



Study Guide:

常微分方程学习指导

Ordinary Differential Equations

杜正东 徐冰 何志蓉 张伟年 主编



科学出版社

(O-4247.0101)

Study Guide:

常微分方程学习指导

Ordinary Differential Equations

www.sciencep.com

ISBN 978-7-03-030762-0



9 787030 307620 >

基础教材开发部

联系电话: 010-62140850

电子信箱: jiangtp@abook.cn

课件下载: www.abook.cn

定价: 26.00 元

常微分方程学习指导

杜正东 徐冰 何志蓉 张伟年 主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是与张伟年、杜正东、徐冰所编《常微分方程》相配套的学习指导用书,包括各章主要内容、典型例题和原教材所有习题的详细解答.本书既可以作为原教材的配套参考书,也可以独立阅读,不仅适合高等学校数学专业常微分方程课程的教学使用,还可供其他自学常微分方程理论的读者参考.

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程学习指导/杜正东等主编. —北京:科学出版社, 2011
ISBN 978-7-03-030762-0

I. ①常… II. ①杜… III. ①常微分方程—高等学校—教学参考资料
IV. ①O175.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第066761号

策划:姜天鹏 冯 涛

责任编辑:王纯刚 张振华/责任校对:耿 耘

责任印制:吕春珉/封面设计:东方人华平面设计部

科学出版社出版

·北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

骏主印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年5月第 一 版 开本:787×960 1/16

2011年5月第一次印刷 印张:14 1/4

印数:1—3 000 字数:301 000

定价:26.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

销售部电话 010-62140850 编辑部电话 010-62148322

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229; 010-64034315; 13501151303

前 言

自三百多年前 Newton(1642~1727), Leibniz(1646~1716)创立微积分以来,人们就开始研究常微分方程.悠久的历史使这门数学分支不仅成为了数学学科中队伍最大、综合性最强的领域之一,而且至今仍然充满了活力.作为本科数学专业的核心基础课程,常微分方程不仅是学习泛函分析、偏微分方程、微分几何等课程的基础,也是进一步深入学习非线性微分方程理论的基础,其重要性是不言而喻的.

学习任何一门学科,动手能力的培养和提高都是必不可少的.对数学课程而言,就是要做相当数量的习题,通过做习题这个环节来掌握基本概念和理论.自张伟年、杜正东和徐冰所编教材《常微分方程》出版以来,不少使用该教材的高等学校师生和自学者提出了很多宝贵的意见和建议,其中不少读者反映该书配置的习题有一部分难度比较大,特别是自学的朋友们,由于身边缺乏能够互相讨论和请教的老师和同学,常常感觉不少习题难以下手,或者做出来以后无法判断自己做的是否正确.因此很多读者希望我们能编写一本与之配套的习题解答.我们在自己的教学过程中,也深感这样一本习题解答是很有必要的.正是基于这些考虑,我们编写了本书.

作为与原教材配套的教学参考书,我们给出了原教材所有习题的详细解答.同时,为了读者查阅方便,我们在每一章的习题解答前面还列出了该章的主要概念、定理以及一些典型例题.因此本书既可以与原教材对照学习,也可以独立阅读.值得说明的是,我们对原教材的一个考虑是不强调习题量,而重在习题的代表性.更多的习题如果有必要,我们则宁可让学生自己在书外去找,既可把书上有限的空间留给一些实践性、探索性、前瞻性的阅读内容,也能培养学生动手查找参考书的习惯.因此,我们没有对每一节按部就班地配备习题.比如,第 2.3 节后没有习题 2.3,因为我们考虑把第 2.4 节作为本章的综合性训练和前瞻性阅读内容,而把属于第 2.3 节和第 2.4 节的习题统一给在了习题 2.4.第 6.1 节后也没有习题 6.1,因为第 6.1 节完全是概念性的一节.在本学习指导书中,我们增补了习题 2.3 和习题 6.1,增强本书内容和结构的完整性与独立性.我们利用这些空间设置了一些新习题供读者参考.

最后我们要指出,读者在做习题的时候,要特别注意培养自己独立思考、独立解

决问题的能力，而不能过分依赖本书，只有这样才能学到真实的本领。很多时候，同一道题其解题思路和方法是多种多样的，本书只提供了其中一种解法，甚至不见得就是最好的方法。读者除了用这些解答检查自己的解题方法外，更重要的是应该以之启发自己的思路，努力寻求更好的解答。

本书的写作得到了国家级精品课程建设项目的支持和四川大学教务处及数学学院领导的鼓励，在此我们向他们表示深深的谢意。限于我们的水平和能力，这本书一定还有许多缺点和错误，我们真诚希望得到同行的批评指正。

编者

2010年12月于四川大学

目 录

第一章 绪论	1
1.1 主要内容.....	1
1.2 更多的微分方程模型.....	4
1.3 典型例题.....	6
1.4 习题与解答.....	8
习题 1.1.....	8
习题 1.2.....	9
习题 1.3.....	12
第二章 初等积分法	15
2.1 主要内容.....	15
2.2 典型例题.....	25
2.3 习题与解答.....	30
习题 2.1.....	30
习题 2.2.....	50
习题 2.3.....	60
习题 2.4.....	62
第三章 线性方程	75
3.1 主要内容.....	75
3.2 典型例题.....	81
3.3 习题与解答.....	88
习题 3.1.....	88
习题 3.2.....	91
习题 3.3.....	94
习题 3.4.....	97
习题 3.5.....	101
第四章 常系数线性方程	106
4.1 主要内容.....	106

4.2	典型例题	112
4.3	习题与解答	114
	习题 4.1	114
	习题 4.2	117
	习题 4.3	122
	习题 4.4	128
第五章	一般理论	130
5.1	主要内容	130
5.2	典型例题	139
5.3	习题与解答	143
	习题 5.1	143
	习题 5.2	149
	习题 5.3	154
	习题 5.4	157
	习题 5.5	164
	习题 5.6	168
第六章	定性理论初步	174
6.1	主要内容	174
6.2	典型例题	180
6.3	习题与解答	187
	习题 6.1	187
	习题 6.2	188
	习题 6.3	194
	习题 6.4	200
	习题 6.5	206
	习题 6.6	214
	主要参考文献	221

第一章 绪 论

本章用机械振动、电子学、经典天体力学、生态学等不同学科中建立的一些简单的微分方程模型向读者展示了微分方程的广泛应用，并通过这些具体例子说明了如何从一个实际问题来建立常微分方程模型，同时介绍了常微分方程的一些基本概念和方法。

1.1 主要内容

1. 常微分方程的概念

微分方程就是那些联系着自变量、未知函数以及未知函数的导数的函数方程。一个微分方程如果其未知函数是关于自变量的一元函数，则称之为常微分方程，其一般形式是

$$F(t, \phi, \phi', \dots, \phi^{(n)})=0, \quad (1.1)$$

其中 F 是一个 $n+2$ 元的已知函数，而 $\phi', \dots, \phi^{(n)}$ 是未知函数 $\phi(t)$ 的一阶直至 n 阶导数。我们称 n 为方程(1.1)的阶，称方程(1.1)为 n 阶常微分方程。当不会引起混淆时，常简称(1.1)为 n 阶微分方程或 n 阶方程。

2. 微分方程的通解与特解

如果函数 $\phi(t)$ 在区间 J 上连续，有直到 n 阶的导数，且对所有的 $t \in J$ ，方程(1.1)恒成立，则称 $\phi(t)$ 为方程(1.1)在区间 J 上的一个解。

微分方程的解包括通解与特解。 n 阶微分方程(1.1)的通解是指形如 $\phi(t, C_1, C_2, \dots, C_n)$ 的解，其中 $(C_1, C_2, \dots, C_n) \in G$ ， G 为 \mathbb{R}^n 的一个区域，且 C_1, C_2, \dots, C_n 为 n 个独立的任意常数，即函数

$$\phi, \frac{\partial \phi}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{n-1} \phi}{\partial t^{n-1}}$$

对参数 C_1, \dots, C_n 存在连续偏导数而且 Jacobi 行列式

$$\det \frac{\partial \left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{n-1} \phi}{\partial t^{n-1}} \right)}{\partial (C_1, C_2, \dots, C_n)} \neq 0 \quad (1.2)$$

对所有 $(t, C_1, \dots, C_n) \in J \times G$ 成立.

利用隐函数定理可以证明如下结果: 设 G 为 \mathbb{R}^n 的一个区域, 给定一个定义在区间 J 上且包含 n 个独立参数 C_1, \dots, C_n 的函数族 $\phi(t, C_1, \dots, C_n)$, 其中 $(C_1, C_2, \dots, C_n) \in G$, 如果它们对 t 是 n 次可微的, 则一定是某个 n 阶微分方程的通解. 反之, n 阶微分方程的通解一定包含 n 个独立的任意常数.

通解是一族解, 具有不确定性. 当任意常数被完全确定后就相应获得一个特定的解, 称为**特解**. 为了求得特解, 需要对方程(1.1)附加相应的定解条件. 其中初值条件是一类很重要的定解条件. 附加了初值条件后的方程(1.1)有如下的形式

$$\begin{cases} F(t, \phi, \phi', \dots, \phi^{(n)}) = 0, \\ \phi(t_0) = \phi_0, \phi'(t_0) = \phi_1, \dots, \phi^{(n-1)}(t_0) = \phi_{n-1}. \end{cases} \quad (1.3)$$

称方程(1.3)为**初值问题**(或**Cauchy 问题**), 把满足所给初值条件的方程(1.1)的解称为初值问题(1.3)的解.

3. 微分方程的近似解

绝大多数方程都不能用初等方法求解, 这时可以通过迭代来构造一个函数序列逼近初值问题的特解. 一个常用的迭代序列是如下的**Picard 迭代序列**: 将初值问题

$$\dot{\phi}(t) = f(t, \phi(t)), \quad \phi(t_0) = x_0 \quad (1.4)$$

用等价积分方程形式

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \phi(\tau)) d\tau \quad (1.5)$$

来表示, 再利用递推关系

$$\begin{aligned} \phi_0(t) &\equiv x_0, \\ \phi_n(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \phi_{n-1}(\tau)) d\tau, \quad n=1, 2, \dots \end{aligned}$$

构造函数序列 $\{\phi_n(t)\}$. 在保证了收敛性的情形下, 对较大的 n , 函数 $\phi_n(t)$ 就是方程(1.4)的一个近似解.

除了构造迭代序列的方法外, 还可用**Euler 折线法**来逼近方程(1.4)的解, 这些古



老的方法是现代微分方程数值解的基础。

4. 几何分析：方向场与积分曲线

给定方程 $\dot{x} = f(t, x)$ ，其中 $f(t, x)$ 在平面上或其一个区域 G 上连续。从几何上看该方程的解 $x = \phi(t)$ 是 tx 平面上的一条光滑曲线 Γ ，称为该方程的一条积分曲线。另一方面，方程 $\dot{x} = f(t, x)$ 在 tx 平面上的每一个有定义的点 $P_0: (t_0, x_0)$ 处都指明了一个积分曲线在该点的斜率 $f(t_0, x_0)$ 。像这样逐点定义了方向斜率的平面(或区域 G)称为微分方程的方向场。方程的解就是在这样的斜率指引下走出来的。

掌握了方程 $\dot{x} = f(t, x)$ 定义的方向场的全部情况，也就大致了解了积分曲线的分布状况，从而能帮助我们初步理解方程的解的性质。画出方程 $\dot{x} = f(t, x)$ 的方向场的常用方法是等倾线法，所谓“等倾线”(isocline)就是上面每个点的斜率都一样的曲线，它由关系 $f(t, x) = k$ 确定。特别地，分别称当 $k = 0$ 时和当 $k = \infty$ (即 $\frac{1}{f(t, x)} = 0$) 时相应的等倾线为水平等倾线和竖直等倾线。我们只需针对一些不同选取的 k 画出相应的等倾线及其代表的方向就可以掌握方向场的大致情况。

5. 微分方程的不同形式

形如方程(1.1)的方程称为隐式微分方程，如果能从中解出最高次微商，得到

$$\phi^{(n)}(t) = f(t, \phi(t), \dots, \phi^{(n-1)}(t)), \quad (1.6)$$

则称方程(1.6)是方程(1.1)的规范形式。引入变换

$$x_1 = \phi, \quad x_2 = \dot{\phi}, \quad \dots, \quad x_n = \phi^{(n-1)},$$

可以把 n 阶方程(1.6)化成下列等价的规范形式的一阶微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \vdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n, \\ \frac{dx_n}{dt} = f(t, x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (1.7)$$

相应地，可以将方程(1.6)的初值条件

$$\phi(t_0) = x_1^0, \quad \dot{\phi}(t_0) = x_2^0, \quad \dots, \quad \phi^{(n-1)}(t_0) = x_n^0 \quad (1.8)$$

等价地化成

$$x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0. \quad (1.9)$$

在方程(1.1)中若函数 $F(t, x_0, \dots, x_n)$ 关于变量 (x_0, \dots, x_n) 是一次的, 就称方程(1.1)为线性微分方程, 否则称其为非线性微分方程. 规范形式的一阶线性微分方程组的一般形式为

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.10)$$

其中 x, f 是 n 维向量值函数, $A(t)$ 是 $n \times n$ 阶矩阵值函数.

1.2 更多的微分方程模型

为让读者加深对数学建模的理解, 以及体会微分方程在实际问题中的广泛应用, 在这里我们在教材的基础上介绍更多的微分方程模型.

例 1.1 18 世纪末, 英国人 Malthus 在美国任牧师期间, 通过查看当地 100 多年的人口统计资料, 提出了著名的 Malthus 人口模型. 其基本假设是: 人口总数的变化是封闭的, 即无迁入迁出, 个体具有相同的生殖能力及死亡率, 人口在自然增长过程中, 相对增长率是一个常数(称为生命系数), 记为 r , 它等于出生率减去死亡率. 设 t 时刻人口总数为 $N(t)$, 则 $N(t)$ 满足微分方程

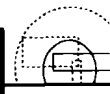
$$\frac{dN}{dt} = rN.$$

此方程的通解为 $N(t) = Ke^{rt}$.

Malthus 人口模型适用于人口总数不大, 生存空间和自然资源都充裕的情形, 用它来计算和预测美国 1790~1860 年间的人口数量, 其误差不超过 10%. 但是当自然资源和环境条件限制了人口增长时, 此模型误差就很大了. 为了改进 Malthus 人口模型, 荷兰生物数学家 Verhulst 引入一个常数 N_m (称为最大容量), 用以表示自然资源和环境所能容许的最大人口数, 假设人口总数的净相对增长率为 $r\left(1 - \frac{N(t)}{N_m}\right)$, 由此得到下列

Logistic 人口模型

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{N_m}\right).$$



这是两个比较简单而基本的人口模型，由于实际的相对增长率 r 具有较大的随机性，人口增长还取决于年龄分布，性别比例等其他因素，因此还有更复杂的人口模型。

例 1.2 在教材的例 1.6 讨论了一个仅由一种捕食者和一种被捕食者(即食饵)构成的简单生态系统，假设在没有捕食者时食饵自身有充足食物和空间而自由地以增长率 β 成长，即其数量 $y(t)$ 满足 $\dot{y} = \beta y$ ；当捕食者存在时食饵的增长率与捕食者数量 $x(t)$ 成正比地下降，即 $\dot{y} = (\beta - sx)y$ ，其中 β, s 是正的常数。当没有食饵时捕食者按固定比率 α 死亡，即 $\dot{x} = -\alpha x$ ；当有食饵时捕食者数量增长率与食饵数量 $y(t)$ 成正比地增长，即 $\dot{x} = (-\alpha + ry)x$ ，其中 α, r 是正的常数。由此得到 $x(t)$ 和 $y(t)$ 满足的微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-\alpha + ry), \\ \dot{y} = y(\beta - sx). \end{cases}$$

这就是 Volterra 系统。

假设进一步考虑其它外界影响，用 γ, δ 分别表示捕食者和食饵受外界影响的程度，则模型改为

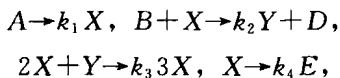
$$\begin{cases} \dot{x} = x(-\alpha + ry) - \gamma x, \\ \dot{y} = y(\beta - sx) - \delta y. \end{cases}$$

更一般的含两个种群的生态模型为

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a_1 + a_2 x + a_3 y), \\ \dot{y} = y(b_1 + b_2 x + b_3 y), \end{cases}$$

其中参数 $a_i, b_i (i=1, 2, 3)$ 不同的取法表明了这两个种群之间以及与外界的相互关系。例如，种群 x 与 y 之间就存在捕食与被捕食，竞争同一资源，互惠共存等多种形式。

例 1.3 三分子自催化反应模型：设有以下一系列化学反应



其中 k_1, k_2, k_3, k_4 表示反应速率。假定

- (1) 反应物 A 和 B 的浓度很高，在反应过程中可视为恒定和均匀的并且无扩散。
- (2) 各反应彼此独立，反应速率均为常数，产品 D 和 E 一经产出即可除去。
- (3) 因 A 的浓度很高，第一个反应也是远高于平衡态的。

相应的可建立 X, Y 的化学反应动力学模型：

$$\begin{cases} \dot{X} = k_1 A - (k_2 B + k_4) X + k_3 X^2, \\ \dot{Y} = k_2 B X - k_3 X^2 Y. \end{cases}$$

例 1.4 由教材的例 1.2 给出的振荡电路, 例 1.3 给出的弹簧振子以及例 1.4 讨论的单摆问题所得到的微分方程实质上都是如下的更一般的振动方程的特例:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0, \quad (1.11)$$

其中 $-g(x)$ 表示弹性力, $f(x, \dot{x})$ 表示阻尼系数, 它一般和位移 x , 速度 \dot{x} 均有关. 在方程(1.11)中若 $f(x, \dot{x})$ 与速度无关, 即 $f(x, \dot{x}) = f(x)$ 时, 就称其为 Liénard 方程.

下面两种特殊形式的 Liénard 方程分别被称为 van der Pol 方程和 Duffing 方程

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad (1.12)$$

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} - x + x^3 = 0, \quad (1.13)$$

其中 $\mu, \alpha \in \mathbb{R}$ 为常数. Liénard 方程及其特殊形式 van der Pol 方程(1.12)和 Duffing 方程(1.13)都是振动理论中十分重要的微分方程. 特别地, 在 Liénard 方程中令 $y = \dot{x}$, 就得到如下规范形式的微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -g(x) - f(x)y. \end{cases}$$

1.3 典型例题

例 1.5 过某曲线上任一点的法线和坐标轴构成的三角形与过该点的切线, 法线和 x 轴构成的三角形面积相等. 求该曲线所满足的微分方程.

解: 设曲线所对应的函数为 $y = f(x)$. 任取曲线上一点 (x_0, y_0) , 过该点的切线方程为

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

由此知该切线与 x 轴和 y 轴的交点分别为

$$\left(x_0 - \frac{y_0}{f'(x_0)}, 0\right), \quad \left(0, y_0 - f'(x_0)x_0\right).$$

类似地, 过点 (x_0, y_0) 的法线与 x 轴和 y 轴的交点分别为

$$\left(x_0 + f'(x_0)y_0, 0\right), \quad \left(0, y_0 + \frac{x_0}{f'(x_0)}\right).$$

从而该法线与坐标轴构成的三角形面积为

$$S_1 = \frac{(x_0 + f'(x_0)y_0)^2}{2 |f'(x_0)|}.$$

不难求出切线，法线与 x 轴所围三角形面积为

$$S_2 = \frac{y_0^2}{2} \left| f'(x_0) + \frac{1}{f'(x_0)} \right|.$$

由假设 $S_1 = S_2$ ，化简得到 $2x_0 y_0 f'(x_0) = y_0^2 - x_0^2$. 再由 (x_0, y_0) 的任意性，可得到该曲线所满足的微分方程为

$$2xyy' = y^2 - x^2.$$

例 1.6 求曲线族

$$x(t) = C_1 \cos \sqrt{2}t + C_2 \sin \sqrt{2}t + C_3 \quad (1.14)$$

满足的微分方程，其中 C_1, C_2, C_3 是参数.

解：对函数 $x(t) = C_1 \cos \sqrt{2}t + C_2 \sin \sqrt{2}t + C_3$ 求导三次得

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2}(-C_1 \sin \sqrt{2}t + C_2 \cos \sqrt{2}t), \quad (1.15)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2(C_1 \cos \sqrt{2}t + C_2 \sin \sqrt{2}t), \quad (1.16)$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 2\sqrt{2}(C_1 \sin \sqrt{2}t - C_2 \cos \sqrt{2}t). \quad (1.17)$$

从方程(1.14)~方程(1.17)中消去参数 C_1, C_2, C_3 即得所求微分方程为

$$\frac{d^3x}{dt^3} = -2 \frac{dx}{dt}.$$

例 1.7 作出下列方程的方向场：

$$(1) \frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x-1}, \quad (2) \frac{dy}{dx} = y - x^2.$$

解：可利用等倾线法，对方程(1)，斜率为 k 的等倾线为直线 $y = k(x-1) - 1$ ，其中水平等倾线为 $y = -1$. 对方程(2)，斜率为 k 的等倾线为抛物线 $y = x^2 + k$ ，其中水平等倾线为 $y = x^2$.

也可以在 Maple 环境下运行下列命令：


```
with(DEtools):
dfieldplot(diff(y(x), x) = (y+ 1)/(x- 1), y(x), x= - 2.4, y= - 4.2, color=
BLACK);
dfieldplot(diff(y(x), x) = y- x^2, y(x), x= - 2.2, y= - 2.4, color= BLACK);
```

即可作出相应方程的方向场, 见图 1.1 及图 1.2.

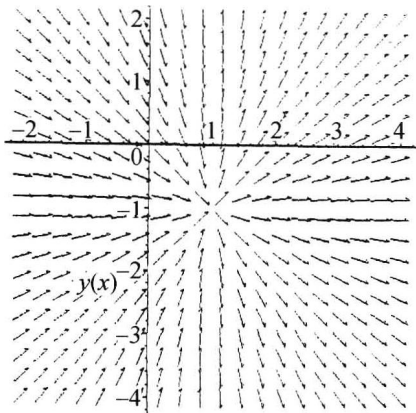


图 1.1 例 1.7(1)

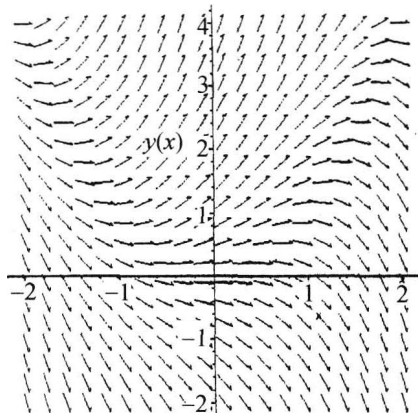


图 1.2 例 1.7(2)

1.4 习题与解答

习 题 1.1

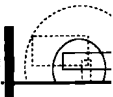
1. 一船以恒定的速度 v_0 垂直向河对岸驶去, 设水流沿 x 轴方向并且其速度与船离两岸的距离乘积成正比, 比例系数为 k , 河宽为 a . 求该船的运动轨迹满足的微分方程.

解: 以船的初始位置为坐标原点, 取坐标轴 y 垂直向河对岸.

设在时刻 t 该船的位置为 $(x(t), y(t))$. 则由假设得

$$\frac{dy}{dt} = v_0, \quad \frac{dx}{dt} = ky(t)(a - y(t)).$$

从上式消去 t 即得所求船的运动轨迹满足的微分方程为



$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_0}{ky(a-y)}.$$

2. 求 tx 平面上一曲线所满足的微分方程, 使其上每点处的切线与该点的向径和 Ox 轴构成一个等腰三角形.

解: 设所求曲线的方程为 $x=x(t)$, $P: (t, x)$ 为该曲线上任意一点, 不难看出过点 P 的切线 L 的方程为

$$X-x = \frac{dx}{dt}(T-t),$$

其中 (T, X) 为 L 上任意一点. 由此求出 L 与 Ox 轴的交点 Q 的坐标为: $(0, x-t \frac{dx}{dt})$. 下面分三种情况讨论:

(1) $|OP|^2 = |OQ|^2$. 这时不难求出曲线所满足的方程为

$$t^2 + x^2 = \left(x - t \frac{dx}{dt}\right)^2.$$

(2) $|OP|^2 = |PQ|^2$. 这时可求出曲线所满足的方程为

$$x^2 = t^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

(3) $|OQ|^2 = |PQ|^2$. 这时可求出曲线所满足的方程为

$$2xt \frac{dx}{dt} = x^2 - t^2.$$

习 题 1.2

1. 证明对任意常数 C , 函数 $x(t) = Ce^{-3t} + 2t + 1$ 是微分方程

$$\dot{x} + 3x = 6t + 5$$

的解. 进而计算该方程关于初值条件 $x(0) = 3$ 的解.

证明: 由于 $\dot{x} = -3Ce^{-3t} + 2$, 因此

$$\dot{x} + 3x = -3Ce^{-3t} + 2 + 3(Ce^{-3t} + 2t + 1) = 6t + 5.$$

故 $x(t) = Ce^{-3t} + 2t + 1$ 是所给微分方程的解.

由 $x(0) = C + 1 = 3$ 解出 $C = 2$, 所以所给初值问题的解为 $x(t) = 2e^{-3t} + 2t + 1$. \square

2. 放射性物质镭的裂变速度与存余量成正比 k . 设已知在某时刻 t_0 容器中镭的质

量是 $R_0 g$. 要求确定镅在任意时刻 t 的质量 $R(t)$.

解: 不难看出 $R(t)$ 满足初值问题

$$\frac{dR}{dt} = -kR, \quad R(t_0) = R_0.$$

由此得 $\frac{dR}{R} = -k dt$, 两边积分得通解 $R(t) = Ce^{-kt}$, 其中 C 为任意常数. 代入初值条件 $R(t_0) = R_0$ 求出 $C = R_0 e^{kt_0}$, 因此 $R(t) = R_0 e^{-k(t-t_0)}$.

* 3. 求以初速度 v_0 在空气中铅直上抛的物体的运动方程, 其中物体质量为 m , 阻力与速度的平方成正比, 比例系数为 k^2 . 又问物体达到最高点的时间是多少?

解: 取坐标轴 x 从地面垂直向上, 设 $x = x(t)$ 表示物体在时刻 t 的位置坐标, 令 $v = \frac{dx}{dt}$, 则由 Newton 第二定律得出该物体的运动方程为

$$m\ddot{x} = m\dot{v} = -mg - k^2 v^2,$$

它满足初值条件 $v(0) = v_0$. 由此得

$$\frac{dv}{g + \frac{k^2}{m}v^2} = -dt,$$

两边积分得通解 $\arctan\left(\frac{k}{\sqrt{mg}}v\right) = -k\sqrt{\frac{g}{m}}t + C$, 其中 C 为任意常数. 代入初值条件求出 $C = \arctan\left(\frac{kv_0}{\sqrt{mg}}\right)$. 物体达到最高点时有 $v(t) = 0$, 故物体达到最高点的的时间是

$$t = \frac{\sqrt{mg}}{gk} \arctan\left(\frac{kv_0}{\sqrt{mg}}\right).$$

4. 把原教材的例 1.3 和例 1.4 的微分方程化成规范的一阶方程组形式.

解: 对原教材的例 1.3 的微分方程, 令 $y = \frac{dx}{dt}$, 则可将其化成规范的一阶方程组

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{k}{m}x - \frac{\mu}{m}y.$$

对原教材的例 1.4 的微分方程, 令 $x_1 = \theta$, $x_2 = \frac{d\theta}{dt}$, 则可将其化成规范的一阶方

程组

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{g}{l} \sin x_1.$$

5. 作出下列方程的方向场, 并描出经过指定点的积分曲线:

(1) $\frac{dx}{dt} = |x|$, $(0, 0)$, $(0, -1)$.

(2) $\frac{dx}{dt} = t^2 + x^2$, $(0, 0)$, $(0, -1/2)$, $(\sqrt{2}, 0)$.

(3) $\frac{dx}{dt} = t^2 - x^2$, $(0, 0)$, $(0, 1)$.

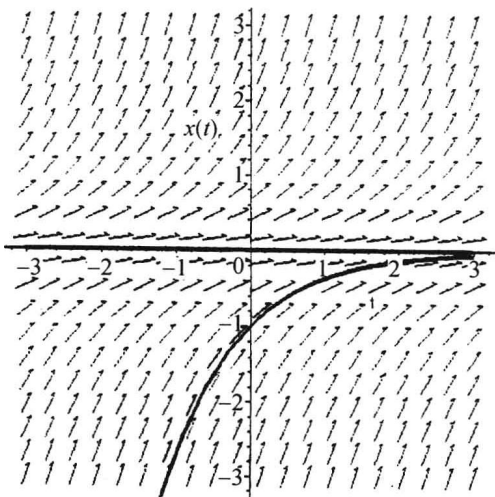


图 1.3 第 5(1)题

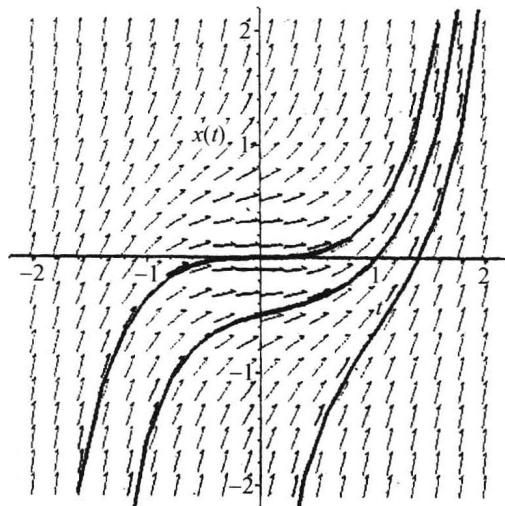


图 1.4 第 5(2)题

解: 利用如下的 Maple 命令可作出相应方程的方向场和积分曲线, 见图 1.3~图 1.5:

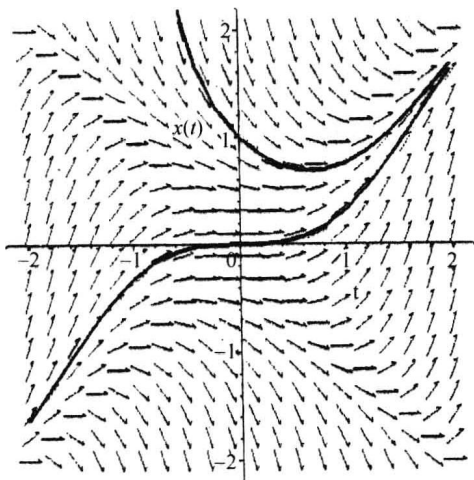


图 1.5 第 5(3)题

```
with(DEtools);
phaseportrait(D(x)(t)= abs(x(t)), x(t), t= - 3.3,
  [[x(0)= 0], [x(0)= - 1]], x= - 3.3, color= black,
  linecolor= black);
phaseportrait(D(x)(t)= t^2+ x^2, x(t), t= - 2.2,
  [[x(0)= 0], [x(0)= - 1/2], [x(sqrt(2))= 0]],
  x= - 2.2, color= black, linecolor= black);
phaseportrait(D(x)(t)= t^2- x^2, x(t), t= - 2.2,
  [[x(0)= 0], [x(0)= 1]], x= - 2.2, color= black,
  linecolor= black);
```

习 题 1.3

1. 求下列曲线族满足的微分方程:

- (1) $x=Ct+C^2$.
- (2) $x(t)=C_1 e^t \cos t+C_2 e^t \sin t$.
- (3) $(t-C_1)^2+(x-C_2)^2=1$.

其中 C, C_1, C_2 是参数.

解: (1) 对函数 $x=Ct+C^2$ 求导得 $\frac{dx}{dt}=C$. 代入曲线族方程得所求微分方程为

$$x=t \frac{dx}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

(2) 对函数 $x(t)=C_1 e^t \cos t + C_2 e^t \sin t$ 求导得

$$\frac{dx}{dt}=C_1 e^t (\cos t - \sin t) + C_2 e^t (\sin t + \cos t),$$

将其与 $x(t)=C_1 e^t \cos t + C_2 e^t \sin t$ 联立, 由此解出

$$C_1 = e^{-t} \left\{ x(\sin t + \cos t) - \frac{dx}{dt} \sin t \right\},$$

$$C_2 = e^{-t} \left\{ x(\sin t - \cos t) + \frac{dx}{dt} \cos t \right\},$$

再由

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = C_1 e^t (-2 \sin t) + C_2 e^t (2 \cos t),$$

即得所求微分方程为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} + 2x = 0.$$

(3) 对 $(t-C_1)^2 + (x-C_2)^2 = 1$ 关于 t 求导两次得

$$2(t-C_1) + 2(x-C_2) \frac{dx}{dt} = 0,$$

$$2 + 2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2(x-C_2) \frac{d^2 x}{dt^2} = 0,$$

由此解出

$$x-C_2 = - \left(1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \right) \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^{-1},$$

$$t-C_1 = \frac{dx}{dt} \left(1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \right) \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^{-1},$$

将其代入 $(t-C_1)^2 + (x-C_2)^2 = 1$ 并化简即得

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \left[1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \right]^{3/2}.$$

2. 平面上安放长度为 $2a$ 的细磁棒, 如果撒上一些小铁钉, 它们将按磁场的方向排列. 可将细磁棒简化为放在两端点处的两个异性点磁荷, 磁量分别为 $+1$ 和 -1 . 试求出这个磁场满足的微分方程. 进而, 画出磁场的方向场图并分析上面的积分曲线.

解: 建立 xy 平面坐标系, 使细磁棒的端点分别在 $A: (-a, 0)$ 和 $B: (a, 0)$ 点, 在 A 处的点磁荷的磁量为 $+1$, 在 B 处的点磁荷的磁量为 -1 , 它们在平面上任一点 $C: (x, y)$ 处产生的磁场强度分别为 H_1 和 H_2 , 则

$$H_1 = \frac{r_1}{r_1^3}, \quad H_2 = -\frac{r_2}{r_2^3},$$

其中 r_1 为由 A 到 C 的向量, r_2 为由 B 到 C 的向量, $r_1 = |r_1|$, $r_2 = |r_2|$. 则磁场在 C 的磁场强度为 $H = H_1 + H_2$. 由此容易计算出磁场强度 H 在 x 轴和 y 轴上的分量分别为

$$P(x, y) = \frac{x+a}{\sqrt{((x+a)^2+y^2)^3}} - \frac{x-a}{\sqrt{((x-a)^2+y^2)^3}},$$

$$Q(x, y) = \frac{y}{\sqrt{((x+a)^2+y^2)^3}} - \frac{y}{\sqrt{((x-a)^2+y^2)^3}},$$

所求磁场满足的微分方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}.$$

读者可将本章例 1.7 的 Maple 程序作适当修改画出相应的方向场图, 见图 1.6.

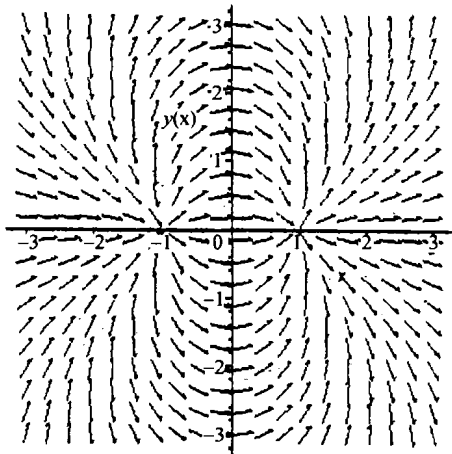


图 1.6 第 2 题

第二章 初等积分法

本章主要讨论一阶微分方程

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (2.1)$$

的几种特殊形式的初等求解方法. 由于这些方法是把方程的求解问题转化成初等函数的积分问题, 因此称为初等积分法. 这些经典的方法至今仍是最基本、最重要的方法, 很多问题, 如线性方程的求解和 Hamilton 系统的能量计算都离不开它. 方程(2.1)的最基本的形式是变量分离形式和恰当方程形式, 因为在本章讨论的其它形式的方程都可以通过变量代换或积分因子法化为这两种形式.

2.1 主要内容

在本节我们将归纳总结本章介绍的方程(2.1)可用初等积分法求解的几种特殊形式及其求解方法. 需要指出的是, 我们不仅需要熟悉各种不同形式方程的求解方法, 能够迅速判断给定方程的类型并根据相应的方法求解, 更重要的是积累经验, 灵活掌握求解技巧, 善于根据方程的特点引进适当的变量代换, 把给定方程化为本章介绍的方程形式求解.

值得注意的是, 可以用初等积分法求解的微分方程是很少的, 比如 1841 年 Liouville 证明了形式非常简单的 Riccati 方程

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$$

一般没有初等解法. 这就促使人们转而考虑怎样从微分方程表达形式本身的特点去分析推断其解的属性, 如周期性、有界性、稳定性等, 这正是微分方程定性理论所要研究的内容.

1. 变量分离方程

形如

$$\frac{dy}{dx} = h(x)g(y) \quad (2.2)$$

的一阶方程, 其中 $h(x)$ 在区间 (a, b) 上连续, $g(y)$ 在 (c, d) 上连续且不等于 0. 利用分离变量法求解, 将(2.2)作等式变形得

$$\frac{dy}{g(y)} = h(x)dx.$$

两端积分得方程(2.2)的隐式通解 $G(y) = H(x) + C$, 其中 C 是某个常数且

$$G(y) = \int \frac{dy}{g(y)}, \quad H(x) = \int h(x)dx,$$

这里不定积分 $G(y)$ 及 $H(x)$ 分别为被积函数的某个原函数, 而把积分常数 C 明确写出来. 若 G 存在逆函数 G^{-1} , 则可得到显式通解 $y = G^{-1}(H(x) + C)$.

2. 可化为变量分离方程的类型

1) 一阶线性微分方程, 即

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + f(x). \quad (2.3)$$

当 $f(x) \equiv 0$ 时, 称方程(2.3)为齐次线性方程; 否则, 称方程(2.3)为非齐次线性方程.

对齐次线性方程

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y, \quad (2.4)$$

可用分离变量法求得其通解为

$$y = C \exp\left(\int a(x)dx\right), \quad (2.5)$$

其中 C 为任意常数.

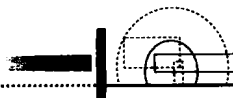
对非齐次方程(2.3), 我们采用重要的常数变易法求解, 其思想是: 把方程(2.4)的通解表达式(2.5)中的常数 C 换成 x 的函数 $c(x)$, 即求具有如下形式

$$y = c(x) \exp\left(\int a(x)dx\right)$$

的解, 由此得方程(2.3)的通解公式(又称为常数变易公式)

$$y = \exp\left(\int a(x)dx\right) \left(C + \int f(x) \exp\left(-\int a(x)dx\right) dx\right),$$

其中 C 为任意常数.



2) Bernoulli 方程, 即形如

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + f(x)y^\alpha \quad (2.6)$$

的方程. 当 $\alpha=0$ 或 $\alpha=1$ 时即为一阶线性方程. 当 $\alpha \neq 0, 1$ 时作变量替换 $z = y^{1-\alpha}$, 可将方程(2.6)化为如下关于 z 的一阶线性方程求解:

$$\frac{dz}{dx} = (1-\alpha)a(x)z + (1-\alpha)f(x).$$

3) 齐次方程, 即形如

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.7)$$

的方程, 其中 $f(x, y)$ 是变量 x, y 的零次齐次函数, 即对任意非零常数 λ 都有 $f(\lambda x, \lambda y) \equiv f(x, y)$. 作变量替换 $u = \frac{y}{x}$, 可将方程(2.7)化为如下变量分离的方程求解:

$$x \frac{du}{dx} = f(1, u) - u.$$

4) 线性分式形式的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \quad (2.8)$$

其中 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 都是给定的常数, 当 $c_1 = c_2 = 0$ 时, 方程(2.8)为齐次方程.

当 c_1 和 c_2 不全为零时, 可分如下两种情况讨论:

$$\text{情况 I: } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

这时可求得线性方程组

$$\begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0, \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

唯一的解 h 和 k 并作平移变换 $x = \xi + h, y = \eta + k$, 将方程(2.8)化为齐次方程

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right).$$

情况 II: $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

这时有如下三种可能:

(i) $b_1 \neq 0, a_1 \neq 0$ 且 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \lambda$, 这里 λ 为常数. 引入新变量 $z = a_1x + b_1y$, 可将方程(2.8)化为变量分离的方程

$$\frac{dz}{dx} = a_1 + b_1 f\left(\frac{z+c_1}{\lambda z+c_2}\right).$$

(ii) $b_1 \neq 0, a_1 = a_2 = 0$ 或者 $a_1 \neq 0, b_1 = b_2 = 0$.

这时方程(2.8)的形式分别为

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{b_1y+c_1}{b_2y+c_2}\right), \quad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+c_1}{a_2x+c_2}\right),$$

它们已经是变量分离的形式了.

(iii) $b_1 = a_1 = 0$.

引入新变量 $z = a_2x + b_2y$, 则方程(2.8)就化为变量可分离的方程

$$\frac{dz}{dx} = a_2 + b_2 f\left(\frac{z+c_1}{z+c_2}\right).$$

3. 恰当方程与积分因子法

如果对称形式的微分方程

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.10)$$

的左边恰好是某一函数 $u = U(x, y)$ 的全微分, 即

$$dU(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

则称其为恰当方程或全微分方程. 显然这时 $U(x, y) = C$ 是方程(2.10)的隐式通解, 其中 C 为任意常数. 函数 $U(x, y)$ 称为方程(2.10)的首次积分.

下面的定理给出了方程(2.10)是否为恰当方程的判别条件以及计算其相应的首次积分的方法:

定理 2.1 若函数 M, N 在某个开的矩形区域 G 中具有连续的一阶偏导数, 则方程(2.10)为恰当方程的充要条件是

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (2.11)$$

如果方程(2.10)为恰当方程, 则其通解为

$$\int_{x_0}^x M(x, y)dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y)dy = C. \quad (2.12)$$



或等价地,

$$\int_{x_0}^x M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y N(x, y)dy = C, \quad (2.13)$$

其中 C 是一个任意常数而且 (x_0, y_0) 为区域 G 内任意取定的一点.

如果方程(2.10)本身并不是恰当方程, 我们可以寻找一个合适的非零因子 $\mu(x, y)$, 使得方程(2.10)的同解方程

$$\mu(x, y)(M(x, y)dx + N(x, y)dy) = 0$$

为恰当方程, 则方程(2.10)的通解仍然可以求出来. 这种方法就是重要的积分因子法.

由定理 2.1 可推出积分因子 $\mu(x, y)$ 满足一阶线性偏微分方程

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu. \quad (2.14)$$

虽然由一阶线性偏微分方程的理论知方程(2.14)的解存在, 即方程(2.10)必定存在积分因子, 但是由方程(2.14)求解 μ 通常比求解方程(2.10)本身更困难. 因此我们主要是寻找方程(2.10)的某些特殊形式的积分因子, 特别是只依赖于变量 x 的积分因子 $\mu = \mu(x)$ 和只依赖于变量 y 的积分因子 $\mu = \mu(y)$.

称

$$E(x, y) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad (2.15)$$

为恰当判别式, 则由方程(2.14)易知当且仅当 $\frac{E}{N}$ 只依赖于变量 x 而与变量 y 无关时, 方程(2.10)存在只依赖于变量 x 的积分因子 $\mu(x)$. 此时,

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{E}{N} dx\right). \quad (2.16)$$

类似地, 当且仅当 $\frac{E}{M}$ 只依赖于变量 y 而与变量 x 无关时, 方程(2.10)存在只依赖于变量 y 的积分因子 $\mu(y)$. 此时,

$$\mu(y) = \exp\left(-\int \frac{E}{M} dy\right). \quad (2.17)$$

4. 隐式方程

处理一阶隐式方程

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (2.18)$$

的基本思想是将 $p = \frac{dy}{dx}$ 看成独立变量，然后利用下面的方法将其化为显式方程，再用上面给出的方法求解：

第一步 将曲面 $F(x, y, p) = 0$ 表示成参数形式

$$x = \phi(s, t), \quad y = \psi(s, t), \quad p = \kappa(s, t). \quad (2.19)$$

第二步 对方程(2.19)各式求 x, y 的微分：

$$dx = \frac{\partial \phi}{\partial s} ds + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt, \quad (2.20)$$

$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial s} ds + \frac{\partial \psi}{\partial t} dt, \quad (2.21)$$

$$dy = \frac{dy}{dx} dx = \kappa dx. \quad (2.22)$$

第三步 将方程(2.20)、方程(2.21)代入方程(2.22)并化简得到

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial s} - \frac{\partial \phi}{\partial s} \kappa\right) ds + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \kappa\right) dt = 0. \quad (2.23)$$

从而化成了对称形式的微分方程。

第四步 如果用之前的方法已求得了方程(2.23)的通解 $s = w(t, C)$ ，则将它代入方程(2.19)就得到方程(2.18)的参数形式的解

$$x = \phi(w(t, C), t), \quad y = \psi(w(t, C), t). \quad (2.24)$$

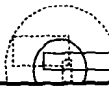
其中 C 为任意常数。如果方程(2.23)的通解是另一种形式 $t = w(s, C)$ ，我们可得到类似结果。

下面是方程(2.19)的几种特殊形式，其中 $p = \frac{dy}{dx}$ ：

1) 可以解出 y 的方程 $y = f(x, p)$ ，两边关于 x 求导即得

$$\left(p - \frac{\partial f}{\partial x}(x, p)\right) dx - \frac{\partial f}{\partial p}(x, p) dp = 0. \quad (2.25)$$

2) 可以解出 x 的方程 $x = f(y, p)$ ，两边关于 x 求导，注意到 $\frac{dp}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ ，可得如下规范形式的一阶微分方程：



$$\frac{dp}{dy} = \frac{1 - \frac{\partial f}{\partial y}(y, p)}{\frac{\partial f}{\partial p}(y, p)}. \quad (2.26)$$

3) 不显含 y 的方程 $F(x, p) = 0$, 设平面曲线 $F(x, p) = 0$ 有参数表示

$$x = \varphi(s), \quad p = \psi(s),$$

其中 s 为参数. 由微分关系得 $dy = \psi(s)\varphi'(s)ds$, 由此得方程 $F(x, p) = 0$ 的参数形式的通解为

$$x = \varphi(s), \quad y = \int \psi(s)\varphi'(s)ds + C,$$

其中 C 为任意常数.

4) 不显含 x 的隐式方程 $F(y, p) = 0$, 令 $p(y) = \frac{dy}{dx}$. 类似地, 设平面曲线 $F(y, p) = 0$ 有参数表示

$$y = \varphi(s), \quad p = \psi(s),$$

由微分关系得

$$dx = \frac{\varphi'(s)}{\psi(s)} ds.$$

故方程 $F(y, p) = 0$ 的参数形式的通解为

$$x = \int \frac{\varphi'(s)}{\psi(s)} ds + C, \quad y = \varphi(s),$$

其中 C 为任意常数.

5. 高阶微分方程

对于某些特殊形式的高阶微分方程

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0,$$

可以通过变量变换的方法将其化为阶数较低的方程将问题简化. 下面是几种可通过降阶的方法求解的高阶微分方程.

1) 不显含未知函数 y 的方程

$$F\left(x, \frac{d^k y}{dx^k}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \quad (k \geq 1). \quad (2.27)$$

令 $p = \frac{d^k y}{dx^k}$, 则方程(2.27)变为关于 p 的 $n-k$ 阶微分方程

$$F\left(x, p, \frac{dp}{dx}, \dots, \frac{d^{n-k} p}{dx^{n-k}}\right) = 0.$$

下面是方程(2.27)的几种常见形式:

(i) 形如 $y^{(n)} = f(x)$ 的方程.

直接对方程两边由 x_0 到 x 进行 n 次积分并利用公式

$$\int_a^b dx \int_a^x g(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b g(x, y) dx,$$

可求得通解

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-\xi)^{n-1} f(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^n C_k (x-x_0)^{k-1},$$

其中 C_1, \dots, C_n 为任意常数.

(ii) 形如 $F(x, y^{(n)}) = 0$ 的方程, 其中 $y^{(n)}$ 不能解出.

若由平面曲线 $F(x, p) = 0$ 得到参数表示:

$$x = \phi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t),$$

则 $dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx = \psi(t)\phi'(t)dt$, 从而

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\phi'(t)dt + C_1 = \phi_1(t, C_1).$$

再进行 $n-1$ 次积分就可得原方程的参数形式的通解为

$$x = \phi(t), \quad y = \psi_n(t, C_1, \dots, C_n),$$

其中 C_1, \dots, C_n 为任意常数.

(iii) 形如 $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ 的方程.

若可从中解出 $y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$, 则可通过变量替换 $p = y^{(n-1)}$ 将方程化为 $p' = f(p)$, 积分即得 $y^{(n-1)} = \omega(x, C_1)$, 最后积分 $n-1$ 次就可以得到通解.

若 $y^{(n)}$ 不可解出, 但有相应的参数表示

$$y^{(n-1)} = \phi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t),$$

则从 $dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx$ 可得 $\phi'(t)dt = \psi(t)dx$, 从而

$$x = \int \frac{\phi'(t)}{\psi(t)} dt + C_1, \quad y^{(n-1)} = \phi(t).$$

利用类型(ii)的方法即可求得通解.

(iv) 形如 $y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$ 的方程.

令 $p = y^{(n-2)}$ 可将方程化为 $p'' = f(p)$, 两边乘以 $2p'$ 得 $2p'p'' = 2f(p)p'$, 即 $d(p')^2 = 2f(p)dp$, 故

$$p' = \pm \sqrt{2 \int f(p) dp + C_1},$$

再利用分离变量法可得 $y^{(n-2)} = p = \omega(x, C_1, C_2)$, 最后积分 $n-2$ 次就可以得到通解.

2) 不显含自变量 x 的自治微分方程

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0. \quad (2.28)$$

令 $p = \frac{dy}{dx}$, 则

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy},$$

用数学归纳法容易证明: 对任意的 $1 < j \leq n$, $\frac{d^j y}{dx^j}$ 可以用

$$y, p, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{j-1} p}{dy^{j-1}}$$

表示. 代入方程(2.28)就得如下形式的关于 p 的 $n-1$ 阶方程

$$G\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}}\right) = 0.$$

3) 齐次方程

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0, \quad (2.29)$$

其中函数 $F(x, x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ 是关于变量 x_1, x_2, \dots, x_{n+1} 的零次齐次函数. 令

$$p = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx},$$

并以它为新未知函数, 则有

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} p + y \frac{dp}{dx} = y \left(p^2 + \frac{dp}{dx} \right),$$

用数学归纳法不难证明: 对任意的 $1 < k \leq n$, $\frac{1}{y} \frac{d^k y}{dx^k}$ 可用

$$p, \frac{dp}{dx}, \dots, \frac{d^{k-1}p}{dx^{k-1}}$$

表示. 代入方程(2.29)就得如下形式的关于 p 的 $n-1$ 阶方程

$$G\left(x, p, \frac{dp}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}}\right) = 0.$$

4) 全微分方程

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0, \quad (2.30)$$

其中左边是某个形如

$$\Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

的表达式对 x 的全导数, 即

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = \frac{d}{dx} \Phi\left(x, y, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right),$$

这里 $n+1$ 元函数 $\Phi(x_1, \dots, x_{n+1})$ 的对各变元的一阶偏导数都存在且连续, 故

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_{k+1}} \frac{d^k y}{dx^k}.$$

其中函数 $\Phi(x_1, \dots, x_{n+1})$ 的对各变元的一阶偏导数在

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

处取值. 此时, 方程(2.30)等价于 $n-1$ 阶方程

$$\Phi\left(x, y, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = C, \quad (2.31)$$

其中 C 为任意常数.

6. 奇解

对于某些微分方程, 有时存在一条特殊的积分曲线, 它不属于该方程的积分曲线族, 但在它的每一点上都有积分曲线族中的某条曲线与它相切, 这条特殊的积分曲线所对应的解称为方程的奇解. 在几何学上, 这条特殊的积分曲线称为该积分曲线族的包络. 显然在这条特殊的积分曲线上的每一点处, 解的唯一性都被破坏.

求方程

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (2.32)$$

的奇解主要有 C -判别曲线法和 p -判别曲线法两种方法:

1) C -判别曲线法: 方程(2.32)的积分曲线族 $\Phi(x, y, C)$ 如果有包络, 则当函数 $\Phi(x, y, C)$ 关于 x, y, C 连续可微时, 其包络满足关系式

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0. \end{cases} \quad (2.33)$$

关系式(2.33)或由它消去 C 而得到的关系式 $\Omega(x, y) = 0$ 所确定的曲线称为 C -判别曲线.

2) p -判别曲线法: 设函数 $F(x, y, p)$ 关于 x, y, p 连续可微, 则方程(2.32)的奇解 $y = \phi(x)$ 满足关系式

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F'_p(x, y, p) = 0, \end{cases} \quad (2.34)$$

其中 $p = \frac{d\phi}{dx}$. 关系式(2.34)或由它消去 p 而得到的关系式 $\Delta(x, y) = 0$ 所确定的曲线称为 p -判别曲线.

显然, 方程(2.32)若存在奇解, 则该奇解对应的积分曲线必在 C -判别曲线或 p -判别曲线中. 但是 C -判别曲线或 p -判别曲线并不一定就是方程的奇解, 我们需要进一步验证才能确定.

2.2 典型例题

例 2.1 求微分方程

$$x^2 \frac{dy}{dx} - \cos 2y = 1$$

的通解.

解: 该方程为变量可分离方程, 分离变量后得

$$\frac{dy}{1 + \cos 2y} = \frac{dx}{x^2},$$

利用 $1 + \cos 2y = 2 \cos^2 y$ 并两边分别积分, 得到原方程的通解为

$$\tan y = -\frac{2}{x} + C,$$

其中 C 为任意常数.

例 2.2 求解初值问题:

$$(a^2 + y^2)dx + 2x\sqrt{ax - x^2}dy = 0, \quad y(a) = 0.$$

解: 原方程为变量可分离方程, 分离变量后得

$$\frac{dy}{a^2 + y^2} = -\frac{dx}{2x\sqrt{ax - x^2}},$$

两边分别积分, 得到通解为

$$\arctan\left(\frac{y}{a}\right) = \frac{\sqrt{ax - x^2}}{x} + C,$$

其中 C 为任意常数. 由此得

$$y = a \tan\left(\sqrt{\frac{ax - x^2}{x}} + C\right).$$

代入初值条件 $y(a) = 0$ 可得 $C = 0$. 故所求初值问题的解为

$$y = a \tan\left(\sqrt{\frac{ax - x^2}{x}}\right).$$

例 2.3 求解方程 $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$.

下面我们分别用两种不同的方法求解, 读者可进行比较.

解法一: 该方程为对称形式, $M(x, y) = x + y - 2$, $N(x, y) = x - y + 4$. 经验证,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x},$$

因而原方程是恰当方程. 将方程左端重新分组得到

$$\begin{aligned} & (x-2)dx + (-y+4)dy + (ydx + xdy) \\ &= d\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right) + d\left(-\frac{1}{2}y^2 + 4y\right) + d(xy) \\ &= d\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{2}y^2 + 4y + xy\right). \end{aligned}$$

故原方程的通解为

$$\frac{1}{2}(x^2 - y^2) + xy - 2x + 4y = C,$$

其中 C 为任意常数.

解法二: 容易验证 $x-y+4=0$ 不是原方程的解, 故可设 $x-y+4 \neq 0$, 这时可将原方程改写为线性分式方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+y-2}{x-y+4}. \quad (2.35)$$

令 $x=\xi-1$, $y=\eta+3$, 可将方程(2.35)变为

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\xi+\eta}{\xi-\eta}. \quad (2.36)$$

令 $z = \frac{\eta}{\xi}$, 方程(2.36)变为

$$z + \xi \frac{dz}{d\xi} = -\frac{1+z}{1-z}.$$

利用分离变量法, 可得上一方程的通解为 $\xi^2(z^2 - 2z - 1) = C_1$, 其中 C_1 为任意常数. 由此得原方程的通解为

$$\frac{1}{2}(x^2 - y^2) + xy - 2x + 4y = C,$$

其中 $C = -\frac{1}{2}C_1 + 7$ 为任意常数.

例 2.4 求解隐式方程

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x-y)\frac{dy}{dx} - x = 0.$$

解: 对原方程左边因式分解得

$$\left(\frac{dy}{dx} - 1\right)\left(y\frac{dy}{dx} + x\right) = 0.$$

由此得

$$\frac{dy}{dx} = 1 \quad \text{或} \quad y\frac{dy}{dx} + x = 0.$$

所以原方程的解为 $y = x + C_1$ 或 $x^2 + y^2 = C_2$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

例 2.5 求方程

$$2y\left(\frac{dy}{dx} + 2\right) - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

的奇解(若有的话).

下面我们分别用 C -判别曲线法和 p -判别曲线法来求奇解.

解法一: C -判别曲线法令 $p = \frac{dy}{dx}$, 则原方程变为

$$y = \frac{xp^2}{2(p+2)}.$$

两边关于 x 求导, 化简得

$$1 = \frac{x}{p+2} \frac{dp}{dx},$$

求出其通解为 $p+2=Cx$, 其中 C 为任意常数. 由此得原方程的通解为 $2Cy = (Cx-2)^2$. 该通解族的 C -判别曲线满足方程

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) := 2Cy - (Cx-2)^2 = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 2y - 2x(Cx-2) = 0. \end{cases}$$

从中消去 C 得 C -判别曲线 $y=0$ 或 $y=-4x$, 易证它们均是原方程的奇解.

解法二: p -判别曲线法原方程的 p -判别曲线满足方程

$$\begin{cases} F(x, y, p) := 2y(p+2) - xp^2 = 0, \\ F'_p(x, y, p) = 2y - 2xp = 0, \end{cases}$$

消去 p 得到 p -判别曲线 $y=0$ 或 $y=-4x$, 易证它们均是原方程的奇解.

例 2.6 求解高阶方程

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \sqrt{1 + \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2}.$$

解: 令 $p = \frac{d^2 y}{dx^2}$, 则原方程变为

$$\frac{dp}{dx} = \sqrt{1+p^2}.$$

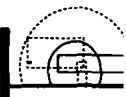
利用分离变量法可得到该方程的通解为 $p = \sinh(x+C_1)$, 即

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sinh(x+C_1).$$

再积分两次就可以得到原方程的通解为

$$y(x) = \sinh(x+C_1) + C_2 x + C_3,$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.



例 2.7 求解方程

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 8 \frac{dy}{dx} = 0.$$

解: 令 $p = \frac{dy}{dx}$, 则原方程变为

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = -8p,$$

以 $2p' dx$ 乘上式两端得 $d(p'^2) = -16p dp$, 故 $(p')^2 = 8(A_1^2 - p^2)$, 其中 A_1 为任意常数. 若 $A_1 = 0$, 则 $p = 0$. 若 $A_1 \neq 0$, 则

$$\frac{dp}{dx} = \pm 2\sqrt{2} \sqrt{A_1^2 - p^2}.$$

当 $A_1 \neq 0$ 时, 考虑方程

$$\frac{dp}{dx} = 2\sqrt{2} \sqrt{A_1^2 - p^2},$$

使用分离变量的方法, 可得

$$\arcsin\left(\frac{p}{A_1}\right) = 2\sqrt{2}x + A_2,$$

其中 A_2 为任意常数. 由此可解出 $p = A_1 \sin(2\sqrt{2}x + A_2)$, 当 $A_1 = 0$ 时, $p = A_1 \sin(2\sqrt{2}x + A_2) = 0$ 仍成立. 从而

$$\frac{dy}{dx} = A_1 \sin(2\sqrt{2}x + A_2),$$

积分后得原方程的通解 $y = C_1 \cos(2\sqrt{2}x + C_2) + C_3$, 其中 $C_1 = -\frac{A_1}{2\sqrt{2}}$, $C_2 = A_2$, C_3 为

任意常数.

由方程

$$\frac{dp}{dx} = -2\sqrt{2} \sqrt{A_1^2 - p^2},$$

可得原方程相同形式的通解.

例 2.8 已知 Riccati 方程

$$t^2 \frac{dx}{dt} + (tx - 2)^2 = 0$$

有一个特解 $\phi(t) = \frac{1}{t}$, 求其通解.

解：首先将原方程化为 Riccati 方程的标准形式

$$\frac{dx}{dt} = -x^2 + \frac{4}{t}x - \frac{4}{t^2}. \quad (2.37)$$

再通过变换 $y = x - \phi(t)$, 将方程 (2.37) 化为关于 y 的 Bernoulli 方程

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2}{t}y - y^2.$$

容易求出其通解为

$$y = \frac{3t^2}{t^3 + C}.$$

所以原方程的通解为

$$x = \frac{3t^2}{t^3 + C} + \frac{1}{t},$$

其中 C 为任意常数.

2.3 习题与解答

习 题 2.1

1. 在方程 $\frac{dy}{dx} = h(x)g(y)$ 中如果没有假设 $g(y) \neq 0$, 讨论怎样用分离变量法来求解微分方程.

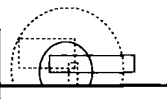
解：假设所给方程满足解的存在唯一性条件. 如果 $g(y_0) = 0$, 则 $y = y_0$ 显然是所给方程的解. 下面假设 $g(y_0) \neq 0$. 设 $y = \varphi(x)$ 在区间 (a, b) 上是满足初始条件 $\varphi(x_0) = y_0$ 的所给方程的解, 则

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = h(x)g(\varphi(x)), \quad a < x < b.$$

由解的唯一性可知, 在区间 (a, b) 上均有 $g(\varphi(x)) \neq 0$. 事实上, 假设有 $\tilde{x}_0 \in (a, b)$, 使得 $g(\varphi(\tilde{x}_0)) = 0$, 则 $y = \varphi(x)$ 和 $y \equiv \varphi(\tilde{x}_0)$ 都是所给方程的过点 $(\tilde{x}_0, \varphi(\tilde{x}_0))$ 的解. 由解的唯一性, $\varphi(x) \equiv \varphi(\tilde{x}_0)$. 故 $g(y_0) = g(\varphi(\tilde{x}_0)) = 0$. 这与假设 $g(y_0) \neq 0$ 矛盾.

由 $g(\varphi(x)) \neq 0$ 可得

$$\frac{1}{g(\varphi(x))} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} = h(x).$$



故当 $x \in (a, b)$ 时,

$$\int_{x_0}^x \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))} dt = \int_{x_0}^x h(t) dt.$$

令 $\tau = \varphi(t)$, 则

$$\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} \frac{d\tau}{g(\tau)} = \int_{x_0}^x h(t) dt,$$

故 $y = \varphi(x)$ 是满足

$$\int_{y_0}^y \frac{d\tau}{g(\tau)} = \int_{x_0}^x h(t) dt, \quad \varphi(x_0) = y_0$$

的隐式解.

反之, 若 $y = \psi(x)$ 是由上式所确定的隐函数, 则 $y = \psi(x)$ 是过 (x_0, y_0) 的所给方程的解. 事实上, 由上式知, 当 $a < x < b$ 时,

$$\int_{y_0}^{\psi(x)} \frac{d\tau}{g(\tau)} = \int_{x_0}^x h(t) dt.$$

两边关于 x 求导即可得

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = h(x)g(\psi(x)).$$

所以 $y = \psi(x)$ 是所给方程的解.

同理可证由等式

$$\int_{y_0}^y \frac{d\tau}{g(\tau)} = \int_{x_0}^x h(t) dt + C$$

所确定的函数 $y = \psi(x, C)$ 都是所给方程的解, 其中 C 是任意常数.

因此, 在实际求解中除了求出使 $g(y) = 0$ 的 y 值来得到方程的特解以外, 只要再假设 $g(y) \neq 0$ 并用分离变量法求解方程得到方程的通解即可.

2. 试用分离变量法求下列一阶微分方程的解.

$$(1) \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = y^2 \cos x.$$

$$(3) \frac{dy}{dx} = 2xy.$$

$$(4) \quad xy(1+x^2)dy=(1+y^2)dx.$$

$$(5) \quad \frac{dy}{dx}=e^{2y-4x}.$$

$$(6) \quad \frac{dy}{dx}=\frac{2}{x^2-1}.$$

$$(7) \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{2}.$$

$$(8) \quad \frac{dy}{dx}=e^x \cos^2 y.$$

$$(9) \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(10) \quad \frac{dy}{dx}=2xy^2.$$

$$(11) \quad (x+1)\frac{dy}{dx}=2y.$$

$$(12) \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{3y^2+e^y}.$$

$$(13) \quad x(y^2-1)dx+y(x^2-1)dy=0.$$

解: (1) 分离变量后得 $ydy=-xdx$, 两边积分得

$$\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+C_1,$$

因而原方程的通解为 $x^2+y^2=C$, 其中 $C=2C_1$ 为任意非负常数.

(2) 当 $y \neq 0$ 时, 分离变量后得

$$\frac{1}{y^2}dy=\cos x dx,$$

两端积分得

$$-\frac{1}{y}=\sin x+C,$$

从而方程的通解为

$$y=-\frac{1}{\sin x+C},$$

其中 C 为任意常数. 此外显然 $y=0$ 也是方程的解.

(3) 当 $y \neq 0$ 时, 分离变量后得

$$\frac{1}{y} dy = 2x dx,$$

两端积分得 $\ln |y| = x^2 + C_1$, 此外显然 $y=0$ 也是方程的解. 从而方程的通解为 $y = Ce^{x^2}$, 其中 C 为任意常数.

(4) 分离变量后得

$$\frac{y dy}{1+y^2} = \frac{dx}{x(1+x^2)},$$

两端积分得

$$\frac{1}{2} \ln(1+y^2) = \ln |x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_1,$$

即 $\ln(1+x^2)(1+y^2) = \ln x^2 + 2C_1$, 从而方程的通解为 $(1+x^2)(1+y^2) = Cx^2$, 其中 $C = e^{2C_1}$ 为任意正常数.

(5) 分离变量后得 $e^{-2y} dy = e^{-4x} dx$, 两端积分得

$$-\frac{1}{2} e^{-2y} = -\frac{1}{4} e^{-4x} + C_1,$$

从而方程的通解为 $e^{-4x} - 2e^{-2y} = C$, 其中 $C = 4C_1$ 为任意常数.

(6) 分离变量后得

$$dy = \frac{2dx}{x^2-1},$$

两端积分得方程的通解为

$$y = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C,$$

其中 C 为任意常数.

(7) 当 $y \neq \pm 1$ 时, 分离变量后得

$$\frac{2dy}{y^2-1} = dx,$$

两端积分得

$$\ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = x + C_1,$$

其中 C_1 为任意常数, 此即

$$y = \frac{1 + Ce^x}{1 - Ce^x},$$

其中 $C = \pm e^{C_1}$ 为任意非零常数. 此外显然 $y=1$ 和 $y=-1$ 也是方程的解. 从而方程的解为

$$y = \frac{1 + Ce^x}{1 - Ce^x},$$

和 $y=-1$, 其中 C 为任意常数.

(8) 当 $\cos y \neq 0$, 即 $y \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ (k 为整数) 时, 分离变量后得 $\sec^2 y dy = e^x dx$, 两端积分得 $\tan y = e^x + C$. 故方程的通解为 $y = \arctan(e^x + C)$, 其中 C 为任意常数. 此外显然对任意的整数 k , $y = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 也是方程的解.

(9) 当 $y \neq \pm 1$ 时, 分离变量后得

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

两端积分得 $\arcsin y = \arcsin x + C$, 其中 C 为任意常数, 从而方程的通解为 $y = \sin(\arcsin x + C)$. 此外显然 $y=1$ 和 $y=-1$ 也是方程的解.

(10) 当 $y \neq 0$ 时, 分离变量后得

$$\frac{dy}{y^2} = 2x dx,$$

两端积分得

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C,$$

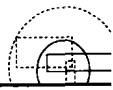
其中 C 为任意常数, 从而方程的通解为

$$y = -\frac{1}{x^2 + C}.$$

此外显然 $y=0$ 也是方程的解.

(11) 当 $y \neq 0$ 时, 分离变量后得

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x+1},$$



两端积分得 $\ln |y| = 2\ln |x+1| + C_1$, 即 $y = \pm e^{C_1} (x+1)^2$, 其中 C_1 为任意常数, 此外显然 $y=0$ 也是方程的解, 从而方程的通解为 $y=C(x+1)^2$, 其中 C 为任意常数.

(12) 分离变量后得 $(3y^2 + e^y)dy = \cos x dx$, 两端积分得方程的隐式通解 $y^3 + e^y = \sin x + C$, 其中 C 为任意常数.

(13) 当 $y \neq \pm 1$ 时, 分离变量后得

$$\frac{ydy}{y^2-1} = -\frac{x dx}{x^2-1},$$

两端积分得

$$\frac{1}{2} \ln |y^2-1| = -\frac{1}{2} \ln |x^2-1|^{-1} + C_1,$$

即 $(x^2-1)(y^2-1) = \pm e^{2C_1}$, 其中 C_1 为任意常数, 此外显然 $y = \pm 1$ 也是方程的解, 从而方程的通解为 $(x^2-1)(y^2-1) = C$, 其中 C 为任意常数.

3. 将下列方程化为可分离变量方程, 并求解.

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}.$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+1}{x+y-3}.$

(3) $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}.$

(4) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}.$

(5) $(2x+y-4)dx + (x+y-1)dy = 0.$

(6) $(x^3 + y^3)dx - 3xy^2 dy = 0.$

(7) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1.$

(8) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy}.$

(9) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+5}{x-y-2}.$

(10) $\frac{dy}{dx} = 2 \left(\frac{y+2}{x+y-1} \right)^2.$

$$(11) \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{\frac{y}{x} + \frac{y}{x}}.$$

$$(12) \frac{dy}{dx} = \frac{y-x-2}{x+y+4}.$$

$$(13) 2x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2.$$

$$(14) \frac{dy}{dx} = \sin(x+y+1).$$

$$(15) x \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$$

解: (1) 令 $u = \frac{y}{x}$, 原方程变为

$$x \frac{du}{dx} = \tan u.$$

用分离变量法求得其通解为 $\sin u = Cx$. 其中 C 为任意常数. 将 u 换成 $\frac{y}{x}$ 得原方程的通解为

$$\sin\left(\frac{y}{x}\right) = Cx.$$

(2) 令 $x = \xi + 1$, $y = \eta + 2$, 可将原方程变为

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi - \eta}{\xi + \eta},$$

令 $u = \frac{\eta}{\xi}$, 则有

$$\xi \frac{du}{d\xi} + u = \frac{1-u}{1+u},$$

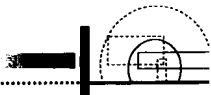
用分离变量法求得其通解为 $u^2 + 2u - 1 = C_1 \xi^{-2}$, 其中 C_1 为任意常数. 再由

$$u = \frac{\eta}{\xi} = \frac{y-2}{x-1}, \quad \xi = x-1,$$

代入上式并化简得原方程的通解为

$$y^2 + 2xy - x^2 - 6y - 2x = C,$$

其中 C 为任意常数.



(3) 将原方程改写为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1},$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则有

$$x \frac{du}{dx} + u = \frac{u^2}{u-1},$$

用分离变量法求得其通解为 $\ln |ux| - u = C$, 将 u 换成 $\frac{y}{x}$ 得原方程的通解为

$$\ln |y| - \frac{y}{x} = C,$$

其中 C 为任意常数. 此外显然 $y=0$ 也是方程的解.

(4) 令 $u = x+y$, 则有

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{1}{u},$$

用分离变量法求得其通解为 $u - \ln |u+1| = x + C$, 将 u 换成 $x+y$ 得原方程的通解为 $y - \ln |x+y+1| = C$, 其中 C 为任意常数.

(5) 将原方程改写为

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y-4}{x+y-1},$$

令 $x = \xi + 3$, $y = \eta - 2$, 可将原方程变为

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{2\xi + \eta}{\xi + \eta},$$

令 $u = \frac{\eta}{\xi}$, 则有

$$\xi \frac{du}{d\xi} + u = -\frac{2+u}{1+u},$$

用分离变量法求得其通解为 $\xi^2(u^2 + 2u + 2) = C_1$, 其中 C_1 为任意常数. 再由

$$u = \frac{\eta}{\xi} = \frac{y+2}{x-3}, \quad \xi = x-3,$$

代入上式并化简得原方程的通解为

$$2x^2 + 2xy + y^2 - 8x - 2y = C,$$

其中 C 为任意常数.

(6) 将原方程改写为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \left(\frac{x}{y} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{y}{x},$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则有

$$x \frac{du}{dx} + u = \frac{1}{3u^2} + \frac{1}{3}u,$$

用分离变量法求得其通解为 $x^2(1-2u^3)=C$, 将 u 换成 $\frac{y}{x}$ 得原方程的通解为 $x^3 - 2y^3 = Cx$, 其中 C 为任意常数.

(7) 令 $u = x - y$, 则有

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{u},$$

用分离变量法求得其通解为 $u^2 + 2x = C$, 将 u 换成 $x - y$ 得原方程的通解为 $(x - y)^2 + 2x = C$, 其中 C 为任意常数.

(8) 将原方程改写为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x},$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则有

$$x \frac{du}{dx} + u = \frac{1}{u} + u,$$

用分离变量法求得其通解为 $u^2 = \ln x^2 + C$, 将 u 换成 $\frac{y}{x}$ 得原方程的通解为 $y^2 = x^2(\ln x^2 + C)$, 其中 C 为任意常数.

(9) 令 $u = x - y$, 则有

$$\frac{du}{dx} = 1 - \frac{u+5}{u-2},$$

用分离变量法求得其通解为 $u^2 - 4u + 14x = C$, 将 u 换成 $x - y$ 得原方程的通解为 $(x - y)^2 + 10x + 4y = C$, 其中 C 为任意常数.

(10) 令 $x = \xi + 3$, $y = \eta - 2$, 可将原方程变为

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 2 \left(\frac{\eta}{\xi + \eta} \right)^2,$$

令 $u = \frac{\eta}{\xi}$, 则有

$$\xi \frac{du}{d\xi} + u = 2 \left(\frac{u}{1+u} \right)^2,$$

用分离变量法求得其通解为 $\ln |u\xi| + 2\arctan u = C$ 及 $u = 0$, 其中 C 为任意常数. 再由

$$u = \frac{\eta}{\xi} = \frac{y+2}{x-3}, \quad \xi = x-3,$$

代入上式并化简得原方程的通解为

$$\ln |y+2| + 2\arctan \left(\frac{y+2}{x-3} \right) = C$$

及 $y = -2$.

(11) 令 $u = \frac{y}{x}$, 原方程变为

$$x \frac{du}{dx} = 2\sqrt{u}.$$

用分离变量法求得其解为 $u = (\ln |x| + C)^2$ 及 $u = 0$, 其中 C 为任意常数. 将 u 换成 $\frac{y}{x}$ 得原方程的解为

$$y = x(\ln |x| + C)^2$$

及 $y = 0 (x \neq 0)$.

(12) 令 $x = \xi - 3$, $y = \eta - 1$, 可将原方程变为

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta - \xi}{\xi + \eta},$$

令 $u = \frac{\eta}{\xi}$, 则有

$$\xi \frac{du}{d\xi} + u = \frac{u-1}{1+u},$$

用分离变量法求得其通解为 $\ln \xi^2(u^2+1)+2\arctan u=2C_1$ ，其中 C_1 为任意常数。再由

$$u = \frac{\eta}{\xi} = \frac{y+1}{x+3}, \quad \xi = x+3,$$

代入上式并化简得原方程的通解为

$$\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2} = C \exp\left(-\arctan \frac{y+1}{x+3}\right),$$

其中 $C=e^{C_1}$ 为任意正常数。

(13) 将原方程改写为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right),$$

令 $u = \frac{y}{x}$ ，则有

$$x \frac{du}{dx} + u = \frac{1}{2}(1+u^2),$$

用分离变量法求得其通解为

$$u = 1 - \frac{2}{\ln|x| + C},$$

将 u 换成 $\frac{y}{x}$ 得原方程的通解为

$$y = x - \frac{2x}{\ln|x| + C},$$

其中 C 为任意常数。

(14) 令 $u = x + y + 1$ ，则有

$$\frac{du}{dx} = 1 + \sin u,$$

当 $1 + \sin u \neq 0$ 时用分离变量法求得其通解为 $\tan u - \sec u = x + C$ ，将 u 换成 $x + y + 1$ 得原方程的通解为

$$\tan(x+y+1) - \sec(x+y+1) = x + C,$$

其中 C 为任意常数。

此外由 $1 + \sin u = 0$ 可得原方程还有解

$$y = -x - 1 + 2k\pi - \frac{\pi}{2},$$

其中 k 为任意整数.

(15) 若 $x > 0$, 将原方程改写为

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x},$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则有

$$x \frac{du}{dx} + u = \sqrt{1 - u^2} + u,$$

当 $u^2 - 1 \neq 0$ 时, 用分离变量法求得其通解为 $u = \sin(\ln x + C)$, 将 u 换成 $\frac{y}{x}$ 得 $y = x \sin(\ln x + C)$; 又由 $u^2 - 1 = 0$ 可得原方程还有解 $y^2 = x^2$. 对 $x < 0$ 可类似讨论, 最后得原方程的通解为 $y = |x| \sin(\ln |x| + C)$, 并且 $y^2 = x^2$ 也是方程的解, 其中 C 为任意常数.

4. 解下列线性微分方程.

$$(1) \frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}.$$

$$(2) \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}.$$

$$(3) x \frac{dy}{dx} + y = e^x \quad (x > 0).$$

$$(4) x^2 dy + (3xy + x - 4) dx = 0.$$

$$(5) (x+1) \frac{dy}{dx} - y = x \quad (x > -1).$$

$$(6) \frac{dy}{dx} - 2xy = x.$$

解: (1) 这里 $a(x) = \frac{2}{x+1}$, $f(x) = (x+1)^{\frac{5}{2}}$. 方程的通解为

$$\begin{aligned}
 y &= \exp\left(\int \frac{2}{x+1} dx\right) \\
 &\left\{C + \int (x+1)^{\frac{5}{2}} \exp\left(-\int \frac{2}{x+1} dx\right) dx\right\} \\
 &= C(x+1)^2 + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}},
 \end{aligned}$$

即 $y = C(x+1)^2 + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}}$, 其中 C 为任意常数.

(2) 这里 $a(x) = -\frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. 方程的通解为

$$\begin{aligned}
 y &= \exp\left(-\int \frac{1}{x} dx\right) \left\{C + \int \frac{\sin x}{x} \exp\left(\int \frac{1}{x} dx\right) dx\right\} \\
 &= \frac{1}{x}(-\cos x + C),
 \end{aligned}$$

即 $y = \frac{1}{x}(-\cos x + C)$, 其中 C 为任意常数.

(3) 将原方程改写为

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} + \frac{e^x}{x},$$

这里 $a(x) = -\frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{e^x}{x}$. 方程的通解为

$$\begin{aligned}
 y &= \exp\left(-\int \frac{1}{x} dx\right) \left\{C + \int \frac{e^x}{x} \exp\left(\int \frac{1}{x} dx\right) dx\right\} \\
 &= \frac{e^x + C}{x},
 \end{aligned}$$

即 $y = \frac{e^x + C}{x}$, 其中 C 为任意常数.

(4) 将原方程改写为

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{x}y - \frac{x-4}{x^2},$$

这里 $a(x) = -\frac{3}{x}$, $f(x) = -\frac{x-4}{x^2}$. 方程的通解为

$$y = \exp\left(-\int \frac{3}{x} dx\right) \left\{ C - \int \frac{x-4}{x^2} \exp\left(\int \frac{3}{x} dx\right) dx \right\}$$

$$= \frac{1}{x^3} \left(C - \frac{x^3}{3} + 2x^2 \right),$$

即 $x^3 y + \frac{x^3}{3} - 2x^2 = C$, 其中 C 为任意常数.

(5) 将原方程改写为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+1}y + \frac{x}{x+1},$$

这里 $a(x) = \frac{1}{x+1}$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$. 方程的通解为

$$y = \exp\left(\int \frac{1}{x+1} dx\right) \left\{ C + \int \frac{x}{x+1} \exp\left(-\int \frac{1}{x+1} dx\right) dx \right\}$$

$$= C(x+1) + 1 + (x+1)\ln(x+1),$$

即 $y = C(x+1) + 1 + (x+1)\ln(x+1)$, 其中 C 为任意常数.

(6) 这里 $a(x) = 2x$, $f(x) = x$. 方程的通解为

$$y = \exp\left(2\int x dx\right) \left\{ C + \int x \exp(-2\int x dx) dx \right\}$$

$$= -\frac{1}{2} + Ce^{x^2},$$

即 $y = -\frac{1}{2} + Ce^{x^2}$, 其中 C 为任意常数.

5. 求下列方程的通解.

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x-y^2}$.

(2) $y dx + (x-y^3) dy = 0$.

(3) $y dx - (x + \sqrt{x^2 + y^2}) dy = 0$.

解: (1) 当 $y \neq 0$ 时, 将原方程改写为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2}{y}x - y,$$

把 x 看成 y 的函数, 则这是一阶线性方程, 其通解为

$$\begin{aligned} x &= \exp\left(\int \frac{2}{y} dy\right) \left\{ C - \int y \exp\left(-\int \frac{2}{y} dy\right) dy \right\} \\ &= y^2(C - \ln|y|), \end{aligned}$$

即 $x = y^2(C - \ln|y|)$, 其中 C 为任意常数. 此外, 显然 $y=0$ 也是方程的解.

(2) 当 $y \neq 0$ 时, 将原方程改写为

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y}x + y^2,$$

把 x 看成 y 的函数, 则这是一阶线性方程, 其通解为

$$\begin{aligned} x &= \exp\left(-\int \frac{1}{y} dy\right) \left\{ C + \int y^2 \exp\left(\int \frac{1}{y} dy\right) dy \right\} \\ &= \frac{y^3}{4} + \frac{C}{y}, \end{aligned}$$

即 $x = \frac{y^3}{4} + \frac{C}{y}$, 其中 C 为任意常数. 此外, 显然 $y=0$ 也是方程的解.

(3) 若 $x > 0$, 将原方程改写为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}},$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则有

$$x \frac{du}{dx} + u = \frac{u}{1 + \sqrt{1 + u^2}},$$

当 $u \neq 0$ 时, 用分离变量法求得其通解为

$$\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+u^2}-1}{\sqrt{1+u^2}+1} + \ln|ux| = C_1,$$

其中 C_1 为任意常数. 将 u 换成 $\frac{y}{x}$ 并化简得 $y^2 = 2Cx + C^2$, 其中 $C = \pm e^{C_1}$. 又由 $u=0$ 可得原方程还有解 $y=0$. 对 $x < 0$ 可类似讨论, 最后得原方程的通解为 $y^2 = 2Cx + C^2$, 其中 C 为任意常数.



6. 求下列初值问题的解.

$$(1) (1+e^y)\frac{dy}{dx} = \cos x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3.$$

$$(2) y(1+x^2)dy = x(1+y^2)dx, y(0) = 1.$$

$$(3) (1+e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x, y(0) = 1.$$

$$(4) \frac{dy}{dx} + y \sin x = 0, y(0) = \frac{3}{2}.$$

$$(5) e^y \frac{dy}{dx} - x - x^3 = 0, y(1) = 1.$$

$$(6) \frac{dy}{dx} + 2xy = x, y(1) = 2.$$

解: (1) 这是变量分离的方程, 分离变量后得

$$(1+e^y)dy = \cos x dx,$$

两端积分得其通解为 $y + e^y = \sin x + C$, 其中 C 为任意常数. 代入初值条件得 $3 + e^3 = \sin \frac{\pi}{2} + C$, 从而 $C = 2 + e^3$. 故所给初值问题的解为 $y + e^y = \sin x + 2 + e^3$.

(2) 这是变量分离的方程, 分离变量后得

$$\frac{y}{1+y^2} dy = \frac{x}{1+x^2} dx,$$

两端积分得其通解为 $1 + y^2 = C(1 + x^2)$, 其中 C 为任意常数. 代入初值条件得 $C = 2$. 故所给初值问题的解为 $y = \sqrt{1 + 2x^2}$.

(3) 这是变量分离的方程, 分离变量后得

$$y dy = \frac{e^x}{1+e^x} dx,$$

两端积分得其通解为 $y^2 = 2\ln(1+e^x) + C$, 其中 C 为任意常数. 代入初值条件得 $1 = 2\ln 2 + C$, 从而 $C = 1 - 2\ln 2$. 故所给初值问题的解为

$$y^2 = 2\ln(1+e^x) + 1 - 2\ln 2.$$

(4) 这是一阶齐次线性微分方程, 其通解为 $y = Ce^{\cos x}$, 其中 C 为任意常数. 代入初值条件得 $\frac{3}{2} = Ce$, 从而 $C = \frac{3}{2}e^{-1}$. 故所给初值问题的解为

$$y = \frac{3}{2} e^{\cos x - 1}.$$

(5) 令 $u = e^y$, 原方程变为

$$\frac{du}{dx} = x + x^3,$$

容易求得其通解为 $u = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + C$, 从而原方程的通解为

$$e^y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + C,$$

其中 C 为任意常数. 代入初值条件得 $e = \frac{3}{4} + C$, 从而 $C = e - \frac{3}{4}$. 故所给初值问题的解为

$$e^y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + e - \frac{3}{4}.$$

(6) 这是一阶线性微分方程, 其通解为

$$y = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2},$$

其中 C 为任意常数. 代入初值条件得 $2 = \frac{1}{2} + Ce^{-1}$, 从而 $C = \frac{3}{2}e$. 故所给初值问题的解为

$$y = \frac{3}{2}e^{1-x^2} + \frac{1}{2}.$$

7. 求解下列 Bernoulli 方程.

(1) $\frac{dy}{dx} = 6\frac{y}{x} - xy^2.$

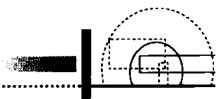
(2) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2 \ln x.$

(3) $x \frac{dy}{dx} - 4y = 2x^2 \sqrt{y} \quad (x \neq 0, y > 0).$

(4) $\frac{dy}{dx} - 2xy = 2x^3 y^2.$

解: (1) 当 $y \neq 0$ 时, 令 $z = y^{-1}$, 原方程变为

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{6}{x}z + x,$$



这是一阶线性微分方程，其通解为

$$z = \frac{1}{x^6} \left(C + \frac{1}{8} x^8 \right),$$

从而原方程的通解为

$$\frac{x^6}{y} - \frac{x^8}{8} = C,$$

其中 C 为任意常数. 此外, 显然 $y=0$ 也是方程的解.

(2) 当 $y \neq 0$ 时, 令 $z = y^{-1}$, 原方程变为

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} - \ln x,$$

这是一阶线性微分方程, 其通解为

$$z = x \left(C - \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right),$$

从而原方程的通解为

$$xy \left(C - \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right) = 1,$$

其中 C 为任意常数. 此外, 显然 $y=0$ 也是方程的解.

(3) 令 $z = \sqrt{y}$, 原方程变为

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{x} z + x,$$

这是一阶线性微分方程, 其通解为 $z = x^2 (\ln |x| + C)$, 从而原方程的通解为 $y = x^4 (\ln |x| + C)^2$, 其中 C 为任意常数.

(4) 当 $y \neq 0$ 时, 令 $z = y^{-1}$, 原方程变为

$$\frac{dz}{dx} = -2xz - 2x^3,$$

这是一阶线性微分方程, 其通解为 $z = Ce^{-x^2} - x^2 + 1$, 从而原方程的通解为

$$y = \frac{1}{Ce^{-x^2} - x^2 + 1},$$

其中 C 为任意常数. 此外, 显然 $y=0$ 也是方程的解.

8. 设有一过原点的曲线, 其上任一点的切线斜率为

$$\frac{\sqrt{1-y^2}}{1+x^2},$$

试求该曲线方程.

解: 设所求曲线方程为 $y=y(x)$, 则它满足微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{1+x^2},$$

这是变量分离的方程, 分离变量后得

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{1+x^2},$$

两端积分得其通解为 $\arcsin y = \arctan x + C$, 其中 C 为任意常数. 又曲线过原点, 因此满足初值条件 $y(0)=0$, 由此得 $C=0$, 从而该曲线满足方程 $\arcsin y = \arctan x$, 即 $y = \sin(\arctan x)$.

9. 一曲线过点(4, 6), 它在两坐标轴间的任一切线线段均被切点所平分, 试求该曲线方程.

解: 设所求曲线方程为 $y=y(x)$, 则过曲线上任一点 (x, y) 的切线方程为

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

其中 (X, Y) 为切线上任一点. 因此切线与 x 轴和 y 轴的交点分别为

$$\left(x - y \frac{dx}{dy}, 0\right), \left(0, y - x \frac{dy}{dx}\right).$$

由假设

$$\left(y \frac{dx}{dy}\right)^2 + y^2 = x^2 + \left(x \frac{dy}{dx}\right)^2,$$

即

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

若 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, 则可由分离变量法求得 $y=Cx$, 其中 C 为任意常数, 它显然不满足要求.

若 $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, 则可由分离变量法求得 $xy=C$, 其中 C 为任意常数. 又曲线过点(4, 6),

因此满足初值条件 $y(4)=6$ ，由此得 $C=24$ 。故该曲线的方程为 $xy=24$ 。

10. 验证形如

$$yg(xy)dx + xh(xy)dy = 0$$

的微分方程，可经变量代换 $z=xy$ 化为可分离变量的方程。

解：由 $z=xy$ 得 $dz=ydx+xdy$ ，从而 $xdy=dz-ydx$ ，代入原方程得

$$yg(z)dx + h(z)(dz - ydx) = 0,$$

又由 $y = \frac{z}{x}$ ，故原方程化为

$$\frac{z(g(z) - h(z))}{x} dx + h(z) dz = 0,$$

它是变量分离的方程。

11. 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

的两个互异解。求证对于该方程的任一解 $y(x)$ ，成立恒等式

$$\frac{y(x) - y_1(x)}{y_2(x) - y_1(x)} = C,$$

其中 C 是某常数。

证明：令 $\psi(x) = y(x) - y_1(x)$, $\phi(x) = y_2(x) - y_1(x)$ ，容易验证

$$\frac{d\psi}{dx} + p(x)\psi(x) = 0, \quad \frac{d\phi}{dx} + p(x)\phi(x) = 0.$$

因此存在常数 k_1, k_2 ，其中 $k_2 \neq 0$ ，使得

$$\psi(x) = k_1 \exp\left(-\int_{x_0}^x p(t) dt\right),$$

$$\phi(x) = k_2 \exp\left(-\int_{x_0}^x p(t) dt\right),$$

其中 $x_0 \in \mathbb{R}$ 。从而

$$\frac{y(x) - y_1(x)}{y_2(x) - y_1(x)} = \frac{\psi(x)}{\phi(x)} = \frac{k_1}{k_2} = C,$$

这里 $C = \frac{k_1}{k_2}$ 为一常数。□

习 题 2.2

1. 验证下列方程是恰当方程, 并求出方程的解:

$$(1) (3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

$$(2) (\cos x + \frac{1}{y})dx + (\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2})dy = 0.$$

$$(3) (5x^4 + 3xy^2 - y^3)dx + (3x^2y - 3xy^2 + y^2)dy = 0.$$

$$(4) (x^2 + y)dx + (x + y)dy = 0.$$

$$(5) \frac{dy}{dx} = -\frac{6x + y + 2}{x + 8y - 3}.$$

$$(6) xydx + (\frac{x^2}{2} + \frac{1}{y})dy = 0.$$

$$(7) 3x^2 - 2y^2 + (1 - 4xy)\frac{dy}{dx} = 0.$$

$$(8) (x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0.$$

$$(9) 3y + e^x + (3x + \cos y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

解: (1) 这里 $M(x, y) = 3x^2 + 6xy^2$, $N(x, y) = 6x^2y + 4y^3$,
由于

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy = \frac{\partial N}{\partial x},$$

所以这是一个恰当方程. 取 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, 可计算出

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_0^x (3x^2 + 6xy^2)dx + \int_0^y 4y^3dy \\ &= x^3 + 3x^2y^2 + y^4. \end{aligned}$$

故通解为 $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$, 其中 C 为任意常数.

(2) 这里 $M(x, y) = \cos x + \frac{1}{y}$, $N(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}$, 由于

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

所以这是一个恰当方程. 取 $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, 可计算出

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \int_0^x \left(\cos x + \frac{1}{y} \right) dx + \int_1^y \frac{1}{y} dy \\
 &= \sin x + \frac{x}{y} + \ln |y|.
 \end{aligned}$$

故方程的通解为 $\sin x + \frac{x}{y} + \ln |y| = C$, 其中 C 为任意常数.

(3) 这里 $M(x, y) = 5x^4 + 3xy^2 - y^3$, $N(x, y) = 3x^2y - 3xy^2 + y^2$, 由于

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy - 3y^2 = \frac{\partial N}{\partial x},$$

所以这是一个恰当方程. 取 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, 可计算出

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \int_0^x (5x^4 + 3xy^2 - y^3) dx + \int_0^y y^2 dy \\
 &= x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - xy^3 + \frac{y^3}{3}.
 \end{aligned}$$

故方程的通解为 $x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - xy^3 + \frac{y^3}{3} = C$, 其中 C 为任意常数.

(4) 这里 $M(x, y) = x^2 + y$, $N(x, y) = x + y$, 由于

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x},$$

所以这是一个恰当方程. 取 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, 可计算出

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \int_0^x (x^2 + y) dx + \int_0^y y dy \\
 &= \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + xy.
 \end{aligned}$$

故通解为 $\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + xy = C$, 其中 C 为任意常数.

(5) 将原方程改写为 $(6x + y + 2)dx + (x + 8y - 3)dy = 0$, 这里 $M(x, y) = 6x + y + 2$, $N(x, y) = x + 8y - 3$, 由于

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x},$$

所以这是一个恰当方程. 取 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, 可计算出

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_0^x (6x+y+2)dx + \int_0^y (8y-3)dy \\ &= 3x^2 + xy + 2x + 4y^2 - 3y. \end{aligned}$$

故方程的通解为 $3x^2 + xy + 2x + 4y^2 - 3y = C$, 其中 C 为任意常数.

(6) 这里 $M(x, y) = xy$, $N(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{y}$, 由于

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x = \frac{\partial N}{\partial x},$$

所以这是一个恰当方程. 取 $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, 可计算出

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_0^x xy dx + \int_1^y \frac{1}{y} dy \\ &= \frac{1}{2}(x^2 y + \ln y^2). \end{aligned}$$

故该方程的通解为 $x^2 y + \ln y^2 = C$, 其中 C 为任意常数.

(7) 将原方程改写为 $(3x^2 - 2y^2)dx + (1 - 4xy)dy = 0$, 这里 $M(x, y) = 3x^2 - 2y^2$, $N(x, y) = 1 - 4xy$, 由于

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -4y = \frac{\partial N}{\partial x},$$

所以这是一个恰当方程. 取 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, 可计算出

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_0^x (3x^2 - 2y^2)dx + \int_0^y dy \\ &= x^3 - 2xy^2 + y. \end{aligned}$$

故方程的通解为 $x^3 - 2xy^2 + y = C$, 其中 C 为任意常数.

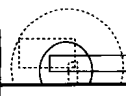
(8) 这里 $M(x, y) = x^3 + xy^2$, $N(x, y) = x^2 y + y^3$, 由于

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial N}{\partial x},$$

所以这是一个恰当方程. 取 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, 可计算出

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_0^x (x^3 + xy^2)dx + \int_0^y y^3 dy \\ &= \frac{1}{4}(x^4 + 2x^2 y^2 + y^4). \end{aligned}$$

故方程的通解为 $x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 = C$, 其中 C 为任意常数.



(9) 将原方程改写为 $(3y + e^x)dx + (3x + \cos y)dy = 0$, 这里 $M(x, y) = 3y + e^x$, $N(x, y) = 3x + \cos y$, 由于

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3 = \frac{\partial N}{\partial x},$$

所以这是一个恰当方程. 取 $x_0 = 0, y_0 = 0$, 可计算出

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_0^x (3y + e^x)dx + \int_0^y \cos y dy \\ &= e^x + 3xy + \sin y - 1. \end{aligned}$$

故方程的通解为 $e^x + 3xy + \sin y = C$, 其中 C 为任意常数.

2. 求下列初值问题的解:

$$(1) 3x^2y + 8xy^2 + (x^3 + 8x^2y + 12y^2) \frac{dy}{dx} = 0, y(2) = 1.$$

$$(2) 4x^3e^{x+y} + x^4e^{x+y} + 2x + (x^4e^{x+y} + 2y) \frac{dy}{dx} = 0, y(0) = 1.$$

解: (1) 将原方程改写为

$$(3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12y^2)dy = 0,$$

这里 $M(x, y) = 3x^2y + 8xy^2$, $N(x, y) = x^3 + 8x^2y + 12y^2$, 由于

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 16xy = \frac{\partial N}{\partial x},$$

所以这是一个恰当方程. 取 $x_0 = 0, y_0 = 0$, 可计算出

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_0^x (3x^2y + 8xy^2)dx + \int_0^y 12y^2 dy \\ &= x^3y + 4x^2y^2 + 4y^3. \end{aligned}$$

故该方程的通解为 $x^3y + 4x^2y^2 + 4y^3 = C$, 其中 C 为任意常数. 代入初值条件得 $C = 2^3 + 4(2)^2 + 4 = 28$. 故所给初值问题的解为 $x^3y + 4x^2y^2 + 4y^3 = 28$.

(2) 将原方程改写为

$$(4x^3e^{x+y} + x^4e^{x+y} + 2x)dx + (x^4e^{x+y} + 2y)dy = 0,$$

这里 $M(x, y) = 4x^3e^{x+y} + x^4e^{x+y} + 2x$, $N(x, y) = x^4e^{x+y} + 2y$, 由于

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4x^3e^{x+y} + x^4e^{x+y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

所以这是一个恰当方程. 取 $x_0 = 0, y_0 = 0$, 可计算出

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \int_0^x (4x^3 e^{x+y} + x^4 e^{x+y} + 2x) dx + \int_0^y 2y dy \\
 &= x^4 e^{x+y} + x^2 + y^2.
 \end{aligned}$$

故该方程的通解为 $x^4 e^{x+y} + x^2 + y^2 = C$, 其中 C 为任意常数. 代入初值条件得 $C=1$. 故所给初值问题的解为 $x^4 e^{x+y} + x^2 + y^2 = 1$.

3. 试证齐次方程

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

当 $xM + yN \neq 0$ 时存在积分因子

$$\mu = \frac{1}{xM + yN}.$$

证明: 由假设知存在函数 $\phi(t)$ 使得

$$\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = \phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

从而

$$\mu M = \frac{\phi\left(\frac{y}{x}\right)}{x\phi\left(\frac{y}{x}\right) + y}, \quad \mu N = \frac{1}{x\phi\left(\frac{y}{x}\right) + y}.$$

容易计算出

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} = \frac{\frac{y}{x}\phi'\left(\frac{y}{x}\right) - \phi\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(x\phi\left(\frac{y}{x}\right) + y\right)^2}.$$

因此所给函数 $\mu(x, y)$ 为该齐次方程的积分因子. \square

4. 试用积分因子法解下列方程:

(1) $ydx + (y-x)dy = 0$.

(2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}$ ($y > 0$).

(3) $(x^2 + y^2 + y)dx - xdy = 0$.

(4) $\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$.

(5) $2xy \ln y dx + (x^2 + y^2 \sqrt{1 + y^2}) dy = 0$.

解: (1) 这里 $M(x, y) = y$, $N(x, y) = y - x$, 由于

$$E = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2,$$

所以它不是恰当方程. 由于 $-\frac{E}{M} = -\frac{2}{y}$ 与 x 无关, 因此该方程有只依赖于 y 的积分因子 $\mu(y) = y^{-2}$. 从而方程

$$\frac{1}{y} dx + \frac{y-x}{y^2} dy = 0$$

为恰当方程, 取 $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, 可计算出

$$U(x, y) = \int_0^x \frac{1}{y} dx + \int_1^y \frac{1}{y} dy = \ln |y| + \frac{x}{y}.$$

故该方程的通解为 $\ln |y| + \frac{x}{y} = C$, 其中 C 为任意常数. 此外, 显然 $y = 0$ 也是方程的解.

(2) 将原方程改写为

$$(x - \sqrt{x^2 + y^2}) dx + y dy = 0,$$

这里 $M(x, y) = x - \sqrt{x^2 + y^2}$, $N(x, y) = y$, 由于

$$E = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

所以它不是恰当方程. 通过观察易知

$$\begin{aligned} & (x - \sqrt{x^2 + y^2}) dx + y dy \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - dx \right) \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} (d(\sqrt{x^2 + y^2}) - dx) \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} d(\sqrt{x^2 + y^2} - x). \end{aligned}$$

因此该方程有积分因子 $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, 且其通解为

$$\sqrt{x^2 + y^2} - x = C,$$

即 $y^2 = C(C + 2x)$, 其中 C 为任意常数.

注: 原方程为齐次方程, 因此读者也可由上一题的结论直接求出其积分因子.

(3) 这里 $M(x, y) = x^2 + y^2 + y$, $N(x, y) = -x$, 由于

$$E = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2(y+1),$$

所以它不是恰当方程. 通过观察易知

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2 + y)dx - xdy \\ &= (x^2 + y^2) \left(dx + \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} \right) \\ &= (x^2 + y^2) \left(dx + d\left(\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right) \right) \\ &= (x^2 + y^2) d\left(x + \arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right). \end{aligned}$$

因此该方程有积分因子 $\frac{1}{x^2 + y^2}$, 且其通解为

$$x + \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = C,$$

其中 C 为任意常数.

(4) 这里 $M(x, y) = 2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}$, $N(x, y) = x^2 + y^2$, 由于

$$E = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = x^2 + y^2,$$

所以它不是恰当方程. 由于 $\frac{E}{N} = 1$ 与 y 无关, 因此该方程有只依赖于 x 的积分因子 $\mu(x) = e^x$. 从而方程

$$e^x \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \right) dx + e^x (x^2 + y^2) dy = 0$$

为恰当方程, 取 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, 可计算出

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_0^y e^x (x^2 + y^2) dy + \int_0^x 0 dx \\ &= e^x \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right). \end{aligned}$$

故该方程的通解为 $e^x \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) = C$, 其中 C 为任意常数.

(5) 这里 $M(x, y) = 2xy \ln y$, $N(x, y) = x^2 + y^2 \sqrt{1+y^2}$, 由于

$$E = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \ln y,$$

所以它不是恰当方程. 由于 $-\frac{E}{M} = -\frac{1}{y}$ 与 x 无关, 因此该方程有只依赖于 y 的积分因子

$\mu(y) = \frac{1}{y}$. 从而方程

$$2x \ln y dx + \left(\frac{x^2}{y} + y \sqrt{1+y^2} \right) dy = 0$$

为恰当方程, 取 $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, 可计算出

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_0^x 2x \ln y dx + \int_1^y y \sqrt{1+y^2} dy \\ &= x^2 \ln y + \frac{1}{3} (1+y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

故该方程的通解为 $x^2 \ln y + \frac{1}{3} (1+y^2)^{\frac{3}{2}} = C$, 其中 C 为任意常数.

5. 试求 Bernoulli 方程的积分因子.

解: 把 Bernoulli 方程写成对称形式

$$(a(x)y + f(x)y^\alpha) dx - dy = 0,$$

引入新的未知函数 $z = y^{1-\alpha}$, 得

$$[(1-\alpha)a(x)z + (1-\alpha)f(x)] dx - dz = 0.$$

这是一个关于 z 的一阶线性方程, 它有积分因子

$$\mu_0(x) = \exp\left(- (1-\alpha) \int a(x) dx\right).$$

即方程

$$\mu_0(x) [(1-\alpha)a(x)z + (1-\alpha)f(x)] dx - \mu_0(x) dz = 0$$

为恰当方程, 由于 $dz = (1-\alpha)y^{-\alpha} dy$, 这等价于方程

$$\mu_0(x) y^{-\alpha} [a(x)y + f(x)y^\alpha] dx - \mu_0(x) y^{-\alpha} dy = 0$$

为恰当方程, 这样我们求出了 Bernoulli 方程的一个积分因子

$$\mu = y^{-\alpha} \exp\left((1-\alpha) \int a(x) dx\right).$$

6. 试求变量可分离方程

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$$

的积分因子.

解: 用 $\frac{1}{P(x)N(y)}$ 乘所给方程两端得

$$\frac{M(x)}{P(x)}dx + \frac{Q(y)}{N(y)}dy = 0.$$

令 $M_0(x, y) = \frac{M(x)}{P(x)}$, $N_0(x, y) = \frac{Q(y)}{N(y)}$, 易见

$$\frac{\partial M_0}{\partial y} = \frac{\partial N_0}{\partial x} = 0.$$

故所得方程为恰当方程. 因此所给方程有积分因子

$$\mu(x, y) = \frac{1}{P(x)N(y)}.$$

7. 试求能使微分方程

$$y^2 \sin x dx + yf(x)dy = 0$$

成为恰当方程的所有的函数 $f(x)$, 并根据所得的 $f(x)$ 求该方程的解.

解: 令 $M(x, y) = y^2 \sin x$, $N(x, y) = yf(x)$, 由所给方程为恰当方程知

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

即 $2y \sin x = yf'(x)$, 因此 $f'(x) = 2 \sin x$. 故使所给方程为恰当方程的函数 $f(x)$ 为

$$f(x) = -2 \cos x + K,$$

其中 K 为任意常数. 原方程变为

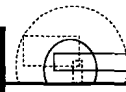
$$y^2 \sin x dx + y(-2 \cos x + K)dy = 0.$$

取 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, 由定理 2.1,

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_0^x y^2 \sin x dx + \int_0^y y(-2 + K)dy \\ &= \left(\frac{K}{2} - \cos x\right)y^2. \end{aligned}$$

故该方程的通解为

$$\left(\frac{K}{2} - \cos x\right)y^2 = C,$$



其中 C 为任意常数.

8. 已知微分方程

$$(x^2 + y)dx + f(x)dy = 0$$

有积分因子 $\mu = x$, 试求所有可能的函数 $f(x)$.

解: 令 $M(x, y) = x^2 + y$, $N(x, y) = f(x)$, 由所给方程有积分因子 $\mu = x$ 知

$$\frac{\partial(xM)}{\partial y} = \frac{\partial(xN)}{\partial x},$$

即 $x = xf'(x) + f(x)$, 因此函数 $f(x)$ 满足一阶线性方程

$$f'(x) = -\frac{f(x)}{x} + 1,$$

求出其通解即得满足条件的函数 $f(x)$ 为

$$f(x) = \frac{C}{x} + \frac{x}{2},$$

其中 C 为任意常数.

9. 假设微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \tan y - e^x \sec y$$

有形如 $e^{-ax} \cos y$ 的积分因子, 试确定其中的常数 a , 并求解该方程.

解: 把所给方程写成对称形式

$$(\tan y - e^x \sec y)dx - dy = 0,$$

由假设知方程

$$e^{-ax} \cos y (\tan y - e^x \sec y)dx - e^{-ax} \cos y dy = 0$$

为恰当方程, 即

$$(e^{-ax} \sin y - e^{(1-a)x})dx - e^{-ax} \cos y dy = 0$$

为恰当方程, 因此 $e^{-ax} \cos y = ae^{-ax} \cos y$, 由此求出 $a = 1$.

考虑方程 $(e^{-x} \sin y - 1)dx - e^{-x} \cos y dy = 0$, 由观察得

$$\begin{aligned} & (e^{-x} \sin y - 1)dx - e^{-x} \cos y dy \\ &= e^{-x} \sin y dx - e^{-x} \cos y dy - dx \\ &= d(-e^{-x} \sin y) - dx \\ &= d(-e^{-x} \sin y - x). \end{aligned}$$

故原方程的隐式通解为 $e^{-x} \sin y + x = C$, 其中 C 为任意常数.

习 题 2.3

1. 求解下列方程.

$$(1) x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2y \frac{dy}{dx} + 9x = 0.$$

$$(2) y = x^2 + 2x \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2.$$

$$(3) \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 \cos^2 y + 2 \tan y - 2x \frac{dy}{dx} = 0.$$

解: (1) 令 $p = \frac{dy}{dx}$, 则原方程变为

$$y = \frac{9x}{2p} + \frac{x}{2} p.$$

对上述方程两边关于 x 求导, 得

$$\left(p - x \frac{dp}{dx} \right) \left(1 - \frac{9}{p^2} \right) = 0.$$

若 $p^2 \neq 9$, 则 $\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x}$, 从而 $p = Cx$, 其中 C 为任意常数, 因而原方程的通解为

$$y = \frac{9}{2C} + \frac{C}{2} x^2.$$

若 $p^2 = 9$, 容易求出原方程的特解 $y = 3x$ 和 $y = -3x$.

(2) 令 $p = \frac{dy}{dx}$, 则原方程变为

$$y = x^2 + 2xp + \frac{p^2}{2}.$$

对上述方程两边关于 x 求导并化简, 得

$$(2x + p) \left(\frac{dp}{dx} + 1 \right) = 0.$$

若 $2x + p \neq 0$, 则 $\frac{dp}{dx} = -1$, 从而 $p = -x + C$, 其中 C 为任意常数, 因而原方程的通解

为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + Cx + \frac{1}{2}C^2$. 若 $2x + p = 0$, 容易求出原方程的特解 $y = -x^2$.

(3) 令 $p = \frac{dy}{dx}$, 若 $p \neq 0$, 则

$$x = \frac{\tan y}{p} + \frac{1}{2}p^2 \cos^2 y.$$

对上述方程两边关于 x 求导并化简, 得

$$p \tan y (p^3 \cos^2 y - \tan y) = (p^3 \cos^2 y - \tan y) \frac{dp}{dy}.$$

由此得

$$\frac{dp}{dy} = p \tan y \quad \text{或} \quad p^3 \cos^2 y - \tan y = 0.$$

由 $\frac{dp}{dy} = p \tan y$ 得 $p \cos y = C$, 其中 C 为任意非零常数. 故原方程的通解为

$$x = \frac{\sin y}{C} + \frac{1}{2}C^2.$$

由 $p^3 \cos^2 y - \tan y = 0$ 可求出原方程的特解 $x = \frac{3}{2} \sin^{\frac{2}{3}} y$.

若 $p = 0$, 则 $\tan y = 0$. 因此原方程还有特解 $y = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 为任意整数.

2. 求解下列方程.

$$(1) y = \frac{dy}{dx} + \ln\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

$$(2) x = \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + \exp\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

$$(3) \frac{y - xy'}{\sqrt{1+y'^2}} = f(\sqrt{x^2+y^2}).$$

解: (1) 令 $\frac{dy}{dx} = p$, 则 $y = p + \ln p$. 显然 $p > 0$, 故

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{p}\right) dp.$$

积分后可得方程的参数形式的通解为

$$\begin{cases} x = \ln p - \frac{1}{p} + C, \\ y = p + \ln p. \end{cases}$$

其中 C 为任意常数.

(2) 令 $\frac{dy}{dx} = p$, 则 $x = \sin p + e^p$. 故 $dy = p dx = p(\cos p + e^p) dp$. 积分后可得方程的参数形式的通解为

$$\begin{cases} x = \sin p + e^p, \\ y = p \sin p + \cos p + e^p(p-1) + C. \end{cases}$$

其中 C 为任意常数.

(3) 引入极坐标, 令 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r' \tan \theta + r}{r' - r \tan \theta}, \quad r' = \frac{dr}{d\theta}.$$

从而有

$$y - xy' = -\frac{r^2 \sec \theta}{r' - r \tan \theta}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \frac{\sqrt{r^2+r'^2}}{r' - r \tan \theta} \sec \theta.$$

代入原方程得

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{f(r)} \sqrt{r^2 - f^2(r)}.$$

求解后得

$$\theta(r, C) = \int \frac{f(r) dr}{r \sqrt{r^2 - f^2(r)}} + C,$$

其中 C 为任意常数. 从而原方程参数形式的通解为

$$x = r \cos \theta(r, C), \quad y = r \sin \theta(r, C).$$

习 题 2.4

1. 求下列方程的通解.

$$(1) \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 2 \frac{dy}{dx} - x = 0.$$

$$(2) y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x \frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}.$$

$$(3) y^2 \left(1 - \frac{dy}{dx}\right) = \left(2 - \frac{dy}{dx}\right)^2.$$

$$(4) \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4xy \frac{dy}{dx} + 8y^2 = 0.$$

$$(5) y^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 3y \frac{dy}{dx} = 0.$$

$$(6) \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 - 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0.$$

解: (1) 令 $p = \frac{dy}{dx}$, 则原方程变为 $x = p^3 + 2p$. 对上述方程两边关于 x 求导, 得

$$1 = (3p^2 + 2)p \frac{dp}{dy},$$

容易求出该方程的通解为 $y = \frac{3}{4}p^4 + p^2 + C$, 其中 C 为任意常数. 从而原方程的参数形式的解为

$$\begin{cases} x = p^3 + 2p, \\ y = \frac{3}{4}p^4 + p^2 + C. \end{cases}$$

(2) 令 $p = \frac{dy}{dx}$, 则原方程变为

$$y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}.$$

对上述方程两边关于 x 求导并化简, 得

$$(2p - x) \frac{dp}{dx} = (2p - x),$$

若 $2p - x \neq 0$, 则 $\frac{dp}{dx} = 1$, 从而 $p = x + C$, 其中 C 为任意常数, 因而原方程的通解为

$y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2$. 若 $2p - x = 0$, 容易求出原方程的另一解 $y = \frac{x^2}{4}$.

(3) 令 $\frac{dy}{dx} = p$, $2 - p = yt$, 由方程可得

$$p = 1 - t^2, \quad y = t + \frac{1}{t}.$$

当 $p \neq 0$ 时, 得

$$dx = \frac{dy}{p} = -\frac{1}{t^2} dt.$$

积分后可得方程的参数形式的通解为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t} + C, \\ y = t + \frac{1}{t}, \end{cases}$$

其中 C 为任意常数. 消去参数后得

$$y = x + \frac{1}{x-C} - C.$$

此外, 当 $p=0$ 时, 易知 $y = \pm 2$ 也是方程的解.

(4) 易知 $y=0$ 是方程的解. 若 $y \neq 0$, 令 $p = \frac{dy}{dx}$, 则

$$x = \frac{p^2}{4y} + \frac{2y}{p}.$$

对上述方程两边关于 x 求导并化简, 得

$$\frac{p^3 - 4y^2}{2yp^2} \frac{dp}{dy} = \frac{p^3 - 4y^2}{4y^2 p},$$

由此得

$$\frac{dp}{dy} = \frac{p}{2y} \quad \text{或} \quad p^3 - 4y^2 = 0.$$

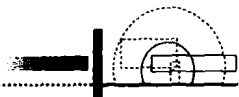
由 $\frac{dp}{dy} = \frac{p}{2y}$ 得 $y = C_1 p^2$, 其中 C_1 为任意非零常数. 故

$$x = 2C_1 p + \frac{1}{4C_1},$$

即 $y = C(x-C)^2$, 其中 $C = \frac{1}{4C_1}$ 为任意非零常数, 又 $y=0$ 也是方程的解, 故原方程的通解为 $y = C(x-C)^2$, 其中 C 为任意常数.

由 $p^3 - 4y^2 = 0$ 得 $p = (4y^2)^{\frac{1}{3}}$, 由此得方程的另一个解 $y = \frac{4}{27}x^3$.

(5) 令 $\frac{dy}{dx} = p = ty$, 则由方程得



$$y = \frac{3t}{1+t^3}, \quad p = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

当 $p \neq 0$ 时, 得

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{1-2t^3}{t^2(1+t^3)} dt.$$

积分后可得方程的参数形式的通解为

$$\begin{cases} x = \ln\left(\frac{|t+1|}{\sqrt{t^2-t+1}}\right) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{t} + C, \\ y = \frac{3t}{1+t^3}. \end{cases}$$

其中 C 为任意常数. 此外, 当 $p=0$ 时, 易知 $y=0$ 也是方程的解.

(6) 由于原方程的左边是一个关于 $\frac{dy}{dx}$ 的 5 次多项式, 因此该方程至少有一个实根, 故有隐式通解

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^5 - 5\left(\frac{y-C}{x}\right)^2 + 1 = 0,$$

其中 C 为任意常数.

2. 解下列方程, 并求奇解(如果存在的话).

(1) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 - 1 = 0.$

(2) $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} + 1 = 0.$

(3) $y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$

(4) $x - y = \frac{4}{9}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{8}{27}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$

(5) $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{y-x} + 1.$

(6) $\frac{dy}{dx} = -x + \sqrt{x^2 + 2y}.$

解: (1) 令 $\frac{dy}{dx} = p$, 由方程可得 $p = \cos t$, $y = \sin t$. 当 $p \neq 0$ 时, 得

$$dx = \frac{dy}{p} = dt.$$

则 $x = t - C$. 因此, 原方程的参数形式的解为

$$\begin{cases} x = t - C, \\ y = \sin t, \end{cases}$$

其中 C 为任意常数. 消去参数后得 $y = \sin(x + C)$. 此外, 当 $p = 0$ 时, 易知 $y = \pm 1$ 也是方程的解.

积分曲线族 $y = \sin(x + C)$ 的 C -判别曲线满足方程:

$$\begin{cases} y - \sin(x + C) = 0, \\ -\cos(x + C) = 0. \end{cases}$$

从中消去 C 得 $y = \pm 1$, 易证它是原方程的奇解.

(2) 令 $p = \frac{dy}{dx}$, 由方程知 $p \neq 0$. 因此可解出

$$y = xp + \frac{1}{p}.$$

对上述方程两边关于 x 求导并化简, 得

$$\left(x - \frac{1}{p^2}\right) \frac{dp}{dx} = 0,$$

若 $x - p^{-2} \neq 0$, 则 $\frac{dp}{dx} = 0$, 从而 $p = C$, 其中 C 为任意常数, 因而原方程的通解为 $y =$

$Cx + \frac{1}{C}$. 若 $x - p^{-2} = 0$, 容易求出原方程的另一解 $y^2 = 4x$.

积分曲线族 $y = Cx + \frac{1}{C}$ 的 C -判别曲线满足方程:

$$\begin{cases} y - Cx - \frac{1}{C} = 0, \\ -x + \frac{1}{C^2} = 0. \end{cases}$$

从中消去 C 得 $y^2 = 4x$, 易证它是原方程的奇解.

(3) 令 $\frac{dy}{dx} = p$, 由方程可得 $y = p^2$. 对其两边关于 x 求导, 得

$$p = 2p \frac{dp}{dx},$$

若 $p \neq 0$, 则 $\frac{dp}{dx} = \frac{1}{2}$, 从而 $p = \frac{1}{2}(x+C)$, 其中 C 为任意常数, 因而原方程的通解为 $y = \frac{1}{4}(x+C)^2$. 若 $p = 0$, 容易求出原方程的另一解 $y = 0$.

积分曲线族 $y = \frac{1}{4}(x+C)^2$ 的 C -判别曲线满足方程:

$$\begin{cases} y - \frac{1}{4}(x+C)^2 = 0, \\ -\frac{1}{2}(x+C) = 0. \end{cases}$$

从中消去 C 得 $y = 0$, 易证它是原方程的奇解.

(4) 令 $\frac{dy}{dx} = p$, 由方程可得

$$y = x - \frac{4}{9}p^2 + \frac{8}{27}p^3.$$

对上述方程两边关于 x 求导并化简, 得

$$p - 1 = \frac{8}{9}p(p-1)\frac{dp}{dx},$$

若 $p \neq 1$, 则 $\frac{8}{9}p \frac{dp}{dx} = 1$, 从而 $\frac{4}{9}p^2 = x + C$, 其中 C 为任意常数, 因而原方程的的参数形式的通解为

$$\begin{cases} x = \frac{4}{9}p^2 - C, \\ y = -C + \frac{8}{27}p^3. \end{cases}$$

消去参数 p 后得 $(y+C)^2 = (x+C)^3$. 若 $p = 1$, 容易求出原方程的另一解 $y = x - \frac{4}{27}$.

积分曲线族 $(y+C)^2 = (x+C)^3$ 的 C -判别曲线满足方程:

$$\begin{cases} (y+C)^2 - (x+C)^3 = 0, \\ 2(y+C) - 3(x+C)^2 = 0. \end{cases}$$

从中消去 C 得 $y=x$ 或 $y=x-\frac{4}{27}$, 易证 $y=x-\frac{4}{27}$ 是原方程的奇解.

(5) 令 $z=y-x$, 则由方程得

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1 = -\sqrt{z}.$$

当 $z \neq 0$ 时, 用分离变量的方法得 $z = \frac{1}{4}(x-C)^2$. 即原方程的通解为

$$y = x + \frac{1}{4}(x-C)^2,$$

其中 C 为任意常数. 若 $z=0$, 容易求出原方程的另一解 $y=x$.

积分曲线族 $y = x + \frac{1}{4}(x-C)^2$ 的 C -判别曲线满足方程:

$$\begin{cases} y - x - \frac{1}{4}(x-C)^2 = 0, \\ -\frac{1}{2}(x-C) = 0. \end{cases}$$

从中消去 C 得 $y=x$, 易证它是原方程的奇解.

(6) 令 $z=x^2+2y$, 则由方程得

$$\frac{dz}{dx} = 2x + 2 \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{z}.$$

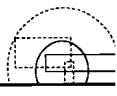
当 $z \neq 0$ 时, 用分离变量的方法得 $z = (x+C)^2$, 由此得原方程的通解为 $y = Cx + \frac{C^2}{2}$,

其中 C 为任意常数. 若 $z=0$, 容易求出原方程的另一解 $y = -\frac{x^2}{2}$.

积分曲线族 $y = Cx + \frac{C^2}{2}$ 的 C -判别曲线满足方程:

$$\begin{cases} y - Cx - \frac{C^2}{2} = 0, \\ -x - C = 0. \end{cases}$$

从中消去 C 得 $y = -\frac{x^2}{2}$, 易证它是原方程的奇解.



3. 求下列高阶方程的解.

$$(1) \frac{d^5 y}{dx^5} - \frac{1}{x} \frac{d^4 y}{dx^4} = 0.$$

$$(2) y \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

$$(3) (1+x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} = 2x \frac{dy}{dx}.$$

$$(4) y \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

$$(5) \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 = \frac{dy}{dx}.$$

$$(6) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{1-y} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

$$(7) 4 \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

$$(8) (1+x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0.$$

$$(9) \frac{dy}{dx} \frac{d^3 y}{dx^3} - \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 = 0.$$

解: (1) 令 $p = \frac{d^4 y}{dx^4}$, 则原方程变为

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x}.$$

使用分离变量的方法, 可得 $p = A_1 x$, 其中 A_1 为任意常数. 故

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = A_1 x.$$

解得 $y = C_1 x^5 + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5$, 其中 $C_1 = \frac{A_1}{5!}$, C_2, C_3, C_4, C_5 为任意常数.

(2) 令 $p = \frac{dy}{dx}$, 则原方程可化为

$$py \frac{dp}{dy} = -p^2.$$

易见 $p=0$ 是上述方程的解. 因此 $y=C$ 是原方程的解, 其中 C 为任意常数. 当 $p \neq 0$

时, 使用分离变量的方法, 可得 $p = \frac{A_1}{y}$, 其中 A_1 为任意常数. 求解方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A_1}{y}.$$

得原方程的通解为 $y^2 = C_1 x + C_2$. 其中 $C_1 = 2A_1$, C_2 为任意常数. 当 $C_1 = 0$ 时, 即为上面讨论过的 $p=0$ 的情况.

(3) 令 $p = \frac{dy}{dx}$, 则原方程变为

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2xp}{1+x^2}.$$

使用分离变量的方法, 可得 $p = A_1(1+x^2)$, 其中 A_1 为任意常数. 故

$$\frac{dy}{dx} = A_1(1+x^2).$$

解得 $y = C_1(x^3 + 3x) + C_2$, 其中 $C_1 = \frac{A_1}{3}$, C_2 为任意常数.

(4) 令 $p = \frac{dy}{dx}$, 则原方程可化为

$$py \frac{dp}{dy} = p^2.$$

易见 $p=0$ 是上述方程的解. 因此 $y=C$ 是原方程的解, 其中 C 为任意常数. 当 $p \neq 0$ 时, 使用分离变量的方法, 可得 $p = C_1 y$, 其中 C_1 为任意常数. 求解方程

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y.$$

得原方程的通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}$, 其中 C_2 为任意常数. 当 $C_2 = 0$ 时, 即为上面讨论过的 $p=0$ 的情况.

(5) 令 $p = \frac{dy}{dx}$, 则原方程变为

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = p.$$

易得 $p = \frac{1}{4}(x+C_1)^2$, 其中 C_1 为任意常数. 故

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}(x+C_1)^2.$$

解得 $y = \frac{1}{12}(x+C_1)^3 + C_2$, 其中 C_2 为任意常数.

(6) 令 $p = \frac{dy}{dx}$, 则原方程可化为

$$p \frac{dp}{dy} = \frac{p^2}{y-1}.$$

易见 $p=0$ 是上述方程的解. 因此 $y=C$ 是原方程的解, 其中 $C \neq 1$. 当 $p \neq 0$ 时, 使用分离变量的方法, 可得 $p = C_1(y-1)$, 其中 C_1 为任意常数. 求解方程

$$\frac{dy}{dx} = C_1(y-1).$$

得原方程的通解为 $y = C_2 e^{C_1 x} + 1$, 其中 C_2 为任意常数. 当 $C_1 = 0$ 且 $C_2 \neq 0$ 时, 即为上面讨论过的 $p=0$ 的情况.

(7) 令 $p = \frac{d^2 y}{dx^2}$, 则原方程变为

$$4 \frac{d^2 p}{dx^2} = p,$$

以 $p' dx$ 乘上式两端得 $2d(p'^2) = p dp$, 故 $4(p')^2 = p^2 + A_1$, 其中 A_1 为任意常数. 从而

$$2 \frac{dp}{dx} = \pm \sqrt{p^2 + A_1}.$$

考虑方程

$$2 \frac{dp}{dx} = \sqrt{p^2 + A_1},$$

使用分离变量的方法, 可得

$$p + \sqrt{p^2 + A_1} = A_2 e^{\frac{x}{2}},$$

其中 A_2 为任意常数. 由此可解出

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = p = \frac{A_2}{2} e^{\frac{x}{2}} - \frac{A_1}{2A_2} e^{-\frac{x}{2}}.$$

经过两次积分后得原方程的通解

$$y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-\frac{x}{2}} + C_3 x + C_4,$$

其中 $C_1 = 2A_2$, $C_2 = -\frac{2A_1}{A_2}$, C_3, C_4 为任意常数.

由方程

$$2 \frac{dp}{dx} = -\sqrt{p^2 + A_1},$$

可得原方程相同形式的通解.

(8) 令 $p = \frac{dy}{dx}$, 则原方程变为

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1+p^2}{1+x^2}.$$

使用分离变量的方法, 可得

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{x+C_1}{C_1x-1},$$

其中 C_1 为任意常数. 解得

$$y = (1+C_1^{-2}) \ln |C_1x-1| + \frac{x}{C_1} + C_2,$$

其中 C_2 为任意常数.

(9) 令 $z = \frac{dy}{dx}$, 则原方程为

$$z \frac{d^2z}{dx^2} - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 0,$$

当 $z \neq 0$ 时, 令 $p = \frac{1}{z} \frac{dz}{dx}$, 则

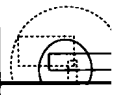
$$\frac{dz}{dx} = zp, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = zp^2 + z \frac{dp}{dx},$$

故有

$$z^2 \frac{dp}{dx} = 0.$$

解得 $p = C_1$, 其中 C_1 为任意常数. 因此求得 $z = \tilde{C}_2 e^{C_1 x}$, 其中 \tilde{C}_2 为任意常数, 故取 $C_1 \neq 0$ 时得原方程的通解为 $y = C_2 e^{C_1 x} + C_3$, 其中 $C_2 = \frac{\tilde{C}_2}{C_1}$, C_3 为任意常数; 取 $C_1 = 0$ 时得原方程的解 $y = Ax + B$, 其中 A, B 为任意常数.

此外, 当 $z = 0$ 时解得 $y = C$, 其中 C 为任意常数, 但此解已包含在上面的通解表



达式之中(取 $C_2=0$ 即得).

4. 已知某曲线, 它的方程 $y=y(x)$ 满足微分方程

$$x \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y,$$

且与另一曲线 $y=e^{-x}$ 在点 $(0, 1)$ 相切, 求此曲线方程.

解: 此曲线满足的微分方程为 Clairaut 方程, 其通解为 $y=Cx+C^2$, 其中 C 为任意常数. 同时它还有参数形式的特解

$$x=-2p, \quad y=-p^2.$$

消去 p 后得 $y=-\frac{1}{4}x^2$. 又由假设所给方程的解满足初值条件 $y(0)=1$, 从而必有 $y=-x+1$ 或 $y=x+1$. 再由假设 $y'(0)=-1$ 易知所求曲线方程必为 $y=1-x$.

5. 证明方程

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3xy \frac{dy}{dx} + 3y^2 = 0$$

只有零解.

证明: 所给微分方程即为

$$\left(x \frac{dy}{dx} + \frac{3}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 0,$$

因此必有

$$x \frac{dy}{dx} + \frac{3}{2}y = 0 \quad \text{且} \quad y = 0,$$

由此得 $x \frac{dy}{dx} = 0$, 即 $\frac{dy}{dx} = 0$, 故 $y(x)$ 必为常数, 从而 $y(x) \equiv 0$, 即原方程只有零解. \square

6. 试证若 $y=\varphi(x)$ 是方程

$$\frac{dy}{dx} = p(x) \sin y$$

的满足初始条件 $\varphi(0)=0$ 的解, 则 $\varphi(x) \equiv 0$, 其中 $p(x)$ 在 $-\infty < x < \infty$ 上连续.

证明: 用反证法. 若 $\varphi(x) \not\equiv 0$, 则有 x_0 使得 $\sin(\varphi(x_0)) \neq 0$, 不妨设 $x_0 > 0$. 令

$$\bar{x}_0 = \sup\{x \in \mathbb{R}: \sin(\varphi(x)) = 0 \text{ 且 } x < x_0\},$$

则显然有 $\bar{x}_0 \geq 0$ 及 $\sin(\varphi(\bar{x}_0)) = 0$ 且当 $x \in (\bar{x}_0, x_0]$ 时, $\sin(\varphi(x)) \neq 0$. 从而存在整数

m 使得 $\varphi(\bar{x}_0) = m\pi$. 在 $(\bar{x}_0, x_0]$ 上由分离变量法可知存在非零常数 K 使得

$$\tan\left(\frac{\varphi(x)}{2}\right) = K \exp\left(\int_{\bar{x}_0}^x p(s) ds\right), \quad x \in (\bar{x}_0, x_0].$$

在上式两端令 $x \rightarrow \bar{x}_0$, 则左端当 m 为偶数时趋于 0, 当 m 为奇数时趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$, 而右端趋于非零常数 K , 这就导致矛盾. 故必有 $\varphi(x) \equiv 0$. \square

第三章 线性方程

本章主要讨论线性方程的解的一般理论，包括解的存在性与唯一性，解集合的代数结构等。解的存在性与唯一性定理是线性微分方程理论的基石，读者不仅应深刻理解其含义，还应该掌握其证明方法，这不但对理解后面第五章关于非线性方程解的存在性与唯一性定理及其证明有帮助，而且对以后学习泛函分析也是有益的。关于解集合的代数结构，最根本的是了解齐次线性方程的解集合为一个有限维线性空间，相应的齐次线性方程的通解可以通过基解矩阵来表示，并且非齐次线性方程的通解也可以通过常数变易公式由其对应的齐次方程的基解矩阵表示。除此而外，本章还讨论了方程的复值解和幂级数解法。

3.1 主要内容

1. 解的存在唯一性定理

对一般形式的含 n 个未知函数的线性微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad (3.1)$$

我们有下面的解的存在唯一性定理：

定理 3.1 假设 $A(t)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的 $n \times n$ 阶连续矩阵函数， $f(t)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的 n 维连续列向量函数，则对于区间 $[\alpha, \beta]$ 上的任意实数 t_0 及任意 n 维常向量 x^0 ，方程(3.1)在区间 $[\alpha, \beta]$ 上存在唯一解 $x(t)$ 满足初值条件 $x(t_0) = x^0$ 。

这个结果不仅告诉我们初值问题解的存在性和唯一性，而且指出解的存在区间和已知函数连续的区间是一样大的。定理 3.1 的证明思想是把相应的初值问题的解转化为其等价积分方程

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t (A(\tau)x(\tau) + f(\tau)) d\tau \quad (3.2)$$

在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的连续解，然后利用 Picard 逐次逼近法，构造向量函数序列 $\{x_k(t)\}$ ，其中 $x_0(t) \equiv x^0$ ，且

$$x_k(t) = x^0 + \int_{t_0}^t (A(\tau)x_{k-1}(\tau) + f(\tau))d\tau,$$

来逼近方程(3.2)的连续解. 这一方法将在第五章用来证明一般非线性方程的解的存在唯一性定理.

2. 齐次线性方程组的解的结构与基解矩阵

设 $n \times n$ 阶矩阵 $A(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 给定齐次线性方程组

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (3.3)$$

我们有下面解的结构定理:

定理 3.2 (叠加原理) 如果 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是齐次线性微分方程(3.3)的两个解, 则

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$$

也是(3.3)的解, 其中 C_1, C_2 是任意常数. 并且齐次线性微分方程(3.3)解的全体 S 为一个 n 维线性空间.

当初值 $t_0 \in [\alpha, \beta]$ 固定后, 向量空间 \mathbb{R}^n (或 \mathbb{C}^n) 上任意一个常向量 x^0 都唯一地对应于方程(3.3)的一个解 $x(t)$, 其中 $x(t)$ 满足初值条件 $x(t_0) = x^0$. 显然映射 $\sigma: x^0 \mapsto x(t)$ 给出了线性空间 S 与 \mathbb{R}^n (或 \mathbb{C}^n) 之间的同构关系.

由齐次方程(3.3)的 n 个线性无关的解构成的向量组称为方程(3.3)的一个**基本解组**. 若方程(3.3)有基本解组 $\{x_k(t): k=1, 2, \dots, n\}$, 则其通解可表示为

$$x(t) = \sum_{k=1}^n C_k x_k(t), \quad \forall \alpha \leq t \leq \beta. \quad (3.4)$$

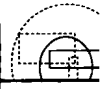
其中 C_1, \dots, C_n 为常数. 为判定方程(3.3)的 n 个解是否为基本解组需要引入**基解矩阵**的概念:

定义 3.1 设 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 为方程(3.3)的 n 个解, 其中

$$x_k(t) = (x_{1k}(t), x_{2k}(t), \dots, x_{nk}(t))^T, \quad k=1, 2, \dots, n,$$

则称

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$



为方程(3.3)的一个解矩阵, 其行列式 $\det \mathbf{X}(t)$ 称为这个解组的 Wronski 行列式. 当 $\{x_k(t); k=1, 2, \dots, n\}$ 是一个基本解组时, 称解矩阵 $\mathbf{X}(t)$ 为方程(3.3)的一个基(本)解矩阵. 特别地, 如果在某点 t_0 处 $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{I}$, 则称 $\mathbf{X}(t)$ 为标准解矩阵.

根据定理 3.2, 若 $\mathbf{X}(t)$ 为方程(3.3)的一个基解矩阵, 则其通解 $\mathbf{x}(t)$ 可以表示为 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c}$, 其中 \mathbf{c} 是任意常向量. 显然方程(3.3)满足初值条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ 的解为 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t, t_0)\mathbf{x}^0$, 其中 $\mathbf{X}(t, t_0) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0)$ 是一个标准解矩阵.

下面的定理给出了判定方程(3.3)的一个解矩阵是否为基解矩阵的简便的方法:

定理 3.3 方程(3.3)的解组 $\{x_k(t); k=1, 2, \dots, n\}$ 线性无关的充要条件是它们的 Wronski 行列式 $\det \mathbf{X}(t)$ 在某点 $t=t_0 \in [\alpha, \beta]$ 处取值不为零. 并且 $\det \mathbf{X}(t)$ 满足 Liouville 公式

$$\det \mathbf{X}(t) = \det \mathbf{X}(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \operatorname{tr} \mathbf{A}(t) dt\right),$$

其中 $t, t_0 \in [\alpha, \beta]$, $\operatorname{tr} \mathbf{A}(t)$ 是矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 的迹, 即

$$\operatorname{tr} \mathbf{A}(t) = \sum_{k=1}^n a_{kk}(t).$$

由 Liouville 公式容易知道 $\det \mathbf{X}(t)$ 恒为零(无零点)当且仅当 $\det \mathbf{X}(t)$ 在某点 t_0 等于零(不等于零). 因此只需在区间 $[\alpha, \beta]$ 内任一点 t_0 处计算给定解组的 Wronski 行列式 $\det \mathbf{X}(t_0)$, 就可根据 $\det \mathbf{X}(t_0)$ 是否为零来判断该解组是否线性无关.

3. 非齐次线性方程组的通解

假设 $\mathbf{A}(t)$ 和 $\mathbf{f}(t)$ 满足定理 3.1 的条件, 则非齐次方程组

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \quad (3.5)$$

有如下的通解结构:

定理 3.4 若 $\mathbf{x}^*(t)$ 是方程(3.5)的某个解, 则方程(3.5)的任一解 $\mathbf{x}(t)$ 都可以表示为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c} + \mathbf{x}^*(t),$$

其中 \mathbf{c} 是 n 维常数列向量, $\mathbf{X}(t)$ 是相应齐次方程(3.3)的基解矩阵.

定理 3.4 说明只需找出方程(3.5)的一个特解以及相应的齐次方程(3.3)的基解矩阵即可得到方程(3.5)的全部解. 而方程(3.5)的一个特解可以通过常数变易法求出,

由此得到下面的定理:

定理 3.5 若矩阵函数 $X(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, 是齐次线性方程(3.3)的基解矩阵, 则非齐次线性方程(3.5)的通解为

$$x(t) = X(t)c + X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau. \quad (3.6)$$

其中 c 为 n 维常数列向量. 方程(3.5)满足初值条件 $x(t_0) = x^0$ 的解为

$$x(t) = X(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t X(t, \tau)f(\tau)d\tau, \quad (3.7)$$

其中 $t, t_0 \in [\alpha, \beta]$, $X(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$.

我们把公式(3.6)或公式(3.7)称为常数变易公式.

4. 高阶线性方程

上述所有结论都可以应用于 n 阶线性方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = f(t), \quad (3.8)$$

及相应的齐次方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = 0. \quad (3.9)$$

这里系数 $a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)$ 都在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续. 假设函数 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 是齐次方程(3.9)的 n 个解, 我们称

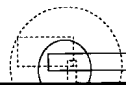
$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

为解组 $\{x_k(t), k=1, 2, \dots, n\}$ 的 Wronski 行列式. 齐次方程(3.9)的 n 个线性无关的解的全体称为该方程的一个基本解组. 我们有

定理 3.6 齐次线性微分方程(3.9)在区间 $\alpha \leq t \leq \beta$ 上存在 n 个线性无关的解 $x_1(t), \dots, x_n(t)$. 并且方程(3.9)的通解为

$$x(t) = \sum_{k=1}^n C_k x_k(t), \quad (3.10)$$

其中 C_1, \dots, C_n 是任意常数.



定理 3.7 n 阶齐次线性微分方程(3.9)的解组 $\{x_k(t): k=1, 2, \dots, n\}$ 线性无关的充要条件是它的 Wronski 行列式 $W(t)$ 在区间 $\alpha \leq t \leq \beta$ 上恒不为零, 而这等价于 $W(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 的某点 t_0 处不为零, 并且方程(3.9)的任一解组 $\{x_k(t): k=1, 2, \dots, n\}$ 的 Wronski 行列式满足 Liouville 公式

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau\right). \quad (3.11)$$

定理 3.8 设 $\{x_k(t): k=1, 2, \dots, n\}$ 是 n 阶齐次线性微分方程(3.9)在 $\alpha \leq t \leq \beta$ 上的一个基本解组, 则非齐次线性微分方程(3.8)在 $\alpha \leq t \leq \beta$ 上的通解为

$$x(t) = \sum_{k=1}^n C_k x_k(t) + x^*(t), \quad (3.12)$$

其中 C_1, C_2, \dots, C_n 为任意常数, 而

$$x^*(t) = \sum_{k=1}^n \int_{t_0}^t \frac{x_k(t) W_k(\tau)}{W(\tau)} f(\tau) d\tau \quad (3.13)$$

是方程(3.8)的一个特解, $W(t)$ 是解组 $\{x_k(t): k=1, 2, \dots, n\}$ 的 Wronski 行列式, $W_k(t)$ 是 $W(t)$ 中第 n 行第 k 列元素的代数余子式.

5. 复值解

求线性方程的通解的问题实质上是求相应的齐次方程的基本解组. 这即使对常系数的齐次方程都不是一件容易的事. 在第四章将用 Euler 待定指数函数法来解决这个问题. 这不可避免地要用到方程的复值解, 并且我们将看到, 有时从复值解提取需要的实值解比直接寻求实值解更容易.

前面关于线性方程实值解的所有定理都可以推广到实自变量的复值解情形, 而且我们有下面的结果:

定理 3.9 复值向量函数 $z(t) = x(t) + iy(t)$ 是实系数齐次线性微分方程组

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z, \quad (3.14)$$

(即矩阵 $A(t)$ 是实值的)的解的充要条件是该函数的实部 $x(t)$ 和虚部 $y(t)$ 都是方程(3.14)的解.

6. 幂级数解法

变系数的线性微分方程没有一般的解法, 本章以二阶齐次线性微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(t)\frac{dx}{dt} + b(t)x = 0 \quad (3.15)$$

为例介绍了幂级数解法，其基本思想与多项式问题中常见的比较系数法很相似，不同的是这里涉及的问题不仅包括形式幂级数的递归计算，还包括级数的收敛性。为了保证收敛性，我们需要下列结果：

定理 3.10 (Cauchy 定理) 如果函数 $f(t, x)$ 在矩形区域

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| < \alpha, |x - x_0| < \beta\}$$

上可以展开成 $(t - t_0)$ 和 $(x - x_0)$ 的一个收敛幂级数

$$f(t, x) = \sum_{k, l=0}^{\infty} \gamma_{kl} (t - t_0)^k (x - x_0)^l, \quad (3.16)$$

则初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.17)$$

在 t_0 附近存在唯一的收敛的幂级数解。

利用这个定理可以得到：

定理 3.11 如果方程(3.15)的系数 $a(t)$, $b(t)$ 在区间 $|t - t_0| < \rho$ 内都可以展开成 $(t - t_0)$ 的收敛的幂级数，则方程(3.15)在区间 $|t - t_0| < \rho$ 上存在收敛的幂级数解

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (t - t_0)^j, \quad (3.18)$$

其中 c_0, c_1 为任意常数(它们可由方程(3.15)在 t_0 点的初值条件来决定)，而 c_2, c_3, \dots 可以从 c_0, c_1 出发由递推公式依次确定。

根据定理 3.11 可计算方程(3.15)的收敛的幂级数解 $x(t)$ 如下：先把系数 $a(t)$, $b(t)$ 在 $|t - t_0| < \rho$ 上展开成 $t - t_0$ 的幂级数

$$a(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (t - t_0)^j, \quad b(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j (t - t_0)^j,$$

并且假设解 $x(t)$ 可以展开成幂级数(3.18)。然后把它们代入方程(3.15)并比较 $t - t_0$ 的同次幂的系数，可递推地确定系数 c_j , $j = 0, 1, \dots$ ，从而求出解 $x(t)$ 。

如果系数 $a(t)$, $b(t)$ 在 $t = t_0$ 处不是解析的，比如，分母出现 $(t - t_0)$ 的方幂，我们可以尝试求形如



$$x(t) = (t-t_0)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} c_j (t-t_0)^j$$

的形式级数解，其中 ν 和 c_j 均为待定常数。

3.2 典型例题

例 3.1 利用 Picard 逐次逼近法求解初值问题

$$\frac{dx}{dt} = x+t, \quad x(0)=1.$$

解：由解的存在唯一性定理知原初值问题存在唯一解 $x(t)$ 且 $x(t)$ 满足积分方程

$$x(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \int_0^t x(s) ds. \quad (3.19)$$

利用方程(3.19)构造 Picard 迭代序列 $\{x_n(t)\}$ ，其中 $x_0(t) \equiv 1$ ，且

$$x_n(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \int_0^t x_{n-1}(s) ds. \quad (3.20)$$

由公式(3.20)可得

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1 + t + \frac{1}{2}t^2, \\ x_2(t) &= 2 \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} \right) - \frac{t^3}{3!} - 1 - t, \\ x_3(t) &= 2 \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} \right) - \frac{t^4}{4!} - 1 - t. \end{aligned}$$

可归纳地求出

$$x_n(t) = 2 \sum_{k=0}^{n+1} \frac{t^k}{k!} - \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} - 1 - t.$$

显然函数序列 $\{x_n(t)\}$ 在任一有限闭区间上一致收敛于所给初值问题的解 $x(t) = 2e^t - t - 1$ 。它与由第二章的常数变易公式求出的解完全一样。

例 3.2 证明函数 $\sin t$, $\sin \left(t + \frac{\pi}{8}\right)$, $\sin \left(t - \frac{\pi}{8}\right)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上线性相关。

证明：利用定义证明。关键是寻找一组不全为零的常数 a_1, a_2, a_3 ，使得

$$a_1 \sin t + a_2 \sin \left(t + \frac{\pi}{8}\right) + a_3 \sin \left(t - \frac{\pi}{8}\right) \equiv 0 \quad (3.21)$$

在区间 $(-\infty, \infty)$ 上成立. 若上式成立, 则可取 $t=0$, $t=\frac{\pi}{4}$ 和 $t=\frac{\pi}{2}$ 分别代入公式 (3.21), 得到一个关于 a_1, a_2, a_3 的代数方程组

$$\begin{cases} a_2 \sin \frac{\pi}{8} - a_3 \sin \frac{\pi}{8} = 0, \\ a_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + a_2 \sin \frac{3\pi}{8} + a_3 \sin \frac{\pi}{8} = 0, \\ a_1 + a_2 \sin \frac{5\pi}{8} + a_3 \sin \frac{3\pi}{8} = 0. \end{cases}$$

显然它有非零解

$$a_1 = -2 \cos \frac{\pi}{8}, \quad a_2 = a_3 = 1,$$

将之代入式(3.21)知对这组不全为零的数 a_1, a_2, a_3 , 公式(3.21)在 $(-\infty, \infty)$ 上成立, 因而所给函数组在 $(-\infty, \infty)$ 上线性相关. \square

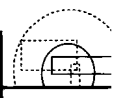
这里要特别注意的是, 有些初学者容易想到利用 Wronski 行列式来证明, 即由所给函数组的 Wronski 行列式为

$$W(t) = \begin{vmatrix} \sin t & \sin\left(t + \frac{\pi}{8}\right) & \sin\left(t - \frac{\pi}{8}\right) \\ \cos t & \cos\left(t + \frac{\pi}{8}\right) & \cos\left(t - \frac{\pi}{8}\right) \\ -\sin t & -\sin\left(t + \frac{\pi}{8}\right) & -\sin\left(t - \frac{\pi}{8}\right) \end{vmatrix} \equiv 0$$

来推出这三个函数线性相关. 但这一推导是错误的, 正如教材第 3.2 节说明的, 函数矩阵的行列式或恒为零或恒不为零的结果只适用于由齐次线性微分方程组给出的解矩阵. 一般的函数矩阵没有这样的性质, 更不能用它来判断函数组是否线性无关. 即使函数组的 Wronski 行列式恒等于零, 它们也可能是线性无关的.

例 3.3 如果 $\Phi(t)$ 是方程组 $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ 的基解矩阵, 则 $\Psi(t)$ 是方程组 $\frac{dx}{dt} = -A^T(t)x$ 的基解矩阵的充要条件为 $\Psi^T(t)\Phi(t) = C$, 其中 C 为非奇异的常数矩阵.

证明: 必要性 若 $\Psi(t)$ 是 $\frac{dx}{dt} = -A^T(t)x$ 的基解矩阵, 则有



$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Psi^T(t)\Phi(t)) &= \left(\frac{d\Psi(t)}{dt}\right)^T \Phi(t) + \Psi^T(t) \frac{d\Phi(t)}{dt} \\ &= (-A^T(t)\Psi(t))^T \Phi(t) + \Psi^T(t)A(t)\Phi(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

因而存在一常数矩阵 C , 使得 $\Psi^T\Phi=C$. 又由于 $\Phi(t)$ 与 $\Psi(t)$ 均为基解矩阵, 故 C 非奇异.

充分性 设存在一非奇异的常数矩阵 C 使得 $\Psi(t)^T\Phi(t)=C$, 则

$$0 = \frac{d}{dt}(\Psi^T(t)\Phi(t)) = \left[\left(\frac{d\Psi(t)}{dt}\right)^T + \Psi^T(t)A(t)\right]\Phi(t).$$

由于 $\Phi(t)$ 非奇异, 所以由上式可得

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = -A^T(t)\Psi(t),$$

这表明 $\Psi(t)$ 是方程组 $\frac{dx}{dt} = -A^T(t)x$ 的一个解矩阵. 进一步, 由于 $\Psi^T(t)\Phi(t)=C$ 且 $\Phi(t)$, C 都是非奇异的, 所以 $\Psi(t)$ 也是非奇异的, 因此 $\Psi(t)$ 是一个基解矩阵. \square

例 3.4 已知方程

$$t^2 \frac{d^2x}{dt^2} - 2t \frac{dx}{dt} + 2x = t^3 \sin t \quad (t \neq 0)$$

的对应齐次方程的基本解组为 $x_1=t$, $x_2=t^2$. 利用常数变易公式求该非齐次方程的通解.

解: 原方程可改写为

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2}{t} \frac{dx}{dt} + \frac{2}{t^2}x = t \sin t \quad (t \neq 0).$$

容易求出其对应的齐次方程的基本解组 $x_1=t$, $x_2=t^2$ 的 Wronski 行列式 $W(t)=t^2$, $W(t)$ 中第 2 行第 1 列及第 2 列元素的代数余子式 $W_1(t)$, $W_2(t)$ 分别为 $W_1(t)=-t^2$, $W_2(t)=t$. 取 $t_0 \neq 0$, 因此由常数变易公式知原方程有特解

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \int_{t_0}^t \frac{x_1(\tau)W_1(\tau) + x_2(\tau)W_2(\tau)}{W(\tau)} \tau \sin \tau d\tau \\ &= -t \int_{t_0}^t \tau \sin \tau d\tau + t^2 \int_{t_0}^t \sin \tau d\tau \\ &= -t \sin t + t(-t_0 \cos t_0 + \sin t_0) + t^2 \cos t_0. \end{aligned}$$

故原方程的通解为 $x(t)=C_1t+C_2t^2-t \sin t$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

例 3.5 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为两两不同的非零实数并满足方程

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

容易验证 $\phi_k(t) = e^{\lambda_k t}$ ($1 \leq k \leq n$) 均为方程

$$\frac{dx}{dt} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = P(t) \quad (3.22)$$

对应的齐次方程的解, 其中 $P(t)$ 为 m 次多项式. 用常数变易公式证明: 方程(3.22)有形如 $x_p(t) = Q(t)$ 的特解, 其中 $Q(t)$ 为多项式且 $\deg(Q(t)) \leq m$.

证明: 函数组 $\{\phi_k(t): 1 \leq k \leq n\}$ 的 Wronski 行列式为

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} = e^{\sigma t} V(\lambda_1, \cdots, \lambda_n),$$

其中 $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$, $V(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 为 Vandermonde 行列式. 显然 $W(t) \neq 0$, 从而 $\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots, \phi_n(t)$ 为方程(3.22)的对应齐次方程的基本解组. 由常数变易公式, 方程(3.22)有特解

$$\tilde{x}_p(t) = \sum_{k=1}^n \int_{t_0}^t \frac{\phi_k(t) W_k(\tau)}{W(\tau)} P(\tau) d\tau,$$

其中 $W_k(\tau)$ 为 $W(\tau)$ 中第 n 行第 k 列元素的代数余子式. 容易直接算出

$$W_k(\tau) = (-1)^{n+k} e^{(\sigma - \lambda_k)\tau} V(\lambda_1, \cdots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \cdots, \lambda_n).$$

再令 $P(t) = b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \cdots + b_1 t + b_0$, 则

$$\tilde{x}_p(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^m c_{kj} e^{\lambda_k t} \int_{t_0}^t \tau^j e^{-\lambda_k \tau} d\tau,$$

其中

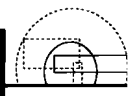
$$c_{kj} = \frac{(-1)^{n+k} V(\lambda_1, \cdots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \cdots, \lambda_n)}{V(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)} b_j$$

为实常数, 另一方面, 由归纳法和分部积分法可证对 $j \geq 0$ 有

$$\int_{t_0}^t \tau^j e^{-\lambda_k \tau} d\tau = R_j(t) e^{-\lambda_k t} + d_{jk},$$

其中 $R_j(t)$ 为多项式, 并且 $\deg(R_j(t)) \leq j$, $d_{jk} \in \mathbb{R}$ 为常数, 从而

$$\tilde{x}_p(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^m c_{kj} e^{\lambda_k t} (R_j(t) e^{-\lambda_k t} + d_{jk}) = x_*(t) + Q(t),$$



其中

$$x_*(t) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=0}^m c_{kj} d_{jk} \right) e^{\lambda_k t}, \quad Q(t) = \sum_{j=0}^m \left(\sum_{k=1}^n c_{kj} \right) R_j(t).$$

由于 $x_*(t)$ 为方程(3.22)对应的齐次方程的解, 由叠加原理, $x_p(t) = \tilde{x}_p(t) - x_*(t) = Q(t)$ 为方程(3.22)的一个特解. 显然 $Q(t)$ 为多项式且 $\deg(Q(t)) \leq m$. \square

例 3.6 给定 $f(t) = (0, 0, t)^T$, 设三阶方阵 $A(t)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上连续, 已知方程组

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$$

对应的齐次方程组有基解矩阵

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^t & 0 \\ -1 & (1+t)e^t & e^t \\ -1 & te^t & e^t \end{pmatrix}.$$

试求所给方程组的通解及满足初始条件 $x(0) = \mathbf{0}$ 的解.

解: 容易直接计算得

$$X^{-1}(s)f(s) = \begin{pmatrix} s \\ -se^{-s} \\ (2+s)se^{-s} \end{pmatrix}.$$

由常数变易公式, 原非齐次方程的通解为

$$\begin{aligned} x(t) &= X(t)c + X(t) \int_0^t X^{-1}(s)f(s)ds \\ &= X(t)c + X(t) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ -1 + (1+t)e^{-t} \\ 4 - (2+t)^2 e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= X(t)c + \begin{pmatrix} -e^t + \frac{1}{2}t^2 + t + 1 \\ (3-t)e^t - \frac{1}{2}t^2 - 2t - 3 \\ (4-t)e^t - \frac{1}{2}t^2 - 3t - 4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中 c 为任意常向量. 即原方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = C_1 + C_2 e^t + \frac{1}{2} t^2 + t + 1, \\ x_2 = -C_1 + C_2(1+t)e^t + C_3 e^t - \frac{1}{2} t^2 - 2t - 3, \\ x_3 = -C_1 + C_2 t e^t + C_3 e^t - \frac{1}{2} t^2 - 3t - 4. \end{cases}$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数. 由此而得满足初始条件 $x(0) = \mathbf{0}$ 的解为

$$\begin{cases} x_1 = -e^t + \frac{1}{2} t^2 + t + 1, \\ x_2 = (3-t)e^t - \frac{1}{2} t^2 - 2t - 3, \\ x_3 = (4-t)e^t - \frac{1}{2} t^2 - 3t - 4. \end{cases}$$

例 3.7 求方程组

$$t \frac{dx}{dt} = 2x - y, \quad t \frac{dy}{dt} = 2x - y$$

的所有解, 并证明它的任何两个线性无关解的 Wronski 行列式等于 Ct , 其中 $C \neq 0$ 为常数. 这个行列式在 $t=0$ 处为零, 但却不恒为零. 这是否与 Liouville 公式相矛盾?

解: 令 $z(t) = y(t) - x(t)$, 由原方程组得 $tz'(t) = 0$, 其通解为 $z = y - x = C_1$, 其中 C_1 为任意常数. 从而 $y = x + C_1$, 将之代入原方程组第一个方程, 可得

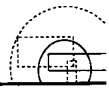
$$t \frac{dx}{dt} = x - C_1,$$

利用分离变量法, 可得到通解为 $x = C_1 + C_2 t$. 所以原方程组的通解为

$$x = C_1 + C_2 t, \quad y = 2C_1 + C_2 t.$$

设原方程组另一与之线性无关的解为 $\tilde{x} = D_1 + D_2 t$, $\tilde{y} = 2D_1 + D_2 t$, 则 $(C_2 D_1 - C_1 D_2) \neq 0$. 易知这两个线性无关的解的 Wronski 行列式为 $\det X(t) = (C_2 D_1 - C_1 D_2)t$, 其中 $C = C_2 D_1 - C_1 D_2 \neq 0$, 但当 $t=0$ 时, 该 Wronski 行列式为零.

这一结果与 Liouville 公式并不矛盾. 因为将原方程组化为 Liouville 公式所考虑的规范形式的线性方程组时其系数矩阵为



$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{t} & -\frac{1}{t} \\ \frac{2}{t} & -\frac{1}{t} \end{pmatrix}.$$

当 $t=0$ 时无定义, 故在 $t=0$ 或 $t_0=0$ 时 Liouville 公式失效.

例 3.8 在 $t=0$ 附近求方程

$$9t(1-t)\frac{d^2x}{dt^2} - 12\frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

的幂级数解.

解: 把原方程写成如下形式:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{4}{3t(1-t)}\frac{dx}{dt} + \frac{4}{9t(1-t)}x = 0,$$

则其系数

$$a(t) = -\frac{4}{3t(1-t)}, \quad b(t) = \frac{4}{9t(1-t)}$$

均不解析. 因此考虑形如

$$x(t) = t^v \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k \quad (3.23)$$

的幂级数解. 将(3.23)代入原方程, 合并同类项得

$$\Delta(v)C_0 t^{v-1} + \sum_{k=0}^{\infty} [\Lambda(k, v)C_{k+1} - \Omega(k, v)C_k] t^{k+v} = 0.$$

其中 $\Delta(v) = 3v(3v-7)$, $\Lambda(k, v) = 3(k+v+1)[3(k+v)-4]$, $\Omega(k, v) = 9(k+v)(k+v-1)-4$. 令各项系数为零得

$$v(3v-7) = 0, \quad (3.24)$$

$$C_{k+1} = \frac{9(k+v)(k+v-1)-4}{3(k+v+1)[3(k+v)-4]} C_k \quad (3.25)$$

从方程(3.24)知, $v=0$ 或 $v=\frac{7}{3}$.

若 $v=0$, 从递推公式(3.25)可依次得到后面的系数. 由此而得特解

$$x_1(t) = 1 + \frac{1}{3}t + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6}t^2 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9}t^3 + \dots$$

类似地, 当 $v = \frac{7}{3}$ 时可得特解

$$x_2(t) = t^{\frac{7}{3}} \left(1 + \frac{8}{10}t + \frac{8 \cdot 11}{10 \cdot 13}t^2 + \frac{8 \cdot 11 \cdot 14}{10 \cdot 13 \cdot 16}t^3 + \cdots \right).$$

显然这两个特解是线性无关的, 因而原方程的通解为 $x(t) = A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t)$, 其中 A_1 与 A_2 是任意常数.

3.3 习题与解答

习 题 3.1

1. 试证明

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d}{dt} a_{k1}(t) & \frac{d}{dt} a_{k2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} a_{kn}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

证明: 用数学归纳法证明. 当 $n=1$ 时显然等式成立. 假设当 $n \leq m-1$ 时等式也成立, 其中 $m \geq 2$. 令 $n=m$, 设 $A_{11}(t) = (b_{ij}^{(1)})$, \cdots , $A_{1m}(t) = (b_{ij}^{(m)})$ 分别为 $a_{11}(t)$, \cdots , $a_{1m}(t)$ 的代数余子式, 则有

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1m}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2m}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \cdots & a_{mm}(t) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{k=1}^m a_{1k}(t) A_{1k}(t) \right\} \\
 &= \sum_{k=1}^m \frac{da_{1k}(t)}{dt} A_{1k}(t) + \sum_{k=1}^m a_{1k}(t) \frac{dA_{1k}(t)}{dt}.
 \end{aligned}$$

由行列式的性质易见

$$\sum_{k=1}^m \frac{da_{1k}(t)}{dt} A_{1k}(t) = \begin{vmatrix} \frac{d}{dt} a_{11}(t) & \frac{d}{dt} a_{12}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} a_{1m}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2m}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \cdots & a_{mm}(t) \end{vmatrix}.$$

再由归纳假设和行列式的性质知

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^m a_{1k}(t) \frac{dA_k(t)}{dt} \\
 &= \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=1}^m a_{1k}(t) \begin{vmatrix} b_{11}^{(k)}(t) & b_{12}^{(k)}(t) & \cdots & b_{1,m-1}^{(k)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d}{dt} b_{j1}^{(k)}(t) & \frac{d}{dt} b_{j2}^{(k)}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} b_{j,m-1}^{(k)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m-1,1}^{(k)}(t) & b_{m-1,2}^{(k)}(t) & \cdots & b_{m-1,m-1}^{(k)}(t) \end{vmatrix} \\
 &= \sum_{k=2}^m \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1m}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d}{dt} a_{k1}(t) & \frac{d}{dt} a_{k2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} a_{km}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \cdots & a_{mm}(t) \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

因此当 $n=m$ 时等式也成立.

故所给等式成立. \square

2. 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2t^3 + 1 & t^2 \\ t & 4t^2 \end{pmatrix},$$

试计算并比较其导数的行列式和其行列式的导数.

解：易知

$$\frac{dA}{dt} = \begin{pmatrix} 6t^2 & 2t \\ 1 & 8t \end{pmatrix},$$

因此其导数的行列式为 $48t^3 - 2t$. 另一方面, 可求出 $\det A = 8t^5 + 4t^2 - t^3$, 故其行列式的导数为 $40t^4 - 3t^2 + 8t$.

3. 设 $x(t)$ 是区间 $\alpha \leq t \leq \beta$ 上的连续函数, 且当 $\alpha \leq t \leq \beta$ 时,

$$|x(t)| \leq L + M \int_{\alpha}^t |x(\tau)| d\tau,$$

其中 L, M 是非负常数. 试用逐次逼近法证明:

$$|x(t)| \leq L e^{M(t-\alpha)}, \quad \forall \alpha \leq t \leq \beta.$$

证明: 不失一般性, 可设 $x(t) \geq 0$. 由假设可知存在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数 $r(t) \leq 0$ 使得

$$x(t) = r(t) + L + M \int_{\alpha}^t x(\tau) d\tau.$$

构造函数序列 $\{x_k(t)\}$ 如下:

$$x_0(t) = r(t) + L,$$

$$x_k(t) = r(t) + L + M \int_{\alpha}^t x_{k-1}(\tau) d\tau,$$

其中 $k=1, 2, \dots$. 容易归纳地证明, 对任意自然数 k , 函数 $x_k(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有定义并且连续. 由于 $x_0(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 因此存在常数 $L_0 > 0$ 使得在 $[\alpha, \beta]$ 上 $|x_0(t)| \leq L_0$.

由数学归纳法可证明, 对任意自然数 k ,

$$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \leq \frac{L_0 M^k}{k!} (t-\alpha)^k, \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

仿照配套教材中定理 3.1 的证明可知函数序列 $\{x_k(t)\}$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上是一致收敛的, 设

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = x_*(t).$$

则由一致收敛性易知 $x_*(t)$ 满足

$$x_*(t) = r(t) + L + M \int_{\alpha}^t x_*(\tau) d\tau.$$

仿照配套教材中定理 3.1 的证明的第五步可证 $x(t) \equiv x_*(t)$.

又由数学归纳法可证明, 对任意自然数 k ,

$$x_k(t) - x_{k-1}(t) \leq \frac{LM^k}{k!} (t-a)^k, \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

从而对任意自然数 n 有

$$\begin{aligned} x_n(t) &= r(t) + L + \sum_{k=1}^n [x_k(t) - x_{k-1}(t)] \\ &\leq L + \sum_{k=1}^n \frac{LM^k}{k!} (t-a)^k \leq Le^{M(t-a)}. \end{aligned}$$

即 $x_n(t) \leq Le^{M(t-a)}$. 两边取极限即得

$$x(t) \leq Le^{M(t-a)}, \quad \alpha \leq t \leq \beta. \quad \square$$

习 题 3.2

1. 验证

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

是下列微分方程组的基解矩阵:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x.$$

解: 易见

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{2t}(1+2t) \\ 0 & 2e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X}(t).$$

故 $\mathbf{X}(t)$ 是所给方程组的解矩阵. 又由 $\det \mathbf{X}(t) = e^{4t} \neq 0$ 知 $\mathbf{X}(t)$ 是所给方程组的基解矩阵.

2. 如果齐次方程组 $\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}_1(t)x$ 与 $\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}_2(t)x$ 有一个相同的基解矩阵, 证明:

$$\mathbf{A}_1(t) \equiv \mathbf{A}_2(t).$$

证明: 设 $\mathbf{X}(t)$ 是齐次方程组 $\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}_1(t)x$ 与 $\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}_2(t)x$ 的基解矩阵, 则必有 $\mathbf{A}_1(t)$

$\mathbf{X}(t) \equiv \mathbf{A}_2(t)\mathbf{X}(t)$. 由于 $\forall t$, $\mathbf{X}(t)$ 都可逆, 故 $\mathbf{A}_1(t) \equiv \mathbf{A}_2(t)$. \square

3. 如果下列两个向量函数

$$\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

为齐次微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} x$$

的基本解组, 试求 $a_{ij}(t)$, $i, j=1, 2$.

解: 设

$$X(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix},$$

由假设易知

$$\frac{dX(t)}{dt} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} X(t),$$

因此

$$\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} = \frac{dX(t)}{dt} X^{-1}(t),$$

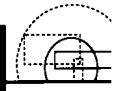
由此可求出 $a_{11}(t) = a_{22}(t) = 0$, $a_{12}(t) = 1$, $a_{21}(t) = -1$.

4. 利用解的存在唯一性定理证明: 方程组 $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ 的解组 $\{x_k(t): k=1, 2, \dots, n\}$ 线性无关的充要条件是它们的 Wronski 行列式 $\det X(t)$ 在某点 $t=t_0 \in [\alpha, \beta]$ 处取值不为零.

证明: 充分性 设方程组 $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ 的解组 $\{x_k(t): k=1, 2, \dots, n\}$ 的 Wronski 行列式 $\det X(t)$ 在某点 $t=t_0 \in [\alpha, \beta]$ 处取值不为零, 则 $\{x_k(t_0): k=1, 2, \dots, n\}$ 线性无关, 由配套教材中定理 3.2 的证明可知解组 $\{x_k(t): k=1, 2, \dots, n\}$ 线性无关.

必要性 用反证法. 设方程组 $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ 的解组 $\{x_k(t): k=1, 2, \dots, n\}$ 线性无关但在区间 $\alpha \leq t \leq \beta$ 上它的 Wronski 行列式 $\det X(t) \equiv 0$. 取定 $t_0 \in [\alpha, \beta]$, 则 $\{x_k(t_0): k=1, 2, \dots, n\}$ 线性相关, 即存在不全为零的常数 C_1, \dots, C_n 使得

$$C_1 x_1(t_0) + C_2 x_2(t_0) + \dots + C_n x_n(t_0) = 0.$$



显然 $C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \cdots + C_n x_n(t)$ 和 $x(t) \equiv \mathbf{0}$ 都是方程组 $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ 的满足初值条件 $x(t_0) = \mathbf{0}$ 的解, 因此由解的存在唯一性定理知必有

$$C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \cdots + C_n x_n(t) \equiv \mathbf{0}.$$

故 $\{x_k(t): k=1, 2, \dots, n\}$ 线性相关, 但这与假设矛盾. \square

5. 设 $X(t)$ 是方程组 $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ 的解矩阵, 证明 $X(t)$ 满足矩阵微分方程.

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X.$$

并且若 $X(t)$ 是方程组 $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ 的基解矩阵, 证明对任意非奇异的常数矩阵 C , 矩阵 $X(t)C$ 也是 $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ 的基解矩阵. 反之, 设 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 都是方程组 $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ 的基解矩阵, 则必存在一个非奇异的常数矩阵 C , 使得 $X_2(t) = X_1(t)C$.

证明: 不妨设 $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, 其中 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 为列向量, 显然它们均为方程组 $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ 的解. 因此有

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right) \\ &= (A(t)x_1, A(t)x_2, \dots, A(t)x_n) \\ &= A(t)X, \end{aligned}$$

故 $X(t)$ 满足矩阵微分方程 $\frac{dX}{dt} = A(t)X$.

若 $X(t)$ 是方程组 $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ 的基解矩阵, C 为非奇异的常数矩阵, 则有

$$\frac{d}{dt}(XC) = \frac{dX}{dt}C = A(t)(XC),$$

故 $X(t)C$ 是方程组 $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ 的解矩阵. 又 Wronski 行列式 $\det(X(t)C) = \det(X(t)) \det(C) \neq 0$, 因此矩阵 $X(t)C$ 也是方程组的基解矩阵.

反之, 设 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 都是方程组 $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ 的基解矩阵, 设 $X_1(t) = (x_1^1(t),$

$x_1^1(t), \dots, x_n^1(t)$, $X_2(t) = (x_1^2(t), x_2^2(t), \dots, x_n^2(t))$, 则对任意的 $x_k^2(t) (1 \leq k \leq n)$, 都存在常数 $c_{1k}, c_{2k}, \dots, c_{nk}$, 使得

$$x_k^2(t) = c_{1k}x_1^1(t) + c_{2k}x_2^1(t) + \dots + c_{nk}x_n^1(t).$$

令常数矩阵 $C = (c_{ij})_{n \times n}$, 则 $X_2(t) = X_1(t)C$. 又 $\det C = \det X_1^{-1}(t) \det X_2(t) \neq 0$, 因此矩阵 C 非奇异. \square

6. 设 $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, A 是 ω 周期连续的, 且 $X(t)$ 为基解矩阵, 证明: $X(t+\omega)$ 也是基解矩阵且存在可逆矩阵 C , 使得 $X(t+\omega) = X(t)C$.

证明: 设 $\Phi(t) = X(t+\omega)$, 易见

$$\frac{d\Phi}{dt} = A(t+\omega)X(t+\omega) = A(t)\Phi(t),$$

故 $X(t+\omega)$ 是方程组 $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ 的解矩阵. 又显然 Wronski 行列式 $\det X(t+\omega) \neq 0$, 因此矩阵 $X(t+\omega)$ 也是方程组的基解矩阵. 由上题知存在可逆矩阵 C , 使得 $X(t+\omega) = X(t)C$. \square

习 题 3.3

1. 考虑方程组

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad (3.26)$$

其中

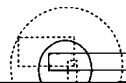
$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos^2 t & \frac{1}{2} \sin 2t - 1 \\ \frac{1}{2} \sin 2t + 1 & \sin^2 t \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

(1) 试验证

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t & -\sin t \\ e^t \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

是对应的齐次方程组

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$



的基解矩阵.

(2) 试求方程(3.26)的满足初值条件 $x(0) = (-1, 2)^T$ 的解.

解: (1) 易见

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \begin{pmatrix} e^t(\cos t - \sin t) & -\cos t \\ e^t(\sin t + \cos t) & -\sin t \end{pmatrix} = A(t)\Phi(t).$$

故 $\Phi(t)$ 是对应的齐次方程组的解矩阵. 由 $\det\Phi(t) = e^t \neq 0$ 知 $\Phi(t)$ 是对应的齐次方程组的基解矩阵.

(2) 容易计算出

$$\begin{aligned} \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)f(\tau) &= e^{t-\tau} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \\ \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x(0) &= \begin{pmatrix} -e^t \cos t - 2 \sin t \\ -e^t \sin t + 2 \cos t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

由常数变易公式得所求初值问题的解为

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x(0) + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \\ &= \begin{pmatrix} -\cos t - 2 \sin t \\ -\sin t + 2 \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. 设 $A(t)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的 $n \times n$ 阶连续矩阵函数, $f(t)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的不恒为零的 n 维连续列向量. 试证非齐次线性方程组

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$$

存在且至多存在 $n+1$ 个线性无关的解.

证明: 设 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 是齐次线性方程组 $\dot{x} = A(t)x$ 的一个基本解组, $x_p(t)$ 是非齐次线性方程组 $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ 的一个特解, 我们要证明 $y_1(t) = x_1(t) + x_p(t), \dots, y_n(t) = x_n(t) + x_p(t), y_{n+1}(t) = x_p(t)$ 是非齐次线性方程组 $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ 的 $n+1$ 个线性无关的解. 事实上显然它们是该方程组的解, 若有常数 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ 使得

$$\alpha_1 y_1(t) + \dots + \alpha_{n+1} y_{n+1}(t) \equiv 0, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

即在区间 $[\alpha, \beta]$ 上,

$$\alpha_1 x_1(t) + \cdots + \alpha_n x_n(t) + (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n+1}) x_p(t) \equiv 0,$$

则必有 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n+1} = 0$, 否则 $x_p(t)$ 同时为 $\dot{x} = A(t)x$ 及 $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ 的解, 这是不可能的, 因为 $f(t)$ 不恒为零. 由此得

$$\alpha_1 x_1(t) + \cdots + \alpha_n x_n(t) \equiv 0,$$

由于 $x_1(t), \cdots, x_n(t)$ 是齐次线性方程组 $\dot{x} = A(t)x$ 的一个基本解组, 因此必有 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, 故必有 $\alpha_{n+1} = 0$. 这样我们就证明了 $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ 存在 $n+1$ 个线性无关的解.

下面证明它至多存在 $n+1$ 个线性无关的解. 若不然, 设该方程组存在 m 个线性无关的解 $z_1(t), \cdots, z_m(t)$, 其中 $m \geq n+2$. 则 $w_1(t) := z_1(t) - z_m(t), \cdots, w_{m-1}(t) := z_{m-1}(t) - z_m(t)$ 为齐次线性方程组 $\dot{x} = A(t)x$ 的 $m-1$ 个解. 下面证明 $w_1(t), \cdots, w_{m-1}(t)$ 线性无关. 事实上, 若有常数 $\beta_1, \cdots, \beta_{m-1}$ 使得

$$\beta_1 w_1(t) + \cdots + \beta_{m-1} w_{m-1}(t) \equiv 0, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

即在区间 $[\alpha, \beta]$ 上,

$$\sum_{k=1}^{m-1} \beta_k z_k(t) - (\beta_1 + \cdots + \beta_{m-1}) z_m(t) \equiv 0,$$

由于 $z_1(t), \cdots, z_m(t)$ 线性无关, 故必有 $\beta_1 = \cdots = \beta_{m-1} = 0$. 因此齐次线性方程组 $\dot{x} = A(t)x$ 有 $m-1 \geq n+1$ 个线性无关的解, 但这是错误的.

综上所述, 非齐次线性方程组 $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ 至多存在 $n+1$ 个线性无关的解. \square

B 设 $n \times n$ 矩阵函数 $A(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, n 维向量函数 $f(t, x)$ 在区域 $\alpha \leq t \leq \beta, \|x\| < \infty$ 上连续. 证明初值问题

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

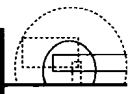
等价于求解积分方程

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(\tau)f(\tau, x(\tau))d\tau,$$

其中 $t, t_0 \in [\alpha, \beta]$, $X(t)$ 是相应齐次线性方程组的基解矩阵.

证明: 设 $x(t)$ 为所给积分方程的解, 则易证 $x(t)$ 可微且

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dX(t)}{dt}X^{-1}(t_0)x_0 + X(t)X^{-1}(t)f(t, x(t)) + \int_{t_0}^t \frac{dX(t)}{dt}X^{-1}(\tau)f(\tau, x(\tau))d\tau \\ &= A(t)X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + f(t, x(t)) + A(t) \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(\tau)f(\tau, x(\tau))d\tau \\ &= A(t)x(t) + f(t, x(t)), \end{aligned}$$



故 $x(t)$ 也为所给微分方程的解. 同时易见 $x(t_0) = x_0$, 故 $x(t)$ 为所给初值问题的解.

反之, 设 $x(t)$ 为所给初值问题的解, 则有

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + g(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

其中 $g(t) = f(t, x(t))$ 为已知函数. 由常数变易公式得

$$\begin{aligned} x(t) &= X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(\tau)g(\tau)d\tau \\ &= X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(\tau)f(\tau, x(\tau))d\tau, \end{aligned}$$

故 $x(t)$ 也为所给积分方程的解. \square

习 题 3.4

1. 证明若 $x_s(t) (s=1, 2, \dots, m)$ 分别是方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n(t)x = f_s(t), \quad s=1, \dots, m$$

的解, 则

$$x(t) = \sum_{s=1}^m C_s x_s(t)$$

是方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n(t)x = \sum_{s=1}^m C_s f_s(t)$$

的解, 其中 C_1, \dots, C_m 为常数.

证明: 易见对任何正整数 k 都有

$$\frac{d^k x}{dt^k} = \sum_{s=1}^m C_s \frac{d^k x_s}{dt^k},$$

因此

$$\begin{aligned} &\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n(t)x \\ &= \sum_{s=1}^m C_s \left(\frac{d^n x_s}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x_s}{dt^{n-1}} + \dots + a_n(t)x_s \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{s=1}^m C_s f_s(t),$$

故结论成立. \square

2. 设 $x(t)$ 是线性微分方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_2(t)x = 0$$

的非零解, 试证当 $x(t_0) = 0$ 时, $x'(t_0) \neq 0$.

证明: 用反证法. 若 $x'(t_0) = 0$, 则 $x(t)$ 是初值问题

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_2(t)x = 0, \quad x(t_0) = x'(t_0) = 0$$

的解. 显然这个初值问题有零解 $\bar{x}(t) \equiv 0$, 因此由解的存在唯一性定理知必有 $x(t) \equiv 0$, 这与 $x(t)$ 是非零解矛盾. 故当 $x(t_0) = 0$ 时, $x'(t_0) \neq 0$. \square

3. 验证 $x = \frac{1}{t} \sin t$ 是方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2}{t} \frac{dx}{dt} + x = 0$$

的解, 并求该方程的通解.

解: 直接求导容易验证 $x = \frac{1}{t} \sin t$ 是原方程的解. 由配套教材中例 3.2 的结果知其通解为

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\sin t}{t} \left(C_1 - C_2 \int \frac{t^2}{\sin^2 t} e^{-2 \int t^{-1} dt} dt \right) \\ &= \frac{1}{t} (C_1 \sin t + C_2 \cos t), \end{aligned}$$

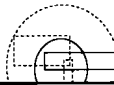
其中 C_1, C_2 为任意常数.

4. 不用 Liouville 公式而直接用变量代换 $x = x_1(t)y$ 来对方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_2(t)x = 0$$

降阶并证明其通解表达式.

解: 令 $x = \phi(t)y$, 其中 $\phi(t) = x_1(t)$, 则有



$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{d\phi}{dt}y + \phi \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2\phi}{dt^2}y + 2 \frac{d\phi}{dt} \frac{dy}{dt} + \phi \frac{d^2y}{dt^2},\end{aligned}$$

代入原方程得

$$\phi \frac{d^2y}{dt^2} + \left(2 \frac{d\phi}{dt} + a_1(t)\phi\right) \frac{dy}{dt} + \left(\frac{d^2\phi}{dt^2} + a_1(t) \frac{d\phi}{dt} + a_2(t)\phi\right)y = 0.$$

由假设知

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + a_1(t) \frac{d\phi}{dt} + a_2(t)\phi = 0,$$

故新的未知函数 $y(t)$ 满足方程

$$\phi \frac{d^2y}{dt^2} + \left(2 \frac{d\phi}{dt} + a_1(t)\phi\right) \frac{dy}{dt} = 0.$$

令 $z = \frac{dy}{dt}$, 则有

$$\phi \frac{dz}{dt} + \left(2 \frac{d\phi}{dt} + a_1(t)\phi\right)z = 0.$$

容易求出其一个特解为

$$z = \frac{1}{\phi^2(t)} e^{-\int a_1(t) dt} = \frac{1}{x_1^2(t)} e^{-\int a_1(t) dt}$$

因此得相应的未知函数 $y(t)$:

$$y = \int \frac{1}{x_1^2(t)} e^{-\int a_1(t) dt} dt.$$

故

$$x_2(t) = x_1(t) \int \frac{1}{x_1^2(t)} e^{-\int a_1(t) dt} dt$$

为所给二阶线性微分方程的一个特解. 容易验证 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 线性无关, 从而为所给二阶线性微分方程的一个基本解组, 因此其通解为

$$x(t) = x_1(t) \left(C_1 + C_2 \int \frac{1}{x_1^2(t)} e^{-\int a_1(t) dt} dt \right),$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

5. 设 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 是二阶线性微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_2(t)x = f(t)$$

对应的齐次方程的两个线性无关的特解, 其中 $a_1(t)$ 和 $a_2(t)$ 是区间 $\alpha \leq t \leq \beta$ 上的连续函数, 证明所给方程在区间 $\alpha \leq t \leq \beta$ 上的通解为

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \int_{t_0}^t \frac{x_1(\tau)x_2(t) - x_1(t)x_2(\tau)}{x_1(\tau)x_2'(\tau) - x_1'(\tau)x_2(\tau)} f(\tau) d\tau,$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

证明: 解组 $\{x_1(t), x_2(t)\}$ 是对应的齐次方程的基本解组, 其 Wronski 行列式为

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t).$$

又 $W(t)$ 中第 2 行第 1 列和第 2 列元素的代数余子式 $W_1(t), W_2(t)$ 分别为 $W_1(t) = -x_2(t), W_2(t) = x_1(t)$. 故由常数变易公式知所给二阶线性微分方程有特解

$$x_p(t) = \int_{t_0}^t \frac{x_1(\tau)x_2(t) - x_1(t)x_2(\tau)}{x_1(\tau)x_2'(\tau) - x_1'(\tau)x_2(\tau)} f(\tau) d\tau,$$

因此所给通解公式成立. \square

6. 求方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = t \sin 2t$$

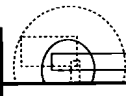
的通解. 已知其对应的齐次线性方程有基本解组 $\cos 2t, \sin 2t$.

解: 容易求出其对应的齐次线性方程的基本解组 $\cos 2t, \sin 2t$ 的 Wronski 行列式 $W(t) = 2$, $W(t)$ 中第 2 行第 1 列及第 2 列元素的代数余子式 $W_1(t), W_2(t)$ 分别为 $W_1(t) = -\sin 2t, W_2(t) = \cos 2t$. 因此由常数变易公式知原方程有特解

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t (\sin 2t \cos 2\tau - \cos 2t \sin 2\tau) \tau \sin 2\tau d\tau \\ &= -\frac{t^2}{8} \cos 2t + \frac{t}{16} \sin 2t. \end{aligned}$$

故原方程的通解为

$$x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - \frac{t^2}{8} \cos 2t + \frac{t}{16} \sin 2t,$$



其中 C_1, C_2 为任意常数.

习 题 3.5

1. 求 Airy 方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - tx = 0, \quad -\infty < t < \infty$$

在 $t=0$ 处展开的幂级数解.

解: 显然 Airy 方程在 $t=0$ 处有形如

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j, \quad -\infty < t < \infty$$

的幂级数解. 对上式逐项微分得

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)c_{j+1}t^j, \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(j+2)c_{j+2}t^j, \end{aligned}$$

把它们代入 Airy 方程得

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(j+2)c_{j+2}t^j = \sum_{j=1}^{\infty} c_{j-1}t^j.$$

比较系数得

$$2c_2 = 0, \quad (j+1)(j+2)c_{j+2} = c_{j-1}, \quad j=1, 2, \dots$$

由此可推出

$$c_2 = c_5 = \dots = a_{3n+2} = \dots = 0,$$

$$c_{3n} = \frac{c_0}{(3n) \cdot (3n-1) \cdot (3n-3) \cdot (3n-4) \cdot \dots \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2},$$

$$c_{3n+1} = \frac{c_1}{(3n+1) \cdot (3n) \cdot (3n-2) \cdot (3n-3) \cdot \dots \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}.$$

因此 Airy 方程在 $t=0$ 附近的幂级数解为

$$x = c_1[1 + A(t)] + c_2[t + B(t)],$$

其中 c_1, c_2 为任意常数, 并且

$$A(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{3n}}{(3n) \cdot (3n-1) \cdot (3n-3) \cdot (3n-4) \cdot \dots \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2},$$

$$B(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{3n+1}}{(3n+1) \cdot (3n) \cdot (3n-2) \cdot (3n-3) \cdot \cdots \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}$$

易证该幂级数解对任何 t 都收敛且为 Airy 方程的通解.

2. 用幂级数法求方程

$$(t^2 - 2t) \frac{d^2 x}{dt^2} + 5(t-1) \frac{dx}{dt} + 3x = 0$$

满足初值条件 $x(1)=7$, $x'(1)=3$ 的解.

解: 由于给的是 $t=1$ 时的初始条件, 我们要把该方程的系数表示为关于 $t-1$ 的多项式, 进而把 $x(t)$ 展成 $t-1$ 的幂级数. 因此我们把原方程改写为

$$\{(t-1)^2 - 1\} \frac{d^2 x}{dt^2} + 5(t-1) \frac{dx}{dt} + 3x = 0.$$

令

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (t-1)^j,$$

代入上面的方程得到

$$\{(t-1)^2 - 1\} \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)c_j (t-1)^{j-2} + 5(t-1) \sum_{j=1}^{\infty} j c_j (t-1)^{j-1} + 3 \sum_{j=0}^{\infty} c_j (t-1)^j = 0.$$

合并同类项得

$$\sum_{j=0}^{\infty} M_j (t-1)^j = 0,$$

其中 $M_j = -(j+2)(j+1)c_{j+2} + (j^2 + 4j + 3)c_j$, 比较系数可得递推公式

$$c_{j+2} = \frac{j+3}{j+2} c_j, \quad j=0, 1, \cdots$$

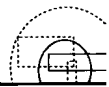
由初始条件 $x(1)=7$, $x'(1)=3$ 可得 $c_0=7$, $c_1=3$. 故

$$c_{2j} = \frac{3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2j+1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2j)} \cdot 7,$$

$$c_{2j+1} = \frac{4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2j+2)}{3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2j+1)} \cdot 3,$$

其中 $j=1, 2, \cdots$. 从而原方程的解为

$$x(t) = 7 + 3t + 7 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2j+1)(t-1)^{2j}}{2^j j!} + 3 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^j (j+1)! (t-1)^{2j+1}}{3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2j+1)}.$$



3. 求解 Hermite 方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2t \frac{dx}{dt} + \lambda x = 0, \quad -\infty < t < \infty,$$

其中 λ 为常数. 证明当 $\lambda = 2n$ 时, 该方程有次数为 n 的多项式解.

解: 显然 Hermite 方程在 $t=0$ 处有形如

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j, \quad -\infty < t < \infty$$

的幂级数解. 对上式逐项微分得

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)c_{j+1} t^j,$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(j+2)c_{j+2} t^j,$$

把它们代入 Hermite 方程得

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(j+2)c_{j+2} t^j - \sum_{j=1}^{\infty} 2j c_j t^j + \sum_{j=0}^{\infty} \lambda c_j t^j = 0.$$

比较系数可得递推公式

$$c_{j+2} = \frac{2j-\lambda}{(j+1)(j+2)} c_j, \quad j=0, 1, 2, \dots$$

故

$$c_2 = -\frac{\lambda}{2!} c_0,$$

$$c_4 = -\frac{\lambda(4-\lambda)}{4!} c_0,$$

$$c_6 = -\frac{\lambda(4-\lambda)(8-\lambda)}{6!} c_0,$$

$$c_3 = \frac{(2-\lambda)}{3!} c_1,$$

$$c_5 = \frac{(2-\lambda)(6-\lambda)}{5!} c_1,$$

$$c_7 = -\frac{(2-\lambda)(6-\lambda)(10-\lambda)}{7!} c_1.$$

因此 Hermite 方程在 $t=0$ 附近的幂级数解为

$$x = C_1 H_1(t) + C_2 H_2(t),$$

其中 C_1, C_2 为任意常数, 并且

$$H_1(t) = 1 - \frac{\lambda t^2}{2!} - \frac{\lambda(4-\lambda)t^4}{4!} - \frac{\lambda(4-\lambda)(8-\lambda)t^6}{6!} + \dots$$

$$H_2(t) = t + \frac{(2-\lambda)t^3}{3!} + \frac{(2-\lambda)(6-\lambda)t^5}{5!} - \frac{(2-\lambda)(6-\lambda)(10-\lambda)t^7}{7!} + \dots$$

当 $\lambda = 2n$ 时, 由上面得到的幂级数解系数的递推关系易知 $c_{n+2} = 0$, 进一步地有 $c_{n+4} = c_{n+6} = \dots = c_{n+2k} = \dots = 0$. 因此当 n 为奇数时, $H_2(t)$ 为 n 次多项式, Hermite 方程有次数为 n 的多项式解 $x = H_2(t)$; 当 n 为偶数时, $H_1(t)$ 为 n 次多项式, Hermite 方程有次数为 n 的多项式解 $x = H_1(t)$.

4. 设复值向量函数 $z(t) = x(t) + iy(t)$ 是线性微分方程组

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f_R(t) + if_I(t)$$

的复值解, 其中 $A(t), f_R(t)$ 和 $f_I(t)$ 都是实的. 试证 $z(t)$ 的实部 $x(t)$ 和虚部 $y(t)$ 分别是方程组

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f_R(t)$$

和

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f_I(t)$$

的解.

证明: 将 $z(t) = x(t) + iy(t)$ 代入它所满足的方程组得

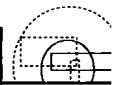
$$\frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt} = A(t)(x + iy) + f_R(t) + if_I(t),$$

比较上式两边的实部和虚部即知所给结论成立. \square

5. 设复值向量函数 $z(t) = x(t) + iy(t)$ 是线性微分方程组

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t)$$

的解, 其中 A 和 f 都是实的. 试证 $x(t)$ 也是该方程组的解, 而 $y(t)$ 是对应的齐次线性微分方程组



$$\frac{dz}{dt} = A(t)z$$

的解.

证明: 将 $z(t) = x(t) + iy(t)$ 代入它所满足的方程组得

$$\frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt} = A(t)(x + iy) + f(t),$$

比较上式两边的实部和虚部即知所给结论成立. \square

第四章 常系数线性方程

在第三章我们讨论了线性方程和方程组的解的一般理论，关于线性方程和方程组的通解结构问题，可以说从理论上已经完全解决了。但是从实际应用而言，这是不够的，因为我们还没有给出具体的求解方法。事实上，对于一般的线性方程和方程组，并没有普遍适用的求解方法，但对于其中一类特殊形式的线性方程和方程组，即常系数线性方程和方程组，这样的普遍适用的求解方法却是存在的。在本章我们将学习这一方法，从而彻底解决常系数线性方程和方程组的求解问题。

本章所提供的方法无论从实际应用还是理论研究来看都是很重要的，它和第三章关于线性方程和方程组的解的理论是我们进一步研究非线性问题的起点，也是深入学习常微分方程理论和其他相关课程(如偏微分方程)的必不可少的基础知识。

4.1 主要内容

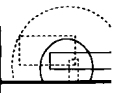
本章的主要任务是常系数线性方程和方程组的求解，读者应特别领会求解齐次常系数线性方程和方程组的实质是采用经典的 **Euler 待定指数函数法**，将其转化为代数问题，而不必进行积分运算。这就要求读者要具有良好的线性代数基础，特别是齐次常系数线性方程组的基本解矩阵的计算，是本章的一大重点和难点，要求读者掌握好矩阵的特征根和 Jordan 标准型理论。对于某些特殊形式的非齐次常系数线性方程，我们也可以仅通过算子解法等将其转化为简单的代数运算和微积分运算，而不必通过常数变易公式获得通解，从而避免复杂的计算。

1. 齐次常系数线性方程的通解

引入算子记号： $D = \frac{d}{dt}$ ，一般的 n 阶常系数线性微分方程可表示为算子形式

$$P(D)x = f(t), \quad (4.1)$$

其中 $P(D) := D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$ 是关于 D 的一个 n 次多项式，系数 a_1, a_2, \cdots, a_n 都是常数。我们采用 Euler 待定指数函数法考察其对应的齐次方程



$$P(D)x=0 \quad (4.2)$$

的解, 即寻求方程(4.2)形如 $x(t)=e^{\lambda t}$ 的解, 其中 λ 为待定指数, 就得到如下的特征方程

$$P(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0. \quad (4.3)$$

从而将微分方程(4.2)的求解转化为代数方程(4.3)的求解, 即特征根的计算. 下面的两个定理针对特征根的不同情况给出了方程(4.2)的基本解组:

定理 4.1 设方程(4.3)有 n 个互异的根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 则齐次方程(4.2)有基本解组 $e^{\lambda_1 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}$.

定理 4.2 设方程(4.3)只有 r 个互异的根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$, 它们分别有重数 n_1, \cdots, n_r (自然有 $n_1+\cdots+n_r=n$), 则

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 t}, & t e^{\lambda_1 t}, & \cdots, & t^{n_1-1} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_r t}, & t e^{\lambda_r t}, & \cdots, & t^{n_r-1} e^{\lambda_r t} \end{array}$$

构成齐次方程(4.2)的基本解组.

对实系数的方程(4.2), 当其特征根有复数时可由下面的推论获得其实数解:

推论 4.1 若实系数齐次线性方程(4.2)有 r 个互异的实特征根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 及 l 对互异的复特征根 $\alpha_1 \pm i\beta_1, \cdots, \alpha_l \pm i\beta_l$, 重数分别为 n_1, \cdots, n_r 和 m_1, \cdots, m_l , 并且满足

$$e^{\lambda_k t}$$

$$\sum_{k=1}^r n_k + 2 \sum_{k=1}^l m_k = n,$$

则方程(4.2)有如下实解并组成基本解组

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_k t}, & t e^{\lambda_k t}, & \cdots, & t^{n_k-1} e^{\lambda_k t}, & (k=1, \cdots, r), \\ e^{\alpha_j t} \cos \beta_j t, & t e^{\alpha_j t} \cos \beta_j t, & \cdots, & t^{m_j-1} e^{\alpha_j t} \cos \beta_j t, & (j=1, \cdots, l), \\ e^{\alpha_j t} \sin \beta_j t, & t e^{\alpha_j t} \sin \beta_j t, & \cdots, & t^{m_j-1} e^{\alpha_j t} \sin \beta_j t, & (j=1, \cdots, l). \end{array}$$

定理 4.1, 定理 4.2 及推论 4.1 彻底解决了方程(4.2)的通解计算问题.

2. 非齐次常系数线性方程的特解

由第三章线性方程的解的理论, 对非齐次方程(4.1), 在获得其对应的齐次方程(4.2)的通解后, 只要找到它的一个特解, 就能写出其通解. 原则上这可以通过常数变易公式获得, 但是其计算往往是相当复杂的. 事实上, 当非齐次项 $f(t)$ 为某几类特殊

而常见的函数类型时，我们有更简便的方法，即算子解法。

算子解法的思想是把方程(4.1)中 $P(D)$ 的逆算子形式地记为 $\frac{1}{P(D)}$ ，则需要求

$$x(t) = \frac{1}{P(D)} f(t). \quad (4.4)$$

这里 $\frac{1}{P(D)}$ 不同于一般的逆算子，因为它的结果不唯一。这种不唯一性并不影响我们的计算，由于只需要任意一个特解，因此我们每次计算都选择方便简单的一个答案。利用算子解法求解过程中的大部分等号都是在这种意义下成立的。

算子 $\frac{1}{P(D)}$ 具有下列基本性质：

性质 1 $\frac{1}{D^n} f(t) = \int \cdots \int f(\tau) (d\tau)^n$ ，即 n 次累积分。

性质 2 $\frac{1}{P(D)}$ 的作用是线性的，即

$$\frac{1}{P(D)} \{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\} = \alpha \frac{1}{P(D)} f_1(t) + \beta \frac{1}{P(D)} f_2(t).$$

性质 3 如果 $P(D) = P_1(D)P_2(D)$ ，则

$$\frac{1}{P(D)} = \frac{1}{P_1(D)} \cdot \frac{1}{P_2(D)} = \frac{1}{P_2(D)} \cdot \frac{1}{P_1(D)}.$$

进一步还有以下重要的计算公式，只要我们灵活运用这些公式，就能方便的求出某些常见的含有某几类特殊非齐次项 $f(t)$ 的非齐次方程(4.1)的一个特解：

定理 4.3 (i) **解析展开法或解析相除法**：对 k 次多项式 $f_k(t)$ ，如果 $\frac{1}{P(x)}$ 在 $x=0$ 处解析而且可以展开成

$$\frac{1}{P(x)} = Q_k(x) + H_k(x),$$

其中 $Q_k(x)$ 是 k 次多项式而 $H_k(x)$ 为 $k+1$ 次以上的所有高次项，则

$$\frac{1}{P(D)} f_k(t) = Q_k(D) f_k(t).$$

(ii) **代换法**：如果 $P(\lambda) \neq 0$ ，那么 $\frac{1}{P(D)} e^{\lambda t} = \frac{1}{P(\lambda)} e^{\lambda t}$ 。

(iii) 二项式法: $\frac{1}{P(D)}e^{\lambda}v(t) = e^{\lambda}\frac{1}{P(D+\lambda)}v(t)$.

定理 4.3 的某些特殊情况在实际问题中经常碰到:

(1) 解析展开法的一个最直接和最常用的实例是

$$\frac{1}{1-D}f_k(t) = (1+D+D^2+\cdots+D^k)f_k(t).$$

(2) 当 $P(-a^2) \neq 0$ 时, 从代换法可得:

$$\frac{1}{P(D^2)}\begin{Bmatrix} \cos at \\ \sin at \end{Bmatrix} = \frac{1}{P(-a^2)}\begin{Bmatrix} \cos at \\ \sin at \end{Bmatrix}.$$

(3) 当 $P(\lambda) = 0$ 时不能使用代换法, 但可以使用二项式法:

$$\frac{1}{P(D)}e^{\lambda} = e^{\lambda}\frac{1}{P(D+\lambda)}1.$$

当非齐次项 $f(t)$ 为某几类特殊函数时, 除了可用算子解法求其特解外, 还有比较系数法和 Laplace 变换法等简便的方法. 这里简单介绍一下比较系数法, 这一方法不难由定理 4.3 推出. 关于 Laplace 变换法, 有兴趣的读者可查阅相关的参考文献.

比较系数法主要针对如下两种类型的非齐次项 $f(t)$:

类型 A. $f(t) = (b_0t^k + b_1t^{k-1} + \cdots + b_{k-1}t + b_k)e^{\lambda}$, 其中 b_0, b_1, \cdots, b_k 都是常数, λ 为特征方程(4.3)的 m 重特征根, 特别地, 若 $P(\lambda) \neq 0$, 则 $m=0$. 这时方程(4.1)有如下形式的特解

$$x_*(t) = t^m(c_0t^k + c_1t^{k-1} + \cdots + c_{k-1}t + c_k)e^{\lambda},$$

其中 c_0, c_1, \cdots, c_k 为待定常数, 可通过将 $x_*(t)$ 代入方程(4.1)并比较系数来求出.

类型 B. $f(t) = [p_k(t) \cos \beta t + q_k(t) \sin \beta t]e^{\alpha}$, 其中 $p_k(t), q_k(t)$ 都是多项式, $\max(\deg p_k(t), \deg q_k(t)) = k$, $\alpha + \beta i$ 为特征方程(4.3)的 m 重特征根, 特别地, 若 $P(\alpha + \beta i) \neq 0$, 则 $m=0$. 这时方程(4.1)有如下形式的特解

$$x_*(t) = t^m[A_k(t) \cos \beta t + B_k(t) \sin \beta t]e^{\alpha},$$

其中 $A_k(t), B_k(t)$ 都是多项式, $\max(\deg A_k(t), \deg B_k(t)) \leq k$, 可通过将 $x_*(t)$ 代入方程(4.1)并比较系数来求出. 要注意, 即使 $p_k(t), q_k(t)$ 中有一个恒为零, $A_k(t), B_k(t)$ 也有可能全不为零.

3. 常系数齐次线性方程组的基本解矩阵

对于线性方程组, 只要得到了其相应的齐次线性方程组的基本解矩阵, 就可以用

常数变易公式给出它的通解. 因此本章主要讨论常系数齐次线性方程组的基本解矩阵的计算方法.

简记列向量 $\mathbf{x} = (x_1 \cdots x_n)^T$ 和 $n \times n$ 阶矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})$, 对常系数齐次线性方程组

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (4.5)$$

同样用 Euler 指数函数法, 设(4.5)有形如 $\mathbf{x} = \mathbf{c}e^{\lambda t}$ 的特解, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和非零向量 $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{C}^n$ 待定. 将 $\mathbf{x} = \mathbf{c}e^{\lambda t}$ 代入(4.5)得 $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{c} = \mathbf{0}$. 从而把问题转变成求 \mathbf{A} 的特征值 λ 和相应的特征向量 \mathbf{c} . 最简单的情况是特征方程的根均为单根, 这时(4.5)的基本解组可由下面的定理求得:

定理 4.4 如果矩阵 \mathbf{A} 有 n 个彼此互异的特征根 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 则方程组(4.5)有基本解组 $\mathbf{c}^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \dots, \mathbf{c}^{(n)} e^{\lambda_n t}$, 其中 $\mathbf{c}^{(1)}, \dots, \mathbf{c}^{(n)}$ 是分别相应于 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 的特征向量.

当特征方程的根有多重根时, 方程组(4.5)的基本解组的计算是很复杂的, 为此我们要引入矩阵 \mathbf{A} 的指数函数这一重要概念, 它定义为矩阵项无穷级数

$$e^{\mathbf{A}} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!},$$

是一般指数函数的推广. 利用矩阵指数函数, 常系数线性方程组的解的结构可以表述为:

定理 4.5 (i) 齐次线性方程组(4.5)有基本解矩阵 $\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}$. 我们称之为方程组(4.5)的标准解矩阵, 因为它满足 $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$.

(ii) 非齐次线性方程组 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$ (其中 $\mathbf{f}(t)$ 是 n 维向量值函数)的通解为

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{c} + \int_{t_0}^t e^{(t-s)\mathbf{A}} \mathbf{f}(s) ds,$$

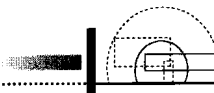
其中 \mathbf{c} 为任意常向量.

由定义可知标准解矩阵 $e^{\mathbf{A}t}$ 是一个无穷和形式. 我们的目的是寻求它的一个初等函数的有限和的等价表达式. 由线性代数知识, 存在一个可逆阵 \mathbf{P} 使 \mathbf{A} 相似于 Jordan 型矩阵

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{J} = \text{diag}(\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_s)_{n \times n}$$

其中 \mathbf{J}_i 为 n_i 阶 Jordan 块, 即

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}, \quad (i=1, 2, \dots, s)$$



且 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ 为 A 的特征根, $n_1 + \dots + n_s = n$. 显然有 $e^{At}P = Pe^{Jt}$, 而 $e^{At}P$ 也是 (4.5) 的一个基本解矩阵. 因此, 只需等价地计算矩阵 Pe^{Jt} 的每个列向量的表达式. 它可以表述为

$$Pe^{Jt} = (P_1 e^{J_1 t}, \dots, P_s e^{J_s t}), \quad (4.6)$$

其中 $P_i = (p_{i1}, \dots, p_{in_i})$ 为 P 的 $n \times n_i$ 子阵, 由 n_i 个列向量构成. $P_i e^{J_i t}$ 的每个列向量形如

$$x(t) = e^{\lambda_i t} \left[c_0 + \frac{t}{1!} c_1 + \dots + \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} c_{n_i-1} \right], \quad (4.7)$$

其中 c_0, \dots, c_{n_i-1} 待定. 这就是基本解组的“有限和”表述. 借助于如下的线性代数知识, 即可确定待定系数 c_0, \dots, c_{n_i-1} :

引理 4.1 设 A 有互异的特征根 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, 重数分别为 n_1, \dots, n_s 且 $n_1 + \dots + n_s = n$. 则 $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$, 其中

$$V_i = \{c \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda_i I)^{n_i} c = 0\}$$

为 n_i 维线性子空间, 它在 A 的作用下不变.

引理 4.2 (待定系数 c_i 的确定) 设 λ_i 为 A 的 n_i 重特征根, 则 (4.7) 表述的函数 $x(t)$ 是齐次线性方程组 (4.5) 的非零解, 当且仅当 c_0, \dots, c_{n_i-1} 满足

$$\begin{cases} (A - \lambda_i I)^{n_i} c_0 = 0, & c_0 \neq 0, \\ c_1 = (A - \lambda_i I) c_0, \\ c_2 = (A - \lambda_i I) c_1, \\ \vdots \\ c_{n_i-1} = (A - \lambda_i I) c_{n_i-2}. \end{cases} \quad (4.8)$$

由此得到如下齐次线性方程组 (4.5) 的基本解组的计算方法:

定理 4.6 假设 $n \times n$ 阶矩阵 A 有互不相同的特征根 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, 重数为 n_1, \dots, n_s 且 $n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$. 则齐次线性方程组 (4.5) 有基本解组

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_1 t} P_1^{(1)}(t), \quad \dots, \quad e^{\lambda_1 t} P_{n_1}^{(1)}(t), \\ & e^{\lambda_2 t} P_1^{(2)}(t), \quad \dots, \quad e^{\lambda_2 t} P_{n_2}^{(2)}(t), \\ & \dots \quad \dots \quad \dots \\ & e^{\lambda_s t} P_1^{(s)}(t), \quad \dots, \quad e^{\lambda_s t} P_{n_s}^{(s)}(t), \end{aligned} \quad (4.9)$$

这里

$$P_j^{(i)}(t) = c_{j0}^{(i)} + \frac{t}{1!} c_{j1}^{(i)} + \cdots + \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} c_{j(n_i-1)}^{(i)} \quad (4.10)$$

是相应于 λ_i 的某个向量多项式, 共有 n_i 个 ($j=1, \dots, n_i$), 其中

(i) 零次项向量 $c_{10}^{(i)}, \dots, c_{n_i 0}^{(i)}$ 为(4.8)第一个方程的 n_i 个线性无关解, 亦即引理 4.1 中不变子空间 V_i 的一组基向量,

(ii) 向量多项式(4.10)中的系数向量 $c_{j1}^{(i)}, \dots, c_{j(n_i-1)}^{(i)}$ 由零次项向量 $c_{j0}^{(i)}$ 和引理 4.2 的递推公式(4.8)确定.

定理 4.6 是一个极其重要的结果, 它表明, 在引理 4.1 的分解中 V_i 有 n_i 个基向量, 每个基向量确定一个向量多项式 $P_j^{(i)}(t)$. 当 A 是实矩阵时, 可取实部和虚部来给出实的基本解组.

4.2 典型例题

例 4.1 求齐次线性方程

$$\frac{d^5 x}{dt^5} + 4 \frac{d^4 x}{dt^4} + 2 \frac{d^3 x}{dt^3} - 4 \frac{d^2 x}{dt^2} + 8 \frac{dx}{dt} + 16x = 0$$

的实通解.

解: 该方程的特征多项式为

$$\lambda^5 + 4\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 8\lambda + 16 = (\lambda + 2)^3(\lambda^2 - 2\lambda + 2),$$

求得特征根为 -2 (三重根), $1+i$, $1-i$. 由推论 4.1 得到实基本解组 e^{-2t} , te^{-2t} , t^2e^{-2t} , $e^t \cos t$, $e^t \sin t$. 因此方程的实通解为

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} + C_3 t^2 e^{-2t} + C_4 e^t \cos t + C_5 e^t \sin t,$$

其中 C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 为任意常数.

例 4.2 求齐次线性方程

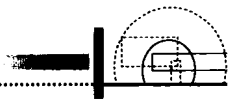
$$\frac{d^3 x}{dt^3} + 3 \frac{d^2 x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + x = e^{-t}(t+1)$$

的实通解.

解: 将方程表示成算子形式为

$$(D^3 + 3D^2 + 3D + 1)x = e^{-t}(t+1).$$

该方程对应的齐次线性方程的特征多项式为 $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$, 因此特征根为三重根



$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. 故原方程对应的齐次线性方程有实基本解组 e^{-t} , te^{-t} , t^2e^{-t} .

下面我们分别用算子解法和比较系数法求它的一个特解, 读者可进行比较.

解法一: 算子解法 由二项式法, 方程有特解

$$\begin{aligned} x_s(t) &= \frac{1}{(D+1)^3} \cdot e^{-t}(t+1) = e^{-t} \frac{1}{((D-1)+1)^3} \cdot (t+1) \\ &= e^{-t} \frac{1}{D^3} \cdot (t+1) \\ &= e^{-t} \iiint (t+1)(dt)^3 \\ &= \frac{1}{24} t^3 (t+4) e^{-t}. \end{aligned}$$

由此得原方程的实通解

$$x(t) = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2) e^{-t} + \frac{1}{24} t^3 (t+4) e^{-t},$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

解法二: 比较系数法 由比较系数法知方程有形如 $x_s(t) = t^3(c_0 + c_1 t)e^{-t}$ 特解, 其中 c_0, c_1 为待定常数, 将其代入方程得

$$(6c_0 + 24c_1 t)e^{-t} = e^{-t}(t+1).$$

比较系数得 $c_0 = \frac{1}{6}$, $c_1 = \frac{1}{24}$, 从而我们同样得原方程的实通解

$$x(t) = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2) e^{-t} + \frac{1}{24} t^3 (t+4) e^{-t}.$$

例 4.3 求解方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = x + y. \end{cases}$$

解: 该方程组的系数矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

它有单特征根 $\lambda_1 = 2$ 和二重特征根 $\lambda_2 = -1$. 对 $\lambda_1 = 2$, 其对应的特征向量为 $\mathbf{c}_1 = (1, 1, 1)^T$.

对 $\lambda_2 = -1$ 求 $(A - \lambda_2 I)^2 c = 0$ 的非平凡解, 即求解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} c = 0.$$

得到两个线性无关的解 $c_{20} = (1, 0, -1)^T$ 和 $c_{30} = (0, 1, -1)^T$. 由此递推得

$$c_{21} = (A - \lambda_2 I)c_{20} = (0, 0, 0)^T,$$

$$c_{31} = (A - \lambda_2 I)c_{30} = (0, 0, 0)^T.$$

最后得到基本解矩阵

$$\begin{aligned} X(t) &= (c_1 e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t} (c_{20} + \frac{t}{1!} c_{21}), e^{\lambda_2 t} (c_{30} + \frac{t}{1!} c_{31})) \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \\ e^{2t} & -e^{-t} & -e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由此得原方程组的通解为

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} \\ y = C_1 e^{2t} + C_3 e^{-t} \\ z = C_1 e^{2t} - (C_2 + C_3) e^{-t}, \end{cases}$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

4.3 习题与解答

习 题 4.1

1. 求齐次线性方程的实通解:

$$(1) \frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = 0.$$

$$(2) \frac{d^3 x}{dt^3} - \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} - 2x = 0.$$

$$(3) \frac{d^4 x}{dt^4} + 4x = 0.$$

$$(4) \frac{d^4 x}{dt^4} - 2 \frac{d^3 x}{dt^3} + 2 \frac{dx}{dt} - x = 0.$$

$$(5) \frac{d^2 x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 4x = 0.$$

$$(6) \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 4x = 0.$$

$$(7) \frac{d^3 x}{dt^3} + 4 \frac{dx}{dt} = 0.$$

$$(8) \frac{d^4 x}{dt^4} + 8 \frac{d^2 x}{dt^2} + 16x = 0.$$

解：(1) 该方程的特征多项式为 $\lambda^2 + 4$ ，因此特征根为 $\pm 2i$ 。故原方程有实基本解组 $\cos 2t, \sin 2t$ 。由此得实通解

$$x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数。

(2) 该方程的特征多项式为

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2),$$

因此特征根为 $1, \pm\sqrt{2}i$ 。故原方程有实基本解组 $e^t, \cos \sqrt{2}t, \sin \sqrt{2}t$ 。由此得实通解

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 \cos \sqrt{2}t + C_3 \sin \sqrt{2}t,$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数。

(3) 该方程的特征多项式为 $\lambda^4 + 4$ ，因此特征根为 $1 \pm i, -1 \pm i$ 。故原方程有实基本解组 $e^t \cos t, e^t \sin t, e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t$ 。由此得实通解

$$x(t) = e^t (C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-t} (C_3 \cos t + C_4 \sin t),$$

其中 C_1, C_2, C_3, C_4 为任意常数。

(4) 该方程的特征多项式为

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 (\lambda + 1),$$

因此特征根为 1 (三重根), -1 。故原方程有实基本解组 $e^t, te^t, t^2 e^t, e^{-t}$ 。由此得实通解

$$x(t) = e^t (C_1 + C_2 t + C_3 t^2) + C_4 e^{-t},$$

其中 C_1, C_2, C_3, C_4 为任意常数。

(5) 该方程的特征多项式为 $\lambda^2 + 4\lambda + 4$ ，因此特征根为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ 。从而实基本解组为 e^{-2t}, te^{-2t} 。由此得实通解

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

(6) 该方程的特征方程 $\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$ 有复特征根 $\lambda_1 = -1 + \sqrt{3}i, \lambda_2 = -1 - \sqrt{3}i$. 因此实基本解组为 $e^{-t} \cos \sqrt{3}t, e^{-t} \sin \sqrt{3}t$. 从而该方程的实通解为

$$x(t) = e^{-t} (C_1 \cos \sqrt{3}t + C_2 \sin \sqrt{3}t).$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

(7) 该方程的特征多项式为

$$\lambda^3 + 4\lambda = \lambda(\lambda - 2i)(\lambda + 2i),$$

因此特征根为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2i, \lambda_3 = -2i$. 从而实通解为

$$x(t) = C_1 + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t,$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

(8) 该方程的特征多项式为

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = (\lambda^2 + 4)^2,$$

因此特征根为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2i, \lambda_3 = \lambda_4 = -2i$. 从而实通解为

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) \cos 2t + (C_3 + C_4 t) \sin 2t,$$

其中 C_1, C_2, C_3, C_4 为任意常数.

2. 设 a, b, c 为正数. 试证当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 方程

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0$$

的每一个解都趋于零.

证明: 该方程的特征方程为 $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. 令 $\Delta = b^2 - 4ac$, 可分为如下三种情况讨论:

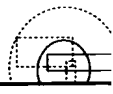
(i) 当 $\Delta > 0$ 时, 它有两个实特征根

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

因此方程的通解为 $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$. 由 a, b, c 为正数可知 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. 从而当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 解 $x(t) \rightarrow 0$.

(ii) 当 $\Delta = 0$ 时, 特征方程有实的重根 $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a}$. 此时方程的通解为 $x(t) =$

$(C_1 + C_2 t) e^{\lambda_1 t}$. 由于 $\lambda_1 < 0$, 易见当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 解 $x(t) \rightarrow 0$.



(iii) 当 $\Delta < 0$ 时, 它有两个复特征根 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, 其中

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

方程的实通解为 $x(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$. 由于 $\alpha < 0$, 故当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 仍有解 $x(t) \rightarrow 0$. 因此原方程的每一个解都趋于零. \square

3*. 分析振动方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

的特征根并给出通解. 这里 $\delta \geq 0$, $\omega > 0$.

解: 该振动方程的特征方程为 $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$, 求得特征根为 $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$. 根据 $\delta^2 - \omega^2$ 的符号可分为如下三种情况:

(i) 当 $\delta > \omega$ 时, 有二个相异实特征根 $-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$, 方程的实通解为 $x(t) = e^{-\delta t} (C_1 e^{\sqrt{\delta^2 - \omega^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega^2} t})$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

(ii) 当 $\delta = \omega$ 时, 有一个实二重特征根 $-\delta$, 方程的实通解为 $x(t) = e^{-\delta t} (C_1 + C_2 t)$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

(iii) 当 $\delta < \omega$ 时, 有一对共轭复特征根 $-\delta \pm \sqrt{\omega^2 - \delta^2} i$, 方程的实通解为

$$x(t) = e^{-\delta t} (C_1 \cos \sqrt{\omega^2 - \delta^2} t + C_2 \sin \sqrt{\omega^2 - \delta^2} t),$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

习 题 4.2

✓ 求非齐次线性方程的实通解:

(1) $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 1 + t^2.$

(2) $\frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = \cos 2t + \cos 4t.$

(3) $\frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = t \sin 2t.$

✓ (4) $\frac{d^3 x}{dt^3} - 4 \frac{d^2 x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} = t^2.$

$$(5) \frac{d^2 x}{dt^2} - 3 \frac{dx}{dt} + 2x = \sin e^{-t}.$$

$$(6) \frac{d^3 x}{dt^3} - 5 \frac{d^2 x}{dt^2} + 8 \frac{dx}{dt} - 4x = e^{3t}.$$

$$(7) \frac{d^2 x}{dt^2} - 2x = 4t^2 e^{t^2}.$$

$$(8) \frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} + x = te^t.$$

解：(1) 该方程对应的齐次线性方程的特征多项式为 $\lambda^2 + \lambda$ ，因此特征根为 0, -1. 故原方程对应的齐次线性方程有实基本解组 $1, e^{-t}$. 又原方程有特解

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{1}{D^2 + D} \cdot (1 + t^2) = \frac{1}{D+1} \frac{1}{D} \cdot (1 + t^2) \\ &= \frac{1}{D+1} \cdot \left(t + \frac{1}{3} t^3 \right) \\ &= (1 - D + D^2 - D^3) \left(t + \frac{1}{3} t^3 \right) \\ &= \frac{t^3}{3} - t^2 + 3t - 3. \end{aligned}$$

由此得原方程的实通解 $x(t) = C_1 + C_2 e^{-t} + \frac{t^3}{3} - t^2 + 3t$ ，其中 C_1, C_2 为任意常数.

(2) 该方程对应的齐次线性方程的特征多项式为 $\lambda^2 + 4$ ，因此特征根为 $\pm 2i$. 故原方程对应的齐次线性方程有实基本解组 $\cos 2t, \sin 2t$. 又原方程有特解

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{1}{D^2 + 4} \cdot (\cos 2t + \cos 4t) \\ &= \frac{1}{D^2 + 4} \cdot \cos 2t + \frac{1}{D^2 + 4} \cdot \cos 4t, \end{aligned}$$

其中

$$\frac{1}{D^2 + 4} \cdot \cos 4t = \frac{\cos 4t}{-4^2 + 4} = -\frac{1}{12} \cos 4t.$$

再考虑辅助方程 $(D^2 + 4)z = e^{2it}$ ，它有特解

$$\begin{aligned}
 z_p(t) &= \frac{1}{D^2+4} \cdot e^{2it} = e^{2it} \frac{1}{(D+2i)^2+4} \cdot 1 \\
 &= e^{2it} \frac{1}{D+4i} \frac{1}{D} \cdot 1 = \frac{e^{2it}}{4i} \left(1 - \frac{1}{4i}D\right)t \\
 &= \frac{e^{2it}}{4i} \left(t - \frac{1}{4i}\right),
 \end{aligned}$$

取实部得到

$$\frac{1}{D^2+4} \cdot \cos 2t = \frac{1}{16} \cos 2t + \frac{1}{4}t \sin 2t.$$

由此得原方程的实通解

$$x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + \frac{t}{4} \sin 2t - \frac{1}{12} \cos 4t,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

(3) 该方程对应的齐次线性方程的特征多项式为 λ^2+4 , 因此特征根为 $\pm 2i$. 故原方程对应的齐次线性方程有实基本解组 $\cos 2t, \sin 2t$. 又原方程有特解

$$z_p(t) = \frac{1}{D^2+4} \cdot t \sin 2t,$$

考虑辅助方程 $(D^2+4)z = te^{2it}$, 它有特解

$$\begin{aligned}
 z_p(t) &= \frac{1}{D^2+4} \cdot te^{2it} = e^{2it} \frac{1}{(D+2i)^2+4} \cdot t \\
 &= e^{2it} \frac{1}{D} \frac{1}{D+4i} \cdot t = \frac{e^{2it}}{4i} \frac{1}{D} \left(1 - \frac{1}{4i}D\right)t \\
 &= \frac{e^{2it}}{4i} \frac{1}{D} \left(t - \frac{1}{4i}\right) = \frac{e^{2it}}{4i} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{4i}\right),
 \end{aligned}$$

取虚部得到原方程的特解

$$x_p(t) = -\frac{1}{8}t^2 \cos 2t + \frac{1}{16}t \sin 2t.$$

由此得原方程的实通解

$$x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - \frac{1}{8}t^2 \cos 2t + \frac{1}{16}t \sin 2t,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

(4) 该方程对应的齐次线性方程的特征多项式为 $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda$, 因此特征根为 $0, 1,$

3. 故原方程对应的齐次线性方程有实基本解组 $1, e^t, e^{3t}$. 又原方程有特解

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{1}{D^3 - 4D^2 + 3D} \cdot t^2 = \frac{1}{3-D} \frac{1}{1-D} \frac{1}{D} \cdot t^2 \\ &= \frac{1}{3-D} (1+D+D^2+D^3) \left(\frac{1}{3} t^3 \right) \\ &= \frac{1}{9} \left(1 + \frac{1}{3} D + \frac{1}{9} D^2 + \frac{1}{27} D^3 \right) (t^3 + 3t^2 + 6t + 6) \\ &= \frac{1}{9} t^3 + \frac{4}{9} t^2 + \frac{26}{27} t + \frac{80}{81}. \end{aligned}$$

由此得原方程的实通解

$$x(t) = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{3t} + \frac{1}{9} t^3 + \frac{4}{9} t^2 + \frac{26}{27} t,$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

(5) 该方程对应的齐次线性方程的特征多项式为 $\lambda^2 - 3\lambda + 2$, 因此特征根为 $1, 2$. 故原方程对应的齐次线性方程有实基本解组 e^t, e^{2t} . 又原方程有特解

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{1}{D^2 - 3D + 2} \cdot \sin e^{-t} \\ &= \frac{1}{D-1} \frac{1}{D-2} \cdot e^{2t} e^{-2t} \sin e^{-t} \\ &= \frac{1}{D-1} \cdot \left(e^{2t} \frac{1}{D} \cdot e^{-2t} \sin e^{-t} \right) \\ &= \frac{1}{D-1} \cdot e^t (\cos e^{-t} - e^t \sin e^{-t}) \\ &= e^t \frac{1}{D} \cdot (\cos e^{-t} - e^t \sin e^{-t}) \\ &= -e^{2t} \sin e^{-t}, \end{aligned}$$

由此得原方程的实通解 $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - e^{2t} \sin e^{-t}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

(6) 该方程对应的齐次线性方程的特征多项式为 $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$, 因此特征根为 $1, 2$ (二重根). 故原方程对应的齐次线性方程有实基本解组 $e^t, e^{2t}, t e^{2t}$. 又原方程有特解

$$x_p(t) = \frac{1}{D^3 - 5D^2 + 8D - 4} \cdot e^{3t} = \frac{1}{2} e^{3t},$$

由此得原方程的实通解 $x(t) = C_1 e^t + (C_2 + C_3 t)e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$, 其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

(7) 易知该方程对应的齐次线性方程的通解为 $x_c(t) = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t}$. 下面求特解

$$\begin{aligned} x_p(t) &= 4 \frac{1}{D^2 - 2} t^2 e^{t^2} = 4 \frac{1}{D^2 - 2} t^2 e^{t^2 - \sqrt{2}t} e^{\sqrt{2}t} \\ &= 4 e^{\sqrt{2}t} \frac{1}{(D + \sqrt{2})^2 - 2} t^2 e^{t^2 - \sqrt{2}t} \\ &= 4 e^{\sqrt{2}t} \frac{1}{D + 2\sqrt{2}} \frac{1}{D} (t^2 e^{t^2 - \sqrt{2}t}) \\ &= 4 e^{\sqrt{2}t} \frac{1}{D + 2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} t + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) e^{t^2 - \sqrt{2}t} \\ &= 2 e^{\sqrt{2}t} \frac{1}{D + 2\sqrt{2}} \left(t + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) e^{t^2 + \sqrt{2}t} e^{-2\sqrt{2}t} \\ &= 2 e^{\sqrt{2}t} e^{-2\sqrt{2}t} \frac{1}{D} \left(t + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) e^{t^2 + \sqrt{2}t} \\ &= e^{t^2}. \end{aligned}$$

即 $x_p(t) = e^{t^2}$. 由此得原方程的实通解为 $x(t) = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t} + e^{t^2}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

(8) 易知该方程对应的齐次线性方程的通解为 $x_c = (C_1 + C_2 t)e^t$. 下面求特解. 由于 $\frac{1}{D^2 - 2D + 1}$ 对函数 e^t 不满足代换法的条件, 因此用二项式法得到

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{1}{D^2 - 2D + 1} t e^t \\ &= e^t \frac{1}{(D+1)^2 - 2(D+1) + 1} t \\ &= e^t \frac{1}{D^2} t = \frac{1}{6} t^3 e^t. \end{aligned}$$

因此原方程的实通解为 $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^t + \frac{1}{6} t^3 e^t$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

2. 证明 Cauchy - Euler 方程

$$a_2 t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 t \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

在适当的自变量代换下,能化为常系数线性方程,其中 a_0, a_1, a_2 均为常数, $a_2 \neq 0$, $f(t)$ 在某给定区间连续.

证明:不妨设 $t > 0$. 引进自变量的变换 $t = e^\xi$, 即 $\xi = \ln t$. 直接计算可得

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx d\xi}{d\xi dt} = \frac{1}{t} \frac{dx}{d\xi}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{t^2} \left(\frac{d^2x}{d\xi^2} - \frac{dx}{d\xi} \right).$$

代入原方程就得到常系数线性方程

$$a^2 \frac{d^2x}{d\xi^2} + (a_1 - a_2) \frac{dx}{d\xi} + a_0 x = f(e^\xi).$$

对 $t < 0$, 则令 $t = -e^\xi$ 可类似地证明.

习 题 4.3

1* 由高阶线性微分方程组成的方程组可以表述为算子形式

$$\begin{pmatrix} a_{11}(D) & \cdots & a_{1n}(D) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(D) & \cdots & a_{nm}(D) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

其中矩阵系数都是算子多项式. 用 Cramer 法则解出

$$x_i(t) = \frac{\det \Delta_i}{\det \Delta}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

其中

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11}(D) & \cdots & a_{1n}(D) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(D) & \cdots & a_{nm}(D) \end{pmatrix},$$

$$\Delta_i = \begin{pmatrix} a_{11}(D) & \cdots & a_{1(i-1)}(D) & f_1 & a_{1(i+1)}(D) & \cdots & a_{1n}(D) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(D) & \cdots & a_{n(i-1)}(D) & f_n & a_{n(i+1)}(D) & \cdots & a_{nm}(D) \end{pmatrix}.$$

显然 Δ_i 是一个可以计算的已知函数 $\Delta_i(t)$ 而 Δ 仍为算子多项式. 从而问题简化为对每个 $i = 1, \dots, n$ 求解算子形式的单个的高阶线性微分方程 $\Delta x_i = \Delta_i$. 试用这种思想求解方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1 - \dot{x}_2 + x_1 = -t, \\ \dot{x}_1 - \dot{x}_2 + 3x_1 - x_2 = e^{2t}. \end{cases}$$

解：该方程组可写成

$$\begin{cases} (D+1)x_1 - Dx_2 = -t, \\ (D^2+3)x_1 - (D+1)x_2 = e^{2t}. \end{cases}$$

第二式减去第一式得 $(D^2 - D + 2)x_1 - x_2 = t + e^{2t}$ ，即 $x_2 = (D^2 - D + 2)x_1 - t - e^{2t}$ 。又由 Cramer 法则得

$$\begin{vmatrix} D+1 & -D \\ D^2+3 & -D-1 \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} -t & -D \\ e^{2t} & -D-1 \end{vmatrix},$$

即 $(D^3 - D^2 + D - 1)x_1 = 1 + t + 2e^{2t}$ 。

方程 $(D^3 - D^2 + D - 1)x_1 = 1 + t + 2e^{2t}$ 对应的齐次线性方程有实基本解组 e^t , $\cos t$, $\sin t$ 。又它有特解

$$\begin{aligned} x_{1p}(t) &= \frac{1}{D^3 - D^2 + D - 1} \cdot (1 + t + 2e^{2t}) \\ &= -2 - t + \frac{2}{5}e^{2t}, \end{aligned}$$

由此得方程 $(D^3 - D^2 + D - 1)x_1 = 1 + t + 2e^{2t}$ 的实通解

$$x_1 = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t - 2 - t + \frac{2}{5}e^{2t},$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数。

最后由 $x_2 = (D^2 - D + 2)x_1 - t - e^{2t}$ 可求出

$$x_2 = 2C_1 e^t + (C_2 - C_3) \cos t + (C_2 + C_3) \sin t + \frac{3}{5}e^{2t} - 3 - 3t.$$

2*. 试用矩阵指数函数思想理解并证明定理 4.4.

证明：设矩阵 A 有 n 个彼此互异的特征根 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\mathbf{c}^{(1)}, \dots, \mathbf{c}^{(n)}$ 是分别相应于 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 的特征向量。令 $\mathbf{P} = (\mathbf{c}^{(1)} \cdots \mathbf{c}^{(n)})$ ，则有 $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 。由 $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{P} \exp(\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} t) \mathbf{P}^{-1}$ 知方程组 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$ 有基本解矩阵

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{A}t) \mathbf{P} &= \mathbf{P} \exp(\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} t) = \mathbf{P} \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) \\ &= (\mathbf{c}^{(1)} e^{\lambda_1 t} \cdots \mathbf{c}^{(n)} e^{\lambda_n t}). \end{aligned}$$

因此原方程组有基本解组 $\mathbf{c}^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \dots, \mathbf{c}^{(n)} e^{\lambda_n t}$. \square

3. 求解方程组:

$$(1) \frac{dx}{dt} = -3x + 48y - 28z, \quad \frac{dy}{dt} = -4x + 40y - 22z, \quad \frac{dz}{dt} = -6x + 57y - 31z.$$

$$(2) \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x.$$

$$(3) \frac{dx}{dt} = -5x - 10y - 20z, \quad \frac{dy}{dt} = 5x + 5y + 10z, \quad \frac{dz}{dt} = 2x + 4y + 9z.$$

$$(4) \frac{dx}{dt} = 3x - y, \quad \frac{dy}{dt} = -4x - y, \quad \frac{dz}{dt} = 4x - 8y - 2z.$$

$$(5) \frac{dx}{dt} = 9x - 5y, \quad \frac{dy}{dt} = -y + 5z, \quad \frac{dz}{dt} = -y + 5z.$$

$$(6) \frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = -2x + 3y, \quad \frac{dz}{dt} = 5z.$$

$$(7) \frac{dx}{dt} = 2x + y + 3z, \quad \frac{dy}{dt} = 2y - z, \quad \frac{dz}{dt} = 2z.$$

解: (1) 该方程组的系数矩阵 A 有 3 个彼此互异的特征根 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, 其对应的特征向量分别为 $\mathbf{c}_1 = (3, 2, 3)^T, \mathbf{c}_2 = (4, 1, 1)^T, \mathbf{c}_3 = (2, 2, 3)^T$. 由此得原方程组的通解为

$$\begin{cases} x = 3C_1 e^t + 4C_2 e^{2t} + 2C_3 e^{3t}, \\ y = 2C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 2C_3 e^{3t}, \\ z = 3C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{3t}. \end{cases}$$

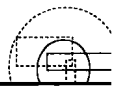
其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

(2) 易见该方程组的系数矩阵 A 满足

$$A^2 = -I, \quad A^3 = -A, \quad A^4 = I, \dots$$

因此原方程组有基本解矩阵

$$\begin{aligned} \exp(At) &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots & t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \\ -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \dots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



由此得原方程组的通解为

$$\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t. \end{cases}$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

(3) 该方程组的系数矩阵 A 有 3 个彼此互异的特征根 $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2 + i, \lambda_3 = 2 - i$, 其对应的特征向量分别为 $\mathbf{c}_1 = (-2, 0, 1)^T, \mathbf{c}_2 = (3 + i, 2 - i, -2)^T, \mathbf{c}_3 = (3 - i, 2 + i, -2)^T$. 因此原方程组有复基本解矩阵

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} -2e^{5t} & (3+i)e^{(2+i)t} & (3-i)e^{(2-i)t} \\ 0 & (2-i)e^{(2+i)t} & (2+i)e^{(2-i)t} \\ e^{5t} & -2e^{(2+i)t} & -2e^{(2-i)t} \end{pmatrix}.$$

考虑 $\mathbf{X}(t)$ 的实部得原方程组的通解为

$$\begin{cases} x = -2C_1 e^{5t} + C_2(3 \cos t - \sin t)e^{2t} + C_3(\cos t + 3 \sin t)e^{2t}, \\ y = C_2(2 \cos t + \sin t)e^{2t} - C_3(\cos t - 2 \sin t)e^{2t}, \\ z = C_1 e^{5t} - 2C_2 e^{2t} \cos t - 2C_3 e^{2t} \sin t. \end{cases}$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

(4) 该方程组的系数矩阵 A 有 3 个彼此互异的特征根 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1 + 2\sqrt{2}, \lambda_3 = 1 - 2\sqrt{2}$, 其对应的特征向量分别为 $\mathbf{c}_1 = (0, 0, 1)^T, \mathbf{c}_2 = (1, 2 - 2\sqrt{2}, -4(25 - 18\sqrt{2}))^T, \mathbf{c}_3 = (1, 2 + 2\sqrt{2}, -4(25 + 18\sqrt{2}))^T$. 因此原方程组的通解为

$$\begin{cases} x = C_2 e^{(1+2\sqrt{2})t} + C_3 e^{(1-2\sqrt{2})t}, \\ y = C_2(2 - 2\sqrt{2})e^{(1+2\sqrt{2})t} + C_3(2 + 2\sqrt{2})e^{(1-2\sqrt{2})t}, \\ z = C_1 e^{-2t} - 4C_2(25 - 18\sqrt{2})e^{(1+2\sqrt{2})t} - 4C_3(25 + 18\sqrt{2})e^{(1-2\sqrt{2})t}. \end{cases}$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

(5) 该方程组的系数矩阵 A 有 3 个彼此互异的特征根 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 9$. 其对应的特征向量分别为 $\mathbf{c}_1 = (\frac{25}{9}, 5, 1)^T, \mathbf{c}_2 = (1, 1, 1)^T, \mathbf{c}_3 = (1, 0, 0)^T$. 由此得原方程组的通解为

$$\begin{cases} x = \frac{25}{9}C_1 + C_2 e^{4t} + C_3 e^{9t}, \\ y = 5C_1 + C_2 e^{4t}, \\ z = C_1 + C_2 e^{4t}. \end{cases}$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

(6) 该方程组的系数矩阵 A 有单特征根 $\lambda_1 = 1$ 和二重特征根 $\lambda_2 = 5$. 对 $\lambda_1 = 1$, 其对应的特征向量为 $\mathbf{c}_1 = (1, 1, 0)^T$. 对 $\lambda_2 = 5$ 求 $(A - \lambda_2 I)^2 \mathbf{c} = \mathbf{0}$ 的非平凡解, 即求解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

得到两个线性无关的解 $\mathbf{c}_{20} = (1, -1, 0)^T$ 和 $\mathbf{c}_{30} = (0, 0, 1)^T$. 由此递推得

$$\mathbf{c}_{21} = (A - \lambda_2 I) \mathbf{c}_{20} = (0, 0, 0)^T,$$

$$\mathbf{c}_{31} = (A - \lambda_2 I) \mathbf{c}_{30} = (0, 0, 0)^T.$$

最后得到基本解矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \left(\mathbf{c}_1 e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t} \left(\mathbf{c}_{20} + \frac{t}{1!} \mathbf{c}_{21} \right), e^{\lambda_2 t} \left(\mathbf{c}_{30} + \frac{t}{1!} \mathbf{c}_{31} \right) \right) \\ &= \begin{pmatrix} e^t & e^{5t} & 0 \\ e^t & -e^{5t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由此得原方程组的通解为

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}, \\ y = C_1 e^t - C_2 e^{5t}, \\ z = C_3 e^{5t}. \end{cases}$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

(7) 该方程组的系数矩阵 A 有三重特征根 $\lambda = 2$. 直接计算可得 $(A - \lambda I)^3 = \mathbf{0}$. 因此可计算基本解矩阵如下

$$\begin{aligned}
 \exp(\mathbf{A}t) &= e^{2t} \exp(\mathbf{A}-2\mathbf{I})t \\
 &= e^{2t} \left[\mathbf{I} + t(\mathbf{A}-2\mathbf{I}) + \frac{t^2}{2!}(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^2 \right] \\
 &= e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & 3t - \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

由此得原方程组的通解为

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t + C_3 (3t - \frac{1}{2}t^2))e^{2t}, \\ y = (C_2 - C_3 t)e^{2t}, \\ z = C_3 e^{2t}. \end{cases}$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

4* 给定齐次方程组 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, 其中 \mathbf{A} 为常数值矩阵. 证明

(1) 若 \mathbf{A} 的所有特征根实部都 < 0 , 则所有解当 $t \rightarrow +\infty$ 时趋于 $\mathbf{0}$.

(2) 若 \mathbf{A} 的所有特征根实部都 ≤ 0 且零实部的特征根都是简单根, 则一切解对 $\forall t \geq 0$ 都有界.

(3) 若 \mathbf{A} 有一个特征根实部 > 0 , 则有解当 $t \rightarrow +\infty$ 时趋向无穷.

证明: 设矩阵 \mathbf{A} 有互不相同的特征根 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, 重数分别为 n_1, \dots, n_s 且 $n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$, 则齐次方程组 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 的任一解 $\mathbf{x}(t)$ 均有形式

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^s e^{\lambda_j t} \mathbf{P}_j(t),$$

其中 $\mathbf{P}_j(t)$ 为多项式且 $\deg \mathbf{P}_j(t) \leq n_j - 1$.

(1) 若 \mathbf{A} 的所有特征根实部都 < 0 , 则对任一 j ($1 \leq j \leq s$), 反复运用洛必达法则得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_j t} \mathbf{P}_j(t) = - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{P}_j'(t)}{\lambda_j e^{-\lambda_j t}} = \dots = \mathbf{0}.$$

因此当 $t \rightarrow +\infty$ 时 $\mathbf{x}(t)$ 趋于 $\mathbf{0}$. 即方程组 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 的所有解当 $t \rightarrow +\infty$ 时趋于 $\mathbf{0}$.

(2) 若 \mathbf{A} 的所有特征根实部都 ≤ 0 且零实部的特征根都是简单根, 不妨设 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 的实部为零, $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_s$ 的实部为负. 则由假设, $n_1 = \dots = n_k = 1$, 从而 $\|\mathbf{P}_1(t)\|, \dots, \|\mathbf{P}_k(t)\|$ 均为非负常数, 设为 $C_1 \geq 0, \dots, C_k \geq 0$, 因此对任一 j ($1 \leq j \leq k$) 有

$$\|e^{\lambda_j t} \mathbf{P}_j(t)\| \leq \|e^{\lambda_j t}\| \cdot \|\mathbf{P}_j(t)\| = C_j,$$

从而 $e^{\lambda_1 t} \mathbf{P}_1(t), \dots, e^{\lambda_k t} \mathbf{P}_k(t)$ 对 $\forall t \geq 0$ 均有界. 另一方面, 由(1)可得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_{k+1} t} \mathbf{P}_{k+1}(t) = \dots = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_l t} \mathbf{P}_l(t) = \mathbf{0}.$$

故 $e^{\lambda_{k+1} t} \mathbf{P}_{k+1}(t), \dots, e^{\lambda_l t} \mathbf{P}_l(t)$ 对 $\forall t \geq 0$ 也均有界. 因此 $\mathbf{x}(t)$ 对 $\forall t \geq 0$ 有界. 即方程组 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 的所有解对 $\forall t \geq 0$ 都有界.

(3) 若 \mathbf{A} 有一个特征根实部 > 0 , 不妨设 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ 的实部 $\alpha > 0$. 设 $\boldsymbol{\eta}$ 是 \mathbf{A} 相应于 λ_1 的特征向量, 则方程组 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 有解 $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_1 t} \boldsymbol{\eta}$. 显然有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}(t)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{\lambda_1 t} \boldsymbol{\eta}\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\alpha t} \|\boldsymbol{\eta}\| = +\infty.$$

因此方程组 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 有一个解当 $t \rightarrow +\infty$ 时趋向无穷. \square

习 题 4.4

1. 1kg 的重物悬挂在一弹簧上, 使它伸长了 $\frac{49}{320}$ m 后处于平衡位置. 今自平衡位置将重物拉下 $\frac{1}{4}$ m 后放手, 使其自由振动. 现不计空气阻力, 求其振动规律. ($g=9.8\text{m/s}^2$)

解: 设弹簧的弹性系数为 k , $x=0$ 表示重物的平衡位置, 以竖直向下的方向为正方向, 用 $x(t)$ 表示重物在 t 时刻所处的位置. 由于在平衡位置重物的重力 mg 正好与弹簧的恢复力平衡, 故 $mg = \frac{49}{320}k$. 由 $m=1$, $g=9.8$ 可得 $k=64\text{N/m}$. 又由 Newton 第二定律可得

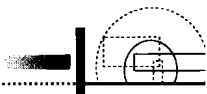
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 64x = 0.$$

该方程的通解为 $x(t) = C_1 \cos 8t + C_2 \sin 8t$.

若以 $t=0$ 表示自平衡位置将重物拉下 $\frac{1}{4}$ m 后放手的时刻, 则初值条件为 $x(0) = \frac{1}{4}$, $x'(0) = 0$. 代入通解则可确定常数 $C_1 = \frac{1}{4}$ 和 $C_2 = 0$, 因此该重物的振动方程为

$$x(t) = \frac{1}{4} \cos 8t.$$

2. 考虑一个由电感 L 和电容 C 串联组成的简单闭合电路. 试证电容器上的电位差



$v(t)$ 是关于时刻 t 的周期函数.

证明: $L-C$ 电路方程为

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \omega^2 v = 0,$$

其中 $\omega^2 = \frac{1}{LC} > 0$. 从特征方程 $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ 解得一对共轭复根 $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$. 故通解为 $v(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$. 因此电位差 $v(t)$ 是关于时刻 t 的以 $\omega = \sqrt{1/LC}$ 为自然频率的周期函数. \square

3. 考虑一个由电感 L , 电容 C 和电源 E 串联组成的简单闭合电路, 其中 $E = E_0 \sin \omega t$. 试证当 $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 时, 将发生共振现象, 且当 $t \rightarrow \infty$ 时, 电位差 $v(t)$ 变得无界.

证明: 此时的电路方程为

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \omega^2 v = \frac{E_0}{L} \sin \omega t,$$

其中 $\omega = \sqrt{1/LC}$. 考虑辅助方程

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega^2 z = \frac{E_0}{L} e^{i\omega t}.$$

显然 $P(D) := D^2 + \omega^2$ 满足 $P(i\omega) = 0$, 故不能用代换法求解, 而要用二项式法和解展开法. 因此

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{D^2 + \omega^2} \frac{E_0}{L} e^{i\omega t} = \frac{E_0}{L} e^{i\omega t} \frac{1}{D(D+2i\omega)} \cdot 1 \\ &= \frac{E_0}{L} \frac{e^{i\omega t}}{2i\omega} \frac{1}{D} \frac{1}{1 + \frac{1}{2i\omega} D} \cdot 1 = -i \frac{E_0}{L} \frac{e^{i\omega t}}{2\omega} t. \end{aligned}$$

取虚部得到

$$v(t) = \Im z(t) = -\frac{E_0}{2\omega L} t \cos \omega t.$$

而特征方程的特征根为 $\pm \omega i$, 因此非齐次方程的通解为

$$v(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - \frac{E_0}{2\omega L} t \cos \omega t.$$

它表明随时间的增加, 电位差 $v(t)$ 变得无界. \square

第五章 一般理论

本章主要介绍一般非线性微分方程的解的一般理论，读者应重点掌握好 Picard 存在唯一性定理，解的延拓，以及解对初值和参数的连续依赖性与可微性这三大内容，它们是我们进一步研究微分方程理论的基础。此外本章还介绍了一些常见的微分不等式和微分方程的数值解法。

5.1 主要内容

本章主要讨论如下形式的初值问题：

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (5.1)$$

的解的一般理论，其中 $f(t, x)$ 在矩形区域

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

上连续。对高维问题，相关定理的陈述和证明完全类似。在一些定理的陈述和证明中，常要求 $f(t, x)$ 在 R 上关于 x 满足 Lipschitz 条件，即存在常数 L ，使得对任意的 $(t, x_1), (t, x_2) \in R$ ，不等式

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L |x_1 - x_2|$$

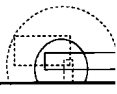
成立。

1. Picard 存在唯一性定理

定理 5.1 若 $f(t, x)$ 在 R 上连续且关于 x 满足 Lipschitz 条件，Lipschitz 常数为 L ，则初值问题(5.1)在区间 $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ 上解存在唯一。其中

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \max \{ |f(t, x)| : (t, x) \in R \}.$$

定理的证明思想与第三章定理 3.1 的证明相似，都是把相应的初值问题的解转化为其等价积分方程



$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x) d\tau \quad (5.2)$$

的连续解，然后再构造 Picard 迭代序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 来逼近(5.2)的连续解，其中 $\varphi_0(t) \equiv x_0$ ，且

$$\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_{n-1}(\tau)) d\tau, \quad n=1, 2, \dots, \quad (5.3)$$

这里 $t \in I$. 这里还要特别注意两个定理证明过程中的不同之处. 因为方程(3.1)右端的函数对 x 没有任何限制，证明中构造的 Picard 迭代序列在整个区间 $[\alpha, \beta]$ 上都有定义且一致收敛，相应的初值问题的解在整个区间 $[\alpha, \beta]$ 上都有定义. 但由于定理 5.1 中要求 x 满足条件 $|x - x_0| \leq b$ ，因此无法保证迭代序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 在整个方程的定义区间 $[t_0 - a, t_0 + a]$ 上都有定义，定理 5.1 只能保证初值问题(5.1)在区间 $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ 上解的存在唯一性.

上面构造的 Picard 迭代序列给出了一种求初值问题(5.1)的近似解的方法，并且有误差估计

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq \frac{ML^n}{(n+1)!} h^{n+1}, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h], \quad (5.4)$$

其中 $x(t) = \varphi(t)$ 是初值问题(5.1)在 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上的解.

在实际应用中，Lipschitz 条件往往难于检验. 这时我们常常用 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 R 上存在且连续来代替.

2. Euler 折线法与 Peano 存在性定理

如果去掉定理 5.1 中的 Lipschitz 条件，就得到下面的 Peano 存在性定理，它保证了解仍然存在，只是不一定唯一：

定理 5.2 (Peano) 若 $f(t, x)$ 在矩形区域

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

上连续，则初值问题(5.1)在区间 $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ 上至少有一个解. 其中

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \max \{ |f(t, x)| : (t, x) \in R \}.$$

由于没有 Lipschitz 条件，定理 5.1 的证明中构造的 Picard 迭代序列不一定收敛，

因此其证明思想不能推广到这里. 定理 5.2 的证明方法是借助 Euler 折线法构造函数序列, 再利用 Ascoli-Arzela 引理证明该折线序列有一个子列一致收敛到初值问题(5.1)在区间 $I=[t_0-h, t_0+h]$ 上的一个解.

Euler 折线法描绘了积分曲线的几何思想, 成为近似计算的开端, 因而十分重要. 其构造方法是: 将区间 $I=[t_0-h, t_0+h]$ 分成 $2n$ 等份, 分点为

$$t_k = t_0 + \frac{kh}{n}, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n.$$

然后从初始点 $P_0: (t_0, x_0)$ 出发按方向 $\dot{x}=f(t_0, x_0)$ 延长直线段到第一个分点 $t=t_1$ 处. 再从新的端点 $P_1: (t_1, x_1)$ 开始, 其中 $x_1=x_0+f(t_0, x_0)(t_1-t_0)$, 按新的方向 $\dot{x}=f(t_1, x_1)$ 作直线段到第二个分点 $t=t_2$ 处, \dots , 如此下去, 直到第 n 个分点 $t=t_n$. 同理向左也可以作出类似折线. 由此得到折线表达式

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} x_0 + \sum_{k=0}^{s-1} f(t_k, x_k)(t_{k+1} - t_k) \\ \quad + f(t_s, x_s)(t - t_s), & t \in [t_s, t_{s+1}), \\ x_0 + \sum_{k=0}^{-s+1} f(t_k, x_k)(t_{k-1} - t_k) \\ \quad + f(t_{-s}, x_{-s})(t - t_{-s}), & t \in [t_{-s-1}, t_{-s}). \end{cases} \quad (5.5)$$

其中 $s=0, 1, \dots, n-1$. 特别地当 $s=0$ 时, 上面 $\varphi_n(t)$ 在区间 $[t_s, t_{s+1})$ 上的表达式中的求和为由 $k=0$ 到 $k=-1$, 这时求和结果应理解为 0.

Euler 折线法给出了一种逼近积分曲线的方法. 区间 $[\alpha, \beta]$ 上的函数 $x=\varphi(t)$ 称为初值问题(5.1)在这个区间上的 ε -逼近解, 如果它满足条件:

- (1) $\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 并且除了 $[\alpha, \beta]$ 上有限个点外 $\varphi(t)$ 处处连续可微, 而在这有限个点处 $\varphi(t)$ 的左右导数都存在;
- (2) 当 $t \in [\alpha, \beta]$ 时, $(t, \varphi(t))$ 落在矩形区域 R 内;
- (3) 当 $t \in [\alpha, \beta]$ 时,

$$\left| \frac{d\varphi(t)}{dt} - f(t, \varphi(t)) \right| \leq \varepsilon,$$

这里当 $\varphi(t)$ 的微商不存在且 $t \neq \beta$ 时, $\frac{d\varphi(t)}{dt}$ 是指 $\varphi(t)$ 的右导数, $t = \beta$ 时, $\frac{d\varphi(t)}{dt}$ 是指

$\varphi(t)$ 的左导数.

3. 解的延拓

Picard 存在唯一性定理与 Peano 存在性定理都只保证了解在初值点 (t_0, x_0) 附近很小的区间 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上存在, 而 $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, $M = \max\{|f(t, x)| : (t, x) \in R\}$ 越大, h 就越小. 从理论和应用上来看这是不够的. 需要将局部地定义的解延拓到更大的区间.

解的延拓有十分明确的几何意义, 借助 Picard 或 Peano 存在性定理将积分曲线一点一点地向区间 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 的两边延拓直到这一过程不能再进行下去, 最后得到饱和解. 开区域上的任一饱和解 $x = \varphi(t)$ 的存在区间必为一个开区间. 事实上, 我们有下面的

定理 5.3(解的延拓定理) 设 G 为 \mathbb{R}^2 上一个开区域, $f(t, x)$ 在 G 内连续. 对

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (5.6)$$

的任一饱和解 $x = \varphi(t)$, 积分曲线 $x = \varphi(t)$ 必能达到 G 的边界. 特别地, 当 G 为有界区域时, 若饱和解 $x = \varphi(t)$ 的存在区间为 (a, b) , 则当 $t \rightarrow b_-$ 和 $t \rightarrow a_+$ 时都有

$$\rho((t, \varphi(t)), \partial G) \rightarrow 0,$$

其中 ∂G 为 G 的边界.

若 $G \subseteq \mathbb{R}^2$ 为无界区域, $f(t, x)$ 在 G 内连续, (5.6) 的任一点 $(t_0, x_0) \in G$ 的解 $x = \varphi(t)$ 可以延拓, 以向 t 增大的一方的延拓来说, 则解 $x = \varphi(t)$ 或者可以延拓到区间 $[t_0, +\infty)$, 或者只可以延拓到有限区间 $[t_0, m)$. 如果是后者, 则当 $t \rightarrow m$ 时, 要么 $x = \varphi(t)$ 无界, 要么 $(t, \varphi(t))$ 趋于 G 的边界.

若区域 $G \subseteq \mathbb{R}^2$ 为

$$G = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : T_0 < t < T_1, |x| < \infty\},$$

一个重要的问题是在什么条件下方程 (5.6) 的解可以延拓到整个区间 (T_0, T_1) ? 下面的推论给出了一些充分条件:

推论 5.1 若 $f(t, x)$ 在上述区域 G 中连续, 而且相应的微分方程初值问题的饱和解 $x = \varphi(t)$ 有界, 则 $\varphi(t)$ 的存在区间必为整个区间 (T_0, T_1) .

推论 5.2 设 $f(t, x)$ 在域

$$G = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : T_0 < t < T_1, |x| < \infty\}$$

内连续, 且存在与 t 无关的常数 N , 使得 $|f(t, x)| \leq N|x|$, 则(5.6)的任一饱和解 $x = \varphi(t)$ 都在区间 (T_0, T_1) 上存在.

推论 5.3 (Wintner) 设 $f(t, x)$ 在域

$$G = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : T_0 < t < T_1, \|x\| < \infty\}$$

内连续且满足条件

$$\|f(t, x)\| \leq L(r), \quad r = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $L(r)$ 在 $r \geq 0$ 上连续, 在 $r > 0$ 时为正, 且

$$\int_a^\infty \frac{dr}{L(r)} = \infty \quad (a > 0), \quad (5.7)$$

则方程 $\dot{x} = f(t, x)$ 的任一饱和解 $x = x(t)$ 都在区间 (T_0, T_1) 上存在.

4. 微分不等式

在微分方程理论的研究中, 常常需要对满足微分不等式或积分不等式的未知函数进行估计. 特别是当微分方程可以表述成线性项和非线性项相加时, 我们可以利用常数变易公式在等式两端取模, 化成积分不等式形式, 再对未知函数进行估计. 因此微分不等式是非常有用的工具. 本章介绍的 Gronwall 不等式及其推广是最基本、最常用的微分不等式.

定理 5.4 (Gronwall 不等式) 设 $x(t)$, $f(t)$ 为区间 $[t_0, t_1]$ 上的非负实连续函数, 若有实常数 $g \geq 0$ 使得

$$x(t) \leq g + \int_{t_0}^t f(\tau)x(\tau)d\tau, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (5.8)$$

则

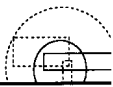
$$x(t) \leq g \exp\left(\int_{t_0}^t f(\tau)d\tau\right), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (5.9)$$

定理 5.5 (推广的 Gronwall 不等式) 设 $x(t)$, $g(t)$ 为区间 $[t_0, t_1]$ 上的非负实连续函数, 函数 $f(t) \geq 0$ 在区间 $[t_0, t_1]$ 上可积, 它们满足

$$x(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^t f(\tau)x(\tau)d\tau, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (5.10)$$

则当 $t \in [t_0, t_1]$ 时

$$x(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^t f(\tau)g(\tau)\exp\left(\int_{\tau}^t f(s)ds\right)d\tau. \quad (5.11)$$



定理 5.5 有下面的重要推论:

推论 5.4 在定理 5.5 的条件中, 如果附加条件 $g(t)$ 连续且导数 $g'(t) \geq 0$, 则

$$x(t) \leq g(t) \exp\left(\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau\right), \quad t \in [t_0, t_1].$$

5. 比较定理

下面两个比较定理对分析由微分方程所定义的平面方向场的几何特征很有用:

定理 5.6 (第一比较定理) 设函数 $f(t, x)$ 和 $F(t, x)$ 都在平面区域 G 内连续且满足不等式

$$f(t, x) < F(t, x).$$

设 $(t_0, x_0) \in G$, $\varphi(t)$ 和 $\Phi(t)$ 分别是初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (5.12)$$

和初值问题

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (5.13)$$

的解, 且都在区间 $a < t < b$ 上有定义. 则有

$$\begin{aligned} \varphi(t) &< \Phi(t), \quad \forall t \in (t_0, b), \\ \varphi(t) &> \Phi(t), \quad \forall t \in (a, t_0). \end{aligned}$$

为了介绍第二比较定理, 需要引入最大解和最小解的概念及其存在性.

定义 5.1 设 $f(t, x)$ 在矩形区域

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

上连续, 令 $M = \max\{|f(t, x)| : (t, x) \in R\}$, $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$. 再设 $\varphi(t)$ 和 $\Phi(t)$ 分别是初值问题(5.1)在区间 $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ 上的两个解, 使得对初值问题(5.1)的任意一个解 $\psi(t)$, 都有当 $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ 时,

$$\varphi(t) \leq \psi(t) \leq \Phi(t).$$

则称 $\varphi(t)$ 和 $\Phi(t)$ 分别是初值问题(5.1)的**最小解**和**最大解**.

定理 5.7 设 $f(t, x)$, M , h 如上定义所给, 则存在 $\delta > 0$, 使得 $\delta < h$ 且在区间 $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ 上, 初值问题(5.1)的最大解和最小解均存在.

显然最大解和最小解都是唯一的, 并且可以延拓到域 G 的边界. 由定理 5.6 和定

理 5.7 容易得到下面的第二比较定理.

定理 5.8 (第二比较定理) 设函数 $f(t, x)$ 和 $F(t, x)$ 都在平面区域 G 内连续且满足不等式 $f(t, x) \leq F(t, x)$. 设 $(t_0, x_0) \in G$, $\varphi(t)$ 和 $\Phi(t)$ 分别是初值问题(5.12)和初值问题(5.13)的解, 且都在区间 (a, b) 上有定义, $\Phi(t)$ 是初值问题(5.13)在区间 (t_0, b) 上的最大解和在区间 (a, t_0) 上的最小解. 则有

$$\begin{aligned}\varphi(t) &\leq \Phi(t), \quad \forall t \in (t_0, b), \\ \varphi(t) &\geq \Phi(t), \quad \forall t \in (a, t_0).\end{aligned}$$

6. 解对初值与参数的依赖性

在实际应用中, 我们需要了解解对初值与参数的依赖性, 因为一个初值问题的初值或参数值往往是由实验测定的, 不可避免地会带有误差. 显然对一般的初值问题, 经过平移变换可以等价地考虑如下初值问题的解关于参数 λ 的依赖性:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda), \quad x(0) = 0. \quad (5.14)$$

下面是解关于参数 λ 的局部连续依赖性.

定理 5.9 (连续依赖性) 设 $f: G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为连续函数, 其中

$$G = \{(t, x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : |t| \leq a, \|x\| \leq b, \|\lambda - \lambda_0\| \leq c\},$$

而且 f 对 x 满足 Lipschitz 条件

$$\|f(t, x_1, \lambda) - f(t, x_2, \lambda)\| \leq L \|x_1 - x_2\|,$$

其中 $L \geq 0$ 是常数. 则初值问题(5.14)的解 $\varphi(t, \lambda)$ 在区域 $D = \{(t, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : |t| \leq h, \|\lambda - \lambda_0\| \leq c\}$ 上连续, 其中

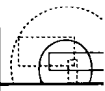
$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \max \{ \|f(t, x, \lambda)\| : (t, x, \lambda) \in G \}.$$

下面是解关于初值 x_0 的整体连续依赖性定理, 关于参数 λ 的结果可类似得到.

定理 5.10 (整体连续依赖性) 设 $f: G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为连续函数, 其中 G 为 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 上一个开区域, f 对 x 满足局部 Lipschitz 条件, 即 $\forall P \in G$, 存在以 P 为中心的矩形邻域 $\Omega(P) \subset G$ 使得 f 在 $\Omega(P)$ 上是 Lipschitz 的. 设 $x = \xi(t)$ 是微分方程组 $\dot{x} = f(t, x)$ 的一个解, 它至少在区间 $[a, b]$ 上存在. 则存在常数 $\delta > 0$, 当初值点 (t_0, x_0) 满足条件

$$a \leq t_0 \leq b, \quad \|x_0 - \xi(t_0)\| \leq \delta$$

时, $\dot{x} = f(t, x)$ 满足初值条件 $x(t_0) = x_0$ 的解 $\varphi(t; t_0, x_0)$ 至少也在 $[a, b]$ 上存在, 且



在区域

$$D_\delta = \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t, t_0 \in [a, b], \|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\xi}(t_0)\| \leq \delta\}$$

上对 (t, t_0, \mathbf{x}_0) 连续.

下面的定理表明在一定条件下解对初值和参数还是连续可微的.

定理 5.11 (C' 依赖性) 设 G 定义同定理 5.9, $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为连续函数, 且对 $\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}$ 有连续偏导数. 则初值问题(5.14)的解 $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\lambda})$ 在区域

$$D = \{(t, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t| \leq h, \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_0\| \leq c\}$$

上是连续可微的, 其中 h, M 定义同定理 5.9.

当 $\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}$ 是一维时(因此下面不再用黑体), 对初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda), \quad x(t_0) = x_0 \quad (5.15)$$

的解 $\varphi(t; t_0, x_0, \lambda)$, 根据定理 5.11 有下列结果.

推论 5.5 $z := \frac{\partial \varphi}{\partial t_0}$ 满足初值问题

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(t, \varphi, \lambda) \right) z, \quad z(t_0) = -f(t_0, x_0, \lambda). \quad (5.16)$$

$z := \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$ 满足初值问题

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(t, \varphi, \lambda) \right) z, \quad z(t_0) = 1. \quad (5.17)$$

$z := \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$ 满足初值问题

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(t, \varphi, \lambda) \right) z + \frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \varphi, \lambda), \quad z(t_0) = 0. \quad (5.18)$$

线性方程(5.16)~方程(5.18)称为初值问题(5.15)关于 t_0, x_0, λ 的线性变分方程.

7. 微分方程数值解

初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (5.19)$$

的数值解是指解 $x(t)$ 在一些离散的节点 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots$ 处的近似值 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$.

求解初值问题(5.19)最简单也是最古老的方法是前面提到的 **Euler 折线法**，其递推公式可写成

$$x_n = x_{n-1} + hf(t_{n-1}, x_{n-1}), \quad n=1, 2, \dots \quad (5.20)$$

显然它是显式法，具有一阶精度，其局部截断误差为

$$T_{n+1} = \frac{h^2}{2} x''(t_n) + O(h^3).$$

Euler 折线法的精度虽然很差，但它却为现代微分方程数值解提供了重要的思想。

梯形方法是对 Euler 折线法的改进，是一种隐式法，具有二阶精度，其递推公式可写成

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} [f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1})]. \quad (5.21)$$

其局部截断误差为

$$T_{n+1} = -\frac{h^3}{12} x'''(t_n) + O(h^4).$$

实际计算时通常由 Euler 公式(5.20)提供迭代初值，然后用梯形公式(5.21)反复迭代多次以求得 x_{n+1} 的近似值。因此有递推公式

$$\begin{aligned} x_{n+1}^0 &= x_n + hf(t_n, x_n), \\ x_{n+1}^{k+1} &= x_n + \frac{h}{2} [f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1}^k)], \quad (k=0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

梯形方法精度虽然比 Euler 折线法高，但其算法相当复杂，为简化计算，先用 Euler 公式(5.20)求得一个初步的近似值 \bar{x}_{n+1} ，称为预测值，再用梯形公式得到一个校正值 x_{n+1} 。这样的预测-校正系统称为**改进的 Euler 公式**，它有递推公式

$$\begin{aligned} \text{预测: } \bar{x}_{n+1} &= x_n + hf(t_n, x_n), \\ \text{校正: } x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{2} [f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, \bar{x}_{n+1})]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

公式(5.22)也可写成下面的形式

$$\begin{cases} x_p = x_n + hf(t_n, x_n), \\ x_c = x_n + hf(t_{n+1}, x_p), \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} [x_p + x_c]. \end{cases}$$



可以证明改进的 Euler 公式(5.22)也具有二阶精度.

更高精度的数值方法是 q 级显式 Runge-Kutta 方法, 其中在实际应用中较常用的是如下的四阶 Runge-Kutta 公式

$$\begin{aligned}
 K_1 &= f(t_n, x_n), \\
 K_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}K_1\right), \\
 K_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}K_2\right), \\
 K_4 &= f(t_n + h, x_n + hK_3), \\
 x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

它具有四阶精度. 其精度虽比改进的 Euler 方法高, 但它要求初值问题(5.1)的解具有较好的光滑性. 如果(5.1)的解光滑性较差, 用四阶 Runge-Kutta 公式求得的近似解的精度可能反而不如改进的 Euler 方法.

5.2 典型例题

例 5.1 利用存在唯一性定理求出方程

$$\frac{dx}{dt} = x + 3\sqrt[3]{x}$$

具有唯一解的区域.

解: 令 $f(x) = x + 3\sqrt[3]{x}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内连续可微, 满足局部 Lipschitz 条件, 故原方程在 tx 平面上除去 t 轴的区域上解是唯一的. 而在 t 轴上, 即当 $x=0$ 时 $f'(x)$ 无定义, Lipschitz 条件被破坏, 不再满足存在唯一性条件. 事实上, 这时可通过直接求解知解不唯一.

例 5.2 设函数 $f(t, x)$ 在矩形区域

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

上连续, $\Phi(t)$, $\varphi(t)$ 分别为初值问题:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

在区间 $I: [t_0, t_0+h]$ ($h \leq a$) 上的最大解与最小解. 证明对于满足不等式 $\varphi(t_0+h) < c < \Phi(t_0+h)$ 的每一个 c , 在区间 I 上至少存在所给初值问题的一个解 $x^*(t)$, 满足条件 $x^*(t_0+h) = c$.

证明: 由 Peano 存在性定理, 所给方程过点 (t_0+h, c) 在区间 $[t_0+h-h', t_0+h]$ 上至少有一个解 $x^*(t)$, 其中

$$h' = \min \left\{ h, \frac{\Phi(t_0+h) - c}{M}, \frac{c - \varphi(t_0+h)}{M} \right\},$$

$$M = \max \{ |f(t, x)| : (t, x) \in R \}.$$

令 G 为由解 $\Phi(t)$ 与 $\varphi(t)$ ($t_0 < t < t_0+h$) 为上下边界, $t=t_0+h$ 为右边界所围成的开区域. 由解的延拓定理, 在 G 内, 解 $x^*(t)$ 必能向左延拓至边界, 即 $x^*(t)$ 能向左延拓至 $t=t_0$. 易见 $x^*(t_0) = x_0$. 从而 $x^*(t)$ 就是所给初值问题在区间 I 上满足条件 $x^*(t_0+h) = c$ 的一个解. \square

例 5.3 设函数 $f(x)$ 连续, $g(x)$ 满足局部 Lipschitz 条件, 证明方程组

$$\frac{dx}{dt} = g(x), \quad \frac{dy}{dt} = f(x)y$$

满足初值条件 $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$ 的解有且只有一个.

证明: 由 Peano 存在性定理, 所给初值问题有解. 由于函数 $g(x)$ 满足局部 Lipschitz 条件, 由 Picard 存在唯一性定理, 初值问题

$$\frac{dx}{dt} = g(x), \quad x(t_0) = x_0$$

存在唯一的解 $x^*(t)$, 设 $x^*(t)$ 在区间 $[t_0-h, t_0+h]$ 上有定义. 考虑初值问题

$$\frac{dy}{dt} = f(x^*(t))y, \quad y(t_0) = y_0, \quad (5.24)$$

其中 $t \in [t_0-h, t_0+h]$. 由 $f(x)$ 和 $x^*(t)$ 的连续性知函数 $f(x^*(t))$ 在区间 $[t_0-h, t_0+h]$ 上连续, 因为初值问题 (5.24) 中的方程为线性方程, 故其解在区间 $[t_0-h, t_0+h]$ 上存在唯一的解 $y^*(t)$. 从而所给初值问题的解有且只有一个, 即 $(x^*(t), y^*(t))$. \square

例 5.4 给定区间 $[a, b]$ 上的三个连续函数 $u(t)$, $\phi(t)$ 和 $\lambda(t)$, 其中 $\lambda(t) \geq 0, \phi(t)$ 一阶连续可导, 满足不等式

$$u(t) \leq \phi(t) + \int_a^t \lambda(\tau)u(\tau)d\tau, \quad t \in [a, b]. \quad (5.25)$$

证明

$$u(t) \leq \phi(a) \exp\left(\int_a^t \lambda(\tau) d\tau\right) + \int_a^t \phi'(\tau) \exp\left(\int_\tau^t \lambda(s) ds\right) d\tau.$$

证明：以 $\lambda(t)F(t)$ 乘式(5.25)两边，其中

$$F(t) = \exp\left(-\int_a^t \lambda(\tau) d\tau\right),$$

记

$$H(t) = \int_a^t \lambda(\tau) u(\tau) d\tau,$$

则式(5.25)变成

$$\left(\frac{dH}{dt} - \lambda(t)H(t)\right)F(t) \leq \phi(t)\lambda(t)F(t).$$

上式可以改成

$$\frac{d}{dt}[H(t)F(t)] \leq \phi(t)\lambda(t)F(t). \quad (5.26)$$

对式(5.26)从 a 到 t 积分并注意到 $H(a)=0$ ，利用分部积分即得

$$\begin{aligned} H(t)F(t) &\leq \int_a^t \phi(\tau)\lambda(\tau)F(\tau) d\tau \\ &= \phi(a) - \phi(t)F(t) + \int_a^t \phi'(\tau)F(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

从而

$$u(t) \leq H(t) + \phi(t) \leq \phi(a) \exp\left(\int_a^t \lambda(\tau) d\tau\right) + \int_a^t \phi'(\tau) \exp\left(\int_\tau^t \lambda(s) ds\right) d\tau. \quad \square$$

例 5.5 用改进的 Euler 方法求下列初值问题在区间 $[0, 1]$ 上的数值解：

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + t^2, \quad x(0) = 0.$$

解：根据改进的 Euler 公式，对所给的初值问题，取步长为 $h=0.1$ ，求 $x_n = x_0 + nh$ ， $n=0, 1, 2, \dots, 10$ 的数值解。在 Maple 环境下运行的程序可以如下设计：

```

> restart:
  with(linalg):
f:= (t,x)-> x^2+ t^2:
t0:= 0.:
x0:= 0.:
a:= 0:
b:= 1:
h:= 0.1:
N:= round((b- a)/h):
x:= matrix(N+ 1,2,[]):
x[1,1]:= t0:
x[1,2]:= x0:

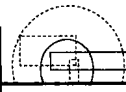
or n from 2 to N+1 do:
  x[n,1]:= x[n- 1,1]+ h:
  k1:= f(x[n- 1,1],x[n- 1,2]):
  k2:= f(x[n,1],x[n- 1,2]+ h* k1):
  x[n,2]:= x[n- 1,2]+ h/2* (k1+ k2):
end do:

numsol:= eval(x);

```

其中初始值 t_0 , x_0 用带小数点的方式输入, 是为了保证运行时按浮点数计算. 计算结果为

$$\begin{array}{ll}
 x(0.1)=0.000500000000, & x(0.2)=0.003000125004, \\
 x(0.3)=0.009503025759, & x(0.4)=0.022024675945, \\
 x(0.5)=0.042621408632, & x(0.6)=0.073442100651, \\
 x(0.7)=0.116816583999, & x(0.8)=0.175396367319, \\
 x(0.9)=0.252374213470, & x(1.0)=0.351830132528.
 \end{array}$$



5.3 习题与解答

习 题 5.1

1. 设 $x(t) = \varphi(t)$ 是初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

在区间 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上的连续解, 其中 $f(t, x)$ 在矩形区域

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

上连续, 在 R 上关于 x 满足 Lipschitz 条件, Lipschitz 常数为 L , $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, $M = \max\{|f(t, x)| : (t, x) \in R\}$. 设 $\varphi_n(t)$ 是 Picard 迭代序列中第 n 次迭代得到的函数, 证明有如下的误差估计

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq \frac{ML^n}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

证明: 不妨设 $t \in [t_0, t_0 + h]$, 对 $t \in [t_0 - h, t_0]$ 的证明完全类似. $\varphi(t)$ 在区间 $[t_0, t_0 + h]$ 上满足积分方程

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau,$$

由 $\{\varphi_n(t)\}$ 的构造, 显然有

$$|\varphi_0(t) - \varphi(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau \leq M(t - t_0).$$

由此及 Lipschitz 条件, 得

$$\begin{aligned} |\varphi_1(t) - \varphi(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(\tau, \varphi_0(\tau)) - f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau \\ &\leq L \int_{t_0}^t |\varphi_0(\tau) - \varphi(\tau)| d\tau \leq \frac{ML}{2!} (t - t_0)^2. \end{aligned}$$

一般地, 假设当 $n = m$ 时,

$$|\varphi_m(t) - \varphi(t)| \leq \frac{ML^m}{(m+1)!} (t - t_0)^{m+1},$$

则当 $n=m+1$ 时,

$$\begin{aligned} |\varphi_{m+1}(t) - \varphi(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(\tau, \varphi_m(\tau)) - f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau \\ &\leq L \int_{t_0}^t |\varphi_m(\tau) - \varphi(\tau)| d\tau \leq \frac{ML^{m+1}}{(m+2)!} (t-t_0)^{m+2}. \end{aligned}$$

因此由数学归纳法知, 当 $t \in [t_0, t_0+h]$ 时, 对任意整数 n 都有

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq \frac{ML^n}{(n+1)!} (t-t_0)^{n+1} \leq \frac{ML^n}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

即所给误差估计成立. \square

2. 令 A 为 $n \times n$ 阶方阵. 证明初值问题

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

的 Picard 迭代序列收敛于 $x(t) = \exp(At)x_0$.

证明: 所给初值问题的 Picard 迭代序列如下.

$$\varphi_0(t) = x_0,$$

$$\varphi_1(t) = x_0 + \int_0^t A\varphi_0(\tau) d\tau = (I + tA)x_0,$$

$$\varphi_2(t) = x_0 + \int_0^t A\varphi_1(\tau) d\tau = \left(I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!}\right)x_0,$$

可归纳地求出

$$\varphi_n(t) = \left(I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n A^n}{n!}\right)x_0.$$

显然序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 一致收敛于 $x(t) = \exp(At)x_0$. \square

3. 求方程 $\frac{dx}{dt} = x^2$ 过点 $(0, 1)$ 的第三次近似解.

解: 所给初值问题的 Picard 迭代序列如下:

$$\varphi_0(t) = 1,$$

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t \varphi_0^2(\tau) d\tau = 1 + t,$$

$$\varphi_2(t) = 1 + \int_0^t \varphi_1^2(\tau) d\tau = 1 + t + t^2 + \frac{1}{3}t^3,$$

由此得第三次近似解为

$$\begin{aligned}\varphi_3(t) &= 1 + \int_0^t \varphi_2^2(\tau) d\tau \\ &= 1 + t + t^2 + t^3 + \frac{2}{3}t^4 + \frac{1}{3}t^5 + \frac{1}{9}t^6 + \frac{1}{63}t^7.\end{aligned}$$

4. 利用 Picard 存在唯一性定理求定义在矩形区域

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t| \leq 1, |x| \leq 1\}$$

上的方程

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - t$$

过点(0, 0)的解的存在区间, 并求第三次近似解, 给出第三次近似解在解的存在区间上的误差估计.

解: 这里 $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $a = 1$, $b = 1$, $f(t, x) = x^2 - t$, 易知 $M = 2$, 从而 $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \frac{1}{2}$. 由 Picard 存在唯一性定理, 所给初值问题在区间 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上存在唯一.

其 Picard 迭代序列前四项为:

$$\begin{aligned}\varphi_0(t) &= 0, \\ \varphi_1(t) &= \int_0^t (\varphi_0^2(\tau) - \tau) d\tau = -\frac{t^2}{2}, \\ \varphi_2(t) &= \int_0^t (\varphi_1^2(\tau) - \tau) d\tau = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^5}{20}, \\ \varphi_3(t) &= \int_0^t (\varphi_2^2(\tau) - \tau) d\tau = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^5}{20} - \frac{t^8}{160} + \frac{t^{11}}{4400},\end{aligned}$$

又不难求得 Lipschitz 常数 $L = \max\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| : (t, x) \in R\right\} = 2$. 由此可得在解的存在区间 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上有误差估计

$$|\varphi_3(t) - \varphi(t)| \leq \frac{2 \cdot 2^3}{(3+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{3+1} = \frac{1}{24}.$$

其中 $\varphi(t)$ 为所给初值问题的真正解.

5. 利用 Picard 存在唯一性定理求定义在矩形区域

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t| \leq 1, |x| \leq 1\}$$

上的方程

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + t$$

过点(0, 0)的解的存在区间, 并求在此区间上与真正的解的误差不超过 0.05 的近似解.

解: 由已知条件求得 $M=2$, 从而 $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \frac{1}{2}$. 由 Picard 存在唯一性定理, 所给初值问题在区间 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上的解存在唯一. 不难求得 Lipschitz 常数

$$L = \max\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| : (t, x) \in R\right\} = 2.$$

由此可得在解的存在区间 $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上有误差估计

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq \frac{2 \cdot 2^n}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

其中 $\varphi(t)$ 为所给初值问题的真正解, $\varphi_n(t)$ 为所给初值问题的第 n 次近似解. 由此不难求得当 $n=3$ 时, $\varphi_3(t)$ 为所给初值问题在区间 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上与真正的解的误差不超过 0.05 的近似解. 所给初值问题的 Picard 迭代序列前三项为

$$\varphi_0(t) = 0,$$

$$\varphi_1(t) = \int_0^t (\varphi_0^2(\tau) + \tau) d\tau = \frac{t^2}{2},$$

$$\varphi_2(t) = \int_0^t (\varphi_1^2(\tau) + \tau) d\tau = \frac{t^2}{2} + \frac{t^5}{20},$$

故所求近似解为

$$\varphi_3(t) = \int_0^t (\varphi_2^2(\tau) + \tau) d\tau = \frac{t^2}{2} + \frac{t^5}{20} + \frac{t^8}{160} + \frac{t^{11}}{4400}.$$

6. 试求初值问题

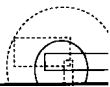
$$\frac{dx}{dt} = x + t + 1, \quad x(0) = 0$$

的 Picard 迭代序列, 并通过求迭代序列的极限求出初值问题的解.

解: 所给初值问题的 Picard 迭代序列如下:

$$\varphi_0(t) = 0,$$

$$\varphi_1(t) = \int_0^t (\varphi_0(\tau) + \tau + 1) d\tau = t + \frac{t^2}{2},$$



$$\begin{aligned}\varphi_2(t) &= \int_0^t (\varphi_1(\tau) + \tau + 1) d\tau = t + t^2 + \frac{t^3}{3!}, \\ \varphi_3(t) &= \int_0^t (\varphi_2(\tau) + \tau + 1) d\tau = t + 2\left(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}\right) + \frac{t^4}{4!}, \\ \varphi_4(t) &= \int_0^t (\varphi_3(\tau) + \tau + 1) d\tau \\ &= t + 2\left(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!}\right) + \frac{t^5}{5!}.\end{aligned}$$

由此可归纳地得：对任意的 $n \geq 3$ 都有

$$\begin{aligned}\varphi_n(t) &= t + 2 \sum_{k=2}^n \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= -t - 2 + 2 \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

显然序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 一致收敛于 $x(t) = 2e^t - t - 2$ 。它正是所给初值问题的解。

7. 试求初值问题

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + Q(t), \quad x(t_0) = x_0$$

的 Picard 迭代序列，并通过求迭代序列的极限求出初值问题的解，这里 $P(t)$ ， $Q(t)$ 均为连续函数。

解：不难求得所给初值问题的 Picard 迭代序列前三项为

$$\begin{aligned}\varphi_0(t) &= x_0, \\ \varphi_1(t) &= x_0 \left(1 + \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau\right) + \int_{t_0}^t Q(\tau) d\tau, \\ \varphi_2(t) &= x_0 \left(1 + \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t P(\tau) \left(\int_{t_0}^{\tau} P(s) ds\right) d\tau\right) \\ &\quad + \int_{t_0}^t P(\tau) \left(\int_{t_0}^{\tau} Q(s) ds\right) d\tau + \int_{t_0}^t Q(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

由分部积分不难得到

$$\varphi_2(t) = x_0 \left\{ 1 + \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau + \frac{1}{2!} \left(\int_{t_0}^t P(\tau) d\tau \right)^2 \right\} + \int_{t_0}^t Q(\tau) \left(1 + \int_{\tau}^t P(s) ds \right) d\tau.$$

一般地由数学归纳法可证明：对任意的 $n \geq 2$ 都有

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{x_0}{k!} \left(\int_{t_0}^t P(\tau) d\tau \right)^k + \int_{t_0}^t Q(\tau) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\int_{\tau}^t P(s) ds \right)^k d\tau.$$

显然序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 一致收敛于

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t P(\tau) d\tau\right) + \int_{t_0}^t Q(\tau) \exp\left(\int_{\tau}^t P(s) ds\right) d\tau.$$

它正是所给初值问题的解.

8. 用逐步逼近法证明, 当 $|\lambda|$ 足够小时, 积分方程

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau$$

在区间 $[a, b]$ 上的解存在唯一. 这里 $f(t)$ 为区间 $[a, b]$ 上的连续函数, $K(t, \tau)$ 为矩形 $[a, b] \times [a, b]$ 上的连续函数.

证明: 构造逐步逼近迭代序列如下:

$$\varphi_0(t) = f(t),$$

$$\varphi_{n+1}(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, \tau) \varphi_n(\tau) d\tau.$$

由假设, $f(t)$, $K(t, \tau)$ 均有界. 令

$$M_f = \max\{|f(t)| : t \in [a, b]\},$$

$$M_K = \max\{|K(t, \tau)| : (t, \tau) \in [a, b] \times [a, b]\}.$$

则有

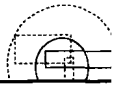
$$\begin{aligned} |\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| &= \left| \lambda \int_a^b K(t, \tau) f(\tau) d\tau \right| \\ &\leq |\lambda| M_K M_f (b-a), \\ |\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| &= \left| \lambda \int_a^b K(t, \tau) (\varphi_1(\tau) - \varphi_0(\tau)) d\tau \right| \\ &\leq |\lambda|^2 M_K^2 M_f (b-a)^2. \end{aligned}$$

可用数学归纳法证明

$$|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)| \leq M_f (|\lambda| M_K (b-a))^{n+1}.$$

因此由 Weierstrass 判别法知, 当 $|\lambda| M_K (b-a) < 1$ 时, 函数序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛. 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t),$$



则 $\varphi(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义且连续. 故

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) &= f(t) + \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \int_a^b K(t, \tau) \varphi_{n-1}(\tau) d\tau \\ &= f(t) + \lambda \int_a^b K(t, \tau) \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n-1}(\tau) d\tau,\end{aligned}$$

即

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau.$$

故当 $|\lambda| M_K(b-a) < 1$ 时, 原积分方程在区间 $[a, b]$ 上的解存在.

下面证明当 $|\lambda| M_K(b-a) < 1$ 时解唯一. 设 $\varphi(t) \neq \psi(t)$ 为原积分方程的两个不同的解, 即

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau,$$

$$\psi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, \tau) \psi(\tau) d\tau,$$

令 $M = \max\{|\varphi(t) - \psi(t)| : t \in [a, b]\}$, 则 $M > 0$ 且存在 $\xi \in [a, b]$ 使得 $|\varphi(\xi) - \psi(\xi)| = M$. 另一方面 $\forall t \in [a, b]$, 都有

$$\begin{aligned}|\varphi(t) - \psi(t)| &\leq |\lambda| M_K \int_a^b |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| d\tau \\ &\leq M |\lambda| M_K(b-a) < M,\end{aligned}$$

由此推出 $|\varphi(\xi) - \psi(\xi)| = M < M$. 这是矛盾.

故当 $|\lambda|$ 足够小时, 原积分方程在区间 $[a, b]$ 上的解存在唯一. \square

习 题 5.2

1. 考虑初值问题

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad x(0) = 1,$$

将区间 $[-1, 1]$ 分为 8 等份并构造出相应的 Euler 折线 $\varphi(t)$, 将初值问题对应的积分曲线和 Euler 折线 $\varphi(t)$ 画在一张图上进行比较. 计算 $\varphi(t)$ 在区间的等分点处的值以及和精确解的误差, 精确到小数点后第五位.

解：将区间 $[-1, 1]$ 分为8等份，则等分点为

$$t_{-4} = -1, t_{-3} = -\frac{3}{4}, t_{-2} = -\frac{1}{2}, t_{-1} = -\frac{1}{4},$$

$$t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{4}, t_2 = \frac{1}{2}, t_3 = \frac{3}{4}, t_4 = 1.$$

不难构造出相应的 Euler 折线 $\varphi(t)$ 为

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{27}{64}t + \frac{189}{256}, & t \in \left[-1, -\frac{3}{4}\right), \\ \frac{9}{16}t + \frac{27}{32}, & t \in \left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right), \\ \frac{3}{4}t + \frac{15}{16}, & t \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right), \\ t + 1, & t \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \\ \frac{4}{5}t + \frac{15}{16}, & t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \\ \frac{25}{16}t + \frac{25}{32}, & t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \\ \frac{125}{64}t + \frac{125}{256}, & t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases}$$

$\varphi(t)$ 和精确解 $x(t) = e^t$ 在区间的等分点处的值及误差可列表如下：

t_n	$\varphi(t)$	精确解	误差
-1.00	0.31641	0.36788	0.05147
-0.75	0.42188	0.47237	0.05049
-0.50	0.56250	0.60653	0.04403
-0.25	0.75000	0.77880	0.02880
0.00	1.00000	1.00000	0.00000
0.25	1.25000	1.28403	0.03403
0.50	1.56250	1.64872	0.08622
0.75	1.95313	2.11700	0.16387
1.00	2.44141	2.71828	0.27687

利用如下的 Maple 命令可作出对应的积分曲线和 Euler 折线 $\varphi(t)$ ，见图 5.1，其中

虚线为精确解 $x(t) = e^t$.

```
with(plots):
p0:= plot(exp(t),t= - 1..1,linestyle= DASHDOT);
p1:= plot(27/64 * t+ 189/256,t= - 1.. - 0.75);
p2:= plot(9/16 * t+ 27/32,t= - 0.75.. - 0.5);
p3:= plot(3/4 * t+ 15/16,t= - 0.5.. - 0.25);
p4:= plot(t+ 1,t= - 0.25.. 0.25);
p5:= plot(5/4 * t+ 15/16,t= 0.25.. 0.5);
p6:= plot(25/16 * t+ 25/32,t= 0.5.. 0.75);
p7:= plot(125/64 * t+ 125/256,t= 0.75.. 1);
display(p0,p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7);
```

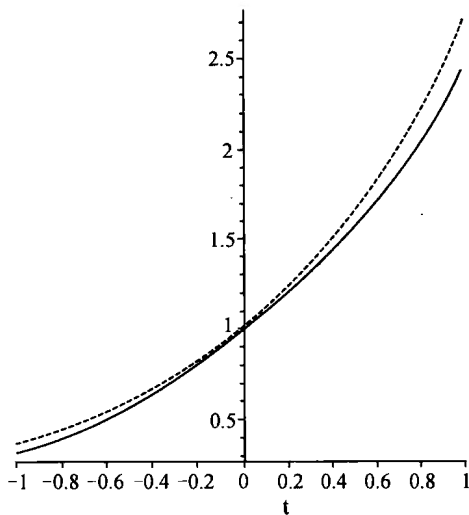


图 5.1 第 1 题, 其中虚线为精确解 $x(t) = e^t$.

2. 证明: 若把 Euler 折线作如下的修正:

$$\varphi(t) = \begin{cases} x_0, & \text{当 } t=t_0 \text{ 时,} \\ x_0 + f(t_0, x_0)(t-t_0), & \text{当 } t_0 < t \leq t_1 \text{ 时,} \\ \varphi(t_{k-1}) + \frac{f(t_{k-2}, \varphi(t_{k-2})) + f(t_{k-1}, \varphi(t_{k-1}))}{2}(t-t_{k-1}), & \text{当 } t_{k-1} < t \leq t_k \text{ 时 } (k=2, \dots, n). \end{cases}$$

则 $\forall \varepsilon > 0$, 都存在 n , 使得按这一方式构造的函数 $\varphi(t)$ 是初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

在区间 $[t_0, t_0+h]$ 上的 ε -逼近解, 其中 $f(t, x)$ 在矩形区域

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t-t_0| \leq a, |x-x_0| \leq b\}$$

上连续, $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, $M = \max\{|f(t, x)| : (t, x) \in R\}$.

证明: 由于 $f(t, x)$ 在 R 上一致连续, 故 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta(\varepsilon) > 0$, 使得当 $(t, x), (\bar{t}, \bar{x}) \in R$ 且 $|t-\bar{t}| \leq \delta(\varepsilon)$, $|x-\bar{x}| \leq \delta(\varepsilon)$ 时有 $|f(t, x) - f(\bar{t}, \bar{x})| \leq \varepsilon$. 现在构造 Euler 折线 $\varphi(t)$ 如上, 使得

$$\max_{1 \leq k \leq n} |t_k - t_{k-1}| \leq \min\left\{\frac{\delta(\varepsilon)}{2}, \frac{\delta(\varepsilon)}{2M}\right\}.$$

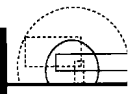
我们要证明 $x = \varphi(t)$ 是所给初值问题在区间 $[t_0, t_0+h]$ 上的 ε -逼近解.

显然 ε -逼近解定义中的条件 1 和 2 都是满足的. 再由 $x = \varphi(t)$ 的递推定义可知当 $t, \bar{t} \in [t_0, t_0+h]$ 时有

$$|\varphi(t) - \varphi(\bar{t})| \leq M |t - \bar{t}|.$$

因此当 $t \in [t_{k-1}, t_k]$ 时, $|\varphi(t) - \varphi(t_{k-1})| \leq \frac{\delta(\varepsilon)}{2}$, $|\varphi(t) - \varphi(t_{k-2})| \leq \delta(\varepsilon)$. 于是

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d\varphi(t)}{dt} - f(t, \varphi(t)) \right| \\ &= \left| \frac{f(t_{k-2}, \varphi(t_{k-2})) + f(t_{k-1}, \varphi(t_{k-1}))}{2} - f(t, \varphi(t)) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} |f(t_{k-2}, \varphi(t_{k-2})) - f(t, \varphi(t))| \\ &\quad + \frac{1}{2} |f(t_{k-1}, \varphi(t_{k-1})) - f(t, \varphi(t))| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$



因此 ε -逼近解定义中的条件 3 也是满足的. 所以 $\varphi(t)$ 是所给初值问题在区间 $[t_0, t_0 + h]$ 上的 ε -逼近解. \square

3. 证明 Picard 迭代序列满足 Ascoli-Arzelà 引理的条件.

证明: Picard 迭代序列为定义在区间 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上的如下的函数族 $\{\varphi_n(t)\}$:

$$\begin{aligned}\varphi_0(t) &= x_0, \\ \varphi_{n+1}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(\varphi_n(\tau), \tau) d\tau,\end{aligned}$$

其中 $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, $M = \max\{|f(t, x)| : (t, x) \in R\}$. 首先对任意的 n , 都有

$$\begin{aligned}|\varphi_n(t)| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(\varphi_{n-1}(\tau), \tau) d\tau \right| \\ &\leq |x_0| + M |t - t_0| \leq |x_0| + Mh,\end{aligned}$$

因此 $\{\varphi_n(t)\}$ 在有界闭区间 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上一致有界.

其次, 对任意的 $t_1, t_2 \in [t_0 - h, t_0 + h]$ 和 n , 有

$$|\varphi_n(t_1) - \varphi_n(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi_n(\tau), \tau) d\tau \right| \leq M |t_1 - t_2|,$$

因此 $\forall \varepsilon > 0$, 取仅跟 ε 有关的常数 $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, 则 $\forall \varphi(t) \in \{\varphi_n(t)\}$, 只要 $t, \bar{t} \in [t_0 - h, t_0 + h]$ 且 $|t - \bar{t}| < \delta$ 时, 就有 $|\varphi(t) - \varphi(\bar{t})| \leq \varepsilon$, 故函数族 $\{\varphi_n(t)\}$ 在 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上等度连续.

故 Picard 迭代序列满足 Ascoli-Arzelà 引理的条件. \square

4*. 利用 Peano 存在定理证明隐函数定理的存在性部分.

证明: 需要证明如下结果: 设 $F(x, y)$, $F_x(x, y)$, $F_y(x, y)$ 在矩形区域 $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ 上连续, $F(x_0, y_0) = 0$, $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, 则函数方程 $F(x, y) = 0$ 在 x_0 的某邻域中存在解 $y = \varphi(x)$ 使得 $y_0 = \varphi(x_0)$.

为此考虑微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} =: f(x, y).$$

由于 $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, 因此存在 α, β , 使得 $0 < \alpha \leq a$, $0 < \beta \leq b$ 且 $F_y(x, y)$ 在矩形区域 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq \alpha, |y - y_0| \leq \beta\}$ 上非零. 故 $f(x, y)$ 在矩形区域 D

上连续. 由 Peano 存在定理, 初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上有解 $y = \varphi(x)$, 其中

$$h = \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}, \quad M = \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in D\}.$$

显然 $y_0 = \varphi(x_0)$. 下面只需证明当 $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ 时, $F(x, \varphi(x)) \equiv 0$.

事实上, 由

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = -\frac{F_x(x, \varphi(x))}{F_y(x, \varphi(x))}$$

得

$$\frac{d}{dx}F(x, \varphi(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv 0,$$

故当 $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ 时, $F(x, \varphi(x)) \equiv C$, 其中 C 为常数. 再由 $F(x_0, \varphi(x_0)) = F(x_0, y_0) = 0$ 得 $C = 0$. 因此当 $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ 时, $F(x, \varphi(x)) \equiv 0$. \square

习 题 5.3

1. 设 $G \subseteq \mathbb{R}^2$ 是由不等式: $T_0 < t < T_1$, $|x| < \infty$ 所确定的区域. 方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

的任一饱和解 $x = \varphi(t)$ 均有界, 其中 $f(t, x)$ 在区域 G 上连续. 则 $x = \varphi(t)$ 的存在区间必为整个区间 (T_0, T_1) .

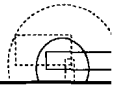
证明: 用反证法. 若不然, 不妨设初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

的解 $x = \varphi(t)$ 向右只可以延拓到区间 $[t_0, \beta)$, 其中 (t_0, x_0) 为区域 G 上任一点, $\beta < T_1$. 由于 $x = \varphi(t)$ 有界, 故存在 $M > 0$ 使得对任意的 $(t, x) \in G$ 都有 $|\varphi(t)| \leq M$. 从而当 $t \in [t_0, \beta)$ 时, 积分曲线 $x = \varphi(t)$ 完全包含在区域

$$\tilde{G} = \{(t, x) \in G; t \in [t_0, \beta), -M \leq x \leq M\}$$

内, 因此向右无法延拓到区域 G 的边界, 这与解的延拓定理矛盾, 因此原方程的任一



饱和解的存在区间必为 (T_0, T_1) . \square

2. 设函数 $f(t, x)$ 在整个平面上都有定义, 连续且有界, 证明方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

的任一解均可延拓到整个区间 $(-\infty, +\infty)$.

证明: 用反证法. 若不然, 不妨设初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

的解 $x = \varphi(t)$ 向右只可以延拓到有限区间 $[t_0, \beta)$, 其中 (t_0, x_0) 为平面上任一点. 则由解的延拓定理, 当 $t \rightarrow \beta$ 时, $x = \varphi(t)$ 无界. 但另一方面, 由假设, 存在 $M > 0$ 使得对任意的 (t, x) 都有 $|f(t, x)| \leq M$. 从而 $\forall t \in [t_0, \beta)$ 都有 $-M \leq \varphi'(t) \leq M$, 在该不等式中从 t_0 到 t 积分, 得

$$-M(t - t_0) \leq \varphi(t) - \varphi(t_0) \leq M(t - t_0), \quad t \in [t_0, \beta).$$

故 $\forall t \in [t_0, \beta)$ 都有 $|\varphi(t)| \leq |\varphi(t_0)| + M(\beta - t_0)$, 这表明当 $t \rightarrow \beta$ 时, $x = \varphi(t)$ 有界. 这与当 $t \rightarrow \beta$ 时, $x = \varphi(t)$ 无界矛盾, 因此原方程的任一解均可延拓到整个区间 $(-\infty, +\infty)$. \square

3. 设函数 $f(t, x)$ 在平面上的条形区域 $G: a < t < b, |x| < \infty$ 上连续, $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 是方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

过同一点 $(t_0, x_0) \in G$ 的两个解, $\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t)$. 证明域 G 中介于 $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 间的部分被方程过点 $(t_0, x_0) \in G$ 的解充满.

证明: 设 (\bar{t}, \bar{x}) 是域 G 中介于 $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 间的部分内的任一点. 不妨设 $c < \bar{t} < d$ 且 $a < c < t_0 < d < b$, 方程的解 $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 均在区间 $c < t < d$ 上存在. 不失一般性, 设 $\bar{t} < t_0$. 令 $\tilde{G} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2: t \in (c, d), \varphi_1(t) \leq x \leq \varphi_2(t)\}$, 则 $\tilde{G} \subset G$. 由 Peano 存在定理知所给方程过点 $(\bar{t}, \bar{x}) \in G$ 的解 $x = \varphi(t)$ 存在, 由解的延拓定理, $x = \varphi(t)$ 必可向左右延拓到域 G 的边界, 特别地当 $x = \varphi(t)$ 向右延拓时必与域 \tilde{G} 的边界曲线 $x = \varphi_1(t)$ 或 $x = \varphi_2(t)$ 相交, 不妨设 $x = \varphi(t)$ 与曲线 $x = \varphi_1(t)$ 相交于点 (t^*, x^*) , 则显然有 $c < \bar{t} \leq t^* \leq t_0$. 令

$$\varphi^*(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \leq t^*; \\ \varphi_1(t), & t > t^*. \end{cases}$$

显然 $x = \varphi^*(t)$ 是所给方程过点 $(t_0, x_0) \in G$ 的解. 这样我们就证明了过域 G 中介于 $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 间的部分内的任一点都有方程过点 $(t_0, x_0) \in G$ 的解, 因此域 G 中介于 $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 间的部分被方程过点 $(t_0, x_0) \in G$ 的解充满. \square

4*. 证明方程

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + t^2$$

任一解的存在区间都是有界的.

证明: 用反证法. 设 $x = x(t)$ 是初值问题

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + t^2, \quad x(t_0) = x_0$$

的解, 其存在区间无界, 不妨设它在区间 $[t_0, +\infty)$ 上存在. 取 $\alpha = \max\{t_0, 1\}$, 则在区间 $[\alpha, +\infty)$ 上有 $x'(t) = t^2 + x^2 \geq 1 + x^2$, 即

$$\frac{x'(t)}{1+x^2(t)} \geq 1,$$

在上式两边从 α 到 t 积分, 得

$$\arctan(x(t)) - \arctan(x(\alpha)) \geq t - \alpha.$$

因此对任意 $t \in [\alpha, +\infty)$ 均有

$$t \leq \alpha + [\arctan(x(t)) - \arctan(x(\alpha))] \leq \alpha + \pi.$$

这显然是不可能的. 因此所给方程的任一解向右不能延拓到区间 $[t_0, +\infty)$. 同样可证它的任一解向左不能延拓到区间 $(-\infty, t_0]$. 所以它的任一解的存在区间都是有界的. \square

5. 讨论下列初值问题的解的最大存在区间 (α, β) 及当 $t \rightarrow \alpha+$ 和 $t \rightarrow \beta-$ 时解的性质:

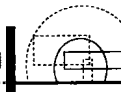
$$(1) \frac{dx}{dt} = 1 + \ln t, \quad x(1) = 0.$$

$$(2) \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(x^2 - 1), \quad x(\ln 2) = -3.$$

解: (1) 容易由变量分离法求得该初值问题的解为 $x(t) = t \ln t$. 因此该初值问题的解的最大存在区间为 $(0, +\infty)$ 且当 $t \rightarrow 0+$ 时解趋于 0, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时解趋于 $+\infty$.

(2) 容易由变量分离法求得该初值问题的解为

$$x(t) = \frac{1+e^t}{1-e^t}.$$



因此该初值问题的解的最大存在区间为 $(0, +\infty)$ 且当 $t \rightarrow 0+$ 时解趋于 $-\infty$, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时解趋于 -1 .

6*. 设函数 $f(t, x)$ 在平面上的条形区域

$$G = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2; a < t < b, |x| < \infty\}$$

上连续且满足不等式

$$|f(t, x)| \leq A(t)|x| + B(t),$$

其中 $A(t) \geq 0, B(t) \geq 0$ 均在区间 (a, b) 上连续, 证明方程 $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ 的任一解的最大存在区间均为 (a, b) .

证明: 用反证法. 若不然, 不妨设初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

的解 $x = \varphi(t)$ 向右只可以延拓到区间 $[t_0, \beta_0)$, 其中 (t_0, x_0) 为区域 G 上任一点, $\beta_0 < b$. 现取定 α 及 β , 使得

$$a < \alpha < t_0 < \beta_0 < \beta < b,$$

则在有限闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续函数 $A(t) \geq 0, B(t) \geq 0$ 均有界, 即存在 $M > 0$ 使得对任意的 $t \in [\alpha, \beta]$ 都有 $A(t) \leq M, B(t) \leq M$. 从而在区域

$$\tilde{G} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2; t \in [\alpha, \beta], |x| < \infty\}$$

上有 $|f(t, x)| \leq M(|x| + 1)$. 令 $L(r) = M(r + 1), r = |x|$, 则显然有

$$\int_{\gamma}^{\infty} \frac{dr}{L(r)} = \infty (\gamma > 0).$$

由 Wintner 定理, 解 $x = \varphi(t)$ 向右必可延拓到区间 $[t_0, \beta)$, 这与 $x = \varphi(t)$ 向右只可延拓到区间 $[t_0, \beta_0)$ 的假设矛盾, 故原方程的任一解的最大存在区间均为 (a, b) . \square

习 题 5.4

1. 证明 Gronwall 不等式: 设 $x(t), f(t)$ 为区间 $[t_0, t_1]$ 上的非负实连续函数, 若有实常数 $g \geq 0$ 使得

$$x(t) \leq g + \int_{t_0}^t f(\tau)x(\tau)d\tau, \quad t \in [t_0, t_1],$$

则

$$x(t) \leq g \exp\left(\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau\right), \quad t \in [t_0, t_1].$$

证明：先证 $g > 0$ 时 Gronwall 不等式成立。由假设知

$$x(t)f(t) \leq gf(t) \left(1 + \frac{1}{g} \int_{t_0}^t x(\tau) \cdot f(\tau) d\tau\right).$$

令

$$v(t) = \int_{t_0}^t x(\tau) \cdot f(\tau) d\tau,$$

则上述不等式可写成

$$\frac{dv(t)}{dt} \leq gf(t) \left(1 + \frac{1}{g} v(t)\right),$$

即

$$\frac{v'(t)}{1 + \frac{1}{g} v(t)} \leq gf(t).$$

在上式两边从 t_0 到 t 积分，得

$$\ln\left(1 + \frac{1}{g} v(t)\right) \leq \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau,$$

即

$$1 + \frac{1}{g} v(t) \leq \exp\left(\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau\right),$$

再由假设得：

$$x(t) \leq g + v(t) = g \left(1 + \frac{1}{g} v(t)\right) \leq g \exp\left(\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau\right).$$

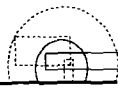
因此，当 $g > 0$ 时 Gronwall 不等式成立。

现在设 $g = 0$ 。这时要证明 $x(t) \equiv 0$ 。由假设知，对任一 $\varepsilon > 0$ ，都有

$$x(t) \leq \varepsilon + \int_{t_0}^t x(\tau) \cdot f(\tau) d\tau.$$

由上面的结果知

$$x(t) \leq \varepsilon \exp\left(\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau\right).$$



因 $\varepsilon > 0$ 为任一正数, 故 $x(t) \equiv 0$. \square

2. 设函数 $f(t, x)$ 在 (t, x) 平面上某区域 G 内连续, 关于 x 满足 Lipschitz 条件, L 是 Lipschitz 常数, $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 分别是方程 $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ 的 ε_1 和 ε_2 逼近解, 都在区间 $[t_1, t_2]$ 上有定义, $t_0 \in [t_1, t_2]$ 且

$$|\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)| \leq \delta.$$

用 Gronwall 不等式证明: 当 $t \in [t_1, t_2]$ 时,

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq \delta e^{L|t-t_0|} + \frac{\varepsilon}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1),$$

其中 $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

证明: 不妨设 $t \geq t_0$, $t \leq t_0$ 的情况可类似地证明. 由假设, 我们有

$$\begin{aligned} -\varepsilon_1 &< \varphi_1'(t) - f(t, \varphi_1(t)) < \varepsilon_1, \\ -\varepsilon_2 &< -\varphi_2'(t) + f(t, \varphi_2(t)) < \varepsilon_2, \end{aligned}$$

因此,

$$|\varphi_1'(t) - \varphi_2'(t) + f(t, \varphi_2(t)) - f(t, \varphi_1(t))| < \varepsilon.$$

由此得:

$$\begin{aligned} |\varphi_1'(t) - \varphi_2'(t)| &< |f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))| + \varepsilon \\ &\leq \varepsilon + L |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|. \end{aligned}$$

令 $\varphi(t) = \varphi_1'(t) - \varphi_2'(t)$, 则

$$\varphi(t) - \varphi_2(t) = \varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau.$$

因此,

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &\leq \varepsilon + L \left| \varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \varepsilon + L\delta + \int_{t_0}^t L |\varphi(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式得: $|\varphi(t)| \leq (\varepsilon + L\delta)e^{L(t-t_0)}$. 由此得

$$\begin{aligned} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| &= \left| \varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \delta + \int_{t_0}^t (\varepsilon + L\delta)e^{L(\tau-t_0)} d\tau \end{aligned}$$

$$= \delta e^{L|t-t_0|} + \frac{\varepsilon}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1).$$

故所给结论成立. \square

3. 不用推广的 Gronwall 不等式, 直接证明 Gronwall 不等式的另一推广: 设 $x(t)$, $f(t)$ 为区间 $[t_0, t_1]$ 上的非负连续函数, C, K 为非负常数. 若当 $t \in [t_0, t_1]$ 时有

$$x(t) \leq C + \int_{t_0}^t [f(\tau)x(\tau) + K] d\tau,$$

则当 $t \in [t_0, t_1]$ 时,

$$x(t) \leq [C + K(t-t_0)] \exp\left(\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau\right).$$

证明: 先证 $C > 0$ 时结论成立. 令

$$v(t) = \int_{t_0}^t [f(\tau)x(\tau) + K] d\tau,$$

则由假设得

$$\frac{v'(t)}{C+v(t)} \leq f(t) + \frac{K}{C+v(t)} \leq f(t) + \frac{K}{C+K(t-t_0)},$$

在上式两边从 t_0 到 t 积分, 得

$$\ln\left(1 + \frac{v(t)}{C}\right) \leq \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau + \ln\left(1 + \frac{K(t-t_0)}{C}\right),$$

即

$$C+v(t) \leq [C+K(t-t_0)] \exp\left(\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau\right),$$

再由假设得

$$x(t) \leq C+v(t) \leq [C+K(t-t_0)] \exp\left(\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau\right).$$

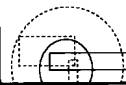
因此, 当 $C > 0$ 时结论成立.

现在设 $C=0$. 由假设知, 对任一 $\varepsilon > 0$, 都有

$$x(t) < \varepsilon + \int_{t_0}^t [f(\tau)x(\tau) + K] d\tau.$$

由上面的结果知

$$x(t) \leq [\varepsilon + K(t-t_0)] \exp\left(\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau\right).$$



因 $\varepsilon > 0$ 为任一正数, 故必有

$$x(t) \leq K(t-t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau\right).$$

因此, 当 $C=0$ 时结论也成立. \square

4. 证明第二比较定理.

证明: 取一单调下降且收敛于零的正数数列 $\{\varepsilon_m\}$, 对 $m=1, 2, \dots$, 考虑初值问题

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x) + \varepsilon_m, \quad x(t_0) = x_0.$$

设它有一个解 $\Phi_m(t)$, 和初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

的解 $\varphi(t)$ 都在区间 $t \in (a, b)$ 上有定义. 由假设, 在区域 G 内有不等式 $f(t, x) < F(t, x) + \varepsilon_m$. 因此由第一比较定理有

$$\varphi(t) < \Phi_m(t), \quad \forall t \in (t_0, b),$$

$$\varphi(t) > \Phi_m(t), \quad \forall t \in (a, t_0).$$

又由最大解和最小解存在定理的证明知极限

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Phi_m(t) = \Psi(t)$$

存在并且 $\Psi(t)$ 是初值问题

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

在区间 (t_0, b) 上的最大解和在区间 (a, t_0) 上的最小解. 故当 $t \in (a, b)$ 时 $\Psi(t) \equiv \Phi(t)$ 且

$$\varphi(t) \leq \Phi(t), \quad \forall t \in (t_0, b),$$

$$\varphi(t) \geq \Phi(t), \quad \forall t \in (a, t_0).$$

从而第二比较定理成立. \square

5*. 设初值问题

$$\frac{dx}{dt} = t^2 + (x+1)^2, \quad x(0) = 0 \tag{5.27}$$

的解的右侧最大存在区间为 $[0, \beta)$, 按下列步骤证明 $\frac{\pi}{4} < \beta < 1$.

(1) 利用不等式: 当 $|t| \leq 1$ 时,

$$(x+1)^2 \leq t^2 + (x+1)^2 \leq 1 + (x+1)^2,$$

证明 $\frac{\pi}{4} \leq \beta \leq 1$.

证明: 初值问题

$$\frac{dx}{dt} = 1 + (x+1)^2, \quad x(0) = 0$$

的解为

$$x(t) = -1 + \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right),$$

其右侧最大存在区间为 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$, 由所给不等式及第二比较定理知(5.27)的解在右侧必

不大于 $-1 + \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$, 因此由解的延拓定理知(5.27)的解在右侧至少在区间

$\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ 上存在, 故 $\beta \geq \frac{\pi}{4}$. 同理, 由于初值问题

$$\frac{dx}{dt} = (x+1)^2, \quad x(0) = 0$$

的解

$$x(t) = \frac{1}{1-t} - 1$$

的右侧最大存在区间为 $[0, 1)$, (5.27)的解在右侧至多在 $[0, 1)$ 上存在, 故 $\beta \leq 1$. 从

而 $\frac{\pi}{4} \leq \beta \leq 1$. \square

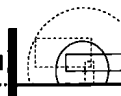
(2) 在(5.27)的积分曲线上取一点 (ξ, η) , 其中 ξ 为充分小的正数, 比较(5.27)和初值问题

$$\frac{dx}{dt} = (x+1)^2, \quad x(\xi) = \eta,$$

证明 $\beta < 1$.

证明: 初值问题

$$\frac{dx}{dt} = (x+1)^2, \quad x(\xi) = \eta$$



的解

$$x(t) = -1 - \frac{1}{t - C(\xi)}, \quad C(\xi) = \xi + \frac{1}{\eta + 1}$$

的右侧最大存在区间为 $[0, C(\xi))$. 由于

$$\begin{aligned} \frac{dC(\xi)}{d\xi} &= 1 - \frac{1}{(\eta + 1)^2} \frac{d\eta}{d\xi} \\ &= 1 - \frac{\xi^2 + (\eta + 1)^2}{(\eta + 1)^2} < 0, \end{aligned}$$

且 $C(0) = 1$, 故当 $\xi > 0$ 且充分小时必有 $C(\xi) < 1$, 而由第二比较定理及解的延拓定理知(5.27)的解在右侧至多在区间 $[0, C(\xi))$ 上存在, 故 $\beta < 1$. \square

(3) 取正数 λ , 使得 $1 - \lambda$ 为充分小的正数, 比较(5.27)和初值问题

$$\frac{dx}{dt} = \lambda^2 + (x + 1)^2, \quad x(0) = 0,$$

证明 $\beta > \frac{\pi}{4}$.

证明: 初值问题

$$\frac{dx}{dt} = \lambda^2 + (x + 1)^2, \quad x(0) = 0$$

的解

$$x(t) = -1 + \lambda \tan\left(\lambda t + \arctan \frac{1}{\lambda}\right)$$

的右侧最大存在区间为 $[0, B(\lambda))$, 其中 $B(\lambda) = \frac{\pi}{2\lambda} - \frac{1}{\lambda} \arctan \frac{1}{\lambda}$, 显然 $B(1) = \frac{\pi}{4}$ 且

$B'(1) < 0$, 故当 $1 - \lambda$ 为充分小的正数时必有 $B(\lambda) > \frac{\pi}{4}$. 由于

$$t^2 + (x + 1)^2 \leq \lambda^2 + (x + 1)^2, \quad \forall t \in [0, \lambda],$$

故由第二比较定理及解的延拓定理知(5.27)的解在右侧至少在区间 $[0, B(\lambda))$ 上存在,

故 $\beta > \frac{\pi}{4}$. \square

6. 证明若初值问题

$$\frac{dx}{dt} = \sin(tx), \quad x(0) = x_0$$

的积分曲线与直线 $x=t$ 当 $t>0$ 时有交点, 则

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0,$$

其中 $x_0 > 0$, $x(t)$ 为初值问题的解.

证明: 设积分曲线 $\Gamma: x=x(t)$ 与直线 $L: x=t$ 当 $t>0$ 时有交点 $P: (t_0, x_0)$, 其中 $t_0 > 0$, 由于 Γ 在每点的切线斜率不大于直线 L 的斜率 1, 由第二比较定理, 当 $t > t_0$ 时 Γ 将保持在直线 L 的下方. 现取满足

$$t_0^2 < \left(2m - \frac{1}{2}\right)\pi$$

的最小正整数 m , 则 P 必在双曲线

$$H: tx = \left(2m - \frac{1}{2}\right)\pi, \quad (t > 0, x > 0)$$

下方. 下面证明当 $t > t_0$ 时 Γ 也将保持在 H 的下方.

用反证法, 若不然, 则必有 $t_1 > t_0$ 使得 Γ 与 H 有交点 $P_1: (t_1, x_1)$ 且 Γ 从 H 的下方穿过 H 进入 H 的上方. 故在 P_1 点 Γ 的切线斜率不小于 H 的切线斜率, 即

$$-\left(2m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{t_1^2} \leq \sin(t_1 x(t_1)) = \sin\left(2m - \frac{1}{2}\right)\pi = -1.$$

另一方面, 由于 P_1 点在直线 L 的下方, 即 $0 < x_1 < t_1$, 故在 P_1 点 H 的切线斜率满足

$$-\left(2m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{t_1^2} = -\frac{x_1}{t_1} > -1$$

这就导致矛盾.

故当 $t > t_0$ 时 Γ 将保持在 H 的下方, 即

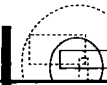
$$0 < x(t) < \left(2m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{t}, \quad (t > t_0 > 0).$$

由此即得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0. \quad \square$$

习 题 5.5

1. 设函数 $f(x, y)$, $g(x, y)$ 在 xy 平面上某区域 G 内连续, 且满足 Lipschitz 条件, $(x_0, y_0) \in G$. 证明 $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ 当且仅当方程组



$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

在 (x_0, y_0) 的任意邻域内都有时间为任意大的轨道段. 这里我们把方程的解 $(x(t), y(t))$ 看成 xy 平面上以 t 为参数的曲线, 称为轨道.

证明: 充分性 设所给方程组在 (x_0, y_0) 的任意邻域内都有时间为任意大的轨道段, 要证明 $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. 用反证法, 若不然, 则 $f(x_0, y_0)$ 和 $g(x_0, y_0)$ 中必有一个非零, 不妨设 $f(x_0, y_0) \neq 0$. 不失一般性, 令 $f(x_0, y_0) > 0$, 则由连续性, 存在 $\delta > 0$ 以及 $0 < m \leq M$ 使得在

$$N_\delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \delta\}$$

内 $0 < m \leq f(x, y) \leq M$. 显然在 (x_0, y_0) 的闭邻域 N_δ 内的任一轨道段 Γ 均满足方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)},$$

由解的存在唯一性, 该轨道段 Γ 可表示为 y 关于 x 的函数 $y(x)$ 且沿 Γ 有

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y(x)) > 0.$$

由此知从 Γ 上任一点 $A: (x_1, y(x_1))$ 到任意另一点 $B: (x_2, y(x_2))$ 所用时间为

$$T = \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{f(x, y)} dx \right| \leq \frac{|x_2 - x_1|}{m} \leq \frac{2\delta}{m}.$$

因此在 N_δ 内不存在时间为任意大的轨道段, 这与假设矛盾. 故 $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$.

必要性 设 $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$, 则 $(x(t), y(t)) \equiv (x_0, y_0)$ 必为所给方程组的解. 由解对初值的连续依赖性知, 对时间为任意大的区间 $T_1 \leq t \leq T_2$, 在 (x_0, y_0) 的任意邻域 N_ϵ 内, 只要将初值 (\bar{x}_0, \bar{y}_0) 取得充分接近 (x_0, y_0) , 则过 (\bar{x}_0, \bar{y}_0) 的解在这区间 $T_1 \leq t \leq T_2$ 内必存在并且保持在 (x_0, y_0) 的邻域 N_ϵ 内, 因此在 (x_0, y_0) 的任意邻域内都有时间为任意大的轨道段. \square

2. 证明推论 5.5.

证明: 设 $\varphi(t; t_0, x_0, \lambda)$ 是初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda), \quad x(t_0) = x_0$$

的解, 则

$$\varphi(t; t_0, x_0, \lambda) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau; t_0, x_0, \lambda), \lambda) d\tau.$$

在上式两端关于 t_0 求导并代入 $\varphi(t_0; t_0, x_0, \lambda) = x_0$ 得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_0} = -f(t_0, x_0, \lambda) + \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial}{\partial x} f(\tau, \varphi, \lambda) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial t_0} d\tau.$$

设 $z = \frac{\partial \varphi}{\partial t_0}$, 上式即为

$$z = -f(t_0, x_0, \lambda) + \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial}{\partial x} f(\tau, \varphi, \lambda) \right) z d\tau.$$

它等价于初值问题

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(t, \varphi, \lambda) \right) z, \quad z(t_0) = -f(t_0, x_0, \lambda).$$

同理可证推论 5.5 的另外两个结论也成立. \square

3. 给定方程

$$\frac{dx}{dt} = \sin(tx),$$

求 $\frac{\partial x}{\partial t_0}(t; t_0, x_0)$ 和 $\frac{\partial x}{\partial x_0}(t; t_0, x_0)$ 在 $t_0=0, x_0=0$ 处的表达式, 并证明若 $\varphi(t, \eta)$ 是方程满足初值条件 $x(0)=\eta$ 的解, 则恒有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(t, \eta) > 0.$$

解: 显然 $x(t; 0, 0) \equiv 0$ 是初值问题

$$\frac{dx}{dt} = \sin(tx), \quad x(0) = 0$$

的唯一解. 求解初值问题

$$\frac{dz}{dt} = tz, \quad z(0) = 0$$

得

$$\frac{\partial x}{\partial t_0}(t; t_0, x_0) \Big|_{t_0=0, x_0=0} = 0.$$

求解初值问题

$$\frac{dz}{dt} = tz, \quad z(0) = 1$$

得

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}(t; t_0, x_0) \Big|_{t_0=0, x_0=0} = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

求解初值问题

$$\frac{dz}{dt} = t \cos(t\varphi(t, \eta))z, \quad z(0) = 1$$

得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(t, \eta) = \exp\left(\int_0^t \tau \cos(\tau\varphi(\tau, \eta)) d\tau\right).$$

因此恒有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(t, \eta) > 0.$$

4. 令

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix},$$

证明初值问题

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

的解 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 满足恒等式

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)}{\partial t_0} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)}{\partial x_i^0} f_i(t_0, \mathbf{x}_0) \equiv \mathbf{0}.$$

证明：由所给初值问题的等价积分方程

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau)) d\tau$$

求导易知 $\mathbf{y}_1(t) := \frac{\partial}{\partial t_0} \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 满足初值问题

$$\frac{d\mathbf{y}_1}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \right) \mathbf{y}_1, \quad \mathbf{y}_1(t_0) = -\mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0).$$

$\mathbf{y}_2(t) := \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 满足初值问题

$$\frac{dy_2}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \right) \mathbf{y}_2, \quad \mathbf{y}_2(t_0) = \mathbf{I}.$$

这里 $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0))$ 为向量值函数 $f(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0))$ 关于 \mathbf{x} 的 Jacobi 矩阵.

$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 也作类似理解. 令

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= \frac{\partial \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)}{\partial t_0} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)}{\partial x_i^0} f_i(t_0, \mathbf{x}_0) \\ &= \frac{\partial \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)}{\partial t_0} + \frac{\partial \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0), \end{aligned}$$

显然有 $\mathbf{z}(t_0) = -\mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0) + \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. 代入上述初值问题得到 $\mathbf{z}(t)$ 满足

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \right) \mathbf{z}, \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{0},$$

它有唯一解 $\mathbf{z}(t) \equiv \mathbf{0}$, 因此所给恒等式成立. \square

习 题 5.6

1. 证明改进的 Euler 公式具有二阶精度.

证明: 对改进的 Euler 公式有

$$T_{n+1} = x(t_{n+1}) - x(t_n) - \frac{h}{2} [f(t_n, x(t_n)) + f(t_{n+1}, x_p)],$$

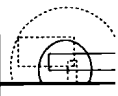
其中 $x_p = x(t_n) + hf(t_n, x(t_n)) = x(t_n) + x'(t_n)h$. 由 Taylor 展开得

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + x'(t_n)h + \frac{h^2}{2}x''(t_n) + \frac{h^3}{6}x'''(t_n) + O(h^4),$$

其中

$$x''(t_n) = \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, x(t_n)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_n, x(t_n))x'(t_n),$$

$$\begin{aligned} x'''(t_n) &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_n, x(t_n)) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(t_n, x(t_n))x'(t_n) \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_n, x(t_n))(x'(t_n))^2 + \frac{\partial f}{\partial x}(t_n, x(t_n))x''(t_n). \end{aligned}$$



再由二元函数的 Taylor 展开得

$$f(t_{n+1}, x_p) = f(t_n, x(t_n)) + hA_n + \frac{h^2}{2}B_n + O(h^3),$$

其中

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, x(t_n)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_n, x(t_n))x'(t_n) \\ B_n &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_n, x(t_n)) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(t_n, x(t_n))x'(t_n) \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_n, x(t_n))(x'(t_n))^2. \end{aligned}$$

由此得

$$T_{n+1} = -\frac{h^3}{12} \left(x'''(t_n) - 3\frac{\partial f}{\partial x}(t_n, x(t_n))x''(t_n) \right) + O(h^4).$$

因此改进的 Euler 公式具有二阶精度. \square

2. 选择你最熟悉的算法语言编写程序分别用 Euler 折线法, 改进的 Euler 方法和四阶 Runge-Kutta 公式求解初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

取步长 $h=0.1$, 用所编程序求解初值问题

$$\frac{dx}{dt} = x + \sin t, \quad x(0) = \frac{1}{2},$$

其中 $t \in [0, 1]$, 并与它的解析解 $x(t) = e^t - \frac{1}{2}(\sin t + \cos t)$ 进行比较.

解: 容易将上述三种方法用 Maple 程序, 或 Matlab, Mathematica 程序来实现, 计算结果如下列各表所示, 其中 $x(t_n)$ 为准确值, x_n 为近似值, $|x(t_n) - x_n|$ 为绝对误差.

用 Euler 折线法, 在 Maple 环境下运行如下程序:

```

EulerMethod:= proc(h)
  local f,g,i,X,T,t,reslt,xn,yn,tmp;

  f:= exp(T)- 0.5*(sin(T)+ cos(T));
  g:= X+ sin(T);

  xn||0:= 0.5;
  t:= 0.0;
  for i from 1 to 10 do
    tmp:= xn||(i- 1);
    xn||i:= tmp+ h* evalf(subs(X= tmp,T= t,g));
    t:= t+ h;
    yn:= evalf(subs(T= t,f));
    print(yn,xn||i,abs(yn- xn||i));
  od;
end;
EulerMethod(0.1);

```

计算结果如下:

t_n	$x(t_n)$	x_n	$ x(t_n) - x_n $
0.1	0.5577521274	0.5500000000	0.0077521274
0.2	0.6320348041	0.6149833417	0.0170514624
0.3	0.7244304604	0.6963486090	0.0280818514
0.4	0.8365850300	0.7955354906	0.0410495394
0.5	0.9702172210	0.9140308739	0.0561863471
0.6	1.1271297560	1.0533765150	0.0737532410
0.7	1.3092227690	1.2151784140	0.0940443550
0.8	1.5185095280	1.4011180240	0.1173915040
0.9	1.7571346720	1.6129654360	0.1441692360
1.0	2.0273951830	1.8525946710	0.1748005120

用改进的 Euler 方法,在 Maple 环境下运行如下程序:



```

ImprvEuler:= proc(h)
  local f,g,i,X,T,t,reslt,xnp,xn,yn,tmp;

  f:= exp(T)- 0.5* (sin(T)+ cos(T));
  g:= X+ sin(T);

  xn||0:= 0.5;
  t:= 0.0;
  for i from 1 to 10 do
    tmp:= xn||(i- 1);
    xnp:= tmp+ h* evalf(subs(X= tmp,T= t,g));
    xn||i:= tmp+ h/2.0* (evalf(subs(X= tmp,T= t,g))
      + evalf(subs(X= xnp,T= t+ h,g)));
    t:= t+ h;
    yn:= evalf(subs(T= t,f));
    print(yn,xn||i,abs(yn- xn||i));
  od;
end;
ImprvEuler(0.1);

```

计算结果如下：

t_n	$x(t_n)$	x_n	$ x(t_n) - x_n $
0.1	0.5577521274	0.5574916708	0.0002604566
0.2	0.6320348041	0.6314526007	0.0005822034
0.3	0.7244304604	0.7234579473	0.0009725131
0.4	0.8365850300	0.8351455603	0.0014394697
0.5	0.9702172210	0.9682251299	0.0019920911
0.6	1.1271297560	1.1244892970	0.0026404590
0.7	1.3092227690	1.3058268940	0.0033958750
0.8	1.5185095280	1.5142384950	0.0042710330
0.9	1.7571346720	1.7518544680	0.0052802040
1.0	2.0273951830	2.0209557160	0.0064394670

用四阶 Runge-Kutta 公式，在 Maple 环境下运行如下程序：

```

RK4:= proc(h)
  local f,g,i,X,T,t,K1,K2,K3,K4,xn,yn,tmp;

  f:= exp(T)- 0.5*(sin(T)+ cos(T));
  g:= X+ sin(T);
  xn||0:= 0.5;
  t:= 0.0;
  for i from 1 to 10 do
    tmp:= xn||(i- 1);
    K1:= evalf(subs(X= tmp,T= t,g));
    K2:= evalf(subs(X= tmp+ h* K1/2,T= t+ h/2,g));
    K3:= evalf(subs(X= tmp+ h* K2/2,T= t+ h/2,g));
    K4:= evalf(subs(X= tmp+ h* K3,T= t+ h,g));
    xn||i:= tmp+ h/6.0*(K1+ 2* K2+ 2* K3+ K4);

    t:= t+ h;
    yn:= evalf(subs(T= t,f));
    print(yn,xn||i,abs(yn- xn||i));
  od;
end;
RK4(0.1);

```

计算结果如下:

t_n	$x(t_n)$	x_n	$ x(t_n) - x_n $
0.1	0.5577521274	0.5577520137	1.137×10^{-7}
0.2	0.6320348041	0.6320345505	2.536×10^{-7}
0.3	0.7244304604	0.7244300364	4.240×10^{-7}
0.4	0.8365850300	0.8365844026	6.274×10^{-7}
0.5	0.9702172210	0.9702163519	8.691×10^{-7}
0.6	1.1271297560	1.1271286030	1.153×10^{-6}
0.7	1.3092227690	1.3092212840	1.485×10^{-6}
0.8	1.5185095280	1.5185076550	1.873×10^{-6}
0.9	1.7571346720	1.7571323510	2.321×10^{-6}
1.0	2.0273951830	2.0273923460	2.837×10^{-6}



3. 取步长 $h=0.1$, 用四阶 Runge-Kutta 公式计算积分

$$\int_0^1 e^{-t^2} dt$$

的近似值.

解: 设 $x=x(t)$ 是初值问题

$$\frac{dx}{dt} = e^{-t^2}, \quad x(0) = 0$$

的解, 则所求积分为 $x(1)$. 取步长 $h=0.1$, 用四阶 Runge-Kutta 公式计算 $x(t)$ 的近似值, 读者可将上一题的 Maple 程序作适当修改, 可得如下结果:

$$x(0.1) = 0.0996677054, \quad x(0.2) = 0.1973651091,$$

$$x(0.3) = 0.2912379904, \quad x(0.4) = 0.3796529670,$$

$$x(0.5) = 0.4612811420, \quad x(0.6) = 0.5351536597,$$

$$x(0.7) = 0.6006857887, \quad x(0.8) = 0.6576699573,$$

$$x(0.9) = 0.7062415918, \quad x(1.0) = 0.7468241839.$$

因此所求积分的近似值为 0.7468241839.

第六章 定性理论初步

微分方程定性理论是由法国数学家 Poincaré(1854~1912)和俄罗斯数学家 Liapunov(1857~1918)在 19 世纪八十年代共同开创的. 此后美国数学家 Birkhoff(1884~1944)继承和发展了定性理论并提出了动力系统的概念. 定性理论目前已成为一个重要的数学分支, 并广泛渗透到了自然科学, 工程技术和社会科学的各个领域, 它主要研究一个动力系统在相空间上的轨道分布状况, 本章围绕这一目标介绍了定性理论的一些基本概念和方法.

6.1 主要内容

1. 自治系统的解的基本性质

如下形式的方程组称为自治系统

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (6.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$. 这里函数 f 只和 x 有关, 而与时间 t 无关. 系统(6.1)的解具有如下非自治系统所不具备的基本性质:

定理 6.1 设自治系统(6.1)满足解的存在唯一性条件并且解的存在区间是 $(-\infty, +\infty)$. 则方程的解 $\varphi(t; t_0, x_0)$ 具有

(i) **积分曲线的平移不变性**: 对任意常数 τ , 函数 $\varphi(t+\tau; t_0, x_0)$ 也是(6.1)的解. 进而, $\varphi(t-t_0; 0, x_0) \equiv \varphi(t; t_0, x_0)$, 因此初值取在 $t_0=0$ 的所有解 $\varphi(t, x_0) := \varphi(t; 0, x_0)$ 的性质代表了方程组(6.1)的一切解的性质.

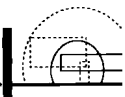
(ii) **群**的性质: $\varphi(0, x_0) = x_0$, $\varphi(t, \varphi(s, x_0)) = \varphi(t+s, x_0)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$.

(iii) **轨道唯一性**: 通过相空间的任意一点只有方程组(6.1)唯一的一条轨道.

如果(6.1)的解的存在区间不是 $(-\infty, +\infty)$, 我们可以另外考虑自治系统

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(x)}{1 + \|f(x)\|^2}. \quad (6.2)$$

这个方程组与(6.1)在相空间上有相同的轨道.



2. 动力系统的概念

将定理 6.1 关于自治系统的解的性质进行抽象归纳就可导出动力系统的概念. 设 $\{\varphi^t: t \in \mathbb{R}\}$ 是相空间 \mathbb{R}^n 上的一个单参数变换族, 满足

- (1) $\varphi^t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是连续的,
- (2) φ^0 为恒同变换, 即 $\varphi^0(x) \equiv x$,
- (3) $\varphi^t, \varphi^s = \varphi^{t+s}$.

则称单参数连续变换族 $\{\varphi^t: t \in \mathbb{R}\}$ 为一个动力系统或流. 若 t 在 \mathbb{R} 中连续取值, 我们称之为连续动力系统. 若 t 取值在 \mathbb{Z} 时, 称 $\{\varphi^t: t \in \mathbb{Z}\}$ 为离散动力系统.

3. Liapunov 稳定性

Liapunov 稳定性是定性理论中一个非常重要的概念, 它不同于第五章讨论的解对初值的连续依赖性. 在第五章讨论的解对初值的连续依赖性只考虑了自变量在有限闭区间上的情况, 而 Liapunov 稳定性考察的是方程的解中自变量 t 在无限区间上对初值的依赖性. 其定义如下:

给定微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (6.3)$$

设 $x = \varphi(t)$ 是它的一个特解, 在区间 $[t_0, \infty)$ 上有定义. 如果对任意给定的 $\epsilon > 0$, 必能找到 $\delta = \delta(t_0, \epsilon) > 0$, 使得只要

$$\|x_0 - \varphi(t_0)\| < \delta,$$

方程组 (6.3) 满足初值条件 $x(t_0) = x_0$ 的解 $x = x(t; t_0, x_0)$ 就在区间 $[t_0, \infty)$ 上有定义并且满足

$$\|x(t; t_0, x_0) - \varphi(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0,$$

我们就称这个解是 (Liapunov 意义下) 稳定的. 进而, 如果 $x = \varphi(t)$ 是 Liapunov 稳定的, 而且存在常数 $\delta_0 > 0$ 使得当 $\|x_0 - \varphi(t_0)\| < \delta_0$ 时有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t; t_0, x_0) - \varphi(t)\| = 0,$$

则称解 $x = \varphi(t)$ 是 (Liapunov 意义下) 渐近稳定的. 显然, 渐近稳定包含稳定性和吸引性, 其中 $\varphi(t_0)$ 的 δ_0 -邻域就是一个吸引区域. 如果 $\delta_0 = \infty$, 则称解 $x = \varphi(t)$ 是全局渐近稳定的.

如果解 $x = \varphi(t)$ 不是稳定的, 即存在常数 $\epsilon > 0$, 使得对任意给定的 $\delta > 0$, 都有一

一个 x_0 满足 $\|x_0 - \varphi(t_0)\| < \delta$, 使得对方程组 (6.3) 满足初值条件 $x(t_0) = x_0$ 的解 $x = x(t; t_0, x_0)$, 存在一个 $t_1 > t_0$, 使得

$$\|x(t_1; t_0, x_0) - \varphi(t_1)\| = \varepsilon,$$

则称解 $x = \varphi(t)$ 是 (Liapunov 意义下) 不稳定的.

4. 线性方程组的零解稳定性

对一般的线性方程组

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (6.4)$$

我们有以下结果

引理 6.1 (i) 线性方程组 (6.4) 的零解是稳定的, 当且仅当 (6.4) 的所有的解都是有界的, 即存在常数 $K > 0$ 使得

$$\|X(t)\| \leq K, \quad \forall t \geq t_0,$$

其中 $X(t)$ 是 (6.4) 满足 $X(t_0)$ 为单位矩阵 I 的基本解矩阵.

(ii) 线性方程组 (6.4) 的零解是渐近稳定的, 当且仅当

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0.$$

当 $A(t)$ 是常数矩阵时, 由引理 6.1 和常系数齐次线性方程组的解结构, 可得到以下其零解稳定性的判别方法.

定理 6.2 设矩阵 $A(t)$ 为常矩阵 A , 则

(i) 方程组 (6.4) 的零解是渐近稳定的, 当且仅当 A 的全部特征根的实部都是负数.

(ii) 方程组 (6.4) 的零解是稳定的, 当且仅当 A 的全部特征根的实部都是非正的, 且实部为零的特征根所对应的 Jordan 块都是一阶的.

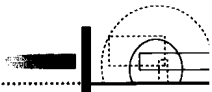
(iii) 方程组 (6.4) 的零解是不稳定的, 当且仅当 A 的特征根中至少有一个实部为正, 或至少有一个特征根实部为零且其对应的 Jordan 块的阶数大于 1.

5. 由线性近似判断方程零解的稳定性

考虑如下形式的方程组:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + R(t, x), \quad (6.5)$$

其中 $A(t)$ 是一个对 $t \geq t_0$ 连续的 $n \times n$ 阶矩阵函数, n 阶向量函数 $R(t, x)$ 在区域 $G = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; t \geq t_0, \|x\| \leq M\}$ 上连续、关于 x 满足局部 Lipschitz 条件, 并且进一步



假设对 $t \geq t_0$ 一致地满足 $R(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ 和

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|R(t, \mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0. \quad (6.6)$$

下面的定理表明在一定的条件下(6.5)的零解的稳定性可由其线性近似完全决定.

定理 6.3 若矩阵 $A(t)$ 是常矩阵 A 且条件(6.6)满足. 则

- (i) 当 A 的全部特征根的实部都是负数时, 方程组(6.5)的零解是渐近稳定的.
- (ii) 当 A 的特征根中至少有一个实部为正时, 方程组(6.5)的零解是不稳定的.

6. Liapunov 直接法

定理 6.3 给出了一个判断方程零解稳定性的简便的方法, 具有很大的实用价值, 但是当矩阵 A 具有实部为零的特征根的情形, 即在所谓的**临界情形**下, 这种方法就失效了. 这时 **Liapunov 直接法**, 也称为 Liapunov 第二方法, 成为研究稳定性问题的基本方法. 其基本思想是: 借助所谓的 **Liapunov 函数** 来实时监测零解附近任意一个解 $\mathbf{x}(t)$ 的轨道是否越走距离零解越近或始终不远离零解. 具体来说, 考虑自治系统

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (6.7)$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 且 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在区域 $G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \|\mathbf{x}\| \leq M\}$ 内连续可微. 我们有

定理 6.4 (Liapunov 稳定性判据)

(i) 若存在定正函数 $V(\mathbf{x})$, 其通过方程组(6.7)的导数 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.7)}$ 为常负函数, 则方程组(6.7)的零解是稳定的.

(ii) 若存在定正函数 $V(\mathbf{x})$ 使得导数 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.7)}$ 是定负的, 则方程组(6.7)的零解是渐近稳定的.

(iii) 若存在定正函数 $V(\mathbf{x})$ 使得导数 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.7)}$ 是定正的, 则方程组(6.7)的零解是不稳定的.

(iv) 若存在函数 $V(\mathbf{x})$ 和非负常数 μ , 在 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的任意小邻域内都存在 $\bar{\mathbf{x}}$ 使得函数 $V(\bar{\mathbf{x}}) > 0$, 而且导数 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.7)}$ 可表述为

$$\frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} = \mu V(\mathbf{x}(t)) + W(\mathbf{x}(t)), \quad (6.8)$$

其中当 $\mu=0$ 时 $W(x)$ 为定正函数, 而当 $\mu \neq 0$ 时 $W(x)$ 为常正函数, 则方程组(6.7)的零解是不稳定的.

7. 平面线性系统的平衡点分析

对平面线性系统

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy, \quad (6.9)$$

用 A 表示(6.9)右端的系数矩阵, 则当原点为初等平衡点, 即 $\det A \neq 0$ 时, 其平衡点的定性性质可由 A 的特征根分类如下:

(1) 若 A 的特征根 λ, μ 为相异实根, 则当 $\lambda\mu > 0$ 时, 平衡点为两向结点(或正常结点), 且当 λ, μ 同为负数时, 平衡点渐近稳定, 当 λ, μ 同为正数时, 不稳定; 当 $\lambda\mu < 0$ 时, 平衡点为鞍点, 不稳定.

(2) 若 A 的特征根为重根 λ , 则当 A 可对角化时, 平衡点为星形结点(或临界结点); A 不可对角化时, 平衡点为单向结点(或退化结点). 在这两种情况下, 当 $\lambda < 0$ 时, 平衡点是渐近稳定的, 当 $\lambda > 0$ 时, 平衡点不稳定.

(3) 若 A 的特征根为一对共轭复根 $\alpha \pm i\beta$, 则当 $\alpha = 0$ 时, 平衡点为中心, 它是稳定的但不是渐近稳定的. 当 $\alpha \neq 0$ 时, 平衡点为焦点, 且当 $\alpha < 0$ 时渐近稳定, 当 $\alpha > 0$ 时不稳定的.

上述结果也可由

$$T := \text{tr}(A), \quad D := \det(A), \quad \Delta := T^2 - 4D$$

三个量之间的相互关系来判定, 如图 6.1 所示. 其中抛物线 $\Delta=0$ 对应着星形结点或单向结点, 正半 D 轴对应着中心. 这几类平衡点为初等平衡点, T 轴对应于 $\det A = 0$ 的情况, 此时平衡点为退化平衡点(或高阶平衡点).

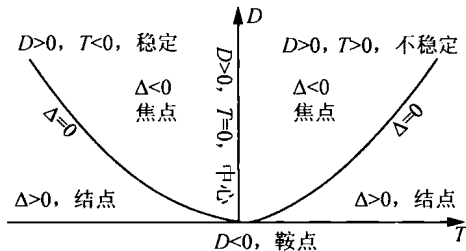
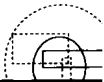


图 6.1 平面线性系统平衡点的分类与 T, D, Δ 的关系



8. 闭轨的存在性

在研究系统的相图结构时, 周期解或闭轨对我们了解系统在远离平衡点之处的情况是非常重要的. 对非线性系统而言, 还存在孤立的闭轨, 称为**极限环**. 给定一个平面非线性系统, 我们对它进行定性分析时一个基本问题就是它是否有极限环? 如果有, 极限环的数目是多少以及它们的位置是怎样的? 这些问题都是十分困难的. 对平面非线性系统

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y), \quad (6.10)$$

如下的 Poincaré-Bendixson 环域定理是判断闭轨和极限环存在性的重要方法:

定理 6.5 (Poincaré-Bendixson 环域定理) 设函数 $X(x, y)$ 和 $Y(x, y)$ 为 xy 坐标平面上某区域 G 内的连续可微函数. 如果在 G 内存在有界环形闭区域

$$\bar{D} = L_1 \cup D \cup L_2,$$

其中 L_1 是 D 的内边界、 L_2 是 D 的外边界、而 L_1, L_2 都是简单闭曲线且都不是系统 (6.10) 的闭轨, 满足条件: 在 \bar{D} 内不含系统 (6.10) 的平衡点, 且系统 (6.10) 从 L_1 和 L_2 上出发的轨道都不能离开 \bar{D} , 或都不能进入 \bar{D} , 则系统 (6.10) 在 D 内存在一条闭轨 Γ .

下面的 Bendixson 判据及其推广, 即 Dulac 判据常用来判别闭轨的不存在性.

定理 6.6 (Bendixson 判据) 在 (6.10) 中设函数 $X(x, y)$ 和 $Y(x, y)$ 在 xy 平面上某区域 G 内连续可微. 如果在单连通区域 $D \subset G$ 内函数

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$$

不变号且在 D 内任何子区域上都不恒为零, 则系统 (6.10) 在 D 内不存在闭轨.

定理 6.7 (Dulac 判据) 在 (6.10) 中设 $X(x, y)$ 和 $Y(x, y)$ 为 xy 平面上某区域 G 内的连续可微函数. 如果在 G 内存在单连通区域 D 及 D 内连续可微函数 $B(x, y)$, 使得在 D 内函数

$$\frac{\partial(BX)}{\partial x} + \frac{\partial(BY)}{\partial y}$$

不变号且在 D 内的任何子区域上都不恒为零, 则 (6.10) 在 D 内不存在闭轨.

9. 平面 Hamilton 系统

带 n 个自由度的 **Hamilton 系统**的一般形式是

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (6.11)$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$, $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 为系统(6.11)的 Hamilton 函数. Hamilton 系统是物理学中一类重要的系统, 具有如下重要性质, 它表明 Hamilton 系统是保守系统, 即满足能量守恒定律:

定理 6.8 Hamilton 系统(6.11)的 Hamilton 函数 $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 沿着(6.11)的轨道等于常数.

带一个自由度的 Hamilton 系统即为平面 Hamilton 系统, 其中“动能+势能”型 Hamilton 系统

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) \quad (6.12)$$

是一类常见的平面 Hamilton 系统, 其 Hamilton 函数为

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + G(x), \quad G(x) = \int_0^x g(s) ds.$$

这里 $G(x)$ 是系统运动的势能, 而 $\frac{y^2}{2}$ 是系统运动的动能.

定理 6.9 系统(6.12)的平衡点都在 x 轴上. $(x_0, 0)$ 为平衡点当且仅当 x_0 为势能函数 $G(x)$ 的临界点. 当 x_0 为 $G(x)$ 的严格极大值点时, 即 $G''(x_0) < 0$, $(x_0, 0)$ 为系统(6.12)的鞍点. 当 x_0 为 $G(x)$ 的严格极小值点时, 即 $G''(x_0) > 0$, $(x_0, 0)$ 为系统(6.12)的中心.

由定理 6.9, 如果势能函数 $G(x)$ 仅有孤立临界点, 并且每个临界点都是严格极值点, 则不难由势能函数 $G(x)$ 的图象对应地在 xy 坐标系中画出系统(6.12)的相图.

6.2 典型例题

例 6.1 利用 Liapunov 直接法讨论方程组

$$\frac{dx}{dt} = y + 2y^3, \quad \frac{dy}{dt} = -x - 2x^3 \quad (6.13)$$

的零解稳定性.

解: 构造 Liapunov 函数 $V(x, y) = x^2 + y^2 + x^4 + y^4$, 它是定正的, 其全导数为

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.13)} = (2x + 4x^3)(y + 2y^3) + (2y + 4y^3)(-x - 2x^3) \equiv 0.$$



因而方程组(6.13)的零解是稳定的.

例 6.2 讨论非线性方程组

$$(A) \begin{cases} \dot{x} = y - x^3, \\ \dot{y} = -x - 3y^3. \end{cases} \quad (B) \begin{cases} \dot{x} = y + x^3, \\ \dot{y} = -x + 3y^3. \end{cases}$$

的零解稳定性.

解: 构造 Liapunov 函数 $V(x, y) = x^2 + y^2$, 它是定正的, 且当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时,

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(A)} = -2(x^4 + 3y^4) < 0,$$

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(B)} = 2(x^4 + 3y^4) > 0.$$

由 Liapunov 稳定性判据知道系统(A)的零解是渐近稳定的, 而系统(B)的零解是不稳定的.

由这个例子知道, 有时仅凭系统的线性部分是不能判定平衡点的稳定性的.

例 6.3 判断下列线性系统的平衡点的类型和稳定性, 并画出相图:

$$(1) \frac{dx}{dt} = 3x + 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 3x - 2y.$$

$$(2) \frac{dx}{dt} = -x + 4y, \quad \frac{dy}{dt} = -9x + y.$$

解: (1) 所给系统的系数矩阵的特征值为 $\lambda_1 = -3$ 和 $\lambda_2 = 4$, 是一对异号实根, 因此平衡点 $(0, 0)$ 为鞍点, 不稳定. 它有两个特殊方向, 容易求得对应于 λ_1 的特征向量 $\xi_1 = (1, -3)^T$, 对应于 λ_2 的特征向量 $\xi_2 = (2, 1)^T$, 相应于 ξ_1 的直线上面的轨道都是继续沿着它趋向平衡点, 相应于 ξ_2 的直线上面的轨道都是继续沿着它背离平衡点, 由此可画出原系统在 xy 平面上的相图, 见图 6.2. 读者也可运行如下 Maple 程序画出原系统在 xy 平面上的相图:

```
with(DEtools):
with(plots):
g0:= dfieldplot(diff(y(x), x)=(3*x-2*y)/(3*x+2*y),
  y(x), x=-1.1, y=-1.1, color=BLACK);
eqs:= {diff(x(t), t)=3*x(t)+2*y(t),
  diff(y(t), t)=3*x(t)-2*y(t)};
inil:= {x(0)=0, y(0)=0.4};
ini2:= {x(0)=0, y(0)=-0.4};
```

```

ini3:= {x(0)= - 0.4, y(0)= 0};
ini4:= {x(0)= 0.4, y(0)= 0};
sols1:= dsolve(eqs union ini1, {x(t), y(t)}, numeric);
sols2:= dsolve(eqs union ini2, {x(t), y(t)}, numeric);
sols3:= dsolve(eqs union ini3, {x(t), y(t)}, numeric);
sols4:= dsolve(eqs union ini4, {x(t), y(t)}, numeric);

g1:= odeplot(sols1, [x(t), y(t)], - 1..1,
    numpoints= 500, color= black, thickness= 3);
g2:= odeplot(sols2, [x(t), y(t)], - 1..1,
    numpoints= 500, color= black, thickness= 3);
g3:= odeplot(sols3, [x(t), y(t)], - 1..1,
    numpoints= 500, color= black, thickness= 3);
g4:= odeplot(sols4, [x(t), y(t)], - 1..1,
    numpoints= 500, color= black, thickness= 3);

p1:= plot([[t, - 3* t, t= - 1..1], [t, t/2, t= - 1..1]],
    color= [black], linestyle= [SOLID, SOLID],
    thickness= 3);
display(g0, g1, g2, g3, g4, p1);

```

(2) 所给系统的系数矩阵的特征值为 $\lambda_1 = \sqrt{35}i$, $\lambda_2 = -\sqrt{35}i$, 是一对纯虚根, 因此平衡点 $(0, 0)$ 为中心, 是稳定的但不是渐近稳定的. 作非奇异线性变换: $u = x - 4y$, $v = \sqrt{35}x$, 则有

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{35}v, \quad \frac{dv}{dt} = -\sqrt{35}u,$$

由此不难画出变换后的系统在 uv 平面上的相图. 由此可画出原系统在 xy 平面上的相图, 见图 6.3. 读者也可将上一小节的 Maple 程序作适当修改, 画出原系统在 xy 平面上的相图.

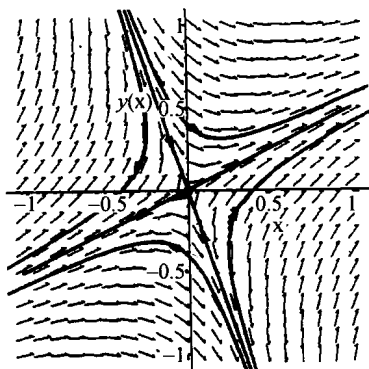


图 6.2 例 6.3(1)

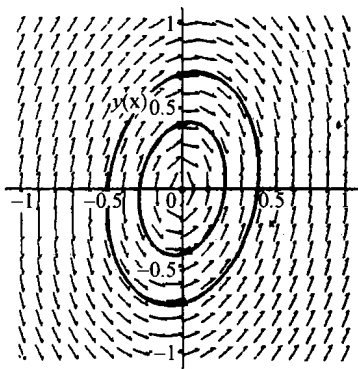


图 6.3 例 6.3(2)

例 6.4 求出下述系统的平衡点，判断其类型和稳定性：

$$\frac{dx}{dt} = x - y(1 + y - x), \quad \frac{dy}{dt} = x(2 + x).$$

解：求解代数方程组

$$x - y(1 + y - x) = 0, \quad x(2 + x) = 0,$$

得到该系统有 4 个平衡点： $O: (0, 0)$, $A_1: (0, -1)$, $A_2: (-2, -2)$, $A_3: (-2, -1)$.

对平衡点： $O: (0, 0)$ ，其线性部分的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

它有一对共轭复特征根 $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{7}i)$ ，因此是不稳定焦点。

对平衡点： $A_1: (0, -1)$ ，其线性部分的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

它有两个异号特征根 $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ ，因此是鞍点，不稳定。

类似地，通过分析平衡点处系统线性部分系数矩阵的特征值可知 A_2 是稳定焦点； A_3 是鞍点，不稳定。因而这几个平衡点都是双曲平衡点。

例 6.5 讨论方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)(\sqrt{x^2 + y^2} - 2), \\ \dot{y} = x + y(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)(\sqrt{x^2 + y^2} - 2). \end{cases}$$

是否存在极限环, 若有, 判定极限环的稳定性.

解: 引入极坐标 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 可将原系统化为

$$\frac{dr}{dt} = r(r-1)(r-2), \quad \frac{d\theta}{dt} = 1. \quad (6.14)$$

显然, $r=1$, $r=2$ 为方程组 (6.14) 的两个特解, 它们对应于原系统的闭轨.

由 (6.14) 知当 $r < 1$ 时, $r'(t) > 0$, 故当 $t \rightarrow +\infty$ 时闭轨 $r=1$ 内侧的轨道都盘旋地趋于它; 当 $1 < r < 2$ 时, $r'(t) < 0$, 故当 $t \rightarrow +\infty$ 时闭轨 $r=1$ 外侧的轨道都盘旋地趋于它, 当 $t \rightarrow -\infty$ 时闭轨 $r=2$ 内侧的轨道都盘旋地趋于它; 当 $r > 2$ 时, $r'(t) > 0$, 故当 $t \rightarrow -\infty$ 时闭轨 $r=2$ 外侧的轨道都盘旋地趋于它. 所以, $r=1$ 即 $x^2 + y^2 = 1$ 为稳定极限环, $r=2$ 即 $x^2 + y^2 = 2$ 为不稳定极限环.

例 6.6 讨论方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y - 2xy^2, \\ \dot{y} = y + x^3 - x^2y. \end{cases}$$

是否有极限环.

解: 对平面上任一点 (x, y) 有

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = -2 - 2y^2 + 1 - x^2 = -(1 + x^2 + 2y^2) < 0.$$

由 Bendixson 判据知所给系统不存在闭轨, 从而也没有极限环.

例 6.7 画出平面 Hamilton 系统 $\dot{x} + g(x) = 0$ 的相图, 其中

$$g(x) = x(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-4).$$

解: 显然所给系统的势能函数为

$$G(x) = \int_0^x g(s) ds = \frac{1}{5}x^5 - \frac{9}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + 3x^2.$$

易知 $x = -1$ 和 $x = \frac{3}{2}$ 是 $G(x)$ 的两个孤立严格极大值点, 它们对应于原系统的鞍点 $(-1, 0)$



和 $(\frac{3}{2}, 0)$; $x=0$ 和 $x=4$ 是 $G(x)$ 的两个孤立严格极小值点, 它们对应于原系统的中心 $(0, 0)$ 和 $(4, 0)$. 由此不难画出系统的相图, 见图 6.4. 读者也可运行如下 Maple 程序画出原系统在 xy 平面上的相图:

```
with(DEtools):
with(plots):
fun0:= (x,y)->-x*(x+1)*(x-3/2)*(x-4)/y;
fun1:= x->-2/5*x^5+9/4*x^4-x^3/3-6*x^2;
g0:= dfieldplot(diff(y(x),x)=fun0(x,y),y(x),
  x=-2..5,y=-9..9,color=BLACK):

g1:= plot(sqrt(fun1(x)+181/60),x=-2..2,
  color=black,thickness=3,numpoints=5000):
g2:= plot(-sqrt(fun1(x)+181/60),x=-2..2,
  color=black,thickness=3,numpoints=5000):

g3:= plot(sqrt(fun1(x)+2007/320),x=-2..5,
  color=black,thickness=3,numpoints=5000):
g4:= plot(-sqrt(fun1(x)+2007/320),x=-2..5,
  color=black,thickness=3,numpoints=5000):

g5:= plot(sqrt(fun1(x)-20),x=2..5,
  color=black,thickness=3,numpoints=5000):
g6:= plot(-sqrt(fun1(x)-20),x=2..5,
  color=black,thickness=3,numpoints=5000):

g7:= plot(sqrt(fun1(x)+25),x=-2..6,
  color=black,thickness=3,numpoints=5000):
g8:= plot(-sqrt(fun1(x)+25),x=-2..6,
  color=black,thickness=3,numpoints=5000):

g9:= plot(sqrt(fun1(x)+1.5),x=-1..2,
  color=black,thickness=3,numpoints=5000):
```

```

g10:= plot(- sqrt(fun1(x)+ 1.5),x= - 1..2,
color= black,thickness= 3,numpoints= 5000):
g11:= plot(sqrt(fun1(x)+ 4.5),x= - 2..1.5,
color= black,thickness= 3,numpoints= 5000):
g12:= plot(- sqrt(fun1(x)+ 4.5),x= - 2..1.5,
color= black,thickness= 3,numpoints= 5000):

g13:= plot(sqrt(fun1(x)- 10),x= - 2..- 1,
color= black,thickness= 3,numpoints= 5000):
g14:= plot(- sqrt(fun1(x)- 10),x= - 2..- 1,
color= black,thickness= 3,numpoints= 5000):

display(g0,g1,g2,g3,g4,g5,g6,g7,g8,g9,g10,g11,g12,g13,g14);

```

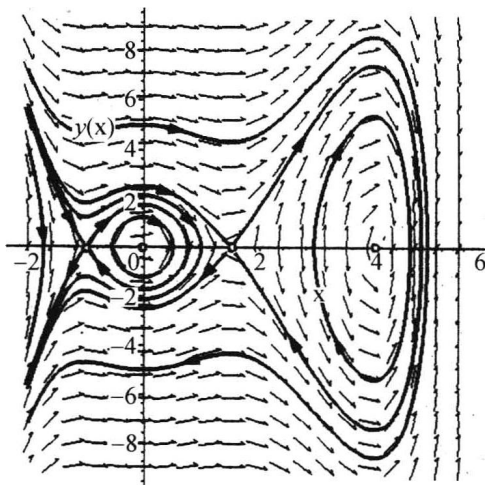


图 6.4 例 6.7



6.3 习题与解答

习 题 6.1

1. 求下列系统的平衡点:

$$(1) \frac{dx}{dt} = x(2-x).$$

$$(2) \frac{dx}{dt} = x(-\alpha + ry), \quad \frac{dy}{dt} = y(\beta - sx), \quad \text{其中 } \alpha, \beta, r, s \text{ 均为正常数.}$$

解: (1) 令 $x(2-x)=0$, 求得该系统有两个平衡点 $x_1=0$ 和 $x_2=2$.

(2) 求解代数方程组

$$x(-\alpha + ry) = 0, \quad y(\beta - sx) = 0,$$

得到该系统有两个平衡点: $(0, 0)$ 和 $(\beta/s, \alpha/r)$.

2. 设 $\{\varphi^t: t \in \mathbb{R}\}$ 是 \mathbb{R}^n 上的一个动力系统. 对任意 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 证明下列之一必成立:

(1) 如果 $t_1 \neq t_2$, 则 $\varphi^{t_1}(x_0) \neq \varphi^{t_2}(x_0)$.

(2) $\varphi^t(x_0) = x_0, \forall t \in \mathbb{R}$.

(3) 存在常数 $T > 0$ 使得 $\varphi^T(x_0) = x_0$, 但 $\varphi^t(x_0) \neq x_0, \forall 0 < t < T$.

证明: 假设(1)不成立, 则存在 $t_1 < t_2$ 使 $\varphi^{t_1}(x_0) = \varphi^{t_2}(x_0)$. 从而由动力系统的定义有:

$$\begin{aligned} \varphi^{t_2 - t_1}(x_0) &= \varphi^{-t_1}(\varphi^{t_2}(x_0)) = \varphi^{-t_1}(\varphi^{t_1}(x_0)) \\ &= \varphi^0(x_0) = x_0. \end{aligned}$$

令 $\sigma = t_2 - t_1 > 0$, 则 $\varphi^\sigma(x_0) = x_0$. 设

$$S = \{\tau \in (0, +\infty): \varphi^\tau(x_0) = x_0\},$$

则 S 非空有下界, 故必有下确界, 设其下确界为 σ_0 .

若 $\sigma_0 = 0$, 则 S 中有序列 $\tau_k \rightarrow 0$. 故 $\forall t \in \mathbb{R}$ 有

$$\sigma_k = t - \left[\frac{t}{\tau_k} \right] \tau_k \rightarrow 0,$$

其中 $[\]$ 表示取整. 由动力系统 $\{\varphi^t: t \in \mathbb{R}\}$ 的连续性, $\varphi^{\sigma_k}(x_0) \rightarrow \varphi^0(x_0) = x_0$. 从而由动力系统的定义有:

$$\varphi^{\sigma_k}(x_0) = \varphi^{\sigma_k}(\varphi^{[t/\tau_k]\tau_k}(x_0)) = \varphi^{\sigma_k}(x_0) \rightarrow x_0.$$

于是 $\varphi^{\sigma_k}(x_0) = x_0$, 即(2)成立.

若 $\sigma_0 \neq 0$, 则 S 中有序列 $\tau_k \rightarrow \sigma_0$. 设 $T = \sigma_0 > 0$, 由 $\{\varphi^t: t \in \mathbb{R}\}$ 的连续性知, $\varphi^T(x_0) = x_0$. 再由 $T = \sigma_0$ 的定义知, $\forall 0 < t < T$, $\varphi^t(x_0) \neq x_0$, 即(3)成立. \square

3. 设 $\{\varphi^t: t \in \mathbb{R}\}$ 是 \mathbb{R}^n 上的一个动力系统. 证明:

(1) 过任一点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 的轨道 $L(x_0)$ 是不变集, 即如果 $x \in L(x_0)$, 则 $\varphi^t(x) \in L(x_0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

(2) 过任一点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 的 ω 极限集 $\omega(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n: \text{存在序列 } t_k \rightarrow +\infty \text{ 使得 } \varphi^{t_k}(x_0) \rightarrow x, k \rightarrow +\infty\}$ 是不变集, 即如果 $x \in \omega(x_0)$ 则 $\varphi^t(x) \in \omega(x_0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

证明: (1) 在 $L(x_0)$ 中任取 $x_* \in L(x_0)$, 则存在 $t_* \in \mathbb{R}$ 使得 $\varphi^{t_*}(x_0) = x_*$. 从而 $\forall t \in \mathbb{R}$ 有

$$\varphi^t(x_*) = \varphi^t(\varphi^{t_*}(x_0)) = \varphi^{t+t_*}(x_0) \in L(x_0),$$

故轨道 $L(x_0)$ 是不变集.

(2) 在 $\omega(x_0)$ 中任取 $x_* \in \omega(x_0)$, 则存在序列 $t_k \rightarrow +\infty$ 使得 $\varphi^{t_k}(x_0) \rightarrow x_*$, $k \rightarrow +\infty$. 令 $\tau_k = t + t_k$, 则序列 $\tau_k \rightarrow +\infty$, 并且

$$\varphi^{\tau_k}(x_0) = \varphi^t(\varphi^{t_k}(x_0)) \rightarrow \varphi^t(x_*).$$

从而 $\varphi^t(x_*) \in \omega(x_0)$, 因此 $\omega(x_0)$ 是不变集. \square

4. 证明(6.2)的解的存在区间是 $(-\infty, +\infty)$.

证明: 显然系统(6.2)右端的函数满足

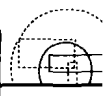
$$\left\| \frac{f(x)}{\sqrt{1 + \|f(x)\|^2}} \right\| \leq 1.$$

由习题 5.3 第二题的结论知它的任一解均可延拓到整个区间 $(-\infty, +\infty)$. \square

习 题 6.2

1. 分别求方程

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3$$



在 $\mu = -1$, $\mu = 0$, $\mu = 1$ 三种情况下的通解并画出积分曲线在 tx 平面上的分布状况, 由此讨论各种情况下每个定常解的稳定性.

解: 当 $\mu = -1$ 时方程有定常解 $x(t) \equiv 0$. 方程的通解为

$$x^2 = \frac{Ke^{-2t}}{1 - Ke^{-2t}},$$

其中 $K \geq 0$ 为任意非负常数. 不难看出定常解 $x(t) \equiv 0$ 渐近稳定. 相应的方向场和积分曲线分布见图 6.5.

当 $\mu = 0$ 时方程有定常解 $x(t) \equiv 0$. 方程的通解为

$$x^2 = \frac{1}{2t + K},$$

其中 K 为任意常数. 不难看出定常解 $x(t) \equiv 0$ 渐近稳定. 相应的方向场和积分曲线分布见图 6.6.

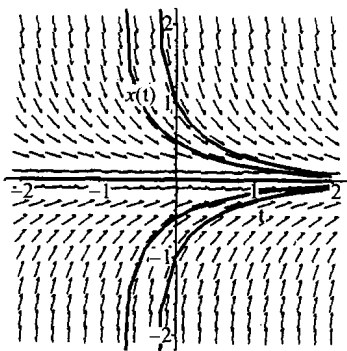


图 6.5 第 1 题: $\mu = -1$

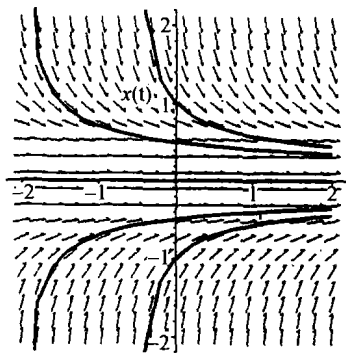


图 6.6 第 1 题: $\mu = 0$

当 $\mu = 1$ 时所给方程有三个定常解 $x_1(t) \equiv -1$, $x_2(t) \equiv 0$, $x_3(t) \equiv 1$. 方程的通解为

$$x^2 = \frac{Ke^{2t}}{1 + Ke^{2t}},$$

其中 K 为任意常数. 不难看出定常解 $x_1(t) \equiv -1$, $x_3(t) \equiv 1$ 渐近稳定, $x_2(t) \equiv 0$ 不稳定. 相应的方向场和积分曲线分布见图 6.7.

注: 读者可将第一章习题 1.2 第 5 题的 Maple 程序作适当修改画出相应的方向场和积分曲线分布图.

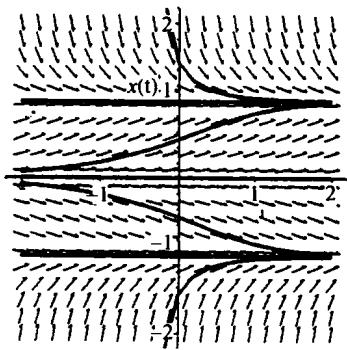


图 6.7 第 1 题: $\mu=1$

2. 设函数 $f(t, x)$ 在区域 $G = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2: t \geq 0, |x| \leq H\}$ 上连续, $f(t, 0) \equiv 0$, 方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

满足解的存在唯一性条件, 其零解稳定, 并且存在 $x_1 > 0$ 和 $x_2 < 0$ 使得分别由初值条件 $x(0) = x_1$ 和 $x(0) = x_2$ 确定的解当 $t \rightarrow +\infty$ 时都趋于零. 证明方程的零解渐近稳定.

证明: 设方程分别由初值条件 $x(0) = x_1 > 0$ 和 $x(0) = x_2 < 0$ 确定的解为 $x = \varphi_1(t)$ 及 $x = \varphi_2(t)$. 由解的存在唯一性知必有

$$\varphi_2(t) < 0 < \varphi_1(t), \quad t \in [0, +\infty).$$

取正数 $\delta_0 = \min(x_1, -x_2)$, 则 $0 < \delta_0 \leq H$. 设 x_0 满足条件 $|x_0| < \delta_0$, 设方程由初值条件 $x(0) = x_0$ 确定的解为 $x = \varphi(t)$, 则由解的存在唯一性知当 $x_0 \geq 0$ 时必有

$$0 \leq \varphi(t) < \varphi_1(t), \quad t \in [0, +\infty),$$

当 $x_0 \leq 0$ 时必有

$$\varphi_2(t) < \varphi(t) \leq 0, \quad t \in [0, +\infty).$$

由假设知在两种情况下都有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0,$$

又因所给方程的零解稳定, 故由定义知所给方程的零解渐近稳定. \square

3. 设 $\mu > 0, b > 0, p, q$ 均为正整数且 $q \geq 2$. 给定方程组

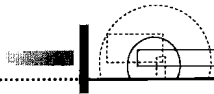
$$\frac{dx}{dt} = 1 - \mu x - x^p y^q, \quad \frac{dy}{dt} = b(x^p y^q - y),$$

作变量变换, 使其定常解 $(x(t), y(t)) \equiv (\frac{1}{\mu}, 0)$ 对应于新方程组的零解并讨论其稳定性.

解: 作变换 $u = x - \frac{1}{\mu}, v = y$, 则原方程组变成

$$\frac{du}{dt} = -\mu u - \left(u + \frac{1}{\mu}\right)^p v^q,$$

$$\frac{dv}{dt} = b \left(\left(u + \frac{1}{\mu}\right)^p v^q - v \right),$$



其线性部分的系数矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}$$

它有两个负实特征根 $-\mu$, $-b$, 因此所给定常解渐近稳定.

4. 考虑下列两个方程组

$$\frac{dx}{dt} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}(t))\mathbf{x}, \quad (6.15)$$

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (6.16)$$

其中 \mathbf{A} 为常数值矩阵, $\mathbf{B}(t)$ 为 $t \geq 0$ 上的连续矩阵值函数, 且满足条件

$$\int_0^{+\infty} \|\mathbf{B}(t)\| dt < \infty,$$

证明若(6.16)的所有解当 $t \geq 0$ 时有界, 则(6.15)的所有解当 $t \geq 0$ 时也有界.

证明: 首先因为(6.15)和(6.16)都是线性方程组且右边的系数矩阵连续, 因此它们的所有解的最大存在区间均为 $(-\infty, +\infty)$. 由常数变易公式, (6.15)满足初值条件 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ 的解为

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}(\tau) \mathbf{x}(\tau) d\tau. \quad (6.17)$$

由假设, 存在常数 $K > 0$, 使得当 $t \geq 0$ 时, $\|e^{\mathbf{A}t}\| \leq K$, 因此由(6.17)知当 $t \geq 0$ 时,

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq K \|\mathbf{x}_0\| + K \int_0^t \|\mathbf{B}(\tau)\| \|\mathbf{x}(\tau)\| d\tau.$$

再由 Gronwall 不等式和假设条件知: 当 $t \geq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\| &\leq K \|\mathbf{x}_0\| \exp\left(K \int_0^t \|\mathbf{B}(\tau)\| d\tau\right) \\ &\leq K \|\mathbf{x}_0\| \exp\left(K \int_0^{+\infty} \|\mathbf{B}(t)\| dt\right) < \infty. \end{aligned}$$

即(6.15)的所有解当 $t \geq 0$ 时也有界. \square

5. 设 $\mu > 0$, 讨论 van der Pol 方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0$$

的零解的稳定性.

解: 令 $y = \frac{dx}{dt}$, 则原方程等价于方程组

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x - \mu(x^2 - 1)y,$$

其线性部分的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$$

当 $0 < \mu < 2$ 时, A 的特征根为一对共轭复数

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\mu \pm \frac{1}{2}\sqrt{4 - \mu^2}i;$$

当 $\mu = 2$ 时, A 的特征根为实重根 2; 当 $\mu > 2$ 时, A 的特征根为相异实根

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\mu \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mu^2 - 4}.$$

在这三种情况下 A 的特征根均有正实部, 因此原方程的零解不稳定.

6. 设 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ 都是正数, $x \geq 0, y \geq 0$, 求出方程组

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha x + \beta x^2 - \gamma xy, \quad \frac{dy}{dt} = -\delta y + \epsilon xy$$

的所有定常解并讨论其稳定性.

解: 求解代数方程组

$$-\alpha x + \beta x^2 - \gamma xy = 0, \quad -\delta y + \epsilon xy = 0,$$

得原方程组有三个定常解:

$$A: (x(t), y(t)) \equiv (0, 0), \quad B: (x(t), y(t)) \equiv \left(\frac{\alpha}{\beta}, 0\right),$$

$$C: (x(t), y(t)) \equiv \left(\frac{\delta}{\epsilon}, \frac{\beta\delta}{\gamma\epsilon} - \frac{\alpha}{\gamma}\right).$$

对定常解 A , 其线性部分的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix}$$

它的两个特征根 $-\alpha, -\delta$ 均为负实数, 因此渐近稳定.

对定常解 B , 其线性部分的系数矩阵为



$$\begin{pmatrix} \alpha & -\frac{\alpha\gamma}{\beta} \\ 0 & -\delta + \frac{\alpha\varepsilon}{\beta} \end{pmatrix}$$

它至少有一个正特征根 α ，因此不稳定。

对定常解 C ，其线性部分的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{\beta\delta}{\varepsilon} & -\frac{\gamma\delta}{\varepsilon} \\ \frac{1}{\gamma}(\beta\delta - \alpha\varepsilon) & 0 \end{pmatrix}$$

令

$$\Delta = \left(\frac{\beta\delta}{\varepsilon}\right)^2 - \frac{4\delta}{\varepsilon}(\beta\delta - \alpha\varepsilon).$$

当 $\Delta < 0$ 时，它的特征根为一对共轭复数

$$\lambda_{1,2} = \frac{\beta\delta}{2\varepsilon} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}i;$$

当 $\Delta = 0$ 时，它的特征根为实重根 $\frac{\beta\delta}{2\varepsilon}$ ；当 $\Delta > 0$ 时，它的特征根为相异实根

$$\lambda_{1,2} = \frac{\beta\delta}{2\varepsilon} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}.$$

在这三种情况下它至少有一个特征根有正实部，因此不稳定。

7. 在方程组

$$\frac{dx}{dt} = Ax + R(t, x)$$

中，设 A 为常数值矩阵，函数 $R(t, x)$ 在区域

$$G = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq t_0, \|x\| \leq M\}$$

上连续， $R(t, 0) \equiv 0$ 且满足条件 $\|R(t, x)\| \leq \alpha(t)\|x\|$ ，其中 $\alpha(t)$ 为 $t \geq t_0$ 上的非负连续函数，且

$$\int_{t_0}^{+\infty} \alpha(t) dt < \infty,$$

证明若相应的齐次线性方程组的所有解当 $t \geq t_0$ 时有界，则所给方程组的零解是稳定的。

证明: 取 \mathbf{x}_0 使得 $\|\mathbf{x}_0\| < M$, 则所给方程组满足初值条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 的解 $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 对 $t \geq t_0$ 且充分靠近 t_0 的 t 是存在的. 设其最大存在区间为 $[t_0, t_1)$. 由常数变易公式

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} \mathbf{R}(s, \boldsymbol{\varphi}(s)) ds.$$

由假设, 存在常数 $K > 0$ 使得 $t \geq t_0$ 时, $\|e^{(t-t_0)A}\| \leq K$. 令

$$\tilde{K} = \int_{t_0}^{+\infty} \alpha(t) dt.$$

则当 $t \in [t_0, t_1)$ 时有

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t)\| \leq K \|\mathbf{x}_0\| + \int_{t_0}^t K \alpha(s) \|\boldsymbol{\varphi}(s)\| ds.$$

由 Gronwall 不等式, 当 $t \in [t_0, t_1)$ 时有

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t)\| \leq K \|\mathbf{x}_0\| \exp\left(\int_{t_0}^t K \alpha(s) ds\right) \leq K e^{K\tilde{K}} \|\mathbf{x}_0\|.$$

现取正数 $\sigma < MK^{-1}e^{-K\tilde{K}}$. 则当初值 \mathbf{x}_0 满足 $\|\mathbf{x}_0\| < \sigma$ 时, 解 $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 满足

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t)\| \leq K e^{K\tilde{K}} \sigma < M, \quad \forall t \in [t_0, t_1).$$

因此由解的延拓定理, 必有 $t_1 = +\infty$.

最后, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min(\sigma, \varepsilon K^{-1}e^{-K\tilde{K}})$, 则当初值 \mathbf{x}_0 满足 $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ 时, 解 $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 在区间 $[t_0, +\infty)$ 上存在, 并满足

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in [t_0, t_1).$$

因此所给方程组的零解是稳定的. \square

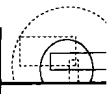
习 题 6.3

1. 设在 xy 平面上原点的某邻域内有 $P(x, y) < 0$, $Q(x, y) < 0$ 且 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 连续可微. 证明方程组

$$\frac{dx}{dt} = xP(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = yQ(x, y)$$

的零解渐近稳定.

证明: 构造 Liapunov 函数 $V(x, y) = x^2 + y^2$. 它是定正的, 其全导数为



$$\frac{dV}{dt} = 2(x^2 P(x, y) + y^2 Q(x, y)).$$

显然当 $(x, y) = (0, 0)$ 时, $\frac{dV}{dt} = 0$. 由假设, 当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, 在原点的某邻域内有 $\frac{dV}{dt} < 0$, 因此在原点的某邻域内 $\frac{dV}{dt}$ 为定负函数, 原方程组的零解渐近稳定. \square

2. 构造形如 $V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ 的 Liapunov 函数讨论下列方程组零解的稳定性:

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = -x + y - xy^2, \quad \frac{dy}{dt} = -2x - y - x^2 y.$$

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = y^3 + x^2 y, \quad \frac{dy}{dt} = x^3 - xy^2.$$

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = 2x + y + xy, \quad \frac{dy}{dt} = x - 2y + x^2 + y^2.$$

$$(4) \quad \frac{dx}{dt} = -x^3 + y^4, \quad \frac{dy}{dt} = -y^3 + y^4.$$

$$(5) \quad \frac{dx}{dt} = \sin y, \quad \frac{dy}{dt} = -2x - 3y.$$

解: (1) 令 $V(x, y) = x^2 + y^2$, 它是定正的, 其全导数为

$$\frac{dV}{dt} = -2 \left\{ \left(x + \frac{y}{2} \right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 2x^2 y^2 \right\}.$$

它为定负函数, 因此原方程的零解渐近稳定.

(2) 令 $V(x, y) = xy$, 在原点的任意小邻域内都存在点 (\bar{x}, \bar{y}) , 使得 $V(\bar{x}, \bar{y}) > 0$, 其全导数为

$$\frac{dV}{dt} = x^4 + y^4.$$

它为定正函数, 因此原方程的零解不稳定.

(3) 令 $V(x, y) = xy$, 在原点的任意小邻域内都存在点 (\bar{x}, \bar{y}) , 使得 $V(\bar{x}, \bar{y}) > 0$, 其全导数为

$$\frac{dV}{dt} = x^2 + y^2 + x(x^2 + 2y^2).$$

在原点的充分小的邻域内它为定正函数, 因此原方程的零解不稳定.

(4) 令 $V(x, y) = x^2 + y^2$, 它是定正的, 其全导数为

$$\frac{dV}{dt} = -2(x^4 + y^4) + 2y^4(x + y).$$

在原点的充分小的邻域内它为定负函数, 因此原方程的零解渐近稳定.

(5) 令 $V(x, y) = 5x^2 + 2xy + y^2 = 4x^2 + (x + y)^2$, 它是定正的, 其全导数为

$$\frac{dV}{dt} = -4(x^2 + y^2) - 2(5x + y)(y - \sin y),$$

在原点的充分小的邻域内它为定负函数, 因此原方程的零解渐近稳定.

3. 构造形如 $V(x, y) = \alpha xy^2 + \beta x^3$ 的 Liapunov 函数讨论下列方程组零解的稳定性:

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - y^2, \quad \frac{dy}{dt} = -2xy.$$

证明: 构造 Liapunov 函数 $V(x, y) = -xy^2 + x^3$. 显然在原点的任意小邻域内都存在 (\bar{x}, \bar{y}) , 使得 $V(\bar{x}, \bar{y}) > 0$, 并且其全导数为

$$\frac{dV}{dt} = 3x^4 + y^4.$$

显然 $\frac{dV}{dt}$ 为定正函数, 因此原方程组的零解不稳定. \square

4. 设在 xy 平面上 $f(x, y)$ 连续可微, 给定方程组

$$\frac{dx}{dt} = y - xf(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = -x - yf(x, y),$$

证明若在原点的某邻域内有 $f(x, y) > 0$, 则零解渐近稳定, 若有 $f(x, y) < 0$, 则零解不稳定.

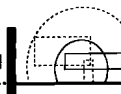
证明: 构造 Liapunov 函数 $V(x, y) = x^2 + y^2$. 它是定正的, 其全导数为

$$\frac{dV}{dt} = -2(x^2 + y^2)f(x, y).$$

显然当 $(x, y) = (0, 0)$ 时, $\frac{dV}{dt} = 0$. 并且若在原点的某邻域内有 $f(x, y) > 0$, 则在该

邻域内 $\frac{dV}{dt}$ 为定负函数, 因此零解渐近稳定; 若在原点的某邻域内有 $f(x, y) < 0$, 则在

该邻域内 $\frac{dV}{dt}$ 为定正函数, 因此零解不稳定. \square



5. 设 $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 连续可微, 且存在 α, β 使得在 xy 平面上原点的某邻域内除去原点外有

$$\alpha P(x, y) + \beta Q(x, y) > 0.$$

证明方程组

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

的零解不稳定.

证明: 构造 Liapunov 函数 $V(x, y) = \sin(\alpha x + \beta y)$. 显然在原点的任意小邻域内都存在 (\bar{x}, \bar{y}) , 使得 $V(\bar{x}, \bar{y}) > 0$, 并且其全导数为

$$\frac{dV}{dt} = (\alpha P(x, y) + \beta Q(x, y)) \cos(\alpha x + \beta y).$$

由假设, 在原点的某邻域内 $\frac{dV}{dt}$ 为定正函数. 因此原方程的零解不稳定. \square

6. 设函数 $g(x)$ 连续可微, $g(0) = 0$ 且当 $x \neq 0$ 时有 $xg(x) > 0$. 证明方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + g(x) = 0$$

的零解是稳定的, 但不是渐近稳定的.

证明: 令 $\frac{dx}{dt} = y$, 则原方程等价于方程组

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x),$$

构造 Liapunov 函数

$$V(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + \int_0^x g(u) du,$$

它是定正的, 其全导数为

$$\frac{dV}{dt} = y \frac{dy}{dt} + g(x) \frac{dx}{dt} \equiv 0.$$

因此原方程的零解稳定.

现假设原方程的零解渐近稳定, 则存在 $\delta > 0$ 使当 $x_0^2 + y_0^2 < \delta^2$ 时, 比如 $x_0 = y_0 = \frac{\delta}{2}$, 原方程对应的等价的方程组满足初值条件 $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ 的解 $(x(t), y(t))$ 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0).$$

显然由连续性有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(t), y(t)) = V(0, 0) = 0.$$

但另一方面, 由于

$$\frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) \equiv 0,$$

因此函数 $V(x(t), y(t))$ 必为常数

$$V(x(t), y(t)) \equiv \frac{\delta^2}{8} + \int_0^{\frac{\delta}{2}} g(u) du > \frac{\delta^2}{8}$$

这就导致矛盾, 因此方程的零解不是渐近稳定的. \square

7. 设 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 都是正数, $\beta\gamma - \alpha\delta < 0$, 函数 $f(y)$ 连续可微, $f(0) = 0$ 且当 $y \neq 0$ 时有 $yf(y) > 0$. 利用形如

$$V = \frac{1}{2}Ax^2 + B \int_0^y f(u) du$$

的 Liapunov 函数讨论方程组

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha x + \beta f(y), \quad \frac{dy}{dt} = \gamma x - \delta f(y)$$

的零解的稳定性.

解: 构造 Liapunov 函数

$$V(x, y) = \frac{1}{2}\gamma x^2 + \beta \int_0^y f(u) du,$$

它是定正的, 其全导数为

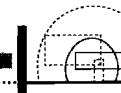
$$\frac{dV}{dt} = -\alpha\gamma x^2 + 2\beta\gamma x f(y) - \beta\delta (f(y))^2.$$

由于其判别式 $\Delta = 4\beta\gamma(\beta\gamma - \alpha\delta) < 0$, 因此 $\frac{dV}{dt}$ 为定负函数, 故原方程的零解渐近稳定.

8. 给定方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{6.18}$$

若存在定正函数 $V(x)$, 其通过方程组 (6.18) 的导数 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.18)}$ 为常负函数, 但使



$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.18)} = 0$ 的点 \mathbf{x} 的集合中除(6.18)的零解外不包含(6.18)的整条正半轨, 证明方程组(6.18)的零解是渐近稳定的.

证明: 由 Liapunov 稳定性判据知(6.18)的零解是稳定的, 即对任意给定的正数 $\epsilon > 0$ ($\epsilon < M_1$), 存在 $\delta = \delta(t_0, \epsilon) > 0$ 使得当 $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ 时, 方程组(6.18)满足初值条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 的解 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 对一切 $t \geq t_0$ 均有定义且满足 $\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \epsilon < M_1$. 令

$\Omega(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x}^* : \text{存在序列 } t_n \rightarrow +\infty, \text{ 使得}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t_n; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}^*\},$$

由 Weierstrass 聚点原理知 $\Omega(\mathbf{x}_0)$ 非空. 下证 $\Omega(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{0}\}$.

用反证法. 设 $\mathbf{x}^* \in \Omega(\mathbf{x}_0)$ 但 $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{0}$, 则存在序列 $t_n \rightarrow +\infty$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t_n; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}^*$$

由假设

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(\mathbf{x}(t_n; t_0, \mathbf{x}_0)) = V(\mathbf{x}^*) > 0.$$

因为当 $t \geq t_0$ 时 $V(\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0))$ 单调不增, 故必有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) = V(\mathbf{x}^*). \quad (6.19)$$

另一方面, 由于 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.18)}$ 为常负函数, 因此当 $t \geq t_0$ 时有 $V(\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}^*)) \leq V(\mathbf{x}^*)$.

若当 $t \geq t_0$ 时 $V(\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}^*)) \equiv V(\mathbf{x}^*)$, 则当 $t \geq t_0$ 时 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.18)} \equiv 0$, 这与使 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.18)} = 0$ 的点 \mathbf{x} 的集合中除(6.18)的零解外不包含(6.18)的整条正半轨的假设矛盾, 从而必有 $\bar{t} \geq t_0$, 使得

$$V(\mathbf{x}(\bar{t}; t_0, \mathbf{x}^*)) < V(\mathbf{x}^*).$$

由自治系统积分曲线的平移不变性知

$$\mathbf{x}(t_n + \bar{t}, t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(\bar{t}, t_0, \mathbf{x}(t_n; t_0, \mathbf{x}_0)),$$

再由解对初值的连续依赖性得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t_n + \bar{t}; t_0, \mathbf{x}_0) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(\bar{t}; t_0, \mathbf{x}(t_n; t_0, \mathbf{x}_0)) \\ &= \mathbf{x}(\bar{t}; t_0, \mathbf{x}^*), \end{aligned}$$

由此得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(x(t_n + \bar{t}; t_0, x_0)) = V(x(\bar{t}; t_0, x^*)) < V(x^*),$$

这与(6.19)矛盾.

这样我们就证明了 $\Omega(x_0) = \{0\}$, 故

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t; t_0, x_0) &= \limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t; t_0, x_0) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; t_0, x_0) = 0. \end{aligned}$$

即(6.18)的零解是渐近稳定的. \square

习 题 6.4

1. 求出下列线性系统的平衡点, 判断其类型和稳定性, 并画出相图:

$$(1) \frac{dx}{dt} = -x + y - 2, \quad \frac{dy}{dt} = -2x - y - 1.$$

$$(2) \frac{dx}{dt} = 2x + 7y - 7, \quad \frac{dy}{dt} = x - 2y + 2.$$

$$(3) \frac{dx}{dt} = 7x + 3y - 7, \quad \frac{dy}{dt} = 6x + 4y - 6.$$

$$(4) \frac{dx}{dt} = 5x + 3y + 8, \quad \frac{dy}{dt} = -3x - 5y - 8.$$

解: (1) 容易求得平衡点为 $(-1, 1)$. 引进平移变换 $\xi = x + 1, \eta = y - 1$ 可将系统化为

$$\frac{d\xi}{dt} = -\xi + \eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = -2\xi - \eta.$$

其系数矩阵的特征值为 $\lambda_1 = -1 + \sqrt{2}i, \lambda_2 = -1 - \sqrt{2}i$, 是一对共轭复根, 有负实部, 因此平衡点 $(-1, 1)$ 为原系统的稳定焦点. 作非奇异线性变换: $u = 2\xi, v = \sqrt{2}\eta$, 则有

$$\frac{du}{dt} = -u + \sqrt{2}v, \quad \frac{dv}{dt} = -\sqrt{2}u - v,$$

由此不难画出变换后的系统在 uv 平面上的相图. 由此可画出原系统在 xy 平面上的相图, 见图 6.8.

(2) 容易求得平衡点为 $(0, 1)$. 引进平移变换 $u = x, v = y - 1$ 可将系统化为

$$\frac{du}{dt} = 2u + 7v, \quad \frac{dv}{dt} = u - 2v.$$

$$\begin{aligned} |\lambda + 1 \quad 2\lambda + 2\lambda + 2\lambda| \\ \lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \\ \lambda^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \end{vmatrix}$$



其系数矩阵的特征值为 $\lambda_1 = \sqrt{11}$, $\lambda_2 = -\sqrt{11}$, 是一对相异实根, 符号相反, 因此平衡点 $(0, 1)$ 为原系统的鞍点, 不稳定. 它有两个特殊方向, 容易求得对应于 λ_1 的特征向量 $\xi_1 = (7, -2 + \sqrt{11})^T$, 对应于 λ_2 的特征向量 $\xi_2 = (7, -2 - \sqrt{11})^T$, 相应于 ξ_1 的轨道都是继续沿着它背离平衡点, 相应于 ξ_2 的轨道都是继续沿着它趋向平衡点, 由此可画出原系统在 xy 平面上的相图, 见图 6.9.

(3) 容易求得平衡点为 $(1, 0)$. 引进平移变换 $u = x - 1$, $v = y$ 可将系统化为

$$\frac{du}{dt} = 7u + 3v, \quad \frac{dv}{dt} = 6u + 4v.$$

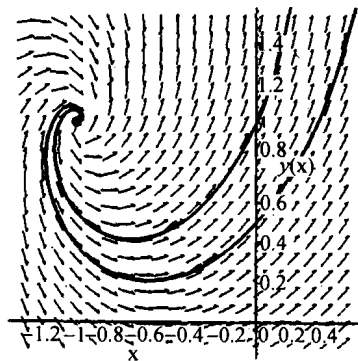


图 6.8 第 1(1)题

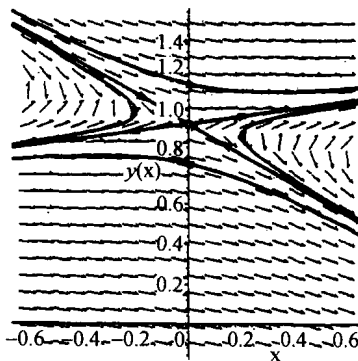


图 6.9 第 1(2)题

其系数矩阵的特征值为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 10$, 是一对相异正实根, 因此平衡点 $(0, 1)$ 为原系统的不稳定两向结点. 它有两个特殊方向, 容易求得对应于 λ_1 的特征向量 $\xi_1 = (1, -2)^T$, 对应于 λ_2 的特征向量 $\xi_2 = (1, 1)^T$, 相应绘出两条直线 l_1 和 l_2 , 相应的轨道都是继续沿着它们且背离平衡点. 因为 $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, 因此除了 l_2 上的轨道外, 所有轨道的曲线都与 l_1 相切于平衡点, 由此可画出原系统在 xy 平面上的相图, 见图 6.10.

(4) 容易求得平衡点为 $(-1, -1)$. 引进平移变换 $u = x + 1$, $v = y + 1$ 可将系统化为

$$\frac{du}{dt} = 5u + 3v, \quad \frac{dv}{dt} = -3u - 5v.$$

其系数矩阵的特征值为 $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -4$, 是一对相异实根, 符号相反, 因此平衡点

$(-1, -1)$ 为原系统的鞍点, 不稳定. 它有两个特殊方向, 容易求得对应于 λ_1 的特征向量 $\xi_1 = (3, -1)^T$, 对应于 λ_2 的特征向量 $\xi_2 = (1, -3)^T$, 相应于 ξ_1 的轨道都是继续沿着它背离平衡点, 相应于 ξ_2 的轨道都是继续沿着它趋向平衡点, 由此可画出原系统在 xy 平面上的相图, 见图 6.11.

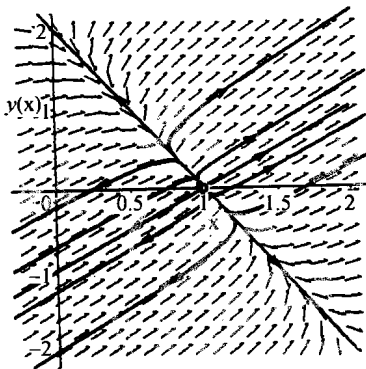


图 6.10 第 1(3)题

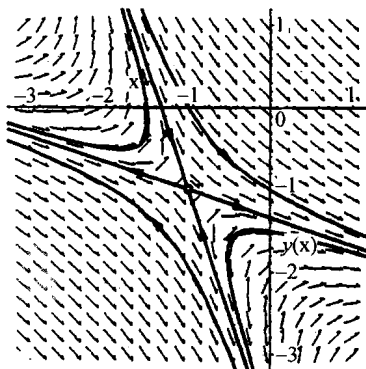


图 6.11 第 1(4)题

注: 读者可将本章例 6.3 的 Maple 程序作适当修改画出相应的相图.

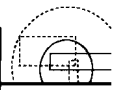
2. 设 α, β, γ 都是实数且 $\alpha\gamma \neq 0$. 讨论线性系统

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta y, \quad \frac{dy}{dt} = \gamma y$$

的平衡点类型和稳定性, 并画出 α, β, γ 在各种不同情况下系统的相图.

解: 由平面线性系统的平衡点的分类不难得出所给线性系统的平衡点 $(0, 0)$ 的类型和稳定性可分为如下几种情况, 读者可自己画出相应的相图:

- (1) 当 $\alpha\gamma < 0$ 时, 平衡点 $(0, 0)$ 为鞍点, 不稳定.
- (2) 当 $\alpha\gamma > 0$ 且 $\alpha \neq \gamma$ 时, 平衡点 $(0, 0)$ 为两向结点. 当 $\alpha > 0$ 时不稳定, 当 $\alpha < 0$ 时稳定.
- (3) 当 $\alpha = \gamma$ 且 $\beta \neq 0$ 时, 平衡点 $(0, 0)$ 为单向结点. 当 $\alpha > 0$ 时不稳定, 当 $\alpha < 0$ 时稳定.
- (4) 当 $\alpha = \gamma$ 且 $\beta = 0$ 时, 平衡点 $(0, 0)$ 为星形结点. 当 $\alpha > 0$ 时不稳定, 当 $\alpha < 0$ 时稳定.



3. 考虑关于二元函数 $\phi(x, t)$ 的非线性偏微分方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} = c \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},$$

它描述了一类波的传播, 称为 Burger 方程, 其中 $c > 0$ 为波的传播速度. 令 $\xi = x - ct$, $u(\xi) = \phi(x, t)$. 请推导以 ξ 为自变量的函数 $u(\xi)$ 所满足的常微分方程, 并将其化为等价的一阶微分方程组. 画出该微分方程组的相图.

解: 容易知道

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{du}{d\xi}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{d^2 u}{d\xi^2}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = -c \frac{du}{d\xi},$$

代入原方程并整理后得函数 $u(\xi)$ 所满足的常微分方程为:

$$(u - c) \frac{du}{d\xi} = c \frac{d^2 u}{d\xi^2}.$$

令 $\frac{du}{d\xi} = v$, 则该方程等价于一阶微分方程组

$$\frac{du}{d\xi} = v, \quad \frac{dv}{d\xi} = \frac{1}{c}(u - c)v.$$

它有一条奇线 $v = 0$ 当 $v \neq 0$ 时, 轨线满足常微分方程

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{c}(u - c),$$

因此除奇线外该方程组的轨线族为相平面上的一族抛物线 $v = \frac{1}{2c}(u - c)^2 + k_0$, 其中 k_0 为常数. 由此可画出该微分方程组的相图, 见图 6.12. 读者也可运行如下 Maple 程序画出原系统在 xy 平面上的相图:

```
with(DEtools):
with(plots):
g0:= dfieldplot(diff(y(x),x)= 2* (x- 1/2),y(x),
  x= - 2..3,y= - 2.5..6,color= BLACK):

eqs:= {diff(x(t),t)= y(t),
  diff(y(t),t)= 2* (x(t)- 1/2)* y(t)};
inil:= {x(0)= 0,y(0)= 1.5};
sols1:= dsolve(eqs union inil,{x(t),y(t)},
```

```

numeric);

g1:= odeplot(sols1,[x(t),y(t)],- 2..2,
  numpoints= 500,color= black,thickness= 3);
p1:= plot([[t,0,t= - 2..3],[t,(t- 1/2)^2,t= - 2..3],[t,(t- 1/2)^2- 1.5,
  t= - 2..3]],color= [black],linestyle= [SOLID],
  thickness= 3);

display(g0,g1,p1);

```

4. 求出下列非线性系统的平衡点, 并判断哪些是双曲平衡点. 对双曲平衡点判断其类型和稳定性, 并画出系统在平衡点附近的相图.

$$(1) \frac{dx}{dt} = -6y + 2xy - 8, \quad \frac{dy}{dt} = y^2 - x^2.$$

$$(2) \frac{dx}{dt} = -x + e^{-y} - 1, \quad \frac{dy}{dt} = 1 - e^{x+y}.$$

$$(3) \frac{dx}{dt} = \sin y, \quad \frac{dy}{dt} = x + x^3.$$

解: (1) 容易求得原系统有两个平衡点 $A: (-1, -1)$, $B: (4, 4)$. 对平衡点 A , 其线性部分的系数矩阵有两个特征根 $-2+4i$, $-2-4i$, 为共轭复根, 有负实部, 因此为双曲平衡点, 且为稳定焦点. 对平衡点 B , 其线性部分的系数矩阵有两个特征根 $8+4i$, $8-4i$, 为共轭复根, 有正实部, 因此为双曲平衡点, 且为不稳定焦点. 读者可自己画出系统在平衡点 A 和 B 处相应的相图.

(2) 容易求得原系统有唯一的平衡点 $O: (0, 0)$. 其线性部分的系数矩阵有两个特征根 $0, -2$, 因此不是双曲平衡点.

(3) 容易求得原系统有无穷多个平衡点 $(0, k\pi) (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

当 k 为偶数时平衡点对应的线性部分的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

它有两个特征根 $-1, 1$, 因此为双曲平衡点, 且为鞍点, 不稳定. 读者可自己画出系统在这些平衡点处相应的相图.

当 k 为奇数时平衡点对应的线性部分的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

它有两个特征根 $-i, i$, 因此不是双曲平衡点.

5. 引入极坐标并画出下面系统的相图:

$$\frac{dx}{dt} = x(x^2 + y^2 - 1), \quad \frac{dy}{dt} = y(x^2 + y^2 - 1).$$

解: 令 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 原系统化成

$$\frac{dr}{dt} = r(r^2 - 1), \quad \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

易知它有特解 $(r(t), \theta(t)) \equiv (0, t_0)$ 及 $(r(t), \theta(t)) \equiv (1, t_0)$, 其中 t_0 为任意常数. 它们都对应着原系统的奇点. 因此原系统有奇点 $(0, 0)$ 及奇线 $x^2 + y^2 = 1$. 容易由极坐标方程看出除奇点及奇线外该方程组的轨线族为相平面上的一族射线 $\theta(t) = t_0$, 在奇线 $x^2 + y^2 = 1$ 内部, 它趋于奇点, 在奇线 $x^2 + y^2 = 1$ 外部, 它远离奇线 $x^2 + y^2 = 1$. 故原点是稳定的星形结点. 由此可画出该系统的相图, 见图 6.13. 读者也可运行如下 Maple 程序画出原系统在 xy 平面上的相图:

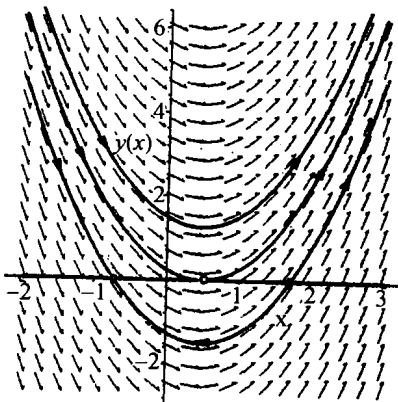


图 6.12 第 3 题

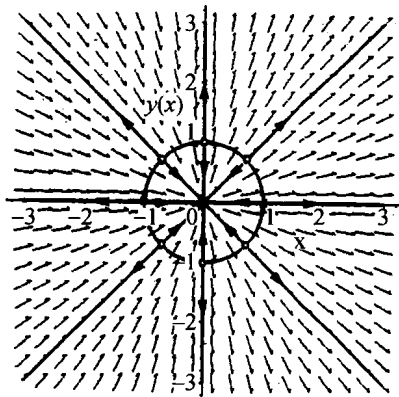


图 6.13 第 5 题

```

with(DEtools):
with(plots):
g0:= dfieldplot(diff(y(x), x)= y/x, y(x),
    x= - 3.3, y= - 3.3, color= BLACK):

p1:= plot([[t, t, t= - 3.3], [t, - t, t= - 3.3], [t, sqrt(1- t^2), t= - 2.2],
    [t, - sqrt(1- t^2), t= - 2.2], [t, 0, t= - 3.3], [0, t, t= - 3.3]], col-
    or= [black], linestyle= [SOLID], thickness= 3, numpoints= 5000):

display(g0, p1);

```

6*. 引入极坐标观察并说明原点是系统

$$\frac{dx}{dt} = -y - x \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{dy}{dt} = x - y \sqrt{x^2 + y^2}$$

的焦点.

解: 令 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 原系统化成:

$$\frac{dr}{dt} = -r^2, \quad \frac{d\theta}{dt} = 1.$$

易知它有特解 $(r(t), \theta(t)) = (0, t + t_0)$, 它对应着原系统的奇点 $(0, 0)$. 此外还可求出当 $r \neq 0$ 时, 通解为

$$r(t) = \frac{1}{t + C}, \quad \theta(t) = t + t_0,$$

其中 C, t_0 为任意常数. 易见它对应的轨线族为相平面上的一族螺旋线, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时它趋于奇点 $(0, 0)$. 故原点是原系统的稳定焦点.

习 题 6.5

1. 引入柱坐标 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$ 证明: 当 $\mu \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, 方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (\mu - 1)x - y + xz, \\ \frac{dy}{dt} = x + (\mu - 1)y + yz, \\ \frac{dz}{dt} = \mu z - (x^2 + y^2 + z^2). \end{cases}$$



有使得 z 为常数的周期解, 并求出周期解的表达式.

证明: 在所给柱坐标下, 原方程组变成

$$\frac{dr}{dt} = (\mu - 1)r + rz, \quad \frac{d\theta}{dt} = 1, \quad \frac{dz}{dt} = \mu z - (r^2 + z^2).$$

若 z 为常数, 则

$$\frac{dz}{dt} = \mu z - (r^2 + z^2) \equiv 0. \quad (6.20)$$

因此 $r^2 = \mu z - z^2$ 也为常数, 故有

$$\frac{dr}{dt} = (\mu - 1)r + rz \equiv 0. \quad (6.21)$$

当 $\mu \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, 由 (6.20) 及 (6.21) 得非零解

$$r = \sqrt{(1-\mu)(2\mu-1)}, \quad z = 1-\mu.$$

故当 $\mu \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, 原方程组有使得 z 为常数的周期解

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{(1-\mu)(2\mu-1)} \cos(t+t_0), \\ y(t) = \sqrt{(1-\mu)(2\mu-1)} \sin(t+t_0), \\ z(t) = 1-\mu, \end{cases}$$

其中 t_0 为任意常数. \square

2. 证明系统 $\frac{dx}{dt} = f(x)$ 的任一轨道的极限集都是闭集.

证明: 设 P 为轨线 $x = \varphi(t, x_0)$ 的 ω 极限集 $\omega(x_0, \varphi)$ 的聚点, 即 $P \in \overline{\omega(x_0, \varphi)}$, 则有 $\omega(x_0, \varphi)$ 中的序列 $\{P_n\}$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - P\| = 0.$$

因此对任何 $\varepsilon > 0$, 都有 P_n , 使得 $\|P_n - P\| < \frac{\varepsilon}{2}$. 又因为 $P_n \in \omega(x_0, \varphi)$, 故有 $t_n > n$ 使

得 $\|P_n - \varphi(t_n, x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. 从而

$$\|P - \varphi(t_n, x_0)\| \leq \|P_n - P\| + \|P_n - \varphi(t_n, x_0)\| < \varepsilon.$$

即存在序列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $t_n \rightarrow +\infty$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, x_0) = P,$$

故 $P \in \omega(x_0, \varphi)$, 所以系统 $\frac{dx}{dt} = f(x)$ 的任一轨线的 ω 极限集都是闭集. 同理它的任一轨线的 α 极限集也是闭集. \square

3. 证明系统 $\frac{dx}{dt} = f(x)$ 的轨道 $x = \varphi(t, x_0)$ 的 ω 极限集是空集的充要条件为

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t, x_0)\| = +\infty,$$

它的 α 极限集是空集的充要条件为

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|\varphi(t, x_0)\| = +\infty.$$

证明: 只证明 ω 极限集的情况, α 极限集的证明完全类似.

必要性: 设轨道 $x = \varphi(t, x_0)$ 的 ω 极限集是空集但

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t, x_0)\| \neq +\infty,$$

则存在 $M > 0$ 及序列 $t_n \rightarrow +\infty$, 使得 $\|\varphi(t_n, x_0)\| < M$. 因此 $\{\varphi(t_n, x_0)\}$ 有界, 从而有收敛子列 $\{\varphi(t_{n_k}, x_0)\}$. 设

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_{n_k}, x_0) = P,$$

则 P 为轨线的 ω 极限点. 这与轨线的 ω 极限集是空集矛盾.

充分性: 设

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t, x_0)\| = +\infty,$$

但轨道 $x = \varphi(t, x_0)$ 的 ω 极限集非空. 设 P 为轨线的 ω 极限点, 则存在序列 $t_n \rightarrow +\infty$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, x_0) = P,$$

因此序列 $\{\varphi(t_n, x_0)\}$ 有界, 这与假设矛盾. \square

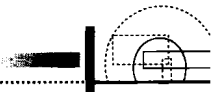
4. 证明系统 $\frac{dx}{dt} = f(x)$ 的轨道 $x = \varphi(t, x_0)$ 的 ω 极限集是单点集 $\{x^*\}$ 的充要条件为

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, x_0) = x^*,$$

它的 α 极限集是单点集 $\{x^*\}$ 的充要条件为

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, x_0) = x^*.$$

证明: 我们只证明 ω 极限集的情况, α 极限集的情况的证明完全类似. 条件的充分



性显然，只需证明必要性。

设轨道 $x = \varphi(t, x_0)$ 的 ω 极限集是单点集， x^* 为唯一的 ω 极限点，但

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, x_0) \neq x^*,$$

则存在 $\sigma > 0$ 及序列 $t_n \rightarrow +\infty$ ，使得 $|\varphi(t_n, x_0) - x^*| > \sigma$ 。另一方面，因为 x^* 为 ω 极限点，因此有 $\tilde{t}_n > t_n$ 使得 $|\varphi(\tilde{t}_n, x_0) - x^*| < \sigma$ 。由解的连续性知，必有 $\tau_n \in (t_n, \tilde{t}_n)$ 使得 $|\varphi(\tau_n, x_0) - x^*| = \sigma$ ，即 $\{\varphi(\tau_n, x_0)\}$ 有界，从而有收敛子列 $\{\varphi(\tau_{n_k}, x_0)\}$ 。设

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(\tau_{n_k}, x_0) = \bar{x},$$

则 $\bar{x} \neq x^*$ 为轨道 $x = \varphi(t, x_0)$ 的另一 ω 极限点。这与 $x = \varphi(t, x_0)$ 的 ω 极限集是单点集矛盾。□

5. 证明 Dulac 判据。

证明：用反证法。设 $\Gamma: x = x(t), y = y(t) (0 \leq t \leq T)$ 为 D 内系统

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y)$$

的闭轨，它围成的 D 内的子区域为 D_0 ，则由 Green 公式得，

$$\begin{aligned} \iint_{D_0} \left(\frac{\partial(BX)}{\partial x} + \frac{\partial(BY)}{\partial y} \right) dx dy &= \oint_{\Gamma} BX dy - BY dx \\ &= \int_0^T B \left(X \frac{dy}{dt} - Y \frac{dx}{dt} \right) dt = 0. \end{aligned}$$

但由定理假设，必有

$$\iint_{D_0} \left(\frac{\partial(BX)}{\partial x} + \frac{\partial(BY)}{\partial y} \right) dx dy \neq 0.$$

这就导致矛盾，因此在区域 D 内不存在闭轨。□

6. 证明下列系统无闭轨：

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = -(1-x)^3 + xy^2, \quad \frac{dy}{dt} = y + y^3.$$

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = 2xy + x^3, \quad \frac{dy}{dt} = -x^2 + y - y^2 + y^3.$$

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = (1+x^2)y + x^3.$$

证明：对(1)， $P(x, y) = -(1-x)^3 + xy^2$ ， $Q(x, y) = y + y^3$ ，且

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 3(1-x)^2 + 1 + 4y^2 > 0.$$

对(2), $P(x, y) = 2xy + x^3$, $Q(x, y) = -x^2 + y - y^2 + y^3$, 且

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 1 + 3x^2 + 3y^2 > 0.$$

对(3), $P(x, y) = y$, $Q(x, y) = (1+x^2)y + x^3$, 且

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 1 + 4x^2 > 0.$$

在这三种情况下都有

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

在整个 xy 坐标平面上不变号, 因此由 Bendixson 判据知这些方程组都无闭轨. \square

7. 构造形如 $B(x, y) = e^{mx+ny}$ 的 Dulac 函数证明系统

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x - y + x^2 + y^2$$

无闭轨, 其中 m, n 为常数.

证明: 这里 $P(x, y) = y$, $Q(x, y) = -x - y + x^2 + y^2$, 令 $B(x, y) = e^{-2x}$, 则在
整个 xy 坐标平面上函数

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} = -e^{-2x} < 0$$

都不变号, 因此由 Dulac 判据知原方程组无闭轨. \square

8. 引入极坐标并用 Poincaré-Bendixson 环域定理证明系统

$$\frac{dx}{dt} = x - y - x^3, \quad \frac{dy}{dt} = x + y - y^3$$

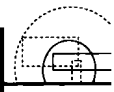
在环形区域 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ 内有闭轨.

证明: 令 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 可将原系统化成

$$\frac{dr}{dt} = r - r^3 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta\right), \quad \frac{d\theta}{dt} = 1 + \frac{1}{4} r^2 \sin 4\theta.$$

在环形闭区域 D 的内边界 $L_1: x^2 + y^2 = 1$ 内有 $r < 1$, 此时

$$\frac{dr}{dt} = r - r^3 + \frac{1}{2} r^3 \sin^2 2\theta \geq r(1 - r^2) \geq 0,$$



在环形闭区域 D 的外边界 $L_2: x^2 + y^2 = 2$ 外有 $r > \sqrt{2}$, 此时

$$\frac{dr}{dt} = r - r^3 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta\right) \leq r \left(1 - \frac{1}{2} r^2\right) \leq 0.$$

因此原系统从 L_1 和 L_2 上出发的轨道都不能离开 $D = \bar{D}$, 又显然在 \bar{D} 内不含系统的平衡点. 由 Poincaré-Bendixson 环域定理, 原系统在 D 内有闭轨. \square

9. 引入极坐标证明系统

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \quad \frac{dy}{dt} = x + y(1 - x^2 - y^2)$$

有唯一的极限环并用后继函数法讨论极限环的稳定性.

证明: 令 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 可将原系统化成

$$\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2), \quad \frac{d\theta}{dt} = 1. \quad (6.22)$$

易知(6.22)有两个特解

$$r(t) \equiv 0, \quad \theta(t) = t - t_0 \quad (6.23)$$

及

$$r(t) \equiv 1, \quad \theta(t) = t - t_0. \quad (6.24)$$

其中(6.23)对应于原系统的奇点 $(0, 0)$, 它是不稳定焦点; (6.24)在相平面上为闭轨 $\Gamma: x^2 + y^2 = 1$.

现在用后继函数法来讨论闭轨 Γ 的性质. 为简单计, 取 x 轴的正半轴为无切线段 L , 设 $P_0: (r_0, 0)$ 为 $(1, 0)$ 附近的一点, 即 $r_0 > 0$ 且 $|r_0 - 1|$ 充分小. 则原系统过 P_0 的轨道方程由初值问题

$$\frac{dr}{d\theta} = r(1 - r^2), \quad r(0) = r_0$$

确定, 它的解为

$$r(\theta) = \{1 + (r_0^{-2} - 1)e^{-2\theta}\}^{-\frac{1}{2}}.$$

则 P_0 的后继点 Q_0 在 x 轴上的坐标为 $Q_0: (r(2\pi), 0)$. 在无切线段 L 上建立坐标系: 取 $(1, 0)$ 为原点, x 轴的正向为 L 轴的正向, 则 Q_0 在 L 轴上的坐标为 $r(2\pi) - 1$. 令 $s = r_0 - 1$, 则后继函数为

$$d(s) = \frac{s+1}{\sqrt{(s+1)^2 - (s^2 + 2s)e^{-4\pi}}} - s - 1.$$

易知

$$d(0)=0, d'(0)=e^{-4\pi}-1<0. \quad (6.25)$$

因此当 $|s|$ 充分小且 $s \neq 0$ 时, $d(s) \neq 0$, 这时由 x 轴上 $(r_0, 0)$ 出发的轨线不可能为闭轨, 因而 $\Gamma: x^2 + y^2 = 1$ 为孤立的闭轨, 即原系统的极限环, 并且由上面的讨论知原系统没有其他的极限环. 因而 $x^2 + y^2 = 1$ 为唯一的极限环. 由 (6.25) 知它为单重稳定极限环. \square

10. 令 $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$, 计算 $f^n(x)$ 的表达式, 其中 $n \geq 1$.

解: 直接计算得

$$\begin{aligned} f^2(x) &= a^2x + b(1+a), \\ f^3(x) &= a^3x + b(1+a+a^2), \end{aligned}$$

由此不难归纳地得到

$$f^n(x) = a^n x + b(1+a+\cdots+a^{n-1}) = a^n x + \frac{1-a^n}{1-a} b.$$

进一步可用数学归纳法证明上式.

11. 设

$$f(x) = \frac{x \cos \theta - \sin \theta}{x \sin \theta + \cos \theta},$$

证明当 $n \geq 1$ 时,

$$f^n(x) = \frac{x \cos n\theta - \sin n\theta}{x \sin n\theta + \cos n\theta}.$$

证明: 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时, 显然成立. 假设当 $k \geq 1$ 时,

$$f^k(x) = \frac{x \cos k\theta - \sin k\theta}{x \sin k\theta + \cos k\theta}.$$

则

$$\begin{aligned} f^{k+1}(x) &= \frac{f^k(x) \cos \theta - \sin \theta}{f^k(x) \sin \theta + \cos \theta} \\ &= \frac{\cos \theta (x \cos k\theta - \sin k\theta) - \sin \theta (x \sin k\theta + \cos k\theta)}{\sin \theta (x \cos k\theta - \sin k\theta) + \cos \theta (x \sin k\theta + \cos k\theta)} \\ &= \frac{x \cos (k+1)\theta - \sin (k+1)\theta}{x \sin (k+1)\theta + \cos (k+1)\theta}. \end{aligned}$$

即对 $k+1$ 也成立. 因此当 $n \geq 1$ 时,

$$f^n(x) = \frac{x \cos n\theta - \sin n\theta}{x \sin n\theta + \cos n\theta}. \quad \square$$

12. 设 $f: I \rightarrow I$ 为闭区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上的连续自映射, x_0 为 f 的 p -周期点. $\varphi = f^q$. 证明: 如果正整数 q 满足 $(p, q) = d$, $m = p/d$, 则 x_0 为 φ 的 m -周期点, 这里 (p, q) 为 p, q 的最大公约数. 特别地, 当 p, q 互素时, x_0 也为 φ 的 p -周期点. 反之, 如果 x_0 既为 f 的 p -周期点也为 φ 的 m -周期点, 则 $p = m(p, q)$.

证明: 设 $p = dp_1$, $q = dq_1$, 则 p_1 和 q_1 互素. 显然有

$$\varphi^{p_1}(x_0) = f^{qp_1}(x_0) = f^{d p_1 q_1}(x_0) = x_0.$$

故 x_0 为 φ 的周期点, 设其最小周期为 m . 若 $p_1 = \tilde{p}m + r$, 其中 $0 \leq r < m$, 则

$$x_0 = \varphi^{p_1}(x_0) = \varphi^{\tilde{p}m+r}(x_0) = \varphi^r(x_0).$$

因此 $r = 0$. 故 m 一定整除 p_1 . 又因

$$f^{mq}(x_0) = \varphi^m(x_0) = x_0,$$

同理可证 p 一定整除 m , 从而 p_1 一定整除 m , 但 p_1 和 q_1 互素, 因此 p_1 一定整除 m , 故必有 $m = p/d$.

反之, 如果 x_0 既为 f 的 p -周期点也为 φ 的 m -周期点, 则 $f^{mq}(x_0) = \varphi^m(x_0) = x_0$. 又 x_0 为 f 的 p -周期点, 同上可证 p 一定整除 m . 设 $p = (p, q)p_1$, $q = (p, q)q_1$, 则 p_1 和 q_1 互素. 由 $(p, q)p_1$ 整除 $m(p, q)q_1$ 知 p_1 整除 m , 又 p_1 和 q_1 互素, 故 p_1 整除 m . 又

$$\varphi^{p_1}(x_0) = f^{qp_1}(x_0) = f^{(p, q)p_1 q_1}(x_0) = x_0.$$

由于 x_0 为 φ 的 m -周期点, 故 m 一定整除 p_1 . 从而 $p_1 = m$, 由此得 $p = m(p, q)$. \square

13*. 讨论 \mathbb{R} 上的映射族 $g_\mu(x) = \mu - x^2$ 发生的 Feigenbaum 现象, 并计算前三个分岔点 μ_1, μ_2, μ_3 , 可用数值方法求出近似值.

解: 易见当 $\mu \in (0, 2]$ 时, $g_\mu(x)$ 在区间 $[-\mu, \mu]$ 上有唯一的不动点

$$x^* = \frac{-1 + \sqrt{1+4\mu}}{2}.$$

这时有 $g'_\mu(x^*) = 1 - \sqrt{1+4\mu}$. 因此当 $0 < \mu < \frac{3}{4}$ 时, x^* 为 g_μ 的稳定不动点.

当 $\mu \in \left(\frac{3}{4}, 2\right]$ 时, x^* 变为不稳定不动点, 我们得到第一个分岔点 $\mu_1 = \frac{3}{4}$. x^* 失去

稳定性后, g_μ 出现两个 2-周期点

$$x_1^* = \frac{1 + \sqrt{4\mu - 3}}{2}, \quad x_2^* = \frac{1 - \sqrt{4\mu - 3}}{2}.$$

这时有 $[g_\mu^2(x_1^*)]' = [g_\mu^2(x_2^*)]' = 4 - 4\mu$. 因此当 $\frac{3}{4} < \mu < \frac{5}{4}$ 时, x_1^*, x_2^* 为 $g_\mu(x)$ 的稳定 2-周期点.

当 $\mu \in (\frac{5}{4}, 2]$ 时, x_1^*, x_2^* 失去稳定性, 我们得到第二个分岔点 $\mu_2 = \frac{5}{4}$. 这时 $g_\mu(x)$ 出现四个 4-周期点, 它们的值无法用解析表达式给出. 为求第三个分岔点 μ_3 , 考虑如下的代数方程组

$$g_\mu^4(x_0) = x_0, \quad \frac{d}{dx} g_\mu^4(x_0) = -1.$$

可用 Newton 迭代法或用软件包 Maple 直接求得近似值 $\mu_3 = 1.368098939$.

因此前三个分岔点为

$$\mu_1 = \frac{3}{4}, \quad \mu_2 = \frac{5}{4}, \quad \mu_3 = 1.368098939.$$

习 题 6.6

1. 令 $W \subset \mathbb{R}^2$ 为开集, $x \in W$, $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ 连续可微. 证明系统

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

为 W 上的 Hamilton 系统当且仅当在 W 上 $\operatorname{div}(f(x)) \equiv 0$.

证明: 令 $x = (x_1, x_2)$, $f = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$, 则原系统为

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2),$$

若它为 W 上的 Hamilton 系统, 则必有 Hamilton 函数 $H(x_1, x_2)$, 使得

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{\partial H}{\partial x_2}, \quad f_2(x_1, x_2) = -\frac{\partial H}{\partial x_1}.$$

于是,

$$\operatorname{div}(f(x)) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

即在 W 上 $\operatorname{div}(f(x)) \equiv 0$.

反之, 若在 W 上 $\operatorname{div}(f(x)) \equiv 0$, 则

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_2}.$$

因此 $f_1(x_1, x_2)dx_2 - f_2(x_1, x_2)dx_1 = 0$ 为恰当方程, 设其原函数为 $H(x_1, x_2)$, 则有

$$\frac{\partial H}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial H}{\partial x_1} dx_1 = 0.$$

因此存在常数 α 使得

$$f_1(x_1, x_2) = \alpha \frac{\partial H}{\partial x_2}, \quad f_2(x_1, x_2) = -\alpha \frac{\partial H}{\partial x_1}.$$

故原系统为 Hamilton 系统. \square

2. 设 α, β, γ 都是实常数, $\beta > 0$. 考虑如下的波动方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} + \beta \phi^3 + \gamma \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$

设 c 为任意常数, 令 $\xi = x - ct$, $\phi(x, t) = u(\xi)$. 请推导出以 ξ 为自变量的函数 $u(\xi)$ 所满足的常微分方程, 并证明当 $c = \frac{\alpha}{\gamma}$ 时, 该微分方程的所有解均为周期解.

解: 易知

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{du}{d\xi}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{d^2 u}{d\xi^2}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = -c \frac{du}{d\xi},$$

代入原方程并整理后得函数 $u(\xi)$ 所满足的常微分方程为

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + (\alpha - \gamma c) \frac{du}{d\xi} + \beta u^3 = 0.$$

当 $c = \frac{\alpha}{\gamma}$ 时, 令 $\frac{du}{d\xi} = v$, 则该方程等价于 Newton 系统

$$\frac{du}{d\xi} = v, \quad \frac{dv}{d\xi} = -\beta u^3,$$

其势能函数为

$$G(u) = \int_0^u \beta s^3 ds = \frac{1}{4} \beta u^4.$$

$G(u)$ 有唯一的严格极小值点 $u_0=0$, 因此原方程组的唯一奇点 $(0, 0)$ 必为中心, 它附近的轨线必为闭轨. 另一方面, 原方程组的轨线族为相平面上的一族曲线

$$V(u, v) = \frac{1}{2}v^2 + G(u) \equiv C,$$

其中 C 为常数, 由配套教材中定理 6.12 的证明可知它全为闭轨, 即原方程的所有解均为周期解.

3. 设系统

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (6.26)$$

为 Hamilton 系统. 证明方程 $P(x, y)dy - Q(x, y)dx = 0$ 为恰当方程且其原函数为 (6.26) 的 Hamilton 函数.

证明: 设 (6.26) 的 Hamilton 函数为 $H(x, y)$, 则

$$P(x, y) = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad Q(x, y) = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

因此

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial y}.$$

故方程 $P(x, y)dy - Q(x, y)dx = 0$ 为恰当方程. 又由于 $dH(x, y) = \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy = P(x, y)dy - Q(x, y)dx$, 所以 $P(x, y)dy - Q(x, y)dx$ 的原函数为 (6.26) 的 Hamilton 函数 $H(x, y)$. \square

4. 求出下列 Hamilton 系统的 Hamilton 函数并画出系统的相图:

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + x^2.$$

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + x^3.$$

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -1 + x^2.$$

解: (1) 所给平面系统为“动能+势能”型 Hamilton 系统, 其势能函数为

$$G(x) = \int_0^x (s - s^2) ds = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3,$$



相应的 Hamilton 函数为

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{3}x^3.$$

势能函数 $G(x)$ 有两个临界点 $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. 其中 x_1 为 $G(x)$ 的严格极小值点, x_2 为 $G(x)$ 的严格极大值点. 因此 $(0, 0)$ 为原系统的中心, $(1, 0)$ 为原系统的鞍点. 由此可画出原系统的相图, 见图 6.14.

(2) 所给平面系统为“动能+势能”型 Hamilton 系统, 其势能函数为

$$G(x) = \int_0^x (s - s^3) ds = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4,$$

相应的 Hamilton 函数为

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{4}x^4.$$

势能函数 $G(x)$ 有三个临界点 $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. 其中 x_2 为 $G(x)$ 的严格极小值点, x_1, x_3 为 $G(x)$ 的严格极大值点. 因此 $(0, 0)$ 为原系统的中心, $(-1, 0)$ 和 $(1, 0)$ 为原系统的鞍点. 由此可画出原系统的相图, 见图 6.15.

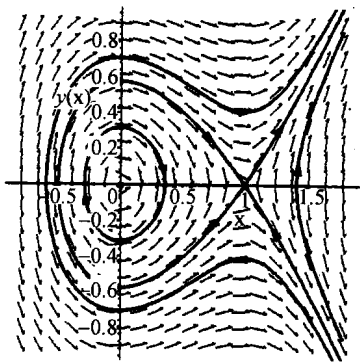


图 6.14 第 4(1)题

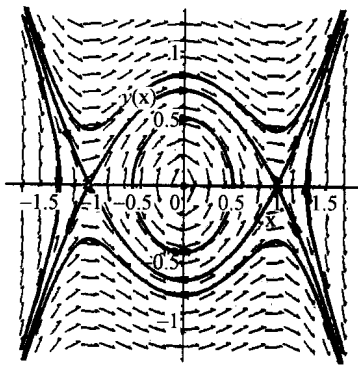


图 6.15 第 4(2)题

(3) 所给平面系统为“动能+势能”型 Hamilton 系统, 其势能函数为

$$G(x) = \int_0^x (1 - s^2) ds = x - \frac{1}{3}x^3,$$

相应的 Hamilton 函数为

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + x - \frac{1}{3}x^3.$$

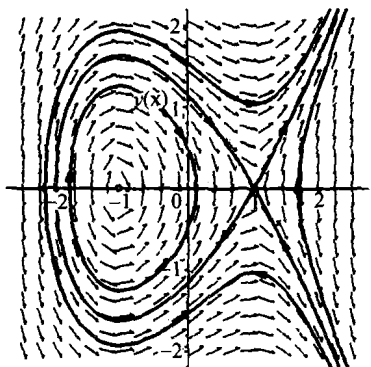


图 6.16 第 4(3)题

势能函数 $G(x)$ 有两个临界点 $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. 其中 x_1 为 $G(x)$ 的严格极小值点, x_2 为 $G(x)$ 的严格极大值点. 因此 $(-1, 0)$ 为原系统的中心, $(1, 0)$ 为原系统的鞍点. 由此可画出原系统的相图, 见图 6.16.

注: 读者可将本章例 6.7 的 Maple 程序作适当修改画出相应的相图.

5*. 证明平面 Hamilton 系统的任意一个流在将一个平面区域变换为另一个平面区域时保持面积不变.

提示: 当通过变换 $(u, v) = (u(x, y), v(x,$

$y))$ 把一个平面区域 D_0 变换为另一个平面区域 D_1 时, D_1 的面积为

$$\iint_{D_0} \det \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right) dx dy.$$

证明: 设 $\phi'(x, y) := (u(x, y, t), v(x, y, t))$ 是平面 Hamilton 系统

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

的一个流, 其中 $(t, x, y) \in \mathbb{R}^3$. 则当 t 在 \mathbb{R} 中变动时, 映射 $\phi'(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 把一个平面区域 D_0 变换为另一个平面区域 D_1 . 下面证明变换的 Jacobi 行列式为 1.

事实上, 由动力系统的知识, 这里映射 $\phi'(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 中的变量 (x, y) 表示原系统解的初值, 为清楚起见, 下用 (x_0, y_0) 表示. 令矩阵

$$\mathbf{Z}(x_0, y_0, t) = \left(\frac{\partial(u(x_0, y_0, t), v(x_0, y_0, t))}{\partial(x_0, y_0)} \right),$$

则不难由解对初值的可微依赖性知 $\mathbf{Z}(x_0, y_0, t)$ 满足初值问题

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dt} = \frac{\partial \left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x} \right)}{\partial(x, y)} \mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z}(x_0, y_0, t_0) = \mathbf{I}.$$

由 Liouville 公式知对任意的 t ,



$$\det \mathbf{Z}(x_0, y_0, t) = \exp \left[\int_{t_0}^t \operatorname{tr} \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x} \right)}{\partial(x, y)} \right) ds \right] = 1.$$

这就证明了平面 Hamilton 系统的任意一个流在将一个平面区域变换为另一个平面区域时, 变换的 Jacobi 行列式恒为 1, 从而保持面积不变. \square

6*. 设 $a(x, y), b(x, y)$ 是 \mathbb{R}^2 上不为零的连续可微函数. 证明: 连续可微函数 $u=U(x, y)$ 是一阶线性偏微分方程

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (6.27)$$

的解, 当且仅当 $U(x, y)$ 是常微分方程

$$\frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{b(x, y)} \quad (6.28)$$

的首次积分(见第二章第 2 节). 方程(6.28)称为(6.27)的特征方程.

证明: 由解的存在唯一性定理, 令 $x(t), y(t)$ 是初值问题

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y), \\ x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0 \end{aligned}$$

的解. 如果 $u=U(x, y)$ 是偏微分方程(6.27)的解, 令 $u(t) := U(x(t), y(t))$ 并对 t 求得

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} a + \frac{\partial U}{\partial y} b = 0.$$

因此 $u(t)$ 是一个常数, 即 $U(x, y)$ 是(6.28)的首次积分.

反之, 若 $U(x, y)$ 是(6.28)的首次积分, 则函数 $u(t) := U(x(t), y(t))$ 为常值函数. 从而,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} a + \frac{\partial U}{\partial y} b = 0.$$

特别考虑在 $t=0$ 的取值和 (x_0, y_0) 的任意性, 知道 $U(x, y)$ 满足偏微分方程(6.27). \square

7*. 求偏微分方程

$$(x^2 - y^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2xy \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

的一个解.

解：由上题知所给偏微分方程的特征方程为

$$\frac{dx}{x^2 - y^2} = \frac{dy}{2xy},$$

它等价于 $2xydx + (-x^2 + y^2)dy = 0$ ，为齐次方程，容易得到其通解为

$$U(x, y) = \frac{x^2}{y} + y \equiv C,$$

其中 C 是任意常数。从而求得偏微分方程的一个解

$$u = \frac{x^2}{y} + y.$$

[General Information]

书名=常微分方程学习指导

页数=220

SS号=12980169