B 是 X 的一个既开又闭的子集. 证明: 如果 $A \cap B \neq \varnothing$, 则 $A \subset B$.

Answer 2.3.7. 设 $A \cap B \neq \varnothing$, 若 $A \not\subset B$, 则 $A \cap B \neq A$ 为 A 的非空真子集. 又 B 为 X 中既开又闭的子集, 所以 $A \cap B$ 为 A 中非空的既开又闭的真子集. 这与 A 为 X 的连通子集矛盾. 故 $A \subset B$. □

HW4 (4 月 6 日周四交)

1. 如果 Y 是紧致拓扑空间, X 是任意拓扑空间, 证明投射 $p_1 : X \times Y \to X$ 是闭映射.
2. 余有限拓扑空间 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$ 是否是连通空间? 是否是道路连通空间? 请给出论断, 并予以证明.
3. 余可数拓扑空间 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_c)$ 是否是连通空间? 是否是道路连通空间? 请给出论断, 并予以证明.

证明 1. 设 $F \subset X \times Y$ 是任意闭子集, 须证明 $p_1(F)$ 是 X 的闭子集, 也即证明 $X \setminus p_1(F)$ 是开集. 任取 $x \in X \setminus p_1(F)$, 则 $p_1^{-1}(x) \cap F = \varnothing$, 于是 $p_1^{-1}(x) = \{x\} \times Y$ 包含于开集 $(X \times Y) \setminus F$. 由 Tube 引理, 存在包含 x 的开集 $U_x \subset X$ 满足 $U_x \times Y \subset (X \times Y) \setminus F$. 这即意味着开集 $U_x = p_1(U_x \times Y) \subset p_1((X \times Y) \setminus F) = X \setminus p_1(F)$, x 是 $X \setminus p_1(F)$ 的内点. 再根据 x 的任意性, 可得 $X \setminus p_1(F)$ 是开集. 即 $p_1(F)$ 是闭集.

2. 若 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$ 不连通, 则 $\mathbb{R}$ 能写成两个不交非空开集 A 与 B 的并集. 即 $\mathbb{R} = A \cup B$, 且 $A \cap B = \varnothing$. 而 $A = \mathbb{R} \setminus B$, 且 $\mathbb{R} \setminus A$ 与 $\mathbb{R} \setminus B$ 都是有限集, 所以 $\mathbb{R} = A \cup (\mathbb{R} \setminus A)$ 是有限集, 矛盾. 故余有限拓扑空间 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$ 是连通空间.

任取余有限拓扑空间 $\mathbb{R}$ 中两个点 a 与 b, 不妨设 $a < b$ (若 $a = b$, 则常值道路就可以连接 a 与 a). 设 ϕ 是 $I = [0, 1]$ 与 $[a, b]$ (闭区间 $[a, b]$ 取欧式拓扑) 之间的同胚. 记 $\mathrm{id} : [a, b] \to [a, b]_f$ 表示集合之间的恒等映射, 其中 $[a, b]_f$ 表示余有限拓扑空间 $\mathbb{R}$ 中的子空间. 取 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$ 中除了 $\mathbb{R}$ 和 $\varnothing$ 之外的任意闭子集 F, F 是有限集. $\mathrm{id}^{-1}(F \cap [a, b]_f)$ 是 $[a, b]$ 的有限子集, 进而是 $[a, b]$ 的闭子集. 因此 id 连续, 复合映射 $\mathrm{id} \circ \phi$ 就是连接 a 与 b 的道路, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$ 道路连通.

3. 类似 2. 的证明, 同理可证余可数拓扑空间 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_c)$ 是连通空间.

断言: 余可数拓扑空间 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_c)$ 中任意非空非单点集的可数子集 C 不连通. 这是因为: 任取 $x \in C$, $C \setminus \{x\} = (\mathbb{R} \setminus \{x\}) \cap C$ 与 $\{x\} = (\mathbb{R} \setminus (C \setminus \{x\})) \cap C$ 是 C 的一对不交非空开子集.

设 $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$. 假定存在由欧氏拓扑空间到余可数拓扑空间的连续映射 $f : I \to \mathbb{R}$, 满足 $f(0) = a$, $f(1) = b$. 因为 $f(I)$ 是 $\mathbb{R}$ 的连通子集, 含有至少两个点 a 与 b, 因此 $f(I)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的不可数集.

令 $D = \mathbb{Q} \cap I$ 是 I 的可数稠密子集. 而 $f(D)$ 至多可数, 所以 $f(D)$ 是余可数拓扑空间 $\mathbb{R}$ 中的闭集. $f(I) = f(\overline{D}) \subset \overline{f(D)} = f(D)$, 这与 $f(I)$ 不可数矛盾. 说明余可数拓扑空间 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_c)$ 不道路连通. $\square$

习题 2.3.4. 证明欧氏空间 $\mathbb{R}^n (n > 1)$ 是连通的, $S^n (n > 0)$ 是连通的.

（证明 **R^n** 连通要求用定理 **2.3.8**，证明 **S^n** 连通可用命题 **2.3.7**）

Answer 2.3.4. 在 $\mathbb{R}^2$ 中, $\forall\ x \in \mathbb{R}^1$, 记 $B_x = \{(x, y) \mid y \in \mathbb{R}^1\}$(平行于 y 轴的直线), $A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}^1\}$, 则 $\{B_x\}_{x\in\mathbb{R}^1}$ 与 A 可构成 $\mathbb{R}^2$ 的连通覆盖, 且满足定理2.3.8的条件, 因此 $\mathbb{R}^2$ 连通. 重复此论证, 利用归纳法, 可推出 $\mathbb{R}^n$ 连通.

任取 $x \in S^n$, 则 $S^n \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^n(n > 0)$ 是连通的, 且 $S^n \setminus \{x\}$ 是 S^n 的稠密子集, 即 $\overline{S^n \setminus \{x\}} = S^n$, 故 S^n 也连通. □

习题 2.5.3. 证明: 乘积空间 $X \times Y$ 是 Hausdorff 空间, 当且仅当 X 和 Y 都是 Hausdorff 空间.

Answer 2.5.3. 必要性: 任取不同点 $x_1, x_2 \in X$, 取 $y \in Y$, 由于 $X \times Y$ 是 Hausdorff 空间, $(x_1, y), (x_2, y)$ 有不相交的开邻域 $U_1 \times V_1, U_2 \times V_2$, 其中 U_i, V_j 分别是 X, Y 中的开集. 记 $V = V_1 \cap V_2$, 则 $U_1 \times V, U_2 \times V$ 也是 $(x_1, y), (x_2, y)$ 的不相交开邻域, 从而 U_1 与 U_2 不相交. 即 X 是 Hausdorff 空间. 同理 Y 也是 Hausdorff 空间.

充分性: 任取 $X \times Y$ 的不同两点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 不妨设 x_1 与 x_2 不同. 由于 X 是 Hausdorff 空间, 有 X 中不相交的开邻域 U_1, U_2. 取 y_1, y_2 的任意开邻域 V_1, V_2, 则 $U_1 \times V_1, U_2 \times V_2$ 就是 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 的不相交开邻域. □

HW5 (4 月 13 日交)

1. 令 $X=[0,1]$ 取欧式空间 $\mathbb{R}$ 的子拓扑. $A=(0,1)$. 写出商空间 X/A 中所有的元素和所有的开集. 问: X/A 是不是 Hausdorff 空间? 说明理由.

2. 设 A 是拓扑空间 X 的子空间, $f:A\to Y$ 是连续映射. 在 X 与 Y 的不交并 $X\sqcup Y$ 中定义等价关系 $\sim$ 为: $\forall\, a\in A, a\sim f(a)$. 将商空间 $X\sqcup Y/\sim$ 记为 $Y\cup_f X$, 相应的商映射为 $p: X\sqcup Y\to Y\cup_f X$.

   (1) 证明: p 在 Y 上的限制映射 $p: Y\to Y\cup_f X$ 将 Y 同胚的映满到 $Y\cup_f X$ 的子空间 $p(Y)$, 即 Y 可以嵌入到 $Y\cup_f X$.

   (2) 当 A 是 X 的闭子集时, 证明: $\rho(Y)$ 在 $Y\cup_f X$ 中是闭集.

3. 设 $X=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}X^n$ 为胞腔复形, X^n 为 n 维骨架. 证明: X^{n-1} 是 X^n 的闭子集.

证明 1. 商空间 X/A 中含有三个点: $\{[0],[0.5],[1]\}$. 根据商拓扑的定义, X/A 中的开集是

$$X/A, \{[0.5]\}, \{[0],[0.5]\}, \{[0.5],[1]\}, \varnothing.$$

在 X/A 中任取两个非空开集, 相交都不是空集. 因此 Hausdorff 空间 $X=I$ 的商空间 X/A 不是 Hausdorff 空间.

2. (1) 设 V 是 Y 的开子集, 则 $f^{-1}(V)$ 是 A 的开子集. 存在 X 中开子集 U, 满足 $f^{-1}(V)=U\cap A$. 注意到 $U\sqcup V=(U\cap(X\setminus A))\sqcup(U\cap A)\sqcup V=(U\setminus A)\sqcup(U\cap A)\sqcup V$, 则由 $p(U\sqcup V)=(U\setminus A)\sqcup V$ 可得

$$\begin{aligned}p^{-1}p(U\sqcup V)&=p^{-1}((U\setminus A)\sqcup V)=(U\setminus A)\sqcup f^{-1}(V)\sqcup V\\&=(U\setminus A)\sqcup(U\cap A)\sqcup V=U\sqcup V.\end{aligned}$$

$U\sqcup V$ 是 $X\sqcup Y$ 的开子集, 由商拓扑的定义, $p(U\sqcup V)$ 在 $Y\cup_f X$ 中是开子集. 取 $p(Y)$ 的拓扑为 $Y\cup_f X$ 的子空间拓扑. 则

$$p(V)=p(Y)\cap p(U\sqcup V)\text{ 是 }p(Y)\text{ 的开子集.}$$

因此 $p:Y\to p(Y)$ 是开映射. 因为 $p:Y\to p(Y)$ 是 $p:X\sqcup Y\to Y\cup_f X$ 在 Y 上的限制映射, 故连续. $p:Y\to p(Y)$ 显然是双射, 因此 $p:Y\to p(Y)$ 是同胚映射, 即 $p:Y\to Y\cup_f X$ 是嵌入映射.

(2) $p^{-1}((Y\cup_f X)\setminus p(Y))=X\setminus A$. 当 A 是 X 的闭子集时, $p^{-1}((Y\cup_f X)\setminus p(Y))$ 是 X 的开子集, 也是 $X\sqcup Y$ 的开子集. 由商拓扑的定义, $(Y\cup_f X)\setminus p(Y)$ 是 $Y\cup_f X$ 的开子集. 因此 $p(Y)$ 是 $Y\cup_f X$ 的闭子集.

3. 设 $X^n = X^{n-1} \cup_{f^n} (\bigsqcup_{\alpha\in\Gamma_n} D_\alpha^n)$, 其中 Γ_n 为某指标集, $f^n : \bigsqcup_{\alpha\in\Gamma_n} S_\alpha^{n-1} \to X^{n-1}$ 是粘贴映射. 设 $p_n : X^{n-1} \bigsqcup_{\alpha\in\Gamma_n} D_\alpha^n \to X^n$ 为商映射. 在 X^{n-1} 上粘贴 n 维胞腔过程中, X^{n-1} 中的点彼此没有任何的粘合, 所以 X^{n-1} 可看作是 X^n 的子空间, 且 $p_n^{-1}(X^n \setminus X^{n-1}) = \bigsqcup_{\alpha\in\Gamma_n} (D_\alpha^n \setminus S_\alpha^{n-1})$ 是 $\bigsqcup_{\alpha\in\Gamma_n} D_\alpha^n$ 的开子集, 因此也是 $X^{n-1} \bigsqcup_{\alpha\in\Gamma_n} D_\alpha^n$ 的开子集. 由商拓扑的定义, 则 $X^n \setminus X^{n-1}$ 是 X^n 的开子集, 即 X^{n-1} 是 X^n 的闭子集. □

习题 3.1.5. 证明: 若 A 是 Hausdorff 空间 X 的紧致子集, 则 X/A 是 Hausdorff 空间.

Answer 3.1.5. 记 $p : X \to X/A$ 为自然投射, 记 $a = p(A)$(将 A 粘合成一个点了). 对于 X/A 中点 $b \neq a, p^{-1}(b) = \{b\} \in X \setminus A$, X 满足 T_2 公理, A 紧致, 从而 b 与 A 有不相交的开邻域 U 与 V(见命题2.2.7的证明). 根据商拓扑的定义, $p(U)$ 与 $p(V)$ 在 X 中的原像集 U 和 V 是不交的开集, 则 $p(U)$ 与 $p(V)$ 是 b 与 a 的在 X/A 中的不相交开邻域.

如果 X/A 中两个不同点 b 和 c 都不是 a, 则 $p^{-1}(b) = \{b\}$ 与 $p^{-1}(c) = \{c\}$ 是 $X \setminus A$ 中不同的两点. X 是 Hausdorff 空间, 则存在 X 的不交开集 U_b 和 U_c, 分别包含着点 b 与 c. 由于 Hausdorff 空间中紧致子集 A 是闭集, $X \setminus A$ 是开集, 则 $U_b \cap (X \setminus A)$ 与 $U_c \cap (X \setminus A)$ 是 $\{b\} = p^{-1}(b)$ 和 $\{c\} = p^{-1}(c)$ 在 X 中的不相交的开邻域. 同样根据商拓扑的定义, $p(U_b \cap (X \setminus A))$ 与 $p(U_c \cap (X \setminus A))$ 就是 b 与 c 的在 X/A 中的不相交开邻域.

至此, X/A 是 Hausdorff 空间. □

HW6 (4 月 20 日交)

习题 3.3.1. 证明: $\mathbb{RP}^2$, Klein 瓶都是闭曲面.

习题 3.3.2. 证明: 带边流形 M 的内部是它的开子集.

习题 3.3.3. 设 M 为 n 维带边流形, 证明其边界 ∂M 是一个 $n-1$ 维的无边流形.

习题 3.3.4. 证明: (1) n 维流形满足 C_1 公理; (2) 紧致 n 维流形满足 C_2 公理.

Answer 3.3.1. 根据 S^2 是紧致的和连通的, $\mathbb{RP}^2$ 的紧致性和连通性明显. 将 $\mathbb{RP}^2$ 看作是 D^2 粘合 S^1 上对径点得到的商空间. 记 $p: D^2 \to \mathbb{RP}^2$ 是粘合映射, 如果点 $y \in \mathbb{RP}^2$ 在 p 下的原像是 D^2 的一个内点 x, 则 $p(\mathrm{Int}D^2) \cong \mathrm{Int}D^2 \cong \mathbb{R}^2$ 是 y 的开邻域. 如果 $p^{-1}(y)$ 是 S^1 上一对对径点 x 与 $-x$, 取 $U = (B(x,\varepsilon) \cup B(-x,\varepsilon)) \cap D^2$, 取 ε 充分小, 则 $p(U) \cong \mathbb{R}^2$ (图 3.13), 是 y 的开邻域. 因此 $\mathbb{RP}^2$ 是紧致无边 2 维流形, 是闭曲面.

Klein 瓶是正方形 I^2 的商空间, 因此紧致且连通. 可用与 $\mathbb{RP}^2$ 相同的办法证明它的每一点有开邻域同胚于 $\mathbb{R}^2$. 不过多了一种情况: $p^{-1}(y)$ 是正方形的四个顶点 x_1, x_2, x_3, x_4. 令 $U = (\cup_{i=1}^4 B(x_i, \varepsilon)) \cap I^2$ (ε 充分小), 则 $p(U)$ 是 y 的开邻域, 同胚于 $\mathbb{R}^2$. $\square$

Answer 3.3.2. 设 N 是 n 维带边流形 M 的内部 (流形观点下), $x \in N$ 是 M 的一个内点 (流形观点下), 则 x 有一个开邻域 $U \cong \mathbb{R}^n$, 于是 U 的每一点也都是 M 的内点 (流形观点下), 从而 $U \subset N$, 即 x 是 N 的在拓扑空间子集意义下的内点. 因此流形 M 的内部 N 是拓扑空间 M 的开集. $\square$

Answer 3.3.3. $\forall\, x \in \partial M$, 存在 x 的开邻域 U 和同胚 $\phi: U \to V \subset \mathbb{R}^n_+$, 且 $\phi(x)$ 的第 n 个坐标 $(\phi(x))_n = 0$, $\phi(x) \in V \cap \partial\mathbb{R}^n_+$. $\phi|_{\phi^{-1}(V\cap\partial\mathbb{R}^n_+)}: \phi^{-1}(V \cap \partial\mathbb{R}^n_+) \to V \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ 是同胚, 且 $V \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ 是子空间 $\partial\mathbb{R}^n_+$ 中的开集, 是 $\phi(x)$ 的开邻域. 而 x 在 ∂M 中的开邻域 $U \cap \partial M = \phi^{-1}(V \cap \partial\mathbb{R}^n_+)$, 同胚 $\phi|_{U\cap\partial M}: U \cap \partial M \to V \cap \partial\mathbb{R}^n_+ \subset \partial\mathbb{R}^n_+ \cong \mathbb{R}^{n-1}$, 故 ∂M 是 $n-1$ 维无边流形. $\square$

Answer 3.3.4. (1) M 是 n 维流形, $\forall\, x \in M$, 存在 x 的开邻域 U, 满足 $U \cong \mathbb{R}^n$. 而 $\mathbb{R}^n$ 是度量空间, 满足 C_1 公理, 从而与之同胚的 U 也满足 C_1 公理. 即 x 有可数邻域基 $\{V_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, 其中 V_i 是 x 在 U 中的邻域.

V_i 是 x 在 U 中的邻域, 则存在 U 中的开集 T_i, 使得 $x \in T_i \subset V_i \subset U$. 对于 U 中的开集 T_i, 必有 M 中的开集 O_i, 使得 $T_i = O_i \cap U$. 而 U 是 M 中开集, 则 T_i 也是 M 中的开集. 于是 V_i 也是 x 在 M 中的邻域. 即 $\{V_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 x 在 M 中的可数邻域系.

任取 x 在 M 中的邻域 W, $W\cap U$ 是 x 在 M 中的邻域, 也是 x 在 U 中的邻域. 而 $\{V_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 x 在 U 中的邻域基, 于是 $\exists\, V_i$, 使得 $x\in V_i\subset W\cap U$, 即有 $V_i\subset W$. 因此 $\{V_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 x 在 M 中的可数邻域基.

(2) M 是紧致 n 维流形, $\forall\, x\in M$, $\exists\, x$ 的开邻域 U_x, 使得 $U_x\cong\mathbb{R}^n$. $\{U_x\mid x\in M\}$ 是 M 的开覆盖, 有有限子覆盖 $U_1,\dots,U_m$. 每个 U_i 同胚于 $\mathbb{R}^n$, 而 $\mathbb{R}^n$ 满足 C_2 公理, 于是每个 U_i 满足 C_2 公理, 有可数拓扑基 $\mathcal{D}_i$. 对于任意 M 的开集 O, $O=O\cap(\cup_{i=1}^m U_i)=\cup_{i=1}^m(O\cap U_i)$. 每个 $O\cap U_i$ 可由 $\mathcal{D}_i$ 中一些成员做并集得到, 则 O 可由 $\cup_{i=1}^m\mathcal{D}_i$ 中若干成员做并集得到. 因此 $\cup_{i=1}^m\mathcal{D}_i$ 就是 M 的可数拓扑基

HW7 (4 月 27 日交) 共四道题目

习题 4.1.2. 证明: $SO(n)$ 道路连通. $O(n)$ 有两个道路连通分支, 其中一个为 $SO(n)$.

Answer 4.1.2. 对于任意矩阵 $A \in SO(n)$, 只需证明在 $SO(n)$ 中存在连接单位矩阵 I_n 到 A 的道路. A 是正交矩阵且 $\det A = 1$, 则存在正交矩阵 P, 使得

$$A = P\mathrm{diag}(I_r, -I_k, R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_l})P^{-1}.$$

其中 r 为 A 的特征根 1 的个数, k 为特征根 -1 的个数 (k 是偶数),

$$R_{\theta_i} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix}, i = 1, \ldots, l,$$

l 为正交矩阵 A 的成对出现的共轭复特征根的对数. 定义映射 $\omega : [0,1] \to SO(n)$ 为

$$\omega(t) = P\mathrm{diag}(I_r, \underbrace{R_{t\pi}, \ldots, R_{t\pi}}_{\frac{k}{2}}, R_{t\theta_1}, \ldots, R_{t\theta_l})P^{-1} \in SO(n).$$

则 ω 是 $SO(n)$ 中从 I_n 到 A 的道路.

行列式函数 $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ 连续, $O(n) = (\det^{-1}\{1\} \cap O(n)) \cup (\det^{-1}\{-1\} \cap O(n))$ 是两个不交闭子集的并集, 故不连通, 也不道路连通. 因为 $\det^{-1}\{1\} \cap O(n) = SO(n)$, 且 $SO(n)$ 与 $\det^{-1}\{-1\} \cap O(n)$ 同胚, 所以 $SO(n)$ 与 $\det^{-1}\{-1\} \cap O(n)$ 是 $O(n)$ 的两个道路连通分支.

$SO(n)$ 与 $\det^{-1}\{-1\} \cap O(n)$ 是 $O(n)$ 的两个不交连通子集, 且都是 $O(n)$ 中的极大连通子集, 所以 $SO(n)$ 与 $\det^{-1}\{-1\} \cap O(n)$ 也是 $O(n)$ 的两个连通分支.

习题 4.1.3. 证明: $GL(n,\mathbb{R})$ 是局部道路连通的, 但 $GL(n,\mathbb{R})$ 不连通, 有两个道路连通分支.

Answer 4.1.3. 因为行列式函数 $\det : GL(n,\mathbb{R}) \to (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ 是满射, 故 $GL(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}(-\infty,0) \cup \det^{-1}(0,+\infty)$ 是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的开集, 且不连通.

$\mathbb{R}^{n\times n}$ 是局部道路连通的. 而局部道路连通性是开可遗传性 (推论 2.4.12), 故开子集 $GL(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ 是局部道路连通的.

事实上 $GL(n,\mathbb{R})$ 有两个道路连通分支, 即行列式大于零的矩阵构成的子空间 $GL_n^+(\mathbb{R})$ 和行列式小于零的矩阵构成的子空间 $GL_n^-(\mathbb{R})$. 由于这两个子空间同胚, 所以只需验证 $GL_n^+(\mathbb{R})$ 道路连通.

设 $T^+ \subset GL_n^+(\mathbb{R})$ 表示主对角元都是正数的 n 阶上三角矩阵的集合, 定义

$$f : SO(n) \times T^+ \to GL_n^+(\mathbb{R}), f(A,B) = AB, \forall\ A \in SO(n), B \in T^+.$$

易知 f 连续. 由可逆矩阵的 QR 分解可知, 对于任意可逆矩阵 C, 可有 $C = QR$, 其中 Q 是正交矩阵, R 是上三角矩阵. 并且当要求 R 的主对角元都是正数时, 此分解唯一, $Q \in SO(n)$. 因此 f 是满映射. 再由 QR 分解的唯一性和分解过程可知, f 的逆映射存在且连续. 下证 f 也是单映射.

QR 分解: 对可逆矩阵 C 的列向量组进行 Gram-Schmidt 正交化再单位化 (通过一系列初等列变换可得, 或相当于在 C 的右边乘上三角可逆矩阵 R^{-1}), 可将 C 变为正交矩阵 Q. 即 $CR^{-1} = Q$, 也即 $C = QR$.

假定 $A_1, A_2 \in SO(n)$, $B_1, B_2 \in T^+$ 满足 $f(A_1, B_1) = f(A_2, B_2)$. 即 $A_1B_1 = A_2B_2$, 则 $A_2^{-1}A_1 = B_2B_1^{-1}$. 但 $A_2^{-1}A_1 \in SO(n)$, $B_2B_1^{-1} \in T^+$, 而 $SO(n) \cap T^+ = \{I_n\}$, 所以 $A_1 = A_2, B_1 = B_2$, 即 f 是单映射. 因此 $f : SO(n) \times T^+ \to GL_n^+(\mathbb{R})$ 是同胚.

单位矩阵 $I_n \in T^+$, 且 $\forall\ B \in T^+, t \in I = [0,1]$, $(1-t)I_n + tB \in T^+$. 因此 T^+ 是凸集, 是道路连通的. 于是 $GL_n^+(\mathbb{R}) \cong SO(n) \times T^+$ 也道路连通 (此处用到道路连通性是有限可乘性, 定理 2.5.1). □

习题 4.2.1. 设 G 是拓扑群, H 是 G 的子群, 则 G/H 是齐性空间

习题 4.2.2. D^2 是不是齐性空间, 请说明理由.

Answer 4.2.1. 对于任意 $xH, yH \in G/H$, 定义 $L_{yx^{-1}} : G/H \to G/H$ 为 $gH \mapsto yx^{-1}gH$. 设 $p : G \to G/H$ 为商映射, 映射 $L'_{yx^{-1}} : G \to G, g \mapsto yx^{-1}g$ 是 G 的自同胚. 由如下的映射交换图和命题 3.1.12可知, $L_{yx^{-1}}$ 是连续映射.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "L'_{yx^{-1}}"] \arrow[d, "p"] & G \arrow[r, "p"] & G/H \\
G/H \arrow[urr, "L_{yx^{-1}}"'] & &
\end{tikzcd}$$

$\forall\ aH \in G/H$, $xy^{-1}aH \in G/H$, 且 $L_{yx^{-1}}(xy^{-1}aH) = aH$, 故 $L_{yx^{-1}}$ 是满射.

若 $L_{yx^{-1}}(aH) = L_{yx^{-1}}(bH)$, 则 $yx^{-1}aH = yx^{-1}bH \Rightarrow aH = bH$, 即 $L_{yx^{-1}}$ 是单射. 于是 $L_{yx^{-1}}$ 是连续的一一映射.

同理 $L_{xy^{-1}}$ 也是连续的一一映射, 且 $L_{yx^{-1}}$ 与 $L_{xy^{-1}}$ 互为逆映射. 因此 $L_{yx^{-1}}$ 是 G/H 的自同胚. 且 $L_{yx^{-1}}(xH) = yx^{-1}xH = yH$, 故 G/H 是齐性空间. □

Answer 4.2.2. D^2 不是齐性空间. 设 $x \in \partial D^2, y \in \mathrm{Int}D^2$, f 是 D^2 上的任意自同胚. 根据习题 3.4.1, f 把边界点映到边界点, 将流形的内点映到内点. 因此 $f(x) \neq y$, D^2 不是齐性空间.

或者根据 Brouwer 不动点定理 6.5.2, D^2 的任意自同胚 f 必有不动点 x_0. 则任取 $y \in D^2 \setminus \{x_0\}$, $f(x_0) = x_0 \neq y$. 于是 D^2 不是齐性空间.

HW8 (5 月 4 日周四交)

习题 1. 令 $S^1=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|^2=1\}$, $I=[0,1]$, $X=S^1\times I$. 对于任意 $(z,t)\in X, z_1\in S^1$, 定义 S^1 在 X 上的群作用 $S^1\curvearrowright X$ 为: $\phi: S^1\times X\to X$, $\phi(z_1,(z,t))=z_1(z,t)=(z_1z,t)$.

(1) 问: 该群作用 $S^1\curvearrowright X$ 是否是可迁的群作用? 是否是自由的群作用? 群作用的不动点集合 X^{S^1} 是? 请说明理由.

(2) 证明: 轨道空间 X/S^1 同胚于 I.

证明 1. (1) 取 $(1,0),(1,1)\in X=S^1\times I$, 显然对于任意 $z_1\in S^1$, $z_1(1,0)=(z_1,0)\neq(1,1)$, 因此该群作用 $S^1\curvearrowright X$ 非可迁.

任取 $(z,t)\in X$, 对于迷向子群 $S^1_{(z,t)}$ 中任意元素 z_1, 有 $z_1(z,t)=(z_1z,t)=(z,t)$. 则 $z_1z=z$. 而 $z\in S^1$, $z\neq 0$, 于是 $z_1=1$. 也即迷向子群 $S^1_{(z,t)}$ 是平凡子群. 因此群作用是自由的群作用, 不动点集合 X^{S^1} 是空集.

(2) 设 $p: X\to X/S^1$ 是商映射, $\forall\,(z,t)\in X$, $p(z,t)=S^1(z,t)$, 其中 $S^1(z,t)$ 为点 (z,t) 的轨道. 定义 $f: X=S^1\times I\to I$, $f(z,t)=t$, f 显然是连续映射. 易证存在连续映射 $g: X/S^1\to I$, 满足 $g(S^1(z,t))=t$, 即 $gp=f$. g 显然是满射.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & I \\ X/S^1 \arrow[ur, dotted, "g"'] & \end{tikzcd}$$

设 $S^1(z_1,t_1),S^1(z_2,t_2)\in X/S^1$, 满足 $g(S^1(z_1,t_1))=t_1=t_2=g(S^1(z_2,t_2))$. 注意到 $\frac{z_2}{z_1}\in S^1$, $\frac{z_2}{z_1}(z_1,t_1)=(\frac{z_2}{z_1}z_1,t_1)=(z_2,t_1)=(z_2,t_2)$. 即 $S^1(z_1,t_1)=S^1(z_2,t_2)\in X/S^1$, 因此 $g: X/S^1\to I$ 是单射. 至此, g 是连续双射. 因为 $X=S^1\times I$ 是紧致空间, X/S^1 是紧致空间, I 是 Hausdorff 空间, 所以 $g: X/S^1\to I$ 是同胚映射. □

习题 4.3.3. 设 $G\curvearrowright X$, 若 G 与 X/G 都连通, 则 X 也连通.

习题 4.3.4. 利用命题4.3.9证明 $O(n)/(O(n-k)\times O(k))\cong G_k(\mathbb{R}^n)$.

习题 4.3.5. 对于透镜空间 $L(p,q_1)$ 与 $L(p,q_2)$, 若 $q_1\equiv q_2 \pmod p$, 证明: $L(p,q_1)\cong L(p,q_2)$.

Answer 4.3.3. 反证法. 假设 X 是两个不相交的非空开集 U 与 V 的并集. 由于商映射 $p: X\to X/G$ 是开映射, 则 $p(U),p(V)$ 是 X/G 的两个非空开子集, 且 $X/G=p(U)\cup p(V)$. 由于 X/G 连通, 则 $p(U)\cap p(V)\neq\varnothing$. 设 $p(x)=G(x)\in p(U)\cap p(V)$, 则存在 $u\in U, v\in V$, 满足 $G(u)=G(x)=G(v)$. 进一步可得 $u\in G(x), v\in G(x)$. 于是 $U\cap G(x)$ 与 $V\cap G(x)$ 都非空. 这两个集合把轨道 $G(x)$ $(\subset X)$ 分解成两个非空不相交开集的并集. 但 $G(x)$ 是连通空间 G 在一个连续映射 $F: G\to X$ 之下的像, 其中 F 定义为 $F(g)=g(x)$, 因此 $G(x)$ 是 X 的连通子集, 这就引出了矛盾! □

Answer 4.3.4. 对于任意 $L_1 \in G_k(\mathbb{R}^n)$, 令 $u_1, \dots, u_k$ 是 L_1 标准正交基, 即 $L_1 = L(u_1, \dots, u_k)$. 定义 $O(n)$ 在 $G_k(\mathbb{R}^n)$ 上的群作用为:

$$A(L_1) = L(Au_1, \dots, Au_k), \forall\, A \in O(n).$$

若 $v_1, \dots, v_k$ 也是 L_1 的标准正交基, 则存在 k 阶正交矩阵 Y 满足 $[v_1, \dots, v_k] = [u_1, \dots, u_k]Y$. 则

$$[Av_1, \dots, Av_k] = [Au_1, \dots, Au_k]Y \Rightarrow L(Av_1, \dots, Av_k) = L(Au_1, \dots, Au_k)$$

即 $A(L_1)$ 不依赖于 L_1 的标准正交基的选取, 故群作用有意义. 对于任意 $L_1, L_2 \in G_k(\mathbb{R}^n)$, 设 $u_1, \dots, u_k$ 与 $v_1, \dots, v_k$ 分别为 L_1, L_2 的标准正交基. 将 $u_1, \dots, u_k$ 与 $v_1, \dots, v_k$ 分别扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基 $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$ 和 $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$, 可得两个正交矩阵

$$A = [u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n], B = [v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n],$$

且 $B^{-1}A \in O(n)$, $BA^{-1}A = B$, 于是 $BA^{-1}[u_1, \dots, u_k] = [v_1, \dots, v_k]$. 因此:

$$BA^{-1}(L_1) = L(B^{-1}Au_1, \dots, B^{-1}Au_k) = L(v_1, \dots, v_k) = L_2.$$

即群作用 $O(n) \curvearrowright G_k(\mathbb{R}^n)$ 是可迁的. 因此 $G_k(\mathbb{R}^n)$ 中任一点对应的轨道都为 $G_k(\mathbb{R}^n)$.

考虑 $O(n)$ 在 $L_\varepsilon := L(\varepsilon_{n-k+1}, \dots, \varepsilon_n) \in G_k(\mathbb{R}^n)$ 处的迷向子群. 若 $A \in O(n)_{L_\varepsilon}$, 则

$$A(L(\varepsilon_{n-k+1}, \dots, \varepsilon_n)) = L(A\varepsilon_{n-k+1}, \dots, A\varepsilon_n) = L(\varepsilon_{n-k+1}, \dots, \varepsilon_n),$$

即有 $[A\varepsilon_{n-k+1}, \dots, A\varepsilon_n] = [\varepsilon_{n-k+1}, \dots, \varepsilon_n]Y$, 其中 Y 为 k 阶正交矩阵. 此时已说明 A 的后 k 列形如 $\begin{bmatrix} O \\ Y \end{bmatrix}$. 而 A 是正交矩阵, A 矩阵的列向量组是正交向量组, 可令 $A\begin{bmatrix} I_{n-k} \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ O \end{bmatrix}$, 故 $A = \begin{bmatrix} X & O \\ O & Y \end{bmatrix} \in O(n-k) \times O(k)$. 反之, 显然有 $O(n-k) \times O(k) \subset O(n)_{L_\varepsilon}$. 于是 $O(n)_{L_\varepsilon} \cong O(n-k) \times O(k)$, 因此

$$O(n)/O(n-k) \times O(k) \cong O(n)(L_\varepsilon) = G_k(\mathbb{R}^n).$$ □

Answer 4.3.5. 对于 $\mathbb{Z}_p$ 的生成元 g, 任意元素 $(z_1, z_2) \in S^3$, 若 p 整除 $q_1 - q_2$, 则 $(e^{\frac{2\pi}{p}\mathrm{i}}z_1, e^{\frac{2\pi q_1}{p}\mathrm{i}}z_2) = (e^{\frac{2\pi}{p}\mathrm{i}}z_1, e^{\frac{2\pi q_2}{p}\mathrm{i}}z_2)$. 即两种群作用是相同的, 所得到的轨道空间 $L(p, q_1)$ 与 $L(p, q_2)$ 相等. □

HW9 (5 月 11 日周四交)

习题 5.2.1. 设 $f, g : X \to Y$ 为常值映射, 证明: $f \simeq g$ 当且仅当 $f(X)$ 与 $g(X)$ 在 Y 的同一个道路连通分支中.

习题 5.2.2. 证明: 若连续映射 $f : X \to S^n$ 不是满射, 则 f 必零伦.

习题 5.2.3. 连续映射 $a : S^n \to S^n$, $a(x) = -x$, $\forall\, x \in S^n$, 称 a 为球面的**对径映射**. 设 $f : S^n \to S^n$ 为连续映射.

(1) 若 f 与恒等映射 1_{S^n} 不同伦, 则存在 $x \in S^n$, 使得 $f(x) = -x$.

(2) 若 f 与对径映射 a 不同伦, 则存在 $x \in S^n$, 使得 $f(x) = x$.

习题 5.2.4. 设 n 为奇数, 则 n 维球面 S^n 上的恒等映射 1_{S^n} 与对径映射 a 同伦.

Answer 5.2.1. 设 $f(X) = \{y_1\}, g(X) = \{y_2\}$. 若 $f \simeq g$, 则存在连续映射 $F : X \times I \to Y$, 使得 $F(X, 0) = f(X) = \{y_1\}, F(X, 1) = g(X) = \{y_2\}$. 取定 X 中一点 x_0, 令 $\alpha : I \to Y$ 为 $\alpha(t) = F(x_0, t)$, 则 α 为连接 y_0 到 y_1 的道路. 即 $f(X) = \{y_1\}$ 与 $g(X) = \{y_2\}$ 在同一道路连通分支中.

反之, 若 $f(X) = \{y_1\}$ 与 $g(X) = \{y_2\}$ 在 Y 的同一道路连通分支中, 即存在连接 y_1, y_2 的道路 $\alpha : I \to Y$. 令 $F : X \times I \to Y$ 为 $F(x, t) = \alpha(t), \forall\, (x, t) \in X \times I$, 则 $f \overset{F}{\simeq} g$. □

Answer 5.2.2. 设 $-y_0 \in S^n$ 且 $-y_0 \notin f(X)$, 定义 $F : X \times I \to S^n$ 为

$$F(x, t) = \frac{(1-t)f(x) + t y_0}{\|(1-t)f(x) + t y_0\|} \in S^n, \ \forall\, (x, t) \in X \times I.$$

则 $F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = y_0$, 于是 $f \overset{F}{\simeq} c_{y_0}$. 即 f 同伦于常值映射 c_{y_0}. □

Answer 5.2.3. 由命题5.2.3易得.

Answer 5.2.4. 令 $n = 2k+1$. 对于任意 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}, x_{2k+2}) \in S^{2k+1}$, 作映射 $v : S^{2k+1} \to S^{2k+1}$ 为, $v(x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}, x_{2k+2}) = (x_2, -x_1, \ldots, x_{2k+2}, -x_{2k+1})$, 则 v 是连续映射. 且对于任意 $x \in S^{2k+1}$, $v(x)$ 与 $\pm x$ 正交, 则 $v(x) \neq x = -a(x)$ 且 $v(x) \neq -x$. 由命题5.2.3, 可得 $v \simeq a$ 且 $v \simeq 1_{S^{2k+1}}$, 于是恒等映射 $1_{S^{2k+1}}$ 与对径映射 a 同伦. □

HW10 (5 月 18 日周四交)

习题 5.3.2. 证明: Hausdorff 空间 X 的收缩核 A 一定是闭集.

Answer 5.3.2. 设 A 为 Hausdorff 空间 X 的收缩核, $r : X \to A$ 为收缩映射, $r|_A = 1_A$, 且 $\forall\ x \in X \setminus A$, $r(x) \in A$, $x \neq r(x)$. 于是根据 Hausdorff 分离性, 存在 $r(x)$ 的邻域 O 和 x 的邻域 U, 满足 $O \cap U = \varnothing$. 由 r 的连续性, 存在 x 的邻域 V 使得 $r(V) \subset O$. 则 $U \cap V$ 仍为 x 的邻域, 但 $(U \cap V) \cap A = \varnothing$. 否则如果存在 $a \in U \cap V \cap A$, 则 $a \in V, r(a) \in O$, 而 $a = r(a) \in U \cap O \neq \varnothing$, 矛盾! 于是 $U \cap V \subset X \setminus A$, 故 x 为 $X \setminus A$ 的内点, A 是闭集. □

习题 5.3.5. 设 $T^+(n)$ 表示主对角元都是正数的 n 阶实上三角矩阵的集合, 证明 $T^+(n)$ 可缩.

习题 5.3.6. 证明: $O(n)$ 是 $GL(n, \mathbb{R})$ 的形变收缩核.

Answer 5.3.5. 选取单位矩阵 I_n 为 $T^+(n)$ 的基点, 定义 $H : T^+(n) \times I \to T^+(n)$ 为: $\forall\ T \in T^+(n)$, $t \in I$,

$$H(T,t) = \begin{bmatrix} (1-t)a_{11}+t & (1-t)a_{12} & \cdots & (1-t)a_{1n} \\ 0 & (1-t)a_{22}+t & \cdots & (1-t)a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (1-t)a_{nn}+t \end{bmatrix}$$

$H(T,t)$ 的主对角元都是正数, H 是连续映射, 且 $1_{T^+(n)} \overset{H}{\simeq} c_{I_n}$, 于是 $T^+(n)$ 可缩. □

Answer 5.3.6. 设 $T^+(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$ 表示主对角元都是正数的 n 阶上三角矩阵的集合, 定义 $f : O(n) \times T^+(n) \to GL(n, \mathbb{R}), \forall\ A \in O(n), B \in T^+(n), f(A, B) = AB$. 易知 f 连续. 由可逆矩阵的 QR 分解可知, 对于任意可逆矩阵 A, 可有 $A = QR$, 其中 Q 是正交矩阵, R 是上三角矩阵. 并且当 R 的主对角元都是正数时, 此分解唯一. 因此 f 是满映射. 下证 f 也是单映射.

假定 $A, A' \in O(n)$, $B, B' \in T^+(n)$ 满足 $f(A,B) = f(A',B')$. 即 $AB = A'B'$, 则 $(A')^{-1}A = B'B^{-1}$. 但 $(A')^{-1}A \in O(n)$, $B'B^{-1} \in T^+(n)$, 而 $O(n) \cap T^+(n) = \{I_n\}$, 故 $(A')^{-1}A = B'B^{-1} = I_n$, 所以 $A = A', B = B'$, 即 f 是单映射. 根据可逆矩阵的 QR 分解, f^{-1} 存在且显然连续, 因此 f 是同胚. $T^+(n)$ 是凸集, 故可缩, 因此包含映射 $O(n) \times \{I_n\} \xrightarrow{\simeq} O(n) \times T^+(n) \cong GL(n, \mathbb{R})$ 是同伦等价. □

HW11 (5 月 25 日周四交)

习题 6.1.2. 设 X 是平凡拓扑空间, $x_0 \in X$, 证明: $\pi_1(X, x_0)$ 是平凡群.

Answer 6.1.2. 当 X 是平凡拓扑空间时, 任何映射 $f: Y \to X$ 都连续. 对于任意 $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, 定义映射 $H: I \times I \to X$,

$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha(s), & s \in [0,1], t \in [0,1); \\ x_0, & s \in [0,1], t = 1. \end{cases}$$

H 连续, 且 $\alpha \overset{H}{\simeq} c_{x_0}$ rel $\{0,1\}$. 于是 $\pi_1(X, x_0)$ 只有一个元素. □

习题 6.2.1. 设 u 是 X 的以 x_0 为基点的闭路, 证明: $u_\# = 1_{\pi_1(X,x_0)}$, 当且仅当 $[u]$ 属于群 $\pi_1(X, x_0)$ 的中心.

习题 6.2.2. 空间 X 称为 **1-单式的**, 如果对任意 $x_0 \in X$ 和每个以 x_0 为基点的闭路 u, $u_\# = 1_{\pi_1(X,x_0)} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$. 证明: 道路连通空间 X 是 1-单式的, 当且仅当 $\pi_1(X, x_0)$ 是 Abel 群.

Answer 6.2.1. 群 G 的中心 $= \{g' \in G \mid \forall\, g \in G, g'g = gg'\}$.

由推论 6.2.4可知, $\forall\ [v] \in \pi_1(X, x_0)$, $u_\# = 1_{\pi_1(X,x_0)} \Leftrightarrow u_\#[v] = [u]^{-1}[v][u] = [v] \Leftrightarrow [v][u] = [u][v] \Leftrightarrow [u]$ 属于群 $\pi_1(X, x_0)$ 的中心. □

Answer 6.2.2. 注意到群 G 是交换群, 当且仅当群 G 的中心就是 G. 于是:

道路连通空间 X 是 1-单式的

$\Leftrightarrow$ 每个以 x_0 为基点的闭路 u, $u_\# = 1_{\pi_1(X,x_0)} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$

$\Leftrightarrow \forall\ [u] \in \pi_1(X, x_0)$, $[u]$ 属于群 $\pi_1(X, x_0)$ 的中心 (习题6.2.1)

$\Leftrightarrow \pi_1(X, x_0)$ 是交换群. □

习题 6.2.3. 设 X 道路连通, 证明下列说法等价:

(1) X 单连通;

(2) 任意连续映射 $f: S^1 \to X$ 都能扩张成连续映射 $g: D^2 \to X$;

(3) 对于 X 中任意满足 $u(0) = v(0)$, $u(1) = v(1)$ 的道路 u, v, 都有 $u \simeq v$ rel $\{0,1\}$.

Answer 6.2.3. (1) $\Rightarrow$ (2)

取商映射 $p: I \to S^1$, $p(s) = e^{\mathrm{i}2\pi s}$, p 满足 $p(0) = p(1)$. 包含映射 $i_1: I \to I \times I$, $i_1(s) = (s,1)$. 对于 $D^2 = \{te^{\mathrm{i}2\pi s} \mid 0 \leqslant t, s \leqslant 1\}$, 定义映射 $h: I \times I \to D^2$, $h(s,t) = te^{\mathrm{i}2\pi s}$, h 是连续满射且满足 $h(0,t) = h(1,t)$, $\forall\ t \in I$. $h(s,0) = 0$ (D^2的中心), $\forall\ s \in I$. D^2 是 I^2 的商空间, i.e. $D^2 \cong I^2/\sim$, 其中 $(0,t) \sim (1,t)$, $(s_1, 0) \sim (s_2, 0)$, $\forall\ t, s_1, s_2 \in I$. 因此 h 可看作是商映射.

对于任意连续映射 $f: S^1 \to X$, $fp(0) = fp(1) = f(1) := x_0 \in X$. X 单连通, 则 $c_{x_0} \overset{F}{\simeq} fp$ rel $\{0,1\}$, 其中伦移 F 满足:

$$F(s,0)=c_{x_0}(s)=x_0,\ F(s,1)=Fi_1(s)=fp(s)=f(e^{\mathrm{i}2\pi s}),\forall\ s\in I,$$
$$F(0,t)=c_{x_0}(0)=x_0=fp(0),\ F(1,t)=c_{x_0}(1)=x_0=fp(1),\forall\ t\in I.$$

D^2 是 I^2 的商空间, 则存在连续映射 $g:D^2\to X$, 满足 $gh=F$. 设 $i:S^1\to D^2$ 是包含映射, $i(e^{\mathrm{i}2\pi s})=e^{\mathrm{i}2\pi s}$. $F(s,t)=gh(s,t)=g(te^{\mathrm{i}2\pi s})$, 于是 $gi(e^{\mathrm{i}2\pi s})=g(e^{\mathrm{i}2\pi s})=F(s,1)=f(e^{\mathrm{i}2\pi s})$, 即 $gi=f$, g 是 f 的扩张.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "p"'] \arrow[drr, "fp"] & I\times I \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "F"] & D^2 \arrow[d, "g"] \\
S^1 \arrow[urr, "i"] \arrow[rr, "f"'] & & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "u*v^{-1}"] \arrow[d, "p"'] & X \\
S^1 \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i"'] & D^2 \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 u,v 为 X 中满足 $u(0)=v(0)=x_0$, $u(1)=v(1)$ 的任意两条道路. 则 $u*v^{-1}$ 是 X 中以 x_0 为基点的闭道路. p 是商映射, 则存在连续映射 $f:S^1\to X$, 满足 $fp=u*v^{-1}$. 由 (2), f 可扩张到 $g:D^2\to X$, 即 $gi=f$. 而 D^2 可缩, 是单连通的, 所以 ip 相对于 $\{0,1\}$ 同伦于 D^2 中的常值映射, 于是 $u*v^{-1}=gip$ 相对于 $\{0,1\}$ 同伦于 X 中的常值映射. 因此 $u\simeq v$ rel $\{0,1\}$.

(3) $\Rightarrow$ (1) 易证! □

Answer 6.2.3. (1) $\Rightarrow$ (2)

<u>证明 2</u>: 取商映射 $p:I\to S^1$, $p(s)=e^{\mathrm{i}2\pi s}$, $\forall\ s\in I$, p 满足 $p(0)=p(1)=1\in S^1$. $fp:I\to X$ 是以 $f(1)\xlongequal{\text{记为}}x_0$ 为基点的闭道路. 因为 X 单连通, 则存在同伦 $F:I\times I\to X$ 满足 $c_{x_0}\overset{F}{\simeq}fp$ rel $\{0,1\}$, 其中 c_{x_0} 是 X 中的常值道路. 同伦 F 满足:

$$F(s,0)=c_{x_0}(s)=x_0,\ F(s,1)=fp(s)=f(e^{\mathrm{i}2\pi s}),\forall\ s\in I,$$
$$F(0,t)=c_{x_0}(0)=x_0=fp(0),\ F(1,t)=c_{x_0}(1)=x_0=fp(1),\forall\ t\in I.$$

由命题3.1.3, 存在连续映射 $G:S^1\times I\to X$, 满足 $G(e^{\mathrm{i}2\pi s},t)=F(s,t)$, $\forall\ (s,t)\in I$, 即 $G(p\times 1_I)=F$. 设 $c'_{x_0}:S^1\to X$ 为常值映射.

$$\begin{tikzcd}
I\times I \arrow[r, "F"] \arrow[d, "p\times 1_I"'] & X \\
S^1\times I \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

映射 G 满足:

$$G(e^{\mathrm{i}2\pi s},0)=F(s,0)=c'_{x_0}(e^{\mathrm{i}2\pi s}),\ G(e^{\mathrm{i}2\pi s},1)=F(s,1)=f(e^{\mathrm{i}2\pi s}),\forall\ s\in I.$$

因此 $c'_{x_0}\overset{G}{\simeq}f:S^1\to X$. $f:S^1\to X$ 零伦, 由推论5.3.14, f 可扩张到 D^2 上.

习题 6.2.4. 空间 X 的所有道路连通分支的集合记为 $\pi_0(X)$. 若 $X\simeq Y$, 证明: 集合 $\pi_0(X)$ 和 $\pi_0(Y)$ 之间有一一对应.

Answer 6.2.4. 由 $X \simeq Y$, 存在映射 $f: X \to Y, g: Y \to X$ 使 $gf \simeq 1_X, fg \simeq 1_Y$. 设 x 点所在的道路连通分支为 C_x, 定义

$$f_*: \pi_0(X) \to \pi_0(Y),\ C_x \mapsto C_{f(x)}.$$

即 f_* 把 X 中含 x 点的道路连通分支对应到 Y 中含 $f(x)$ 点的道路连通分支. 类似的可定义 $g_*: \pi_0(Y) \to \pi_0(X)$. 这样 $g_*f_*: \pi_0(X) \to \pi_0(X)$ 将 C_x 对应到 $C_{gf(x)}$. 由 $gf \overset{H}{\simeq} 1_X$ 可知 $H(x,\ ): I \to X$ 是连接 $gf(x)$ 到 x 的道路, 即有 $C_{gf(x)} = C_x$. 因此 $g_*f_* = 1_{\pi_0(X)}$. 同理 $f_*g_* = 1_{\pi_0(Y)}$, 从而 $f_*: \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ 是集合之间的一一对应. $\square$

HW12 (6 月 1 日周四交)

习题 6.3.2. 设 M 为 n 维流形, $n \geqslant 3$, $p \in M$. 证明在 M 中任取点 $x_0 \neq p$, $\pi_1(M, x_0) \cong \pi_1(M \setminus \{p\}, x_0)$.

Answer 6.3.2. 假设 M 不道路连通 (若 M 道路连通, 则直接考虑情形 2), 设 $x \in M$ 所在的道路连通分支为 C_x. 流形是局部道路连通空间, 其道路连通分支 (也是连通分支) 既开又闭. C_x 仍是 n 维流形.

情形 1: x_0 与 p 不在同一道路分支之内, 则 $C_{x_0} = C_{x_0} \setminus \{p\}$. 根据命题 6.2.2,

$$\pi_1(M, x_0) \cong \pi_1(C_{x_0}, x_0) = \pi_1(C_{x_0} \setminus \{p\}, x_0) \cong \pi_1(M \setminus \{p\}, x_0).$$

情形 2: x_0 与 p 在同一道路分支 C_p 之内, 则 $C_p \setminus \{p\}$ 是 x_0 在 $M \setminus \{p\}$ 之内的道路分支. 由命题 6.2.2,

$$\pi_1(M, x_0) \cong \pi_1(C_p, x_0), \ \pi_1(M \setminus \{p\}, x_0) \cong \pi_1(C_p \setminus \{p\}, x_0).$$

设 U ($\subset C_p$) 为 p 的同胚于 n 维开实心球的邻域, 记 $V = C_p \setminus \{p\}$, 则 $C_p = U \cup V$, 且 $U \cap V = U \setminus \{p\} \simeq S^{n-1}$ 单连通 ($n \geqslant 3$). U 单连通, V 道路连通. 应用 van-Kampen 定理可得 $\pi_1(C_p, x_0) \cong \pi_1(V, x_0) = \pi_1(C_p \setminus \{p\}, x_0)$. 因此 $\pi_1(M, x_0) \cong \pi_1(M \setminus \{p\}, x_0)$. □

习题 6.4.2. 求下列空间的基本群:

(1) $\mathbb{R}^3$ 去掉 2 条不相交直线;

(2) $\mathbb{R}^3$ 去掉 3 条坐标轴;

(3) “田” 字形.

Answer 6.4.2. (1) $\mathbb{R}^3$ 去掉 2 条不相交直线同胚于 $\mathbb{R}^3$ 中去掉 2 条不交平行直线, 同伦等价于 $S^1 \vee S^1$, 基本群同构于 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

(2) 设 $\mathbb{R}^3$ 去掉 3 条坐标轴对应的空间为 X, 令

$$S_6^2 = S^2 \setminus \{(1,0,0), (-1,0,0), (0,1,0), (0,-1,0), (0,0,1), (0,0,-1)\} \subset X.$$

取包含映射和收缩映射分别为:

$$i : S_6^2 \to X, y \mapsto y, \forall\, y \in S_6^2.$$
$$r : X \to S_6^2, r(x) = \frac{x}{\|x\|}, \forall\, x \in X.$$

显然有 $ri = 1_{S_6^2}$. 考虑映射 $H : X \times I \to X$,

$$H(x,t) = (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|}, \forall\, (x,t) \in X \times I.$$

则 $1_X \overset{H}{\simeq} ir \text{ rel } S^2_6$. 即 H 是 X 到 S^2_6 的强形变收缩, 故 $X \simeq S^2_6$. 但 S^2_6 同胚于 $\mathbb{R}^2$ 减去 5 个点所得空间, 同伦等价于 5 个 S^1 的一定并, 于是基本群 $\pi_1(X)$ 同构于 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

(3) "田" 字形同伦等价于 $S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$, 基本群同构于 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. □

习题 6.4.5. 设映射 $f, g : (S^1, 1) \to (Y, y_0)$ 都连续, 且 $f_* = g_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(Y, y_0)$. 证明: $f \simeq g \text{ rel } \{1\}$.

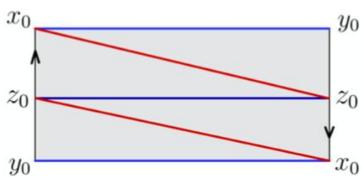
Answer 6.4.5. 设 $\sigma_1 : I \to S^1$ 为 $\sigma_1(s) = e^{i2\pi s}, \forall\, s \in I$, $[\sigma_1] \in \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ 是生成元. $f_* = g_* \Rightarrow f_*([\sigma_1]) = g_*([\sigma_1]) \in \pi_1(Y, y_0)$, 即 $[f\sigma_1] = [g\sigma_1]$, 等价的有 $f\sigma_1 \overset{H}{\simeq} g\sigma_1 \text{ rel } \{0,1\}$, 其中 $H : I \times I \to Y$ 把 $\{0,1\} \times I$ 映为一点 $y_0 \in Y$, $y_0 = f\sigma_1(0) = f\sigma_1(1) = g\sigma_1(0) = g\sigma_1(1)$. 定义 $G : S^1 \times I \to Y$ 为 $G(e^{i2\pi s}, t) = H(s,t)$, 则由命题 3.1.3, G 连续, 且 $G(1,t) = y_0 = H(0,t) = H(1,t), \forall\, t \in I$; $G(e^{i2\pi s}, 0) = H(s, 0) = f\sigma_1(s) = f(e^{i2\pi s}), \forall\, s \in I$, 同理 $G(e^{i2\pi s}, 1) = g(e^{i2\pi s})$, 即有 $f \overset{G}{\simeq} g \text{ rel } \{1\}$. □

习题 6.4.7. 设 X 是 Möbius 带, A 是它的边界, $x_0 \in A$. 证明: 包含映射 $i : A \to X$ 诱导的同态 $i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ 不是同构.

习题 6.4.8. 证明 Möbius 带的边界不是它的的收缩核.

Answer 6.4.7. 设 $A \cong S^1$ 是 Möbius 带 X 的边界, S^1_C 表示 Möbius 带的中心腰圆. S^1_C 是 Möbius 带的形变收缩核. 定义如下三条闭道路:

- u 是边界 A 所在的上下两条蓝色线段从左上 x_0 到 y_0, 再从 y_0 到右下 x_0 所决定的 "直线段" 闭道路.
- v 是 X 中从左上 x_0 到 z_0, 再从 z_0 到右下 x_0 所决定的 "直线段" 闭道路 (红色路径).
- σ_1 是 X 中从左中 z_0 到右中 z_0 所决定的 "直线段" 闭道路 (蓝黑色路径).
- w 是 X 中从左上 x_0 到左中 z_0 所决定的 "直线段" 闭道路.



则 $[u]$ 是 $\pi_1(A, x_0) \cong \mathbb{Z}$ 的生成元, $[\sigma_1]$ 是 $\pi_1(S^1_C, z_0) \cong \pi_1(X, z_0)$ 的生成元.

设 $i : A \to X$ 为包含映射, 则 $i_*[u] = [u] = [v] \in \pi_1(X, x_0)$. 而同构 $w_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, z_0)$ 满足

$$w_{\#}i_*[u] = w_{\#}[v] = [w^{-1} * v * w] = [\sigma_1 * \sigma_1] = [\sigma_1]^2 \in \pi_1(X, z_0).$$

$$\begin{tikzcd}
{[u] \in \pi_1(A, x_0)} \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr] & {\pi_1(X, x_0) \ni [v]} \arrow[d, "\cong"', "w_{\#}"] \\
& {\pi_1(X, z_0) \ni [\sigma_1]^2}
\end{tikzcd}$$

因此包含映射诱导的同态 i_* 不是同构. □

Answer 6.4.8. 若有收缩映射 $r : X \to A$, 则 $r_* i_*$ 是恒等同态 $1_{\pi_1(A)}$, 于是 $r_* : \pi_1(X) \to \pi_1(A)$ 是满同态. 又因为 $\pi_1(X) \cong \pi_1(A) \cong \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}$ 的满同态一定是同构, 从而 r_* 是同构. 进一步又可得出 i_* 是同构. 这与习题6.4.7的结论矛盾. 因此 Möbius 带的边界不是它的的收缩核. □

HW13 (最后一次作业)

习题 6.5.2. 若空间 X 使得任意连续映射 $f: X \to X$ 有不动点, 称 X 为具有不动点性质的空间. 证明若 X 具有不动点性质, 则其收缩核 A 也具有不动点性质.

Answer 6.5.2. 设 $r: X \to A$ 为收缩映射, 即有 $ri = 1_A$, 其中 $i: A \to X$ 为包含映射. 对于任意连续映射 $g: A \to A$, 连续映射 $igr: X \xrightarrow{r} A \xrightarrow{g} A \subset X$ 应有不动点 $a \in X$: $igr(a) = a$. 但 $igr(X) \subset A$, 于是 $a \in A$. 因为 $g(a) = ig(a) = igr(a) = a$, 所以 a 就是 g 的不动点. □

习题 6.5.4. 证明带边流形 M 的内点不是边界点 (带边流形的内部与边界不相交).

Answer 6.5.4. 否则, 设 x 既是带边流形 M 的内点又是其边界点, 则有 x 的开邻域 U, V 及同胚 $f: \mathbb{R}^n \to U, g: \mathbb{R}^n_+ \to V$ 使得 $f(0) = x = g(0)$. 取以原点为圆心, 半径充分小的半球 $B_1 \subset \mathbb{R}^n_+$ 使得 $g(B_1) \subset U \cap V$. 令 $\phi = f^{-1}g: B_1 \to \mathbb{R}^n$, 则 $\phi(B_1)$ 是 $0 \in \mathbb{R}^n$ 的邻域. 选取以 0 为中心, 半径充分小的球 B_2 使得 $B_2 \subset \phi(B_1)$. 令 $r: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \partial B_2$ 是向径投影, 即 $r(y) = \varepsilon \dfrac{y}{|y|}$, 其中 ε 为球 B_2 的半径. 则 $r|_{\phi(B_1)\setminus\{0\}}$ 是 $\phi(B_1) \setminus \{0\}$ 到 ∂B_2 的收缩映射. 令 $i: \partial B_2 \to \phi(B_1) \setminus \{0\}$ 为包含映射, 则 $r|_{\phi(B_1)\setminus\{0\}} i$ 诱导了 $\pi_1(\partial B_2)$ 到自身的恒等同态. 但 ∂B_2 同胚于 S^1, 而 $\phi(B_1) \setminus \{0\}$ 同胚于 $B_1 \setminus \{0\}$, 并且后者可缩, 这是一个矛盾. □

习题 7.2.1. 设 $p: E \to B$ 是复迭映射, $b \in B$, 证明纤维 $p^{-1}(b)$ 是离散拓扑空间.

习题 7.2.2. 设 $p: E \to B$ 是复迭映射, B 连通, 证明纤维的势 (基数)$\#p^{-1}(b)$ 与 $b \in B$ 的选取无关.

习题 7.2.3. 设 $p: E \to B$ 是复迭映射, 证明 p 是开映射 (从而是商映射).

Answer 7.2.1. 只需证明 $p^{-1}(b)$ 中的每个单点集都是开集, 即可说明 $p^{-1}(b)$ 是离散拓扑空间. 设 U 是 b 点的基本邻域, $p^{-1}(U) = \sqcup_\alpha V_\alpha$, $\{V_\alpha\}$ 是 E 中彼此不交的开集. 由于 p 限制到每个 V_α 上都是到 U 上的同胚, 所以每个 V_α 与 $p^{-1}(b)$ 都只相交于一个点, 使得该点在映射 p 下的像为 b. 而 $p^{-1}(b)$ $(\subset p^{-1}(U) = \sqcup_\alpha V_\alpha)$ 中每个单点集都是 $p^{-1}(b)$ 与某个 V_α 的交集, 即 $p^{-1}(b)$ 的任意单点集都是 $p^{-1}(b)$ 的开集. □

Answer 7.2.2. 设 U 是一个基本邻域, 则 $\forall\, b \in U$, $\#p^{-1}(b)$ 等于 $p^{-1}(U)$ 的彼此不交的开集的个数. 从而同一基本邻域 U 内的每个点的纤维有相同的势. 取定 $b_0 \in B$, 记 $A = \{b \in B \mid \#p^{-1}(b) = \#p^{-1}(b_0)\}$. $\forall\, a \in A$, 存在 a 的基本邻域 U_a. 由于 $\#p^{-1}(a)$ 是局部常值的, 则 U_a 中任意元素 x, 都有 $\#p^{-1}(x) = \#p^{-1}(a) = \#p^{-1}(b_0)$, 即 $x \in A$, 于是 $a \in U_a \subset A$, a 是 A 的内点. 由 a 的任意性, A 是开集. 同理可说明 $B \setminus A$ 也是开集. 由于 B 连通, 而 A 非空 (至少 $b_0 \in A$), 从而 $A = B$. □

Answer 7.2.3. 设 W 是 E 的开集, $\forall\, b \in p(W)$, 取 $a \in W$, 使得 $b = p(a)$. 下证 b 是 $p(W)$ 的内点. 取 b 的一个基本邻域 U, 设 V 是 $p^{-1}(U)$ 的包含 a 点的开集. $W \cap V$ 是 a 的开邻域. 同胚 $p|_V : V \to U$ 把 E 的开集 $W \cap V$ 映为 U 的一个包含 b 点的开集. 从而 $p(W \cap V)$ 是 b 在 B 中的开邻域, 并且它包含在 $p(W)$ 中. 于是 b 为 $p(W)$ 的内点, $p(W)$ 是开集. 因此 p 是开映射. $\square$