$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+2=0$$

解之得特征值为 $\lambda_1=1+i$，$\lambda_2=1-i$.

相应于 $\lambda_1=1+i$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}-i & -1\\ 1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0$$

解之得 $b=-ia$. 不妨取 $a=1$，则 $b=-i$. 那么对应的复值解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=e^{(1+i)t}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}\cos t+i\sin t\\ \sin t-i\cos t\end{pmatrix}$$

取它的实部的虚部，可得两个实值解

$$\begin{cases}x_1=e^t\cos t\\ y_1=e^t\sin t\end{cases},\qquad \begin{cases}x_2=e^t\sin t\\ y_2=-e^t\cos t\end{cases}$$

易知它们在$(-\infty,+\infty)$上线性无关. 因此，该方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}+C_2e^t\begin{pmatrix}\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix}.$$

2.

【427】 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dy}=x-5y\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=2x-y\end{cases}$

解 系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 5\\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+9=0$$

解之得特征值为 $\lambda_1=3i$，$\lambda_2=-3i$.

相应于 $\lambda_1=3i$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ 应满足

$$(A-3iE)\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-3i & -5\\ 2 & -1-3i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=\frac{1}{2}(1+3i)b$. 不妨取 $b=1$, 则 $a=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$. 那么对应的复值解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=e^{i3t}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cos3t-\frac{3}{2}\sin3t\\ \cos3t\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\cos3t+\frac{1}{2}\sin3t\\ \sin3t\end{pmatrix}$$

分别取其实部和虚部, 可得两实值解

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}\cos3t-\frac{3}{2}\sin3t\\ y_1=\cos3t\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_2=\frac{3}{2}\cos3t+\frac{1}{2}\sin3t\\ y_2=\sin3t\end{cases}$$

易知它们在$(-\infty,+\infty)$上线性无关. 于是, 方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cos3t-\frac{3}{2}\sin3t\\ \cos3t\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\cos3t+\frac{1}{2}\sin3t\\ \sin3t\end{pmatrix}.$$

3.

【430】 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha x + \beta y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\beta x + \alpha y \end{cases} \qquad (\beta \neq 0)$

解 系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ -\beta & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = (\alpha - \lambda)^2 + \beta^2 = 0$$

解之得特征值为 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$，$\lambda_2 = \alpha - i\beta$.

相应于 $\lambda = \alpha + i\beta$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 应满足

$$(\mathbf{A} - (\alpha + i\beta)\mathbf{E}) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\beta & \beta \\ -\beta & -i\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

即

$$\begin{cases} -i\beta a + \beta b = 0 \\ -\beta a - i\beta b = 0 \end{cases}$$

解之得 $b = ia$. 不妨令 $a = 1$，则 $b = i$. 那么相应的特解为

$$e^{(\alpha + i\beta)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

故特征值 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ 所对应的实解为

$$\begin{cases} x_1 = e^{\alpha t}\cos\beta t \\ y_1 = -e^{\alpha t}\sin\beta t \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_2 = e^{\alpha t}\sin\beta t \\ y_2 = e^{\alpha t}\cos\beta t \end{cases}$$

这两个解在 $(-\infty, +\infty)$ 上线性无关. 于是，得方程组的通解

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\beta t \\ -\sin\beta t \end{pmatrix} + C_2 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \sin\beta t \\ \cos\beta t \end{pmatrix}$$

或

$$\begin{cases} x = e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t) \\ y = e^{\alpha t}(-C_1\sin\beta t + C_2\cos\beta t). \end{cases}$$

4.

【437】 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-5x-10y-20z\\ \dfrac{dy}{dt}=5x+5y+10z\\ \dfrac{dz}{dt}=2x+4y+9z\end{cases}$

解 系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-5 & -10 & -20\\ 5 & 5 & 10\\ 2 & 4 & 9\end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda E)&=\begin{vmatrix}-5-\lambda & -10 & -20\\ 5 & 5-\lambda & 10\\ 2 & 4 & 9-\lambda\end{vmatrix}\\ &=-\lambda^3+9\lambda^2-25\lambda+25\\ &=-(\lambda-5)(\lambda^2-4\lambda+5)=0\end{aligned}$$

解之得特征值 $\lambda_1=5$，$\lambda_2=2+i$，$\lambda_3=2-i$.

相应于 $\lambda_1=5$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} -10 & -10 & -20 \\ 5 & 0 & 10 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=-2c$，$b=0$. 取 $c=1$，则 $a=-2$. 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}=e^{5t}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=2+i$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} -7-i & -10 & -20 \\ 5 & 3-i & 10 \\ 2 & 4 & 7-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=(1+i)b$，$c=-\dfrac{2}{5}(2+i)b$. 取 $b=5$,则 $a=5+5i$，$c=-4-2i$. 那么，对应的复值解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=e^{(2+i)t}\begin{pmatrix} 5+5i \\ 5 \\ -4-2i \end{pmatrix}=e^{2t}(\cos t+i\sin t)\begin{pmatrix} 5+5i \\ 5 \\ -4-2i \end{pmatrix}$$

分别取其实部和虚部可得方程组的两个实解

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix} 5(\cos t-\sin t) \\ 5\cos t \\ -2(2\cos t-\sin t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 5(\cos t + \sin t) \\ 5\sin t \\ -2(2\sin t + \cos t) \end{pmatrix}$$

易知，它们在$(-\infty, +\infty)$上是线性无关的．于是，该方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{5t} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 5(\cos t - \sin t) \\ 5\cos t \\ -4\cos t + 2\sin t \end{pmatrix}$$

$$+ C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 5(\cos t + \sin t) \\ 5\sin t \\ -2\cos t - 4\sin t \end{pmatrix}.$$

5.

【438】 $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + y - z \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + y + z \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = x - y + z \end{cases}$$

解　系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 4) = 0$$

解之得特征值为 $\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 1 + \sqrt{3}i$，$\lambda_3 = 1 - \sqrt{3}i$.

相应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=b=c$. 取 $a=b=c=1$, 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=1+\sqrt{3}i$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{3}i & 1 & -1 \\ -1 & -\sqrt{3}i & 1 \\ 1 & -1 & -\sqrt{3}i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=-\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}c$, $b=-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}c$. 取 $c=2$, 则 $a=-1+\sqrt{3}i$, $b=-1-\sqrt{3}i$. 那么相应的复值解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=e^{(1+\sqrt{3}i)t}\begin{pmatrix} -1+\sqrt{3}i \\ -1-\sqrt{3}i \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$=e^t\begin{pmatrix} (-\cos\sqrt{3}t-\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t)+i(\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t-\sin\sqrt{3}t) \\ (-\cos\sqrt{3}t+\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t)+i(-\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t-\sin\sqrt{3}t) \\ 2\cos\sqrt{3}t+i\sin\sqrt{3}t \end{pmatrix}$$

分别取它的实部和虚部，可得两个实值解

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\sqrt{3}t - \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t \\ -\cos\sqrt{3}t + \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t \\ 2\cos\sqrt{3}t \end{pmatrix} e^t$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos\sqrt{3}t - \sin\sqrt{3}t \\ -\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t - \sin\sqrt{3}t \\ 2\sin\sqrt{3}t \end{pmatrix} e^t$$

因此，该方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -\cos\sqrt{3}t - \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t \\ -\cos\sqrt{3}t + \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t \\ 2\cos\sqrt{3}t \end{pmatrix}$$

$$+ C_3 e^t \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos\sqrt{3}t - \sin\sqrt{3}t \\ -\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t - \sin\sqrt{3}t \\ 2\sin\sqrt{3}t \end{pmatrix}.$$

6.

【例 4】求解微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}. \tag{6.37}$$

易知

$$\det[\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}]=\lambda^2-2\lambda+2.$$

因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征根 $\lambda_1=1+\mathrm{i}$ 和 $\lambda_2=1-\mathrm{i}$, 而且相应的特征向量可分别取为

$$\boldsymbol{r}_1=\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{r}_2=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\ 1\end{pmatrix}.$$

所以解矩阵可取为

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} & \mathrm{i}\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}\\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} & \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} & \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\end{pmatrix}.$$

这是一个复值矩阵. 代入 (6.36) 式, 可得实的基解矩阵

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{x\boldsymbol{A}} &= \boldsymbol{\Phi}(x)\,\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)\\ &=\mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} & \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 1\end{pmatrix}\\ &=\mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由此可以得到 (6.37) 的通解

$$\boldsymbol{y}=C_1\mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}, \tag{6.38}$$

其中 C_1 和 C_2 是任意常数.

现在, 我们顺便利用本节附注 2 的方法, 从复值解提取所需的实值解. 从上面的 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 可以看出, 它的第一列

$$\boldsymbol{y}_1=\mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix}+\mathrm{i}\mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}$$

是一个复值解. 因此, 它的实部和虚部是两个线性无关解, 由此同样可以得到通解 (6.38). 注意, $\boldsymbol{y}_1$ 的共轭 $\boldsymbol{y}_2=\bar{\boldsymbol{y}}_1$ 虽没在 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 中出现, 其实它与 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 的第二列只差一个因子 i.

7.

【425】 $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 3y - 2x \end{cases}$

解 系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

解之得特征值为 $\lambda_1 = 2 + i$，$\lambda_2 = 2 - i$.

相应于 $\lambda_1 = 2 + i$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 应满足

$$(\boldsymbol{A} - (2+i)\boldsymbol{E})\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

解之得 $b = (1+i)a$. 不妨取 $a = 1$，则 $b = 1 + i$. 那么对应的特解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{(2+i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t + i\sin t \\ (\cos t - \sin t) + i(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}$$

由此得 $\lambda_1 = 2 + i$ 所对应的实解为

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{2t}\cos t \\ y_1(t) = e^{2t}(\cos t - \sin t) \end{cases}$$

及

$$\begin{cases} x_2(t) = e^{2t}\sin t \\ y_2(t) = e^{2t}(\cos t + \sin t) \end{cases}$$

它们在$(-\infty, +\infty)$上线性无关. 从而，得到该方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

8.

【429】 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ay \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ax \end{cases} \qquad (a \neq 0)$

解 系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & a \\ -a & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a^2 = 0$$

因为 $a \neq 0$，可得特征值为 $\lambda_1 = ai$，$\lambda_2 = -ai$.

相应于特征值 $\lambda_i = ai$ 的特解形如

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{iat} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

η_1，η_2 应满足方程组

$$\begin{pmatrix} -ai & a \\ -a & -ai \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = 0$$

即

$$\begin{cases} -ai\eta_1 + a\eta_2 = 0 \\ -a\eta_1 - ai\eta_2 = 0 \end{cases}$$

解之得 $\eta_2 = i\eta_1$. 不妨令 $\eta_1 = 1$，则 $\eta_2 = i$. 于是，相应的特解为

$$x = e^{iat}, \qquad y = ie^{iat}$$

或 $x = \cos at + i\sin at$，$y = -\sin at + i\cos at$

取上述复值解的实部与虚部，可得方程组在$(-\infty, +\infty)$上的两个线性无关的实解

$$\begin{cases} x_1 = \cos at \\ y_1 = -\sin at \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_2 = \sin at \\ y_2 = \cos at \end{cases}$$

于是，方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos at \\ -\sin at \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin at \\ \cos at \end{pmatrix}.$$

9.

【439】 $$\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = y + z & (1) \\ \dot{y} + \dot{z} = z + x & (2) \\ \dot{z} + \dot{x} = x + y & (3) \end{cases}$$

解 记这三个方程依次为(1)，(2)，(3). 将这三个方程相加得

$$\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} = x + y + z \qquad (4)$$

(4) − (1)得 $$\dot{z} = x \qquad (5)$$

(4) − (2)得 $$\dot{x} = y \qquad (6)$$

(4) - (3)得 $\dot{y} = z$ (7)

只需求解由方程(5)、(6)、(7)组成的新的方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = x \end{cases}$$

系数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

特征方程

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 1 - \lambda^3 = 0$$

求得特征值为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

相应于 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

解之得 $a = b = c$. 取 $a = b = c = 1$, 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，方程组有形如

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

的解，这里 a，b，c 应满足

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=0$$

解之得 $b=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a$，$c=-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}a$. 取 $a=1$，则 $b=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$c=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 那么相应的复值解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix}$$

$$=e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix}=e^{-\frac{t}{2}}$$

$$\cdot\begin{pmatrix} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + i\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + i\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

分别取其实部和虚部,可得两个实解

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix}$$

易知上述三解在$(-\infty, +\infty)$上是线性无关的. 于是, 原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix}$$

$$+ C_3e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix}.$$

10.

【例 6】求解方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\begin{pmatrix}-5 & -10 & -20\\ 5 & 5 & 10\\ 2 & 4 & 9\end{pmatrix}\boldsymbol{y}.$$

先求相应的特征多项式

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=-(\lambda-5)(\lambda^2-4\lambda+5).$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 有单重特征根 5 和单重共轭复特征根 $2+\mathrm{i}$ 与 $2-\mathrm{i}$. 再求出与这三个特征根相应的特征向量，并把它们分别作为列向量，就可得到一个复值的基解矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\begin{pmatrix}-2\mathrm{e}^{5x} & (3+\mathrm{i})\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x} & (3-\mathrm{i})\mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})x}\\ 0 & (2-\mathrm{i})\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x} & (2+\mathrm{i})\mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})x}\\ \mathrm{e}^{5x} & -2\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})x} & -2\mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})x}\end{pmatrix}.$$

采用本节附注 2 的方法，从 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 的第二 (或第三) 列提取实部与虚部，再与第一列合在一起，就得到一个实值的基解矩阵

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(x)=\begin{pmatrix}-2\mathrm{e}^{5x} & (3\cos x-\sin x)\mathrm{e}^{2x} & (\cos x+3\sin x)\mathrm{e}^{2x}\\ 0 & (2\cos x+\sin x)\mathrm{e}^{2x} & (-\cos x+2\sin x)\mathrm{e}^{2x}\\ \mathrm{e}^{5x} & -2\cos x\mathrm{e}^{2x} & -2\sin x\mathrm{e}^{2x}\end{pmatrix}.$$

也可以直接验证，

$$\det[\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(0)]=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}\neq 0.$$

所以，所求的通解为

$$\boldsymbol{y}=\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(x)\boldsymbol{c},$$

其中 $\boldsymbol{c}$ 为三维的任意常数列向量. □

四、

(1) $\frac{dy}{dx}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}y,\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix};$

1.

解 (1) 特征方程为

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1\\ 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2-3=0.$$

特征根 $\lambda_1=-\sqrt{3}$, $\lambda_2=\sqrt{3}$ 为两相异实根. 下面计算特征向量

(i). $\lambda_1=-\sqrt{3}$ 时，考虑 $(\lambda_1 I-A)r=0$, 即由

$$\begin{cases}(2-\sqrt{3})u_1-u_2=0,\\ u_1-(2+\sqrt{3})u_2=0,\end{cases}\quad \text{求得特征向量}\quad r_1=\begin{pmatrix}2+\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}.$$

稳定子空间是

$$GE_{-\sqrt{3}}=\left\{\alpha\begin{pmatrix}2+\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix};\quad \alpha\in\mathbb{R}^1\right\}.$$

(ii). $\lambda_2=\sqrt{3}$ 时，考虑 $(\lambda_2 I-A)r=0$, 即由

$$\begin{cases}(2+\sqrt{3})u_1-u_2=0,\\ u_1-(2-\sqrt{3})u_2=0,\end{cases}\quad \text{求得特征向量}\quad r_2=\begin{pmatrix}2-\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}.$$

不稳定子空间是

$$GE_{\sqrt{3}}=\left\{\beta\begin{pmatrix}2-\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix};\quad \beta\in\mathbb{R}^1\right\}.$$

所以，原方程的通解为

$$y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=C_1e^{-\sqrt{3}x}\begin{pmatrix}2+\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}+C_2e^{\sqrt{3}x}\begin{pmatrix}2-\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix},$$

其中 C_1, C_2 是任意常数。

2.

(3) $\frac{dy}{dx}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}y,\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix};$

(3) 设系数矩阵为 A. 特征方程为

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+11=0.$$

得特征根 $\lambda_1=3+\sqrt{2}i,\ \lambda_2=3-\sqrt{2}i.$

对应于 $\lambda_1=3+\sqrt{2}i$, 由特征方程组

$$(A-\lambda_1 I)r=\begin{pmatrix} -1-\sqrt{2}i & -1 \\ 3 & 1-\sqrt{2}i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=0,$$

求得特征向量

$$r_1=\begin{pmatrix} -1 \\ -1-\sqrt{2}i \end{pmatrix},$$

所以, 原方程有解

$$e^{(3+\sqrt{2}i)x}\begin{pmatrix} -1 \\ -1-\sqrt{2}i \end{pmatrix}.$$

它的实部和虚部

$$e^{3x}\begin{pmatrix} \cos\sqrt{2}x \\ -\cos\sqrt{2}x+\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x \end{pmatrix},\quad e^{3x}\begin{pmatrix} \sin\sqrt{2}x \\ -\sin\sqrt{2}x-\sqrt{2}\cos\sqrt{2}x \end{pmatrix}$$

是方程的两个实的线性无关解。所以, 该方程组的通解为

$$y=C_1e^{3x}\begin{pmatrix} \cos\sqrt{2}x \\ -\cos\sqrt{2}x+\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x \end{pmatrix}+C_2e^{3x}\begin{pmatrix} \sin\sqrt{2}x \\ -\sin\sqrt{2}x-\sqrt{2}\cos\sqrt{2}x \end{pmatrix},$$

其中 C_1, C_2 是任意常数。不稳定子空间是

$$GE_{3\pm\sqrt{2}i}=\left\{\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}^1\right\}=\mathbb{R}^2.$$

3.

$$(5)\ \frac{dy}{dx}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}y,\quad y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix};$$

(5) 特征方程是

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda^2+1) = 0.$$

得特征根 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda = -i$. 下求特征向量.

(i) 对 $\lambda_1 = 1$, 考虑特征方程组 $(A - \lambda_1 I)r = 0$, 即

$$\begin{cases} u_1 - u_2 + 2u_3 = 0, \\ u_1 - u_2 + 2u_3 = 0, \\ -2u_1 + u_2 - 2u_3 = 0. \end{cases}$$

求得 $u_1 = 0, u_2 = 2u_3$. 于是求出特征向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. 所以, 对应于一重特征根 $\lambda_1 = 1$, 求出了一个解 $e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. 对应的特征子空间为

$$GE_1 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \alpha \in \mathbb{R}^1 \right\}.$$

它是不稳定子空间.

(ii) 对 $\lambda_2 = i$, 考虑特征方程组 $(A - \lambda_2 I)r = 0$, 即

$$\begin{cases} (2-i)u_1 - u_2 + 2u_3 = 0, \\ u_1 - iu_2 + 2u_3 = 0, \\ -2u_1 + u_2 - (1+i)u_3 = 0. \end{cases}$$

求得 $u_1 = u_2 = -(1+i)u_3$. 于是求出特征向量 $\begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \\ -1 \end{pmatrix}$. 所以, 对应于一重特征根 $\lambda_2 = i$, 求出了一个复值解 $e^{ix} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \\ -1 \end{pmatrix}$. 由 Euler 公式,

$$e^{ix} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x - \sin x \\ \cos x - \sin x \\ -\cos x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ \cos x + \sin x \\ -\sin x \end{pmatrix},$$

它的实部和虚部

$$\begin{pmatrix} \cos x - \sin x \\ \cos x - \sin x \\ -\cos x \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ \cos x + \sin x \\ -\sin x \end{pmatrix}$$

是方程组的二个线性无关的实解. 因 $\begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \\ -1 \end{pmatrix}$ 的实部和虚部分别为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 故对应的广义特征子空间为

$$GE_{\pm i} = \left\{ \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \beta, \gamma \in R^1 \right\}.$$

它是中心子空间.

所以, 原方程的通解为

$$y = C_1 e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos x - \sin x \\ \cos x - \sin x \\ -\cos x \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ \cos x + \sin x \\ -\sin x \end{pmatrix},$$

其中 C_1, C_2, C_3 是任意常数.

4.

$$(2)\ \frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 通解为

$$y = C_1 \begin{pmatrix} -4e^{-2x} \\ e^{-2x} \\ e^{-2x} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\cos 4x \\ -\sin 4x \\ 2\cos 4x \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 2\sin 4x \\ \cos 4x \\ 2\sin 4x \end{pmatrix},$$

其中 C_1, C_2, C_3 是任意常数. 再由初值条件, 所求初值问题的解为

$$y = \begin{pmatrix} -4e^{-2x} - 2\sin 4x \\ e^{-2x} - \cos 4x \\ e^{-2x} - 2\sin 4x \end{pmatrix}.$$

二、

习题 6.1.1 设系统 $\frac{dx}{dt}=f(x)$ 有一个解 $\phi(t)$ 当 $t\to+\infty$ 时满足 $\phi(t)\to c$，其中 f 连续可微。证明 c 是此系统的平衡点。

证明 容易知道

$$\phi(t+1)-\phi(t)=\int_t^{t+1}\phi'(s)ds=\int_t^{t+1}f(\phi(s))ds=\int_0^1 f(\phi(s+t))ds.$$

令 $t\to+\infty$ 得,$f(c)=0$.

定义 1 设(1)的一个特解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$，它在 $[t_0,+\infty)$ 上有定义，如果对任给 $\epsilon>0$，恒存在 $\delta(\epsilon)>0$，使所有初值 $x_0\in D$ 满足

$$\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{\varphi}(t_0)\|<\delta(\epsilon) \tag{2}$$

的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 都在 $t\geqslant t_0$ 上有定义，并且当 $t\geqslant t_0$ 时

$$\|\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{\varphi}(t)\|<\epsilon \tag{3}$$

则称解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是在李雅普诺夫(Liapunov)意义下稳定的.

按照李雅普诺夫的说法，对应于解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的运动称为未受干扰的运动，而对应于其它解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 的运动称为受干扰的运动，并称 $\|\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{\varphi}(t)\|$ 为扰动，称 $\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{\varphi}(t_0)\|$ 为初始扰动. 定义 1 的意思是只要初始扰动充分小，扰动就可以任意小，这时未受干扰运动是稳定的.

定义 2 对(1)的特解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)(t\in[t_0,+\infty))$，若存在 $\epsilon_0>0$，使对任意 $\delta>0$，总存在 $\boldsymbol{x}_0\in D$，满足(2)式，但解 $\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 在某一 $t=\bar{t}>t_0$ 处或无定义或(3)不成立，即

$$\|\boldsymbol{x}(\bar{t};\ t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{\varphi}(\bar{t})\|\geqslant\epsilon_0$$

则称解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是不稳定的.

定义 3 若(1)的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是稳定的，并存在 $\delta_0>0$，只要 $\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{\varphi}(t_0)\|<\delta_0$，都有

$$\lim_{t\to+\infty}(\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{\varphi}(t))=0 \tag{4}$$

则称 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是渐近稳定的.

三、

习题 6.2.3 讨论下列方程组零解的稳定性:

(1) $\frac{dx}{dt} = -2x + y + x^2 e^x, \quad \frac{dy}{dt} = x - y + x^3 y;$

(2) $\frac{dx}{dt} = \sin(x+y), \quad \frac{dy}{dt} = -\ln(1+y);$

(3) $\frac{dx}{dt} = -3x + y + x^2 \sin y, \quad \frac{dy}{dt} = -2x - 3y + y^2 e^x.$

解 (1) 线性部分的特征方程为

$$\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0.$$

特征根都小于 0. 所以，零解渐近稳定。

(2) 在 $(0,0)$ 展开

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x + y - \frac{1}{3!}(x+y)^3 + \frac{1}{5!}(x+y)^5 + \cdots, \\ \frac{dy}{dt} = -y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + \cdots. \end{array}\right. \tag{$*$}$$

方程 $(*)$ 的线性部分的特征方程是 $\lambda^2 - 1 = 0$, 有特征根 $\lambda_{1,2} = \pm 1$, 有正实部的根. 所以, 零解是不稳定的.

(3) 线性部分的特征方程为

$$(3+\lambda)^2 + 2 = 0.$$

特征根是 $\lambda_{1,2} = -3 \pm i\sqrt{2}$, 具有负实部. 因而，零解是渐近稳定.

四、

习题 6.2.7 研究方程组

$$\dot{x} = y^2 - 2ty - 2y - x, \quad \dot{y} = 2x + 2t^2 + e^{2t-2y}$$

的解 $x = -t^2$, $y = t$ 是不是稳定的.

解 令

$$x = u - t^2, \quad y = v + t,$$

代入方程得

$$\begin{cases} \dot{u} = -u - 2v + v^2, \\ \dot{v} = 2u - 1 + e^{-2v} = 2u - 2v + \frac{(2v)^2}{2!} + \cdots. \end{cases} \tag{$*$}$$

$(*)$ 的线性部分的特征方程为

$$\lambda^2 + 3\lambda + 6 = 0.$$

得特征根 $\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{15}}{2}$, 具有负的实部. 所以, 方程 $(*)$ 的零解是渐近稳定的. 从而, 得所求问题的解是渐近稳定的.

五、

习题 6.2.10 设 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon$ 都是正数，$x\geq 0, y\geq 0$，求出方程组

$$\frac{dx}{dt}=-\alpha x+\beta x^2-\gamma xy,\quad \frac{dy}{dt}=-\delta y+\epsilon xy$$

的所有平衡解并讨论其稳定性.

解 平衡点是 $(0,0),(\frac{\alpha}{\beta},0),(\frac{\delta}{\epsilon},\frac{\beta\delta-\epsilon\alpha}{\epsilon\gamma})$.

(i) 对平衡点 $(0,0)$，特征方程是

$$(\alpha+\lambda)(\delta+\lambda)=0.$$

特征根是 $\lambda_1=-\alpha,\lambda_2=-\delta$. 所以，$(0,0)$ 是稳定的.

(ii) 对平衡点 $(\frac{\alpha}{\beta},0)$，令

$$x=u+\frac{\alpha}{\beta},\quad y=v.$$

则方程变成

$$\frac{du}{dt}=\alpha u-\frac{\gamma\alpha}{\beta}v+\beta u^2-\gamma uv,\quad \frac{dv}{dt}=(-\delta+\frac{\epsilon\alpha}{\beta})v+\epsilon uv.$$

有一特征根 $\lambda=\alpha>0$. 所以，平衡点 $(\frac{\alpha}{\beta},0)$ 不稳定。

(iii) 当 $\beta\delta-\epsilon\alpha>0$ 时，平衡点在第一象限. 令

$$x=u+\frac{\delta}{\epsilon},\quad y=v+\frac{\beta\delta-\epsilon\alpha}{\epsilon\gamma}.$$

则方程变成

$$\frac{du}{dt}=\frac{\delta\beta}{\epsilon}u-\frac{\delta\gamma}{\epsilon}v+\beta u^2-\gamma uv,\quad \frac{dv}{dt}=\frac{\beta\delta-\epsilon\alpha}{\gamma}u+\epsilon uv.$$

特征方程是

$$\lambda^2-\frac{\delta\beta}{\epsilon}\lambda+\frac{\beta\delta-\epsilon\alpha}{\epsilon}\delta=0.$$

有正特征根。所以，$(\frac{\delta}{\epsilon},\frac{\beta\delta-\epsilon\alpha}{\epsilon\gamma})$ 是不稳定的.

六、

1.

【428】 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+5x+y=0 \\ \dfrac{dy}{dt}-2x+3y=0 \end{cases}$

解 整理可得

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-5x-y \\ \dfrac{dy}{dt}=2x-3y \end{cases}$$

其系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix} -5-\lambda & -1 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+8\lambda+17=0$$

求得特征值 $\lambda_1=-4+i$，$\lambda_2=-4-i$.

相应于 $\lambda_1=-4+i$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 应满足

$$(\boldsymbol{A}-(-4+i)\boldsymbol{E})\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1-i & -1 \\ 2 & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=0$$

解之得 $b=-(1+i)a$. 不妨取 $a=1$, 则 $b=-(1+i)$. 那么对应的解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=e^{-4t}(\cos t+i\sin t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix}$$

$$=e^{-4t}\begin{pmatrix} \cos t+i\sin t \\ \sin t-\cos t-i(\cos t+\sin t) \end{pmatrix}$$

取其实部和虚部可得两实解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = e^{-4t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^{-4t}\begin{pmatrix} \sin t \\ -(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}$$

它们在$(-\infty, +\infty)$上线性无关．于是，求得该方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-4t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} + C_2 e^{-4t}\begin{pmatrix} \sin t \\ -(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}.$$

2.

【424】 $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y - 3x \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 8x - y \end{cases}$$

解　系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda E})=\begin{vmatrix}-3-\lambda & 1\\ 8 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+5)=0$$

解之得特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=5$.

相应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ 应满足

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 8 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0$$

解之得 $b=4a$. 不妨取 $a=1$，则 $b=4$. 那么，对应的解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=e^{t}\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=-5$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ 应满足

$$(\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 8 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0$$

解之得 $b=-2a$. 不妨取 $a=1$，则 $b=-2$. 那么对应的解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=e^{-5t}\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$$

于是,该方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1e^{t}\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}+C_2e^{-5t}\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}.$$

3.

【442】 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y \end{cases}$

解 系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-2) = 0$$

解之得特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=-1$（二重）.

相应于 $\lambda_1=2$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=0$$

解之可得 $a=b=c$. 令 $a=b=c=1$，那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=-1$(二重)，方程组有形如

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix} r_{11}+r_{12}t \\ r_{21}+r_{22}t \\ r_{31}+r_{32}t \end{pmatrix}$$

的特解，将其代入方程组可得

$$-e^{-t}(r_{11}+r_{12}t)+e^{-t}r_{12}=e^{-t}(r_{21}+r_{22}t)+e^{-t}(r_{31}+r_{32}t),$$

$$-e^{-t}(r_{21}+r_{22}t)+e^{-t}r_{22}=e^{-t}(r_{31}+r_{32}t)+e^{-t}(r_{11}+r_{12}t),$$

$$-e^{-t}(r_{31}+r_{32}t)+e^{-t}r_{32}=e^{-t}(r_{11}+r_{12}t)+e^{-t}(r_{21}+r_{22}t)$$

消去 e^{-t} 后得

$$-(r_{11}+r_{12}t)+r_{12}=(r_{21}+r_{22}t)+(r_{31}+r_{32}t)$$

$$-(r_{21}+r_{22}t)+r_{22}=(r_{31}+r_{32}t)+(r_{11}+r_{12}t)$$

$$-(r_{31}+r_{32}t)+r_{32}=(r_{11}+r_{12}t)+(r_{21}+r_{22}t)$$

令 t 的同次幂系数相等，可得

$$r_{11}+r_{21}+r_{31}-r_{12}=0,\ r_{22}+r_{32}+r_{12}=0$$

$$r_{11}+r_{21}+r_{31}-r_{22}=0,\quad r_{22}+r_{32}+r_{12}=0$$

$$r_{11}+r_{21}+r_{31}-r_{32}=0,\quad r_{22}+r_{32}+r_{12}=0$$

解之，得

$$r_{12}=r_{22}=r_{32}=0,\qquad r_{11}=-(r_{21}+r_{31})$$

取 $r_{21}=-1$，$r_{31}=0$，则 $r_{11}=1$. 那么相应的一个特解为

$$e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

取 $r_{21}=0$，$r_{31}=-1$，则 $r_{11}=1$. 那么相应的另一个特解为

$$e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

易知它们在$(-\infty,+\infty)$上线性无关. 因此，方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+C_3e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

4.

【435】 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2x-y+z \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+2y-z \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=x-y+2z \end{cases}$

解 系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)=0$$

解之得特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=3$.

相应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 应满足

$$(\mathbf{A}-\mathbf{E})\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=0$，$b=c$．不妨取 $b=c=1$．那么，对应的解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=e^{t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=2$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ 应满足

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=b=c$．不妨取 $a=b=c=1$．那么，对应的解为

$$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_3=3$ 的特征向量应满足

$$(\mathbf{A}-3\mathbf{E})\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&-1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=c$，$b=0$．不妨取 $a=c=1$．那么，对应的解为

$$\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix}=e^{3t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

于是，方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

或

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{2t} & e^{3t} \\ e^t & e^{2t} & 0 \\ e^t & e^{2t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

一、

【516】 对提要中的方程组(1)，若 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{0})\equiv 0$，则它有零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，试述零解的稳定及渐近稳定的定义.

解 若对任给 $\varepsilon>0$，恒存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta(\varepsilon)$

的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 都在 $t\geqslant t_0$ 有定义，并且当 $t\geqslant t_0$ 时，$\|\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)\|<\varepsilon$，这时称零解 $\boldsymbol{x}\equiv\boldsymbol{0}$ 是稳定的.

若零解 $\boldsymbol{x}\equiv 0$ 是稳定的，并存在 $\delta_0>0$，只要 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta_0$，都有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)=0$，这时称零解 $\boldsymbol{x}\equiv\boldsymbol{0}$ 是渐近稳定的.

二、

【517】 设方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 在区间 $0\leqslant t<+\infty$ 上存在，试证明当 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 在 $t_0\leqslant t<+\infty$ 上稳定时，$\boldsymbol{\varphi}(t)$ 在 $0\leqslant t<+\infty$ 上也是稳定的.

证 设 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 在 $t_0\leqslant t<+\infty$ 上是稳定的，即对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$(取 $\delta_1<\varepsilon$)，使 $\|\boldsymbol{\varphi}(t_0)-\boldsymbol{x}_0\|<\delta_1$ 时有 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)$在 $t\geqslant t_0$ 上有定义且当 $t\geqslant t_0$ 时

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)\|<\varepsilon \tag{1}$$

将解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 左延展至 $t=0$，由解对初值的连续依赖性知，取 $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}(0;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)$，对于给定的 δ_1，存在 $\delta>0$，使当 $\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{\varphi}(0)\|<\delta$ 时有

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{x}(t;\ 0,\boldsymbol{x}_1)\|<\delta_1,\quad 0<t\leqslant t_0 \tag{2}$$

注意到 $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}(0;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)$，由解的惟一性知 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;\ 0,\boldsymbol{x}_1)$ 与 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;\ t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 在 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 上表示同一个解，$\boldsymbol{x}(t;\ 0,\boldsymbol{x}_1)$ 在 $t\geqslant 0$ 上有定义，且由(1)和(2)知，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使 $\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{\varphi}(0)\|<\delta$ 时有 $t\geqslant 0$，$\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{x}(t;\ 0,\boldsymbol{x}_1)\|<\varepsilon$，所以解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 在 $0\leqslant t<+\infty$ 上也是稳定的.

三、

【520】 讨论方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x$$

的解 $x=0$，$y=C$（C 是任意常数）的稳定性.

解 为考虑解 $x=0$，$y=C$ 的稳定性，先求出方程组满足初始条件 $x(0)=x_0$，$y(0)=y_0$，的解

$$x=x_0e^t, \qquad y=y_0+x_0(e^t-1)$$

取 $\varepsilon_0=1$，则对任意的 $\delta>0$，当初始扰动 $\sqrt{x_0^2+(y_0-C)^2}<\delta$，$x_0\neq0$，$t\geqslant\ln\frac{2}{|x_0|}$，$|x_0|e^t>2$ 时扰动

$$\sqrt{(x_0e^t)^2+[y_0+x_0(e^t-1)-C]^2}$$

$$=\sqrt{2|x_0|e^t(|x_0|e^t-1)+(y_0-C)^2+x_0^2}>2>1=\varepsilon_0$$

所以解 $x=0$，$y=C$ 是不稳定的.

四、

【521】 讨论方程组

$$\frac{dx}{dt}=0, \qquad \frac{dy}{dt}=\lambda y \quad (\lambda \text{ 为参数})$$

的解 $x=C$，$y=0$（C 为任意常数）的稳定性.

解 为考虑解 $x=C$，$y=0$ 的稳定性，先求出方程组满足初始条件 $x(0)=\xi$，$y(0)=\eta$ 的解

$$x=\xi, \qquad y=\eta e^{\lambda t}$$

当 $\lambda<0$ 时，对任意常数 C，解 $x=C$，$y=0$ 为稳定的，这是因为对任意 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，当初始扰动$\sqrt{(\xi-C)^2+\eta^2}<\delta$ 时，扰动

$$\sqrt{(\xi-C_0)^2+(\eta e^{\lambda t}-0)^2}\leqslant\sqrt{(\xi-C_0)^2+\eta^2}<\delta=\varepsilon.$$

当 $\lambda>0$ 时，解 $x=C$，$y=0$ 为不稳定的. 这是因为取 $\varepsilon_0=1$，任给 $\delta>0$，使

$$\sqrt{(\xi-C_0)^2+\eta^2}<\delta,$$

及 $\eta\neq0$，当 $\bar{t}=\dfrac{1}{\lambda}\ln\dfrac{2}{|\eta|}$ 时，

$$(x-C_0)^2+(\eta e^{\lambda t}-0)^2\geqslant\eta^2 e^{2\lambda\bar{t}}=4>\varepsilon_0^2$$

当 $\lambda=0$ 时，方程组只有常数解 $x=C_1$，$y=C_2$，显然它们都是稳定的.

五、

【523】 设 $g(t)$，$f(t)$在区间 $0\leqslant t<+\infty$上连续，试证方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=g(t)x+f(t) \tag{1}$$

的任一解

1）当$\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t<+\infty$时是稳定的；

2）当$\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t=-\infty$时是渐近稳定的；

3）当$\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t=+\infty$时是不稳定的.

证 设 $x=x_1(t)$是(1)的任一解，即有

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=g(t)x_1+f(t).$$

又设 $x_2(t)$是(1)的另一解，即有

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=g(t)x_2+f(t)$$

因此，它们的差 $y(t)=x_2(t)-x_1(t)$满足齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=g(t)y \tag{2}$$

所以，问题归结为齐次方程(2)的零解的稳定性问题. 方程(2)满足初始条件 $y(0)=y_0$ 的解为

$$y=y_0e^{\int_0^t g(s)\mathrm{d}s} \tag{3}$$

1) 当$\int_0^{+\infty}g(t)\mathrm{d}t<+\infty$时，$\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t g(s)\mathrm{d}s$存在，由$g(t)$在$[0,+\infty)$连续知当$t\in[0,+\infty)$时，$\int_0^t g(s)\mathrm{d}s$是有界的. 设它的界为$M$，即当$t\in[0,+\infty)$时，$\left|\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant M$. 对任意给定的$\varepsilon>0$，取$\delta=\varepsilon e^{-M}$，则当$|y_0|<\delta$时，$t\in[0,+\infty)$，

$$|y(t)|\leqslant|y_0|e^M<\varepsilon$$

所以方程(2)的零解是稳定的，即原方程(1)的任一解稳定.

2) 当$\int_0^{+\infty}g(t)\mathrm{d}t=-\infty$时，$\lim\limits_{t\to+\infty}e^{\int_0^t g(s)\mathrm{d}s}=0$，因而当$t\in[0,+\infty)$时，$e^{\int_0^t g(s)\mathrm{d}s}$是有界的，即存在$M>0$，$t\in[0,+\infty)$时，有$\left|e^{\int_0^t g(s)\mathrm{d}s}\right|<M$. 对任给的$\varepsilon>0$，取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}$，则当$|y_0|<\delta$时，$t\in[0,\infty)$，就有$|y(t)|<\varepsilon$，且$\lim\limits_{t\to+\infty}y_0e^{\int_0^t g(s)\mathrm{d}s}=0$，所以方程(2)的零解是渐近稳定的，即原方程(1)的任一解渐近稳定.

3) 当$\int_0^{+\infty}g(t)\mathrm{d}t=+\infty$时，对任意$|y_0|\neq0$，必存在$t_1$，使$e^{\int_0^{t_1}g(s)\mathrm{d}s}>\dfrac{2}{|y_0|}$，因而取$\varepsilon_0=1$，对任意的$\delta>0$，存在$y_0\neq0$，$|y_0|<\delta$，$t=t_1$时，

$$|y(t_1)| = |y_0 e^{\int_0^{t_1} g(s)\mathrm{d}s}| \geqslant 2 > 1 = \varepsilon_0$$

所以(2)的零解是不稳定的，因而(1)的任一解都不稳定.

六、

【524】 设 $a(t)$，$b(t)$，$c(t)$在区间 $0 \leqslant t < +\infty$上连续，$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$是方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -a^2(t)y + b(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a^2(t)x + c(t) \end{cases} \tag{1}$$

的解，试证这个解是稳定的.

证 设 $x=x_1(t)$，$y=y_1(t)$是方程组(1)的任一解，则

$$x = x_1 - \varphi, \qquad y = y_1 - \psi$$

是齐次方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -a^2(t)y, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a^2(t)x \tag{2}$$

的解，从而将方程组(1)的解 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$的稳定性转化为方程组(2)的零解的稳定性.

由(2)得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y},$$

易求出它的通解

$$x^2 + y^2 = C_1^2$$

或

$$y = \pm\sqrt{C_1^2 - x^2} \tag{3}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mp a^2(t)\sqrt{C_1^2 - x^2}$$

两边积分得

$$x=C_1\cos\left(\int_0^t a^2(s)\mathrm{d}s+C_2\right)$$

代入(3)式得

$$y=C_1\sin\left(\int_0^t a^2(s)\mathrm{d}s+C_2\right)$$

即方程组(2)的通解为

$$\begin{cases} x(t)=C_1\cos\left(\int_0^t a^2(s)\mathrm{d}s+C_2\right) \\ y(t)=C_1\sin\left(\int_0^t a^2(s)\mathrm{d}s+C_2\right) \end{cases}$$

将初始条件 $x(0)=x_0$，$y(0)=y_0$ 代入得

$$C_1=\sqrt{x_0^2+y_0^2},\qquad C_2=\arctan\frac{y_0}{x_0}$$

对任给的 $\varepsilon>0$，取 $0<\delta<\varepsilon$，当$\sqrt{x_0^2+y_0^2}<\delta$ 时，$t\in[0,+\infty)$

$$\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}=\sqrt{x_0^2+y_0^2}<\delta<\varepsilon$$

所以齐次方程(2)的零解是稳定的，因而方程组(1)的解 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$稳定.

七、

【525】 如果 n 维齐次线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=A(t)\boldsymbol{x}\qquad (A(t)\text{是 } n\times n \text{ 矩阵函数})$$

的每一个解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$当 $t\to+\infty$时，都趋于零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，试证它的每一个解是渐近稳定的.

证 任一解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$是连续的，且 $t\to+\infty$时 $\boldsymbol{x}(t)\to\boldsymbol{0}$.

设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}(t)$是方程组的另一解，因为

$$\lim_{t\to+\infty}(\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{y}(t))=\lim_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t)-\lim_{t\to+\infty}\boldsymbol{y}(t)=0\qquad(1)$$

任给 $\varepsilon>0$，存在 $t_0>0$，当 $t\geqslant t_0$ 时

$$|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{y}(t)|<\varepsilon$$

再由解对初值的连续依赖性知，存在 $\delta>0$，当 $|\boldsymbol{x}(0)-\boldsymbol{y}(0)|<\delta$ 时，$0\leqslant t\leqslant t_0$

$$|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{y}(t)|<\varepsilon$$

从而知道解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 是稳定的，再由(1)知它也是渐近稳定的.

二、

习题 6.2.4 用 V 函数法研究下列方程组零解的稳定性:

(1) $\frac{dx}{dt} = y - x^3, \quad \frac{dy}{dt} = -2(x^3 + y^5)$;

(2) $\frac{dx}{dt} = -y - xy^2, \quad \frac{dy}{dt} = x - x^4 y$;

(3) $\frac{dx}{dt} = -y + x(x^2 + y^2 - 1), \quad \frac{dy}{dt} = x + y(x^2 + y^2 - 1)$;

(4) $\frac{dx}{dt} = 2y + yz - x^3, \ \frac{dy}{dt} = -x - xz - y^3, \ \frac{dz}{dt} = xy - z^3$.

解 (1) 取 $V = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}y^2$ 定正, 则

$$\frac{dV}{dt} = 2x^3\dot{x} + y\dot{y} = 2x^3(y - x^3) - 2y(x^3 + y^5) = -2x^6 - 2y^6$$

定负. 所以, 零解是渐近稳定的.

(2) 取 $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 定正，知零解是稳定的。

(3) 取 $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 定正, 则

$$\frac{dV}{dt} = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) < 0, \quad \text{当 } 0 < x^2 + y^2 < 1 \text{ 时}.$$

所以, 原点渐近稳定.

(4) 取 $V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$, 其中取 $a = c = 1$, $b = 2$, 知零解是渐近稳定的.

三 、

习题 6.2.5 求下列方程组的平衡点, 并研究其稳定性:

(1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + (x-1)^3, \\ \frac{dy}{dt} = x - 1 + y^3; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^2 - x, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - x^2 - y. \end{cases}$

解 (1) 平衡点是 $(1,0)$. 令

$$u = x - 1, \quad v = y,$$

则方程变成

$$\frac{du}{dt} = -v + u^3, \quad \frac{dv}{dt} = u + v^3.$$

取 $V = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2$, 则

$$\frac{dV}{dt} = u\dot{u} + v\dot{v} = u^4 + v^4.$$

所以，平衡解是不稳定的。

(2) 求得平衡点 $(0,0)$, $(1,2)$.

(i) 对平衡点 $(0,0)$, 因线性部分的特征方程为

$$\lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0.$$

它有一个正的特征根。所以，$(0,0)$ 是不稳定的。

(ii) 对平衡点 $(1,2)$. 令

$$x = u + 1, \quad y = v + 2,$$

则方程变成

$$\frac{du}{dt} = -3u + v - u^2, \quad \frac{dv}{dt} = u - v - u^2.$$

特征方程是

$$\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0.$$

特征根的实部都小于零。所以，$(1,2)$ 是渐近稳定的.

四、

【456】 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y \end{cases}$

解 系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -4\\ 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2+4=0$$

所以特征值为 $\lambda_{1,2}=2\pm 2i$，存在非奇异的矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}$$

使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2+2i & 0\\ 0 & 2-2i\end{pmatrix}$$

或

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}2+2i & 0\\ 0 & 2-2i\end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2+2i & 0\\ 0 & 2-2i\end{pmatrix}$$

得

$$\begin{cases}-2p_{11}+4p_{21}=(2+2i)p_{11}\\ -p_{11}+2p_{21}=(2+2i)p_{21}\end{cases}$$

即有 $p_{11}=-2ip_{21}$，可取 $p_{21}=i$，则 $p_{11}=2$

$$\begin{cases}-2p_{12}+4p_{22}=(2-2i)p_{12}\\ -p_{12}+2p_{22}=(2-2i)p_{22}\end{cases}$$

即 $p_{12}=2ip_{22}$，可取 $p_{22}=-i$，则 $p_{12}=2$. 所以

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ i & -i\end{pmatrix}$$

作变换

五、

特征值 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=5$.

相应于 $\lambda_1=-1$ 时的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}3&3\\3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$$

解得 $a=-b$. 取 $a=-b=1$，那么相应的特解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=5$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}-3&3\\3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$$

即 $a=b$. 令 $a=b=1$，则相应的特解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{5t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

于是，方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+C_2e^{5t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

将初值条件代入通解可得初值问题的解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{5t}-\frac{1}{2}e^{-t}\\\frac{1}{2}e^{5t}+\frac{1}{2}e^{-t}\end{pmatrix}$$

2）特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&1\\1&-1-\lambda&1\\2&0&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^2(\lambda-3)=0$$

【458】 求下列初值问题的解：

1) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x+3y \\ \dfrac{dy}{dt}=3x+2y \\ x(0)=0, \quad y(0)=1 \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+2y+z \\ \dfrac{dy}{dt}=x-y+z \\ \dfrac{dz}{dt}=2x+z \\ x(0)=1, \quad y(0)=z(0)=0 \end{cases}$$

解 1) 特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-5)=0$$

特征值 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=5$.

相应于 $\lambda_1=-1$ 时的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}3&3\\3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$$

解得 $a=-b$. 取 $a=-b=1$，那么相应的特解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=5$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}-3&3\\3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0$$

即 $a=b$. 令 $a=b=1$，则相应的特解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{5t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

于是，方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+C_2e^{5t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

将初值条件代入通解可得初值问题的解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{5t}-\frac{1}{2}e^{-t}\\\frac{1}{2}e^{5t}+\frac{1}{2}e^{-t}\end{pmatrix}$$

2）特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&1\\1&-1-\lambda&1\\2&0&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^2(\lambda-3)=0$$

特征值为 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=\lambda_3=-1$.

相应于 $\lambda_1=3$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 1 & -4 & 1\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

解之得 $a=2b=c$. 取 $b=1$，则 $a=c=2$. 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=e^{3t}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

当 $\lambda_{2,3}=-1$ 时，方程组有形如

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix}r_{11}+r_{12}t\\r_{21}+r_{22}t\\r_{31}+r_{32}t\end{pmatrix}$$

的解，将其代入方程组并消去 e^{-t} 后得

$$-r_{11}-r_{12}t+r_{12}=r_{11}+r_{12}t+2r_{21}+2r_{22}t+r_{31}+r_{32}t$$
$$-r_{21}-r_{22}t+r_{22}=r_{11}+r_{12}t-r_{21}-r_{22}t+r_{31}+r_{32}t$$
$$-r_{31}-r_{32}t+r_{32}=2r_{11}+2r_{12}t+r_{31}+r_{32}t$$

比较 t 的同次幂系数得

$$r_{32}=-r_{12}=2r_{22}=2r_{11}+2r_{31}$$
$$2r_{21}=-4r_{11}-3r_{31}$$

令 $r_{11}=1$，$r_{31}=0$，则 $r_{32}=2$，$r_{12}=-2$，$r_{22}=1$，$r_{21}=-2$，那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1-2t \\ -2+t \\ 2t \end{pmatrix}$$

令 $r_{11}=0$，$r_{31}=1$，则 $r_{32}=2$，$r_{12}=-2$，$r_{22}=1$，$r_{21}=-\dfrac{3}{2}$，那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} -2t \\ -\dfrac{3}{2}+t \\ 1+2t \end{pmatrix}$$

这三个解在$(-\infty,+\infty)$上线性无关，即得方程组的通解

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1-2t \\ -2+t \\ 2t \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -2t \\ -\dfrac{3}{2}+t \\ 1+2t \end{pmatrix}$$

将初值条件代入确定 $C_1=\dfrac{1}{4}$，$C_2=\dfrac{1}{2}$，$C_3=-\dfrac{1}{2}$，最后得到该初值问题的解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}(e^{3t}+e^{-t}) \\ \dfrac{1}{4}(e^{3t}-e^{-t}) \\ \dfrac{1}{2}(e^{3t}-e^{-t}) \end{pmatrix}.$$

一、讨论下列方程组零解的稳定性：

(1) $\frac{dx}{dt} = -2x + y + x^2e^x, \quad \frac{dy}{dt} = x - y + x^3y;$

(2) $\frac{dx}{dt} = \sin(x + y), \quad \frac{dy}{dt} = -\ln(1 + y);$

(3) $\frac{dx}{dt} = -3x + y + x^2\sin y, \quad \frac{dx}{dt} = -2x - 3y + y^2e^x.$

解 (1) 线性部分的特征方程为

$$\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0.$$

特征根都小于 0. 所以，零解渐近稳定。

(2) 在 $(0,0)$ 展开

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - \frac{1}{3!}(x+y)^3 + \frac{1}{5!}(x+y)^5 + \cdots, \\ \frac{dy}{dt} = -y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + \cdots. \end{cases} \tag{$*$}$$

方程 $(*)$ 的线性部分的特征方程是 $\lambda^2 - 1 = 0$, 有特征根 $\lambda_{1,2} = \pm 1$, 有正实部的根. 所以, 零解是不稳定的.

(3) 线性部分的特征方程为

$$(3 + \lambda)^2 + 2 = 0.$$

特征根是 $\lambda_{1,2} = -3 \pm i\sqrt{2}$, 具有负实部. 因而，零解是渐近稳定.

二、用 V 函数法研究下列方程组零解的稳定性：

(1)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^2, \\ \frac{dy}{dt} = -(2x^3 + y^5) \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = x - x^4y \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x(x^2 + y^2 - 1), \\ \frac{dy}{dt} = x + y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases}$$

解 (1) 取 $V=\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}y^2$ 定正, 则

$$\frac{dV}{dt}=2x^3\dot{x}+y\dot{y}=2x^3(y-x^3)-2y(x^3+y^5)=-2x^6-2y^6$$

定负. 所以, 零解是渐近稳定的.

(2) 取 $V=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 定正，知零解是稳定的。

(3) 取 $V=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 定正, 则

$$\frac{dV}{dt}=(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)<0,\quad \text{当 } 0<x^2+y^2<1 \text{ 时}.$$

所以, 原点渐近稳定.

(4) 取 $V(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2$, 其中取 $a=c=1$, $b=2$, 知零解是渐近稳定的.

三、将下列初值问题化为与之等价的一阶方程组的初值问题：

(1)

$$\begin{cases} y''+2y'+7xy=e^{-x}, \\ y(1)=7, y'(1)=-2 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} y^{(4)}+y=xe^{x}, \\ y(0)=1, y'(10)=-1, y''(0)=2, y^{(3)}(0)=0 \end{cases}$$

解 (1) 令 $y_1 = y, y_2 = y'$, 则初值问题变成

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -7xy_1 - 2y_2 + e^{-x}, \\ y_1(1) = 7, \\ y_2(1) = -2. \end{cases}$$

(2) 令 $y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', y_4 = y'''$, 则值问题变成

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = y_4, \\ y_4' = -y_1 + xe^x, \\ y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = -1, \\ y_3(0) = 2, \\ y_4(0) = 0. \end{cases}$$

四、试讨论下列函数组在它们的定义区间上是线性相关还是线性无关：

(1)$x, tanx$

(2)$x^2 - x + 3, 2x^2 + x$

解 (1) 函数组的定义域是 $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$. 在其定义域上考虑

$$k_1x + k_2 \tan x = 0,$$

其中 k_1, k_2 是常数. 上式两边对 x 求一次导数, 得

$$k_1 + k_2\frac{1}{\cos^2 x} = 0.$$

再对 x 求一次导数, 得

$$-2k_2\frac{\sin x}{\cos^3 x} = 0.$$

由此推出 $k_2 = 0$ 及 $k_1 = 0$. 所以, 函数组在定义域 $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ 上线性无关.

(2) 设 $\exists a, b \in \mathbb{R}$ s.t.

$a(x^2-x+3)+b(2x^2+x)=0$, 即 $(a+2b)x^2+(-a+b)x+(3a+b)=0$

则 $\begin{cases} a+2b=0 \\ -a+b=0 \\ 3a+b=0 \end{cases}$ 解得 $a=b=0$

故二者线性无关

五、试证明函数组

$$\Phi_1(x)=\begin{cases} x^3, x\ge 0 \\ 0, x<0 \end{cases};$$

$$\Phi_2(x)=\begin{cases} 0, x\ge 0 \\ x^3, x<0 \end{cases}$$

在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上线性无关，但是他们的 Wronskian 行列式为零。

证 由

$$0=k_1\phi_1(x)+k_2\phi_2(x)=\begin{cases} k_1x^3, & 当x\ge 0; \\ k_2x^3, & 当x\le 0; \end{cases}$$

得 $k_1=k_2=0$, 所以 $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ 线性无关.

但是,

$$W(x)=\begin{vmatrix} x^3 & 0 \\ 3x^2 & 0 \end{vmatrix}=0\ (x\ge 0),\quad W(x)=\begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ 0 & 3x^2 \end{vmatrix}=0\ (x\le 0),$$

即有 $W(x)\equiv 0$.

六、设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程 $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$ 的解，且 $y_1(x_0)=y_2(x_0)=0, y_1(x)\not\equiv 0$，其中 $a_1(x)$ 和 $a_2(x)$ 是连续函数，试证：存在常数 C，使得 $y_2(x)=Cy_1(x)$。

解 解的 Wronski 行列式在 x_0 处是 $W(x_0)=0$. 因而, $y_1(x)$, $y_2(x)$ 线性相关. 所以存在不全为零的常数 C_1, C_2 使得 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=0$. 由 $y_1(x)\not\equiv 0$ 推出 $C_2\ne 0$. 所以, 存在常数 C, 使得 $y_2(x)=Cy_1(x)$.

六、

解 (1) 特征方程

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

特征根 $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$. 故通解为

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x},$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

(2) 通解为

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{8}x} \cos \frac{\sqrt{15}}{8} x + C_2 e^{-\frac{1}{8}x} \sin \frac{\sqrt{15}}{8} x,$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

(3) 特征方程

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

特征根 $\lambda_{1,2} = 3$. 故通解为

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x},$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

(4) 特征方程

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + 1 = 0.$$

特征根 $\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$.

$\alpha = 2$ 时, 有重特征根 -1. 故通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x},$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

$\alpha = -2$ 时, 有重特征根 1. 故通解为

$$y = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x},$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

$|\alpha| > 2$ 时, 特征根是实根. 故通解为

$$y = C_1 e^{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} x} + C_2 e^{\frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} x},$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

$|\alpha| < 2$ 时, 特征根是复根. 故通解

$$y = C_1 e^{-\frac{\alpha}{2}x} \cos \frac{\sqrt{4 - \alpha^2}}{2} x + C_2 e^{-\frac{\alpha}{2}x} \sin \frac{\sqrt{4 - \alpha^2}}{2} x,$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

(5) 特征方程

$$\lambda^2 + \alpha = 0.$$

$\alpha = 0$ 时, 特征根是重根 $\lambda = 0$, 故通解为

$$y = C_1 + C_2 x,$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

$\alpha < 0$ 时, 特征根是实根 $\pm\sqrt{-\alpha}$, 故通解为

$$y = C_1 e^{\sqrt{-\alpha} x} + C_2 e^{-\sqrt{-\alpha} x},$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

$\alpha > 0$ 时, 特征根是复根 $\pm i\sqrt{\alpha}$, 故通解为

$$y = C_1 \cos \sqrt{\alpha}\, x + C_2 \sin \sqrt{\alpha}\, x,$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

(6) 通解是

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}\cos x + C_3 e^{2x}\sin x,$$

其中 C_1, C_2, C_3 是任意常数。

七 、

(12) $x'' + 6x' + 5x = e^{2t}$；

(13) $x'' - 2x' + 3x = e^{-t}\cos t$；

(1) $y'' + 2\alpha y' + \alpha^2 y = e^x$ (α 为实数);

(2) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$;

(3) $y'' + 4y = x^2 + 3e^x$;

(4) $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$;

(5) $2y'' + 3y' + y = 4 - e^x$;

(12) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$，它有根 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -5$.

故齐次线性方程的通解为 $x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-5t}$.

由于 $\lambda = 2$ 不是特征方程的根，故方程有形如 $\bar{x} = Ae^{2t}$ 的特解，代入原方程解得 $A = \frac{1}{21}$.

于是方程的通解为 $x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-5t} + \frac{1}{21}e^{2t}$，其中 c_1, c_2 为任意常数.

(13) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$，

即得特征根为 $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}\mathrm{i}, \lambda_2 = 1 - \sqrt{2}\mathrm{i}$

故齐次线性方程的通解为 $x = c_1 e^t \cos\sqrt{2}t + c_2 e^t \sin\sqrt{2}t$.

由于 $-1 \pm i$ 不是特征方程的根，取特解形如 $\bar{x} = (A\cos t + B\sin t)e^{-t}$，代入原方程解得 $A = \frac{5}{41}, B = -\frac{4}{41}$.

故原方程的通解为

$x = c_1 e^t \cos\sqrt{2}t + c_2 e^t \sin\sqrt{2}t + \left(\frac{5}{41}\cos t - \frac{4}{41}\sin t\right)e^{-t}$，其中 c_1, c_2 为任意常数.

解 (1) 特征方程

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \alpha^2 = 0.$$

特征根 $\lambda_{1,2} = -\alpha$. 对应齐次方程的通解为

$$y = C_1 e^{-\alpha x} + C_2 x e^{-\alpha x}.$$

$\alpha \neq -1$ 时, 原方程有形如

$$y = Ae^x$$

的特解. 代入, 得

$$A = \frac{1}{(\alpha+1)^2}.$$

于是, 原方程的通解为

$$y = C_1 e^{-\alpha x} + C_2 x e^{-\alpha x} + \frac{1}{(\alpha+1)^2} e^x,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

$\alpha = -1$ 时, 1 是二重特征根, 方程有形如

$$y = Ax^2 e^x$$

的特解. 代入, 得 $A = \frac{1}{2}$. 于是, 原方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

(2) 通解为

$$y = C_1 e^{2x} \cos 2x + C_2 e^{2x} \sin 2x + \frac{1}{4} e^{2x} + \frac{1}{10} \cos 2x + \frac{1}{20} \sin 2x,$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

(3) 特征方程

$$\lambda^2+4=0.$$

特征根是 $\lambda_{1,2}=\pm 2i$. 原方程有如下形式的特解

$$y=a+bx+cx^2+de^x.$$

代入，得

$$a=-\frac{1}{8},\quad b=0,\quad c=\frac{1}{4},\quad d=\frac{3}{5}.$$

于是，原方程的通解为

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{5}e^x,$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

(4) 通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-2x}-\frac{2}{5}\cos 2x-\frac{6}{5}\sin 2x,$$

其中 C_1, C_2 是任意常数。

(5) 特征方程为

$$2\lambda^2+3\lambda+1=0.$$

得特征根 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-\frac{1}{2}$。于是齐次方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-\frac{1}{2}x}.$$

由于 0, 1 都不是特征根，故原方程有如下形式的特解

$$y=A+Be^x.$$

代入，得 $A=4$, $B=-\frac{1}{6}$. 因而，所求方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-\frac{1}{2}x}+4-\frac{1}{6}e^x,$$

其中 C_1, C_2 是任意常数。

习题 4.2.2 求解初值问题 $4y''-y=0$, $y(0)=2, y'(0)=\beta$，并求出 β，使得当 $x\to+\infty$ 时解趋于零。

解 通解是

$$y(x)=C_1e^{\frac{1}{2}x}+C_2e^{-\frac{1}{2}x}.$$

利用初始条件得初值问题的解是

$$y(x)=(\beta+1)e^{\frac{1}{2}x}+(1-\beta)e^{-\frac{1}{2}x}.$$

再利用当 $x\to+\infty$ 时 $y(x)\to 0$, 我们得 $\beta=-1$.

一、

一、证明：假设 $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ 在任何区间 $[0,A]$ $(A>0)$ 上连续且 $f^{(n)}$ 在 $[0,A]$ 上分段连续，假设存在 K, a, M s.t. 对任意 $t \geq M$, $|f(t)| \leq Ke^{at}$, $|f'(t)| \leq Ke^{at}$, $\dots$, $|f^{(n-1)}(t)| \leq Ke^{at}$

则 $L[f^{(n)}(t)] = s^n L[f(t)] - s^{n-1} f(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$.

证明：使用数学归纳法进行证明. 设 $A>0$.

i 当 $n=1$ 时. 在 $[0,A]$ 上取点列 $t_1, \dots, t_n$ s.t. f' 在每段 $[t_i, t_{i+1}]$ 上连续.

故 $\int_0^A e^{-st} f'(t)\,dt = \int_0^{t_1} e^{-st} f'(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f'(t)\,dt + \cdots + \int_{t_n}^{A} e^{-st} f'(t)\,dt$

$\overset{分部积分}{=} e^{-st} f(t)\Big|_0^{t_1} + e^{-st} f(t)\Big|_{t_1}^{t_2} + \cdots + e^{-st} f(t)\Big|_{t_n}^{A} + s\int_0^A e^{-st} f(t)\,dt$

$= e^{-st} f(A) - f(0) + s\int_0^A e^{-st} f(t)\,dt$

令 $A \to \infty$ 时，可得 $\forall s>0$, $L[f'(t)] = sL[f(t)] - f(0)$.

ii 当 $n=k$ 时假设成立，考虑 $n=k+1$.

同 i. 在 $[0,A]$ 上取点列 $t_1, \dots, t_n$. s.t. $f^{(k+1)}$ 在每段 $[t_i, t_{i+1}]$ 上连续.

$\int_0^A e^{-st} f^{(k+1)}(t)\,dt = \int_0^{t_1} e^{-st} f^{(k+1)}(t)\,dt + \cdots + \int_{t_n}^{A} e^{-st} f^{(k+1)}(t)\,dt$

$\overset{分部积分}{=} e^{-st} f^{(k)}(t)\Big|_0^{t_1} + \cdots + e^{-st} f^{(k)}(t)\Big|_{t_n}^{A} + s\int_0^A e^{-st} f^{(k)}(t)\,dt$

令 $A \to \infty$ 时，可得 $\forall s>0$, $L[f^{(k+1)}(t)] = sL[f^{(k)}(t)] - f^{(k)}(0)$. ①

由于 $L[f^{(k)}(t)] = s^k L[f(t)] - s^{k-1} f(0) - \cdots - s f^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0)$.

代入①有：$L[f^{(k+1)}(t)] = s^{k+1} L[f(t)] - s^k f(0) - \cdots - s f^{(k-1)}(0) - f^{(k)}(0)$.

依数学归纳法可知，原假设证毕

二、

1.

例 2 求微分方程 $y''-3y'+2y=2e^{-t}$ 满足初始条件 $y(0)=2$，$y'(0)=-1$ 的特解.

解 设 $L[y(t)]=Y(s)$，对微分方程两端取 Laplace 变换得

$$\left[s^2Y(s)-sy(s)-y'(s)\right]-3\left[sY(s)-y(s)\right]+2Y(s)=\frac{2}{s+1}$$

考虑到初始条件得

$$\left(s^2-3s+2\right)Y(s)=\frac{2}{s+1}+2s-7$$

于是

$$Y(s)=\frac{2s^2-5s-5}{(s+1)\left(s^2-3s+2\right)}=\frac{\frac{1}{3}}{s+1}+\frac{4}{s-1}-\frac{\frac{7}{3}}{s-2}$$

对上述方程两端取 Laplace 逆变换,得

$$y(t)=L^{-1}\left[Y(s)\right]=\frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]+4L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]-\frac{7}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]=\frac{1}{3}e^{-t}+4e^{-t}-\frac{7}{3}e^{-2t}$$

于是得到方程的解为

$$y(t)=\frac{1}{3}e^{-t}+4e^{-t}-\frac{7}{3}e^{-2t}$$

2.

例1：求方程y"+2y'-3y=e^(-t)满足初始条件y(0)=0，y'(0)=1的解。

求解过程如下。

例1. 求方程$y''+2y'-3y=e^{-t}$满足初始条件$y(0)=0$，$y'(0)=$的解。

设$L[y(t)]=Y(s)$。对方程的两边取拉氏变换，并考虑到初始条件，则得

$$s^2Y(s)-1+2sY(s)-3Y(s)=\frac{1}{s+1}$$

整理后解出$Y(s)$，得

$$Y(s)=\frac{s+2}{(s+1)(s-1)(s+3)}$$

对上式写成部分分式的形式

$$Y(s)=\frac{s+2}{(s+1)(s-1)(s+3)}=\frac{-\frac{1}{4}}{s+1}+\frac{\frac{3}{8}}{s-1}+\frac{-\frac{1}{8}}{s+3}$$

取逆变换（可以查表），得

$$y(t)=-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{3}{8}e^{t}-\frac{1}{8}e^{-3t}=\frac{1}{8}\left(3e^{t}-2e^{-t}-e^{-3t}\right)$$

3.

例2

$$y''-y=e^{-t},\qquad y(0)=1,\quad y'(0)=0$$

解：两边进行拉氏变换

$$\begin{aligned}
&s^2Y-sy(0)-y'(0)-Y=\frac{1}{1+s}\\
\Rightarrow &s^2Y-s-Y=\frac{1}{s+1}\\
\Rightarrow &Y=\frac{s^2+s+1}{(s+1)^2(s-1)}\\
&\quad=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{C}{s-1}
\end{aligned}$$

留数法分解因式

留数法分解因式

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{s\to-1}\frac{d}{ds}(s+1)^2\frac{s^2+s+1}{(s+1)^2(s-1)} \\
&= \lim_{s\to-1}\frac{d}{ds}\frac{s^2+s+1}{s-1} \\
&= \lim_{s\to-1}\frac{(2s+1)(s-1)-(s^2+s+1)\cdot 1}{(s-1)^2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= \lim_{s\to-1}(s+1)^2\frac{s^2+s+1}{(s+1)^2(s-1)} \\
&= \lim_{s\to-1}\frac{s^2+s+1}{s-1} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C &= \lim_{s\to1}(s-1)\frac{s^2+s+1}{(s+1)^2(s-1)} \\
&= \lim_{s\to1}\frac{s^2+s+1}{(s+1)^2} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

因此

$$
Y = \frac{1}{4}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{3}{4}\frac{1}{s-1}
$$

拉氏反变换得

$$
y(t) = \frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}te^{-t}+\frac{3}{4}e^{t}
$$

4. – 6.

习题 4.2.12 用拉氏变换法求解下列初值问题:

(1) $y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1$;

(2) $y'' - 2y' + 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$;

(3) $y'' + y = \sin 2t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$.

解 (1) 在方程两侧取拉氏变换，令 $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$, 得

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] - [sY(s) - y(0)] - 6Y(s) = 0.$$

利用初值条件，得

$$Y(s) = \frac{s-2}{s^2 - s - 6} = \frac{\frac{1}{5}}{s-3} + \frac{\frac{4}{5}}{s+2}.$$

再反查拉氏变换表，得所求初值问题的解为

$$y = \frac{1}{5}e^{3x} + \frac{4}{5}e^{-2x}.$$

(2) 所求初值问题的解为

$$y = e^x(-\frac{1}{5}\cos x + \frac{7}{5}\sin x) + \frac{1}{5}e^{-x}.$$

(3) 在方程两侧取拉氏变换，令 $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$, 而对右侧查表，得

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + Y(s) = \frac{2}{s^2+4}.$$

利用初值条件，得

$$Y(s) = \frac{s^2+6}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{5}{3(s^2+1)} - \frac{2}{3(s^2+4)}.$$

再反查拉氏变换表，得所求初值问题的解为

$$y(t) = \frac{5}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin 2t.$$

三、

1.

(7) $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 3y = 0$;

(7) 特征方程

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 3 = 0,$$

即

$$(\lambda^2 - 2\lambda + 3)(\lambda - 1)^2 = 0.$$

特征根是 $\lambda_{1,2} = 1$(二重), $\lambda_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2}\,i$. 所以，通解是

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + (C_3 \cos\sqrt{2}\,x + C_4 \sin\sqrt{2}\,x)e^x,$$

其中 C_1, C_2, C_3, C_4 为任意常数.

2.

(8) $y^{(5)} + 2y''' + y' = 0.$

(8) 通解为

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 x \cos x + C_4 \sin x + C_5 x \sin x,$$

其中 $C_1, \cdots, C_5$ 是任意常数.

3. — 7.

(6) $y'' - 2y' + 2y = xe^x \cos x;$

(7) $y'' + y = \sin 3x - \cos 2x;$

(8) $y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x};$

(9) $y'' + y = \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2};$

(10) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}.$

(6) 通解为

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x + \frac{1}{4} x e^x \cos x + \frac{1}{4} x^2 e^x \sin x,$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

(7) 特征方程为

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

特征根 $\lambda_{1,2} = \pm i$. 于是对应齐次线性方程有基本解组

$$\cos x, \quad \sin x.$$

下面求原方程的一个特解，为此考虑如下两个方程

$$y'' + y = \sin 3x, \tag{1}$$

$$y'' + y = -\cos 2x. \tag{2}$$

(i). 对方程 (1), 因 $3i$ 不是特征根，它有如下形式的解

$$y = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

代入 (1), 得 $A = 0$, $B = -\frac{1}{8}$. 因而，方程 (1) 有特解

$$y = -\frac{1}{8}\sin 3x.$$

(ii). 对方程 (2), 因 $2i$ 不是特征根，它有如下形式的解

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

代入 (2)，得 $A = \frac{1}{3}$, $B = 0$. 因而，方程 (2) 有特解

$$y = \frac{1}{3}\cos 2x.$$

从而，知原方程的通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{8}\sin 3x + \frac{1}{3}\cos 2x,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

(8) 通解为

$$y = C_1\cos x + c_2\sin x + \cot x\cos x - \frac{1}{2\sin x},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

(9) 特征方程为

$$\lambda^2+1=0.$$

特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm i$. 于是, 对应齐次方程

$$y''+y=0$$

有通解

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

下面用常数变易法求解。由

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x= & 0, \\ -C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x= & \tan x, \end{cases}$$

可解得

$$C_1'(x)=-\tan x\cdot\sin x,\quad C_2'(x)=\tan x\cdot\cos x.$$

所以,

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\int\tan x\cdot\sin x\,dx=\sin x-\ln(\sec x+\tan x), \\ C_2(x) &= \int\tan x\cdot\cos x\,dx=-\cos x. \end{aligned}$$

从而, 原方程的通解为

$$\begin{aligned} y= & \ C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x[\sin x-\ln(\sec x+\tan x)]+\sin x[-\cos x] \\ = & \ C_1\cos x+C_2\sin x-\cos x\ln(\sec x+\tan x), \end{aligned}$$

其中 C_1,C_2 为任意常数。

(10) 通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+(e^{-x}+e^{-2x})\ln(e^x+1),$$

其中 C_1, C_2 为任意常数。

（5）（6）的方法二

$$y''+y=\frac{1}{\sin^3 x}$$

三.(5). 所求通解 $y(t)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2\sin x}$.

$$y'(t)=-C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{-\cos x}{2\sin^2(x)}$$

$$y''(t)=-C_1\cos x-C_2\sin x+2\cdot\frac{\sin x}{(2\sin x)^2}+8\cdot\frac{\cos^2 x}{(2\sin x)^3}$$

$$故\ y''+y=\frac{1}{2\sin x}+\frac{\sin x}{2\sin^2 x}+8\cdot\frac{\cos^2 x}{(2\sin x)^3}$$

$$=\frac{1}{\sin x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$$

$$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^3 x}=\frac{1}{\sin^3 x}.$$

三.(6). $y''+y=\tan x$. $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

利用Mathematica进行计算有通解为

$$y(t)=C_1\cos x+\cos x\left(\ln(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})-\ln(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})\right)+C_2\sin x.$$

$$y(t)=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}.$$

$$=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\cdot\ln(\cot(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}))$$

$$=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\cdot\ln(\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}))^{-1}$$

$$=C_1\cos x+C_2\sin x-\cos x\ln(\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})).①$$

所求通解为 $y(t)=\cos x(C_1+\sin x-\ln(\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})))+\sin x(C_2-\cos x)$

化简有 $y(t)=C_1\cos x+C_2\sin x-\cos x\ln(\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}))$ ②

①②式相等.

四

、

习题 4.2.4 对常系数二阶齐线性方程 $y'' + ay' + by = 0$, 问:

(1) 对于怎样的 a 和 b, 方程的所有的解当 $x \to +\infty$ 时都趋于零?

(2) 对于怎样的 a 和 b, 方程至少有一个解 $y(x) \neq 0$ 当 $x \to +\infty$ 时趋于零?

(3) 对于怎样的 a 和 b, 方程的一切解都是 x 的周期函数?

解 特征方程为

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

特征根是 $\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$. 因而，知

(1). 如 $a > 0, b > 0$ 时，方程的所有的解当 $x \to +\infty$ 时都趋于零。

(2). 如 $b < 0$ 或 $b \geq 0, a > 0$ 时，方程至少有一个解 $y(x) \neq 0$ 当 $x \to +\infty$ 时趋于零。

(3). 如 $a = 0, b > 0$ 时，方程的一切解都是 x 的周期函数。