常微分方程讲义

汪更生

第一章 概念及一阶常微分方程

§1.1 概念

方程：含未知量的等式；解方程：通过等式解出未知量。

当未知量是数时，方程称为代数方程；

当未知量是函数时，方程称为函数方程。

当函数方程含有未知函数的导数时，称其为微分方程。

在微分方程中有
- 常微分方程（方程中只含未知函数的导数而不含偏导数）
- 偏微分方程（方程中含未知函数的偏导数）

例：$x'(t) = 3x(t), \quad t \geq 0$ （ODE）

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = x^2 + y^2, \quad (x,y) \in B.$$

· 牛顿定律：$F(t) = m \cdot a(t)$. F 力，m 质量，a 质点的加速度.

用 $x(t)$ 表示质点在 t 时刻的位置，则 $a(t) = x''(t)$

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} F(t).$$

O.D.E 的一般形式

$$F(t, y, y', \cdots, y^{(m)}) = 0, \quad t \in I \tag{1.1}$$

其中 F 为一个已知函数，t 为自变量，$y(\cdot)$ 为未知函数，I 为 y 的定义域.

我们的研究对像：

$$y^{(m)} = f(t, y, \cdots, y^{(m-1)}) \tag{1.2}$$

解的定义　(1.2) 的解是一个定义在实轴 (t-轴) 上的区间 I 上的连续函数 $y = \phi(t)$, $t \in I$，它有直至 m 阶的导数 $\phi', \cdots, \phi^{m}$（它们均在 I 上有定义），并且 $\forall\, t \in I$，$\phi^{(m)}(t) = f(t, \phi(t), \cdots, \phi^{(m-1)}(t))$.

- 令 $a_0(\cdot), a_1(\cdot), \cdots, a_n(\cdot), g(\cdot)$ 为 I 上的已知函数；$y(\cdot)$ 为 I 上的未知函数. 形如：

$$a_0(t)\, y^{(m)}(t) + a_1(t)\, y^{(m-1)}(t) + \cdots + a_n(t)\, y(t) = g(t), \quad t \in I \tag{1.3}$$

的方程称为线性常微分方程 (linear O.D.E.).

在 (1.3) 中，a_i 称为系数，g 视为外力.

- 当未知函数是一个 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $(n>1)$ 的向量值函数时，记其为 $\vec{y}(t) = (y_1(t), \cdots, y_n(t))^T$. ~~令 $\vec{f}(t) = (f_1(t), \cdots, f_n(t))^T$~~ ~~为一已知函数.~~ 下列称为常微分方程组：

$$\vec{y}^{(m)} = \vec{f}(\vec{y}, \cdots, \vec{y}^{(m-1)}), \quad t \in \mathbb{R},$$

~~为~~ 其中 $\vec{f}$ 为一已知函数、

我们通常研究下列 m 元一阶 O.D.E. 组:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = f_1(t, z_1, \cdots, z_m) \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dz_m}{dt} = f_m(t, z_1, \cdots, z_m) \end{cases} \qquad (1.4)$$

· 在(1.2)中

令 $z_1 = y$, $z_2 = \dfrac{dy}{dt}$, $\cdots$, $z_m = \dfrac{d^{(m-1)}y}{dt}$. 则 (2) 转化为:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = z_2 \\ \dfrac{dz_2}{dt} = z_3 \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dz_m}{dt} = f(t, z_1, \cdots, z_m) \end{cases}$$

这说明: (1.2) 可转化为 (1.4). 但 (1.4) 一般不能转化为 (1.2).

· 在 (1.2) 中, m 称为方程的<u>阶</u>.

最简单重要的 O.D.E. 为

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t), \quad t \in (-\infty, \infty), \qquad (1.5)$$

其中 a 为给定实数, $x(\cdot)$ 为未知函数.

"乘子法": 用 e^{-at} 乘以 (1.5) 两边得

$$e^{-at}\frac{dx}{dt} = e^{-at}ax, \quad t \in (-\infty, \infty) \qquad (1.6)$$

$\because e^{-at} \neq 0 \ \forall t$, $\therefore$ (1.5) $\Leftrightarrow$ (1.6) (它们同解)

由(1.6)得 $\frac{d}{dt}\left(e^{-at}x(t)\right)=0 \Rightarrow e^{-at}x(t)=C$ (其中 C 为一个常数) $\Rightarrow x(t)=Ce^{+at},\ t\in\mathbb{R}^1 \triangleq (-\infty,\infty)$.

上面推导说明：若 $x(\cdot)$ 满足(1.6)，则 x 有上述形式。

反之，令 $x(t)=Ce^{at}$. 代入(1.6)得：左＝右.

$\therefore$ (1.6)的全体解为 $\{ce^{at}:\ c\in\mathbb{R}\}$ 解集合；解空间.

称 ce^{at} 为(1.6)的通解.

"分离变量法" 由(1.5)得 $\frac{x'}{x}=a$ (这需要 $x(t)\neq 0\ \forall t$)

$$\Rightarrow (\ln x)'=a \Rightarrow \int^x (\ln x)'dx = \int^t a\,dt \Rightarrow x=ce^{at}$$

实质：令 $z=\int^x \frac{1}{x}dx$ 则 $\frac{dz}{dt}=\frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{1}{x}\cdot ax$

$$=a \Rightarrow z(t)=\int^t a\,dt = at+c \Rightarrow$$

$$\int^x d(\ln x) = at+c \Rightarrow$$

$$\ln x = at+c \Rightarrow x(t)=ce^{at}.$$

(以后会详细这一方法)

现在考虑 O.D.E 组

$$\begin{cases} x_1'(t)=a_1x_1(t) & t\in\mathbb{R} \\ x_2'(t)=a_2x_2(t) \end{cases} \tag{1.7}$$

这是两个独立的方程构成的方程组，解为：

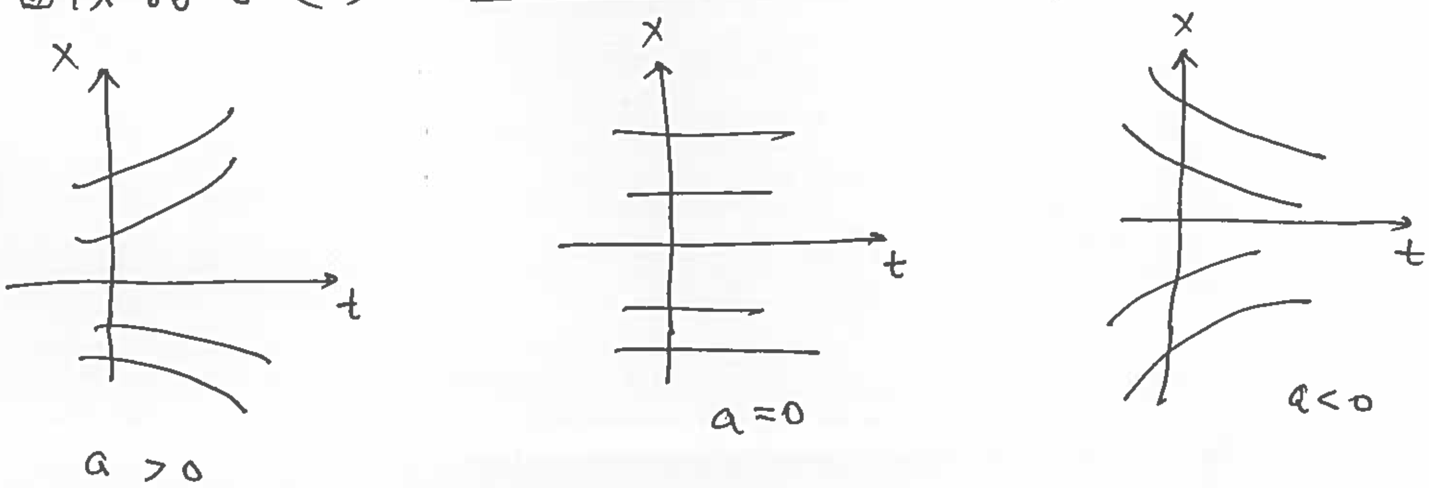
$$(x_1,x_2)^T:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2.$$

用求解(1.5)的方法可以(1.7)的解集合为:

$$\left\{ \left(c_1 \exp(a_1 t),\ c_2 \exp(a_2 t) \right)^T_{t\in\mathbb{R}} :\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

§1.2 向量场与方向场.

从(1.5)出发. 给定 $c\in\mathbb{R}$, 解 $x(t)=ce^{at}$ $(t\in\mathbb{R})$ 给出了 tx-平面中一条曲线 (i.e. x 的图像). 于是, (1.5)的解集合给出了 tx-平面中一族曲线. 这族曲线中的任一条曲线称为(1.5)的积分曲线.



问题(a) 在 tx-平面中, 任给 (t_0, x_0), 是否有一条(1.5)的积分曲线通过该点 ?

问题(b) 在 tx-平面中, 是否有两条不同的积分曲线通过 (t_0, x_0) ?

这两个几何问题等价于下列分析问题:

给定 (t_0, x_0), 下列初值问题

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad x(t_0) = x_0 \qquad (1.8)$$

(a) 是否有解 ? (b) 是否有两个不同的解 ?

(a) 的答案是肯定的. 原因: 形如 $x = ce^{at}$ 的函数均为(1.5)的解。若 $\exists\, C_0$ s.t. $C_0 e^{at_0} = x_0$, 则 $x = C_0 e^{at}$ 为(1.5)之解. 这只需取 $C_0 = e^{-at_0} x_0$ 即可.

在(1.8)中, $x(t_0)=x_0$ 称为定解条件

(b) 的答案是否定的. 原因: 若 (1.5) 还有一个解 $x = C_1 e^{at}$ 满足 $x(t_0)=x_0$, 则 $x_0 = C_1 e^{at_0}$. 故 $C_1 = C_0$.

以上说明 初值问题 (1.8) 存在唯一的解.

- 求解 (1.5) 就是求解其积分曲线.

解是函数 (分析概念) ～ 积分曲线 (几何概念)

解 ～ 解的图像.

从积分曲线出发, 分析近似积分曲线的方法 (定常求解)

如下: (1.5) 的每个解 $x = \phi(t)$ 的图像 $\{(t, \phi(t)) : t \in R\}$ 是一条积分曲线。每一条积分曲线有如下性质: 在其上任一点 $(t_0, \phi(t_0)) \triangleq (t_0, x_0)$, 曲线的切线方程的斜率为: $a\phi(t_0) \triangleq a x_0$ ($\because \phi'(t_0) = a\phi(t_0) = a x_0$)。于是, 该曲线过点 $(t_0, \phi(t_0))$ 的切线方程为 $\dfrac{x - x_0}{t - t_0} = a x_0$.

现在 tx-平面上的每一个点 (t_0, x_0) 作一直线: 它过 (t_0, x_0), 斜率为 $a x_0$, 方程为 $\dfrac{x-x_0}{t-t_0} = a x_0$. 用记号 $L(t_0, x_0)$ 表示该直线。全体这样的直线构成一个集合 $L \triangleq \{L(t_0, x_0) : (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$。称 L 为 (1.5) 的 方向场.

注! $L(t_0, X_0)$ 由点 (t_0, X_0) 和 (1.5) 有唯一决定.

方程 (1.5) 的任一积分曲线具有如下性质：它在其上任一点 (t_0,x_0) 与 $\mathcal{L}$ 中的直线 $L(t_0,x_0)$ 相切。反之，若 tx-平面上的曲线 $x=\phi(t)$ $(t\in\mathbb{R})$ 满足：在其上每一点 (t_0,x_0) 与 $\mathcal{L}$ 中的直线 $L(t_0,x_0)$ 相切，且 $\phi'(t)$ 处处存在，则 $\phi'(t_0)=ax_0=a\phi(t_0)$ $\forall t_0\in\mathbb{R}$. 故 ϕ 为 (1.5) 之解.

注2 以方向场 $\mathcal{L}$ 为依托，我们可以在不解方程的前提下，求出初值问题 (1.8) 在 $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ $(\delta>0)$ 上的近似解. 具体方法如下：第一步：将 $[t_0, t_0+\delta]$ 等分 n 份；第二步：作直线 $L(t_0,x_0)$，在其上取线段 $L^1 \triangleq L^1(t_0,x_0)$，它的起点为 (t_0,x_0)，终点为 $\left(t_0+\frac{\delta}{n},\ x_0+\frac{\delta}{n}ax_0\right)\triangleq(t_1,x_1)$；第三步：作直线 $L(t_1,x_1)$，取其上线段 $L^2\triangleq L^2(t_1,x_1)$，起点为 (t_1,x_1)，终点为 $\left(t_1+\frac{\delta}{n}, x_1+\frac{\delta}{n}ax_1\right)\triangleq(t_2,x_2)$.

依此得线段 $L^1, L^2, \cdots, L^n$，它们构成一折线 $\widetilde{L}_n$.

分析上可以证明：当 $n\to\infty$ 时，在 $C([t_0-\delta, t_0+\delta])$ 的意义下，$\widetilde{L}_n$ 收敛到 (1.5) 过 (t_0,x_0) 的积分曲线在 $t_0+\delta\geq t\geq t_0$ 的部分（一致收敛）.

对 $t\leq t_0$ 部分，可类似处理. 这就是 Euler 折线法.

注3 对一般方程

$$x'(t)=f(t,x(t)),\quad t\in\mathbb{R}\ (\text{或 } t\in I), \tag{1.9}$$

其中 $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为一已知连续函数，我们有类似的定义.

• (1.9) 的解的图像称为其积分曲线。(1.9) 的方向场(或由 f 决定的方向场)为:

$\mathcal{L} \triangleq \{L(t_0,x_0) : (t_0,x_0)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\}$. 其中, $L(t_0,x_0)$ 为过 (t_0,x_0) 以 $f(t_0,x_0)$ 为斜率的直线: $\dfrac{x-x_0}{t-t_0} = f(t_0,x_0)$.

当 f 的定义域为 $D(f)=G$ (G 为 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 中一区域) 时, 可以同样定义其~~方~~方向场为 $\mathcal{L} \triangleq \{L(t_0,x_0) : (t_0,x_0)\in G\}$. 这时, 积分曲线必在 G 中.

问题(a) 对于任一 $(t_0,x_0)\in G$, (1.9) 是否有一条积分曲线过该点? (初值问题的存在性)

问题(b) 能否有两条不同的积分曲线通过同一点? (初值问题解的唯一性)

对于一般 f, 上述问题答案不确定。为保证解的 $\exists!$ 性, f 必须满足一定条件.

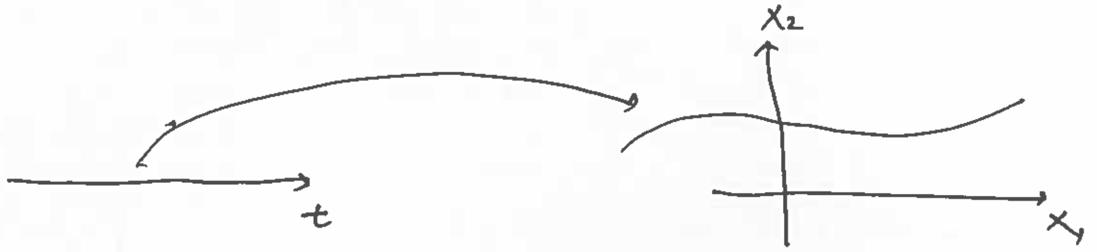
现在考虑方程组 (1.7): $\begin{cases} x_1' = a_1 x_1 \\ x_2' = a_2 x_2 \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

我们也可以在 tx_1x_2-空间中研究~~方向场~~方向场. 但我们现在换一个角度, 不看解的图像, 而看其像: $\{(c_1e^{a_1t}, c_2e^{a_2t}) : t\in\mathbb{R}\}$. 这是另一个几何参照.

令 $A=\begin{pmatrix}a_1&0\\0&a_2\end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$. (1.7) 可写成

$$\frac{dx}{dt}=Ax. \qquad (1.8)$$

设 $t\to\Phi(t)$ $(t\in\mathbb{R})$ 为 (1.8) 的一个解，它也是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条曲线



(x_1x_2-空间 (i.e. $x(t)$ 所在的空间) 称为相空间.)

而 $\{\Phi(t):t\in\mathbb{R}\}$ 为解 $\Phi(t)$ $(t\in\mathbb{R})$ 的像.

记 $\Phi(t)=(\phi_1(t),\phi_2(t))^T$. 则 $\left.\dfrac{d\Phi(t)}{dt}\right|_{t=t_0}=(\phi_1'(t_0),\phi_2'(t_0))^T$

为上述曲线在 t_0 时刻的切向量.

总之 $\boxed{t\to}\Phi(t)$ $(t\in\mathbb{R})$ 为 (1.8) 的解 $\Leftrightarrow$ 曲线 $t\to\Phi(t)$ 在任一时刻 t_0 的切向量为 $A\begin{pmatrix}\phi_1(t_0)\\\phi_2(t_0)\end{pmatrix}$. (1.9)

注 向量 $A\begin{pmatrix}\phi_1(t_0)\\\phi_2(t_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\phi_1(t_0)\\a_2\phi_2(t_0)\end{pmatrix}$.

一般地，称其为起点为原点，终点为 $(a_1\phi_1(t_0),a_2\phi_2(t_0))^T$，方向由原点指向末端点，的向量.

在 (1.9) 的右端，我们指：$A\begin{pmatrix}\phi_1(t_0)\\\phi_2(t_0)\end{pmatrix}$ 是这样的向量：将其原点平移至 $(\phi_1(t_0),\phi_2(t_0))^T$.

定义 方程(1.8)的一条轨曲线是由某一个轨 $x=\Phi(t)$ 定义的曲线 $t\to\Phi(t)$，它是这个轨的像.

定义 由(1.8)右端运算 (i.e. $x\to Ax$) 定义的场：

$$V_A \triangleq \{\, x+\overrightarrow{Ax} : x\in\mathbb{R}^2 \,\}$$

称为(1.8)的向量场.

$x+\overrightarrow{Ax}$ 表示向量 $\overrightarrow{Ax}$（从原点出发）平移到从 x 点出发的向量.

在没有混淆的情形，记 $V_A=\{Ax : x\in\mathbb{R}^2\}$.

- $t\to\Phi(t)$ 为一轨曲线 $\Longleftrightarrow$ 该曲线上任一点 $\Phi(t_0)$ 的切向量与 V_A 中对应 $x=\Phi(t_0)$ 的向量相同.

问题(a) 在相空间 $\mathbb{R}^2$ 中给一点 (x_1^0, x_2^0)，是否 $\exists$ (1.8)的一条轨曲线通过该点？

问题(b) (1.8)是否有两个不同轨对应的轨曲线通过 $\mathbb{R}^2$ 中一点？

第一个问题的答案：肯定. 原因：$\forall\, t_0\in\mathbb{R}$，记

$$\Phi(t)=\left(x_1^0\exp(-a_1t_0)\exp(a_1t),\ x_2^0\exp(-a_2t_0)\exp(a_2t)\right),\quad t\in\mathbb{R}.$$

则直接验证 $\Rightarrow$ $\Phi(t)\ (t\in\mathbb{R})$ 为(1.8)的一个轨且 $\Phi(t_0)=(x_1^0,x_2^0)^T$.

所以，曲线 $t\to\Phi(t)$ 是(1.8)过 $(x_1^0,x_2^0)^T$ 的轨曲线.

第二个问题答案也是肯定的。原因：不同的运动可以有相同的像.

也可以这样看(1.8)：将 t 视为时间，将积曲线 $t \to x(t)$ 视为相空间 $\mathbb{R}^2$ 内某一质点的运动．设想：当 $t=0$ 时，质点位于 $\mathbb{R}^2$ 的一个点 $u=(u_1,u_2)^T$ 处，随时间推移，质点沿着满足初始条件 $x(0)=u$ 的积曲线运动，在 $t>0$ 时刻，质点的位置为 $x(t)$。 用 $G_t(u)$ 表示：

$$G_t(u) = (u_1 \exp(a_1 t),\ u_2 \exp(a_2 t))$$

对固定的 t，$u \to G_t(u)$ 是一个 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的变换．

想像：位于相空间中的每一点处的质点全部如尘埃被一阵清风吹动似地同时运动起来．

G_t（t 固定）：$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 满足

$$\forall\ u, v \in \mathbb{R}^2,\ \lambda \in \mathbb{R}.\quad G_t(\lambda u + v) = \lambda G_t(u) + G_t(v).$$

即 G_t 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个线性变换．

映射族 $\{G_t : t \in \mathbb{R}\}$ 称为线性变换的单参数族，亦称为方程(1.8)决定的流．

向量场的概念可以推广到一般形式：设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个开区域，f 是 U 上的实函数．由 f 决定的向量场为：

$$V_f \triangleq \{\overrightarrow{f(x)} + x : x \in U\}. \quad (\text{亦可记为 } \{f(x) : x \in U\})$$

由该向量场确定的方程为：$\dot{x} = f(x)$，$x \in U$.

它的一个解是从时间轴到 U（相空间）的可微映射 $\varphi: \mathbb{R} \to U$ s.t.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \varphi(t) = f(\varphi(t_0)), \qquad \forall\, t_0 \in I.$$

对应于解 φ，$t \to \varphi(t)$ 称为解曲线（它的另一个名称是相曲线.）

任给 $t_0 \in \mathbb{R}$，$x_0 \in U$. 考虑初值问题：

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \qquad (1.10)$$

方程 (1.10) 的过 x_0（在 t_0 时刻）的相曲线可以用下列方法逼近。在 U 中作无穷折线段：以 x_0 为中心，$f(x_0)$ 为方向作闭直线段 $L_1 \subset U$。令 x_1 为 L_1 的终点，以 x_1 为起点 $f(x_1)$ 为方向作闭直线段 $L_2 \subset U$，以此类推，得 U 中的直线段 $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$，它们构成 U 中的一无穷折线段. 它就是 (1.10) 对应的相曲线的一个逼近.（这样做的可行条件：$\forall x \in U$，$f(x) \neq 0$！）

- 设 $x_0 \in U$ s.t. $f(x_0) = 0$. 那么过 x_0 的解（相）曲线是什么？

这时，$\varphi(t) \equiv x_0$ $(t \in \mathbb{R})$ 是 (1.10) 的解，对应的解曲线为：$t \longrightarrow \{x_0\}$

这种解称为平衡解. x_0 称为向量场的奇点.

考虑 $\dot{x} = f(t, x)$ (1.11)

其中 $f: \mathbb{R}\times U \to \mathbb{R}^n$ 已知.

愿望：求解(1.11)（将其所有解求出来）.

不幸，一般地，它没有显式解.

• 刘维尔证明了许多 O.D.E. 不能显式求解. 例如：

$$\dot{x} = x^2 - t$$

不能显式求解.（它的解不能表示为初等函数与这些函数积分的有限组合.

任务 (1) 对于能求解的(1.11)，尽可能掌握其求解方法.

(2) 对一般 f，证明解的存在性（或不存在性）

§1.3 一阶 O.D.E

令 $U\subset\mathbb{R}$, $I\subset\mathbb{R}$ 均为开区间. 令 $f: I\times U \to \mathbb{R}$ 为已知函数.

考虑
$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t\in I \tag{1.12}$$

• (1.12)解的定义: 称函数 $y=\phi(t)$ $(t\in I)$ 为(1.12)的一个解, 若

(i) $y=\phi(t)$ 是 I 上的可微函数; $\phi(t)\in U$ $\forall\ t\in I$.

(ii) $\phi'(t)=f(t,\phi(t))$ $\forall\ t\in I$.

一般地, 称上述函数为<u>整体解</u>, 与之对应的是局部解: $y=\phi(t)$, $t\in I_1$ ($I_1\subset I$ 为一开子区间) 满足 $(i)'\sim(i)$ where I is replaced by I_1; $(ii)'\sim(ii)$ where I is replaced by I_1.

• 一般地, (1.12)没有显式解. 当 f 为线性函数时, 它<u>有显式解</u>; 当 f 为某些特殊非线性函数时, 它有显式解.

§1.3.1 线性一阶方程

令 $f(t,y) = -p(t)y + g(t)$. 其中 p 与 g 为 t 的已知函数.

相应的方程为
$$y'+py=g, \quad t\in I \tag{1.13}$$

称之为一阶线性 O.D.E. 当 p 和 g 为 I 上连续函数时, 则 (1.13) 可求解. 用乘子法.

目的: 寻找 $u(t)$ (恒不为0), 将 u 同乘(1.13)两边:

$$\mu y' + \mu p y = \mu g.$$

希望： $\mu y' + \mu p y = \frac{d}{dt}(\mu y) \left(\triangleq \mu' y + \mu y'\right)$

上式成立 $\Leftrightarrow$ $\mu' = p\mu \underset{(\because \mu \neq 0)}{\Longleftrightarrow} \frac{\mu'}{\mu} = p, \quad t \in I$

<u>假设1</u> $\mu(t) > 0 \quad \forall t \in I$.

于是， $\ln \mu(t) = \int_{t_0}^{t} p(s)ds + \alpha.$

（注：t_0 可取 I 中任一点，α 是任一常数）

取 $\alpha = 0 \Rightarrow \quad \mu(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} p(s)ds\right), \quad t \in I.$

· 注 这样的 μ 的确满足 $\mu(t) > 0 \ \forall \ t \in I$，i.e. 假设1.

将用 $\mu(t) \triangleq \exp\left(\int_{t_0}^{t} p(s)ds\right)$ 乘以 (1.13) 两边 $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y(t)] = \mu(t)g(t), \quad t \in I.$$

于是，
$$y(t) = \frac{\int_{\tilde{t}_0}^{t} \mu(\xi)g(\xi)d\xi + C}{\mu(t)}$$

$$= \exp\left[-\int_{t_0}^{t} p(\eta)d\eta\right]\left[\int_{\tilde{t}_0}^{t} g(\eta)\exp\left(\int_{t_0}^{\eta} p(\xi)d\xi\right)d\eta + C\right], \quad (1.14)$$

其中 $t_0, \tilde{t}_0 \in I$（任取），$C \in \mathbb{R}$（任意）.

· 以上推导说明：若 y 是 (1.13) 的解，则 y 必形如 (1.14).

反之，若 y 由 (1.14) 给出，则可直接验证它是 (1.13) 的解.

令 $\mathcal{A}(t_0, \tilde{t}_0) \triangleq \left\{\exp\left(-\int_{t_0}^{\cdot} p(\eta)d\eta\right)\left(\int_{\tilde{t}_0}^{\cdot} g(\eta)\exp\left(\int_{t_0}^{\eta} g(\xi)d\xi\right)d\eta\right.\right.$

$\left.\left. + C \;\right|\; C \in \mathbb{R}\right\}, \qquad t_0, \tilde{t}_0 \in I$

$$\mathcal{A}(t_0)=\left\{\exp\left(-\int_{t_0}^{t}p(\eta)d\eta\right)\left(\int_{t_0}^{t}g(\eta)\exp\left(\int_{t_0}^{\eta}g(\xi)d\xi\right)d\eta+C\right)\right|$$

$$C\in\mathbb{R}\Big\},\quad t_0\in I.$$

可直接验证：

(1) $\forall\, t_0,\widetilde{t_0},\ s_0,\widetilde{s_0}\in I,\quad \mathcal{A}(t_0,\widetilde{t_0})=\mathcal{A}(s_0,\widetilde{s_0})$；

(2) $\forall\, t_0,\widetilde{t_0}\in I,\quad \mathcal{A}(t_0,\widetilde{t_0})=\mathcal{A}(t_0)$；

(3) $\forall\, t_0,\widetilde{t_0}\in I,\quad \mathcal{A}(t_0)=\mathcal{A}(\widetilde{t_0})$.

<u>定理 1.1</u> 设 p,g 为 I 上的连续函数. 则 (1.13) 的全体解集合为 $\mathcal{A}(t_0)$. 其中 $t_0\in I$ 任意给定.

<u>注</u> 上述定理说明：(1.13) 的解有一个自由度 (i.e. C 任意)
为了求出其中一个解，我们需要定解条件 $x(t_0)=x_0$ ～ 初始条件
t_0 ～ 初始时刻，x_0 ～ 初值.

<u>例</u> 设 p,g 为 I 上连续函数. 令 $t_0\in I$, $x_0\in\mathbb{R}$. 求解下列初值问题：

$$\begin{cases} y'+py=g, & t\in I\\ y(t_0)=x_0 \end{cases}$$

其中 $y(t_0)=x_0$ 可称为初始条件，t_0 ～ 初始时间，x_0 ～ 初值. 它是定解条件.

<u>解</u> 由定理 1.1，$y(t)=\exp\left(-\int_{t_0}^{t}p(\xi)d\xi\right)\left(\int_{t_0}^{t}g(\eta)\exp\left(\int_{t_0}^{\eta}g(\xi)d\xi\right)d\eta+C\right),\quad t\in I.$

$\because\ y(t_0)=x_0 \quad \therefore\ x_0=C$

故其解为 $y(t)=\exp\left(-\int_{t_0}^{t}p(\xi)d\xi\right)\left(\int_{t_0}^{t}g(\eta)\exp\left(\int_{t_0}^{\eta}g(\xi)d\xi\right)+x_0\right)$ ※

注. 上面的初始条件 $y(t_0)=x_0$ 将自由度 C 固定住了.

注2 上述公式适合一阶线性 O.D.E，其首项系数为1.

§1.3.2 Gronwall 不等式

定理 A1 设 $\alpha\in\mathbb{R}$，$\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ 与 $\beta(\cdot)$ 为 $[0,T]$ 上的连续函数 ($T>0$ 给定)。假设 $\psi(\cdot)$ 为 $[0,T]$ 上非负 且满足

$$\varphi(t)\le \alpha+\int_0^t[\psi(s)\varphi(s)+\beta(s)]ds \quad \forall\, t\in[0,T]. \tag{1.15}$$

则

$$\varphi(t)\le \alpha\exp\left(\int_0^t\psi(s)ds\right)+\int_0^t\exp\left(\int_s^t\psi(r)dr\right)\beta(s)ds \quad \forall\, t\in[0,T] \tag{1.16}$$

注. 在上面定理中，ψ, β 视为已知函数，α, T 视为已知数。而 φ 视为未知函数。则这个定理是解不等式 (1.15).

证明 令 $\theta(t)=\alpha+\int_0^t[\psi(s)\varphi(s)+\beta(s)]ds$, $t\in[0,T]$. (1.17)

由 (1.15) $\Rightarrow$ $\theta(t)\ge\varphi(t)$, $t\in[0,T]$ (1.18)

由 (1.17) $\Rightarrow$ $\theta'(t)=\psi(t)\varphi(t)+\beta(t)$, $t\in[0,T]$. (1.19)

$\because$ $\psi(t)\ge 0$ $\forall\, t\in[0,T]$,

$\therefore$ 由 (1.18) 和 (1.19) $\Rightarrow$

$$\theta'(t)\le\psi(t)\theta(t)+\beta(t), \quad t\in[0,T].$$

用 $\exp\left(-\int_0^t\psi(r)dr\right)$ 同乘上式两边 $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\left\{\exp\left(-\int_0^t\psi(r)dr\right)\theta(t)\right\}\le\exp\left(-\int_0^t\psi(r)dr\right)\beta(t), \quad t\in[0,T].$$

将上式从 0 到 t ($\in[0,T]$) 积分 $\Rightarrow$

$$\exp\left(-\int_0^t \psi(r)dr\right)\theta(t) - \theta(0) \le \int_0^t \exp\left(-\int_0^s \psi(r)dr\right)\beta(s)ds, \quad t\in[0,T]. \quad (1.20)$$

由(1.17)有 $\theta(0)=\alpha$. 再由(1.20) $\Rightarrow$

$$\exp\left(-\int_0^t \psi(r)dr\right)\theta(t) \le \alpha + \int_0^t \exp\left(-\int_0^s \psi(r)dr\right)\beta(s)ds$$

于是,

$$\theta(t) \le \left[\alpha + \int_0^t \exp\left(-\int_0^s \psi(r)dr\right)\beta(s)ds\right]\exp\left(\int_0^t \psi(r)dr\right)$$

上式并与(1.18) ~~和(1.17)~~ $\Rightarrow$

$$\varphi(t) \le \theta(t) \le \alpha\exp\left(\int_0^t \psi(r)dr\right) + \int_0^t \exp\left(\int_s^t \psi(r)dr\right)\beta(s)ds.$$

证毕. #.

注1 "$\varphi(t) \le \alpha + \int_0^t \varphi(s)ds, \quad t\le 0$"

推不出 Gronwall 不等式 !

正确的形式:

设 $\varphi(t) \le \alpha + \int_t^{\bar{t}} \varphi(s)ds, \quad \forall\, t\le \bar{t}$

则 $\varphi(t) \le e^{(\bar{t}-t)}\alpha \quad \forall\, t\le\bar{t}.$

注2 上述定理常用形式:

$$\varphi(t) \le \alpha + \int_0^t \varphi(s)ds, \quad t\in[0,T]$$

$\Longrightarrow$

$$\varphi(t) \le \alpha e^t, \quad t\in[0,T].$$

§1.3.3 一阶线性方程的解集合

令 p、g 为 I 上的连续函数. 考虑

$$y'(t)+p(t)y(t)=0,\quad t\in I;\tag{1.21}$$

$$y'(t)+p(t)y(t)=g(t),\quad t\in I.\tag{1.22}$$

- (1.21) 称为齐次方程（其中外力项为 0）；

  (1.22) 称为非齐次方程.

- (1.21) 的解集合为

$$Y \triangleq \left\{ c\exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)ds\right),\ t\in I \;\middle|\; c\in\mathbb{R}\right\},\quad t_0\in I \text{ 任意固定.}$$

Y 中的元素为定义在 I 上连续可导函数. 用 $C^1(I)$ 表示定义在 I 上的全体连续可导函数构成的集合. 在 $C^1(I)$ 上引入加法"+"和数乘"·"（其域为 $\mathbb{R}$）：

$$(x_1+x_2)(t)=x_1(t)+x_2(t),\ t\in I \qquad \forall\ x_1,x_2\in C^1(I)$$

$$(\alpha x_1)(t)=\alpha x_1(t),\quad t\in I. \qquad \forall\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

则 $C^1(I)$ 构成一个线性空间。一个线性空间定义为其中最大线性无关组中的元素的个数. 当这个数为 $+\infty$ 时，称之为无穷维线性空间.

命题1 $C^1(I)$ 是一个无穷维线性空间.

注1 $x_1, x_2\in C^1(I)$ 称为线性相关，若 $\exists\ c_1, c_2\in\mathbb{R}$ s.t.

$$c_1x_1+c_2x_2=0 \quad (\text{其中 } 0 \text{ 为 } C^1(I) \text{ 中的零元素})$$

上式 $\Leftrightarrow$ $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)=0\quad \forall\ t\in I.$

注2 若 $x_1, x_2 \in C^1(I)$ 线性无关，则

"$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = 0 \ \forall t \in I$" $\Rightarrow$ "$c_1 = c_2 = 0$".

※ 命题1之证明 令 $P(I)$ 为定义在 I 上全体实系数多项式的集合，则 $P(I) \subset C^1(I)$. 不妨设 $I = [0,1]$. 令 $x_i(t) = t^i$, $i = 0, 1, 2, \cdots$. 则 $\forall N$, $x_1, \cdots, x_N$ 线性无关. 故 $P(I)$ 的最大线性无关组包含 $\{x_i \mid i = 0, 1, 2, \cdots\}$. 故 $P(I)$, 进而 $C^1(I)$, 为无穷维线性空间. ※.

• 回到 V. 直接验证：V 是 $C^1(I)$ 的一个一维子空间，基底可取为 $\left\{ \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)ds\right), \ t \in I \right\}$.

命题2 方程 (1.21) 的解具有如下性质：若它在某 t_0 取零值，则它恒为 0.

接下来看 (1.22)： $y' + py = g$.

定理 1.2 设 $x(\cdot)$ 为 (1.21) 的一个非平凡解（~~...~~ 它的平凡解为 $x(t) \equiv 0$）且 $y(\cdot)$ 为 (1.22) 的一个解. 则 $\{ z = cx + y \mid c \in \mathbb{R} \}$ 为 (1.22) 的全体解集合.

注 上面定理告诉我们：(i) 为求 (1.22) 的全体解，我们仅需求出 (1.21) 的一个非平凡解与 (1.22) 的一个特解；(ii) (1.22) 的解集合为：

$Z = V + \{y\}$ 其中 y 为 (1.22) 的一个特解. 一般地 $y \notin V$ ($\because g \neq 0$)

Z 是 $C^1(I)$ 的一个子集，它不是线性空间，而是 Y 在 y 方向的平移。它是一个仿射子空间。

<u>定理1.2之证明</u> 首先证明：$\forall\, c\in\mathbb{R}$，$z(t)\triangleq cx(t)+y(t)\ (t\in I)$ 为(1.22)的解。事实上，$\dot{z}=c\dot{x}+\dot{y}=-cpx-py+g$

$=-p(cx+y)+g=-pz+g.$

接下来，证明：$Z\triangleq\{z\triangleq cx+y:\ c\in\mathbb{R}\}$ 是(1.22)的解集合。令 $\tilde{x}$ 为(1.22)的一个解。我们只要证 $\tilde{x}\in Z$，i.e. $\exists\,\tilde{c}\in\mathbb{R}$

s.t. $\tilde{x}(t)=\tilde{c}\,x(t)+y(t)\quad\forall\, t\in I.$ 为此，令

$$\tilde{z}(t;c)\triangleq\tilde{x}(t)-cx(t)-y(t),\ t\in I,\quad c\in\mathbb{R}.$$

若能选取 $\tilde{c}$ s.t. $\tilde{z}(t;\tilde{c})=0\quad\forall\, t\in I$，则完成了证明。

注意
$$\frac{d\tilde{z}(t;c)}{dt}=\frac{d\tilde{x}(t)}{dt}-c\frac{dx(t)}{dt}-\frac{dy(t)}{dt}$$
$$=-p(\tilde{x}-cx-y)=-p\,\tilde{z}(t;c)$$

$\therefore\ \tilde{z}(\cdot\,;c)$ 是(2.21)之解。

由命题2，若能证 $\exists\, t_0\in I$ s.t. $\tilde{z}(t_0;c)=0$ 则 $\tilde{z}(t;c)\equiv0$

<u>然</u>而，$\tilde{z}(t_0;c)=\tilde{x}(t_0)-cx(t_0)-y(t_0).$

$\because\ x$ 是(2.21)之非平凡解，

$\therefore\ x(t_0)\neq0\quad\forall\, t_0\in I.$

固定 $t_0\in I$。取 $\tilde{c}=\dfrac{\tilde{x}(t_0)-y(t_0)}{x(t_0)}$

则 $\tilde{c}$ 是所需的。证毕。 #.

§1.3.4 某些非线性一阶方程的求解.

在此节中，用 x 表示自变量，用 y 表示未知函数. 令

$$G \triangleq I \times J = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta) \subset \mathbb{R}^2.$$

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in G.$$

上述方程解求解，只能在以下情形：它能转化为

$$\frac{d}{dx}\left(\hat{F}(x, y)\right) = F(x) \quad 或 \quad \frac{d}{dy}\left(\hat{F}(x, y)\right) = F(y)$$

其中 $\hat{F}$，F 为已知函数.

• 目的：对某些特殊的 f 求解方程.

• 恰当方程

令 $M(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 为定义在 G 上的连续函数. 考虑下列一次线性形式方程：

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \quad (x,y) \in G. \tag{1.23}$$

它是一个一次微分方程：当 $N \neq 0$ 时，$\frac{dy}{dx} = \frac{-M}{N}$.

当 $M \neq 0$ 时，$\frac{dx}{dy} = \frac{-N}{M}$. (利用反函数)

假设 $(x_0, y_0) \in G$ s.t. $M(x_0, y_0)$ 与 $N(x_0, y_0)$ 不同时为 0.

当 $N(x_0, y_0) \neq 0$ 时，(1.23) (局部) 等价于

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \tag{1.24}$$

注. (1.24) 右端方向场在 (x_0, y_0) 的一个邻域 $O(x_0, y_0)$ 中有定义,

故可在 $O(x_0, y_0)$ 中讨论 (1.24).

当 $M(x_0, y_0) \neq 0$ 时, (1.23) 等价于 (局部)

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)} \quad \text{(视 } x \text{ 为 } y \text{ 的函数, } y \text{ 视为 } x \text{ 的反函数)} \tag{1.25}$$

定义 若存在 G 上的一个可微函数 ψ s.t.

$$d\psi(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \quad ((x,y)\in G \text{ or } (x,y)\in O(x_0,y_0) \subset G) \tag{1.26}$$

则称 (1.23) 为恰当方程. (exact differential equation)

设 (1.23) 为恰当方程, 则 $\exists\ \psi$ s.t. (1.26) 成立. 于是

$$\psi(x,y) = C, \quad (x,y)\in G, \text{ or } (x,y)\in O(x_0, y_0). \tag{1.27}$$

($C \in \mathbb{R}$ 任意). 上式给出了 (1.23) 一个隐式通解.

· 理由 设 $N(x_0, y_0) \neq 0$. 令 $C\in\mathbb{R}$, $F(x,y;C) \triangleq \psi(x,y) - C$,

$(x,y)\in G$. 由 (1.27), $F(x,y;C) = 0$ (在 G or $O(x_0,y_0)$)

$$\because \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\partial \psi}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = N(x_0,y_0) \neq 0$$

$\therefore$ 由隐函数定理, $\exists\ x_0$ 的一个邻域 $O(x_0)$ 和一个定义

在 $O(x_0)$ 上的函数 $y = u(x)$ s.t. $y_0 = u(x_0)$; $(x, u(x)) \in G$

(or $O(x_0,y_0)$) $\forall\ x\in O(x_0)$; $y' = u' = -\dfrac{F_x}{F_y} = -\dfrac{M}{N}$, $x\in O(x_0)$.

于是, $$\frac{du(x)}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,u(x))} \quad \forall\ x \in O(x_0).$$

所以 $y=u(x)$, $x\in O(x_0)$ 是 (1.23) 的一个解. 又 ∵ F 依赖于 C

∴ $u(x)\equiv u(x;C)$.

另一方面, 若 $y=u(x)$, $x\in O(x_0)\subset(\alpha,\beta)$ 是 (1.24) 的一个解. 则

$$M(x,u(x))+N(x,u(x))\frac{du}{dx}=0,\quad x\in O(x_0).$$

由 (1.26), $\dfrac{d\psi(x,u(x))}{dx}=M(x,u(x))+N(x,u(x))\dfrac{du}{dx}=0$, $x\in O(x_0)$.

将上式从 x_0 到 $x\in O(x_0)$ 积分得

$$\int_{x_0}^{x}\frac{d\psi(\xi,u(\xi))}{d\xi}d\xi=0\implies\psi(x,u(x))=\psi(x_0,u(x_0))$$

故 (1.24) 的任何解 $u(x)$ 满足 $\psi(x,u(x))=C\ (=\psi(x_0,u(x_0)))$.

现在的问题 什么条件保证 (1.23) 是恰当方程, 如何求 ψ ?

定理 1.3 设函数 M、N、M_y, N_x 在 G 上连续. 则 (1.23) 为恰当方程当且仅当

$$M_y(x,y)=N_x(x,y)\qquad\forall(x,y)\in G.\tag{1.28}$$

此外, 若 (1.28) 成立, 则对任一 $(x_0,y_0)\in G$,

$$\int_{x_0}^{x}M(s,y_0)ds+\int_{y_0}^{y}N(x,t)dt=C,\quad(x,y)\in G.\tag{1.29}$$

证明 若有函数 ψ s.t. $d\psi=Mdx+Ndy$ (i.e. (1.23) 为恰当方程), 则 $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=M$, $\dfrac{\partial\psi}{\partial y}=N$. 于是, $M_y=\psi_{xy}$, $N_x=\psi_{yx}$. 由于 M_y 和 N_x 为连续函数, ψ_{xy} 和 ψ_{yx} 也连续. 故 $\psi_{xy}=\psi_{yx}\Rightarrow$ (1.28)

反之，设 M 与 N 满足(1.28)。我们要证：(1.23)是恰当方程且构造 ψ。所期待的 ψ 由下列方程给出：

$$\psi_x(x,y)=M(x,y),\quad \psi_y(x,y)=N(x,y),\quad (x,y)\in G. \tag{1.30}$$

由 $(1.30)_1$ $\Rightarrow$：对固定的 y，

$$\psi(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(s,y)\,ds+h(y),\quad x,\ x_0\in(\alpha,\beta). \tag{1.31}$$

上式中的 h 是一个关于 y 的任意函数。

我们要证：h 可如此选取 s.t. $\psi_y=N$ 其中 ψ 由(1.31)给出。

事实上，由(1.31) $\Rightarrow$

$$\psi_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(s,y)\,ds+h'(y)$$

$$=\int_{x_0}^{x} M_y(s,y)\,ds+h'(y)$$

（$\frac{\partial}{\partial y}$ 与 $\int$ 交换是因为 $M_y(s,y)$ 在 $s\in[x_0,x]$ 上一致连续）.

令 $\psi_y=N$，由上式 $\Rightarrow$

$$h'(y)=N(x,y)-\int_{x_0}^{x} M_y(s,y)\,ds \tag{1.32}$$

（∵ 由(1.28)有 $\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y)-\int_{x_0}^{x} M_s(s,y)\,ds\right)$

$$=N_x-M_y=0.$$

∴ (1.32)右边与 x 无关.）

将(1.32)从 y_0 到 y 积分得

$$h(y)=\int_{y_0}^{y} N(x,t)\,dt-\int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} M_y(s,t)\,ds\,dt.$$

上式与(1.31)得

$$\psi(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(s,y)\,ds+\int_{y_0}^{y}N(x,t)\,dt-\int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x}M_y(s,t)\,ds\,dt.$$

然而，由(1.28)，

$$-\int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x}M_y(s,t)\,ds\,dt=-\int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x}N_x(s,t)\,ds\,dt$$

$$=-\int_{y_0}^{y}N(x,t)\,dt+\int_{y_0}^{y}N(x_0,t)\,dt.$$

于是，$\psi(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(s,y)\,ds+\int_{y_0}^{y}N(x_0,t)\,dt.$

类似地，ψ 能取作

$$\psi(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(s,y_0)\,ds+\int_{y_0}^{y}N(x,t)\,dt.$$

证毕. ※

<u>例</u> 求解 $(y\cos x+2xe^{y})dx+(\sin x+x^{2}e^{y}-1)dy=0.$

解：$\because M_y=\cos x+2xe^{y}=N_x(x,y).$

$\therefore$ 方程为恰当方程. 故 $\exists\ \psi$ s.t.

$$\psi_x(x,y)=y\cos x+2xe^{y},\quad \psi_y(x,y)=\sin x+x^{2}e^{y}-1.$$

对上面第一个等式积分得

$$\psi(x,y)=y\sin x+x^{2}e^{y}+h(y).$$

令 $\psi_y=N$. 则 $\psi_y(x,y)=\sin x+x^{2}e^{y}-1$

$$\| \qquad\qquad$$

$$N=\sin x+x^{2}e^{y}-1$$

注1. L 是 u 的全微分 $\Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $(x,y)\in \tilde{R}$.

反之不对.(有反例)

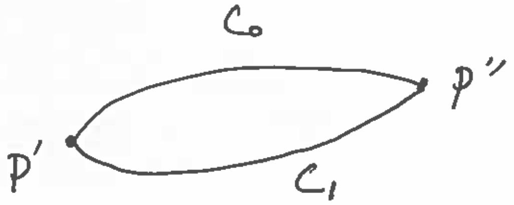
注2. 单连通是一个拓扑性质. 从分析角度可如此描述:

令 C_0, C_1 为 $\tilde{R}$ 内任意两条弧, 它们有共同的起点和终点. 设它们的参数表述式为: $(\varphi_0(t), \psi_0(t))$ 与 $(\varphi_1(t), \psi_1(t))$, 且

$$(\varphi_0(0), \psi_0(0)) = (\cancel{\varphi}\,\varphi_1(0), \psi_1(0)) = P'$$

$$(\varphi_0(1), \psi_0(1)) = (\varphi(1), \psi_1(1)) = P''$$

如果可以将 C_0 "连续地变形"到 C_1



则称 $\tilde{R}$ 为单连通区域.

"C_0 "连续地变形"到 C_1" $\Longleftrightarrow$ $\exists$ 连续函数族 $\{(\varphi(t;\lambda), \psi(t;\lambda)):$

$0\le t\le 1,\ 0\le \lambda\le 1\}$

s.t. $\varphi(t;0) = \varphi_0(t)$, $\psi(t;0) = \psi_0(t)$

$$(\varphi(0;\lambda), \psi(0,\lambda)) = P'$$

$$(\varphi(1;\lambda), \psi(1;\lambda)) = P'' \qquad \forall \lambda\in[0,1].$$

$$(\varphi(t;\lambda), \psi(t;\lambda)) \in \tilde{R}.$$

注意: 当 $\tilde{R}$ 凸时, $\tilde{R}$ 是单连通.

解之，$h'(y) = -1 \Rightarrow h(y) = -y$.

$\therefore \quad \psi(x,y) = y\sin x + x^2e^y - y$.

$\therefore$ 方程的（隐式）解为

$$y\sin x + x^2e^y - y = c \quad .$$ ※.

<u>注</u> 解一个微分方程实质上是将未知函数的微分从其式中去掉.

• 一般的一阶（一次）微分形式

令 $\tilde{R}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中一个区域. 令 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 为定义在 $\tilde{R}$ 上的函数. 令

$$L = P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \quad (x,y) \in \tilde{R}. \tag{1.33}$$

称 L 为一个一次微分形式.

称 L 是 $\tilde{R}$ 上一个函数的全微分，若 $\exists$ 函数 $f(x,y)$, $(x,y) \in \tilde{R}$ s.t.

$$P = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (x,y) \in \tilde{R}.$$

<u>L 的全微分性与 O.D.E 关系</u>

$L = 0$ 给出一 O.D.E.

若 L 是一个函数的全微分，则上述 O.D.E 是恰当方程.

<u>定理 A2</u> 设 $\tilde{R}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中一个单连通区域. 假设 P、Q 在 $\tilde{R}$ 上有连续的一阶偏导且满足 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $(x,y) \in \tilde{R}$. 则 L 是一个定义在 $\tilde{R}$ 上的函数 u 的全微分.

L 的全微分与线积分

定理 A3　线积分 $\int L$ 在 $\tilde{R}$ 内任一条有向弧 Γ^* 上的值仅依赖 Γ^* 的起点和终点 当且仅当 L 是 $\tilde{R}$ 上一个函数的全微分。

• 隐(反)函数定理之应用

定理 B1　设 $f: I \to \mathbb{R}$ 为一连续函数 且 $f(t) \neq 0$ $\forall t \in I$.

设 $\varphi(\cdot)$ 为初值问题 "$x' = f(x)$, $(t \in I)$; $x(t_0) = x_0$" 之解。则 $\varphi(\cdot)$ 满足

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{d\xi}{f(\xi)}. \qquad (*)$$

证明　由隐函数定理知，函数 φ 的反函数 ψ ($t = \psi(x)$, $\psi(x_0) = t_0$) 在点 x_0 的充分小的邻域内有定义且

$$\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=\xi} = \frac{1}{f(\xi)}.$$

由于 $f(x_0) \neq 0$，函数 $1/f(\xi)$ 在点 $\xi = x_0$ 的充分小邻域内连续，

因此由微积分基本定理知

$$\psi(x) - \psi(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{f(\xi)}$$

在点 $x = x_0$ 的充分小邻域内唯一确定 ψ，而 ψ 的反函数 φ 在点 $t = t_0$ 的某个邻域内根据条件 $\varphi(t_0) = x_0$ 也被唯一确定。

这样，$(*)$ 成立。 ※.

• 可分离变量方程　$\frac{dy}{dx} = h(x)g(y)$, $x \in [\alpha, \beta]$, $y \in [\gamma, \delta]$.　(1.3.4)

其中，h, g 分别为定义在 $[\alpha, \beta]$ 和 $[\gamma, \delta]$ 上的连续函数。

step1 若 $\exists\ y_0 \in [\gamma, \delta]$ s.t. $g(y_0)=0$, 则 $y(t) \equiv y_0$ 是一个解.

step2 若 $g(y) \neq 0\ \forall\ y \in (\gamma_1, \delta_1) \subset [\gamma, \delta]$, 则令

$$z = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(\xi)} d\xi, \quad y, y_0 \in (\gamma, \delta_1).$$ 于是, $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} =$

$$= \frac{1}{g(y)} h(x) g(y) = h(x).$$ 故 $z = \int_{x_0}^{x} h(\eta) d\eta$, $x_0 \in [\alpha, \beta]$.

$$\therefore \quad \int^{y} \frac{1}{g(\xi)} d\xi = \int^{x} h(\eta) d\eta + C.$$ $\longrightarrow$ 转 30 $\frac{1}{2}$.

- 积分因子 (Integrating factors)

当 $M dx + N dy = 0$, $(x, y) \in R^2$ (1.35)

不是恰当方程时, 我们仍有机会: 当它能转化为一个恰当方程时。这种转化通常是用一个函数 μ 乘以 (1.35), 而 μ 称为积分因子。

$$\mu M dx + \mu N dy = 0. \tag{1.36}$$

(1.36) 是恰当方程 当且仅当 $(\mu M)_y = (\mu N)_x$. (1.37)

由 (1.37) 得: $M \mu_y - N \mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0$. (1.38)

(1.38) 是一个 P.D.E, 它通常比 O.D.E. 难得! 但有时方便: 若 μ 仅是 x (或 y) 的函数时, 可设 $\mu = \mu(x)$. 则

$(\mu M)_y = \mu M_y$, $(\mu N)_x = \mu N_x + N\frac{d\mu}{dx}$. 于是, 若 $(\mu M)_y = (\mu N)_x$, 则

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N} \cdot \mu. \tag{1.39}$$

所以, 当 $\frac{M_y - N_x}{N}$ 仅是 x 函数时, 可通过 (1.39) 找仅与 x 相关的 μ s.t. (1.36) 为恰当方程。

· <u>分离变量法的本质</u>　考虑 $\frac{dy}{dx}=\frac{g(y)}{h(x)}$, $y(x_0)=y_0$. (a1)

引入参变量 $t\in\mathbb{R}$, 考虑 $\frac{dx}{dt}=h(y)$, $x(t_0)=x_0$; (a2)

$$\frac{dy}{dt}=g(y),\quad y(t_0)=y_0. \qquad (a3)$$

令 $x=\varphi_1(t)$ 为(a2)的解, $y=\varphi_2(t)$ 为(a3)的解。

$\because h(x_0)\neq 0$ $\therefore \left.\frac{d\varphi_1}{dt}\right|_{t=t_0}\neq 0$。由隐函数定理, φ_1 的反函数

ψ $(t=\psi(x))$ 在 $x=x_0$ 一个邻域内唯一确定。令

$$F(x)=\varphi_2(\psi(x)) \qquad (a4)$$

则 F 在 $x=x_0$ 的一个邻域内有定义, 连续可微。由链法则有

$$\left.\frac{dF}{dx}\right|_{\xi}=\left.\frac{d\varphi_2}{dt}\right|_{t=\psi(\xi)}\cdot\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{\xi}=\frac{g(F(\xi))}{h(\xi)};$$

直接验证有　$F(x_0)=\varphi_2(\psi(x_0))=\varphi(t_0)=y_0$.

$\therefore$ $F(\cdot)$ 是(a1)的解。

<u>定理 B2</u>　由(a4)给出的 F 满足

$$\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{h(\xi)}=\int_{y_0}^{y}\frac{d\eta}{g(\eta)}.$$

<u>证</u>　$\because$ φ_1,φ_2 为(a2),(a3)的解, $\therefore$ 由<u>定理B1</u>得

$$t-t_0=\int_{x_0}^{\varphi_1(t)}\frac{d\xi}{h(\xi)}=\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{h(\xi)};$$

$$t-t_0=\int_{y_0}^{\varphi_2(t)}\frac{d\eta}{g(\eta)}=\int_{y_0}^{y}\frac{d\eta}{g(\eta)}=\int_{y_0}^{F(x)}\frac{d\eta}{g(\eta)}.$$

这里用了: $F(x)=\varphi_2(\psi(x))=\varphi_2(t)=y$.

\#.

§ 1.3.5 存在唯一性定理

- 赋范空间 (normed space)

$x \to \|x\|$

设 X 是一个线性空间. 设存在一个函数 $\|\cdot\|: X \to [0,\infty)$

满足 (i) $\|x\| = 0$ iff $x = 0$; (ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ $\forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

(iii) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y \in X$.

则称 $(X, \|\cdot\|)$ 为一赋范空间, 且 $\|\cdot\|$ 称为范数.

例 • $X = \mathbb{R}$, $\|x\| \triangleq |x|$ (绝对值)

则 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ 为一赋范空间.

• $X = \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 \triangleq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ $\forall x = (x_1 \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n$.

则 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ 为一赋范空间.

设 $\|x\|_\infty \triangleq \max\{|x_i|, i=1,\cdots,n\}$ $\forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

则 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ 为一赋范空间.

例 设 $X \triangleq C([a,b]; \mathbb{R}^d)$

$= \{f: [a,b] \to \mathbb{R}^d$ 连续$\}$

设 $\|\cdot\|: X \to [0,\infty)$ 定义如下:

$$\|f\| \triangleq \max_{t \in [a,b]} |f(x)| \quad \forall f \in X.$$

则 $(X, \|\cdot\|)$ 为一赋范空间 (完备的)

• 距离空间

设 $\mathfrak{X}$ 是一个集合. 设 d 是 $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$ 到 $[0,\infty)$ 上一函数满足:

(i) $d(x,x)=0 \quad \forall x\in\mathfrak{X}$; (ii) $d(x,y)\geq 0 \quad \forall x,y\in\mathfrak{X}$;

(iii) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y) \quad \forall x,y,z\in\mathfrak{X}$.
d 称为距离函数, $(\mathfrak{X},d)$ 为度量空间.

注 若 $\mathfrak{X}$ 为一赋范空间, $\|\cdot\|$ 为 $\mathfrak{X}$ 上一范数.

定义 $d:\ \mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\to[0,\infty)$ 如下: $d(x,y)=\|x-y\|$.

则 d 为一距离函数. $\therefore$ $(\mathfrak{X},d)$ 为一距离空间.

$\therefore$ 一个赋范空间也是一个距离空间.

• 收敛性. 设 $\{x_k\}\subset(\mathfrak{X},d)$.

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0 \in\mathfrak{X}$ 意味着 $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k,x_0)=0$.

• 完备性. 称 $(\mathfrak{X},d)$ 为完备的度量空间, 若任一 Cauchy 序列 $\{x_k\}\subset\mathfrak{X}$ (i.e. $\forall\varepsilon>0 \ \exists K\geq 1$ s.t. $\forall k,l\geq K$, $d(x_k,x_l)<\varepsilon$) 收敛.

$C([a,b];\mathbb{R}^d)$ 为一完备的赋范空间

• 连续性.

设 $F:\ (\mathfrak{X},d)\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathfrak{X}$.

F 在 x_0 连续意思是: $\forall\varepsilon>0 \ \exists\delta>0$ s.t. $\forall\, d(x,x_0)<\delta$ 有 $|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon$.

设 $\hat{F}:(\mathfrak{X},d)\to(\mathfrak{X},d)$. 也可定义 $\hat{F}$ 在 x_0 点的连续性.

• 不动点定理.

设 $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ 为一赋范空间. 设 $F: \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ 为一映射.

任取 $x_0 \in \mathbb{X}$. 令 $x_1 = F(x_0), \dots, x_i = F(x_{i-1}),\ i \geq 1$. 由此得

一序列 $\{x_i\} \subset \mathbb{X}$. (这是一个迭代过程)

若 $\{x_i\}$ 收敛到 $\mathbb{X}$ 中某个点 $\bar{x}$ (i.e. $\|x_i - \bar{x}\| \to 0$)

且 F 连续 (i.e. $\forall\, \hat{x} \in \mathbb{X},\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta = \delta(\hat{x}, \varepsilon)$ s.t.

当 $\|x - \hat{x}\| < \delta$ 时, $\|F(x) - F(\hat{x})\| < \varepsilon$)

则
$$\bar{x} = \lim_{i\to\infty} x_i = \lim_{i\to\infty} F(x_{i-1}) = F(\lim_i x_{i-1}) = F(\bar{x}).$$

这表明 $\bar{x}$ 为 F 的一个不动点.

不动点理论在求解方程中起一个重要作用:

求解 "$(F - I)x = 0,\ x \in \mathbb{X}$"

$\Longleftrightarrow$ "求 F 的不动点".

• 压缩映射. 设 $F: (\mathbb{X}, d) \to (\mathbb{X}, d)$. 称 F 为压缩映射,

若 $\exists\, \delta \in (0,1)$ s.t.

$$d(F(x), F(y)) < \delta d(x, y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{X}.$$

特征: 任意两点的像的距离较之它们的距离收缩了 δ 倍.

• Banach 不动点定理的 $\mathbb{R}$ 版本:

设 F 是 $\mathbb{R}$ 上一个压缩映射, 则 F 有唯一不动点.

证明　任取 $x_0\in\mathbb{R}$. 记 $x_n=F(x_{n-1})$，$n=1,2,\cdots$.

令 $d(x,y)\triangleq|x-y|\quad\forall\, x,y\in\mathbb{R}$.

则
$$\begin{aligned}d(x_n,x_{n+1})&=d(F(x_n),F(x_{n-1}))\\&\le\delta d(x_{n-1},x_{n-2})\qquad(\because F\text{为压缩映射})\\&\le\cdots\\&\le\delta^n d(x_1,x_0)\end{aligned}$$

所以 $\forall\, n,p$ 有

$$\begin{aligned}d(x_{n+p},x_n)&\le\sum_{i=1}^{p}d(x_{n+i},x_{n+i-1})\\&\le\sum_{i=1}^{p}\delta^{n+i-1}d(x_1,x_0)\\&<\sum_{i=1}^{\infty}\delta^{n+i-1}d(x_1,x_0)=\frac{\delta^n}{1-\delta}d(x_1,x_0).\end{aligned}$$

故 $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{R}^1$ 中的 Cauchy 序列.

由 $(\mathbb{R},d)$ 的完备性，$\exists\,\bar{x}\in\mathbb{R}$ s.t. $\lim\limits_{n}x_n=\bar{x}$

(i.e. $d(x_n,\bar{x})=|x_n-\bar{x}|\to0$).

因为，
$$\begin{aligned}0\le d(\bar{x},F(\bar{x}))&\le d(\bar{x},x_n)+d(x_n,F(x_n))+d(F(x_n),F(\bar{x}))\\&=d(\bar{x},x_n)+d(F(x_{n-1}),F(x_n))+d(F(x_n),F(\bar{x}))\\&\le d(\bar{x},x_n)+\delta d(x_{n-1},x_n)+\delta d(x_n,\bar{x})\\&\to0\quad\text{as } n\to\infty.\end{aligned}$$

$\therefore\quad d(\bar{x},F(\bar{x}))=0.\quad\therefore\quad\bar{x}=F(\bar{x})$.

下证唯一性. 设 $\tilde{x}$ 为 F 的另一个不动点. 则

$d(\bar{x},\tilde{x}) = d(F(\bar{x}),F(\tilde{x})) \le \delta\, d(\bar{x},\tilde{x})$.

$\because \delta \in (0,1)$ $\therefore d(\bar{x},\tilde{x})=0$ $\therefore \bar{x}=\tilde{x}$. 证毕. #

注 上述证明只用到：(i) d 的距离性质；(ii) $(\mathbb{R}^1, d)$ 的完备性；(iii) F 的压缩性.

Banach 不动点定理： 设 (X,d) 为一个完备的度量空间. 设 F 为 X 上的一个压缩映射. 则 F 有唯一的不动点.

回到 O.D.E.

$$y'(t) = f(t,y), \quad y(0)=0 \qquad (1.40)$$

令 f 为 $\tilde{R} \triangleq \{(t,y) \mid |t|\le a, |y|\le b\}$ 上的连续函数.

问： f 满足什么条件时，(1.40) 有解？有唯一解？

这是 o.d.e. 的基本问题之一.

历史 Cauchy 在 19 世纪 20 年代建立了 (1.40) 的解的存在唯一性理论。1876 年 Lipschitz 减弱了 Cauchy 定理中的条件. 而 C.E. Picard (1856-1914)，这位法国数学家，仅次于 H. Poincaré，给出了一个新的证明，其证明被称为 Picard's 逐步逼代方法.

- 在 (1.40) 中，$y(0)=0$ 可由 $y(t_0)=y_0$ 代替.

- (1.40) 与积分方程

令 $0<h\le a$. 考虑下列积分方程:

$$\varphi(t)=\int_0^t f(s,\varphi(s))\,ds,\quad t\in[-h,h].\qquad(1.41)$$

。(1.41) 的解定义为: 一个连续函数 $\varphi:[-h,h]\longrightarrow\mathbb{R}$. s.t. 它满足 (1.41)

(这包含了: $\forall\, t\in[-h,h]$, $\varphi(t)\in[-b,b]$.

<u>定理 1.4</u> 设 f 为 $\tilde{R}$ 上的连续函数. 则 $\varphi(\cdot)$ 为 (1.40) 在 $[-h,h]$ 上的解

当且仅当 $\varphi(\cdot)$ 为 (1.41) 的解.

<u>证明</u> 设 $\varphi(\cdot)$ 为 (1.40) 在 $[-h,h]$ 上的解. 则

$$\int_0^t \varphi'(s)\,ds=\int_0^t f(s,\varphi(s))\,ds\qquad \forall\, t\in[-h,h].$$

故 $$\varphi(t)=\varphi(0)+\int_0^t f(s,\varphi(s))\,ds$$

$$=\int_0^t f(s,\varphi(s))\,ds\qquad \forall\, t\in[-h,h]$$

i.e., $\varphi(\cdot)$ 为 (1.41) 的解.

反之, 设 $\varphi(\cdot)$ 为 (1.41) 之解。由 f 与 φ 的连续性得:

$f(\cdot,\varphi(\cdot))$ 在 $[-h,h]$ 上连续。在 (1.41) 两边求导得

$$\varphi'(t)=f(t,\varphi(t)),\quad t\in[-h,h].$$

此外, 由 (1.41) 显然有 $\varphi(0)=0$ 证毕. #

<u>定理 1.5</u> 设 f, $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $\tilde{R}$ 上连续。则 $\exists\, h\in(0,a]$ s.t. (1.40)

在 $[-h,h]$ 上有唯一解.

两种证明 (有得到不同的 h, 后者更好.)

<u>证明1</u> <u>要证</u> $\exists\, h\in(0,a]$ s.t. (1.41) 在 $[-h,h]$ 上有唯一解。(根据定理 1.4。) 令 $h\in(0,a]$ 待定. 设

$X_h \triangleq \{\psi(\cdot) \mid \psi\in C([-h,h]),\ \psi(0)=0,\ \|\psi\|_{C([-h,h])}\le b\}$,

其中，$\|\psi\|_{C([-h,h])} = \max\limits_{|t|\le h}|\psi(t)|$. [$X_h$ 为 $C([-h,h])$ 中以原点为心，以 b 为半径的闭球！]

(已知 $C([-h,h])$ 为一完备的赋范空间，其范数是最大模范数：

$\|\varphi\| \triangleq \max\limits_{t\in[-h,h]}|\varphi(t)|$，它诱导了 $C([-h,h])$ 上的一个距离

函数 $d(\varphi,\psi)=\|\varphi-\psi\|_{C([-h,h])}$. 可以证明：$(X_h, d)$ 为

$(C([-h,h]), d)$ 的闭子空间，i.e.，若 $\{\varphi_n\}\in X_h$ 且 $d(\varphi_n,\varphi)\to 0$，

则 $\varphi\in X_h$. 于是，$(X([-h,h]), d)$ 为一完备的度量空间.)

定义 $F: X_h \longrightarrow X_h$ 如下：$\forall \varphi\in X_h$,

$F(\varphi)(t) \triangleq \int_0^t f(s,\varphi(s))ds$, $t\in[-h,h]$.

($\forall |s|\le h$, $f(s,\varphi(s))$ 有意义！)

令 $M \triangleq \max\limits_{\substack{|t|\le a\\ |y|\le b}}|f(t,y)|$.

取 $0<h\le \frac{b}{M}$. 则 $|F(\varphi)(t)|\le Mh\le b$ $\forall |t|\le h$.

故当 $0<h\le\frac{b}{M}$ 时，$F: X_h\to X_h$，i.e. F 是有定义的.

再令 $N=\max\limits_{(t,y)\in\tilde{R}}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right|$。则 $\forall \varphi,\psi\in X_h$ 有

$$d(F\varphi, F\psi) = \max_{|t|\le h}|F(\varphi)(t)-F(\psi)(t)|$$

$$\le \max_{|t|\le h}\left|\int_0^t |f(s,\varphi(s))-f(s,\psi(s))|ds\right| \le \max_{|t|\le h}\left|\int_0^t N|\varphi(s)-\psi(s)|ds\right|$$

$$\le \max_{|t|\le h} N\left|\int_0^t d(\varphi,\psi)\,ds\right| \le Nh\,d(\varphi,\psi).$$

令 $\delta\in(0,1)$. 令 $h\le\min\{\frac{\delta}{N}, \frac{b}{M}\}$. 则

$$d(F\varphi, F\psi) \le \delta\, d(\varphi,\psi) \qquad \forall\, \varphi,\psi \in X_h.$$

∴ F 是 X_h 到 X_h 的一个压缩映射。

又∵ (X_h, d) 是完备度量空间. ∴ 由 Banach 不动点定理知:

F 有唯一的不动点.

最后, 由 F 的定义知:

φ 为 F 在 X_h 中的不动点 $\Longleftrightarrow$ φ 满足 (1.41).

故 (1.41) 在 $[-h,h]$ 上有唯一解. 证毕. ※

证明 2 (Picard 迭代方法) 令 $\phi_0(t)\equiv 0$, $t\in[-a,a]$. (这是第一步, 取迭代序列的初始点。) 接下来, 令

$$\phi_1(t) = \int_0^t f(s,\phi_0(s))\,ds, \quad |t|\le a.$$

类似地, $\phi_2(t) = \int_0^t f(s,\phi_1(s))\,ds$, $t\in[-a,a]=I$.

$$\cdots \qquad \phi_{n+1}(t) = \int_0^t f(s,\phi_n(s))\,ds, \quad t\in I. \tag{1.42}$$

于是, 我们得到了一个函数序列 $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$. $\forall\, n$, $\phi_n(0)=0$.

若 $\phi_n(t)\to\phi(t)$, 那~~式上~~ 通过取极限 $n\to\infty$ 我们由 (1.42) 知

$$\phi(t) = \int_0^t f(s,\phi(s))\,ds, \quad t\in I. \tag{1.43}$$

上式推出: ϕ 是一个解.

为了使上面形式推导合理, 我们需要回答下列问题:

(Q1) 每个 ϕ_n 都定义在同一个区间 $[-h,h]$ 上吗?

(Q2). $\{\phi_n\}$ 收敛吗?

(Q3) 什么保证 积分运算与极限运算可交换, i.e. $\lim\int=\int\lim$?

(Q4) 解唯一吗?

第一步　证明 $\exists\ h \in [0, a]$ s.t.

$$\Delta_{k,h} \triangleq \{ (t, \varphi_k(t)) : |t| \le h \} \subset \widetilde{R} \quad \forall\ k. \tag{1.44}$$

证明(1.44)之关键是证：当 $\Delta_{k,h} \subset \widetilde{R}$ 时，$\varphi_{k+1}(t) \triangleq \int_0^t f(s, \varphi_k(s))ds$ 满足 $|\varphi_{k+1}(t)| \le b \quad \forall\ |t| \le h$.（如此方能进行下一步的 φ_{k+2}）

注意 $\varphi_{k+1}'(t) = f(t, \varphi_k(t))$. 于是，

$$|\varphi_{k+1}'(t)| \le \max_{(t,y)\in\widetilde{R}} |f(t,y)| \triangleq M \quad \forall\ |t| \le h.$$

故 $\quad |\varphi_{k+1}(t) - \varphi_{k+1}(0)| = |\varphi_{k+1}'(\xi)| \cdot |t|$

$\Rightarrow \quad |\varphi_{k+1}(t)| \le M|t| \le Mh \quad \forall\ t \in [-h, h]$

为了证 $|\varphi_{k+1}(t)| \le b \quad \forall\ |t| \le h$，只需取 h s.t. $h \le \frac{b}{M}$.

另一方面，我们假设了 $h \le a$. 故我们应选取

$$h = \min\left\{\frac{b}{M}, a\right\}.$$

关于 $\frac{b}{M}$ 与 a 有两个可能性：

(i) $\frac{b}{M} \ge a \Leftrightarrow M \le \frac{b}{a} \Rightarrow \varphi_k(t)$ 的斜率小 $\Rightarrow \{(t, \varphi_k(t)) : |t| \le a\}$ 有可能在 $\widetilde{R}$ 中；

(ii) $\frac{b}{M} < a \Leftrightarrow M > \frac{b}{a} \Rightarrow \varphi_k$ 的斜率大 $\Rightarrow$ 有可能 $|\varphi_k(t)| > b$ when $|t| \le a$.

现证(1.44). 取 $h = \min\{\frac{b}{M}, a\}$. 我们用归纳法证(1.44)：

$\because\ \phi_0(t) \equiv 0,\ |t| \le h, \quad \therefore\ \{(t, \phi_0(t)) : |t| \le h\} \subset \widetilde{R}$.

于是，ϕ_1 在 $[-h, h]$ 上有定义. 假设 ϕ_k 在 $[-h, h]$ 上有定义，且

$\{(t, \varphi_k(t)) : t \in [-h, h]\} \subset \widetilde{R}$. 考虑

$$\varphi_{k+1}(t) = \int_0^t f(s, \varphi_k(s))ds, \quad t \in [-h, h].$$

上面是有定义的. 再证明: $\forall\, t \in [-h, h]$ 有 $|\varphi_{k+1}(t)| \le b$.

当 $\frac{b}{M} < a$ 时, 有 $h = \frac{b}{M}$. $\because$ $\varphi_{k+1}(0)=0$ 且 φ_{k+1}' 在 $[-h, h]$ 上连续,

$\therefore$ $\forall\, t \in [-h, h]$ 有

$\varphi_{k+1}(t) - \varphi_{k+1}(0) = \phi_{k+1}'(\xi)(t-0)$ (其中 $\xi \in [0, t]$)

于是 $|\phi_{k+1}(t)| \le M|t| \le M\frac{b}{M} = b.$

当 $\frac{b}{M} \ge a$ 时, 有 $h = a$. 于是 $\forall$ $t \in [-h, h]$, $|\phi_{k+1}(t)| = |\phi_{k+1}'(\xi)||t|$.

故 $|\phi_{k+1}(t)| \le M|t| \le Ma \le b.$

结论: (1.44) 成立.

第二步. 证明 $\{\phi_n\}$ 在 $[-h, h]$ 上的收敛性.

我们断言:

$$\phi_n(t) \rightrightarrows \phi(t) \ (\text{一致收敛}), \quad t \in [-h, h] \qquad (1.45)$$

其中 $\varphi(\cdot)$ 是某定义在 $[-h, h]$ 上的函数. 我们有

的 $\phi_n(t) = \phi_1(t) + [\phi_2(t) - \phi_1(t)] + \cdots + [\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)]$, $|t| \le h$.

于是, (1.45) $\Longleftrightarrow$

$\phi_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t)]$ 在 $[-h, h]$ 上一致收敛. $\qquad (1.46)$

$\because$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $\tilde{R}$ 上连续, 有 $\max\limits_{(t,y)\in\tilde{R}} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\right| \triangleq K < \infty$.

故 $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \le \max\limits_{(t,y)\in\tilde{R}} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| |y_1 - y_2| = K|y_1 - y_2|$

$\forall\, (t, y_1), (t, y_2) \in \tilde{R}$. $\qquad (1.47)$

((1.47) 表明 f 关于 y 是 Lip. 连续的，K 为 Lip 常数，且这个连续关于 t 是一致的。) 接下来估计 (1.46) 级数中的每一项：

$$\phi_1(t) = \int_0^t f(s, \phi_0(s))ds \le M|t|, \quad t \in [-h, h]. \qquad (1.48)$$

由 (1.47), (1.48) 有 $\forall\ t \in [-h, h]$,

$$|\phi_2(t) - \phi_1(t)| \le \left| \int_0^t |f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_0(s))| ds \right|$$

$$\le K \left| \int_0^t |\phi_1(s) - \phi_0(s)| ds \right|$$

$$= K \left| \int_0^t |\phi_1(s)| ds \right|$$

$$\le KM \left[\int_0^t |s| ds \right] = \frac{KM}{2} |t|^2 \le \frac{KM}{2} h^2.$$

用归纳法 我们可以证明

$$|\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)| \le \frac{MK^{n-1}|t|^n}{n!} \le \frac{MK^{n-1}h^n}{n!}, \quad t \in [-h, h]. \qquad (1.49)$$

事实上，当 $n=1$ 时，我们已证 (1.49) 成立。

假设 $n=k$ 成立，要证 (1.49) 对 $n=k+1$ 也成立。为此，注意到 $\forall t \in [-h, h]$,

$$|\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t)| \le \left| \int_0^t |f(s, \phi_k(s)) - f(s, \phi_{k-1}(s))| ds \right|$$

$$\le K \left| \int_0^t |\phi_k(s) - \phi_{k-1}(s)| ds \right| \le \frac{MK^k}{k!} \underbrace{\left| \int_0^t |s|^k ds \right|} = \frac{MK|t|^{k+1}}{(k+1)!} \le \frac{MK^k h^{k+1}}{(k+1)!}$$

不能在积分里做 $|s|^k \le h^k$

需要利用积分 $\int |s|^k ds \Rightarrow \widetilde{(k+1)!}$

上式 $\Rightarrow$ (1.49) 当 $n=k+1$ 也成立。

故 由归纳法 (1.49) 成立。

$\because$ 级数 $\quad Kh + \frac{(Kh)^2}{2!} + \cdots + \frac{(Kh)^n}{n!} + \cdots$ 收敛

$\therefore$ (1.45) 成立，且 ϕ 是 $[-h, h]$ 上的连续函数。

第三步　证明 $\phi(t)=\int_0^t f(s,\phi(s))ds \quad \forall t\in[-h,h]$.

$\because$ (1.45) 成立，且 f 连续，$\therefore$ $f(t,\varphi_k(t)) \rightrightarrows f(t,\varphi(t))$, $t\in[-h,h]$,

$$\therefore \lim_{k\to\infty}\phi_{k+1}(t)=\lim_{k\to\infty}\int_0^t f(s,\phi_k(s))ds=\int_0^t \lim_k f(s,\phi_k(s))ds$$

$$=\int_0^t f(s,\lim_k \phi_k(s))ds, \quad t\in[-h,h].$$

$$\therefore \quad \phi(t)=\int_0^t f(s,\phi(s))ds, \quad t\in[-h,h]$$

上式与 ϕ 的连续性 $\Rightarrow$：φ 是 $y'=f(t,y)$, $y(0)=0$ 在 $[-h,h]$ 上的解。

第四步　唯一性

设 ψ 是另一个在 $[-h,h]$ 上的解。则

$$\varphi(t)-\psi(t)=\int_0^t \left[f(s,\varphi(s))-f(s,\psi(s))\right]ds, \quad t\in[-h,h].$$

于是，$\forall\ t\in[0,h]$

$$|\varphi(t)-\psi(t)|\leqslant K\int_0^t|\varphi(s)-\psi(s)|ds.$$

再用 Gronwall 不等式 $\Rightarrow$ $|\varphi(t)-\psi(t)|\leqslant 0\cdot e^t=0 \quad \forall\ t\in[0,h]$

故　$\varphi(t)=\psi(t)$, $t\in[0,h]$.

当 $t\in[-h,0]$ 时，令 $\tilde\varphi(-t)=\varphi(t)$, $\tilde\psi(-t)=\tilde\psi(t)$，用同法 $\Rightarrow$

$\tilde\varphi\equiv\tilde\psi \Rightarrow \varphi(t)=\psi(t)$, $t\in[-h,0]$.

证毕！※

注1　比较两个证明中的 h. 第二个中的 h 大一些，所以它给出解的大一些的定义区间.

注2　定理1.5中的条件"$\frac{\partial f}{\partial y}$在$\widetilde{R}$上连续"可用下列Lip.条件替代.

$$\exists\ L>0 \text{ s.t. } |f(t,x)-f(t,y)| \le L|x-y|,\ \forall (t,x),(t,y)\in \widetilde{R}.$$

注3　Peano利用欧拉折线法证明了：当f在$\widetilde{R}$上连续时，方程的解局部存在.（我们以后介绍它！）但f的连续性不能保证解的唯一性. 1925年，拉甫伦捷夫构造了下列例子：

$$\frac{dy}{dt}=2|y|^{\frac{1}{2}},\quad y(0)=0 \qquad (1.50)$$

可直接验证：$\forall\ a\le 0,\ b\ge 0$

$$y(t)=\begin{cases}-(t-a)^2, & -\infty<t<a,\\ 0, & a\le t\le b,\\ (t-b)^2, & b<t<\infty\end{cases}$$

为(1.50)之解.

唯一性失效原因：向量场在接近奇点$y=0$时下降不够快，因此解在有限时间就达到奇点了.

定理1.7　(Peano定理)　假设$f(t,y)$是$\widetilde{R}\triangleq\{(t,y)\,|\,|t|\le a,\ |y|\le b\}$中的连续函数. 则初值问题

$$y'=f(t,y),\quad y(0)=0 \qquad (1.51)$$

在$[-h,h]$上有解. 其中，$h=\min\{a,\frac{b}{M}\}$，$M=\max\limits_{(t,y)\in\widetilde{R}}|f(t,y)|$.

证明思路　假设$y=\phi(t)$是(1.51)在$[-h,h]$上的一个解. 那么它的图像是ty-平面中过$(0,0)$点的一条曲线段：

$$\{(t,\phi(t)):\ -h\le t\le h\}\triangleq\Gamma.$$

在Γ上每点，$(t,\phi(t))$处，Γ的斜率为$f(t,\phi(t))$.

希望利用上面的信息构造一列折线段 $\{L^m\}$ s.t. 当 $m\to\infty$ 时，L^m 收敛到一曲线段，而后者是(1.51)的一个解的图像。L^m 的构造我们在§1.2中已介绍了：将 $[0,h]$ 等分为 m 份，得 $m+1$ 个分点：

$t_0=1$，$t_k=k\cdot\frac{h}{m}$，$k=1,\cdots,m$。在 $[t_0,t_1]$ 上取线段 l_1：

$y=f(0,0)t$，$t\in[t_0,t_1]$，它过 $(0,0)$，斜率为 $f(0,0)$。令 $y_1=f(0,0)t_1$，

它是 l_1 末端点的 y-坐标。在 $[t_1,t_2]$ 上取线段 l_2：

$y_1-y=(t-t_1)f(t_1,y_1)$，$t\in[t_1,t_2]$。它过 (t_1,y_1)，斜率为 $f(t_1,y_1)$。

令 $y_2=y_1+(t_2-t_1)f(t_1,y_1)=y_1+\frac{h}{m}f(t_1,y_1)$。

一般地，在 $[t_k,t_{k+1}]$ 上取线段 l_k：$y-y_k=(t-t_k)f(t_k,y_k)$。

注意：$\because h=\min\{a,\frac{b}{M}\}$，我们得到的 l_k 均在 $\bar{R}$ 中。

于是，我们构造了 m 条线段 $l_1,\cdots,l_m$（在 ty-平面的右边）

类似地，从 $(0,0)$ 出发，可构造 m 条相连的线段（在 ty-平面左边）

这些相连线段在 $\bar{R}$ 内构成一折线 L_m（Euler 折线）

证明 $\{L_m\}$（或它的一个子序列）收敛到某个解的图像需

要用 Ascoli-Arzela 定理 设 $\mathcal{F}=\{f(t)\}$ 是定义在区间 I 上的一个无穷函数族。如果 $\exists\ M_0>0$ s.t. $\forall f\in\mathcal{F}$ 有

$|f(t)|\le M_0\ \forall t\in I$（一致有界）；$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon)$ s.t. 当 $f\in\mathcal{F}$，$t_1,t_2\in I$ 满足 $|t_1-t_2|\le\delta$ 时，$|f(t_1)-f(t_2)|<\varepsilon$（等度连续），则 $\exists\ \mathcal{F}$ 中一子序列 $\{f_k\}$ s.t. f_k 在 I 上一致收敛于某个 $f\in\mathcal{F}$.

§1.3.6. 解的延伸和整体存在性

设 G 为 $\mathbb{R}^2$ 中一个非空开区域。设 f 为定义在 G 上的连续函数。令 P_0 为 G 中任一给定的点，其坐标为 (t_0, y_0). 考虑

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0. \tag{1.52}$$

因为 G 是一个非空开域，故 $\exists\, a_1>0,\ b_1>0$ s.t. 矩阵

$$A_1 \triangleq \{(t,y) \mid |t-t_0| \le a_1,\ |y-y_0| \le b_1\} \subseteq G.$$

注意 $a_1 = a_1(t_0, y_0, G)$ (i.e. 依赖 t_0, y_0, G), $b_1 = b_1(t_0, y_0, G)$.

由 Peano 定理，(1.52) 有一个解 $y = \varphi_1(t)$, $t \in [t_0-h_1, t_0+h_1]$, 其中

$$h_1 = \min\left\{a_1, \frac{b_1}{M_1}\right\} \text{ 而 } M_1 = \max_{(t,y)\in A_1} |f(t,y)|.$$

令 $A_2 = \{(t,y) \mid |t-t_1| \le a_2,\ |y-y_1| \le b_2\} \subseteq G$. 由 Peano 定理，

~~(1.52) 有一个解 $y=\varphi_2(t)$~~

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \quad y(t_1) = y_1 \tag{1.53}$$

有一个解 $y = \varphi_2(t)$, $t \in [t_1-h_2, t_1+h_2]$, $h_2 = \min\left\{a_2, \frac{b_2}{M_2}\right\}$,

$M_2 = \max\limits_{(t,y)\in A_2} |f(t,y)|$, a_2, b_2 依赖 t_1、y_1 和 G，所以实际依赖 t_0, y_0, G.

令
$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t), & t \in [t_0, t_0+h_1] = [t_0, t_1], \\ \varphi_2(t), & t \in [t_0+h_1, t_0+h_1+h_2] = [t_1, t_1+h_2]. \end{cases}$$

$\because \varphi_1(t_0+h_1) = \varphi_2(t_0+h_1)$

且 $\because \lim\limits_{t\to t_1^-} \varphi_1'(t) = \lim\limits_{t\to t_1^-} f(t, \varphi_1(t)) = f(t_1, \varphi_1(t_1)) = f(t_1, \varphi(t_1))$,

$\lim\limits_{t\to t_1^+} \varphi_2'(t) = \lim\limits_{t\to t_1^+} f(t, \varphi_2(t)) = f(t_1, \varphi_2(t_1)) = f(t_1, \varphi(t_1))$.

$\because\ \varphi'(t)\big|_{t=t_1}$ ∃ 且等于 $f(t_1,\varphi(t_1))$。故 $\varphi(t)$ 是 (1.52) 在

$[t_0, t_0+h_1+h_2]$ 上的一个解，i.e.，我们将解向右延伸了 h_2 长度。

用相同方法，可将其向左延拓。 由 Peano 定理和 G 的开性，

这种延伸可一直进行下去，如：可延伸到 $[t_0, t_0+\sum_{i=1}^{n} h_i]$.

问题 (i) $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ 是否发散？

(ii) 若 $\sum_{1}^{\infty} h_n$ 收敛，什么会发生？

定理1.8 设 Γ 是 (1.52) 的一段积分曲线（含端点）。则 Γ 可延伸至 G 的边界，

即，任给闭区域 G_1 s.t. $P_0 \in G_1 \subset G$，Γ 必能延伸至

$G \setminus G_1$。

注1 ∃ $\{G_k\}$，G_k 包含 P_0，包含在 G 中，紧 s.t. $G=\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$.

注2 设 $\Gamma = \{(t,\varphi(t)) : t \in I\}$，I 为一区间，且 $y=\varphi(t)$ 为 (1.52)

的定义在 I 上的解。令 $\tilde{\Gamma} = \{(t,\psi(t)) : t \in J\}$，J 为一区间，

且 $y=\psi(t)$ 是 (1.52) 的定义在 J 上的解。若 $\tilde{\Gamma} \supset \Gamma$，则

称 $\tilde{\Gamma}$ 为 Γ 的一个延伸，或 Γ 被延伸至 $\tilde{\Gamma}$. 这时也称 ψ 为 φ

的一个延伸。

注3 令 Ω 为 相空间 $\mathbb{R}$ 的一个开的有界区域。令 $G=\mathbb{R}\times\Omega$.

定理1.8告诉：设 (α,β) 为 (1.52) 的一个解 $y=\varphi(t)$ 的

最大存在区间，则 β (or α) 只有两种选择：

(i) $\beta=+\infty$. 这时，$\lim_{t\to\beta}(t,\varphi(t)) = (+\infty, \lim_{t\to\infty}\varphi(t)) \in \partial G$（注意：

$\forall x\in\Omega$，$(+\infty, x) \in \partial G$）；

(ii) $\beta<+\infty$. 这时，$\lim\limits_{t\to\beta}\varphi(t)\in\partial\Omega$.

(iii) 对 α 有相应结果.

注4 (1.52) 的任一解的最大存在区间必为开区间.（这在后面可以看到.）

定理1.8的证明 设 $\Gamma=\{(t,\varphi(t)):\ t\in[t_0-h,t_0+h]\}$，其中 $y=\varphi(t)$ 满足 (1.52)。因为 $(h,\varphi(h))\in G$，由 Peano 定理，$\exists$ $h_1>0$ s.t. 初值问题：

$$y'=f(t,y),\quad y(t_0+h)=\varphi(t_0+h)$$

在 $[t_0+h,\ t_0+h+h_1]$ 上有一个解 $y=\varphi_1(t)$.

令
$$\tilde{\varphi}(t)=\begin{cases}\varphi(t), & t_0+h\ge t\ge t_0,\\ \varphi_1(t), & h+h_1+t_0\ge t\ge h_0+t_0.\end{cases}$$

则 $y=\tilde{\varphi}(t)$ 是 (1.52) 在 $[t_0,t_0+h+h_1]$ 上的一个解. 因此，Γ 可向右延伸。我们仍用 Γ 表示延伸后的积分曲线段，其表达式为 $y=\varphi(t)$，$t\in[t_0,t_0+h+h_1]$。记 $y=\varphi(t)$ 的向右最大存在区间为 J. 则下列情形必含其一：

1) $J=[t_0,t_1]$. 由于 $(t_1,\varphi(t_1))\in G$，我们可用上法继续向右延伸 Γ。这与 J 的最大性矛盾. $\therefore$ J 不可能是闭区间！

2) $J=[t_0,+\infty)$. Γ 在 G 内可一直向右延伸。故 $\forall$ 紧 G_1 s.t. $P_0\in G_1\subset G$ 有：Γ 必将延伸到 G_1 之外.（注意：G, G_1 皆为 ty-平面上的集合，且 G_1 紧。）

3) $J=[t_0,t_1)$. 我们断言：$\forall$ 紧 G_1 s.t. $P_0\in G_1\subset G$，下列成立：

$$(t, \varphi(t)) \in G_1 \quad \forall\, t \in J. \tag{1.54}$$

反证地假设：$\exists\, G_1$ s.t. $P_0 \in G_1 \subset G$，G 紧 且 (1.54) 成立.

首先注意

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)),\ t \in J;\quad \varphi(t_0) = y_0. \tag{1.55}$$

等价于

$$\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,ds,\quad t \in J. \tag{1.56}$$

另一方面，因为 f 在紧 G_1 上连续，所以 $\exists\, K > 0$ s.t.

$$\max_{(t,y)\in G_1} |f(t,y)| \le K.$$

再由 (1.54) $\Rightarrow$ $\max_{y \in J} |f(t, \varphi(t))| \le K$.

于是由 (1.55) $\Rightarrow$ $|\varphi'(t)| \le K \quad \forall\, t \in J$.

根据拉格朗日中值定理，

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \le K\,|t' - t''| \quad \forall\, t', t'' \in J.$$

再由 Cauchy 准则 $\Rightarrow$：$\lim_{t \to t_1} \varphi(t)$ 存在.

令 $y_1 = \lim_{t \to t_1} \varphi(t)$. 因为 G_1 紧. 且 (1.54) 成立，所以

$$(t_1, y_1) \in G_1 \subset G.$$

定义

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t_0 \le t < t_1; \\ y_1, & t = t_1 \end{cases}$$

则 $\tilde{\varphi}$ 在 $[t_0, t_1]$ 上连续 且 $\tilde{\varphi}(t) \in G_1 \subset G \quad \forall\, t \in [t_0, t_1]$.

现在 (1.56) 两边同时取 $\lim_{t \to t_1}$ （注意 $\lim_{t \to t_1} \varphi(t) = \tilde{\varphi}(t_1)$）得

$$\tilde{\varphi}(t_1) = \lim_{t \to t_1} \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,ds = \lim_{t \to t_1} f(s, \tilde{\varphi}(s))\,ds = \int_{t_0}^{t_1} f(s, \tilde{\varphi}(s))\,ds.$$

故 $y=\varphi(t)$ 是 (1.56)（也是(1.55)）在 $[t_0,t_1]$ 上的一个解. 这与 J 的最大性矛盾.　　证毕.　　#.

• 称 最大存在区间上的解 为饱和解.

<u>§1.3.7</u>　解对初值的连续依赖性

设 J 为 $\mathbb{R}$ 的一个开区间。设 $f: J\to\mathbb{R}$ 为一连续函数. 考虑

$$y'=f(y),\quad y(t_0)=y_0. \tag{1.57}$$

设 $y(t)$ 为(1.57) 定义在 $[t_0,t_1]$ 上的解.　再考虑

$$y'=f(y),\quad y(t_0)=z_0. \tag{1.58}$$

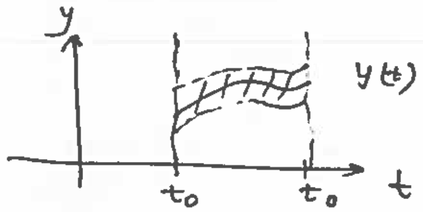
设 $z(t)$ 为 (1.58) 定义在 $[t_0,\tilde{t}_1]$ 上的解.

<u>问题</u>　当 $|y_0-z_0|$ 很小时，解 $y(\cdot)$ 与 $z(\cdot)$ 有何关系？

<u>猜测</u>　它们的差距应用很小。但在什么意义下？应该在一致模下，这就需要 y 与 z 均在 $[t_0,t_1]$ 上存在.

<u>目的.</u>　证明上述猜测. 这是解对初值的连续依赖性.

<u>预备</u>　$\forall\,\varepsilon>0$，令 $A_\varepsilon \triangleq \{(t,x^t)\mid t\in[t_0,t_1],\ |x^t-y(t)|\le\varepsilon\}$.



<u>引理 1.1</u>　A_ε 为 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 中的一个有界闭集.

<u>证明</u>　令 $(s_n,x_n)\in A_\varepsilon$，$(s_n,x_n)\to(s^*,x^*)$. 则 $s_n\in[t_0,t_1]$ 且 $|x_n-y(s_n)|\le\varepsilon$. 由 $[t_0,t_1]$ 的紧性知. $s^*\in[t_0,t_1]$. 此时，因为

$\lim_{n\to\infty}|x_n-y(s_n)|\le\varepsilon$ 且 y 在 $[t_0,t_1]$ 上连续，

有 $|x^*-y(s^*)|\le\varepsilon$.

所以 $(s^*,x^*)\in A_\varepsilon$. 故 A_ε 闭。此外，A_ε 显然有界. 证毕 *.

<u>引理 2.2</u> 存在 $\varepsilon>0$ s.t. $A_\varepsilon\subset[t_0,t_1]\times J$.

<u>证明</u> 反证地假设命题不成立. 则存在 $\varepsilon_n>0$, $\varepsilon_n\to0$ s.t.

$$A_{\varepsilon_n}\not\subset[t_0,t_1]\times J,\quad \text{i.e.,}\quad \forall n\ \exists\ (s_n,x_n)\in A_{\varepsilon_n}\ \text{s.t.}\ x_n\notin J.$$

因为 $(s_n,x_n)\in A_{\varepsilon_n}$，所以 $s_n\in[t_0,t_1]$ 且 $|x_n-y(s_n)|\le\varepsilon_n$.

然而，可取 $\{s_n\}$ 的子序列 $\{s_{n_k}\}$ s.t. $s_{n_k}\to s^*\in[t_0,t_1]$.

~~由 $y(\cdot)$ 的连续性知 $y(s_{n_k})\to y(s^*)\in J$~~

又 ∵ y 是 $[t_0,t_1]$ 上的解. ∴ $y(s^*)\in J$.

由于
$$|x_{n_k}-y(s^*)|\le|x_{n_k}-y(s_{n_k})|+|y(s_{n_k})-y(s^*)|$$
$$\le\varepsilon_{n_k}+|y(s_{n_k})-y(s^*)|\longrightarrow0\quad\text{as } n\to\infty.$$

∴ $\lim_k x_{n_k}=y(s^*)\in J$.

然而，$x_{n_k}\in J^c$ 且 J^c 闭. ∴ $\lim_k x_{n_k}\in J^c$. 矛盾. *.

<u>定义</u> 若对 J 中任一紧集 W，$\exists\ K=K(W)>0$ s.t.

$$|f(y_1)-f(y_2)|\le K_W|y_1-y_2|\quad\forall\, y_1,y_2\in W,$$

则称 f 在 J 上局部 Lip. 连续.

<u>注1</u> 当 f 为局部 Lip 时，(1.57) 的解唯一. 事实上，若 y_1,y_2 均为 (1.57) 在 $[t_0,t_1]$ 上的解，则它们连续. 故 ∃ 紧集 $W\subset J$ s.t.

$$y_1(t),\ y_2(t)\in W\quad\forall\, t\in[t_0,t_1].$$

故有
$$|y_1(t)-y_2(t)| \le \int_{t_0}^{t} |f(y_1(s))-f(y_2(s))|\,ds$$
$$\le K(w)\int_{t_0}^{t} |y_1(s)-y_2(s)|\,ds \qquad \forall\ t\in[t_0,t_1].$$

再由 Gronwall 不等式知：$y_1(t)=y_2(t)\quad \forall\ t\in[t_0,t_1]$.　※

~~注2　在证明定理~~

<u>定理 1.9</u>　设 $f: J\to\mathbb{R}$ 局部 Lip. 假设 y 为 (1.57) 在 $[t_0,t_1]$ 上的一个解. 则存在 $\delta>0$ s.t. 对任意满足 $|y_0-z_0|<\delta$ 的 z_0, (1.58) 有唯一定义在 $[t_0,t_1]$ 上的解 z; 而且 $\exists\ K_0>0$ s.t.
$$|y(t)-z(t)|\le |y_0-z_0|\exp(K_0(t-t_0)) \quad \forall\ t\in[t_0,t_1].$$

<u>注2</u>　我们先假设 $f: J\to\mathbb{R}$ 是 Lip. 这时定理1.9易证.
由 f 的连续性, (1.58) 有解. 将该解延伸到其最大存在区间 $[t_0,\beta)$ 上. 用注1的方法可证 (1.58) 在 $[t_0,\beta)$ 上的解唯一.

令该解为 $z(t)$, $t\in[t_0,\beta)$, 断言：

当 $|z_0-y_0|$ 充分小时, 有 $\beta>t_1$. (由此 z 在 $[t_0,t_1]$ 上 $\exists!$)

反证地假设：$\beta\le t_1$. 令 K 为 f 的 Lip 常数. 取 δ s.t.
$$0<\delta\exp(K_1(t_1-t_0))\le\varepsilon \qquad (\varepsilon \text{ 由引理2给出})$$

当 $|z_0-y_0|<\delta$ 时, $\forall\ t\in[t_0,\beta)$ 有
$$|z(t)-y(t)| = \left|(z_0-y_0)+\int_{t_0}^{t}[f(z(s))-f(y(s))]\,ds\right| \quad \text{—(1.59)}$$
(注：当 $\beta\le t_1$ 时, $f(y(t))$ 对所有 $t\in[t_0,\beta)$ 有定义.)
$$\le |z_0-y_0| + \int_{t_0}^{t} K\,|z(s)-y(s)|\,ds.$$

由 Gronwall 不等式知：$\forall\ t\in[t_0,\beta)$ 有

$$|z(t)-y(t)| \le |z_0-y_0| \exp(K|t-t_0|) \le \delta e^{K(t-t_0)} \le \varepsilon.$$

$\therefore \ \{(t, z(t)) \mid t\in[t_0,\beta)\} \subset A_\varepsilon.$

但 A_ε 为 $\mathbb{R}\times J$ 中紧集. 由解的整体存在定理, $z(\cdot)$ 还可以向 $[t_0,\beta)$ 右延拓. 这与 $[t_0,\beta)$ 之最大性矛盾. $\therefore \ \beta > t_1$. 这与 (1.59) 一起给出了定理1 (当 f Lip 时!)

<u>注3</u> 当 f 仅为局部 Lip 时, 上述证明不适合. 原因: 无法确定 $\{z(t): t\in[t_0,\beta)\}$ 是否包含在一个紧集中, 因此在估计 $|f(z(s))-f(y(s))|$, $s\in[t_0,\beta)$ 时, 无法找到局部 Lip 常数!

(i.e. (1.62) 有一个在 $[t_0,t_1]$ 上的解, as $z_0\sim y_0$)

<u>定理 1.9 的证明</u> 先证存在性. 令 A_ε 由引理 2.2 给出. 令 $P(A_\varepsilon)$ 为 A_ε 在 y-轴上的投影. 则 $P(A_\varepsilon)\subset J$. (注: $P(A_\varepsilon)=\{x\in\mathbb{R} \mid \exists\ t\in[t_0,t_1] \text{ s.t. } |x-y(t)|\le\varepsilon\}$).

因为 $f: J\to\mathbb{R}$ 是局部 Lip 的, 所以 $\exists\ K>0$ $(K=K(A_\varepsilon))$ s.t.

$$|f(y)-f(z)| \le K|y-z| \qquad \forall\, y,z\in P(A_\varepsilon).$$

取 $\delta>0$ s.t.

$$\delta\sum_{k=0}^{\infty}\frac{K^k(t_1-t_0)^k}{k!} \le \varepsilon.$$

设 z_0 满足 $|z_0-y_0|<\delta$. 我们将构造一个函数列. (迭代法)

令 $\quad \varphi_0(t) \triangleq z_0-y_0+y(t), \quad t\in[t_0,t_1].$

则 $\quad |\varphi_0(t)-y(t)| \le |z_0-y_0| \le \varepsilon \quad \forall\ t\in[t_0,t_1]. \ \therefore\ \forall t\in[t_0,t_1],$ —— (1.60)

$\varphi_0(t)\in P(A_\varepsilon)$. 这样可以定义下一个函数:

$$\varphi_1(t) \triangleq z_0 + \int_{t_0}^{t} f(\varphi_0(s))\,ds, \quad t\in[t_0,t_1].$$

注意 $\varphi_0(t),\ y(t)\in P(A_\varepsilon)\ \ \forall\, t\in[t_0,t_1]$，故 $f(\varphi_0(s))$, $f(y(s))$ 对所有 $s\in[t_0,t_1]$ 有意义，且在Lip常数K的范围内。由 φ_1 的定义以及(1.60)知

$$|\varphi_1(t)-y(t)| \le |z_0-y_0| + \int_{t_0}^{t} |f(\varphi_0(s))-f(y(s))|\,ds$$

$$\le |z_0-y_0| + \int_{t_0}^{t} K\,|\varphi_0(s)-y(s)|\,ds$$

$$\le \delta\,(1+K(t-t_0))$$

$$\le \delta\,(1+K(t-t_0)) < \varepsilon \quad \forall\, t\in[t_0,t_1]. \qquad (1.61)$$

由(1.61)，有 $\{\varphi_1(t): t\in[t_0,t_1]\}\subset P(A_\varepsilon)$。进而可以进一步定义：

$$\varphi_2(t) \triangleq z_0 + \int_{t_0}^{t} f(\varphi_1(s))\,ds, \quad t\in[t_0,t_1].$$

则

$$|\varphi_2(t)-y(t)| \le |z_0-y_0|\left[1+K(t-t_0)+\frac{K^2}{2!}(t-t_0)^2\right] \le \varepsilon, \quad \forall\, t\in[t_0,t_1].$$

由此，$\varphi_2(t)\in P(A_\varepsilon)\ \ \forall\, t\in[t_0,t_1]$.

以此类推可定义，$\forall\, k$，

$$\varphi_k(t) \triangleq z_0 + \int_{t_0}^{t} f(\varphi_{k-1}(s))\,ds, \quad t\in[t_0,t_1] \qquad (1.62)$$

且得到：$\forall\, k$

$$|\varphi_k(t)-y(t)| \le |z_0-y_0|\left(1+K(t_1-t_0)+\cdots+\frac{K^k}{k!}(t_1-t_0)^k\right)$$

$$\le |z_0-y_0|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{K^k(t_1-t_0)^k}{k!} \le \delta\sum_{k=0}^{\infty}\frac{K^k(t_1-t_0)^k}{k!} \le \varepsilon.$$

所以，$\varphi_k(t)\in P(A_\varepsilon)\ \ \forall\, t\in[t_0,t_1]$.

然后，用类似 Picard 迭代方法 $\Rightarrow$：$\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 $[t_0,t_1]$ 上一致收敛到一个连续函数 $\varphi(t)$。在 (1.62) 两边令 $k\to\infty$ $\Rightarrow$

$$\varphi(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} f(\varphi(s))\,ds, \quad t\in[t_0,t_1].$$

由此 $\Rightarrow$ 结论：$\forall\, z_0$ s.t. $|z_0-y_0|<\delta$，有：方程 (1.58) 在 $[t_0,t_1]$ 上有一个解 $z(t)$.

接下来证明解 (1.58) 解的唯一性。设 $z_1(t)\,(t\in[t_0,t_1])$ 也是 (1.58) 的解。显然，存在紧集 $B\subset\mathbb{R}$ s.t.

$$\{z(t): t\in[t_0,t_1]\}\cup\{z_1(t): t\in[t_0,t_1]\}\subset B.$$

由 f 的局部 Lip 性，$\exists\, L_B>0$ s.t.

$$|f(x)-f(y)|\le L_B|x-y| \quad \forall\, x,y\in B.$$

于是，$\forall\, t\in[t_0,t_1]$，

$$|z(t)-z_1(t)|\le|z_0-\cancel{z_0}|+\int_{t_0}^{t}|f(z(s))-f(z_1(s))|\,ds$$
$$\le\int_{t_0}^{t}L_B|z(s)-z_1(s)|\,ds.$$

由 Gronwall 不等式 $\Rightarrow$：$z(t)=z_1(t)$ $\forall\, t\in[t_0,t_1]$.

最后证明：$|z(t)-y(t)|\le|y_0-z_0|\exp(K_0(t-t_0))$，$t\in[t_0,t_1]$ —— (1.63)

（其中 $K_0>0$ 不依赖 t！）

事实上，$\forall\, t\in[t_0,t_1]$，$|z(t)-y(t)|\le|z_0-y_0|+\int_{t_0}^{t}|f(z(s))-f(y(s))|\,ds$.

由 z 与 y 的连续性，$\{z(t): t\in[t_0,t_1]\}\cup\{y(t): t\in[t_0,t_1]\}$ 属于 J 中一个紧集 $\tilde{B}$。由 f 的局部 Lip 性，$\exists\, L_{\tilde{B}}>0$ s.t.

$$|f(z(s))-f(y(s))|\le L_{\tilde{B}}|z(s)-y(s)| \quad \forall\, s\in[t_0,t_1].$$

再由 Gronwall 不等式 $\Rightarrow$ (1.63)。证毕. ※.

§1.3.8 推广

令 $\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}$， $F(t, \vec{z}) = \begin{pmatrix} f_1(t, z_1, \cdots, z_n) \\ \vdots \\ f_n(t, z_1, \cdots, z_n) \end{pmatrix}$

$$\vec{z}_0 = \begin{pmatrix} z_{01} \\ \vdots \\ z_{0n} \end{pmatrix}$$

考虑一阶微分方程组：

$$\frac{d\vec{z}(t)}{dt} = F(t, \vec{z}), \quad \vec{z}(0) = \vec{z}_0. \tag{1.64}$$

在 $\mathbb{R}^n$ 中取欧氏范数： $\|\vec{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ $\forall\ x = (x_1 \cdots x_n)^T$.

假设 F 是 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 上的连续函数，则 (1.64) 存在一个局部解.

再假设 F 还满足： $\exists\ L > 0$ s.t. $\|F(t, \vec{y}) - F(t, \vec{z})\| \le L \|\vec{y} - \vec{z}\|$
$\forall\ t\ \ \forall\ \vec{y}, \vec{z}$.

则 (1.64) 有唯一的局部解.

- (1.64) 的局部解可延伸为一个整体解.
- (1.64) 的解对初值有连续依赖性.

第二章 线性常微分方程组.

令 $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$ 为定义在区间 I 上的已知函数. $x_i(t)$ 为未知函数,

令 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$, $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]_{i,j=1}^{n}$, $f(t)=(f_1(t),\cdots,f_n(t))^T$

研究对像:

$$\frac{dx(t)}{dt}=A(t)x(t)+f(t) \tag{1}$$

或

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1(t)}{dt}=a_{11}(t)x_1(t)+\cdots+a_{1n}(t)x_n(t)+f_1(t)\\ \vdots\\ \dfrac{dx_n(t)}{dt}=a_{n1}(t)x_1(t)+\cdots+a_{nn}(t)x_n(t)+f_n(t)\end{cases} \tag{2}$$

目的: 其一、对 (1) 学习一般理论 (它一般不可求解)

其二、当 $A(t)\equiv A$ (常值矩阵)时, 求解 (1).

我们现学习其一.

§2.1. 一般理论.

当 $f=0$ 时, (1) 变成

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x. \tag{3}$$

称 (3) 为齐次方程组, 而 (1) 为非齐次方程组. 在区间 I 上研究方程.

任何时刻 $t_0\in I$ 可作为初始时刻. 任何一向量 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T\in\mathbb{R}^n$

可作为 (3) 的 (或 (1) 的) 初始向量.

<u>我们总假设</u> (H) 函数 $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$, $i,j=1,\cdots,n$, 均为 I 上的连续函数.

在假设(H)下，$\forall\, t_0\in I,\ \xi\in\mathbb{R}^n$，⊞下列初值问题在I上有唯一解：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=A(t)x(t)+f(t), & t\in I\\ x(t_0)=\xi\end{cases}$$

这由解的存在唯一性保证.

首先考虑(3)的全体解集合 $\mathbb{X}\triangleq\{x:I\to\mathbb{R}^n \mid x$ 为(3)的解$\}$.

它有如下性质：

其一，$\mathbb{X}$中每个元（~~I上的连续函数~~）是定义在I上的函数，它有导数，且导数在I上连续. 于是，

$\mathbb{X}\subseteq C^1(I;\mathbb{R}^n)\triangleq\{g:I\to\mathbb{R}^n \mid g=(g_1,\cdots,g_n)^T$，每个$g_i$是I到$\mathbb{R}$的连续可微函数$\}$.

在$C^1(I;\mathbb{R}^n)$上定义自然的加法与纯量乘法（即数乘）如下：

$(g+h)(t)\triangleq g(t)+h(t),\ t\in I,\quad \forall\, g,h\in C^1(I;\mathbb{R}^n)$，

$(\alpha g)(t)\triangleq \alpha\cdot g(t),\ t\in I,\quad \forall\, g\in C^1(I;\mathbb{R}^n),\ \alpha\in\mathbb{R}$ 域为实域

可验证，在引如上述"+"与"·"后，$C^1(I;\mathbb{R}^n)$成为一个线性空间.

其二. 易验证：上述加法与数乘关于$\mathbb{X}$是封闭的. 所以，$\mathbb{X}$是$C^1(I;\mathbb{R}^n)$的一个线性子空间.

其三. $C^1(I;\mathbb{R}^n)$是一个无穷维线性空间（它有一个含无穷多个元素的最大线性无关组）

问题 $\mathbb{X}$是有限维吗？

<u>定理 2.1</u> 齐次方程(3)的全体解构成$C^1(I;\mathbb{R}^n)$的一个n维线性子空间.

证明　设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准基。任意固定一个 $t_0 \in I$. 令

$\varphi^i(\cdot)$, $i=1, \cdots, n$ 为初值问题：

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(t_0) = e_i \tag{5}$$

的解. 断言：$\{\varphi^1, \cdots, \varphi^n\}$ 构成 X 的一个基底.

先证：$\varphi^1, \cdots, \varphi^n$ 线性无关. 事实上，若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ 满足

$\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi^i = 0$ (in X) i.e., $\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi^i(t) = 0 \quad \forall t \in I$. 则

$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi^i(t_0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. 由此知：$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

接下证：任一解 φ 可由 $\varphi^1, \cdots, \varphi^n$ 的线性组合写出. 因为

$\varphi(t_0) \in \mathbb{R}^n$, 所以 $\exists\ \beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R}$ s.t. $\varphi(t_0) = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$.

$\because$ X 为一线性空间 $\therefore$ $\sum_{i=1}^n \beta_i \varphi^i \in X$, i.e. $\sum_{i=1}^n \beta_i \varphi^i$ 为(3)的一个

解. 这个解在 t_0 时刻的值为：$\sum_{i=1}^n \beta_i \varphi^i(t_0) = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$.

故 φ 与 $\sum_{i=1}^n \beta_i \varphi^i$ 均为初值问题：

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(t_0) = \varphi(t_0)$$

之解. 由初值问题解的唯一性知 $\varphi(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i \varphi^i(t)$, $t \in I$. ※.

注　还可以这样求 X 的一个基底：令 $\{\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_n\}$ 为 X 的一个基. 求解：

$\dot{x} = A(t)x$, $x(t_0) = \tilde{e}_i$, $i=1, \cdots, n$ 得到一组解 $\{\tilde{\varphi}^1, \cdots, \tilde{\varphi}^n\}$,

它们构成 X 的一个基底.

- 基本解矩阵.

令 φ^i $(i=1, \cdots, n)$ 为(3)对应初始条件 $\varphi^i(t_0) = e_i$ 的解. 记

$\varphi^i(t) = (\varphi_1^i(t) \cdots \varphi_n^i(t))^T$. 再令

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}\varphi_1^1(t) & \cdots & \varphi_1^n(t)\\ \vdots & & \vdots\\ \varphi_n^1(t) & & \varphi_n^n(t)\end{pmatrix}$$

记 $$\frac{d\Phi(t)}{dt}=\begin{pmatrix} d\varphi_1^1(t)/dt & \cdots & d\varphi_1^n(t)/dt\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ d\varphi_n^1(t)/dt & \cdots & d\varphi_n^n(t)/dt\end{pmatrix}$$

由(5)知 $$\frac{d\Phi(t)}{dt}=A(t)\Phi(t),\ t\in I;\quad \Phi(t_0)=I\triangleq\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}.$$

称 $\Phi(t)$ 为方程组(3)的标准基本解矩阵。Φ 的列向量构成 X 的一个基底 ∴ (3)的任何解可写为 $c_1\varphi^1+\cdots+c_n\varphi^n$ ($c=(c_1\cdots c_n)^T\in\mathbb{R}^n$). ∴ (3)的通解可表为

$$\Phi(t)\cdot c,\quad c=(c_1\cdots c_n)^T\in\mathbb{R}^n.$$

这是基本解矩阵的作用之一.

• Wronski 行列式

令 $\psi^i(t)=(\psi_{1i}(t),\cdots,\psi_{ni}(t))^T$, $i=1,\cdots,n$, 为 I 上的向量值函数 (n个)

令 $$W(t)\triangleq\det\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\psi_{11}(t) & \cdots & \psi_{1n}(t)\\ \vdots & & \vdots\\ \psi_{n1}(t) & & \psi_{nn}(t)\end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccc}\uparrow & \qquad\qquad & \uparrow\\ \psi^1 & & \psi^n\end{array}\end{array},\quad t\in I.$$

称 $W(t)$ 为这n个向量值函数的 Wronski 行列式.

<u>定理2.2</u> (刘维尔公式) 若 $\psi^1,\cdots,\psi^n$ 为(3)的n个解, 则它们的 Wronski 行列式满足:

$$W(t)=W(t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr}A(s)\,ds\right\},\quad t\in I.$$

其中 $t_0\in I$ 为任意固定时刻，$\operatorname{tr}A(s)$ 为 $A(s)$ 的迹。

证明　由行列式求导公式得：

$$\frac{dW(t)}{dt}=W_1(t)+\cdots+W_n(t)$$

其中 $$W_i(t)=\det\begin{pmatrix}\psi_{11} & \cdots & \psi_{1n}\\ & \cdots & \\ \psi'_{i1} & \cdots & \psi'_{in}\\ & \cdots & \\ \psi_{n1} & \cdots & \psi_{nn}\end{pmatrix}\longrightarrow i\text{行},\quad i=1,\cdots,n.$$

而 $$\begin{array}{cc} W(t)= & \begin{pmatrix}\psi_{11} & \cdots & \psi_{1n}\\ & \cdots & \\ \psi_{n1} & \cdots & \psi_{nn}\end{pmatrix}\\ & \begin{array}{ccc}\uparrow & & \uparrow\\ \psi^1 & & \psi^n\end{array}\end{array}$$

另一方面，由 $\dfrac{d\psi^i}{dt}=A(t)\psi^i(t)$ 知：$\psi'_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\psi_{jk},\ k=1,\cdots,n.$

所以，此时 $$W_i(t)=\det\begin{pmatrix}\psi_{11} & \cdots & \psi_{1n}\\ & \cdots & \\ \sum_j a_{ij}\psi_{j1} & \cdots & \sum_j a_{ij}\psi_{jn}\\ & \cdots & \\ \psi_{n1} & \cdots & \psi_{nn}\end{pmatrix}\longrightarrow i\text{行}$$

$$=(\text{由}\det\text{性质})\ a_{ii}(t)\det\begin{pmatrix}\psi_{11} & \cdots & \psi_{1n}\\ & \cdots & \\ \psi_{i1} & \cdots & \psi_{in}\\ & \cdots & \\ \psi_{n1} & \cdots & \psi_{nn}\end{pmatrix}=a_{ii}(t)W(t).$$

故 $$W(t)=\operatorname{tr}A(t)\,W(t),\quad t\in I.$$

解之 $$W(t)=W(t_0)\exp\int_{t_0}^{t}\{\operatorname{tr}A(s)\,ds\},\quad t\in I.$$

（t_0 可取任意 I 中的数）. #

注 上定理说明对 n 个解的 Wronski 行列式 $W(t)$ 而言，$\forall t, t_0 \in I$.

$W(t)$ 与 $W(t_0)$ 差一个~~正~~正倍数：$\exp\left\{\int_{t_0}^{t} trA(s)ds\right\}$.

$\therefore \quad W(t_1) \neq 0 \iff W(t_2) \neq 0 \qquad \forall t_1, t_2 \in I.$

推论 2.1 设 $\{\psi^1, \cdots, \psi^n\}$ 为 X 的一个基底。则 $\forall t \in I$, $\{\psi^1(t), \cdots, \psi^n(t)\}$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一个基底.

注 上面推论说明：任给 n 个(3)的线性无关的解（或 X 的一个基），则记为 $\psi^1, \cdots, \psi^n$. 则它们将 $\mathbb{R}^n$ 的一个基 $\{\psi^1(t_0), \cdots, \psi^n(t_0)\}$ 连续地（随时间）变成另一个 $\mathbb{R}^n$ 的基.

注 任给 X 的一个基 $\{\psi^1 \cdots \psi^n\}$. 记 $\psi^i(t) = (\psi_{1i}(t) \cdots \psi_{ni}(t))^T$

$i=1, \cdots, n$. 称矩阵 $\begin{pmatrix} \psi_{11} & \cdots & \psi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_{n1} & \cdots & \psi_{nn} \end{pmatrix}$ 为(3)的一个基本解矩阵.

推论 2.2 设 $\Phi_1(t)$ 与 $\Phi_2(t)$ 为 (3) 的两个基本解矩阵，则存在一个可逆的 $n \times n$ 矩阵 P s.t. $\Phi_2(t) = P\,\Phi_1(t)$.

注 上面的 P 不随 t 变化而变化！

证明 记 $\Phi_1(t) = (\Phi_1^1(t) \cdots \Phi_1^n(t))$, $\Phi_2(t) = (\Phi_2^1(t), \cdots, \Phi_2^n(t))$, 其中，$\Phi_1^1, \cdots, \Phi_1^n$ 与 $\Phi_2^1, \cdots, \Phi_2^n$ 分别为 $\dot{x} = Ax$ 的两组线性无关的解. 由定理1，它们构成 X 的两组基. $\therefore \ \exists\ c_i^j \in \mathbb{R}, i,j = 1 \cdots n$

s.t. $\Phi_2^j(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i^j \Phi_1^i(t) \quad \forall t \in I, j = 1, \cdots, n$, i.e.,

$$\Phi_2(t) = (\Phi_1^1(t), \cdots, \Phi_1^n(t)) \begin{pmatrix} c_1^1 & \cdots & c_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n^1 & \cdots & c_n^n \end{pmatrix} \qquad (\forall t \in I)$$

$$\triangleq \Phi_1(t)\,P$$

下证 P 可逆：固定 $t_0\in I$. 由推论1，$\{\Phi_1^1(t_0),\cdots,\Phi_1^n(t_0)\}$ 与

$\{\Phi_2^1(t_0),\cdots,\Phi_2^n(t_0)\}$ 分别为 $\mathbb{R}^n$ 的基. $\therefore P$ 可逆. ※.

<u>推论 2.3</u> 设 φ 为(3)的任一解. 若 $\exists\ \tilde{t}_0\in I$ s.t. $\varphi(\tilde{t}_0)=0$

则 $\varphi(t)=0\quad\forall\ t\in I$.

<u>证明</u> 令 $\Phi(t)$ 为(3)的标准基本解矩阵. 则 $\{\Phi(t)\cdot C,\ t\in I\ |$

$C\in\mathbb{R}^n\}$ 为(3)的全体解空间. 故 $\exists\ \tilde{C}\in\mathbb{R}^n$ s.t.

$\varphi(t)=\Phi(t)\cdot\tilde{C}$，$t\in I$. 特别地，$0=\varphi(\tilde{t}_0)=\Phi(t_0)\cdot\tilde{C}$

再由推论2.1知 $\Phi(\tilde{t}_0)$ 可逆. 故 $\tilde{C}=0$. 从而 $\varphi(t)=0\ \forall t$. ※.

<u>注</u> 标准基本解矩阵 Φ 在(3)的研究中扮演重要的角.

· 常值矩阵 A 的情形.

现在设 $A(t)\equiv A$. 考虑

$$\dot{x}=Ax. \tag{6}$$

令 $I=\mathbb{R}$. $\overset{\forall t\in I}{\text{定义}}$一个从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射 Φ_t：$\Phi_t(v)=\varphi(t)$，$v\in\mathbb{R}^n$.

其中，φ 是初值问题：

$$\dot{x}=Ax,\quad x(0)=v \tag{7}$$

的唯一解. 由(7)的解的存在唯一性，Φ_t 是有意义的. 可直接

验证：$\Phi_t:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一线性同构.

$\{\Phi_t\ |\ t\in I\}$ 称为由(6)决定的流. 或动力系统. 它是一个线

性同构族.

<u>定理 2.3.</u> (i) $\Phi_0=I$ ($\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 恒等映射)；(ii) $\Phi_{t+s}=\Phi_t\circ\Phi_s$；

(iii) $(\Phi_t)^{-1}=\Phi_{-t}$.

证明 (i) 由定义直接给出.

(ii) 设 $v\in\mathbb{R}^n$. 则 $\Phi_s(v)=\varphi(s)$, 后者是初值问题:
$\dot{x}=Ax$, $x(0)=v$ 之解. 令 $\psi(\cdot)$ 为初值问题: $\dot{x}=Ax$,
$x(0)=\varphi(s)$ 之解. 则 $\Phi_t\circ\Phi_s(v)=\Phi_t(\Phi_s(v))=\Phi_t(\varphi(s))$

$=\psi(t)$ ———— (8)

另一方面, 由 φ 的定义和流的定义有

$$\Phi_{t+s}(v)=\varphi(t+s). \qquad (9)$$

现设 $z(\xi)=\varphi(\xi+s)$, $\xi\in\mathbb{R}$. 则

$$\frac{dz(\xi)}{d\xi}=\frac{d\varphi(\xi+s)}{d\xi}=A\varphi(\xi+s)=Az(\xi), \text{ 且 } z(0)=\varphi(s).$$

所以, $z(\cdot)$ 也是初值问题 $\dot{x}=Ax$, $x(0)=\varphi(s)$ 之解. 再由
初值问题解的唯一性知 $z(\xi)=\psi(\xi)$ $\forall\xi\in\mathbb{R}$.
特别地, $\psi(t)=z(t)=\varphi(t+s)$. 前式, 结合(8)与(9),
知: $\Phi_{t+s}(v)=\Phi_t\circ\Phi_s(v)$. 再由 v 的任意性知

$$\Phi_{t+s}=\Phi_t\circ\Phi_s.$$

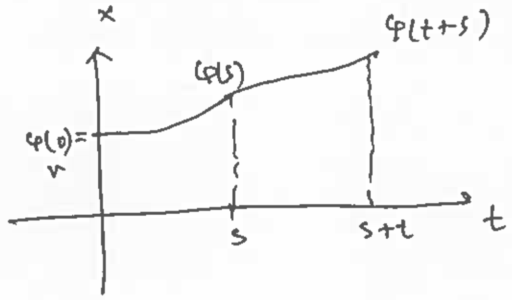
(iii) 由 (ii) 和 (i) 知: $\Phi_t\circ\Phi_{-t}(u)=\Phi_{(t-t)}(u)=\Phi_0(u)=u$
$\forall u\in\mathbb{R}^n$. $\therefore$ $(\Phi_t)^{-1}=\Phi_{-t}$. #

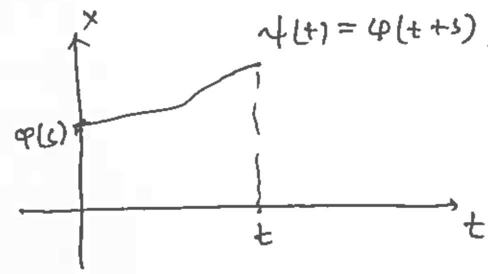
注 上述定理的 (ii) 反映了常系数齐次方程组一个重要性质. 以
$\dot{x}=ax$ $(a\in\mathbb{R})$ 为例. 设 $\varphi(\cdot)$ 为 $\dot{x}=ax$, $x(0)=v$ 之解.
令 $s\in\mathbb{R}$ 任意给定. 再令 $\psi(\xi)=\varphi(\xi+s)$. 则

$$\frac{d\psi(\xi)}{d\xi}=\frac{d\varphi(\xi+s)}{d\xi}=a\varphi(\xi+s)=a\psi(\xi)\quad\forall\xi$$

且 $\psi(0)=\varphi(s)$. $\therefore$ ψ 是初值问题: $\dot{x}=ax$, $x(0)=\varphi(s)$ 之解

故 ~~ψ(t)=φ~~ 方程 $\dot{x}=ax$ 以 $(t=0)$ $x(0)=v$ 为初始条件的解 φ 在 $(t+s)$ 的值 $\varphi(t+s)$ 与同一方程从初始点 $\varphi(s)$（初始时刻为 0）出发的解在 t 时刻的值相同.





这说明解具有平移性. 这是时不变方程的特性. $(A(t)\equiv A)$

上述结果对 $\dot{x}=a(t)x$ 不对!

• 转移矩阵

令 $\Phi(t,s)=\Phi(t)\Phi(s)^{-1}$ $(t,s\in\mathbb{R})$. 设

$$y(t)=\Phi(t,t_0)y_0,\quad t\in I \quad (\text{其中 } t_0\in I,\ y_0\in\mathbb{R}^n \text{ 给定}). \tag{10}$$

则

$$\frac{dy(t)}{dt}=\frac{d\Phi(t)}{dt}\Phi^{-1}(t_0)y_0=A(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)y_0=A(t)\Phi(t,t_0)y_0. \tag{11}$$

所以 y 是初值问题 $\dot{x}=A(t)x$, $x(t_0)=y_0$ 之解. ∴ 初值问题(11)的~~任意~~解可通过~~转移~~(10)表示.

称 $\Phi(t,s)$ 为(3)的转移矩阵（由 s 转移到 t）.

• 不幸

对一般的 $A(t)$, 无法求解(显式解)(3).

• 非齐次方程.

$$\dot{x}=A(t)x+f(t). \tag{12}$$

由第一章~~题~~类似方法可证明:

定理 2.4 设 $\psi(t)$ 是 (12) 的一个解（特解）。设 $\Phi(t)$ 为 $A(t)$ 的标准基本解矩阵. 则 (12) 的全体解为

$$\nabla = \{\Phi(t)\cdot c + \psi(t) \mid c \in \mathbb{R}^n\}. \qquad (13)$$

注1 上面定理中的 $\Phi(t)$ 可换为 $A(t)$ 的任一基本解矩阵.

注2 ∇ 不是线性子空间. 它是仿射空间.

问题 已知 (3) 的标准基本解矩阵，如何求 (12) 的一个解？

待定系数法： 假设 $x(t) = \Phi(t)\cdot C(t)$, $t\in I$ 为 (12) 的一个解

记 $C(t) = (c_1(t), \cdots, c_n(t))^T$. 代入 (12) $\Rightarrow$

$$\frac{d\Phi(t)}{dt}\cdot C(t) + \Phi(t)\frac{dC(t)}{dt} = A(t)\Phi(t)C(t) + f(t).$$

$\because \dfrac{d\Phi(t)}{dt} = A(t)\Phi(t)$. $\therefore$ 上式 $\Leftrightarrow$ $\Phi(t)\dfrac{dC(t)}{dt} = f(t)$.

对每个固定的 $t\in I$, 上式是一个关于变量 $\dfrac{dC(t)}{dt}$ 的线性代数方程组. $\because \Phi(t)$ 可逆 $\therefore$ $\dfrac{dC(t)}{dt} = \Phi^{-1}(t)f(t)$, $t\in I$.

现任取 $t_0\in I$. 求解初值问题： $\dfrac{dC(t)}{dt} = \Phi^{-1}(t)f(t)$, $C(t_0)=0 \Rightarrow$

$C(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)\,ds$. 将其代入 $x = \Phi(t)\cdot C(t) \Rightarrow$ 到 (12) 的一个特解：

$$x(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)\,ds = \int_{t_0}^{t}\Phi(t,s)f(s)\,ds. \qquad (14)$$

定理 2.5 (14) 为 (12) 的一特解. (12) 的解集合为

$$\nabla = \left\{\Phi(t)\cdot c + \int_{t_0}^{t}\Phi(t,s)f(s)\,ds \;\middle|\; c\in\mathbb{R}^n\right\}.$$

其中 $t_0\in I$ 任意固定.

注1. $\nabla = \left\{\Phi(t,t_0)c + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\Phi(t,s)f(s)\,ds \;\middle|\; c\in\mathbb{R}^n\right\}$.

注1 考虑 $\dot{x} = A(t)x + f(t)$, $x(t_0) = y_0$.

则由定理1.5可知：上面初值问题的解为

$$x(t) = \Phi(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)f(s)ds, \quad t \in I. \qquad (*)$$

记 $x_1(t) = \Phi(t,t_0)y_0$, $t \in I$; $x_2(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)f(s)ds$, $t \in I$.

则 $\dot{x}_1 = A(t)x_1$, $x_1(t_0) = y_0$.

$\dot{x}_2 = A(t)x_2 + f$, $x_2(0) = 0$

∴ 初值问题的解是两部分 x_1, x_2 之和. x_1 由系统(齐次方程) $A(\cdot)$ 与初值决定，x_2 由系统 $A(\cdot)$ 与外力 f 决定.

上面的(*)称为常数变异公式.

§2.2. 一阶线性常系数微分方程.

令 A 为 $n\times n$ 实矩阵. 记 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

考虑 $$\dot{x}(t) = Ax(t). \qquad (15)$$

它的解是一函数：$t \in \mathbb{R} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$. 记 $x(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))^T$.

求解(15)就是求 $(x_1(t) \cdots x_n(t))^T$。

$\forall t \in \mathbb{R}$, $x(t)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的向量. 我们记 $x(t) = (x_1 \cdots x_n)^T$ 是默认 $(x_1 \cdots x_n)^T$ 是 $x(t)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的标准基 $e_1, \cdots, e_n$ 下的坐标，

i.e. $x(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t)e_i$. ∴ 求 $x(t)$ 是求它的坐标.

(15)可视为矩阵方程，是我们常见的方程.

我们的目的是求解(15).

§2.2.1 矩阵指数

令 $M_n = \{$全体 $n\times n$ 实矩阵$\}$. 从 $x' = ax$ 的解为 $e^{at}\cdot c$

我们猜想 (15) 的解应该形如 $e^{At}\cdot c$ $(c\in\mathbb{R}^n)$.

什么是 e^A? 回顾线性代数: 设 $P(\lambda)$ 为一实多项式: 如

$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$. 则 $P(A) = a_0 A^n + \cdots + a_{n-1}A +$

I. 而 函数 $f(\lambda) = e^\lambda = \lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{N}\frac{\lambda^i}{i!}$ 故 可以 想到

$$f(A) = e^A = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{A^k}{k!}$$

问题 这个极限是在什么意义下取的? 于是, 我们需要在 M_n 中引入范数. 注意 M_n 是一个有限维 ($n\times n$ 维) 线性空间, 所以 M_n 中所有范数是等价的.

- M_n 中最大模范数, 设 $\|\cdot\|$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的欧氏范数. 定义:

$\|\cdot\|_{max} : M_n \longrightarrow [0,\infty)$ 为

$$\|A\|_{max} = \max\{\|Ax\| \mid \|x\|\le 1,\ x\in\mathbb{R}^n\}.$$

可直接验证: $\|\cdot\|_{max}$ 是 M_n 上的一个范数. ((i) $\|A+B\|_{max} \le \|A\|_{max} + \|B\|_{max}$ (ii) $\|\lambda A\|_{max} \le |\lambda|\|A\|_{max}$ (iii) $\|A\|_{max}=0$ 当 $A=0$)

命题 2.1 (a) 若 $\|A\|_{max} = \alpha$, 则 $\|Ax\| \le \alpha\|x\|$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$.

(b) $\forall A, B\in M_n$, $\|B\cdot A\|_{max} \le \|B\|_{max}\cdot\|A\|_{max}$.

(c) $\forall A\in M_n$, $\|A^m\|_{max} \le [\|A\|_{max}]^m$, $m=0,1,2,\cdots$.

证明 (a) 若 $x=0$，则 不等式显然成立.

若 $x\neq 0$，令 $y=\|x\|^{-1}x$. 则 $\|y\|=\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\|=1$. 因此，

$$\alpha=\|A\|_{max}\geq\|Ay\|=\frac{1}{\|x\|}\|Ax\|\Rightarrow$$

$$\|Ax\|\leq\alpha\|x\|.$$

(b) 令 $\|x\|\leq 1$ 则

$$\|BAx\|_{max}\leq\|S\|_{max}\|Tx\|\quad(\text{由}(a))$$

$$\leq\|S\|_{max}\|T\|_{max}\quad(\text{由}(a)\text{ 和 }\|x\|\leq 1)$$

$$\therefore\ \|BA\|_{max}=\max_{\|x\|\leq 1}\|BA(x)\|\leq\|S\|_{max}\|T\|_{max}.$$

#.

(c) 是 (b) 直接推出.

现在看 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$. 由命题 2.1 ((c)) 之

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\frac{A^k}{k!}\right\|_{max}\leq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|_{max}^k}{k!}\sim\text{收敛数级数}.$$

故 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$ 在 $\|\cdot\|_{max}$ 下收敛. (证之!)

$$\therefore\quad e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\ \text{有意义}.$$

故可定义矩阵值函数 $t\to e^{tA}$.

<u>命题 2.2.</u> 设 $\sum_{j=0}^{\infty}A_j=A$，$\sum_{k=0}^{\infty}B_k=B$ 为 M_n 中收敛级数

(i.e., $\left\|\sum_{j=0}^{K}A_j-A\right\|_{max}\to 0$ as $K\to\infty$; $\left\|\sum_{k=0}^{K}B_k-B\right\|_{max}\to 0$).

设 $\sum_{j=1}^{\infty}\|A_j\|<\infty$。则 $AB=\sum_{\ell=0}^{\infty}C_\ell$，其中 $C_\ell=\sum_{j+k=\ell}A_jB_k$.

证明 令 α_N，β_N，γ_N 为 $\sum A_j$，$\sum B_k$，$\sum C_\ell$ 的前 N 项部分和.

于是 $AB=\lim_{N\to\infty}\alpha_N\beta_N$ (i.e., $\|AB-\alpha_N\beta_N\|_{max}\to 0$)

而 $c=\lim\limits_{N\to\infty}\gamma_{2N}$. 通过计算易知:

$$\gamma_{2N}-\alpha_N\beta_N=\sum{}'A_jB_k+\sum{}''A_jB_k$$

其中 $\sum'$ 表示下标满足"$j+k\le 2N,\ 0\le j\le N,\ N+1\le k\le 2N$"所有项求和;

$\sum''$ 表示下标满足"$j+k\le 2N,\ N+1\le j\le 2N,\ 0\le k\le N$"所有项求和.

因此,
$$\|\gamma_{2N}-\alpha_N\beta_N\|_{max}\le\sum{}'\|A_j\|_{max}\cdot\|B_k\|_{max}+\sum{}''\|A_j\|_{max}\cdot\|B_k\|_{max}.$$

现在, $\sum'\|A_j\|_{max}\|B_k\|_{max}\le\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty}\|A_j\|_{max}\right)\left(\sum\limits_{k=N+1}^{2N}\|B_k\|_{max}\right)$

当 $N\to\infty$ 上式右 $\to 0$ $\left(\because \sum\limits_0^\infty\|A_j\|_{max}<\infty\right)$.

类似地, 当 $N\to\infty$ 时,

$$\sum{}''\|A_j\|_{max}\|B_k\|_{max}\longrightarrow 0$$

因此 $\quad \lim(\gamma_{2N}-\alpha_N\beta_N)=0.$ ※.

从这里起, 为简便, 记 $\|A\|\triangleq\|A\|_{max}\quad\forall A\in M_n$.

<u>定理 2.6</u> 函数 $t\to e^{tA}$ 是初值问题 $\dfrac{d\Phi(t)}{dt}=A\Phi(t),\ \Phi(0)=I$ 的唯一解.

—16

注 1. $\Phi(t)$ 为 $n\times n$ 矩阵 $(\forall t)$. 由定理 2.6, 我们看到 e^{tA} 是 $\dfrac{d\Phi}{dt}=A\Phi$ 的基本解矩阵.

在证明前, 先给出:

<u>命题 2.3</u> 令 $P、B、A\in M_n$. 则)

(a) 当 $Q=PAP^{-1}$ 时, $e^Q=Pe^AP^{-1}$;

(b) 若 $BA=AB$，则 $e^{A+B}=e^{A}e^{B}$

(c) $e^{-A}=(e^{A})^{-1}$

(d) 令 $A=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. 则 $e^{A}=e^{a}\begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}$

证 (a) $\because (PAP^{-1})^{k}=PA^{k}P^{-1}$

$\therefore$ 由 e^{A} 的定义 $\Rightarrow$ (a).

(b) $\because AB=BA$ $\therefore$ 由二项式定理 $(A+B)^{N}=N!\sum_{j+k=N}\frac{A^{j}B^{k}}{j!\,k!}$

~~再~~由引理(2) $e^{A+B}=\sum_{N=0}^{\infty}\left(\sum_{j+k=N}\frac{A^{j}B^{k}}{j!\,k!}\right)$

$$=\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{A^{j}}{j!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B^{k}}{k!}\right).$$

$$=e^{A}\cdot e^{B}$$

(c) 由 (b) 推出.

(d) 设 $\widetilde{M}_2=\left\{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \,\middle|\, a,b\in\mathbb{R}\right\}$.

则 $\widetilde{M}_2$ 是 M_2 的一个二维子空间 （M_2 是4维）

令 $G:\widetilde{M}_2\to\mathbb{C}^{1}$ 定义为

$G\left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\right)=a+ib$. 易验证:

(i) G 可逆, $G^{-1}(a+ib)=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$;

(ii) $\forall \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}\in\widetilde{M}_2$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ 有

$G\left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^{k}\right)=\left[G\left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\right)\right]^{k}$, 从

$G\left(\lambda\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2\end{bmatrix}\right) = \lambda G\left(\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1\end{bmatrix}\right) + G\left(\begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2\end{bmatrix}\right)$

(iii) 设 $\left\{\begin{bmatrix} a_m & -b_m \\ b_m & a_m\end{bmatrix}\right\}_{m=1}^{\infty} \subset \widetilde{M_2}$，且它在 M_2 中收敛。则其极限也属于 $\widetilde{M_2}$。并且 G 作用在这个序列每一项所得到的序列收敛到原序列的极限在 G 下的像.

由上述(i)—(iii)有: $G\left(e^{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a\end{bmatrix}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G\left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a\end{bmatrix}^k\right)}{k!}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[G\left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a\end{bmatrix}\right)\right]^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+ib)^k}{k!} = e^{a+ib} = e^a e^{ib}$

$= e^a(\cos b + i\sin b) = e^a\begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b\end{bmatrix}$. ※.

$A_{a,b} \triangleq \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a\end{bmatrix}$ $(b>0)$ 的几何解释.

设 $T_{a,b}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 为一线性映射，它在标准基下的矩阵为 $A_{a,b}$, i.e.

$T_{a,b}(e_1, e_2) = A(e_1, e_2)$ ($T_{a,b}e_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2$, $T_{a,b}e_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2$).

令 $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\theta = \arccos\left(\frac{a}{r}\right)$. (则 $\cos\theta = \frac{a}{r}$). 则 $T_{a,b}$ 先将每个向量反时针旋转 θ 弧度，再使其长度伸缩 r 倍。用 R_θ 表示上述旋转,

则 $T_{a,b}(x) = r\cdot R_\theta(x) = R_\theta(rx)$ $\forall x \in \mathbb{R}^2$. —(*)

为了看出这一点，首先注意 $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$.

在标准基下，R_θ 的矩阵是 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$. 伸缩变换矩阵 $\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r\end{bmatrix}$

$\because \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

$\therefore$ (*) 成立.

定理2.6之证明 $\frac{d}{dt}e^{tA}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{(t+h)A}-e^{tA}}{h}=\lim_{h\to 0}e^{tA}\left[\frac{e^{hA}-I}{h}\right]$

$=e^{tA}\lim_{h\to 0}\left(h\sum_{k=2}^{\infty}\frac{A^k h^{k-2}}{k!}+A\right)=e^{tA}A$。由于 A 与 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$ 之每项可交换，所以 $e^{tA}A=Ae^{tA}$。故 $\frac{de^{tA}}{dt}=Ae^{tA}$。此外，

$e^{0}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(0A)^k}{k!}=I$。 $\therefore$ e^{tA} 为(16)的解。 ※

推论2.4 令 $v=(v_1\cdots v_n)^T\in\mathbb{R}^n$. 则初值问题：$x'=Ax,\ x(0)=v$ 的唯一解为 $x(t)=e^{tA}v,\ t\in\mathbb{R}$.

§2.2.2 求 e^{At}

求解 $\dot{x}=Ax$ 就是求 e^{tA}。记住：我们要求的解均为实值函数！

· $\boxed{\text{A具有n个相异实特征情形}}$ 设 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$ 为其特征值。

这时，$\exists$ 实 $n\times n$ 矩阵 P s.t.

$$A=P\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}P^{-1} \qquad (16)'$$

$(16)'\Longleftrightarrow (Ap^1\cdots Ap^n)=(\lambda_1p^1\cdots\lambda_np^n)$.

其中，$p^1,\cdots,p^n$ 为 P 的列向量.

$\because \sum_{k=0}^{N}\frac{(tA)^k}{k!}=(\text{by }(16)')\ P\left(\sum_{k=0}^{N}\begin{bmatrix}\frac{\lambda_1^k t^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\lambda_n^k t^k}{k!}\end{bmatrix}\right)P^{-1}$

又 $\because \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\begin{bmatrix}\frac{\lambda_1^k t^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\lambda_n^k t^k}{k!}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$.

$\therefore e^{tA}=P\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}P^{-1}$.

如何求 $P=(p^1\cdots p^n)$？ 注意：$Ap^i=\lambda_ip^i$，$i=1,\cdots,n$. $\therefore$ 求 P 就是解代数方程求特征向量！

~~注2 通解形式~~

由推论2.4 ~~和(16)~~ 知 $\dot{x} = Ax$ 的通解为

$$e^{tA}\cdot c, \quad c \in \mathbb{R}^n$$

但由(16)，$e^{tA}\cdot c = P\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix} P^{-1}c = P\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}\cdot c_1$

$c \leftrightarrow c_1$ 一一对应（$\because P$ 是可逆阵）

$\therefore$ $\dot{x} = Ax$ 的通解为： ~~e^{tA}~~

$$x(t) = P\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}\cdot c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}^n.$$ 不需要求 P^{-1}

若要求初值问题 $\dot{x} = Ax$，$x(0) = v$ 的解，则需要将 c_1 求出：

$$v = x(0) = P\cdot c_1 \Rightarrow c_1 = P^{-1}v.$$ 需要求 P.

从另一个角度看：$x' = Ax \quad (x = (x_1 \cdots x_n)^T)$

$$\Leftrightarrow x' = P\operatorname{diag}\{e^{\lambda_1 t}\cdots e^{\lambda_n t}\}P^{-1}x$$

令 $y = P^{-1}x$ 则上面 $\Leftrightarrow y' = \operatorname{diag}\{e^{\lambda_1 t}\cdots e^{\lambda_n t}\}y$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy_i}{dt} = y_i, \quad i = 1, \cdots, n. \quad (\text{解耦方程组})$$

$$\Leftrightarrow y_i(t) = e^{\lambda_i t}y_i(0), \quad i = 1, \cdots, n.$$

故 $$x(t) = Py(t) = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(0) \\ \vdots \\ y_n(0)\end{pmatrix} \quad (17)$$

$\because$ $y(0)$ 可取 $\mathbb{R}^n$ 中任一向量.

$\therefore$ $x(t) = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t}\end{pmatrix}\cdot c$ 为 $x' = Ax$ 的通解.

当求解 $x'=Ax,\ x(0)=v$ 时. 由(17)知我们需要求出:

$y(0)=P^{-1}v$. ∴需求 P.

例 求解 $\begin{cases} x_1'=x_1 \\ x_2'=x_1+2x_2 \\ x_3'=x_1-x_3 \end{cases}$

它对应的矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

这是三角矩阵. ∴ $\det(A-\lambda I)=(1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)$.

特征值为 $1, 2, -1$ (互相异)

∴在新坐标下方程对应的矩阵是 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$

在新坐标下方程为

$\begin{cases} y_1'=y_1 \\ y_2'=y_2 \\ y_3'=-y_3 \end{cases}$ 解之 $\begin{aligned} y_1(t)&=ae^{t} \\ y_2(t)&=be^{2t} \\ y_3(t)&=ce^{-t} \end{aligned}$ a, b, c 任意实数.

为了将新旧坐标联系起来, 需求 A 对应于特征值 $1, 2, -1$ 的特征向量 f_1, f_2, f_3. 通过解方程 $(A-I)f_1=0$; $(A-2I)f_2$; $(A+I)f_3=0$ 求得 $f_1=(2,-2,1)^T$, $f_2=(0,1,0)^T$, $f_3=(0,0,1)^T$

令 $P=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

则 $x=Py$

∴ $\begin{aligned} x_1(t)&=2ae^{t} \\ x_2(t)&=-2ae^{t}+be^{2t} \\ x_3(t)&=ae^{t}+ce^{-t} \end{aligned}$ 为通解 (a, b, c 为任意实数). (18)

若要解初值问题： $x_i(0)=u_i\ (i=1,2,3)$，必须确定 a, b, c.

由(18) ⇒ $\begin{cases} 2a = u_1 \\ -2a+b = u_2 \\ a+c = u_3 \end{cases}$

解上述方程有时比求 P^{-1} 简单.　　<u>例4完</u>.

回到 $\dot{x} = Ax$.

我们是要求 坐标： $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$.

而 $$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \cdot C$$

$$= \begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{n1} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} P_{1j}\, e^{\lambda_j t} c_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} P_{nj}\, e^{\lambda_j t} c_j \end{pmatrix}$$

$\therefore\ x_k(t)\ (k=1,\cdots,n)$ 是 $e^{\lambda_1 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}$ 的线性组合.

$\boxed{\text{A具有n个相异特征情形}}$ 完！

A 有具 r 个相异实特征值 $\lambda_1 < \cdots < \lambda_r$，代数重数分别为 $n_1, \cdots, n_r$ 且 $n = n_1 + \cdots + n_r$ 的情形 且 $r < n$ 的情形.

这时，$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}$

A 对应 λ_j 的几何重数为 $\dim \ker (A - \lambda_j I)$

而 $\ker(A - \lambda_j I) \triangleq \{ z \in \mathbb{R}^n \mid Az = \lambda_j z \}$.

情形 1. 每一个 λ_k 的代数重数等于几何重数，i.e. $n_k = \dim\ker(A - \lambda_k I)$ $\forall k$.

这时，每个 λ_k 贡献给 A n_k 个线性无关的特征向量，i.e. 代数方程组 $Az = \lambda_k z$ 有 n_k 个线性无关的解，记为 $f_{k1}, \cdots f_{kn_k}$.（它们都是 A 对应 λ_k 的特征向量）而不同特征值对应的特征向量线性无关.

$\therefore$ 当每个 λ_k 的代数重数与几何重数相等时，A 有

$$n_1 + \cdots + n_r = n$$

个线性无关的特征向量，它们构成 $\mathbb{R}^n$ 一个基底。令

$$P = (f_{11} \cdots f_{1n_1} \cdots f_{r1} \cdots f_{rn_r})$$

则

$$AP = P\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}$$

其中 $J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}$ 为 $n_k \times n_k$ 矩阵.

故 $$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_r t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

而 $e^{J_k t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_k t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_k t} \end{pmatrix}$ 为 $n_k \times n_k$ 矩阵.

$$(A-\lambda_k I)^{n_k}=0, \tag{19}$$

之解.

<u>定理I</u> 设 A 是一个 $n\times n$ 实矩阵，其特征值全为实数. 则

$$\mathbb{R}^n = E(A,\lambda_1)\oplus\cdots\oplus E(A,\lambda_r)$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 为 A 的全体相异特征值. 且每个 λ_k 的广义特征空间的维数与其代数重数相等.

<u>注</u> (i) (19) 有 n_k 个线性无关的解.

(ii) (18) 中的 V^+ 的元为非特征向量的广义特征向量.

为简单起见，考虑

<u>情形之之特殊</u> A 只有一个(实)特征值 λ，代数重数为 n，且 $\dim(A-\lambda)<n$.

令 $E(A,\lambda)=\ker(A-\lambda I)^n$. 则由<u>定理I</u> 有 $\mathbb{R}^n=E(A,\lambda)$

令设 $N\overset{\Delta}{=}A-\lambda I$，$S\overset{\Delta}{=}\lambda I$ (对角阵).

$\because$ $\mathbb{R}^n=E(A,\lambda)=\ker N^n$ $\therefore$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$，$N^n x=0$

$\therefore$ N 是一个幂零矩阵.

(幂零矩阵之定义: $\exists\, m$ s.t. $\cancel{A^m}$ $N^m=0$)

于是，
$$e^{tA}=e^{t(S+N)}=e^{tS}e^{tN}\quad(\because SN=NS)$$
$$=\begin{pmatrix}e^{\lambda t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda t}\end{pmatrix}e^{tN}$$

而 $$e^{tN}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tN)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(tN)^k}{k!}\quad(\because N^n=0).$$

$\therefore$ e^{tN} 的每个元是一个不超过 $(n-1)$ 阶的 t 的多项式.

$\dot{x} = Ax$ 的解为

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda t} \end{pmatrix} e^{tN} \cdot C$$

$\therefore$ 每个 x_k 都是 $e^{\lambda t}$ 与一个不超过 $(n-1)$ 阶 t 的多项式的乘积.

这时我们没有求 P 因为我们在特征情况：A 只有一个特征根. 而通过选取合适的基底 ($\mathbb{R}^n = E(A,\lambda)$ 中), 可以让

$$N = P\begin{bmatrix} 0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots 1 & 0 \end{bmatrix} \text{的形式.}$$

情形 2 之一般情况　A 为 r 个相异实特征 $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ (其中某些 λ_k 的代数重数大于几何重数)

这时, $\mathbb{R}^n$ 为 $E(A,\lambda_1), \cdots, E(A,\cancel{\lambda_n})$ 的直和, i.e.,

$$\mathbb{R}^n = E(A,\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(A,\lambda_n). \tag{20}$$

而 A 在每个 $E(A,\lambda_k)$ 上不变, i.e.,

$$A: E(A,\lambda_k) \longrightarrow E(A,\lambda_k). \tag{21}$$

((21)意思为：$\forall x \in E(A,\lambda_k)$, $Ax \in E(A,\lambda_k)$.)

令 $f_{11}, \cdots f_{1n_1}$ 为 $E(A,\lambda_1)$ 的一个基 (通过方程 $(A-\lambda_1)^{n_1}x=0$ 解出 n_1 个线性无关解), $\cdots$, $f_{r1} \cdots f_{rn_r}$ 为 $E(A,\lambda_r)$ 的一个基. 则它们合起来为 $\mathbb{R}^n$ 的一个基. 由 (20), (21) 知

$$A(f_{11}, \cdots f_{1n_1}, \cdots, f_{r1}, \cdots, f_{rn_r})$$

$$= (f_{11}, \cdots f_{rn_r}) \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix},$$ A_k 为 $n_k \times n_k$ 矩阵, 它只有一个特征根 λ_k (实)

令 $P = (f_{11} \cdots f_{1n_1} \cdots f_{r1} \cdots f_{rn_r})$.

则 $$A = P\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{pmatrix}P^{-1}.$$

$$\therefore \quad \dot{x} = Ax \iff \dot{x} = P\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{pmatrix}P^{-1}x$$

$$\iff \dot{y} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{pmatrix}y, \quad y = P^{-1}x$$

$$\iff \dot{y}_1 = A_1 y_1 \quad \text{解耦方程组.}$$
$$\cdots$$
$$\dot{y}_r = A_r y_r$$

每个 A_i 只有一个特殊值 λ_i，这就回到了情形2之特殊情形.

这时，需要求 P！

$\boxed{\text{A 只有实特征值且代数重数 > n 的重数情形完！}}$

• $\boxed{\text{A 具有复特征值的情形}}$

回顾目的：要求 $\dot{x} = Ax$ 的实值解！

注意 当 A 有复特征值时，例如 n 个相异的特征值，其中有复数.

则 $$A = P\begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}P^{-1}$$

这时，P 也是复矩阵. 由此出发可解出解出复值函数。

~~这不是我们所要的~~ 两条路：其一，求出复值解，说明其实部与虚部分别为解. 这需要说明原因以及如何求 P 再解释 P 的列向量的意义；其二，将 A 化为实标准型. 我们主要介绍第二种方法.

注. 若 $\mu = a + ib$ 为 A 的非实特征值，则 $\bar{\mu} = a - ib$ 也是.

情形1 A为2×2矩阵(实)，具有非实特征 $\mu = a+ib$，$\bar{\mu} = a-ib\ (b>0)$

先看一个例子，它是情形1中最简单情形　　令 $b>0$，$a\in\mathbb{R}$.

$$\frac{dx}{dt} = ax - by \qquad \left(A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \right) \tag{22}$$

$$\frac{dy}{dt} = bx + ay$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{23}$$

这时，　$\det(A-\lambda I) = (a-\lambda)^2 + b^2$　　$\therefore \lambda = a \pm ib$ 为特征值.

由命题2.3之(d)部份⇒：(22)之通解为

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA}\cdot c = e^{ta}\begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad x(t) = c_1 e^{at}\cos bt - c_2 e^{at}\sin bt \tag{24}$$

$$y(t) = c_1 e^{at}\sin bt + c_2 e^{at}\cos bt.$$

还可以这样求解：　令　$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$：$F((x,y)^T) = x+iy$

则　$$F\left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = F\begin{pmatrix} ax-by \\ bx+ay \end{pmatrix}$$

$$= (ax-by) + i(bx+ay) \tag{25}$$

令　$\mu = a+ib$，$z = x+iy$．则

$$\mu z = (ax-by) + i(bx+ay) \tag{26}$$

由(25)，(26)⇒　$F\left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \mu(x+iy)$.　(27)

在 ~~(24)~~ (23)两边作用F⇒　　用复数 $a+ib$ 在C中作乘法
　　　　　　　　　　　　　　　$\sim$ 用 $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中作算子作用.

$$\frac{d}{dt} z = \mu z \tag{28}$$

(28) 的通解为 $z(t) = K \cdot e^{t\mu} \quad (K \in \mathbb{C})$

记 $K = c_1 + i c_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$. 则

$$x + iy = z(t) = (c_1 + i c_2)\, e^{t(a+ib)}$$

$$= (c_1 + i c_2)\, e^{at}(\cos bt + i \sin bt) \quad \text{(欧拉公式)}$$

将上式实部 ~~与虚部~~ 与虚部分开 $\Rightarrow (x, y)$ 满足 (24).

注 由 (24), 解的分量由 $e^{at}\cos bt$, $e^{at}\sin bt$ 的线性组合构成.

问题(a)

情形1的一般情形 如何求实的 2×2 矩阵 P s.t.

$$A = P \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} P^{-1} \quad ?$$

P 的列向量的几何意义 (即它们在什么空间中)?

这时需要引入复化空间及复化算子的概念.

$\mathbb{R}^n$ 中实线性空间的复化 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为一子空间. 设 E_c 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个子集, 它由所有 E 中向量的复系数线性组合构成. 于是

$$E_c = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i, \quad k \in \mathbb{N}^+,\ z_i \in E,\ \lambda_i \in \mathbb{C} \}.$$

注1 E_c 是 $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ 的一个复子空间.
$\quad\quad\quad\quad$ 空间 $\quad$ 域

注2 $\mathbb{R}^n_c = \mathbb{C}^n$.

注3 若 $\{e_1, \cdots, e_r\}$ 为 E 的一基底, 则它也是 E_c 的基.

注4 设 F 是 $\mathbb{C}^n$ 的一个 k-维 子空间 (复域). 令 $F_R \triangleq F \cap \mathbb{R}^n$,
则 $F_R = \{ (z_1, \cdots, z_n) \in F \mid z_i \text{ 为实数} \}$. F_R 称为 F 中的实向量空间.

注5　当 E 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间时，$(E_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} = E$.

思考题　设 V 是一个抽象的 n-维向量空间（域为 $\mathbb{R}$）。如何定义 V 的复化空间？

$\mathbb{R}^n$ 中线性算子的复化　设 E 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个 r-维子空间。设 T 为 $E \to E$ 的线性算子（或一个 $r\times r$ 实矩阵）.

T 的复化 T_c 定义如下：

$T_c: E_c \to E_c$；$\forall\ z \in E_c$（记 $z = \Sigma \lambda_j x_j$，$\lambda_j \in \mathbb{C}$，$x_j \in E$，Σ 是一有限求和）令

$$T_c z = \Sigma \lambda_j T x_j .$$

例　T 与 T_c 的矩阵表示.　设 A 为 T 在 $(e_1, \cdots, e_r)$（E 的一个基）下的矩阵表示，i.e.，$(Te_1, \cdots, Te_r) = \cancel{(Ae_1, \cdots, Ae_r)}$ $A(e_1 \cdots e_r)^T$（A 为 $r\times r$ 实矩阵），则 A 也是 T_c 在 $(e_1 \cdots e_r)$ 下的矩阵表示.

注　一个实 $n\times n$ 矩阵 A 可视为 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的一个线性映射，也可视为 $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 的一个线性映射.

现在回到问题(a).　设 $\varphi \in \mathbb{C}^n$ 是 A 对应 μ 的一个特征向量. 则 $\bar{\varphi}$ 是 A 对应 $\bar{\mu}$ 的特征向量.　φ 可由方程 $(A - \mu I) z = 0$ 解出.　令 $\varphi = u + iv$（$u, v \in \mathbb{R}^2$），则 $\bar{\varphi} = u - iv$.

易见：　$u = \frac{1}{2}(\varphi + \bar{\varphi})$，$v = \frac{i}{2}(\bar{\varphi} - \varphi)$　（这是在 $(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ 中运算）

$\because$ $\varphi, \bar{\varphi}$ 在 $(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ 中线性无关（它们是不同特征值对应的特征向量）

$\therefore$ 上式可推出 u, v 也在 $(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ 中线性无关，故在 $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ 中线性无关.

$\boxed{\text{情形 1 的一般情形完}}$

视 A 为 $\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ 的线性变换（也是 $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 的线性变换），试计算 A 在基 (v,u) 下的矩阵表示（事实上是换基后的矩阵是什么）：

一方面，$A(\underbrace{u+iv}_{\varphi})=(\underbrace{a+bi}_{\mu})(\underbrace{u+iv}_{\varphi})$

$$=-(bv+au)+i(av+bu).$$

另一方面，$A(u+iv)=Au+iAv$ （利用 A 在 $(\mathbb{C}^2,\mathbb{C})$ 中的线性性）

$\therefore$ $Av=av+bu$，$Au=-bv+au$，i.e.

$$A(v,u)=(v,u)\begin{bmatrix}a&-b\\b&a\end{bmatrix}.$$

令 $P=(v,u)$，则 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}a&-b\\b&a\end{bmatrix}$

故在基底 (v,u) 下，A 的矩阵表示为 $\begin{bmatrix}a&-b\\b&a\end{bmatrix}$.

（通过换基：$(e_1,e_2)\longrightarrow(v,u)$，矩阵 A 变成了 $\begin{bmatrix}a&-b\\b&a\end{bmatrix}$）

结论　当 A 的特征为 $a+ib$，$a-ib$ $(b>0)$ 时，求解 $\dot{x}=Ax$ 的步骤如下：

第一步．求解复代数方程：$(A-\mu I)z=0$．解之

$\varphi=u+iv$．

令 $P=(v,u)$ （v 前，u 后！）

则 $\dot{x}=Ax\iff\dot{y}=\begin{bmatrix}a&-b\\b&a\end{bmatrix}y$，$y=P^{-1}x$．

第二步．用 $\boxed{\text{情形1中最简单情形}}$ 求解 $\dot{y}=\begin{bmatrix}a&-b\\b&a\end{bmatrix}$.

注1　P 的列向量为 μ 的特征向量 φ 的虚、实部！

注2　$\begin{bmatrix}a&-b\\b&a\end{bmatrix}$ 带给解答这样的函数 $e^{at}\sin bt$，$e^{at}\cos bt$.

情形2：A 为 $2n\times 2n$ 实矩阵，仅有一对非实特征值 $\mu, \bar{\mu}$ 且代数重数 $>$ 几何重数，i.e. $n > \dim \ker(A-\mu I)$

注 $\ker(A-\mu I)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的一个子空间！

这时需要广义特征空间：

$E(A,\mu) \triangleq \ker(A-\mu I)^n \subset \mathbb{C}^{2n}$.

它有 n 个线性无关的复特征向量（这里线性无关是在 $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ 中的）

$f_1+ig_1, \cdots, f_n+ig_n$ （f_j, g_j 为实向量）

更重要的：$g_1, f_1, \cdots, g_n, f_n$ 构成 E_μ 的一个基.

$\therefore \quad \mathbb{R}^{2n} = \mathrm{span}\{g_1, f_1, \cdots, g_n, f_n\}$.

令 $P=(g_1, f_1, \cdots, g_n, f_n)$. 它是一个实 $2n\times 2n$ 可逆矩阵.

则 $$AP = P\left(\begin{bmatrix} D & & \\ & \ddots & \\ & & D\end{bmatrix} + N\right) \qquad (29)$$

其中 $D=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a\end{bmatrix}$，共有 n 个 D，而 N 是一个幂零矩阵.

注意：对不同的以上选取的 $g_1, f_1, \cdots, g_n, f_n$，(29) 右的 $\begin{bmatrix} D & & \\ & \ddots & \\ & & D\end{bmatrix}$ 不变，而 N 有不同的表示. 但无论如何都有

$$\begin{bmatrix} D & & \\ & \ddots & \\ & & D\end{bmatrix} N = N \begin{bmatrix} D & & \\ & \ddots & \\ & & D\end{bmatrix}.$$

记 $\dot{x} = Ax \iff \dot{y} = \left(\begin{bmatrix} D & & \\ & \ddots & \\ & & D\end{bmatrix} + N\right) y, \quad y = P^{-1}x$.

~~D 带给~~ 这样可以求出 $y_j(t), j=1, \cdots 2n$ 而 $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_{2n}(t)\end{pmatrix}$

D 带给的是 $e^{at}\cos bt$, $e^{at}\sin bt$, N 带来的是 $q(t)$（它

是 t 的不超过 $2n-1$ 阶多项式）于是每特解 $y_j(t)$ 是函数

$$q_1(t)\, e^{at} \sin bt \,,\quad q_2(t)\, e^{at} \cos t \quad (q_1, q_2 \text{ 为多项式，阶} \le 2n-1)$$

的线性组合． $\boxed{\text{情形 2 完}}$

$\boxed{\text{情形 3} \quad A \text{ 有 } n \text{ 个相异的特征根}}$

设特征根为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$（实，相异）

$\mu_1, \overline{\mu_1}, \cdots, \mu_s, \overline{\mu_s}$（非实，相异）

$$r + 2s = n.$$

设 $\mu_k = a_k + i\, b_k$ （a_k, b_k 实且 $b_k > 0$）．

令 e_j 为 A 对应 λ_j 的特征向量（$j = 1, \cdots, r$）；

令 $\varphi_k, \overline{\varphi_k}$ 为 $\mu_k, \overline{\mu_k}$ 的特征向量（$k = 1, \cdots, s$）

记 $\varphi_k = f_k + i\, g_k$ （f_k, g_k 为实向量），$k = 1, \cdots, s$．

记 $(\forall\ 1 \le k \le s)$ $\quad E_{\mu_k} \triangleq \operatorname{span}\{g_k, f_k\}$． 2维子空间

~~则有以下~~ $(\forall\ 1 \le j \le r)$ $\quad E_{\lambda_j} \triangleq \operatorname{span}(e_j)$ 一维子空间．

则有以下性质：

1) $A: E_{\lambda_j} \to E_{\lambda_j}$, $\quad A: E_{\mu_k} \to E_{\mu_k}$． (30)

（即每个 E_{λ_j} 和 E_{μ_k} 均为 A 的不变子空间）．

(2) $\quad \mathbb{R}^n = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r} \oplus E_{\mu_1} \oplus \cdots \oplus E_{\mu_s}$．

现在令 $\quad P = (e_1, \cdots, e_r, g_1, f_1, \cdots, g_s, f_r)$．

2) P 可逆，且

$$AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \begin{bmatrix} a_s & -b_s \\ b_s & a_s \end{bmatrix} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

于是 $x' = Ax \Longleftrightarrow y' = \mathcal{A}y,\quad y = P^{-1}y$ (32).

其中 $\mathcal{A}$ 是 (31) 右的大矩阵.

记 $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_r(t) \\ \hat{y}_1(t) \\ \vdots \\ \hat{y}_s(t) \end{pmatrix}$，其中 $y_j(t) \in \mathbb{R}$；$\hat{y}_k(t) \in \mathbb{R}^2$.
$j = 1 \cdots r,\quad k = 1 \cdots s$.

故由 (30) 知：(32) 右 $\Longleftrightarrow$ 下列解耦方程组

$$y_j' = \lambda_j y_j,\quad j = 1, \cdots, r$$

$$\hat{y}_k = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}\hat{y}_k,\quad k = 1, \cdots, s.$$

这些我们都会了.

这时，$\boxed{\text{}}$ $y(t)$ 的每个分量均为下列函数的线性

组合：$e^{\lambda_j t}$ $(j = 1, \cdots, r)$，$e^{a_k t}\cos b_k t$，$e^{a_k t}\sin b_k t$
$(k = 1, \cdots, s)$.

$\boxed{\text{情形 3 完}}$

情形4. 一般情形

A 有 n 个特征值，有实、非实，有的代数重数等于几何重数，有的大于。

定理 2.7. 设 $A\in M_n$ 且 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$ 为 $\dot{x}=Ax$ 之解，则每个 $x_j(t)$ 是函数 $t^k e^{ta}\cos bt$，$t^l e^{ta}\sin bt$，$t^m e^{\lambda t}$，的线性组合。其中 $a+ib$ 取遍 A 的所有非实且 $b>0$ 的特征值；λ 取遍 A 的全体实特征值；对应每个 $\mu=a+ib\ (b>0)$，k 和 l 取遍 $0,1,\cdots,n-1$ 但均小于 A 的实标准型中最大的 μ 块的大小；对应每个实特征 λ，m 取遍所有 $0,\cdots,n-1$，但小于 A 的实标准型中的最大的 λ 块的大小。

注1　$e^{\lambda t}$ 由实特征贡献；且代重 = 几重的实特征贡献；$t^m e^{\lambda t}$ $(m>0)$ 由代数重数 > 几何重数的实特征贡献；$e^{ta}\cos bt$，$e^{ta}\sin bt$ 由代重 "=" 几重的非实复特征贡献；$t^k e^{ta}\cos bt$，$t^l e^{ta}\sin bt$ $(k,l>0)$ 由代重 ">" 几重数非实特征贡献。

注2　这样的函数一共 n 个！

注3　对应 λ/μ 的多项式的阶数是 λ 块最大块的大小。

§2.2.3 通过 A 的谱（即特征值）判断解的性质

我们不解方程，仅通过 A 的特征值的信息可推出下列结论。

推论1　设 $A\in M_n$ 的每个特征值均有负实部，则 $x'=Ax$ 的每个解 x 满足 $\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$.

注.　$x(t)=(x_1\cdots x_n)^T$.　$\|x(t)\|^2=\sum\limits_{j=1}^n x_j(t)^2$ ！

证.　$\because$ $|\cos bt|\le 1$, $|\sin bt|\le 1$ 且 $\lim\limits_{t\to+\infty} t^k e^{at}=0$ as $a<0$.

$\therefore$ 由定理 2.7 知，每个解 x 的~~每一个~~第 j 个 $x_j(t)$ 满足：

$$|x_j(t)|\to 0 \quad \text{as} \quad t\to+\infty.$$

$$\therefore\quad \|x(t)\|\to 0 \quad \text{as} \quad t\to+\infty.$$

※.

推论2　如果 $\dot{x}=Ax$ 的每个解都随 $t\to+\infty$ 而趋于 0，则 A 的所有特征值有负实部.

证　Case1 设 $\mu=a+ib$ 是 A 的一个特征值，$a\ge 0$，$b\ne 0$.

令 ~~则~~ $x_1(t)=e^{at}\cos bt$，$x_2(t)=e^{at}\sin bt$，

$$x_j(t)\equiv 0,\quad j=3,\cdots,n.$$

~~[illegible]~~ 则由定理1，$x(t)\triangleq(x_1(t),x_2(t),0\cdots 0)^T$ 为 $\dot{x}=Ax$ 之解．当 $t\to+\infty$ 时，$\|x(t)\|\not\to 0$

矛盾．

Case2　设实根 $\lambda\ge 0$ 为 A 的一个特征．

令　$x_1(t)=e^{\lambda t}$，　$x_j(t)\equiv 0$，$j=2,\cdots,n$.

则同样可导出矛盾.

※.

推论2.3　当 A 的每个特征值都有正实部时，$\dot{x}=Ax$ 的每个解 $x(t)$ 满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}\|x(t)\|=+\infty$.

<u>习题</u> 设 $A = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & & a & -b \\ & & b & a \end{bmatrix}$, $b>0$, $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$.

在不同方程的情形下，证明 (i) 若 $\lambda>0$, 则 $\dot{x}=Ax$ 必有一个解（至少一个解）$x(t)$ s.t. $\|x(t)\|\to+\infty$ as $t\to+\infty$ (ii) 若 $a>0$, 则 $\dot{x}=Ax$ 必有一解 $x(t)$ s.t. $\|x(t)\|\to+\infty$ as $t\to+\infty$. (iii) 若 $a=0$, $\dot{x}=Ax$ 的~~解~~会有那么性质的解？

思考题： <u>命题 A</u> 令 a_i $(i=\cancel{0}, \cdots n)$ 为实数。设 $x(\cdot)$ 为下列 n阶 O.D.E 的一个解：

$$\cancel{a_0}\, x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x = 0, \quad t\in\mathbb{R}. \qquad (*)$$

若 $\exists\ t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ s.t. $x(t_j)=0$ $\forall\ j=1,\cdots,n$.

则 $x(\cdot)\equiv 0$.

<u>已知</u> 当 $t_n - t_1 < d \triangleq \left\{ \frac{\pi}{|\mathrm{Im}\lambda|} \;\middle|\; \lambda \text{ 为}(*)\text{特征多项式之根} \right\}$ 时，命题 A 成立.（见 S. Qin, G. Wang, Journal of Differential Equations, 263(2017), Lemma 2.10）

猜想： $\forall\ t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ 满足 $|t_i - t_j| \neq d$,

命题 A 成立。

注 $(*)$ 的特征~~多项式~~方程 为： $\cancel{a_0}\,\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$.

它也友阵 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_n & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$ 的特征多项式.

§2.3. 线性算子与 O.D.E

令 $A\in M_n$。视其为 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 的一个线性映射。

两个重要量: $\det(A)$ 和 $tr(A)\triangleq\sum_{i=1}^n a_{ii}$.

任给可逆阵 P，则 $\det(PAP^{-1})=\det A$; $tr(PA^{-1}P)=tr(A)$.

所以 A 的行列式 和迹 均为相似变化下的不变量！

于是，任给一个 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性变换 T. 任给一组 $\mathbb{R}^n$ 的基 $(f_1\cdots f_n)$. 令 A 为 T 在这组基下的矩阵表示. 可定义

$$\det(T)\triangleq\det(A);\quad tr(T)\triangleq tr(A). \tag{33}$$

(33) 不依赖 $(f_1,\cdots,f_n)$ 的选取！

记 $A=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $\det(A)$ 表示以 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为棱的 $\mathbb{R}^n$ 中的平行多面体的有向体积。当 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 线性相关时，它们构成 $\mathbb{R}^{n-m}$ $(m\geq1)$ 中一个多面体，其在 $\mathbb{R}^n$ 中体积为 0.

设 Π 是 $\mathbb{R}^n$ 中以 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 为棱的平行多面体（或称为由 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 生成的多面体）。其确切定义为：

$$\{\alpha_1\eta_1+\cdots+\alpha_n\eta_n \mid 0\leq\alpha_i\leq1,\ i=1,\cdots,n\}。$$

则 $T\Pi$（或 $A\Pi$）为 $\mathbb{R}^n$ 中由 $T\eta_1,\cdots,T\eta_n$ 生成的多面体。

$T\Pi$ 的有向体积为：

$$\mathrm{Vol}_{\text{有向}}\, T\Pi = \det(T\eta_1, \cdots, T\eta_n) = \det A(\eta_1\cdots\eta_n)$$

$$= \det A \det(\eta_1\cdots\eta_n) = \det T\, \mathrm{Vol}_{\text{有向}}\Pi。\quad (34)$$

所以，$\det T$ 是在变换 T 下多面体 π 的有向体积的变化因子。注意：(34) 对所有多面体 π 成立。

<u>定理 2.8</u>（行列式与迹的关系） 当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$$\det(E + \varepsilon T) = 1 + \varepsilon\, tr(T) + O(\varepsilon^2).$$

其中 E 为单位变换（或恒同变换）。

<u>证明</u> $E + \varepsilon T$ 的行列式等于 $E+\varepsilon T$ 的特征值之积，而 $E+\varepsilon T$ 的特征值为 $1+\varepsilon\lambda_i$，其中 λ_i 为 T 的特征值，所以 $\det(E+\varepsilon T) = \prod_{i=1}^{n}(1+\varepsilon\lambda_i) = 1+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + O(\varepsilon^2)$。

证毕

<u>注 1</u> 设 π 是以 $e_1, \cdots, e_n$ 为棱的平行多面体。因为

$$(E+\varepsilon T)e_i = Ee_i + \varepsilon a_{ii}e_i + \sum_{i\neq j}\varepsilon\, a_{ji}\, e_j,$$

所以，$(E+\varepsilon T)$ 在 e_i 方向的变化为 εa_{ii}，而在其它方向 e_j 变化为 εa_{ij}。

<u>注 2</u> 由定理 2.8 知：

$$\mathrm{Vol}_{\text{有向}}(E+\varepsilon T)\Pi = (1 + \varepsilon\, tr(T))\,\mathrm{Vol}_{\text{有向}}(\Pi) + O(\varepsilon^2).\quad (35)$$

注3 由注1和注2得：一个平行多面体的棱作一些微小变化，则对平行多面体有向体积的变化，而它在另一些棱上的方向上的变化（对体积）仅是一个二阶量的作用。

这么理解：以 $e_1, \cdots, e_n$ 为棱的多面体 π 在变换 $(E+\varepsilon T)$ 下有了改变。这个变换改变了 π 的每个棱，以 e_1 为例：

$$(E+\varepsilon T)e_1 = Ee_1 + \varepsilon a_{11}e_1 + \sum_{j=2}^{n} \varepsilon a_{j1} e_j$$

$(E+\varepsilon T)e_1$ 在 e_1 方向的改变为 εa_{11}。再由(35)知 εa_{11} 对 $\mathrm{Vol}_{有向}\pi$ 的改变在 e_1 方向起主要贡献，而在其它 e_j 方向的改变 $\varepsilon a_{j1}e_j$ 都进了(35)在 $O(\varepsilon^2)$ 中去了！

考虑算子 O.D.E. $\dot{x}(t) = Tx(t)$，$t \in \mathbb{R}$. (36)

注 当 T 给定后，我们在 $\mathbb{R}^n$ 中有了方向场 $\{Tx \mid x \in \mathbb{R}^n\}$

$\therefore$ (36) 有定义。求解(36)就是求解 e^{Tt}.

而 $e^T \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}$.

(36) 定义了一个流 $\{\Phi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$：$\Phi_t(v) = \varphi(t)$，($v \in \mathbb{R}^n$) 其中 $\varphi(\cdot)$ 为 $\dot{x} = Tx$，$x(0) = v$ 之解。即

$$\Phi_t = e^{tT}。 \quad (37)$$

定理 2.9 设 T 为 $\mathbb{R}^n$ 上一线性算子（亦记为 $T\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$）。

(i) $$e^T = \lim_{m\to\infty}\left(E+\frac{T}{m}\right)^m。$$

(ii) $$\det e^T = e^{tr(T)}.$$

(iii) e^T 是可逆变换．

(iv) e^T 保持 $\mathbb{R}^n$ 的方向（即 $\det e^T>0$）.

证明 (i) $$e^T-\left(E+\frac{T}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}-\frac{C_k^m}{m^k}\right)T^k。$$

（上面用二项式公式）。上述级数收敛.

又因为 $\frac{1}{k!} \ge \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{m\cdots m}\frac{1}{k!}$,

所以 右端级数系数非负。故

$$\left\|e^T-\left(E+\frac{T}{m}\right)^m\right\| \le \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}-\frac{C^m}{m^k}\right)\|T\|^k$$

$$= e^{\|T\|}-\left(1+\frac{\|T\|}{m}\right)^m \longrightarrow 0 \quad \text{as } m\to\infty.$$ #

(ii), 由(i)有: $$\det e^T = \det\left(\lim_{m\to\infty}\left(E+\frac{T}{m}\right)^m\right)$$

$$= \lim_{m\to\infty}\det\left(E+\frac{T}{m}\right)^m \qquad (38)$$

（上面极限与 det 能交换的原因：矩阵的行列式是它元素的多项式，故连续。） 由定理 2.8 有：当 $m\gg 1$ 时，

$$\det\left(E+\frac{T}{m}\right)^m = \left[\det\left(E+\frac{T}{m}\right)\right]^m = \left(1+\frac{1}{m}tr(T)+O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right)^m \qquad (39)$$

（注意：$\forall a\in\mathbb{R}$，$\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{a}{m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right)^m=e^a$！）

于是，由(38)和(39)得：$\det e^T=e^{tr(T)}$。

(iii) $e^Te^{-T}=e^{-T}e^T=E$.

※.

(iv) 由(ii)得。

<u>定理 2.10</u>（常系数情形的刘维尔定理）

Φ_t 是用因子 $e^{t\,tr(T)}$ 乘以任何一平行多面体的体积.

即，若 π 是一平行多面体，则 $Vol_{有向}(\Phi_t\pi)=e^{t\,tr(T)}$

$Vol_{有向}(\pi)$.

<u>证明</u> $Vol_{有向}(\Phi_t\pi)$

$$=\det\Phi_t\cdot Vol_{有向}(\pi)\qquad(\text{by }(34))$$

$$=\det(e^{tT})\,Vol_{有向}(\pi)\qquad(\text{by }(37))$$

$$=e^{t\,tr(T)}\,Vol_{有向}(\pi)\qquad(\text{by 定理 2.9 (ii)})。$$ ※

<u>定理 2.11</u> 若 $tr(T)=0$，则 Φ_t 把每个平行多面体变到另一个体积相同的平行多面体。

※.

<u>证明</u> 这是定理2.10的推论。

现在考虑 $x'(t)=A(t)x(t)$。

设 $\varphi^1(\cdot),\cdots,\varphi^n(\cdot)$ 为其 n 个解。令 $W(\cdot)$ 为这 n 个解的 Wronski 行列式，即

$$W(t)=\det\left(\varphi^1(t)\ \cdots\ \varphi^n(t)\right)$$

（$\varphi^i(t)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中列向量！）

则刘维尔定理（定理 2.2）告诉我们：

$$\dot{W}(t)=Tr(A(t))W(t)$$

或 $$W(t)=\exp\left\{\int_{t_0}^{t}Tr(A(s))ds\right\}W(t_0).\quad (t_0\in\mathbb{R})$$

这个定理另一说法如下：

记 $\Phi(t,t_0)=\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}$（$\Phi(t)$ 为 $A(t)$ 的基本解矩阵）。则 $\Phi(t_0,t_0)x_0$ $(x_0\in\mathbb{R}^n)$ 是初值问题：

$$x'=A(t)x,\quad x(t_0)=x_0$$

的解。$\Phi(t,t_0)$ 也称为 (t_0,t) 上一推进映射。

固定 τ。考虑 $\Phi(\tau+\Delta,\tau)$ $(\Delta<<1)$。设 $\varphi(\cdot)$ 为 $x'=A(t)x$ 任一解。则有

$$\varphi(\tau+\Delta)=\varphi(\tau)+A(\tau)\varphi(\tau)\Delta+o(\Delta)\quad (\because \varphi \text{ 为解})$$

但是，$\varphi(\tau+\Delta)=\Phi(\tau+\Delta,\tau)\varphi(\tau)$。所以

$$\varphi(\tau+\Delta,\tau)\varphi(\tau)=\left(E+\Delta A(\tau)\right)\varphi(\tau)+o(\Delta).\qquad (40)$$

因为 $\varphi(\cdot)$ 为任一解，所以 $\varphi(\tau)$ 可取 R^n 中任一向量。故由 (40) 得

$$\Phi(\tau+\Delta,\tau) = E + \Delta A(\tau) + o(\Delta). \qquad (41)$$

由 (41) 和定理 2.8 有

$$\det(\Phi(\tau+\Delta,\tau)) = 1 + \Delta\, tr(A(\tau)) + o(\Delta)。 \qquad (42)$$

另一方面，$W(\tau)$ 是解组在 τ 的值生成的平行多面体在的有向体积，变换 $\Phi(\tau+\Delta,\tau)$ 把这些值变成同一组解在 $\tau+\Delta$ 的 ~~有向体积~~ 值。由新值生成的平行多面体的体积为 $W(\tau+\Delta)$。因此，

$$W(\tau+\Delta) = \det(\Phi(\tau+\Delta,\tau))\, W(\tau) \quad (\text{由 } (34))$$

$$= [1 + tr(A(\tau))\Delta + o(\Delta)]\, W(\tau)。 \quad (\text{by } (42))$$

上式推出

$$\left.\frac{d\,w(t)}{dt}\right|_{t=\tau} = tr(A(\tau))\, w(\tau).$$

刘维尔定理由此得证。 ※

从刘维尔定理，我们还有下列推论：

$W(t_0)$ 是一组解在 t_0 时刻的值生成的平行多面体的体积，$W(t)$ 是同一组解在 t 时刻的值生成的平行多面体体积。$\Phi(t,t_0)$ 是将这组解在 t_0 时刻的值变到

t 时刻值的线性变换。所以

$$W(t) = \det(\Phi(t,t_0))\, W(t_0) \qquad (\text{by } (3.4)).$$

上式，结合刘维尔定理，推出

$$\det \Phi(t,t_0) = \exp\left[\int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} A(s)\, ds\right]。$$

第三章　常微分方程的稳定性理论

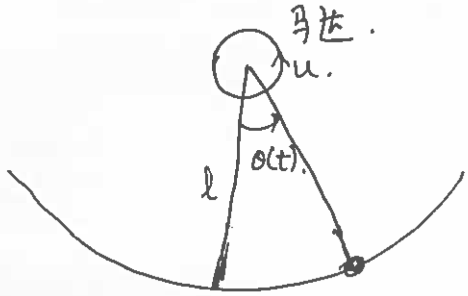
§3.1. 收点、源点和双曲点.

令 $U\subseteq\mathbb{R}^n$ 为一开集，$f: U\to\mathbb{R}^n$ 为一给定的方向场. 考虑

$$\dot{x}=f(x), \qquad (1)$$

- 平衡点（平衡状态）：$\bar{x}\in U$ s.t. $f(\bar{x})=0$.
- 平衡解：$x(t)\equiv\bar{x}$.
- 过去人们只对"稳定"平衡解感兴趣. 现在对某些不稳定的也产生了兴趣

例1　摆的运动方程.



摆运动的平面图：摆锤的质量为 m. 摆杆长 l（忽略质量）

$\theta(t)$ 是时间 t 时从铅直线逆时针方向转到锤杆的角度. 于是，摆的角速度为 $\frac{d\theta}{dt}$，速度为 $l\frac{d\theta}{dt}$. 所以摩擦力为 $-kl\frac{d\theta}{dt}$，其中 k 为非负常数（摩擦系数），这个力与圆相切（方向与运动反向相反，取负号）.
向下重力 mg 有切于圆的分量 $-mg\sin\theta(t)$ 这个力是作用在摆锤上而使它运动的力）。所以在 t 时刻，与圆相切的总力是：

$$F=-\left(kl\frac{d\theta}{dt}+mg\sin\theta\right)+u(t).$$

其中 $u(t)$ 是由马达提供的外力.
单位化后（取 $l=1$, $m=1$, $g=1$），牛顿第二定律（$F=ma$）给出：

$$\ddot{\theta} = -k\dot{\theta} - \sin\theta + u(t). \qquad (2)$$

常识：杆垂直向下有一个平衡点，它"稳定"；杆垂直向上有一个平衡点，它不稳定，驱动的作用是使得它的"不稳定"变成稳定.

在没有外力时 (i.e. $u=0$)，运动方程为

$$\ddot{\theta} = -k\dot{\theta} - \sin\theta. \qquad (3)$$

令 $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$. 则 (3) $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 - k x_2. \end{cases} \qquad (4)$$

$\left(\text{or} \quad \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{pmatrix} \triangleq f(\vec{x}) \quad \vec{x} = (x_1, x_2) \right).$

$(0,0)$ 和 $(\pi, 0)$ 均为 (4) 的平衡点. (原点：$f_1(0,0)=0$, $f_2(0,0)=0$; $f_1(\pi,0)=0$, $f_2(\pi,0)=0$) 前者代表摆铅直向下且静止，后者代表摆铅直向上且静止.

方程 (4) 的方向场：$(x_2, -\sin x_1 - k x_2)$，它在点 (x_1, x_2) 的导数为

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -k \end{bmatrix}. \quad \text{由此} \Rightarrow$$

$$D(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{bmatrix} \qquad \boxed{\cancel{\text{当 } k>0 \text{ 时}}}$$

当 $k>0$ 时，它的特征值为 $\frac{1}{2}\{-k \pm \sqrt{k^2-4}\}$ 有负实部；

而 $D(\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -k \end{bmatrix}$ 特征值为 $\frac{1}{2}\{-k \pm \sqrt{k^2+4}\}$，

其中一特征值为正.

以后我们将证明：$(0,0)$ 为稳定平衡点；而 $(\pi,0)$ 不稳定.

另外注意：　$-s = x_1$ 在 $x_1=0$ 附近(由 Talor 公式) 近似为 $-x_1+o(x_1)$.

称
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - k x_2 \end{cases} \qquad (4)'$$

为(4) 在 $(0,0)$ 的线性化．其右端矩阵正是 $D(0,0)$.

而 (4) 在 $(\pi,0)$ 的线性化为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - k x_2 \end{cases} \qquad (4)''.$$

其右端矩阵正是 $D(\pi,0)$.

以上面例子观察到：　线性化方程 $(4)'$ 的矩阵 ~~(右端的)~~ 在 $(0,0)$ 点为 $D(0,0)$ 其全体特征值的实部均为负数，R 非线性方程 (4) 在 $(0,0)$ 稳定；线性化方程 $(4)''$ 的矩阵在 $(0,0)$ 点为 $D(\pi,0)$ 它有一个正特征，而 (4) 在 $(\pi,0)$ 附近不稳定。

例子 1 完

~~设 E 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间~~

§ 1.1.1．　線性微分方程．

设　$T \in L(\mathbb{R}^n) \triangleq \{$全体 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性映射$\}$.

令　$T e_k = a_{1k} e_1 + \cdots + a_{nk} e_n,\quad k=1,\cdots,n.$

则　a_{jk} 是 Te_k 在基 $(e_1 \cdots e_n)$ 下的第 j 个坐标．

由 a_{jk} $(j=1\cdots n,\ k=1\cdots n)$ 定义矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- $e^T \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}$. 级数收敛在下列意义：

$e^T \in L(\mathbb{R}^n)$ $\qquad \left\| \sum_{k=0}^{N} \frac{T^k}{k!} - e^T \right\|_{L(\mathbb{R}^n)} \to 0$ as $N \to \infty$

而 $\|T\|_{L(\mathbb{R}^n)} \triangleq \max\{\|Tx\|_{\mathbb{R}^n} \mid \|x\|_{\mathbb{R}^n} \le 1\}$.

可以推出：

- $e^T(e_1 \cdots e_n) = (e_1 \cdots e_n)\, e^A$.

- $\mathbb{R}^n$ 中任一方向场定义一个 ODE（第一章）

综上，我们可以（也更应该）研究如下 ODE：给定 $T \in L(\mathbb{R}^n)$

$$\dot{x}(t) = T x(t), \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (6)$$

(6) 的解是一个向量值函数 $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$.

- $\dot{x}(t)$ 的意味：either $\dot{x}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$.

右端 lim 在 $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ 意义下.

or 记 $x(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) e_i$

$$x'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) e_i$$

（坐标意义下）

- 设在基 $\beta \triangleq (e_1 \cdots e_n)$ 下，T 的矩阵表示为 A. 则

(6) $\Longleftrightarrow$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad (7)$$

(7) 的解是坐标函数 $t \to \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$

(6) 与 (7) 解的关系由 (5) 给出：

若 $x(t)$ 为 (6) 的解，记 $x(t)=\sum_{i=1}^{n} x_i(t)e_i$ 则 $(x_1\cdots x_n)^T$ 为 (7) 的解；

若 $(x_1\cdots x_n)^T$ 为 (7) 的解，则 $x(t)\triangleq\sum_{i=1}^{n} x_i(t)e_i$ 是 (6) 的解.

<u>$\mathbb{R}^n$ 中子空间 E 中的微分方程</u>. 设 $T\in L(E)$.

则 $\dot{x}(t)=Tx(t)$ 定义了 E 上的 ODE. 它的解 $t\to x(t)$

是 E 上的向量值函数.

求解这个方程的步骤与上章介绍的 $\overset{\text{求解}}{\dot{x}}=Ax$ 一样.

第一步，通过分析 T 的特征值，将 E 作直和分解：

$$E=E_1\oplus E_2\oplus\cdots\oplus E_k, \qquad —(8)$$

每个 E_j 都是 T 对应特征值的特征或广义特征空间

(对复特征~~值~~取 $\mu,\bar{\mu}$，取 μ 的特征向量 (广义特征向量) 的实、虚部张成一个实空间)，这些 E_j 都是 T 的

不变子空间，i.e. $\forall x\in E_j$，$Tx\in E_j$.

故 $T=T_1\oplus T_2\oplus\cdots\oplus T_k$，$T_j\triangleq T|_{E_j}$.

第二部. $\forall x$，记 $x=x_1\oplus x_2\oplus\cdots\oplus x_k$ (按 (8)).

则 $\dot{x}(t)=Tx(t)\iff$ 解耦方程组
$$\begin{aligned} x_1'&=T_1x_1\\ &\ \vdots\\ x_k'&=T_kx_k. \end{aligned}$$

每个 T_j 只有一个特征值. 且 $T_j=S_j+N_j$.

S_j 对应对角矩阵，N_j 对应幂零矩阵.

第三步. 求出每个 $e^{T_j t}$ 则 $e^{Tt} = e^{T_1 t} \oplus \cdots \oplus e^{T_k t}$.

§3.1.2. 几个定义与定理

设 E 为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 设 $A \in L(E)$.

考虑 $\dot{x} = Ax$. (8)

<u>定义3.1</u> 若 A 的特征值均有负实部，则原点 $0 \in E$ 称为 A 的收点，而 e^{tA} 称为收缩流.

<u>定理3.1</u> 设 $A \in L(E)$. 则下列命题等价：

(a) 原点是 A 的收点；

(b) 对 E 中任何范数 $|\cdot|$，$\exists$ $k>0$, $b>0$ s.t. $\forall t\geq 0$, $\forall x \in E$ 有

$$|e^{tA}x| \leq k e^{-tb}|x|.$$

(c) $\exists$ $b>0$ 和 E 上的一个基 β s.t. E 上对应 β 的范数 $|\cdot|_\beta$ 满足：$\forall t\geq 0$ $\forall x \in E$ 有

$$|e^{tA}x|_\beta \leq e^{-tb}|x|_\beta.$$

<u>注</u> 设 $(f_1,\cdots,f_r) \triangleq \beta$ 为 E 的一个基. 则 $\forall x \in E$

$$x = \sum_{j=1}^{r} x_j f_j \quad (x \leftrightarrow (x_1 \cdots x_r)).$$

$$\|x\|_\beta \triangleq \left(\sum_{j=1}^{r} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

<u>定理3.1之证明</u> 由范数的等价性 $\Rightarrow$ "(c) $\Rightarrow$ (d)". 由第二章最后部分的推论2.2知：(b) $\Rightarrow$ (a). 由第二章定理2.7知：(a) $\Rightarrow$ (b).

于是，我们只需证明下列引理：

<u>引理 3.1</u> 设 $A \in L(E)$. 假设 $\exists\, \alpha, \beta$ s.t. A 的每个特征值 λ 都满足 $\alpha < \mathrm{Re}\,\lambda < \beta$。则 E 有一个基 s.t. 对应的内积 $\langle \cdot , \cdot \rangle$ 和范数 $|\cdot|$ 满足

$$\alpha |x|^2 \le \langle Ax, x \rangle \le \beta |x|^2 , \quad x \in E. \qquad (10)$$

先假设上面引理证了。我们可以对 $\dot{x} = Ax$ 作先验估计：

设 $\mathcal{B}$ 为引理 3.1 中的基，$\mathcal{B} = (\tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_r)$ $(\dim E = r)$

设 $x(t) = \sum_{i=1}^{r} x_i(t)\, \tilde{e}_i$ 为 $\dot{x} = Ax$ 的一个解.

(E 对应 $\mathcal{B}$ 的基、内积为：$|x| = \left(\sum_{i=1}^{r} x_i^2 \right)^{\frac12}$,

$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{r} x_i y_i \quad \forall\; x = \sum_{i=1}^{r} x_i \tilde{e}_i,\ y = \sum_{j=1}^{r} y_j \tilde{e}_j$)

注意 $$\frac{d}{dt} |x(t)| = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^{r} x_j(t)^2 \right)^{\frac12} = \frac{\sum_{j=1}^{r} x_j(t)\, x_j'(t)}{\left(\sum_{j=1}^{r} x_j(t)^2 \right)^{\frac12}}.$$

$\boxed{由\ \cancel{\dot{x} = Ax}}$ 由此推出：

$$\frac12 \frac{d}{dt} |x(t)|^2 = |x(t)| \frac{d}{dt} |x(t)| = \langle x(t), x'(t) \rangle \qquad —(11)$$

由 $\dot{x} = Ax \Rightarrow$: $\langle x(t), x'(t) \rangle = \langle x(t), Ax(t) \rangle$ —(12)

(11), (12) 结合 (10) $\Rightarrow$

$$\alpha \le \frac{\frac{d}{dt} |x(t)|}{|x(t)|} \le \beta \quad 或 \quad \alpha \le \frac{d}{dt}\left(\ln |x(t)| \right) \le \beta .$$

两边从 0 到 $t > 0$ 积分 $\Rightarrow$

$$\alpha t \le \ln \frac{|x(t)|}{|x(0)|} \le \beta t. \quad 从而$$

$$e^{\alpha t}|x(0)| \le |x(t)| \le e^{\beta t}|x(0)| \qquad (13)$$

现设 (a) 成立，则引理3.1条件满足. 于是由(13) ⇒

$\forall \hat{x}$ 取 $x(0)=\hat{x}$，则

$$e^{\alpha t}|\hat{x}| \le |e^{At}\hat{x}| \le e^{\beta t}|\hat{x}|.$$

故 (b) 成立. ∴ "(a) ⇒ (b)" 已证. 这就完成了定理3.1的证明. ※.

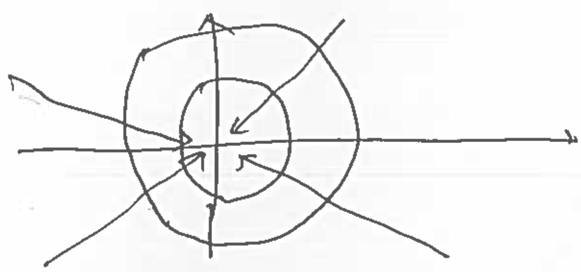
剩下任务：证明引理3.1. 我们先给一个注.

注 收敛性质的几何解释：假设 $0\in\mathbb{R}^n$ 是 $\dot{x}=Ax$ 的一个收敛. 设 $|\cdot|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中由内积导出的范数. 设

$$S_a \triangleq \{x\in\mathbb{R}^n : |x|=a\},\quad a>0.$$

由于 $|x(t)|$ 有负导数，故过轨线如下图所示均指向球内部.

（上面的 $|\cdot|$ 由引理3.1给出）.



引理3.1之证明　仅证(10)的第二个不等式.（第一个作习题）

设 c 为一实数满足 $\operatorname{Re}\lambda < c < \beta$ $\forall$ A 的所有特征值 λ.

首先假设 A 为半单（i.e. 对应的矩阵可对角化）. 则

E 有直和分解

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_s.$$

其中 E_j 是 A 对应的实特征值 λ_j 的特征向量；F_k 是 A 的一个二维子空间，它有一个基 (g_k, f_k) s.t. $A|_{F_k}$ 在基 (g_k, f_k) 下的矩阵为 $\begin{bmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{bmatrix}$，而 $a_k + i b_k$ 为 A 的非实特征值.

由假设有：$\lambda_j < c$，$a_k < c$. 在 E 上定义内积如下：

$$\langle \hat{e}_j, \hat{e}_j \rangle = \langle f_k, f_k \rangle = \langle g_k, g_k \rangle = 1$$

而 $\hat{e}_j$，f_k 和 g_k 之间所有其它向量之内积皆为 0. 直接计算 $\Rightarrow$

$$\langle A\hat{e}_j, \hat{e}_j \rangle = \lambda_j < c, \quad \langle A f_k, f_k \rangle = \langle A g_k, g_k \rangle = a_k < c.$$

从而 $\forall\, x \in E$，$\langle Ax, x \rangle \leq c|x|^2$. 这正是我们需求的！

现设 $A \in L(E)$. 给 E 一个基 s.t. A 对应的矩阵有实标准型：$A = \mathrm{diag}\{A_1, \cdots, A_p\}$ (for some p ~~$p \leq r+s$~~)，其中每个 A_j 形为

$$\begin{bmatrix} \alpha_j & & \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots\ 1 & \alpha_j \end{bmatrix} \text{ 或 } \begin{bmatrix} D_j & & \\ I & \ddots & \\ & \ddots\ I & D_j \end{bmatrix}, \quad D_j = \begin{bmatrix} \alpha_k & -\beta_k \\ \beta_k & \alpha_k \end{bmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{—— (14)}$$

设 E_j 为对应 A_j 的 E 的子空间。如果能找到 E_j 的一个基 s.t. 引理1 的结论关于 A_j 成立，则这些基合在一起构成的 E 的基将使 A 满足引理1 的结论。为此，我们可以假设 A 是 (14) 中两种矩阵对应的样子之一.

- 当 A 为 $(14)_1$ 时，$A = S + N$，其中 S 对应矩阵 $\alpha_j I$ 而

N 对应矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{bmatrix}$。于是, 基 $\{\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_r\}$ 均为 S'的 特征向量

且 $N\tilde{e}_1 = \tilde{e}_2, \cdots, N\tilde{e}_{n-1} = \tilde{e}_n, N\tilde{e}_n = 0$. 设 $\varepsilon > 0$ 很小。

定义一个新基: $\mathcal{B}_\varepsilon = \{\tilde{e}_1, \frac{1}{\varepsilon}\tilde{e}_2, \cdots \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\tilde{e}_n\}$

$$\triangleq \{\hat{e}_1, \cdots, \hat{e}_n\}.$$

显然, $\mathcal{B}_\varepsilon$ 也由 S 的特征向量组成. 此时有:

$N\hat{e}_1 = \varepsilon\hat{e}_2, \cdots \; N\hat{e}_{n-1} = \hat{e}_n, \; N\hat{e}_n = 0.$

于是, A 在 $\mathcal{B}_\varepsilon$ 下的矩阵为: $\begin{bmatrix} \alpha_j & & \\ \varepsilon & \ddots & \\ & \varepsilon & \alpha_j \end{bmatrix}$.

用 $\langle x, y\rangle_\varepsilon$ 表示 $\mathcal{B}_\varepsilon$ 的内积. 则

$$\langle Ax, x\rangle_\varepsilon \longrightarrow \langle Sx, x\rangle_\varepsilon \quad \text{as } \varepsilon \to 0.$$

因此, 当 ε 充分小时, 基 $\mathcal{B}_\varepsilon$ 满足块 $(14)_1$ 的引理引.

#

• 当 A 为 $(14)_2$ 时, 可类似证明. (习题).

定义 3.2（源点） 线性流与收缩流是完全相反，它里的特性是扩张：原点称为源点：A 的每个特征值都有正实部。

定理 3.2 若 $A \in L(E)$，则下列等价：

(a) 原点是 $\dot{x} = Ax$ 的源点；

(b) 对 E 上任何范数，存在 $L > 0$，$c > 0$ s.t. $\forall t \geq 0$，$\forall x \in E$，

$$|e^{tA}x| \geq L|x|;$$

(c) $\exists\, a > 0$ $\exists$ E 的一个基 β s.t. $\forall t \geq 0$，$\forall x \in E$，

$$|e^{tA}x|_\beta \geq e^{ta}|x|_\beta.$$

注. 它的证明与定理 3.1 的类似.

定义 3.3（双曲流） 当 A 的特征值都有非零实部时，e^{tA} 称为双曲流.

定理 3.3 设 $A \in L(E)$，设 e^{tA} 是一个双曲流，则

$$E = E^s \oplus E^u$$

其中 E^s，E^u 都是 A 的不变子空间 且 $e^{tA}|_{E_s}$ 为 E_s 上的收缩流；$e^{tA}|_{E^u}$ 为 E^u 上的扩张流.
此分解唯一.

注 本质是：$A = A^s \oplus A^u$，A^s ~~在 E^s 上~~ $: E^s \to E^s$ 对应的特征值均有负实部；$A^u: E^u \to E^u$ 对应的特征值均有正实部。$e^{tA}|_{E^s} = e^{tA_s}$；

$$e^{tA}|_{E^u} = e^{tA_u}.$$

s ~ stable，u ~ unstable.

<u>定理3-3之证明</u>　给E一个基 s.t. A对应实标准型。安排这个基的顺序 s.t. 标准型矩阵首先对应具有负实部的特征值值块，然后是对应正特征值的块。记前面块组表示A到子空间 $E^s\subset E$ 的限制，而其余块则表示A到 $E^u\subset E$ 的限制。

由于E^s在A下不变，所以在e^{tA}下也不变。令 $A_s \triangleq A|_{E^s}$，$A_u = A|_{E^u}$. 则 $e^{tA_s} = A^{tA}|_{E^s}$，$e^{tA_u} = e^{tA}|_{E^u}$.

由定理3-1和定理3-2知 e^{tA_s} 收缩，A^{tA_u} 扩张.

于是 $A = A_s \oplus A_u$.

下证唯一性. 设 $F^s \oplus F^u$ 为E的另一个这样的分解，则 $e^{tA}|_{F^s}$ 为收缩流，$e^{tA}|_{F^u}$ 为扩张流. 设 $x\in F^s\subset E$.

则 $x = y+z$，$y\in E^s$，$z\in E^u$. 当 $t\to+\infty$ 时，

$e^{tA}x\to 0$. 所以 $e^{tA}y\to 0$，$e^{tA}z\to 0$. (直和分解)

但 $\forall\ t\geq 0$，$|e^{tA}z|\geq e^{ta}|z|$，$a>0$.

∴ $|z|=0$.

∴ $x\in E^s$，由此 $F^s\subset E^s$.

类似可证 $E^s\subset F^s$. ∴ $F^s=E^s$. 故 $F^u=E^u$. #

§3.2 平衡点的稳定性.

设 $W\subset\mathbb{R}^n$ 为一开区域（开区域一般指连通开集）。

设 $f: W\to\mathbb{R}^n$ 为一方向场. 假设 $f\in C^1(W)$.

考虑常微分方程:

$$x'(t)=f(x(t)),\quad t\in\mathbb{R}. \tag{14}$$

设 $\underbrace{\bar{x}}_{\in W}$ 为 f 的一个平衡点, i.e. $f(\bar{x})=0$, 则 $x(t)\equiv\bar{x}$ $(t\in\mathbb{R})$ 为 (14) 的一个解, 称之为 (14) 的平衡解.

- 当 $Df(\bar{x})$ 的所有特征值均有负实部时, $\bar{x}$ 称为(14)的收点.

- 目的: 令 $\delta\in W$ s.t. $\bar{x}+\delta\in W$. 希望知道当 $|\delta|$ 很小时, $\dot{x}=f(x)$, $x(0)=\bar{x}+\delta$ 的解 $x_\delta(t)$ $(t\in\mathbb{R})$ 的长时间行为, i.e., 当 $t\to+\infty$ 时, $x_\delta(t)$ 的行为.

- 推导和结果:

令 $z(t)=x_\delta(t)-\bar{x}$ $(x\in\mathbb{R})$. 则对任意固定的 $t\in\mathbb{R}$,

$$f(x_\delta(t))=f(\bar{x})+Df(\bar{x})(x_\delta(t)-\bar{x})+o(|x_\delta(t)-\bar{x}|)$$

$$=Df(\bar{x})z(t)+o(|z(t)|).$$

- 称 $\dot{z}(t)=Df(\bar{x})z(t)$ 为方程(14)在 $\bar{x}$ 的线性化方程.

定理 3.4 设 $\bar{x}\in W$ 为(14)的收点. 假设 $\exists\, c>0$ s.t. $Df(\bar{x})$ 的所有特征值的实部均小于 $-c$. 则存在 $\bar{x}$ 的一个邻域 $U\subset W$ s.t. 下列成立:

(a) $\forall\, x_0\in U$, 初值问题 $\dot{x}=f(x)$, $x(0)=x_0$ 之解 $x(t;x_0)$ 满足: $x(t;x_0)\in U$.

(b) $\exists$ $\mathbb{R}^n$ 的一个范数 $|\cdot|$, s.t. $\forall x_0\in U$, $\forall t\geq 0$ 有

$$|x(t;x_0)-\bar{x}| \leq e^{-tc}|x_0-\bar{x}|.$$

(c) 对 $\mathbb{R}^n$ 的任一范数 $|\cdot|$, $\exists$ $B>0$ s.t. $\forall x_0\in U$, $\forall t\geq 0$ 有

$$|x(t;x_0)-\bar{x}| \leq B e^{-tc}|x_0-\bar{x}|.$$

特别地, $\forall x_0\in U$ 有 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t;x_0)=\bar{x}$.

注　这个定理反映了一个一般准则: 非线性系统的局部性质与相应的线性化问题的总体性质一致. 更准确地, 若线性化方程总体地具有某性质, 则原方程局部具有这性质.

定理 3.4 之证明　不失一般性, 可假设 $\bar{x}=0$ (否则, 给 $\mathbb{R}^n$ 一个平移坐标 $y=x-\bar{x}$, 在 y 坐标下, 0 为 f 的平衡点, 而 $Df|_{y=0}=Df|_{x=\bar{x}}$). 令 $A=Df(0)$. 选取 $b>0$ s.t. A 的全部特征值的实部均小于 $-b<-c$. 由引理 3.1 知: $\exists$ $\mathbb{R}^n$ 的一个基 β s.t. 对应 β 的范数 $|\cdot|$ 与内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 满足:

$$\langle Ax, x\rangle \leq -b|x|^2, \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

因为 $A=Df(0)$, $f(0)=0$ 且 $f(x)=Ax+o(|x|)$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$,
Taylor 公式

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)-Ax|}{|x|}=0.$$

再由 Cauchy 不等式知:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\langle f(x)-Ax, x\rangle}{|x|^2}=0.$$

从而 $\exists$ $\delta>0$ 充分小 s.t. 当 $|x|\leq\delta$ 时, $x\in W$ 且

$$\langle f(x), x\rangle \leq \varepsilon|x|^2+\langle Ax,x\rangle \leq (\varepsilon-b)|x|^2\leq -c|x|^2.$$

(这里, 先给 $\varepsilon>0$ s.t. $(\varepsilon-b)\leq -c$, 再选 $\delta=\delta(\varepsilon)$.)

$$\frac{d}{dt}|z(t)|_E^2 \geq 2\alpha. \qquad (19)$$

由(19)知: $\quad |z(t)|_E \geq e^{2\alpha}|z(0)| \quad \forall t \geq 0$ 且 $z(t)$ 在 $C\cap B(0,\delta)$ 中. —(20)

最后证明: $\bar{x}$ 不稳定. 在 $B(0,\delta)$ 中任给一邻域 $U_1 \ni 0$. 设 $z_0 \neq 0$, $z_0 \in U_1 \cap C$. 令 $\varphi(t)$ 为 $\dot{z}=f(z)$, $z(0)=z_0$ 之解.

令其最大存在区间右(右)为 $[0,\beta)$.

当 $\beta<+\infty$ 时, 由 $C\cap B(0,\delta)$ 的紧性以及解的延拓定理知:

$\exists\ t_0 \in [0,\beta)$ s.t. $\varphi(t_0) \notin C\cap B(0,\delta)$.

再由引理B知: $\exists\ t_1 \leq t_0$ s.t. $\varphi(t_1) \notin B(0,\delta)$

当 $\beta=+\infty$ 时, 由(20), $\exists\ t_0>0$ s.t. $\varphi(t_0)\in \partial B(0,\delta)$ 且 $\varphi(t) \in B(0,\delta)^\circ\ \forall t<t_0$. 再由引理B知: $\varphi(t_0) \in C$. 故

$\varphi(t_0) \in C \cap B(0,\delta)$.

再由(19)有 $\quad \frac{d}{dt}|\varphi(t)|_E^2\Big|_{t=t_0} > 0$.

故 $\exists\ t_1 > t_0$ s.t. $\quad |\varphi(t_1)|_E > |\varphi(t_0)|_E = \delta$,

i.e., $\quad \varphi(t_1) \notin B(0,\delta)$.

综合上述两情形式, 利用平衡点稳定之定义知: $\bar{x}$ 不稳定. ~~证毕~~. 故在情形 $a>b$ 时, 定理得证.

对 $a\leq b$ 的情形, 通过改变锥 C, 同样可证 (请习题之).

#

引理 A 之证明　先证 (b)：若 ~~(x, y)~~ $z \in C \cap B(0,\delta)$，则

$$\langle f(z), z\rangle_E = \langle A_1 x, x\rangle_{E_1} + \underline{\langle A_2 y, y\rangle_{E_2}} + \langle Qz, z\rangle_E$$

由 (16), (17), (18) 之

$$\langle f(z), z\rangle_E \geq a|x|_{E_1}^2 - b|y|_{E^2}^2 - \varepsilon|z|_E^2 \ ?$$

而在 C 中，$|x|_{E_1} \geq |y|_{E_2}$ 且故

$$|x|_{E_1}^2 \geq \frac{1}{2}\left(|x|_{E_1}^2 + |y|_{E_2}^2\right) = \frac{1}{2}|z|_E^2 .$$

因此，$\langle f(z), z\rangle_E \geq \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \varepsilon\right)|z|_E^2$.

取 $\varepsilon > 0$ s.t. $\alpha = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \varepsilon > 0$. 再选 $\delta > 0$ s.t.

$B(0,\delta) \subset W$ 且 (18) 成立.

由此 (b) 之证.

下证 (a). 它的左端为

$$\langle A_1 x, x\rangle_{E_1} - \langle A_2 y, y\rangle_{E_2} + \langle x, R(x,y)\rangle_{E_1} - \langle y, S(x,y)\rangle_{E_2}$$

但 $\left|\langle x, R(x,y)\rangle_{E_1} - \langle y, S(x,y)\rangle_{E_2}\right| \leq 2\left|\langle z, Q(z)\rangle_E\right|$

故这可用推导 (b) 的方法证明 (a). ※.

引理 B 之证明　设 $z(\cdot)$ 为一子解，且 $z(0) \in C \cap B(0,\delta)$.

WLOG, 设 $z(0) = 0$.

情形 1　不 $\exists\ t > 0$ s.t. $z(t) \in \partial C \cap B(0,\delta)$

由解的连续性，$z(\cdot)$ 在离开 C 之前必先达到 ∂C。∴ 在这种情形，$z(\cdot)$ 在离开 C 之前必先离开 $B(0,\delta)$.

情形2. $\exists\, t_0 > 0$ s.t. $z(t_0) \in \partial C \cap B(0,\delta)$

设 t_0 是 $z(\cdot)$ 到达 $\partial C \cap B(0,\delta)$ 的第一时刻。定义 $g: E_1 \times E_2 \to R^1$:

$$g(x,y) = \frac{1}{2}\left(|x|_{E_1}^2 - |y|_{E_2}^2\right), \quad (x,y) \in E_1 \oplus E_2.$$

显然, $g \in C^1(E)$; $g^{-1}([0,\infty)) = C$; $g^{-1}(0) = \partial C$.

另一方面, 若 $z = (x,y) \in B(0,\delta)$, 则

$$D(g(z))\,(f(z))^T = Dg(x,y)\left(f_1(x,y), f_2(x,y)\right)^T$$

$$= \langle (x, f_1(x,y)), (y, f_2(x,y)) \rangle_E.$$

若 $z \in g^{-1}(0) = \partial C$ ($\subset C$) 且 $z \neq 0$,

则 $g(z) = 0$, i.e., $|x|_{E_1}^2 = |y|_{E_2}^2 \Longrightarrow x \neq 0$.

~~再~~ 由引理A 则 有

$$D(g(z))(f(z))^T > 0. \tag{2.1}$$

由链法则有

$$\frac{d}{dt} g(z(t))\Big|_{t=t_0} = Dg(z(t))\cdot z'(t)^T\Big|_{t=t_0}$$

$$= Dg(z(t))\, f(z(t))^T\Big|_{t=t_0} \tag{2.2}$$

$$= Dg(z(t))\, f(z(t))^T\Big|_{t=t_0},$$

$\because z(t_0) \in \partial C$ $\therefore$ $g(z(t_0)) = 0$. 这与(2.1),(2.2)一起说明:

$$\frac{d}{dt} g(z(t))\Big|_{t=t_0} > 0.$$

$\therefore$ $g(z(\cdot)) \nearrow$ 在 $t=0$.

$\therefore$ $\exists\, \delta_1 > 0$ s.t. $g(z(t)) > 0$ $\forall$ $t \in (t_0, t_0+\delta]$.

(这里利用了: $g^{-1}([0,+\infty)) = C$)

$\therefore$ $z(t) \in C$ $\forall$ $t \in [t_0, t_0+\delta]$.

若在 $t_0+\delta_1$ 后的某个时刻 $t=t_1$，$z(t)$ 又碰到 $\partial C\cap B(0,\delta)$，

再用同法. 由此推得：$z(t)\in C\ \forall\ t>t_0$.

∴ 在情形 2 我们也证明了引理 B 成立. 证毕. ※

注（关于定理 ~~3.5~~ 3.4）Thm 3.5 它给出了 $\dot{x}=f(x)$ 的平衡解稳定的一个必要条件：$Df(\bar{x})$ 的特征值没有正实部.

而 Thm 3.4 给出了渐近稳定的一个充分条件：$Df(\bar{x})$ 的全部特征值的实部为负数.

这与线性化方程 $\dot{z}=Df(\bar{x})z$ 一致！

§ 3.3 Lyapunov 函数

1892年，Lyapunov 建立了实用的稳定性判别准则。它是下述概念的推广：对于一个平衡点 $\bar{x}$，$\mathbb{R}^n$ 上有范数 s.t. $\bar{x}$ 附近的解 $x(t)$ 满足：$|x(t)-\bar{x}|$ 为 t 的减函数，i.e. $t \to |x(t)-\bar{x}|$ 为减函数。Lyapunov 思想是：用某些其它的函数来代替 $\|\cdot\|$，用于检验 $\bar{x}$ 的稳定性。

设 $V: U \to \mathbb{R}$ 是定义在 $\bar{x}$ 的邻域 $U \subset W$ 内的可微函数 $(f \in C^1(W))$。用 $\dot{V}: U \to \mathbb{R}$ 表示：

$$\dot{V}(x) \triangleq DV(x)\cdot(f(x))^T, \quad x \in U \qquad (23)$$

（注意 $DV(x) \in \mathbb{R}^n$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$）。上式右为两个 $\mathbb{R}^n$ 中向量作乘法（i.e. 内积）。

设 $\varphi(t;x) \triangleq \phi_t(x)$ 是方程：$\underline{\dot{y}=f(y),\ y(0)=x}$ 的解。

则由链法则有：

$$\cancel{\dot{V}(x) =} \frac{d}{dt} V(\phi_t(x))\Big|_{t=0}$$

$$= DV(\phi_t(x))\Big|_{t=0} \cdot \left(\frac{d\phi_t(x)}{dt}\Big|_{t=0}\right)^T$$

$$= DV(x)\cdot f(x)^T$$

这与(23)一起 $\Rightarrow$

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(\phi_t(x))\Big|_{t=0} \qquad (24)$$

∴ (24)右边 $V(\phi_t(x))$ 表示 $V(\varphi(t;x))$，i.e. V 沿解曲线 $\varphi(t;x)$ 取值。

故 (24) 说明：若 $\dot{V}(x)=0$，则 V 沿 $\dot{y}=f(y)$ 的通过 x 的解曲线递减（随 t）。

定理 3.6 （Lyapunov 定理）设 $\bar{x}\in W$ 是 $\dot{y}=f(y)$ 的一个平衡点。假设∃连续函数 $V: U\to\mathbb{R}$ （$U\subset W$ 为一开集）

s.t. (i) V 连续；(ii) V 在 $U\setminus\{\bar{x}\}$ 可微.

(iii) V 满足

(a) $V(\bar{x})=0$, $V(x)>0$ $\forall x\neq\bar{x}$, $x\in U$;

(b) $\forall x\in U\setminus\{\bar{x}\}$, $\dot{V}(x)\leq 0$.

则 $\bar{x}$ 是稳定的。此外，如果还有

(c) $\dot{V}(x)<0$ $\forall x\in U\setminus\{\bar{x}\}$,

则 $\bar{x}$ 是渐近稳定的.

- 满足 (i), (ii), (iii) 中 (a), (b) 的函数 V 称为 $\bar{x}$ 的 Lyapunov 函数.

  满足 (i), (ii), (iii) 中 (a), (c) 的称为严格 Lyapunov 函数.

- 运用 定理 6，可以不求解方程，不求解 $Df(\bar{x})$ 的特征值，而通过求出一个 V 而推出 $\bar{x}$ 的稳定性.

- 没有一个通用的方法求 Lyapunov 函数. 但有很多研究尝试如何求.

例 1 $\dot{x}=2y(z-1)$, $\dot{y}=-x(z-1)$, $\dot{z}=xy$.

z-轴上任一点均为平衡点. 验证 $(0,0,0)$ 稳定.

在原点处系统的线性化矩阵为 $\begin{bmatrix}0&-2&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

它有两个虚特征值和一个零特征值．故 原点不是吸点．（这是最复杂的情况）

令 $V(x,y,z)= ax^2+by^2+cz^2$，$a,b,c\geq 0$．则

$$DV(x,y,z)=(2ax,\ 2by,\ 2cz);$$

$$DV(x,y,z)\ f(x,y,z)^T=(2ax,\ 2by,\ 2cz)\begin{pmatrix}2y(z-1)\\ -x(z-1)\\ xy\end{pmatrix}.$$

$$=4axy(z-1)-2bxy(z-1)+2cxyz.$$

于是，$\frac{1}{2}\dot{V}((x,y,z))=2axy(z-1)-bxy(z-1)+cxyz.$

需要：$\dot{V}\leq 0$． 令 $c=0$，$2a=b\neq 0$．则 $\dot{V}=0$ 且

$V(x,y,z)\geqslant 0$ $\forall (x,y,z)\neq(0,0,z)$

$V(0,0,0)=0$．

注 $(0,0,z)$ 为平衡点．去掉平衡点后 $V>0$．

$\therefore$ $V=x^2+2y^2$ 是一个 Lyapunov 函数

$\therefore$ 原点稳定！

例2 (势) 若把对应在 $x\in\mathbb{R}^3$ 处的向量 $F(x)$ 解释为作用于质点 x 处的力。则向量场 $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 称为力场．物理中很多力场表现为：

$$F(x)=-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(x),\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}(x),\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}(x)\right).$$

这样的力场称为保守力场．而 Φ 称为势能

对于质量为 m 的运动质点，其动能定义为 $T=\frac{1}{2}m|\dot{x}(t)|^2$．

其中，$\dot{x}(t)$ 为时间 t 的速度向量（质点的）；$|\dot{x}(t)|$ 为 t 时刻的速率。若将函数 $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ 看作 $\mathbb{R}^3$ 中的曲线，则 $\dot{x}(t)$ 就是 $x(t)$ 处曲线的切向量．

对于保守力场 $F=-\text{grad}\,\Phi$ 中运动的质点，它在 x 处的势能为 $\Phi(x)$。总能量 $E=T+\Phi$，i.e.

$$E(t)=\frac{1}{2}m|\dot{x}(t)|^2+\Phi(x(t)).$$

能量守恒告诉：$\dfrac{dE(t)}{dt}=0.$ (25)

5)的数学证明：$\dfrac{d}{dt}(T+\Phi)=0 \iff \dfrac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m|\dot{x}(t)|^2+\Phi(x(t))\right)=0$ —(26)

$$\because \frac{d}{dt}|\dot{x}|^2=2\langle\ddot{x},\dot{x}\rangle$$

且 $$\frac{d}{dt}\Phi(x(t))=\langle\text{grad}\,\Phi(x),\dot{x}\rangle$$

$\therefore$ (26)式 $\iff m\langle\ddot{x},\dot{x}\rangle+\langle\text{grad}\,\Phi,\dot{x}\rangle=0$

$\iff \langle m\ddot{x}+\text{grad}\,\Phi,\dot{x}\rangle=0.$

但上式右是成立的，因为我们有牛顿定律

$$m\ddot{x}=-\text{grad}\,\Phi. \qquad (27)$$

于是 (25) 证毕。

在保守力场 $-\text{grad}\,\Phi(x)$ 作用下质量 $\underline{m=1}$ 的质点运动方程是：

$$\frac{dx}{dt}=v$$

$$\frac{dv}{dt}=-\text{grad}\,\Phi(x).$$

(上面是由 (27) 得到的。)

设 $(\bar{x},\bar{v})\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ 是它的一个平衡点，则 $\bar{v}=0$ 且 $\text{grad}\,\Phi(\bar{x})=0.$

下面研究 $(\bar{x},0)$ 的稳定性。试用总能量：

$$E(x,v)=\frac{1}{2}m|v|^2+\Phi(x) \qquad (m=1\text{ 时})$$

构造一个 Lyapunov 函数。∵它在 $(\bar{x},0)$ 处必须为 0，∴

从 $E(x,v)$ 中减去 $(\bar{x},0)$ 点的能量 $\Phi(\bar{x})$ 并定义

$$V(x,v)=E(x,v)-E(\bar{x},0)$$
$$=\frac{1}{2}|v|^2+\Phi(x)-\Phi(\bar{x}).$$

根据能量守恒定理推出 $\dot{V}\equiv 0$.

$\left(\dot{V}(x,v)=DV(x,v)(x',v')=(\operatorname{grad}\Phi(x),v)\cdot(v,-\operatorname{grad}\Phi(x))^T=0\right)$

由于 $\frac{1}{2}|v|^2\geq 0$，为了使 V 是一个 Lyapunov 函数，我们假定：

(H) 对 $\bar{x}$ 附近的 x 有 $\Phi(x)>\Phi(\bar{x})$ (i.e. $\bar{x}$ 是 Φ 的一个局部最小点)

在 (H) 下，V 是一个 Lyapunov 函数. $\Longrightarrow$ $(\bar{x},0)$ 稳定.

上面实际证明了有名的拉格朗日定理：

对于保守力场的平衡点 $(\bar{x},0)$，如果在 $\bar{x}$ 处势能有局部极小点，则 $(\bar{x},0)$ 稳定。

第四章 二阶线性 O.D.E.

形如 $P(t)y''(t) + Q(t)y'(t) + R(t)y(t) = G(t)$, $t \in I$.

称为二阶线性 O.D.E.

当 $P(t) \neq 0$ $\forall t \in I$ 时，上述方程可转化为

$$y'' + py + qy = g, \quad t \in I$$

其中 $p = \frac{Q}{P}$, $q = \frac{Q}{P}$, $g = \frac{G}{P}$.

当 $P(t_0) = 0$ (for some $t_0 \in I$) 时，情况比较复杂。这时，

t_0 称为方程的奇点。

二阶 O.D.E. 在重要运用方向大量出现，如材料科学、波动学等。

· 我们主要学习无奇点的情形。

· $G \equiv 0$ 时，方程为齐次方程。

§4.1 线性二次方程的一般性质

$$y'' + py' + qy = 0, \quad t \in I. \tag{1}$$

$$y'' + py' + qy = g, \quad t \in I. \tag{2}$$

假设 p、q、g 均为 I 上的连续函数，I 为开区间。

首先考虑初值问题：

$$y'' + py' + qy = g, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0'. \tag{3}$$

令 $z_1 = y$, $z_2 = y'$, $\vec{z} = (z_1, z_2)^T$, $f_1(t, \vec{z}) = z_2$,

$f_2(t, \vec{z}) = -pz_2 - qz_1$, $\vec{F}(t, \vec{z}) = (f_1, f_2)^T$.

- $\mathcal{L}^{-1}$ 的性质：

(1) $\mathcal{L}^{-1}$ 有定义： 若 f 为一连续函数且它的 Laplace 变换为 $F(s)$，则除 f 外，没有其它的连续函数 s.t. 它的 Laplace 变换为 $F(s)$。

(2) $\mathcal{L}^{-1}$ 是一个线性变换。

- 卷积　设 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$，$G(s)=\mathcal{L}[g(t)]$。令 $H(s)=F(s)G(s)$。

那么 $H(s)$ 的 $\mathcal{L}^{-1}$ 是什么？

令 $H(s)=\mathcal{L}[h(t)]$. 那么 h 与 f, g 是什么关系？

$h \neq f\cdot g$ ！

给定 f, g，定义 f 与 g 的卷积如下：

$$(f*g)(t) \triangleq \int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau.$$

卷积是两个函数间的运算，它具有下列性质：

交换性： $f*g=g*f$； 分配律： $f*(g_1+g_2)=f*g_1+f*g_2$；

结合律： $(f*g)*h=f*(g*h)$.

此外， $f*0=0*f=0$.

但是， $f*1=f$ 一般不成立！

例 设 $f(t)=\cos t$. 则 $(f*1)(t)=\int_0^t \cos(t-\tau)\,d\tau=\sin t$.

— 2 —

<u>定理4.4</u> 设 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$, $G(s)=\mathcal{L}[g(t)]$ $(s>a\geq 0)$。

则 $H(s)\triangleq F(s)\cdot G(s)=\mathcal{L}(h(t))$ $(s>a)$, 其中

$h(t)=f*g\,(t)$。

即, $\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}[f(t)]\cdot\mathcal{L}[g(t)]\}(t)=(f*g)(t)$.

<u>证明</u> $\because$ $F(s)=\int_0^\infty e^{-s\xi}f(\xi)d\xi$, $G(s)=\int_0^\infty e^{-s\eta}g(\eta)d\eta$,

$$\therefore\quad F(s)G(s)=\int_0^\infty e^{-s\xi}f(\xi)d\xi\int_0^\infty e^{-s\eta}g(\eta)d\eta$$

$$=\int_0^\infty g(\eta)d\eta\int_0^\infty e^{-s(\xi+\eta)}f(\xi)d\xi. \qquad (27)$$

在(27)中, 对固定的 η, 令 $t=\xi+\eta$ (i.e., $\xi=t-\eta$), 则有

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty g(\eta)d\eta\int_\eta^\infty e^{-st}f(t-\eta)dt. \qquad (28)$$

$$=\int_0^\infty g(\tau)d\tau\int_\tau^\infty e^{-st}f(t-\tau)dt.$$

交换积分次序(需要什么条件?)得

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau,$$

或 $$F(s)G(s)=\int_0^\infty e^{-st}h(t)\,dt=\mathcal{L}[h(t)].$$ ※.

• 卷积运算的一个应用: 求解 $\begin{cases} ay''+by'+cy=g(t) \\ y(0)=y_0,\quad y'(0)=y_0'. \end{cases}$

~~记 $\Phi(s)=(as+b)$~~

对方程作$\mathcal{L}$得：

$$(as^2+bs+c)Y(s)-(as+b)y_0-ay_0'=\mathcal{L}[g(t)]\triangleq G(s).$$

令 $\Phi(s)=\dfrac{(as+b)y_0+ay_0'}{as^2+bs+c}$；$\Psi(s)=\dfrac{G(s)}{as^2+bs+c}$。

则 $Y(s)=\Phi(s)+\Psi(s)$.

故 $y(t)=\varphi(t)+\psi(t)$，其中 $\varphi(t)=\mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)]$，$\psi(t)=\mathcal{L}^{-1}[\Psi(s)]$.

注意：$\varphi(t)$ 为 $\begin{cases} ay''+by'+cy=0 \\ y(0)=y_0,\ y'(0)=y_0' \end{cases}$ 之解；

$\psi(t)$ 为 $\begin{cases} ay''+by'+cy=g \\ y(0)=0,\ y'(0)=0 \end{cases}$ 之解。

令 $H(s)\triangleq(as^2+bs+c)^{-1}$ （称之为转移函数）.

记 $h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]$ （这是 $\mathcal{L}$ 函数！）.

则 $\Psi(s)=H(s)G(s)$. 由定理 4.4 ⇒

$$\psi(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)G(s)]=(h*g)(t).$$

视 g 为外力．~~它~~ 它是方程

$$\begin{cases} ay''+by'+cy=g \\ y(0)=0,\ y'(0)=0 \end{cases}$$

的输入，而输出为 $\psi(t)$. 上述过程 ⇒

输入 $=\mathcal{L}^{-1}$[输出·转移函数]；转移函数 $=\dfrac{\mathcal{L}[\text{输出}]}{\text{输入}}$.