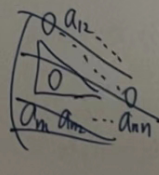


1. 当 $a_{11}=a_{13}=a_{21}=a_{22}=0$ 时, $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

则 $\begin{cases} x_1' = a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{23}x_3 \\ x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1'''}{a_{12}a_{23}} = a_{31}x_1 + \frac{a_{32}}{a_{12}}x_1' + \frac{a_{33}}{a_{12}a_{23}}x_1''.$

2. 同理 $a_{ij}=0, i=1, \dots, n-1, j \neq i+1$ 时, (1) 可转化为一元 n 阶 ODE.



The diagram shows a matrix A with a triangular structure of zeros and a diagonal of ones. The matrix is represented as $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

1. (1) -P1. x 为变量 y 为未知函数

(2) = P1 t θ

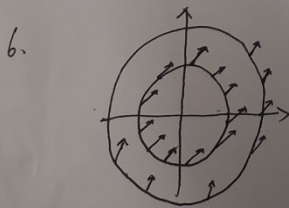
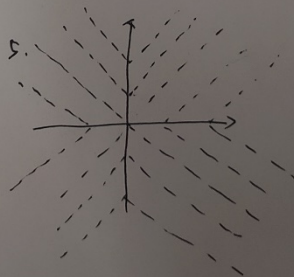
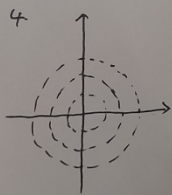
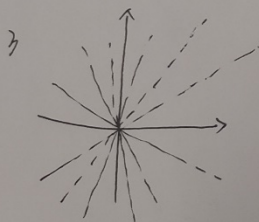
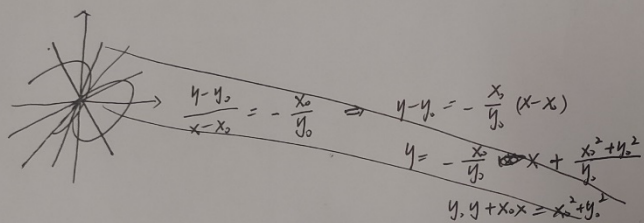
2. 因为 $x = C_1 e^t + C_2 t e^t$

故 $\frac{dx}{dt} = C_1 e^t + C_2 e^t + C_2 t e^t = (C_1 + C_2) e^t + C_2 t e^t$ 有意义

$\frac{d^2x}{dt^2} = C_1 e^t + C_2 e^t + C_2 e^t + C_2 t e^t = (C_1 + 2C_2) e^t + C_2 t e^t$ 有意义

则 $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x = (C_1 + 2C_2) e^t + C_2 t e^t - 2((C_1 + C_2) e^t + C_2 t e^t) + C_1 e^t + C_2 t e^t$
 $= 0$

故 $x = C_1 e^t + C_2 t e^t$ 是 $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x = 0$ 的通解



一. 1. $y = \frac{cx^2}{cx-1}$, 此外还有解 ~~$y=0$~~ , $y=x$

2. $\sinh \frac{y}{x} = cx$. ~~此外还有 $\sinh \frac{y}{x} = a$~~

3. $y = ce^{\frac{y}{x}}$

二. $y = x (\ln|x| + 2)^2$

三. 1. $y = 2 + ce^{-x^2}$

2. $y = (x-2)(c+x^2-4x)$

3. $y = x^2(c+x^2)$

4. $y = \cos x (c + \tan x)$

$= \sin x + c \cos x$

5. $y = \frac{1}{x} (c + \frac{x^4}{4})$

$$1. \text{ arcsin } \frac{y}{x} = \ln|x| + \frac{\pi}{6}$$

$$2. y = xe^{1-x}$$

$$1. x^2y - \frac{y^3}{3} = C$$

$$2. \frac{x^2}{2} + x - xy - \frac{y^3}{3} - 3y = C$$

$$1. \ln|x| - \frac{y^4}{4x^2} = C$$

$$2. x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln|y| = C$$

$$3. (x^2y^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^4)e^{x^2} = C$$

$$4. \frac{e^y}{x} + y^2 = C$$

$$5. x^3y + 3x^2 + y^3 = C$$

$$= x^3y - (x^2+1)\frac{y^2}{2} + C$$

$$14. \alpha(x) = -(x^2+1), \alpha(0)=1; \beta(x) = x^3, \beta(0)=0; U = x^2y - \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{y^2}{2} + C$$

五、

【140】 设函数 $f(u), g(u)$ 连续可微, 且 $f(u) \neq g(u)$, 试证方程

$$yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$$

有积分因子

$$\mu = [xy(f(xy) - g(xy))]^{-1}$$

证 用 μ 乘方程两端, 得

$$\frac{f(xy)}{x[f(xy) - g(xy)]}dx + \frac{g(xy)}{y[f(xy) - g(xy)]}dy = 0 \quad (1)$$

因为

$$M(x, y) = \frac{f(xy)}{x[f(xy) - g(xy)]},$$

$$N(x, y) = \frac{g(xy)}{y[f(xy) - g(xy)]}.$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{x} \frac{f'(xy)x[f(xy) - g(xy)] - f(xy)x[f'(xy) - g'(xy)]}{[f(xy) - g(xy)]^2}$$

$$= \frac{-f'(xy)g(xy) + f(xy)g'(xy)}{[f(xy) - g(xy)]^2}$$

所以(1)是全微分方程.

$$-, (1) \frac{1}{2}y^2 = x - \arctan x + C$$

$$(2) \arctan y = \frac{1}{2}(1+x^2) + C$$

$$(3) e^y = e^x + C$$

$$(4) -\frac{1}{2}e^{-y^2} + \frac{1}{3}e^{3x} = C$$

$$(5) y = Ce^{x \ln x - x}$$

$$(6) \sqrt{1-y^2} = \arcsin x + C \text{ 和 } y = \pm 1$$

$$(7) \tan 2y = x + \sin x \cos x + C \text{ 和 } y = \frac{\pi}{4} + \frac{n}{2}\pi (n \in \mathbb{N})$$

$$(8) y^2 - x^2 + 2(e^y - e^{-x}) = C$$

$$(9) x - y + \ln|xy| + C = 0$$

$$-, (1) y = \frac{1}{1 + \ln|x|}, \text{ 存在区间为 } (e^{-1} - 1, +\infty),$$

$$(2) (y + \frac{1}{2})^2 = x^2 - \frac{15}{4}, x \in (\frac{\sqrt{15}}{2}, +\infty),$$

$$(3) y = -\sqrt{2 \ln(1+x^2) + 4 - 2 \ln 2}, x \in \mathbb{R},$$

$$(4) y = \frac{1}{1 + \ln|x^2 - 1|}, x \in (-\sqrt{1-e^{-1}}, \sqrt{1-e^{-1}})$$

$$(5) y = (x \ln x - x + 1)^2.$$

$$(6) y = \begin{cases} -(x - C_2)^2, & \text{当 } x \leq C_2 \leq 0, \\ 0, & \text{当 } C_2 < x < C_1, \\ (x - C_1)^2, & \text{当 } x \geq C_1 \geq 0. \end{cases}$$

习题 2.1.4 试说明下列函数能在什么样的区域中满足 *Lipschitz* 条件:

(1) $f(x, y) = |y|$;

(2) $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$;

(3) $f(x, y) = |\ln y| + x^2$.

解 (1) 因

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = ||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|,$$

对任意 $(x, y_1), (x, y_2) \in \mathbb{R}^2$, 故 f 在整个 $\mathbb{R}^2$ 上满足 Lipschitz 条件。

(2) 因

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi) \right| |y_1 - y_2|,$$

而 $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \sin(x^2 + y^2)$, 故 f 在任意带域 $|y| \leq M$ 上满足 Lipschitz 条件.

(3) 因

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq |\ln y_1 - \ln y_2| = \frac{1}{|\xi|} |y_1 - y_2|,$$

故 f 在区域 $y \geq \sigma > 0$ 上满足 Lipschitz 条件.

【46】 对变量分离方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (1)$$

设在矩形域 $R: a < x < b, c < y < d$ 上函数 $f(x), g(y)$ 均连续, 且 $g(y) \neq 0$. 求证对任意点 $(x_0, y_0) \in R$, 方程(1)满足初始条件

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

存在惟一解.

证 先设初值问题(1),(2)存在解 $y = \varphi(x)$, 于是有恒等式

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x)g(\varphi(x))$$

因 $g(y) \neq 0$, 将上式改写为

$$\frac{d\varphi(x)}{g(\varphi(x))} = f(x)dx$$

两边从 x_0 到 x 积分, 得到

$$\int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{d\varphi(\xi)}{g(\varphi(\xi))} = \int_{x_0}^x f(\xi)d\xi$$

今以 $G(y), F(x)$ 分别表示 $\frac{1}{g(y)}$ 及 $f(x)$ 的一个原函数, 得

$$G(\varphi(x)) - G(y_0) = F(x) - F(x_0) \quad (3)$$

因 $G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$, $G(y)$ 是一单调函数, 故由(3)可单值解出

$$\varphi(x) = G^{-1}[F(x) - F(x_0) + G(y_0)] \quad (4)$$

这里 G^{-1} 表示 G 的反函数.

若初值问题(1),(2)的解存在, 则按上述论证必可把解表为(4)的形式, 从而证明了解的惟一性.

另一方面, 将上述步骤逆推, 不难验证(4)是初值问题(1),(2)的解. 这就证明了解的存在性.

【48】 人工繁殖细菌,其增长速度和当时的细菌数成正比.

1) 如果过 4 小时细菌数即为原来的 2 倍,那么经过 12 小时应有多少?

2) 如在 3 小时的时候有细菌 10^4 个,在 5 小时时有 4×10^4 个,那么在开始时有多少个?

解 设时刻 t 的单位体积的细菌数为 $x(t)$, 增长速度为 $\frac{dx}{dt}$, 则由题意得 $x(t)$ 满足题意的方程为

$$\frac{dx}{dt} = kx \quad (k \text{ 为一正的常数})$$

所以 $x(t)$ 满足的方程为

$$x = Ce^{kt} \quad (C \text{ 为常数})$$

再设初始时刻即 $t=0$ 时, 细菌数为 x_0 , 则

$$x = x_0 e^{kt}$$

1) 由题意知: $x_0 e^{4k} = 2x_0$

所以, $e^{4k} = 2$, 经过 12 小时后, $x = x_0 e^{12k} = 8x_0$, 即经过 12 小时, 细菌数为原来的 8 倍.

2) 由题意知,

$$\begin{cases} 10^4 = x_0 e^{3k} \\ 4 \times 10^4 = x_0 e^{5k} \end{cases}$$

解得 $x_0 = 1.25 \times 10^3$ (个/单位体积).

设 f 在 $[0, +\infty)$ 上可微, $f(0)=0$, 且有正常数 $c > 0$, 使成立
 $|f'(x)| \leq c|f(x)| \quad \forall x \in [0, +\infty)$ 证明: $f \equiv 0$

证明: 设 $g(x) = \int_0^x |f'(t)| dt$ $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x f'(t) dt$

$$|f(x)| = \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \int_0^x |f'(t)| dt = g(x) \quad g'(x) = |f'(x)|$$

$$\text{即 } g'(x) \leq cg(x) \quad g'(x) - cg(x) \leq 0$$

$$\text{设 } H(x) = e^{-cx} g(x) \quad \text{则 } H(0) = 0 \quad H'(x) \leq 0$$

所以存在 $x \in (0, \delta)$ 使得 $H(x) \leq H(0) = 0$

$$\text{又 } e^{-cx} > 0 \quad \int_0^x |f'(t)| dt \geq 0 \quad \text{所以 } H(x) \geq 0 \quad \text{故 } H(x) = 0 \quad f \equiv 0$$

Banach个不动点定理可以做如下推广1.

定理2.(Banach不动点定理I). 设 (X, d) 是非空完备度量空间, $T : X \rightarrow X$. 若存在正整数 $n \geq 1$ 使得 T^n 为压缩映射, 则 T 存在唯一不动点.

证明: 根据Banach不动点定理, T^n 有唯一不动点, 设为 x , 即 $T^n x = x$. 由于

$$T^{n+1}x = TT^n(x) = Tx,$$

于是 Tx 是 T^n 的不动点, 进而根据 x 的唯一性有 $Tx = x$, 即 x 是 T 的不动点. 由于 T 的不动点必然也是 T^n 的不动点, 因此是唯一的.

Banach个不动点定理可以做如下推广1.

定理2.(Banach不动点定理I). 设 (X, d) 是非空完备度量空间, $T : X \rightarrow X$. 若存在正整数 $n \geq 1$ 使得 T^n 为压缩映射, 则 T 存在唯一不动点.

证明: 根据Banach不动点定理, T^n 有唯一不动点, 设为 x , 即 $T^n x = x$. 由于

$$T^{n+1}x = TT^n(x) = Tx,$$

于是 Tx 是 T^n 的不动点, 进而根据 x 的唯一性有 $Tx = x$, 即 x 是 T 的不动点. 由于 T 的不动点必然也是 T^n 的不动点, 因此是唯一的.

【219】 试判断方程 $\frac{dy}{dx} = x \tan y$ 在区域

1) $R_1: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi;$

2) $R_2: -1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}$

上是否满足解的存在惟一性定理的条件.

解 1) 不满足. 因为在区域 R_1 上, 方程右端函数 $f(x, y) = x \tan y$ 当 $y = \frac{\pi}{2}$ 时不连续.

2) 满足. 因为在区域 R_2 上, 函数 $f(x, y) = x \tan y$ 连续且 $|f'_y(x, y)| = \left| \frac{x}{\cos^2 y} \right| \leq 2$ 有界.

【220】 判断下列方程在什么区域上保证初值解存在且惟一.

1) $y' = x + \sin y$;

2) $y' = x^{-\frac{1}{3}}$;

3) $y' = \sqrt{|y|}$;

4) $y' = \frac{x+y}{x-y}$

解 1) 因为 $f(x, y) = x + \sin y$ 及 $f'_y(x, y) = \cos y$ 在整个 xy 平面上连续, 所以在整个 xy 平面上满足存在惟一性定理条件. 进而在整个 xy 平面上保证初值解存在且惟一.

2) 因为方程右端函数 $f(x, y) = x^{-\frac{1}{3}}$ 在除去 y 轴外的整个 xy 平面上连续且 $f'_y(x, y) = 0$, 所以在除去 y 轴外的整个 xy 平面上初值解存在且惟一.

3) 因为方程右端函数 $f(x, y) = \sqrt{|y|} = \begin{cases} \sqrt{y}, & y \geq 0 \\ \sqrt{-y}, & y < 0 \end{cases}$

在整个 xy 平面上连续, 而 $f'_y(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}, & y > 0, \\ \frac{-1}{2\sqrt{-y}}, & y < 0 \end{cases}$ 在除

去 x 轴外的整个 xy 平面上连续, 所以在除去 x 轴外的整个 xy 平面上初值解存在且惟一.

4) 该方程在除去直线 $x = y$ 的整个 xy 平面上初值解存在且惟一.

【221】 讨论方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$ 在怎样的区域中满足解的存在惟一性定理的条件, 并求通过点 $(0,0)$ 的一切解.

解 右端函数对 y 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}y^{-\frac{2}{3}}$, 显然它在任何一个不包含 x 轴 ($y=0$) 上的点的有界闭区域中是有界的, 因此在这种区域中解是存在惟一的. 即, 只有通过 $y=0$ 上的点可能出现多个解的情况 (方程右端的连续性保证在任何有界区域中, 解是存在的).

原方程分离变量得

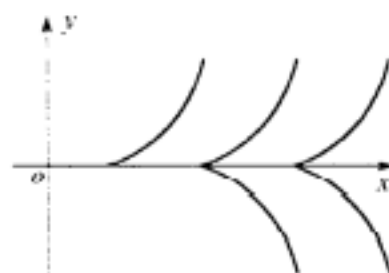
$$y^{-\frac{1}{3}}dy = \frac{3}{2}dx$$

上式两端取积分得

$$\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}C$$

$$y = \pm (x - C)^{\frac{3}{2}}$$

其中 $x - C \geq 0$. 此外有特解 $y=0$. 因此过点 $(0,0)$ 有无穷多个解 (如图所示)



(第 221 题图)

$$y=0$$

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq C \\ (x - C)^{\frac{3}{2}}, & x > C \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq C \\ -(x - C)^{\frac{3}{2}}, & x > C. \end{cases}$$

【222】 在条形区域: $a \leq x \leq b, |y| < +\infty$ 内, 对任意的 $x_0 \in [a, b], y_0 \in R$, 假设方程 $y' = f(x, y)$ 满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的解存在且惟一, 若对其中任意两个解 $y_1(x), y_2(x), y_1(x_0) < y_2(x_0)$, 则必有

$$y_1(x) < y_2(x)$$

(其中 x 在 $y_1(x), y_2(x)$ 共同的存在区间内)

证 令

$$\varphi(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

由于 $y_1(x_0) < y_2(x_0)$, 故有 $\varphi(x_0) = y_1(x_0) - y_2(x_0) < 0$.

用反证法 若在 $y_1(x), y_2(x)$ 共同的存在区间内 $y_1(x) < y_2(x)$ 不成立, 由于 $\varphi(x)$ 的连续性, 必存在点 $\bar{x} \in [a, b]$, 使得 $\varphi(\bar{x}) = 0$. 从而 $y_1(\bar{x}) - y_2(\bar{x}) = 0$, 即 $y_1(\bar{x}) = y_2(\bar{x})$. 这与假设矛盾, 故必有 $y_1(x) < y_2(x)$.

【237】 设 $f(x, y)$ 在整个 xoy 平面上连续可微, $f(x, y_0) \equiv 0$ 求证: 若方程 $y' = f(x, y)$ 的非常数解 $y = \varphi(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = y_0$, 则 x_0 非有限.

证 用反证法. 假设 x_0 有限, 取 $x_1 < x_0$, 令 $\varphi(x_1) = y_1$, 则 $y = \varphi(x)$ 是下述初值问题的解

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_1) = y_1$$

且有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = y_0$, 由于 $\varphi(x)$ 的连续性, 得 $\varphi(x_0) = y_0$, 因为 $f(x, y_0) \equiv 0$, 所以 $y \equiv y_0$ 是原方程的常数解.

由于 $f(x, y)$ 在全平面上连续可微, 故在 (x_0, y_0) 附近, 方程 $y' = f(x, y)$ 的解存在且惟一, 即存在 $h > 0, h$ 适当小, 使在 $|x - x_0| \leq h$ 上解存在惟一. 但现在过 (x_0, y_0) 有两条积分曲线: $y = y_0$ 及 $y = \varphi(x), x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$. 由解的惟一性知, $\varphi(x) \equiv y_0, x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, 这与 $y = \varphi(x)$ 是非常数解矛盾. 因此 x_0 非有限.

【238】 试证明：对任意的 x_0 及满足条件 $0 < y_0 < 1$ 的 y_0 ，方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y(y-1)}{1+x^2+y^2}$ 的满足条件 $y(x_0) = y_0$ 的解 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在。

证 因为 $f(x, y) = \frac{y(y-1)}{1+x^2+y^2}$ 及

$$f'_y(x, y) = \frac{(2y-1)(1+x^2+y^2) - 2y^2(y-1)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

在整个 xy 平面上连续，从而 $f(x, y)$ 在 xy 平面上满足局部李普希兹条件，所以方程在整个 xy 平面上满足存在惟一性定理及延展定理的条件。

显然， $y=0$ ， $y=1$ 均是该方程在 $(-\infty, +\infty)$ 上的解，对区域 $R: |x| < +\infty, 0 < y < 1$ 内任一点 (x_0, y_0) ，方程满足 $y(x_0) = y_0$ 的解存在惟一，由延展定理知，它可以向左、右延展，但不能与 $y=0$ ， $y=1$ 两直线相交，因而解的存在区间为 $(-\infty, +\infty)$ 。

【239】 指出方程 $\frac{dy}{dx} = (1-y^2)e^{xy^2}$ 的每一个解的最大存在区间, 以及当 x 趋于这区间的两端点时解的性状.

解 因 $f(x, y) = (1-y^2)e^{xy^2}$ 在整个 xy 平面上连续可微, 所以对任意初始点 (x_0, y_0) , 方程满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的解存在惟一, 且 $y = \pm 1$ 显然是方程的解.

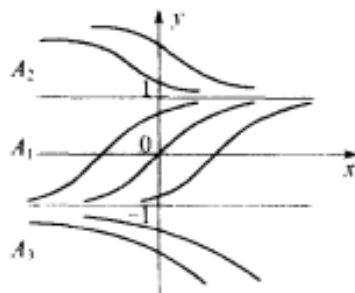
现以 $y = 1, y = -1$ 为界将整个 xy 平面分为三个区域来讨论.

(1) 在区域 $A_1: -1 < y < 1, -\infty < x < +\infty$ 中, 由于 $f(x, y) > 0$, 则对任意初始点 $(x_0, y_0) \in A_1$, 方程满足初始条件的解 $y = \varphi(x)$ 递增, 其存在区间为 $(-\infty, +\infty)$. 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 以 $y = -1$ 为渐近线; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 以 $y = 1$ 为渐近线.

(2) 在区域 $A_2: y > 1, -\infty < x < +\infty$ 中, 由于 $f(x, y) < 0$, 对任意初始点 $(x_0, y_0) \in A_2$, 方程满足初始条件

$y(x_0) = y_0$ 的解 $y = \varphi(x)$ 递减, 其存在区间为 $(-\infty, +\infty)$, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $\varphi'(x) \rightarrow 0$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 以 $y = -1$ 为渐近线.

(3) 在区域 $A_3: y < -1, -\infty < x < +\infty$ 中, 由于 $f(x, y) < 0$, 在该区域的任意解 $y = \varphi(x)$ 递减, 其存在区间为 $-\infty < x < +\infty$. 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 以 $y = -1$ 为渐近线; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\varphi'(x) \rightarrow -\infty$. 其积分曲线分布如图.



(第 239 题图)

【240】 讨论方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{2}$ 满足初始条件 $y(0) = 0$ 的饱和解, 以及满足 $y(\ln 2) = -3$ 的饱和解的存在区间.

解 显然 $y = \pm 1$ 均为方程的解, 当 $y \neq \pm 1$ 时, 将方程分离变量并积分, 得它的通解为

$$y = \frac{1 + Ce^x}{1 - Ce^x}$$

将初始值 $y(0) = 0$ 代入通解得 $C = -1$. 从而得方程满足

$y(0) = 0$ 的解为 $y = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$. 它的存在区间为 $(-\infty, +\infty)$, 而且

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -1$$

方程满足 $y(\ln 2) = -3$ 的解为 $y = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$, 它的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. 由于 $x = \ln 2 \in (0, +\infty)$, 故方程满足条件 $y(\ln 2) = -3$ 的解的存在区间为 $(0, +\infty)$. 由解的表达式知

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + e^x}{1 - e^x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^x}{1 - e^x} = -1.$$

【244】 设 $f(x, y)$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ 在全平面上是连续的, 并且 $|f(x, y)| \leq A + B|y|$, 其中 A, B 是常数且 $A > 0, B > 0$, 试证微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

的任一解 $y = \varphi(x)$ 在整个实轴 $(-\infty, +\infty)$ 上存在.

证 对 (1) 的任一解 $y = \varphi(x)$, 设 $y_0 = \varphi(x_0)$. 因为 $f(x, y)$ 及 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ 在任一含 (x_0, y_0) 的有界闭域 D 上连续, 所以方程 (1) 的初值问题在 D 域上满足解的存在惟一性定理的

条件,从而知方程(1)满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的解 $\varphi(x)$ 存在惟一,且方程(1)也满足延展定理的条件.将 $y = \varphi(x)$ 延展后的饱和解仍记为 $y = \varphi(x)$.

下证 $\varphi(x)$ 延展后的饱和解的最大存在区间为 $(-\infty, +\infty)$. 用反证法. 设饱和解 $y = \varphi(x)$ 的最大存在区间是 (α, β) , 而 $\alpha > -\infty$ (或 $\beta < +\infty$). 有

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds$$

则由假设得, 当 $x \in (\alpha, \beta)$ 时

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &\leq |y_0| + \int_{x_0}^x |f(s, \varphi(s))| ds \\ &\leq |\varphi(x_0)| + A|x - x_0| + B \int_{x_0}^x |\varphi(s)| ds \end{aligned}$$

记 $\tilde{A} = |\varphi(x_0)| + Ad$, 其中 $d = \max(|\alpha - x_0|, |\beta - x_0|)$, 则

$$|\varphi(x)| \leq \tilde{A} + B \int_{x_0}^x |\varphi(s)| ds \quad (2)$$

令

$$u(x) = \int_{x_0}^x |\varphi(s)| ds$$

显然 $u(x_0) = 0$. 当 $x \geq x_0$ 时, $u(x) \geq 0$.

先考虑 $x \geq x_0$ 的情形, 此时 $u(x) \geq 0$, 且

$$\begin{aligned} u'(x) &= |\varphi(x)| \leq \tilde{A} + Bu(x) \\ [u'(x) - Bu(x)]e^{-Bx} &\leq \tilde{A}e^{-Bx} \end{aligned}$$

于是

$$\frac{d}{dx}[e^{-Bx}u(x)] \leq \tilde{A}e^{-Bx}$$

上式两边积分得

$$e^{-Bx}u(x) \leq \frac{\tilde{A}}{B}(e^{-Bx_0} - e^{-Bx})$$

即有

$$u(x) \leq \frac{\tilde{A}}{B}(e^{B(x-x_0)} - 1) \leq \frac{\tilde{A}}{B}e^{B(x-x_0)}$$

由(2)式得

$$|\varphi(x)| \leq \tilde{A}(1 + e^{B(x-x_0)}) \leq \tilde{A}(1 + e^{B\beta}) < +\infty$$

则当 $x \rightarrow \beta - 0$ 时, $|\varphi(x)| \rightarrow \infty$ 与推论 1 矛盾, 因而 $\beta = +\infty$.

再考虑 $x \leq x_0$ 的情形, 此时 $u(x) \leq 0$, 可得

$$u'(x) = |\varphi(x)| \geq -\tilde{A} - Bu(x)$$

$$[u'(x) + Bu(x)]e^{Bx} \geq -\tilde{A}e^{Bx}$$

上式两边由 x 到 x_0 积分, 即有

$$u(x) \leq \frac{\tilde{A}}{B}[1 - e^{B(x_0-x)}]$$

由(2)得

$$\varphi(x) \leq \tilde{A} + \tilde{A}[1 - e^{B(x_0-x)}]$$

当 $x \rightarrow \alpha + 0$ 时, $|\varphi(x)| \rightarrow \infty$ 与推论 1 矛盾, 因而 $\alpha = -\infty$.

一、利用第一章的方法和欧几里得范数 $\|\cdot\|$ 证明：当 a_{ij}, f 均为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数时，

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t); \\ x(0) = x_0; \end{cases}$$

存在唯一解 $x(t), t \in \mathbb{R}$ 。

证明： $\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t) \triangleq \phi(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t) \Leftrightarrow x(t) - x(0) = \int_0^t A(s)x(s)ds + \int_0^t f(s)ds$$

由于 $\|\phi(t, x_1) - \phi(t, x_2)\| = \|A(t)(x_1 - x_2)\| \leq \|A(t)\| \|x_1 - x_2\| \leq L \|x_1 - x_2\|$

其中 $\|A(t)\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(t)|^2}$ 满足 Lip 条件

构造我们证明该方程在 $I = [-h, h]$ 上有且只有一个解

区域 $R = \{(t, x) | |t| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}$, $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, $M > \max_{(t,x) \in R} \|\phi(t, x)\|$

构造皮卡序列 $\begin{cases} x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t \phi(s, x_n(s)) ds \\ x_0(t) = x_0 \end{cases} \quad (*)$

当 $n=0$ 时, $x_1(t) = x_0 + \int_0^t \phi(s, x_0(s)) ds$

则 $\|x_1(t) - x_0\| \leq \left\| \int_0^t \|\phi(s, x_0(s))\| ds \right\| \leq M \|t\|$

从而 $\|x_1(t) - x_0\| \leq Mh \leq b$

则 $\phi(t, x_1(t))$ 在 I 上连续

$$x_2(t) = x_0 + \int_0^t \phi(s, x_1(s)) ds$$

则 $\|x_2(t) - x_0\| \leq \left\| \int_0^t \|\phi(s, x_1(s))\| ds \right\| \leq M \|t\|$

从而 $\|x_2(t) - x_0\| \leq Mh \leq b$

则 $\phi(t, x_2(t))$ 在 I 上连续

如此类推 用归纳法即可力证

由(*)给出的皮卡序列 $x = x_n(t)$ 在 I 上连续

且满足不等式 $\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leq M \|t - t_0\| \quad (n=0, 1, 2, \dots)$

下面证明 $x = x_n(t)$ 在 I 上一致收敛到方程组的解：

$x_n(t)$ 的收敛性等价于 $\sum_{n=1}^{\infty} [x_{n+1}(t) - x_n(t)]$ 的收敛性。

我们归纳证明 $\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leq \frac{M}{L} \frac{(L|t|)^{n+1}}{(n+1)!}$ 在 I 上成立 64^h

当 $n=0$ 时, 由显然成立

假设当 $n=k$ 时 由成立.

$$\text{由 (4) 推出 } \|x_{k+2}(t) - x_{k+1}(t)\| = \left\| \int_0^t [\phi(t, x_{k+1}(t)) - \phi(t, x_k(t))] dt \right\|$$

利用 Lipschitz 条件与归纳假设.

$$\begin{aligned} \|x_{k+2}(t) - x_{k+1}(t)\| &\leq \left\| \int_0^t L \|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| dt \right\| \\ &\leq M \left\| \int_0^t \frac{(L|t|)^{k+1}}{(k+1)!} dt \right\| = \frac{M}{L} \frac{(L|t|)^{k+2}}{(k+2)!} \end{aligned}$$

由此可见当 $n=k+1$ 时 由成立.

归纳成立, 由得证.

由于由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [x_{n+1}(t) - x_n(t)]$ 在 I 上一致收敛

则 $x = x_n(t)$ 是一致收敛的, 又 $x_n(t)$ 连续

则极限函数 $\psi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$ 在 I 上连续.

利用 $\phi(t, x)$ 的连续性及 $x = x_n(t)$ 的一致收敛性

在 (1) 中令 $n \rightarrow \infty$ 则 $\psi(t) = x_0 + \int_0^t \phi(t, \psi(s)) ds, \quad t \in I.$

因此 $\psi(t)$ 是方程组的一个解, 存在性得证.

下面证明唯一性:

设 $x(t), x^*(t)$ 均为方程组的解, $t \in [0, a]$

$$\begin{aligned} \|x(t) - x^*(t)\| &= \left\| \int_0^t A(s) [x(s) - x^*(s)] ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|A(s)\| \|x(s) - x^*(s)\| ds \leq \int_0^t \|A(s)\| \|x(s) - x^*(s)\| ds \\ &\leq \max_{0 \leq s \leq t} \|A(s)\| \int_0^t \|x(s) - x^*(s)\| ds \end{aligned}$$

$$\text{令 } Z(t) = \|x(t) - x^*(t)\|, \quad L = \max_{0 \leq s \leq t} \|A(s)\|.$$

$$\text{则 } Z'(t) \leq LZ(t). \quad (\text{上节已证})$$

$$\Rightarrow (e^{-Lt} Z(t))' \leq 0.$$

又 $e^{-Lt}Z(t)|_{t=0}=0$, 令 $K(t)=e^{-Lt}Z(t)$

则 $K'(t) \leq 0$, 故 $t \geq 0$ 时, $K(t) \leq K(0)=0$

但 $K(t) \geq 0$ 从而 $K(t)=0$

这说明 $\|X(t)-X^*(t)\|=0$

故 $X(t)=X^*(t)$

当 $t \leq 0$ 时, 加个负号即可, 依旧可证 $X(t)=X^*(t)$

即 $X(t)=X^*(t)$, 唯一性得证

综上, $\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t) + f(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$ 的解具有存在唯一性

证毕.

二、对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 定义 $\Phi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为 $\Phi_t(v) = \varphi(t)$, $v \in \mathbb{R}^n$, 其中 φ 为初值问题

$$\dot{x} = Ax; x(0) = v$$

的唯一解, 请验证 $\Phi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为线性同构。

首先证明 Φ_t 为双射.

由于 φ 为 $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = v \end{cases}$ 的解, 故 $\forall \varphi$, 都 $\exists v = \varphi(0) \in \mathbb{R}^n$, s.t. $\Phi_t(v) = \varphi(t)$, 即 Φ_t 为满射.

对 $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$, $\Phi_t(u) = \varphi_1(t)$, $\Phi_t(v) = \varphi_2(t)$. 若 $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$

由于 φ_1 为 $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = u \end{cases}$ 的解, φ_2 为 $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = v \end{cases}$ 的解, 故 $\varphi_1 - \varphi_2$ 为 $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = u - v \end{cases}$ 的解.

故 $\Phi_t(u) - \Phi_t(v) = (\varphi_1 - \varphi_2)(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t) = 0$

即 $u = v$

故 Φ_t 为单射.

故 Φ_t 为双射.

下面证明 Φ_t 的线性性质.

设 φ 为 $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = u \end{cases}$ 的唯一解.

ψ 为 $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = v \end{cases}$ 的唯一解.

则 $\varphi + \psi$ 为 $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = u + v \end{cases}$ 的解.

故 $\Phi_t(u+v) = (\varphi + \psi)(t) = \varphi(t) + \psi(t) = \Phi_t(u) + \Phi_t(v)$ ①

此外, 对 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\varphi$ 为 $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = \alpha u \end{cases}$ 的解. 故 $\Phi_t(\alpha u) = \alpha\varphi(t) = \alpha\Phi_t(u)$ ②

由 ① ② 知 Φ_t 为线性的.

所以 Φ_t 为线性同构.

三、验证微分方程组

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 x & \frac{1}{2} \sin(2x) - 1 \\ \frac{1}{2} \sin(2x) + 1 & \sin^2 x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

的通解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^x \cos x \\ e^x \sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

证明: 事实上, 不难验证

$$\begin{pmatrix} e^x \cos x \\ e^x \sin x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

是齐次线性微分方程组 (6.12) 在区间 $-\infty < x < \infty$ 上的两个解;

而且它们的朗斯基行列式 $W(x)$ 在 $x = 0$ 处的值为

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

所以 (6.14) 是一个基本解组, 从而 (6.13) 是通解.

五、试求微分方程组

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

的一个基解矩阵, 并求出它的通解。上式中自变量 x 的取值区间为 $x > 0$ 或 $x < 0$ 。

其实, (6.23) 的分量形式为

证明: 题中方程组 $\frac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{x}y_2$.

从后一式容易求出 y_2 的通解为 $y_2 = kx$, 其中 k 为任意常数. 可分别取 $y_2 = 0$ 和 $y_2 = x$, 代入前一式得到两个相应的特解 $y_1 = e^x$ 和 $y_1 = -(x+1)$. 这样就求得 (6.23) 的一个解矩阵为

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^x & -(x+1) \\ 0 & x \end{pmatrix}.$$

四、 求出齐次线性微分方程组 $\frac{dy}{dt} = A(t)y$ 的通解, 其中 $A(t)$ 分别为:

$$(1) A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; (2) A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; (3) A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 (1) 方程组的分量形式为:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1 + y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = y_2$$

从后一式容易求出 y_2 的通解为 $y_2 = ke^t$, 其中 K 为任意常数, 可分别取 $y_2 = 0$ 和 $y_2 = e^t$, 代入前一式得到两个相应的特解, $y_1 = e^t$ 和 $y_1 = te^t$ 这样就求得方程组的一个解矩阵为

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \quad \text{又} \quad \det[\Phi(t)] = e^{2t} \neq 0. \quad \text{因此, } \Phi(t) \text{ 是方程组的一个基解矩阵,}$$

根据定理 6.1, 方程的通解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$(2) \text{ 方程的分量形式为 } \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 & ① \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_1 & ② \end{cases}$$

由①、②可和 $\frac{d^2 y_1}{dt^2} + y_1 = 0$

由观察法知, $y_1 = \cos t, y_1 = \sin t$ 为此方程的两个特解, 将其代入②式可得两个相应的特解, 将其代入②式可得两个相应的特解: $y_2 = -\sin t, y_2 = \cos t$. 这样就求得方程组的一个

解矩阵为 $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ 又 $\det[\Phi(t)] = 1 \neq 0$, 因此 $\Phi(t)$ 中方程组的一个基解矩阵。故方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$(3) \text{ 程组的分量形式为: } \begin{cases} y_1' = y_3 & \text{①} \\ y_2' = y_2 & \text{②} \\ y_3' = y_1 & \text{③} \end{cases}$$

$$\text{解 ①+③得 } \frac{d}{dt}(y_1 + y_3) = y_1 + y_3$$

$$\text{解 ①-③得 } \frac{d}{dt}(y_1 - y_3) = y_1 - y_3$$

$$\text{解之得 } y_1 + y_3 = k_1 e^{-t} \quad y_1 - y_3 = k_2 e^{-t}$$

$$\text{由④、⑤可得 } \begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}(k_1 e^t + k_2 e^{-t}) = c_1 e^t + c_3 e^{-t} \\ y_3 = \frac{1}{2}(k_1 e^t - k_2 e^{-t}) = c_1 e^t - c_3 e^{-t} \end{cases}$$

$$\text{又由②得 } y_2 = c_2 e^t$$

由此可求得方程组的一个解矩阵

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & e^{-t} \\ 0 & e^t & 0 \\ e^t & 0 & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

显然, $\det[\Phi(t)] = -ze^t \neq 0$, 因此 $\Phi(t)$ 是方程组的一个基解矩阵, 故方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$$

六、 设含 n 个未知函数的齐次线性方程组

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad \text{与} \quad \frac{dx}{dt} = B(t)x$$

有相同的基本解组, 求证 $A(t) \equiv B(t)$;

证 设这两个方程组的相同的基本解组为

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$$

它们构成一个基解矩阵

$$\Phi(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

那么, 必有

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A(t)\Phi(t) \quad \frac{d\Phi(t)}{dt} = B(t)\Phi(t)$$

由于 $\Phi(t)$ 是基解矩阵, $\det \Phi(t) \neq 0$, 所以 $\Phi(t)$ 的逆矩阵

$\Phi^{-1}(t)$ 一定存在, 因而

$$A(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} \Phi^{-1}(t) = B(t)$$

证毕。

七、向量函数组

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

在任意区间 $a < x < b$ 上线性无关。

证明：对任意的 $a < b$, 假设向量函数组

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

在区间 $a < x < b$ 上线性相关, 则存在不全为零的三个常数 c_1, c_2, c_3 使得

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

即

$$c_1 + c_2 x + c_3 x^2 = 0, a < x < b$$

由于 $c_1 + c_2 x + c_3 x^2$ 为不高于二次的多项式, 所以它至多有两个零点, 这与它在 $a < x < b$ 上恒等于零矛盾, 所以

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

在任意区间 $a < x < b$ 上线性无关

八、设 $\Phi(t)$ 是方程组 $\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t)$ 的一个基解矩阵, 其中 $A(t + \omega) = A(t)$. 试证明 $\Phi(t + \omega)$ 也是一个基解矩阵, 且存在矩阵 B 满足 $\det B \neq 0$, 使得 $\Phi(t + \omega) = \Phi(t)B$ 。

证 由于 $\Phi(t)$ 是基本矩阵, 即有

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A(t)\Phi(t)$$

因此

$$\frac{d\Phi(t + \omega)}{dt} = \frac{d\Phi(t + \omega)}{d(t + \omega)} = A(t + \omega)\Phi(t + \omega) = A(t)\Phi(t + \omega)$$

即 $\Phi(t+\omega)$ 也是基解矩阵.

设 $\Phi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$

$$\Phi(t+\omega) = (x_1(t+\omega), \dots, x_n(t+\omega)) \quad (2)$$

因为每个 $x_i(t+\omega)$ ($i=1, \dots, n$) 都是方程组(1)的解, 则由定理 4 知, 存在常数 C_{ji} ($j=1, \dots, n$), 使得

$$\begin{aligned} x_i(t+\omega) &= C_{1i}x_1(t) + \dots + C_{ni}x_n(t) \\ &= (C_{1i}, \dots, C_{ni})\Phi(t) \end{aligned} \quad (3)$$

将(3)代入(2)式得

$$\Phi(t+\omega) = \Phi(t) \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

取

$$B = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

由于 $\Phi(t+\omega)$ 也是方程组的基解矩阵, 因而 $\det B \neq 0$. 证毕.

一. 证: 由于 $\Phi(t)$ 为 $x' = A(t)x$ 的基本解阵.

$$\text{故 } \Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$$

$$\text{故 } \frac{d(\Phi(t)C)}{dt} = \frac{d\Phi(t)}{dt} C = A(t)\Phi(t)C = A(t)(\Phi(t)C)$$

故 $\Phi(t)C$ 为 $x' = A(t)x$ 的解.

下面说明 $\{\Phi(t)C \mid C \in \mathbb{R}^n\}$ 为方程组的全部解空间

$$\text{记 } \Phi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad \text{其中 } x_i(t)$$

由于 $\Phi(t)$ 为 $x' = A(t)x$ 的基本解阵.

故对 $x' = A(t)x$ 的任何一解 $x(t)$, 都 $\exists C_1 \dots C_n \in \mathbb{R}$, s.t. $x(t) = C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t)$

令 $\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$, 则有 $\tilde{C} \in \mathbb{R}^n$. 且 $x(t) = \Phi(t)\tilde{C}$. 即 $x(t) \in \{\Phi(t)C \mid C \in \mathbb{R}^n\}$

即 $\text{———} \checkmark$

二. 1. ①. $\forall A, B \in M_n$,

$$\begin{aligned} \|A+B\|_{\max} &= \max \{ \| (A+B)x \| \mid x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1 \} \\ &= \max \{ \| Ax + Bx \| \mid x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1 \} \\ &\leq \max \{ \| Ax \| + \| Bx \| \mid x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1 \} \\ &\leq \max \{ \| Ax \| \mid x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1 \} + \max \{ \| Bx \| \mid x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1 \} \\ &= \|A\|_{\max} + \|B\|_{\max} \end{aligned}$$

i.e. $\|A+B\|_{\max} \leq \|A\|_{\max} + \|B\|_{\max}, \quad \forall A, B \in M_n$

$$\begin{aligned} \text{②. } \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in M_n \\ \|\lambda A\|_{\max} &= \max \{ \|\lambda Ax\| \mid x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1 \} \\ &= |\lambda| \max \{ \|Ax\| \mid x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1 \} \\ &= |\lambda| \|A\|_{\max} \end{aligned}$$

i.e. $\|\lambda A\|_{\max} = |\lambda| \|A\|_{\max}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{③ } \forall A \in M_n, \|A\|_{\max} = \max \{ \|Ax\| \mid x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1 \}$$

由于 $\|Ax\| \geq 0$, 故 $\|A\|_{\max} \geq 0$.

$$\|A\|_{\max} = 0 \Leftrightarrow \max \{ \|Ax\| \mid x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1 \} = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1 \text{ 有 } \|Ax\| = 0$$

$$\Leftrightarrow A=0$$

i.e. $\|A\|_{\max} > 0, \quad \forall A \in M_n, \quad \text{且 } \|A\|_{\max} = 0 \Leftrightarrow A=0$.

2. ① $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$. 由 $\forall i, 1 \leq i \leq n$, $|x_i|^p \geq 0$. 故 $\|x\|_p \geq 0$.
 若 $\|x\|_p = 0$, 则有 $|x_i|^p = 0$. 故 $x_i = 0$. $\forall 1 \leq i \leq n$. 故 $x = 0$.

$$\begin{aligned} \text{② } \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad & \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p = \sum_{i=1}^n |x_i| (|x_i| + |y_i|)^{p-1} + |y_i| (|x_i| + |y_i|)^{p-1} \\ & \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \right]^{\frac{p-1}{p}} \\ & \quad + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \right]^{\frac{p-1}{p}} \\ & = \left[\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left[\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \right]^{\frac{p-1}{p}} \\ \text{i.e. } & \left[\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\ \text{又由 } & \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \right]^{\frac{1}{p}} \\ \text{故 } & \|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{③ } \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \\ \| \lambda x \|_p &= \left(\sum_{i=1}^n |\lambda x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n |\lambda|^p |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (|\lambda|^p \sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|x\|_p \end{aligned}$$

所以, $\|\cdot\|_p$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的一个范数. ($1 \leq p < +\infty$)

二、3. 定义 2 设 V 是有限维线性空间, $\|x\|_\alpha$ 与 $\|x\|_\beta$ 是 V 中任两种范数, 若存在正数 k_1, k_2 , 使得 $\forall x \in V$, 都有

$$k_1 \|x\|_\beta \leq \|x\|_\alpha \leq k_2 \|x\|_\beta,$$

称 $\|x\|_\alpha$ 与 $\|x\|_\beta$ 是等价的.

定理 1 有限维线性空间中的任何两种范数都是等价的.

证明 设 V 是 n 维线性空间, $e_1, \dots, e_n$ 是 V 中的一组基, 则 $\forall x \in V$ 有唯一表达式

$$x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n = (e_1, \dots, e_n) \xi, \quad \xi \text{ 为 } x \text{ 的坐标向量.}$$

可断言 V 中任一范数 $\|x\|$ 都是坐标 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 的连续函数, 令 $\varphi(\xi_1, \dots,$

$\xi_n) = \|x\|$, 则 $\forall y = \sum_{i=1}^n \eta_i e_i \in V$, 由于

$$\begin{aligned} |\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) - \varphi(\eta_1, \dots, \eta_n)| &= \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i) e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n (|\xi_i - \eta_i| \|e_i\|) \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i - \eta_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= k \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i - \eta_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

$$S = \{ \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T \mid \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 = 1 \},$$

此为 $\mathbb{R}^n$ (或 $\mathbb{C}^n$) 中的一个单位超球面 (或称为 $\mathbb{R}^n$ (或 $\mathbb{C}^n$) 中的一个 $n-1$ 维闭子流形), 且 S 上无零点.

从而 $f(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{\|\mathbf{x}\|_\alpha}{\|\mathbf{x}\|_\beta}$ 是 S 上的连续函数, 故在 S 上取到最大值及最小值, 即存在 $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in V$, $\mathbf{x}_0 = (e_1, \dots, e_n) \boldsymbol{\xi}'$, $\mathbf{y}_0 = (e_1, \dots, e_n) \boldsymbol{\eta}'$, $\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\eta}' \in S$, 使得

$$k_1 = \min_{\boldsymbol{\xi} \in S} \left\{ \frac{\|\mathbf{x}\|_\alpha}{\|\mathbf{x}\|_\beta} \right\} = \frac{\|\mathbf{x}_0\|_\alpha}{\|\mathbf{x}_0\|_\beta} > 0, \mathbf{x} = (e_1, \dots, e_n) \boldsymbol{\xi},$$

$$k_2 = \max_{\boldsymbol{\xi} \in S} \left\{ \frac{\|\mathbf{x}\|_\alpha}{\|\mathbf{x}\|_\beta} \right\} = \frac{\|\mathbf{y}_0\|_\alpha}{\|\mathbf{y}_0\|_\beta} > 0, \mathbf{x} = (e_1, \dots, e_n) \boldsymbol{\xi},$$

其中, $\boldsymbol{\xi}$ 为 $\mathbf{x}$ 的坐标向量.

$$\text{而 } \forall \boldsymbol{\theta} \neq \mathbf{x} \in V, \mathbf{x} = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n, \text{ 则 } \mathbf{x}' = \frac{\xi_1}{\left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}} e_1 + \dots +$$

$$\frac{\xi_n}{\left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}} e_n \text{ 的坐标向量 } \left(\frac{\xi_1}{\left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \dots, \frac{\xi_n}{\left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right) \in S, \text{ 从而 } k_1 \leq$$

$$\frac{\|\mathbf{x}'\|_\alpha}{\|\mathbf{x}'\|_\beta} = \frac{\|\mathbf{x}\|_\alpha}{\|\mathbf{x}\|_\beta} \leq k_2, \text{ 即}$$

$$k_1 \|\mathbf{x}\|_\beta \leq \|\mathbf{x}\|_\alpha \leq k_2 \|\mathbf{x}\|_\beta. \quad \text{https://blog.csdn.net/Jinyindao243} \square$$

其中, $k = \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 为常数. 从而当 ξ_i 与 η_i 充分接近时 ($i = 1, \dots, n$), $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 与 $\varphi(\eta_1, \dots, \eta_n)$ 的差的绝对值就充分小, 即 $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) = \|\mathbf{x}\|$ 是坐标 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 的连续函数.

现证明定理的结论, 设 $\|\mathbf{x}\|_\alpha$ 与 $\|\mathbf{x}\|_\beta$ 是 V 中任意两种范数, 即要证明存在正数 k_1, k_2 , 使得 $\forall \mathbf{x} \in V$, 有 $k_1 \|\mathbf{x}\|_\beta \leq \|\mathbf{x}\|_\alpha \leq k_2 \|\mathbf{x}\|_\beta$.

当 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}$ 时, 上式成立.

而 $\mathbf{x} \neq \boldsymbol{\theta}$ 时, $\|\mathbf{x}\|_\beta \neq 0$, 由于 $\|\mathbf{x}\|_\alpha$ 与 $\|\mathbf{x}\|_\beta$ 都是 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 的连续函数, 故 $f(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{\|\mathbf{x}\|_\alpha}{\|\mathbf{x}\|_\beta}$ 仍是 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 的连续函数, 考虑有界闭集

https://blog.csdn.net/Jinyindao243052

$$\text{三. } X = \begin{pmatrix} -e^t + \frac{1}{2}t^2 + t + 1 \\ (3-t)e^t - \frac{1}{2}t^2 - 2t - 3 \\ (-t+4)e^t - \frac{1}{2}t^2 - 3t - 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{四. 1. } \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} e^x & xe^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix}$$

五. 1. 由第3次作业三题知, 相应齐次方程有基解矩阵 $\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^x \cos x & -\sin x \\ e^x \sin x & \cos x \end{pmatrix}$

$$\text{则 } \Phi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} \cos x & e^{-x} \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \quad \Phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故初值问题的解为 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \Phi(x) \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} e^{-s} \cos s & e^{-s} \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \end{pmatrix} ds \right]$

$$= \begin{pmatrix} (e^x - 1) \cos x - \sin x \\ (e^x - 1) \sin x + \cos x \end{pmatrix}$$

证 必要性 设 $Y_0(x)$ 是(1)的惟一解. 显然 $Y(x) \equiv 0$ 满足(2). 下证(2)只有零解. 若不然, 令 Y_1, Y_2 是(2)的满足 $Y(x_0) = 0$ 的解且 $Y_1 \neq Y_2$, 那么容易验证 $Y_0 + Y_1, Y_0 + Y_2$ 是(1)的满足 $Y(x_0) = Y_0$ 的解且 $Y_0 + Y_1 \neq Y_0 + Y_2$, 这与已知矛盾. 即(2)的解惟一.

充分性 设 Y 是(2)的满足 $Y(x_0) = 0$ 的惟一解. 显然 $Y(x) \equiv 0$. 若(1)的满足 $Y(x_0) = Y_0$ 的解不惟一, 不妨令 $Y_1(x), Y_2(x)$ 是它的两个解且 $Y_1(x) \neq Y_2(x)$. 那么

$$\begin{aligned} \frac{d(Y_1 - Y_2)}{dx} &= A(x)(Y_1 - Y_2) + F(x) - F(x) \\ &= A(x)(Y_1 - Y_2) \end{aligned}$$

而且, $(Y_1 - Y_2)(x_0) = 0$. 但是 $Y_1 - Y_2 \neq 0$. 这与(2)的零解惟一性矛盾, 即(1)的解惟一.

一、
方法一

~~$\forall x \in E(A, \lambda_k)$~~ 设 λ_k 对应的代数重数为 n_k , 即
 $E(A, \lambda_k) = \ker (A - \lambda_k I)^{n_k}$ 则 $\forall x \in E(A, \lambda_k)$
 有 $(A - \lambda_k I)^{n_k} x = 0$.
 于是 $(A - \lambda_k I)^{n_k} \cdot Ax = (A - \lambda_k I)^{n_k} (A - \lambda_k I + \lambda_k I) x$
 $= (A - \lambda_k I)^{n_k+1} x + (A - \lambda_k I)^{n_k} \lambda_k I x$
 $= (A - \lambda_k I)^{n_k} (A - \lambda_k I) x + \lambda_k I (A - \lambda_k I)^{n_k} x$
 $= 0 + 0 = 0$.
 于是 $Ax \in E(A, \lambda_k)$, 从而 $E(A, \lambda_k)$ 为 A 的不变子空间

方法二

$E(A, \lambda_k) \triangleq \ker (A - \lambda_k E)^{n_k}$ 且 $E(A, \lambda_k)$ 中的元是方程 $(A - \lambda_k E)^{n_k} = 0$ 的解
 $\forall x \in E(A, \lambda_k)$ 有 $(A - \lambda_k E)^{n_k} x = 0$
 故 $(A - \lambda_k E)^{n_k} \overset{A \text{ 与 } E \text{ 可交换}}{A} x = A (A - \lambda_k E)^{n_k} x = 0 \Rightarrow E(A, \lambda_k)$ 为 A 的不变子空间.

二、(1)

$\forall c \in \mathbb{C}, \forall v \in E_c, v = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$, 其中 $\lambda_i \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}^+, v_i \in E$.
 $c \cdot v = c \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^k c \lambda_i \cdot v_i, k \in \mathbb{N}^+, c \lambda_i \in \mathbb{C}, v_i \in E$.
 $\Rightarrow c \cdot v \in E_c$. E_c 是 $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ 的一个复子空间.

(2)

$$(2) \mathbb{R}_C^n = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid z = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i, k \in \mathbb{N}^+, z_i \in \mathbb{R}^n, \lambda_i \in \mathbb{C} \}$$

于是 $\mathbb{R}_C^n \subseteq \mathbb{C}^n$.

$\forall x \in \mathbb{C}^n$, x 可以表示为 $x = (a_1 + b_1 i, \dots, a_n + b_n i)$ 其中 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{于是 } x &= (a_1 + b_1 i, \dots, a_n + b_n i) = (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) i \\ &= \vec{a} + \vec{b} i \quad (\vec{a} \triangleq (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \vec{b} \triangleq (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

$\in \mathbb{R}_C^n$.

于是 $\mathbb{C}^n \subseteq \mathbb{R}_C^n$. 从而 $\mathbb{R}_C^n = \mathbb{C}^n$.

(3)

$$\forall v, w \in E_C, \text{ 则 } v, w \text{ 可以表示为 } v = \sum_{i=1}^{k_1} \lambda_i v_i, w = \sum_{i=1}^{k_2} \mu_i w_i$$

其中 $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^+, \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{C}, v_i, w_i \in E$

于是 $v+w$ 也是以 $\mathbb{C}$ 为系数的 E 中向量的线性组合. $v+w \in E_C$

$\Rightarrow a_1 = \dots = a_n = b_1 = \dots = b_n = 0, \Rightarrow e_1, \dots, e_n$ 在 $\mathbb{C}$ 上线性无关.
并且有 $e_1, \dots, e_n \in E \subset E_C$. 故 $e_1, \dots, e_n$ 也是 E_C 的一组基.

(5)

$$(E_C)_R = E_C \cap \mathbb{R}^n$$

$$\text{由 } E_C = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid z = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i, k \in \mathbb{N}^+, \lambda_i \in \mathbb{C}, z_i \in E \}.$$

知, $E \subset E_C$. 又因为 E 为 $\mathbb{R}^n$ 子空间, 则 $E \subset \mathbb{R}^n$.

$$\text{则 } E \subset E_C \cap \mathbb{R}^n = (E_C)_R$$

$$\text{由题 (3) (4) 知 } \dim_{\mathbb{R}} (E_C)_R \stackrel{(4)}{=} \dim_{\mathbb{C}} (E_C) \stackrel{(3)}{=} \dim_{\mathbb{R}} E$$

$$\text{于是 } E = (E_C)_R.$$

三、

1.

$$[419] \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = 2y \end{cases}$$

解 系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

的特征方程是

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda) = 0$$

特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

相应于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 满足

$$(A - E) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

解之得 $a = 1, b = 0$.

相应于 $\lambda_2 = 2$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 满足

$$(A - 2E) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

解之得 $a = 0, b = 1$.

由此得方程组的通解

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

这里 C_1, C_2 为任意常数(注:以后不再对 C_1, C_2 是任意常数加以说明), 方程组的基解矩阵为

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

$$\text{【420】} \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 5y + 4z \\ \frac{dz}{dx} = 4y + 5z \end{cases}$$

解 系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

的特征方程是

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 4 \\ 4 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(9 - \lambda) = 0$$

求得特征值为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 9$.

相应于 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 满足

$$(A - E) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

解之得 $a = 1$, $b = -1$.

相应于 $\lambda_2 = 9$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 满足

$$(A - 9E) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

解之得 $a = b = 1$

由此得方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{9x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{【421】} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$$

解 系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

求得特征值为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

相应于 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 满足

$$(\mathbf{A} - \mathbf{E}) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

解之, 得 $a = -b$. 取 $a = 1$, $b = -1$.

相应于 $\lambda_2 = 5$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 满足

$$(\mathbf{A} - 5\mathbf{E}) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

解之, 得 $b = 3a$. 取 $a = 1$, $b = 3$.

由此得该方程组的通解

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{【434】} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y - z \\ \frac{dy}{dt} = y - x + z \\ \frac{dz}{dt} = x - z \end{cases}$$

解 系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)(2-\lambda) = 0$$

解之得特征值 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=2$.

相应于 $\lambda_1=0$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

即 $a=c$, $b=0$. 不妨将其取为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=-1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

即 $a=0$, $c=-2b$. 不妨将其取为

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_3=2$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

即 $a = 3c$, $b = -2c$. 不妨将其取为

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

于是, 原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.

$$[436] \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -4x + 4y + 2z \\ \frac{dz}{dt} = 2x - y - z \end{cases}$$

解 系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

的特征方程

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda \\ &= -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \end{aligned}$$

解之得特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

相应于 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

解之得 $b=0, c=2a$. 不妨取 $a=1, c=2$. 那么对应的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_2=1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

解之得 $a=b=2c$. 不妨取 $a=b=2, c=1$. 那么, 对应的解为

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_3=2$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

解之得 $c=0, b=2a$. 不妨取 $a=1, b=2$. 那么, 对应的解为

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

易知它们在 $(-\infty, +\infty)$ 上线性无关. 于是, 该方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6.

【例 3】求微分方程组

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 5 & -28 & -18 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -16 & -10 \end{pmatrix} y$$

的通解.

容易算出

$$\det(A - \lambda E) = 3\lambda(1 - \lambda^2).$$

因此, 矩阵 A 有特征根 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ 和 $\lambda_3 = -1$. 通过简单的计算可知, 与它们相应的特征向量可以取为

$$r_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此, 所求的通解为

$$y = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^x + C_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x},$$

其中 C_1, C_2 和 C_3 为任意常数.

四、

1.

$$[431] \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = 3y \end{cases}$$

解 系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 = 0$$

解之得特征值为 $\lambda_{1,2} = 3$ (二重).

运用待定系数法, 方程组有如下形式的解

$$x = (r_{11} + r_{12}t)e^{3t}$$

$$y = (r_{21} + r_{22}t)e^{3t}$$

代入原方程组得

$$\begin{cases} 3e^{3t}(r_{11} + r_{12}t) + e^{3t} \cdot r_{12} = 3e^{3t}(r_{11} + r_{12}t) + (r_{21} + r_{22}t)e^{3t} \\ 3e^{3t}(r_{21} + r_{22}t) + e^{3t} \cdot r_{22} = 3e^{3t}(r_{21} + r_{22}t) \end{cases}$$

消去 e^{3t} 后比较 t 的同次幂系数, 可得

$$r_{12} = r_{21}, r_{22} = 0, r_{11} \text{ 可以取任意值}$$

取 $r_{11} = 1, r_{12} = r_{21} = 0$, 则对应于 $\lambda = 3$ 的一个特解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

取 $r_{11} = 0, r_{12} = r_{21} = 1$, 则可得另一个特解

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

易知, 这两个解在 $(-\infty, +\infty)$ 上是线性无关的. 所以, 方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$[432] \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

解 系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 = 0$$

解之得特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

相应于 $\lambda_{1,2} = 2$, 方程组有如下形式的解

$$x = (r_{11} + r_{12}t)e^{2t} \quad y = (r_{21} + r_{22}t)e^{2t}$$

将其代入方程组可得

$$2e^{2t}(r_{11} + r_{12}t) + e^{2t}r_{12} = e^{2t}(r_{11} + r_{12}t) - e^{2t}(r_{21} + r_{22}t)$$

$$2e^{2t}(r_{21} + r_{22}t) + e^{2t}r_{22} = e^{2t}(r_{11} + r_{12}t) + 3e^{2t}(r_{21} + r_{22}t)$$

消去 e^{2t} 后比较 t 的同次幂系数得

$$r_{11} + r_{12} + r_{21} = 0,$$

$$r_{12} + r_{22} = 0,$$

$$r_{11} + r_{21} - r_{22} = 0$$

于是, $-r_{12} = r_{22} = r_{11} + r_{21}$

取 $r_{11} = 1, r_{21} = 0$, 则 $r_{22} = 1, r_{12} = -1$. 那么相应于 $\lambda_{1,2} = 2$ 的一个特解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t)e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix}$$

取 $r_{11} = 0, r_{21} = 1$, 则 $r_{22} = 1, r_{12} = -1$. 那么可得另一个特解

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -te^{2t} \\ (1+t)e^{2t} \end{pmatrix}$$

易知, 这两个解在 $(-\infty, +\infty)$ 上线性无关. 所以, 方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -t \\ 1+t \end{pmatrix}.$$

$$[433] \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 5x + y = 0 \\ \frac{dy}{dt} + 3y - x = 0 \end{cases}$$

解 整理可得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dy} = -5x - y \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y \end{cases}$$

系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 8\lambda + 16 = (\lambda + 4)^2 = 0$$

解之得特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -4$.

对应于 $\lambda_{1,2} = -4$, 方程组有如下形式的解

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-4t} \begin{pmatrix} r_{11} + r_{12}t \\ r_{21} + r_{22}t \end{pmatrix}$$

将其代入原方程组可得

$$\begin{aligned} -4e^{-4t}(r_{11} + r_{12}t) + e^{-4t}r_{12} &= -5e^{-4t}(r_{11} + r_{12}t) - e^{-4t}(r_{21} + r_{22}t) \\ -4e^{-4t}(r_{21} + r_{22}t) + e^{-4t}r_{22} &= e^{-4t}(r_{11} + r_{12}t) - 3e^{-4t}(r_{21} + r_{22}t) \end{aligned}$$

消去 e^{-4t} 后比较 t 的同次幂系数可得

$$\begin{aligned} r_{12} &= -r_{11} + r_{21}, & r_{12} + r_{22} &= 0 \\ r_{11} &= -r_{21} + r_{22}, & r_{12} + r_{22} &= 0 \end{aligned}$$

解之得

$$r_{11} = -r_{21} + r_{22}, \quad r_{12} = -r_{22}$$

取 $r_{21} = -1, r_{22} = 0$, 则 $r_{11} = 1, r_{12} = 0$. 那么相应于 $\lambda_{1,2} = -4$ 的一个特解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

取 $r_{21} = 0, r_{22} = 1$, 则 $r_{11} = 1, r_{12} = -1$. 那么另一个特解为

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^{-4t} \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}$$

易知, 它们在 $(-\infty, +\infty)$ 上线性无关. 所以, 方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}.$$

4.

$$\text{【443】} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y - z \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y - 2z \\ \frac{dz}{dt} = 2z - x + y \end{cases}$$

解 系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0$$

解得特征值为 $\lambda_1 = 1$ (三重). 那么方程组有形如

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} r_{11} + r_{12}t + r_{13}t^2 \\ r_{21} + r_{22}t + r_{23}t^2 \\ r_{31} + r_{32}t + r_{33}t^2 \end{pmatrix}$$

的解, 将其代入方程组得

$$\begin{aligned} e^t(r_{11} + r_{12}t + r_{13}t^2) + e^t(r_{12} + 2r_{13}t) &= 2e^t(r_{11} + r_{12}t + r_{13}t^2) \\ &\quad - e^t(r_{21} + r_{22}t + r_{23}t^2) - e^t(r_{31} + r_{32}t + r_{33}t^2), \\ e^t(r_{21} + r_{22}t + r_{23}t^2) + e^t(r_{22} + 2r_{23}t) &= 2e^{2t}(r_{11} + r_{12}t + r_{13}t^2) \\ &\quad - e^t(r_{21} + r_{22}t + r_{23}t^2) - 2e^t(r_{31} + r_{32}t + r_{33}t^2), \\ e^t(r_{31} + r_{32}t + r_{33}t^2) + e^t(r_{32} + 2r_{33}t) &= 2e^t(r_{31} + r_{32}t + r_{33}t^2) \\ &\quad - e^t(r_{11} + r_{12}t + r_{13}t^2) + e^t(r_{21} + r_{22}t + r_{23}t^2) \end{aligned}$$

消去 e^t 并整理可得

$$\begin{aligned} r_{11} - r_{21} - r_{31} - r_{12} + (r_{12} - r_{22} - r_{32} - 2r_{13})t \\ + (r_{13} - r_{23} - r_{33})t^2 &= 0, \\ 2r_{11} - 2r_{21} - 2r_{31} - r_{22} + (2r_{12} - 2r_{22} - 2r_{32} - 2r_{23})t \\ + 2(r_{13} - r_{23} - r_{33})t^2 &= 0 \\ r_{31} - r_{11} + r_{21} - r_{32} + (r_{32} - r_{12} + r_{22} - 2r_{33})t \\ + (r_{33} - r_{13} + r_{23})t^2 &= 0 \end{aligned}$$

比较 t 的同次幂系数后得

$$\begin{aligned} r_{11} - r_{21} - r_{31} - r_{12} &= 0, & r_{12} - 2r_{13} - r_{22} - r_{32} &= 0, & r_{13} - r_{23} - r_{33} &= 0 \\ 2r_{11} - 2r_{21} - 2r_{31} - r_{22} &= 0, & r_{12} - r_{23} - r_{22} - r_{32} &= 0, & r_{13} - r_{23} - r_{33} &= 0 \\ r_{31} - r_{21} - r_{31} + r_{32} &= 0, & r_{12} + 2r_{33} - r_{22} - r_{32} &= 0, & r_{13} - r_{23} - r_{33} &= 0 \end{aligned}$$

解之得

$$r_{12} = r_{11} - r_{21} - r_{31}, \quad r_{22} = 2(r_{11} - r_{21} - r_{31})$$

$$r_{32} = -(r_{11} - r_{21} - r_{31}), \quad r_{13} = r_{23} = r_{33} = 0$$

取 $r_{11} = 1, r_{21} = r_{31} = 0$, 则 $r_{12} = 1, r_{22} = 2, r_{32} = -1$. 那么相应的一个解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1+t \\ 2t \\ -t \end{pmatrix}$$

取 $r_{21} = -1, r_{11} = r_{31} = 0$, 则 $r_{12} = 1, r_{22} = 2, r_{32} = -1$. 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} t \\ -1+2t \\ -t \end{pmatrix}$$

取 $r_{31} = -1, r_{11} = r_{21} = 0$, 则 $r_{12} = 1, r_{22} = 2, r_{32} = -1$. 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ -1-t \end{pmatrix}$$

易知这三个解在 $(-\infty, +\infty)$ 上线性无关. 于是, 该方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1+t \\ 2t \\ -t \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} t \\ -1+2t \\ -t \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ -1-t \end{pmatrix}.$$

$$[444] \begin{cases} \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} + x - 2z = 0 \\ \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} + x = 0 \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} + x + 2y = 0 \end{cases}$$

解 整理可得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y \\ \frac{dy}{dt} = -y - z \\ \frac{dz}{dt} = -z \end{cases}$$

系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)^3 = 0$$

求得特征值为 $\lambda_1 = -1$ (三重).

相应于 $\lambda_1 = -1$, 方程组有形如

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} r_{11} + r_{12}t + r_{13}t^2 \\ r_{21} + r_{22}t + r_{23}t^2 \\ r_{31} + r_{32}t + r_{33}t^2 \end{pmatrix}$$

的特解, 将其代入方程组得

$$\begin{aligned}
& -e^{-t}(r_{11} + r_{12}t + r_{13}t^2) + e^{-t}(r_{12} + 2r_{13}t) \\
& = -e^{-t}(r_{11} + r_{12}t + r_{13}t^2) - e^{-t}(r_{21} + r_{22}t + r_{23}t^2), \\
& \quad -e^{-t}(r_{21} + r_{22}t + r_{23}t^2) + e^{-t}(r_{22} + 2r_{23}t) \\
& = -e^{-t}(r_{21} + r_{22}t + r_{23}t^2) - e^{-t}(r_{31} + r_{32}t + r_{33}t^2), \\
& \quad -e^{-t}(r_{31} + r_{32}t + r_{33}t^2) + e^{-t}(r_{32} + 2r_{33}t) \\
& = -e^{-t}(r_{31} + r_{32}t + r_{33}t^2)
\end{aligned}$$

消去 e^{-t} 后整理可得

$$\begin{aligned}
r_{12} + 2r_{13}t &= -(r_{21} + r_{22}t + r_{23}t^2) \\
r_{22} + 2r_{23}t &= -(r_{31} + r_{32}t + r_{33}t^2) \\
r_{32} + 2r_{33}t &= 0
\end{aligned}$$

令 t 的同次幂系数相等, 可得

$r_{23} = r_{32} = r_{33} = 0$, $r_{12} = -r_{21}$, $2r_{13} = -r_{22}$, $r_{32} = -r_{22}$, r_{11} 可以任取.

取 $r_{11} = 1$, $r_{12} = -r_{21} = 0$, $r_{31} = 2r_{13} = -r_{22} = 0$. 那么相应的一个特解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

取 $r_{11} = 0$, $r_{12} = -r_{21} = 1$, $r_{22} = 0$, 则 $r_{31} = 2r_{13} = 0$. 那么相应的一个特解为

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} t \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

取 $r_{11} = 0$, $r_{12} = -r_{21} = 0$, $r_{22} = -2$, 则 $r_{31} = 2r_{13} = 2$. 那么相应的特解为

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} t^2 \\ -2t \\ 2 \end{pmatrix}$$

易证, 它们在 $(-\infty, +\infty)$ 上线性无关. 于是, 方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} t \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} t^2 \\ -2t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

五、
1.

$$\text{【440】} \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 - 4x_3 \end{cases}$$

解 系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda+4)(\lambda+1)^2 = 0 \end{aligned}$$

解之得特征值为 $\lambda_1 = -4$, $\lambda_{2,3} = -1$.

相应于 $\lambda_1 = -4$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

解之得 $a=b=0$. c 可取任意值. 因此, 不妨将特征向量取为

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

相应于 $\lambda_{2,3} = -1$, 可以计算出

$$(\mathbf{A} + \mathbf{E})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

因此, 方程 $(\mathbf{A} + \mathbf{E})^2 \mathbf{r} = 0$ 有两个线性无关解为

$$\mathbf{r}_{10} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{20} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{11} &= (\mathbf{A} + \lambda \mathbf{E}) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{r}_{21} &= (\mathbf{A} + \lambda \mathbf{E}) \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

这样, 方程组的基解矩阵为

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 3e^{-t} & 9te^{-t} \\ 0 & 0 & 9e^{-t} \\ e^{-4t} & e^{-t} & (-1+3t)e^{-t} \end{pmatrix}$$

所求的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 e^{-4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 9t \\ 9 \\ -1+3t \end{pmatrix}.$$

$$\text{【441】} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y + z \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z \\ \frac{dz}{dt} = x + y - z \end{cases}$$

解 系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 = 0$$

求得特征值为 $\lambda_1 = 1$ (单根) $\lambda_2 = -2$ (二重根).

相应于 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

可取 $a = b = c = 1$. 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -2$ 时, 方程组有形如

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} r_{11} + r_{12}t \\ r_{21} + r_{22}t \\ r_{31} + r_{32}t \end{pmatrix}$$

的解, 将其代入方程组得

$$\begin{aligned} & -2e^{-2t}(r_{11} + r_{12}t) + e^{-2t}r_{12} \\ &= -e^{-2t}(r_{11} + r_{12}t) + e^{-2t}(r_{21} + r_{22}t) + e^{-2t}(r_{31} + r_{32}t) \\ & -2e^{-2t}(r_{21} + r_{22}t) + e^{-2t}r_{22} \\ &= e^{-2t}(r_{11} + r_{12}t) - e^{-2t}(r_{21} + r_{22}t) + e^{-2t}(r_{31} + r_{32}t) \\ & -2e^{-2t}(r_{31} + r_{32}t) + e^{-2t}r_{32} \\ &= e^{-2t}(r_{11} + r_{12}t) + e^{-2t}(r_{21} + r_{22}t) - e^{-2t}(r_{31} + r_{32}t) \end{aligned}$$

消去 e^{-2t} 得

$$\begin{aligned} r_{12} - r_{11} - r_{12}t &= r_{21} + r_{22}t + r_{31} + r_{32}t \\ r_{22} - r_{21} - r_{22}t &= r_{11} + r_{12}t + r_{31} + r_{32}t \\ r_{32} - r_{31} - r_{32}t &= r_{11} + r_{12}t + r_{21} + r_{22}t \end{aligned}$$

令 t 的同次幂系数相等得

$$\begin{aligned} r_{12} &= r_{22} = r_{32} = r_{11} + r_{21} + r_{31} \\ r_{12} + r_{22} + r_{32} &= 0 \end{aligned}$$

解之得 $r_{12} = r_{22} = r_{32} = 0$, $r_{11} = -r_{21} - r_{31}$.

不妨取 $r_{21} = -1$, $r_{31} = 0$, 则 $r_{11} = 1$. 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

取 $r_{21}=0$, $r_{31}=-1$, 则 $r_{11}=1$. 那么相应的解为

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

这三个解在 $(-\infty, +\infty)$ 上线性无关. 于是, 该方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3.

【例 5】 求解方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

易知相应的特征多项式为

$$\det[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}] = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 0 \\ 4 & -8 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda-1)^2.$$

所以 $\mathbf{A}$ 有单重特征根 $\lambda_1 = -2$ 和二重特征根 $\lambda_2 = 1$.

对于 $\lambda_1 = -2$, 可以算出

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(上面的符号 $\rightarrow$ 表示对矩阵施行初等行变换的过程). 因此与 λ_1 相应的特征向量可取为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

对于二重特征根 $\lambda_2 = 1$, 可以算出

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 28 & 44 & 9 \end{pmatrix},$$

因此, 方程 $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})^2 \mathbf{r} = \mathbf{0}$ 有两个线性无关的解为

$$\mathbf{r}_{10} = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{20} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

把它们分别代入 (6.41), 并注意 $n_i = 2$, 就可得到

$$\mathbf{r}_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -30 \\ 100 \end{pmatrix}$$

和

$$\mathbf{r}_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

把以上结果代入 (6.42) 式, 可得到一个基解矩阵

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 & (11 + 15x)e^x & 3e^x \\ 0 & (-7 - 30x)e^x & -6e^x \\ e^{-2x} & 100xe^x & 20e^x \end{pmatrix}.$$

因此, 所求的通解为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x) \boldsymbol{c},$$

其中 $\boldsymbol{c}$ 为任意常数列向量. 这个通解也可以改写成下面更清晰的形式

$$\boldsymbol{y} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2x} + C_2 \begin{pmatrix} 11 + 15x \\ -7 - 30x \\ 100x \end{pmatrix} e^x + C_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 20 \end{pmatrix} e^x,$$

其中 C_1, C_2 和 C_3 是任意常数.

■ 例 6 求解方程组

4.

【例 7】求解方程组

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}. \quad (6.45)$$

容易看出, 上面的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有单重特征根 -1 和二重特征根 2 , 因此可用例 5 的方法求解. 但是, 我们可以充分利用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特点, 采用较简捷的方法. 例如, 注意到 (6.45) 的第三个 (分量) 方程是

$$\frac{dy_3}{dx} = 2y_3,$$

因而很容易求得

$$y_3 = C_1 e^{2x},$$

把它代入到第二个方程, 得到

$$\frac{dy_2}{dx} = -y_2 + C_1 e^{2x},$$

这是关于 y_2 的一阶线性方程, 可求出它的解

$$y_2 = C_2 e^{-x} + \frac{1}{3} C_1 e^{2x}.$$

最后, 再把 y_2 的表达式代入第一个方程, 得到

$$\frac{dy_1}{dx} = 2y_1 + 2C_2 e^{-x} + \frac{2}{3} C_1 e^{2x},$$

同样可求得它的解

$$y_1 = C_3 e^{2x} - \frac{2}{3} C_2 e^{-x} + \frac{2}{3} C_1 x e^{2x}.$$

这样, 方程组 (6.45) 的通解为

$$\boldsymbol{y} = C_1 \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-x} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x},$$

其中 C_1, C_2 和 C_3 是任意常数.

证明: (i) 由于 $\lambda, u = a+ib$ 为 $x' = Ax$ 的特征值.

令 $x(t) = e^{\lambda t}$ 为 $x' = Ax$ 的一个解. 由于 $\lambda > 0$.

故 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{\lambda t}\| = +\infty$. 即 $t \rightarrow \infty, \|x(t)\| \rightarrow +\infty$

(2) 若 $a > 0$. 即 $u = a+ib$ 为 $x' = Ax$ 特征值.

令 $x_1(t) = e^{at} \cos bt, x_2(t) = e^{at} \sin bt$.

则若 $t \rightarrow +\infty, \|x(t)\| \rightarrow 0$. 由于 $x_1(t) = e^{at} \cos bt, x_2(t) = e^{at} \sin bt$.

$t \rightarrow +\infty$ 时, $\cos bt$ 为 0, $\sin bt$ 为 0. 故 $e^{at} \rightarrow 0$.

故 $a < 0$. 矛盾. 因此. $t \rightarrow \infty, \|x(t)\| \rightarrow +\infty$

(iii) $a = 0$.

$t^k \cos bt, t^l \sin bt, t^m e^{\lambda t}$ 的线性组合.

$k, l, m \neq 0$ 时.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |t^k \cos bt| = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |t^l \sin bt| = +\infty$$

只需考察 $\lim_{t \rightarrow \infty} t^m e^{\lambda t}$

$\lambda > 0$ 时. 每个解 $x(t)$ 均有 $\|x(t)\| \rightarrow +\infty, t \rightarrow +\infty$. 也存在 $\|x(t)\| \rightarrow h_1, t \rightarrow \infty, h_1 \in \mathbb{R}$ 是常数

$\lambda = 0$ 时. 存在 $\|x(t)\| \rightarrow +\infty, t \rightarrow +\infty$. 也存在 $\|x(t)\| \rightarrow h_2, t \rightarrow \infty, h_2 \in \mathbb{R}$ 是常数

$\lambda < 0$ 时. 存在 $\|x(t)\| \rightarrow +\infty, t \rightarrow +\infty$. 也存在 $\|x(t)\| \rightarrow h_3, t \rightarrow \infty, h_3 \in \mathbb{R}$ 是常数.

二、略

三、

1.

$$[426] \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

解 系数矩阵