

第五章 一般理论

在多数情况下,显然利用已知函数(例如求积分得到的函数)去积分这些方程根本不可能.因此,如果局限于那些可以通过有限或无限积分处理的情况,那么可研究的领域将非常有限,而且应用中出现的大量问题也将无法解决.

——亨利·庞加莱(Henri Poincaré 1854—1912)

第三章线性微分方程理论的基石是解的存在唯一性定理.对于一般的非线性问题,我们自然也希望有这样的结果.尤其是第二章最后,我们指出将更注重对微分方程的解的属性的研究.因此,首先一个自然的问题就是定解问题,特别地,一个初值问题的解是否存在?如果存在是否唯一?这是一个重要而基本的问题.由于能够用有限初等的形式求解的初值问题只是极少数,因而微分方程的近似解法有着重要的意义.而解的存在唯一性是微分方程的近似解法的前提,因为如果解根本不存在,去求其近似值是没有意义的,如果解存在但不唯一,我们也无法确定要逼近的是哪一个解,问题本身也就不明确.我们在第二章学习奇解的时候已经碰到了大量的解存在但不唯一的例子.这些例子表明只有在一定的条件下,初值问题的解才是唯一的.本章将介绍的 Picard 存在唯一性定理指出,在较一般的情况下初值问题的解存在而且唯一.这就圆满地回答了这一基本问题.另一方面,在本章将介绍的 Peano 存在定理指出,在更宽的条件下尽管我们无法保证初值问题的解唯一,但我们能够保证解是存在的.延拓定理更进一步指出了初值问题的解的存在范围.这三个重要定理是我们研究微分方程的解的重要基础.

在实际应用中,一个初值问题的初始值往往是由实验测定的;同时,微分方程本身也带有许多控制参数,它们确定了一个系统在各种不同条件下的运行规律.它们也往往是由实验测定的,从而带有误差.因此一个重要的问题就是当初始值或控制参数发生微小改变后,解的性态如何随之改变?在本章关于解对初值和参数的连续依赖性及可微性的讨论中我们展开了对这个问题的研究.在这些进一步的研究中我们需要微分不等式和比较定理等重要工具.我们将看到,对解的存在性和唯一性的研究不仅检验了数学模型的合理性,而且提供了近似求解的方法.

§ 5.1 Picard 存在唯一性定理

我们主要研究一阶规范形式的微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \cdots, x_n) \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \quad (5.1)$$

其中 f_i 是 $t, x_1, \cdots, x_n$ 的已知函数. 这并不失一般性, 因为在第一章我们已指出任何高阶规范形式的微分方程或微分方程组均可化为形如 (5.1) 的一阶规范形式的微分方程组. 令

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \cdots, x_n) \end{pmatrix},$$

则微分方程组 (5.1) 可写成如下形式:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad (5.2)$$

当 $n=1$ 时, 这就是一个一阶微分方程. 本章中我们往往只对 $n=1$ 的情况叙述和证明有关定理. 对一般情况, 定理的陈述和证明完全是类似的.

在本节我们考虑微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (5.3)$$

及相应的初值问题:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (5.4)$$

其中 $f(t, x)$ 在矩形区域

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

上连续. 称 $f(t, x)$ 在 R 上关于 x 满足 **Lipschitz 条件**, 如果存在常数 L , 使得对任意的 $(t, x_1) \in R$ 及 $(t, x_2) \in R$, 不等式

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L |x_1 - x_2|$$

都成立, L 称为 **Lipschitz 常数**. 我们有如下的 Picard 存在唯一性定理:

定理 5.1 若 $f(t, x)$ 在 R 上连续且关于 x 满足 Lipschitz 条件, Lipschitz 常

数为 L , 则初值问题 (5.4) 在区间 $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ 上的解存在且唯一. 其中

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \max \{ |f(t, x)| : (t, x) \in R \}.$$

证明 我们用 Picard 逐次逼近法证明这个定理, 为了简单起见, 只就区间 $[t_0, t_0 + h]$ 来讨论, 区间 $[t_0 - h, t_0]$ 的讨论完全类似. 证明共分五步完成.

第一步 同第三章的存在唯一性定理证明一样, 初值问题 (5.4) 等价于如下的积分方程:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (5.5)$$



图 5.1 Picard 逐步逼近法是法国数学家
É. Picard (1856—1941) 构造的

第二步 构造 Picard 迭代序列 $\{\varphi_n(t)\}$, 其中 $\varphi_0(t) \equiv x_0$, 且

$$\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_{n-1}(\tau)) d\tau, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.6)$$

这里 $t \in [t_0, t_0 + h]$. 我们用数学归纳法证明对所有的 n , 函数 $\varphi_n(t)$ 在区间 $[t_0, t_0 + h]$ 上有定义、连续且满足不等式

$$|\varphi_n(t) - x_0| \leq b.$$

事实上, 当 $n=0$ 时上述结论显然成立. 假设当 $n=k$ 时这一命题成立. 那么当 $n=k+1$ 时, 由于 $|\varphi_k(\tau) - x_0| \leq b$, 故 $f(\tau, \varphi_k(\tau))$ 在区间 $[t_0, t_0 + h]$ 上有定义且连续. 从而 $\varphi_{k+1}(t)$ 按 (5.6) 定义方式在区间 $[t_0, t_0 + h]$ 上有意义且连续. 并且

$$|\varphi_{k+1}(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^t |f(\tau, \varphi_k(\tau))| d\tau \leq M(t - t_0) \leq Mh \leq b.$$

故当 $n=k+1$ 时, 命题也成立.

第三步 函数序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 在区间 $[t_0, t_0+h]$ 上一致收敛.

为证明这一点, 只需证明级数

$$\varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)), \quad t \in [t_0, t_0 + h]$$

在区间 $[t_0, t_0+h]$ 上一致收敛, 因为它的前 n 项之和为 $\varphi_n(t)$. 类似第三章的存在唯一性定理, 用数学归纳法容易证明在区间 $[t_0, t_0+h]$ 上成立不等式

$$|\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)| \leq \frac{ML^{k-1}}{k!} (t - t_0)^k.$$

由此, 当 $t \in [t_0, t_0+h]$ 时有

$$|\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)| \leq \frac{ML^{k-1}}{k!} h^k.$$

用比值判别法容易知道, 数值级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{ML^{k-1}}{k!} h^k$$

收敛, 因此所论函数项级数在区间 $[t_0, t_0+h]$ 上一致收敛. 从而函数序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 在区间 $[t_0, t_0+h]$ 上一致收敛.

设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t),$$

则 $\varphi(t)$ 在区间 $[t_0, t_0+h]$ 上有定义, 连续且满足不等式

$$|\varphi(t) - x_0| \leq b.$$

第四步 证明 $x(t) = \varphi(t)$ 是积分方程 (5.5) 的解. 由 Lipschitz 条件得

$$|f(t, \varphi_n(t)) - f(t, \varphi_{n-1}(t))| \leq L |\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)|,$$

再由连续函数序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 在区间 $[t_0, t_0+h]$ 上一致收敛于连续函数 $\varphi(t)$ 的事实, 知连续函数序列 $\{f(t, \varphi_n(t))\}$ 在区间 $[t_0, t_0+h]$ 上一致收敛于连续函数 $f(t, \varphi(t))$. 由此得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = x_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_{n-1}(\tau)) d\tau$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^t \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tau, \varphi_{n-1}(\tau)) d\tau,$$

即

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau.$$

因此 $x(t) = \varphi(t)$ 是积分方程 (5.5) 的连续解, 从而也是初值问题 (5.4) 在区间 $[t_0, t_0+h]$ 上的连续解.

第五步 最后我们采用与第三章的存在唯一性定理证明不同的方法, 证明初值问题 (5.4) 在区间 $[t_0, t_0+h]$ 上的解唯一. 设 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 均为初值问题 (5.4) 在区间 $[t_0, t_0+h]$ 上的解, 则 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在区间 $[t_0, t_0+h]$ 上分别满足积分方程

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau,$$

$$\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \psi(\tau)) d\tau.$$

两式相减并由 Lipschitz 条件得

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \psi(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau))| d\tau, \\ &\leq L \int_{t_0}^t |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| d\tau. \end{aligned} \quad (5.7)$$

令 $v(t)$ 表示不等式 (5.7) 右端的积分, 即

$$v(t) = \int_{t_0}^t |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| d\tau,$$

则 $v(t)$ 在 $[t_0, t_0+h]$ 上连续可微, $v(t) \geq 0$, 并满足不等式 $v'(t) \leq Lv(t)$ 或等价地,

$$\frac{d}{dt}(e^{-L(t-t_0)} v(t)) \leq 0.$$

故函数 $e^{-L(t-t_0)} v(t)$ 在 $[t_0, t_0+h]$ 上单调下降, 因此, $\forall t \in [t_0, t_0+h]$,

$$0 \leq e^{-L(t-t_0)} v(t) \leq v(t_0) = 0,$$

从而在 $[t_0, t_0+h]$ 上, $v(t) \equiv 0$, 即 $\varphi(t) \equiv \psi(t)$.

综合第一至第五步, 我们就完成了对 Picard 存在唯一性定理的证明. □

Picard 存在唯一性定理中的 h 有明显的几何意义, 我们以 $h = \frac{b}{M}$ 为例来说明这

一点. 参看图 5.2, 定理 5.1 表明初值问题(5.4)的解 $x = \varphi(t)$ 在区间 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上存在. 由于积分曲线 $x = \varphi(t)$ 的切线斜率介于直线 A_1B_2 的斜率 M 和直线 A_2B_1 的斜率 $-M$ 之间, 因此易知, 当 $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ 时积分曲线 $x = \varphi(t)$ 包含在由三角形 A_1PB_1 和三角形 A_2PB_2 形成的区域内, 从而也包含在矩形区域 R 内. 在定理证明过程中构造的 Picard 迭代序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 在区间 $[t_0, t_0 + h]$ 上有定义, 并且我们实际上证明了所有的 $\varphi_n(t)$ 都包含在三角形区域 A_2PB_2 内, 从而其极限, 即初值问题(5.4)的解 $x = \varphi(t)$ 也包含在三角形区域 A_2PB_2 内.

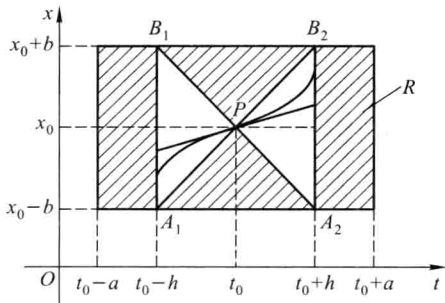


图 5.2 Picard 存在唯一性定理中 h 的几何意义

注 5.1 在实际应用中, Lipschitz 条件往往难以检验. 这时我们常常用 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 R 上存在且连续来代替. 因为若 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 R 上存在连续, 则必有界, 不妨设

$$L = \max \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| : (t, x) \in R \right\},$$

由 Lagrange 中值定理, 对任意的 $(t, x_1) \in R$ 及 $(t, x_2) \in R$, 均存在介于 x_1 及 x_2 之间的数 ξ , 使得

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = \left| \frac{\partial f(t, \xi)}{\partial x} (x_1 - x_2) \right| \leq L |x_1 - x_2|.$$

因此 $f(t, x)$ 关于 x 满足 Lipschitz 条件.

注 5.2 不难看出对一阶线性方程

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + f(t), \quad (5.8)$$

只要 $a(t)$ 和 $f(t)$ 在某区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续, Picard 存在唯一性定理的条件就能满足. 并且这时由初值条件 $x(t_0) = x_0$ 确定的解在整个区间 $[\alpha, \beta]$ 上都有定义. 这是因为方程(5.8)右端的函数对 x 没有任何限制, 证明中构造的 Picard 迭代序

在整个区间 $[\alpha, \beta]$ 上都有定义且一致收敛.

注 5.3 Picard 定理不但肯定了解的存在唯一性, 而且证明定理过程中构造的 Picard 迭代序列实际上给出了一种求初值问题(5.4)的近似解的方法, 因而有一定实用价值. 设 $x = \varphi(t)$ 是初值问题(5.4)在区间 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上的连续解, 易证第 n 次近似解 $\varphi_n(t)$ 和真正解 $\varphi(t)$ 在区间 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上有误差估计

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq \frac{ML^n}{(n+1)!} h^{n+1}. \quad (5.9)$$

我们将这一误差估计的证明留给读者作为习题. 在进行近似计算时, 可根据误差要求由这一误差估计确定 n 的值, 从而得到所需的逼近函数 $\varphi_n(t)$.

例 5.1 考虑定义在矩形区域

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t| \leq 1, |x| \leq 1\}$$

上的初值问题

$$\frac{dx}{dt} = x + 1, \quad x(0) = 0.$$

其右端函数 $f(t, x) = x + 1$ 在区域 R 上关于 x 满足 Lipschitz 条件, Lipschitz 常数 $L = 1$, 其最大值 $M = 2$, $h = \min\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, 由 Picard 存在唯一性定理, 它在区间 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上的解存在且唯一. 容易构造出它的 Picard 迭代序列如下:

$$\varphi_0(t) = 0,$$

$$\varphi_1(t) = 0 + \int_0^t (\varphi_0(\tau) + 1) d\tau = t,$$

$$\varphi_2(t) = 0 + \int_0^t (\varphi_1(\tau) + 1) d\tau = t + \frac{t^2}{2!},$$

$$\varphi_3(t) = 0 + \int_0^t (\varphi_2(\tau) + 1) d\tau = t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}.$$

可归纳地求出

$$\varphi_n(t) = t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}.$$

显然函数序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 在区间 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上一致收敛于函数 $\varphi(t) = e^t - 1$. 它与由分离变量法求出的所给初值问题的解完全一样. 由(5.9)我们得逼近函数

$\varphi_n(t)$ 的误差估计:

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq \frac{1}{2^n(n+1)!}.$$

习题 5.1

1. 设 $x = \varphi(t)$ 是初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

在区间 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上的连续解, 其中 $f(t, x)$ 在矩形区域

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

上连续, 在 R 上关于 x 满足 Lipschitz 条件, Lipschitz 常数为 L , $h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$, $M = \max_{(t, x) \in R} |f(t, x)|$. 设 $\varphi_n(t)$ 是 Picard 迭代序列中第 n 次迭代得到的函数, 证明有如下的误差估计:

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq \frac{ML^n}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

2. 令 A 为 $n \times n$ 阶方阵. 证明初值问题

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

的 Picard 迭代序列收敛于 $x(t) = \exp(At)x_0$.

3. 求方程 $\frac{dx}{dt} = x^2$ 过点 $(0, 1)$ 的第三次近似解.

4. 利用 Picard 存在唯一性定理求定义在矩形区域 $R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t| \leq 1, |x| \leq 1\}$ 上的方程

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - t$$

过点 $(0, 0)$ 的解的存在区间, 并求第三次近似解, 给出第三次近似解在解的存在区间上的误差估计.

5. 利用 Picard 存在唯一性定理求定义在矩形区域 $R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t| \leq 1, |x| \leq 1\}$ 上的方程

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + t$$

过点 $(0, 0)$ 的解的存在区间, 并求在此区间上与真正的解的误差不超过 0.05 的近似解.

6. 试求初值问题

$$\frac{dx}{dt} = x + t + 1, \quad x(0) = 0$$

的 Picard 迭代序列,并通过求迭代序列的极限求出初值问题的解.

7. 试求初值问题

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + Q(t), \quad x(t_0) = x_0$$

的 Picard 迭代序列,并通过求迭代序列的极限求出初值问题的解,这里 $P(t), Q(t)$ 均为连续函数.

8. 用逐步逼近法证明,当 $|\lambda|$ 足够小时,积分方程

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau$$

在区间 $[a, b]$ 上的解存在唯一. 这里 $f(t)$ 为区间 $[a, b]$ 上的连续函数, $K(t, \tau)$ 为矩形 $[a, b] \times [a, b]$ 上的连续函数.

§ 5.2 Peano 存在性定理

在本节我们仍然考虑初值问题(5.4),不同的是这里仅要求 $f(t, x)$ 在矩形区域

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

上连续而不一定满足 Lipschitz 条件. 我们将证明这时初值问题(5.4)的解仍然存在,只是不一定唯一. 这就是 Peano 存在性定理.

定理 5.2 (Peano 存在性定理) 若 $f(t, x)$ 在矩形区域 R 上连续,则初值问题(5.4)在区间 $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ 上至少有一个解. 其中

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \max \{ |f(t, x)| : (t, x) \in R \}.$$

这个定理不仅结果本身重要,而且其证明的思想和方法也十分重要. 这就是我们要介绍的 Euler 折线法和 Ascoli-Arzelà 引理. Euler 折线法描绘了积分曲线的几何思想,成为近似计算的开端.

证明 第一步 构造 Euler 折线.

我们仅仅在矩形区域 R 上寻找解,因此从等价积分方程(5.5)可以得到

$$|x(t) - x_0| \leq M |t - t_0|. \quad (5.10)$$

因此,为了保证解函数图像不越出矩形 R ,必须 $M |t - t_0| \leq b$. 故要求 $h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$.

任取正整数 n 和点列 $\{t_k\}$, 其中 t_0 就是初值条件所给,



图 5.3 G. Peano (1858—1932)

$$t_k = t_0 + \frac{kh}{n}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n,$$

从而将区间 $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ 分成 $2n$ 等份.

如图 5.4 所示, 从初始点 $P_0: (t_0, x_0)$ 出发按方向

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x_0)$$

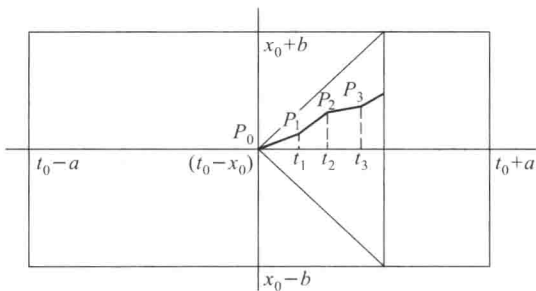


图 5.4 Euler 折线的构造

延长直线段到第一个分点 $t = t_1$ 处, 这个直线段可以表述为

$$x = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0), \quad t \in [t_0, t_1].$$

从新的端点 $P_1: (t_1, x_1)$ 开始, 其中 $x_1 = x_0 + f(t_0, x_0)(t_1 - t_0)$, 再按新的方向

$$\frac{dx}{dt} = f(t_1, x_1)$$

作直线段

$$x = x_1 + f(t_1, x_1)(t - t_1), \quad t \in [t_1, t_2],$$

…如此下去,我们将得到端点 $P_2:(t_2, x_2), \dots, P_n:(t_n, x_n)$, 其中 $t_n = t_0 + h$, 而

$$x_n = x_{n-1} + f(t_{n-1}, x_{n-1})(t_n - t_{n-1}).$$

同理向左也可以作出类似折线. 这样我们得到折线表达式

$$\varphi_n(t) := \begin{cases} x_0 + \sum_{k=0}^{s-1} f(t_k, x_k)(t_{k+1} - t_k) \\ \quad + f(t_s, x_s)(t - t_s), & t \in [t_s, t_{s+1}), \\ x_0 + \sum_{k=-s+1}^0 f(t_k, x_k)(t_{k-1} - t_k) \\ \quad + f(t_{-s}, x_{-s})(t - t_{-s}), & t \in (t_{-s-1}, t_{-s}], \end{cases} \quad (5.11)$$

其中 $s=0, 1, \dots, n-1$. 注意到当 $s=0$ 时, 上面 $\varphi_n(t)$ 在区间 $[t_s, t_{s+1})$ 上的表达式中的求和为由 $k=0$ 到 $k=-1$, 这时求和结果应理解为 0. 当 $t \in (t_{-1}, t_0]$ 时情况类似.

第二步 证明序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 的收敛性. 这里我们需要 Ascoli-Arzelà 引理.

函数列 $\{f_k(t)\}$ 称为在有界闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上一致有界的, 如果存在常数 $M_0 > 0$, 使得对任意正整数 k 都有 $|f_k(t)| \leq M_0, \forall t \in [\alpha, \beta]$. 函数列 $\{f_k(t)\}$ 称为在有界闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上等度连续的, 如果对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在仅与 ε 有关的常数 $\delta(\varepsilon) > 0$, 使得对任意正整数 k , 只要当 $t, s \in [\alpha, \beta]$ 且 $|t-s| < \delta(\varepsilon)$ 时, 就有 $|f_k(t) - f_k(s)| < \varepsilon$. 由定义可知, 一致有界的函数族中每一个函数都是有界函数; 等度连续的函数族中每一个函数都是一致连续的. 但反之却不一定对.

引理 5.1 (Ascoli-Arzelà 引理) 定义在有界闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上的一致有界且等度连续的无穷函数族 $\mathcal{F} = \{f(t)\}$ 必存在一个在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛的子序列.

该引理证明见本节最后的附录.

对任意 n , 折线段 $\varphi_n(t)$ 显然停留在矩形区域 R 内, 因此序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 是一致有界的. 进而, 折线段 $\varphi_n(t)$ 夹在过点 (t_0, x_0) , 斜率分别为 M 及 $-M$ 的两直线所限定的角域内, 即

$$|\varphi_n(t) - \varphi_n(s)| \leq M|t - s|,$$

因此等度连续. 由 Ascoli-Arzelà 引理, 序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 中有子序列 $\{\varphi_{n_k}(t)\}$ 一致收敛. 设

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}(t) = \varphi(t), \quad t \in I. \quad (5.12)$$

第三步 证明函数 $\varphi_n(t)$ 满足

$$\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_n(\tau)) d\tau + \sigma_n(t), \quad (5.13)$$

其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(t) = 0, t \in I$. 为了简单起见, 我们只在区间 $[t_0, t_0 + h]$ 上证明这一结论, 在区间 $[t_0 - h, t_0]$ 上的证明完全类似.

观察 (5.11) 中的每一项, 易见对 $k=0, 1, \dots, s-1$ 及 $t \in [t_s, t_{s+1}]$, 有

$$\begin{aligned} f(t_k, x_k)(t_{k+1} - t_k) &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t_k, x_k) d\tau \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, \varphi_n(\tau)) d\tau + d_n(k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t_s, x_s)(t - t_s) &= \int_{t_s}^t f(t_s, x_s) d\tau \\ &= \int_{t_s}^t f(\tau, \varphi_n(\tau)) d\tau + d_n^*(t), \end{aligned}$$

其中

$$d_n(k) := \int_{t_k}^{t_{k+1}} \{f(t_k, x_k) - f(\tau, \varphi_n(\tau))\} d\tau, \quad (5.14)$$

$$d_n^*(t) := \int_{t_s}^t \{f(t_s, x_s) - f(\tau, \varphi_n(\tau))\} d\tau. \quad (5.15)$$

这样在 (5.11) 中利用积分逐段可加的性质, 得到

$$\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_n(\tau)) d\tau + \sigma_n(t), \quad t \in [t_0, t_0 + h],$$

其中

$$\sigma_n(t) := \sum_{k=0}^{s-1} d_n(k) + d_n^*(t), \quad t \in [t_0, t_0 + h]. \quad (5.16)$$

注意到 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n(k) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} d_n^*(t) = 0$. 事实上, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 由 f 的连续性, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|\tau - t_k| < \delta, |\varphi_n(\tau) - x_k| < \delta$ 时有

$$|f(t_k, x_k) - f(\tau, \varphi_n(\tau))| < \frac{\varepsilon}{h}.$$

当 n 充分大时, 显然可以使得 $|t_{k+1} - t_k| = h/n < \delta$, 并且由 (5.10) 的同样道理可以使得

$$|\varphi_n(\tau) - x_k| \leq M |\tau - t_k| \leq \frac{Mh}{n} < \delta.$$

因此由(5.14)知, $|d_n(k)| < \varepsilon/n$. 同理从(5.15)知, 当 n 充分大时, $|d_n^*(t)| < \varepsilon/n$. 由(5.16), 当 n 充分大时,

$$|\sigma_n(t)| < \frac{s}{n}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{n} \leq \varepsilon.$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(t) = 0$.

第四步 由第二、三步结果, 在(5.13)取子序列极限得

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau, \quad t \in I,$$

即 $\varphi(t)$ 满足初值问题(5.4)的等价积分方程. 从而证明了定理. $\square$

从几何的角度考虑, Euler 折线法给出了一种逼近积分曲线的方法. 定义在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的函数 $x = \varphi(t)$ 称为初值问题(5.4)在这个区间上的 ε -逼近解, 如果它满足条件

(1) $\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 并且除了 $[\alpha, \beta]$ 上有限个点外, $\varphi(t)$ 处处连续可微, 而在这有限个点处 $\varphi(t)$ 的左右导数都存在;

(2) 当 $t \in [\alpha, \beta]$ 时, $(t, \varphi(t))$ 落在矩形区域 R 内;

(3) 当 $t \in [\alpha, \beta]$ 时,

$$\left| \frac{d\varphi(t)}{dt} - f(t, \varphi(t)) \right| \leq \varepsilon,$$

这里当 $\varphi(t)$ 的微商不存在且 $t \neq \beta$ 时, $\frac{d\varphi(t)}{dt}$ 是指 $\varphi(t)$ 的右导数, $t = \beta$ 时, $\frac{d\varphi(t)}{dt}$ 是指 $\varphi(t)$ 的左导数.

我们在定理证明中事实上给出了这样的结论: 若 $f(t, x)$ 在矩形区域

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

上连续, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 初值问题(5.4)在区间 $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ 上存在 ε -逼近解 $x = \varphi(t)$, 且当 $t, s \in [t_0, t_0 + h]$ 时有

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq M |t - s|,$$

其中 $h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$, $M = \max \{ |f(t, x)| : (t, x) \in R \}$.

附录: 引理 5.1 的证明.

由于 $\mathcal{F} = \{f(t)\}$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致有界, 故存在 $M_0 > 0$, 使得 $\forall f(t) \in \mathcal{F}$, 都有当 $t \in [\alpha, \beta]$ 时, $|f(t)| \leq M_0$. 所以 $\mathcal{F}$ 中的函数的图像都在矩形区域

$$R_0 = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2: \alpha \leq t \leq \beta, -M_0 \leq x \leq M_0\}$$

内.

取 $s_1 = \frac{M_0}{2}$, 由 $\mathcal{F}$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上的等度连续性, 存在 $\delta_1 = \delta_1(s_1) > 0$, 使得 $\forall f(t) \in \mathcal{F}$, 只要当 $t, \bar{t} \in [\alpha, \beta]$ 且 $|t - \bar{t}| < \delta_1$ 时, 就有 $|f(t) - f(\bar{t})| \leq s_1$. 用平行于坐标轴的直线将矩形区域 R_0 分成有限多个高为 s_1 , 宽小于或等于 δ_1 的小矩形 (如图 5.5). 设以相邻两垂线为边界的竖直长条为 $A_1, A_2, \dots, A_m$. 则 $\mathcal{F}$ 中每个函数的图像在每个这样的竖直长条上最多经过两个相邻的小矩形. 在 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 中各取两个相邻的小矩形就构成了一个“高”为 $2s_1$ 的多边形. 显然这样的多边形只有有限个, 而 $\mathcal{F}$ 中每个函数的图像都包含在某个这样的多边形中. 由于 $\mathcal{F}$ 是无穷函数族, 故必存在多边形 S_1 , 它包含 $\mathcal{F}$ 中无穷多个函数的图像. 记 $\mathcal{F}$ 的这个无穷子集为 $\mathcal{F}_1 = \{f^{(1)}(t)\}$.

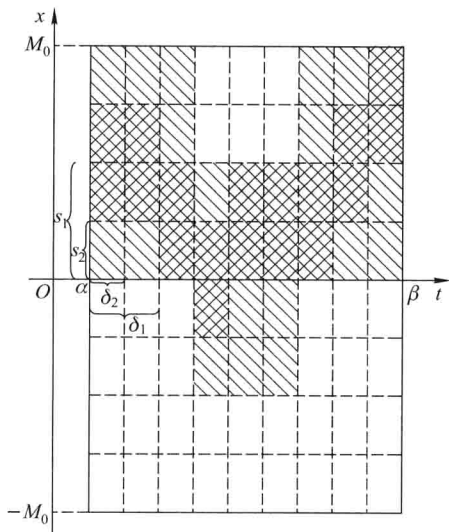


图 5.5 多边形 $S_1, \dots, S_k, \dots$ 的构造

再取 $s_2 = \frac{M_0}{2^2}$, 由 $\mathcal{F}$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上的等度连续性, 存在 $\delta_2 = \delta_2(s_2) > 0$, 使得

$\forall f(t) \in \mathcal{F}$, 只要当 $t, \bar{t} \in [\alpha, \beta]$ 且 $|t - \bar{t}| < \delta_2$ 时, 就有 $|f(t) - f(\bar{t})| \leq s_2$. 用平行于坐标轴的直线将矩形区域 R_0 分成有限多个“高”为 s_2 , 宽小于或等于 δ_2 的小

矩形. 类似地, 至少存在一个包含在 S_1 内、“高”为 $2s_2$ 的多边形 S_2 , 它包含 $\mathcal{F}_1$ 中无穷多个函数的图像. 记 $\mathcal{F}_1$ 的这个无穷子集为 $\mathcal{F}_2 = \{f^{(2)}(t)\}$.

一般地, 假如已作出了“高”为 $2s_k = \frac{M_0}{2^{k-1}}$ 的多边形 S_k 及图像含在 S_k 内的无穷函数族 $\mathcal{F}_k = \{f^{(k)}(t)\}$, 对 $s_{k+1} = \frac{M_0}{2^{k+1}}$, 我们可类似构造出一个包含在 S_k 内“高”为 $2s_{k+1}$ 的多边形 S_{k+1} , 它包含 $\mathcal{F}_k$ 中无穷多个函数的图像, 见图 5.5. 记 $\mathcal{F}_k$ 的这个无穷子集为 $\mathcal{F}_{k+1} = \{f^{(k+1)}(t)\}$.

这样我们就得到了一个函数族序列 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_k, \dots$ 满足性质:

- (1) $\mathcal{F} \supset \mathcal{F}_1 \supset \dots \supset \mathcal{F}_k \supset \dots$;
- (2) 对 $\mathcal{F}_k$ 中任意两个函数 $f_1^{(k)}(t)$ 和 $f_2^{(k)}(t)$, 都有

$$|f_1^{(k)}(t) - f_2^{(k)}(t)| \leq 2s_k = \frac{M_0}{2^{k-1}}, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

在 $\mathcal{F}_1$ 中任取一个函数 $f_1(t)$, 在 $\mathcal{F}_2$ 中任取一个不同于函数 $f_1(t)$ 的函数 $f_2(t)$, $\dots$, 在 $\mathcal{F}_k$ 中任取一个不同于函数 $f_1(t), \dots, f_{k-1}(t)$ 的函数 $f_k(t)$, 如此继续下去. 因为 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_k, \dots$ 均为无穷集合, 故这一过程可一直进行下去. 由此我们得到 $\mathcal{F}$ 的一个子序列 $\{f_n(t)\} (n=1, 2, \dots)$ 满足: 对任意的正整数 k 和 l ,

$$|f_k(t) - f_{k+l}(t)| \leq \frac{M_0}{2^{k-1}}, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

由 Cauchy 收敛准则, $\{f_n(t)\}$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛. 引理证毕. $\square$

习题 5.2

1. 考虑初值问题

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad x(0) = 1,$$

将区间 $[-1, 1]$ 分为 8 等份并构造出相应的 Euler 折线 $\varphi(t)$, 将初值问题对应的积分曲线和 Euler 折线 $\varphi(t)$ 画在一张图上进行比较. 计算 $\varphi(t)$ 在区间的等分点处的值以及和精确解的误差, 精确到小数点后第五位.

2. 证明: 若把 Euler 折线作如下的修正:

$$\varphi(t) = \begin{cases} x_0, & \text{当 } t = t_0 \text{ 时,} \\ x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0), & \text{当 } t_0 < t \leq t_1 \text{ 时,} \\ \varphi(t_{k-1}) + \frac{f(t_{k-2}, \varphi(t_{k-2})) + f(t_{k-1}, \varphi(t_{k-1}))}{2}(t - t_{k-1}), & \\ \text{当 } t_{k-1} < t \leq t_k \text{ 时 } (k = 2, 3, \dots, n). \end{cases}$$

则 $\forall \varepsilon > 0$, 都存在 n , 使得按这一方式构造的函数 $\varphi(t)$ 是初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

在区间 $[t_0, t_0+h]$ 上的 ε -逼近解, 其中 $f(t, x)$ 在矩形区域

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

上连续, $h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$, $M = \max \{ |f(t, x)| : (t, x) \in R \}$.

3. 证明 Picard 迭代序列满足 Ascoli-Arzelà 引理的条件.

4. 利用 Peano 存在定理证明隐函数定理的存在性部分.

§ 5.3 解的延拓

无论是 Picard 存在唯一性定理还是 Peano 存在性定理, 都只肯定了一个初值问题的解的局部存在性, 即解在某区间 $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ 上的存在性, 其中决定存在区间大小的数 h 为 $\min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$, $M = \max \{ |f(t, x)| : (t, x) \in R \}$ 越大, h 就越小.

不管是从理论还是应用上来看, 这都是不能令人满意的. 特别是如果 $f(t, x)$ 在某区域 $G \subseteq \mathbb{R}^2$ 上连续, 而 G 很大或 $G = \mathbb{R}^2$, 对于任意 $(t_0, x_0) \in G$, 我们也只能断定初值问题 (5.4) 在 t_0 的一个很小的邻域 $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ 上有一个解. 更糟糕的是, 例如考虑初值问题

$$\frac{dx}{dt} = t^2 + x^2, \quad x(0) = 0,$$

当定义区域为矩形区域

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t| \leq 1, |x| \leq 1\}$$

时, $M = 2$, $h = \min \left\{ 1, \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}$, 而当定义区域为矩形区域

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t| \leq 2, |x| \leq 2\}$$

时, $M = 8$, $h = \min \left\{ 2, \frac{2}{8} \right\} = \frac{1}{4}$. 即随着 $f(t, x)$ 的定义区域的增大, 由 Picard 存在唯一性定理或 Peano 存在性定理所能确定的解的存在区间反而还缩小了.

这就自然地提出了一个在理论和实践上都十分重要的问题: 能否将局部定义在某小区间 $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ 上的初值问题的解的存在区间尽可能地扩大呢? 幸运的是: 这一问题的答案是肯定的. 这就是下面要介绍的解的延拓的概念及解

的延拓定理.

假设 $f(t, x)$ 在开区域 G 上连续. 设 $x = \varphi(t)$ 是初值问题 (5.4) 的解, 它定义在区间 $[\alpha, \beta]$ 上, 并且当 $t \in [\alpha, \beta]$ 时, $(t, \varphi(t)) \in G$. 由于 $Q(\beta, \varphi(\beta)) \in G$, 可以找一个以 Q 为中心的小矩形区域, 使之含于 G 内. 由 Peano 存在性定理, 方程 (5.3) 有定义在某区间 $[\beta - h_1, \beta + h_1]$ 上的解 $x = \varphi_1(t)$ 满足初值条件 $\varphi_1(\beta) = \varphi(\beta)$. 同理, 方程 (5.3) 有定义在某区间 $[\alpha - h_2, \alpha + h_2]$ 上的解 $x = \varphi_2(t)$ 满足初值条件 $\varphi_2(\alpha) = \varphi(\alpha)$. 现在令

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi_2(t), & \text{当 } t \in [\alpha - h_2, \alpha] \text{ 时,} \\ \varphi(t), & \text{当 } t \in [\alpha, \beta] \text{ 时,} \\ \varphi_1(t), & \text{当 } t \in [\beta, \beta + h_1] \text{ 时.} \end{cases}$$

则 $x = \psi(t)$ 即是初值问题 (5.4) 定义在区间 $[\alpha - h_2, \beta + h_1]$ 上的解, 见图 5.6. 这样我们就将解的定义区间由 $[\alpha, \beta]$ 延拓到了一个更大的区间 $[\alpha - h_2, \beta + h_1]$ 上. 用几何语言来说, 就是在原来的积分曲线 $x = \varphi(t)$ 左右两端各接上一个积分曲线段. 这一延拓过程可一直进行下去, 最后我们将得到一个解 $x = \tilde{\varphi}(t)$, 它已经无法再向左右两端继续延拓了. 这样的解称为初值问题 (5.4) 的饱和解.

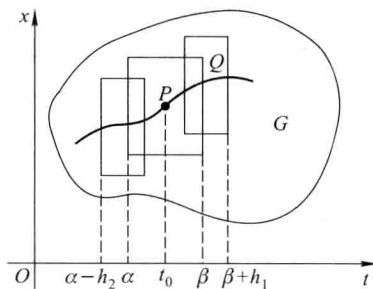


图 5.6 解的延拓

不难证明, 任一饱和解 $x = \varphi(t)$ 的存在区间必为一个开区间 (a, b) . 因为如若不然, 比如这个存在区间在右端点为闭的且 b 有限, 则 $(b, \varphi(b)) \in G$, 且同上道理, $x = \varphi(t)$ 还可向右端延拓. 这与 $x = \varphi(t)$ 是饱和解矛盾.

接下来要问, 初值问题 (5.4) 的解最终可向左右两端延拓到什么地方呢? 从直观上看, 当 G 为一个有界区域时, 从 G 内任一点出发的积分曲线向左右都能延拓到 G 的边界的任意近旁. 我们将严格证明这一点. 为此, 对 $\mathbb{R}^2$ 上任一点 (t_0, x_0) , 我们定义它与任一集合 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 的距离为

$$\rho((t_0, x_0), D) = \inf_{(t, x) \in D} d((t_0, x_0), (t, x)),$$

其中 $d((t_0, x_0), (t, x)) = \{(t - t_0)^2 + (x - x_0)^2\}^{1/2}$.

定理 5.3 (解的延拓定理) 设 G 为 $\mathbb{R}^2$ 上一个开区域, $f(t, x)$ 在 G 内连续. 对 (5.3) 的任一饱和解 $x = \varphi(t)$, 积分曲线 $x = \varphi(t)$ 必能达到 G 的边界. 特别地, 当 G 为有界区域时, 若饱和解 $x = \varphi(t)$ 的存在区间为 (a, b) , 则当 $t \rightarrow b^-$ 和 $t \rightarrow a^+$ 时都有

$$\rho((t, \varphi(t)), \partial G) \rightarrow 0,$$

其中 ∂G 为 G 的边界.

证明 我们把饱和解 $\varphi(t)$ 的最大存在区间简记为 J . 我们仅对当 $t \rightarrow b^-$ 时的情况证明, 当 $t \rightarrow a^+$ 时的证明完全类似. 因此只考虑 $J_+ = J \cap [t_0, \infty)$.

情形 1: $J_+ = [t_0, \infty)$, 即 $b = \infty$. 此时积分曲线在 G 内可延拓到无穷, 在无穷远处达到 ∂G .

情形 2: $J_+ = [t_0, b)$ 且 $b < \infty$. 我们只需证明

$$\lim_{t \rightarrow b^-} (t, \varphi(t)) \in \partial G,$$

即对任何有界闭区域 $G_1 \subset G$, 不可能有 $(t, \varphi(t)) \in G_1, \forall t \in J_+$. 如若不然, 由 G_1 是有界闭集及 f 在 G_1 上的连续性, 存在常数 $K > 0$, 使得 $|f(t, x)| \leq K, \forall (t, x) \in G_1$. 因此,

$$|\varphi'(t)| = |f(t, \varphi(t))| \leq K, \forall t \in J_+.$$

由微分中值定理,

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leq K |t_2 - t_1|, \forall t_1, t_2 \in J_+.$$

因此, 容易由 Cauchy 基本收敛定理证明 $\lim_{t \rightarrow b^-} \varphi(t)$ 存在. 假设极限为 x_* . 那么我们定义

$$\varphi_*(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{当 } t \in J_+ = [t_0, b), \\ x_*, & \text{当 } t = b. \end{cases}$$

显然 $\varphi_*(t)$ 连续. 对 $\varphi(t)$ 满足的等价积分方程关于 $t \rightarrow b^-$ 取极限, 得到

$$\varphi_*(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_*(s)) ds, \quad t \in [t_0, b].$$

故 $\varphi_*(t)$ 是所考虑的微分方程初值问题在区间 $[t_0, b]$ 上的解, 而且 $\varphi_*(t) = \varphi(t), \forall t \in J_+$. 这与 $J_+ = [t_0, \infty)$ 上的最大存在区间矛盾. 定理证毕. $\square$

由定理 5.3 不难看出: 如果 $G \subseteq \mathbb{R}^2$ 为无界区域, $f(t, x)$ 在 G 内连续, (5.3)

的过 G 内任一点 (t_0, x_0) 的解 $x = \varphi(t)$ 可以延拓, 以向 t 增大的一方的延拓来说, 则解 $x = \varphi(t)$ 或者可以延拓到区间 $[t_0, +\infty)$, 或者只可以延拓到有限区间 $[t_0, m)$. 如果是后者, 则当 $t \rightarrow m^-$ 时, 要么 $x = \varphi(t)$ 无界, 要么 $(t, \varphi(t))$ 趋于 G 的边界.

例 5.2 考虑初值问题

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2, \quad x(0) = 0,$$

它的解为 $x(t) = \tan t$, 它的最大存在区间为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. 这里方程右端的函数 $1+x^2$ 在整个平面上有定义且连续, 而初值问题的解只能延拓到有限区间, 不难看出 $x(t)$ 无界, 且有

$$\lim_{t \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} x(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} x(t) = +\infty.$$

例 5.3 考虑定义在整个平面上的初值问题

$$\frac{dx}{dt} = (-x + t^2 - 3t + 2)e^{tx}, \quad x(t_0) = x_0,$$

其中 (t_0, x_0) 为平面上任一点. 我们要证明它的解 $x = \varphi(t)$ 向右可以延拓到区间 $[t_0, +\infty)$.

事实上, 抛物线 $L: x = t^2 - 3t + 2 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ 为所给方程的水平等倾线. 若 $x = \varphi(t)$ 向右只可以延拓到有限区间 $[t_0, \beta)$, 则由定理 5.3, 当 $t \rightarrow \beta^-$ 时, $x = \varphi(t)$ 无界. 若 (t_0, x_0) 在抛物线 L 上方, 即 $-x_0 + t_0^2 - 3t_0 + 2 < 0$, 则由解 $x = \varphi(t)$ 确定的积分曲线 Γ 必单调下降直到与 L 相交于某点 (t_1, x_1) 并穿过 L (因为当 $t \rightarrow \beta^-$ 时, $x = \varphi(t)$ 无界), 易知 $t_1 \geq \frac{3}{2}$, 因为若 Γ 与 L 相交于 (t_1, x_1) 且 $t_1 < \frac{3}{2}$, 则由于 L 在点 (t_1, x_1) 的切线斜率小于 Γ 在点 (t_1, x_1) 的切线斜率, 从而 Γ 不可能由 L 的上方进入 L 的下方. Γ 进入 L 的下方后, 由于 $-x + t^2 - 3t + 2 > 0$, 因此 Γ 必单调上升, 并且 Γ 不可能再由 L 的下方进入 L 的上方, 这是因为 L 为水平等倾线, 若 Γ 再由 L 的下方进入 L 的上方, 则在交点 (t_2, x_2) 处有 $t_2 > t_1 \geq \frac{3}{2}$, 由于 Γ 在点 (t_2, x_2) 的切线斜率小于 L 在点 (t_2, x_2) 的切线斜率, 因而 Γ 不可能在交点 (t_2, x_2) 处由 L 的下方进入 L 的上方. 由于 $\beta < +\infty$, 因此当 $t \rightarrow \beta^-$ 时, $x = \varphi(t)$ 必有界, 这就导致矛盾.

若 (t_0, x_0) 在抛物线 $L: x = t^2 - 3t + 2$ 的下方, 即 $-x_0 + t_0^2 - 3t_0 + 2 \geq 0$, 则 Γ 必单调

上升,若 Γ 由 L 的下方进入 L 的上方,则由上面同样的理由,当 $t \rightarrow \beta^-$ 时, $x = \varphi(t)$ 必有界,若 Γ 不再穿过 L 的下方而进入 L 的上方,则当 $t \rightarrow \beta^-$ 时, $x = \varphi(t)$ 同样有界,从而也导致矛盾. 因此解 $x = \varphi(t)$ 向右必可延拓到区间 $[t_0, +\infty)$.

现在假设 $G \subseteq \mathbb{R}^2$ 是由不等式

$$T_0 < t < T_1, |x| < \infty$$

所确定的区域. 一个重要而有趣的问题是: 方程 (5.3) 的解在什么条件下可以延拓到整个区间 $T_0 < t < T_1$? 首先由定理 5.3 容易看出, 这个所要求的条件为有界性, 即如下的推论成立. 我们将其证明作为习题留给读者.

推论 5.1 若 $f(t, x)$ 在上述区域 G 中连续, 而且相应的微分方程初值问题的饱和解 $x = \varphi(t)$ 有界, 则 $\varphi(t)$ 的存在区间必为整个区间 (T_0, T_1) .

其次我们有下面的结论.

推论 5.2 设 $f(t, x)$ 在域

$$G = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : T_0 < t < T_1, |x| < \infty\}$$

内连续, 且存在与 t 无关的常数 N , 使得

$$|f(t, x)| \leq N|x|, \quad (5.17)$$

则 (5.3) 的任一饱和解 $x = \varphi(t)$ 都在区间 (T_0, T_1) 上存在.

证明 用反证法. 若不然, 设 $\varphi(t)$ 的存在区间为 (a, b) 且 $b < T_1$. 显然 b 有限. 在区间 (a, b) 上任取一点 t_0 , 我们要证明 $x = \varphi(t)$ 在区间 (t_0, b) 上有界. 由此及延拓定理可知 $x = \varphi(t)$ 还可向右延拓, 这与 (a, b) 为其最大存在区间矛盾, 因而定理成立.

所以下面只需证明 $x = \varphi(t)$ 在区间 (t_0, b) 上有界. 用反证法, 假设 $x = \varphi(t)$ 在区间 (t_0, b) 上无界. 则对任意 $K > |\varphi(t_0)| + 1$, 都存在 $t_k \in (t_0, b)$, 使得

$$|\varphi(t_k)| \geq K.$$

由连续函数的介值定理, 存在 $\tau_k \in (t_0, t_k)$, 使得 $|\varphi(\tau_k)| = |\varphi(t_0)| + 1$ 且

$$|\varphi(t)| > 0, \forall t \in (\tau_k, t_k).$$

另一方面, $x = \varphi(t)$ 为方程 (5.3) 的解, 因此有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\varphi(t)| &= \frac{d}{dt} \sqrt{(\varphi(t))^2} = \frac{\varphi(t) \varphi'(t)}{|\varphi(t)|} \\ &\leq \frac{1}{|\varphi(t)|} |\varphi(t)| |f(t, \varphi(t))| = |f(t, \varphi(t))| \\ &\leq N |\varphi(t)|. \end{aligned} \quad (5.18)$$

在两边分别除以 $|\varphi(t)|$ 并对 t 从 τ_k 到 t_k 积分,得

$$\ln \frac{|\varphi(t_k)|}{|\varphi(\tau_k)|} \leq N(t_k - \tau_k) \leq N(b - t_0),$$

即

$$|\varphi(t_k)| \leq |\varphi(\tau_k)| e^{N(b-t_0)} \leq (|\varphi(t_0)| + 1) e^{N(b-t_0)}.$$

上式右端为一有限数,而 $|\varphi(t_k)| \geq K$ 可任意大,这是不可能的. 这一矛盾说明 $x = \varphi(t)$ 在区间 (t_0, b) 上有界. 推论证毕. $\square$

下面的结果是推论 5.2 的一个推广.

推论 5.3 (Wintner) 设 $f(t, \mathbf{x})$ 在域

$$G = \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n+1} : T_0 < t < T_1, \|\mathbf{x}\| < \infty\}$$

内连续且满足条件

$$\|f(t, \mathbf{x})\| \leq L(r), \quad r = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $L(r)$ 在 $r \geq 0$ 上连续, 在 $r > 0$ 时为正, 且

$$\int_{\alpha}^{\infty} \frac{dr}{L(r)} = \infty \quad (\alpha > 0), \quad (5.19)$$

则 (5.2) 的任一饱和解 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ 都在区间 (T_0, T_1) 上存在.

证明 推论 5.2 的结论和证明方法可毫不困难地推广到 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 的情形, 而本推论的证明方法和推论 5.2 在 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 的情形的证明完全类似. 不同的是, 我们得到的微分不等式不是 (5.18), 而是

$$\frac{dr(t)}{dt} \leq L(r(t)), \quad \forall t \in (\tau_k, t_k).$$

在上式两边分别除以 $L(r(t))$ 并对 t 从 τ_k 到 t_k 积分, 得

$$\int_{r(t_0)+1}^{r(t_k)} \frac{dr}{L(r)} \leq t_k - \tau_k \leq b - t_0 < \infty.$$

由于 $r(t_k) \geq K$ 可任意大, 由 (5.19) 知这是不可能的. $\square$

例 5.4 考虑方程:

$$\frac{dx}{dt} = x \sin(tx),$$

其右端函数 $f(t, x) = x \sin(tx)$ 在整个平面上有定义且连续, 满足 $|f(t, x)| \leq |x|$.

因此由推论 5.2, 它的任一饱和解都在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上存在.

习题 5.3

1. 设 $G \subseteq \mathbb{R}^2$ 是由不等式: $T_0 < t < T_1, |x| < \infty$ 所确定的区域. 方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

的任一饱和解 $x = \varphi(t)$ 均有界, 其中 $f(t, x)$ 在区域 G 上连续. 则 $x = \varphi(t)$ 的存在区间必为整个区间 (T_0, T_1) .

2. 设函数 $f(t, x)$ 在整个平面上都有定义、连续且有界, 证明方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

的任一解均可延拓到整个区间 $(-\infty, +\infty)$.

3. 设函数 $f(t, x)$ 在平面上的条形区域

$$G = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : a < t < b, |x| < \infty\}$$

上连续, $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 是方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

过同一点 $(t_0, x_0) \in G$ 的两个解, $\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t)$. 证明域 G 中介于 $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 间的部分被方程过点 $(t_0, x_0) \in G$ 的解充满.

- 4*. 证明方程

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + t^2$$

任一解的存在区间都是有界的.

5. 讨论下列初值问题的解的最大存在区间 (α, β) 及当 $t \rightarrow \alpha^+$ 和 $t \rightarrow \beta^-$ 时解的性质:

$$(1) \frac{dx}{dt} = 1 + \ln t, \quad x(1) = 0;$$

$$(2) \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(x^2 - 1), \quad x(\ln 2) = -3.$$

- 6*. 设函数 $f(t, x)$ 在平面上的条形区域

$$G = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : a < t < b, |x| < \infty\}$$

上连续且满足不等式

$$|f(t, x)| \leq A(t)|x| + B(t),$$

其中 $A(t) \geq 0, B(t) \geq 0$ 均在区间 (a, b) 上连续, 证明方程 $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ 的任一解的最大存在区间均为 (a, b) .

§ 5.4 微分不等式与比较定理

在微分方程理论的研究中,常常需要对满足微分不等式或积分不等式的未知函数进行估计. 在本章的 Picard 存在唯一性定理的唯一性部分的证明中以及在前面的延拓定理的推论中我们已经多次遇到. 在今后的研究中这种估计会成为一项重要的工作环节. 为此我们在本节介绍一些常用的结果,即 Gronwall 不等式及其推广以及比较定理.

定理 5.4 (Gronwall 不等式) 设 $x(t)$, $f(t)$ 为区间 $[t_0, t_1]$ 上的实连续函数, $f(t) \geq 0$, 若有实常数 g , 使得

$$x(t) \leq g + \int_{t_0}^t f(\tau)x(\tau) d\tau, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (5.20)$$

则

$$x(t) \leq g \exp \left(\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \right), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (5.21)$$

这个定理的证明方法有很多种,我们将其作为习题留给读者去思考. 下面我们给出并证明它的一个推广.

定理 5.5 (推广的 Gronwall 不等式) 设 $x(t)$, $g(t)$ 为区间 $[t_0, t_1]$ 上的实连续函数, 函数 $f(t) \geq 0$ 在区间 $[t_0, t_1]$ 上可积, 它们满足

$$x(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^t f(\tau)x(\tau) d\tau, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (5.22)$$

则当 $t \in [t_0, t_1]$ 时,

$$x(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^t f(\tau)g(\tau) \exp \left(\int_{\tau}^t f(s) ds \right) d\tau. \quad (5.23)$$

证明 我们仅对 $f(t)$ 为连续函数的情况证明. 在 (5.22) 式两边分别乘以 $f(t)$ 得

$$f(t)x(t) \leq f(t)g(t) + f(t) \int_{t_0}^t f(\tau)x(\tau) d\tau. \quad (5.24)$$

令 $H(t) = \int_{t_0}^t f(\tau)x(\tau) d\tau$, 则 (5.24) 式可写成

$$\frac{dH(t)}{dt} - f(t)H(t) \leq f(t)g(t). \quad (5.25)$$

在(5.25)式两边分别乘以 $\exp \left(- \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \right)$ 得

$$\frac{d}{dt} \left\{ H(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \right) \right\} \leq f(t) g(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \right).$$

在上面不等式两边从 t_0 到 t 积分,得

$$H(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \right) \leq \int_{t_0}^t f(\tau) g(\tau) \exp \left(- \int_{\tau}^{t_0} f(s) ds \right) d\tau.$$

即

$$H(t) \leq \int_{t_0}^t f(\tau) g(\tau) \exp \left(\int_{\tau}^t f(s) ds \right) d\tau.$$

再由(5.22)得

$$\begin{aligned} x(t) &\leq g(t) + H(t) \\ &\leq g(t) + \int_{t_0}^t f(\tau) g(\tau) \exp \left(\int_{\tau}^t f(s) ds \right) d\tau. \end{aligned}$$

因此,(5.23)成立. $\square$

推论 5.4 在定理 5.5 的条件中,如果附加条件 $g(t)$ 连续且导数 $g'(t) \geq 0$,则

$$x(t) \leq g(t) \exp \left(\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \right), \quad t \in [t_0, t_1].$$

证明 对定理 5.5 的结论(5.23)作分部积分得

$$\begin{aligned} x(t) &\leq g(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \right) + \int_{t_0}^t g'(\tau) \exp \left(\int_{\tau}^t f(s) ds \right) d\tau \\ &\leq \exp \left(\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \right) \left\{ g(t_0) + \int_{t_0}^t g'(\tau) d\tau \right\} \\ &= g(t) \exp \left(\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

因此推论 5.4 成立. $\square$

利用推论 5.4 可以直接给出定理 5.4 的结论.

当微分方程可以表述成线性项和非线性项相加时,尽管我们未必能够解出未知函数 $x(t)$,但是我们可以利用常数变易公式在等式两端取模,化成以上定理中的积分不等式形式. Gronwall 不等式可以用来从中得出未知函数的估计. 这样应用的例子将在下面章节内容中见到.

另一个值得介绍的不等式工具是两个比较定理,它们对分析由微分方程所定义的平面方向场的几何特征是很有用的.

定理 5.6 (第一比较定理) 设函数 $f(t, x)$ 和 $F(t, x)$ 都在平面区域 G 内连续且满足不等式

$$f(t, x) < F(t, x).$$

设 $(t_0, x_0) \in G$, $\varphi(t)$ 和 $\Phi(t)$ 分别是初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (5.26)$$

和初值问题

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (5.27)$$

的解,且都在区间 (a, b) 上有定义. 则有

$$\varphi(t) < \Phi(t), \quad \forall t \in (t_0, b), \quad (5.28)$$

$$\varphi(t) > \Phi(t), \quad \forall t \in (a, t_0). \quad (5.29)$$

证明 我们只证明 (5.28), (5.29) 的证明完全类似. 用反证法. 对 $t \in (a, b)$, 令 $\psi(t) = \varphi(t) - \Phi(t)$. 由假设知

$$\psi'(t_0) = f(t_0, x_0) - F(t_0, x_0) < 0, \quad \psi(t_0) = 0.$$

因此必有 $\delta > 0$, 使得当 $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ 时, $\psi(t) < 0$.

若 (5.28) 不成立, 则存在 $t_1 \in (t_0, b)$, 使得 $\psi(t_1) = 0$. 显然 $t_1 \geq t_0 + \delta$. 令

$$\beta = \inf \{ t : \psi(t) = 0, \quad t \in (t_0, b) \}.$$

则有 $\psi(\beta) = 0$, 且当 $t \in (t_0, \beta)$ 时, $\psi(t) < 0$. 由此知 $\psi'(\beta) \geq 0$. 但另一方面, 因为 $\psi(\beta) = 0$, 即 $\varphi(\beta) = \Phi(\beta)$, 令 $x_\beta = \varphi(\beta)$, 则

$$\psi'(\beta) = f(\beta, x_\beta) - F(\beta, x_\beta) < 0.$$

这与 $\psi'(\beta) \geq 0$ 矛盾. 从而 (5.28) 成立. $\square$

在方程的初值问题没有唯一性保证的时候, 最大解和最小解的概念是有用的.

定义 5.1 设 $f(t, x)$ 在矩形区域

$$R = \{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b \}$$

上连续, 令 $M = \max \{ |f(t, x)| : (t, x) \in R \}$, $h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$. 再设 $\varphi(t)$ 和

$\Phi(t)$ 分别是初值问题 (5.4) 在区间 $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ 上的两个解, 使得对初值问题 (5.4) 的任意一个解 $\psi(t)$, 都有当 $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ 时,

$$\varphi(t) \leq \psi(t) \leq \Phi(t).$$

则称 $\varphi(t)$ 和 $\Phi(t)$ 分别是初值问题 (5.4) 的最小解和最大解.

由定义知最大解和最小解都是唯一的, 由下面的定理 5.7, 初值问题 (5.4) 的最大解和最小解均存在, 并且类似于解的延拓定理, 我们可以把初值问题 (5.4) 的最大解和最小解延拓到域 G 的边界.

定理 5.7 设 $f(t, x), M, h$ 如上定义所给, 则存在 $\delta > 0$, 使得 $\delta < h$ 且在区间 $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ 上, 初值问题 (5.4) 的最大解和最小解均存在.

证明 取一单调下降且收敛于零的正数数列 $\{\varepsilon_m\}$, 对 $m = 1, 2, \dots$, 考虑初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \varepsilon_m, \quad x(t_0) = x_0. \quad (5.30)$$

由 Peano 存在定理, 初值问题 (5.30) 在区间 $I = [t_0 - h_m, t_0 + h_m]$ 上至少有一个解 $x = \varphi_m(t)$, 这里

$$h_m = \min \left\{ a, \frac{b}{M_m} \right\},$$

$$M_m = \max \{ |f(t, x) + \varepsilon_m| : (t, x) \in R \}.$$

易知 $\lim_{m \rightarrow \infty} h_m = h$, 从而存在正数 $\delta_1 < h$, 使得初值问题 (5.4) 的解和初值问题 (5.30) 的解都在区间 $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$ 上有定义.

另一方面, $x = \varphi_m(t)$ 满足积分方程

$$\varphi_m(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (f(\tau, \varphi_m(\tau)) + \varepsilon_m) d\tau. \quad (5.31)$$

故对 $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$ 上任意两点 t_1, t_2 , 有

$$\begin{aligned} |\varphi_m(t_1) - \varphi_m(t_2)| &\leq \left| \int_{t_1}^{t_2} |f(\tau, \varphi_m(\tau)) + \varepsilon_m| d\tau \right| \\ &\leq (M + \varepsilon_1) |t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

且

$$|\varphi_m(t)| \leq |x_0| + |\varphi_m(t) - x_0| \leq |x_0| + b.$$

因此, 函数族 $\{\varphi_m(t)\}$ 在 $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$ 上等度连续且一致有界. 由 Ascoli-Arzelà 引理, 在 $\{\varphi_m(t)\}$ 中存在一个在 $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$ 上一致收敛的子序列, 不妨设

$\{\varphi_m(t)\}$ 在 $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$ 上一致收敛. 令

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(t) = \Phi(t).$$

在 (5.31) 式两边取极限即知 $\Phi(t)$ 是初值问题 (5.4) 的解.

又由定理 5.6 知, 对初值问题 (5.4) 的任意一个解 $\varphi(t)$ 及 $m=1, 2, \dots$,

$$\varphi(t) < \varphi_m(t), \forall t \in (t_0, t_0 + \delta_1),$$

$$\varphi(t) > \varphi_m(t), \forall t \in (t_0 - \delta_1, t_0).$$

因此,

$$\varphi(t) \leq \Phi(t), \forall t \in (t_0, t_0 + \delta_1),$$

$$\varphi(t) \geq \Phi(t), \forall t \in (t_0 - \delta_1, t_0).$$

同理可证, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得 $\delta_2 < h$ 且在区间 $[t_0 - \delta_2, t_0 + \delta_2]$ 上, 初值问题 (5.4) 存在解 $\Psi(t)$, 使得对初值问题 (5.4) 的任意一个解 $\varphi(t)$, 有

$$\varphi(t) \geq \Psi(t), \forall t \in (t_0, t_0 + \delta_2),$$

$$\varphi(t) \leq \Psi(t), \forall t \in (t_0 - \delta_2, t_0).$$

取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, 令

$$Z(t) = \begin{cases} \Phi(t), & \forall t \in [t_0, t_0 + \delta), \\ \Psi(t), & \forall t \in (t_0 - \delta, t_0) \end{cases}$$

及

$$W(t) = \begin{cases} \Psi(t), & \forall t \in [t_0, t_0 + \delta), \\ \Phi(t), & \forall t \in (t_0 - \delta, t_0). \end{cases}$$

则显然 $Z(t)$ 和 $W(t)$ 分别是初值问题 (5.4) 的最大解和最小解. $\square$

由定理 5.6 和定理 5.7 立刻得到下面的第二比较定理. 该定理的证明是容易的, 我们将其作为习题留给读者.

定理 5.8 (第二比较定理) 设函数 $f(t, x)$ 和 $F(t, x)$ 都在平面区域 G 内连续且满足不等式 $f(t, x) \leq F(t, x)$. 设 $(t_0, x_0) \in G$, $\varphi(t)$ 和 $\Phi(t)$ 分别是初值问题 (5.26) 和初值问题 (5.27) 的解, 且都在区间 (a, b) 上有定义, $\Phi(t)$ 是初值问题 (5.27) 在区间 (t_0, b) 上的最大解和在区间 (a, t_0) 上的最小解. 则有

$$\varphi(t) \leq \Phi(t), \forall t \in (t_0, b),$$

$$\varphi(t) \geq \Phi(t), \forall t \in (a, t_0).$$

例 5.5 用比较定理讨论方程

$$\frac{dx}{dt} = \sin(tx) \quad (5.32)$$

的积分曲线的走向.

解 显然方程(5.32)有零解 $x(t) = 0$, 并且对任意 (t_0, x_0) , 满足初值条件 $x(t_0) = x_0$ 的解 $x = x(t)$ 都存在且唯一, 由习题 5.3 第 2 题知 $x = x(t)$ 在整个区间 $(-\infty, +\infty)$ 上都有定义. 我们要证明

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (5.33)$$

易知在方程(5.32)中, 如果将 t 换成 $-t$ 或将 x 换成 $-x$, 方程的形式保持不变, 因此它的积分曲线关于 t 轴和 x 轴对称分布, 我们只需考虑在第一象限的情形. 不妨设 $t_0 = 0$. 若 $x_0 = 0$, 则由解的唯一性, 必有 $x(t) \equiv 0$. 若 $x_0 > 0$, 同样由解的唯一性, 当 $t \in [0, +\infty)$ 时, 积分曲线 $\Gamma: x = x(t)$ 必保持在第一象限内.

由本节习题 6 知, 为证明(5.33), 只需证明积分曲线 Γ 与直线 $L: x = t$ 当 $t > 0$ 时有交点. 为此将第一象限划分为区域

$$G_m = \{(t, x) : t > 0, x > 0, (m-1)\pi < tx < m\pi\}$$

连同其边界的并, 其中 $m = 1, 2, \dots$. 由 $P_0: (0, x_0)$ 出发向右作连续的折线 $\Lambda: x = u(t)$ 使其节点 P_m 在双曲线 $tx = m\pi$ 上, 并且满足条件

$$u'(t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } (t, u(t)) \in G_{2m-1} \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } (t, u(t)) \in G_{2m} \text{ 时.} \end{cases}$$

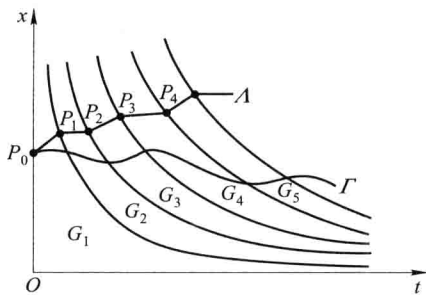
显然, 由方程(5.32)知积分曲线 Γ 的斜率总小于折线 Λ 的斜率. 由第一比较定理知, 当 $t > 0$ 时 Γ 总在 Λ 的下方, 见图 5.7.

现在任取三个节点:

$$P_{2m-1}: (t_{2m-1}, x_{2m-1}), P_{2m}: (t_{2m}, x_{2m}), P_{2m+1}: (t_{2m+1}, x_{2m+1}),$$

则 $x_{2m-1} = x_{2m}, x_{2m+1} > x_{2m-1}$, 并且

$$t_{2m+1} - t_{2m} < \frac{\pi}{x_{2m-1}} = t_{2m} - t_{2m-1},$$

图 5.7 方程 (5.32) 的积分曲线 Γ 总在折线 Λ 的下方

$$x_{2m+1} - x_{2m-1} = x_{2m+1} - x_{2m} = t_{2m+1} - t_{2m}.$$

因此直线段 $P_{2m-1}P_{2m+1}$ 的斜率满足

$$\begin{aligned} \frac{x_{2m+1} - x_{2m-1}}{t_{2m+1} - t_{2m-1}} &= \frac{t_{2m+1} - t_{2m}}{(t_{2m+1} - t_{2m}) + (t_{2m} - t_{2m-1})} \\ &< \frac{t_{2m+1} - t_{2m}}{2(t_{2m+1} - t_{2m})} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

故折线 Λ 必在过节点 P_1 斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线 $L_1: x = \frac{1}{2}(t - t_1) + x_1$ 的下方, 从而当 $t > 0$ 时 Γ 总在直线 L_1 的下方.

这样当 $t > 0$ 时 Γ 在 P_0 附近必夹在直线 L 和 L_1 之间, 并且永远在直线 L_1 的下方. 另一方面, 当 t 增大时, 直线 L_1 由在直线 L 的上方与直线 L 相交并进入 L 的下方. 因此积分曲线 Γ 与直线 $L: x = t$ 当 $t > 0$ 时必有交点.

习题 5.4

1. 证明 Gronwall 不等式: 设 $x(t)$, $f(t)$ 为区间 $[t_0, t_1]$ 上的实连续函数, $f(t) \geq 0$, 若有实常数 g , 使得

$$x(t) \leq g + \int_{t_0}^t f(\tau) x(\tau) d\tau, \quad t \in [t_0, t_1],$$

则

$$x(t) \leq g \exp \left(\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \right), \quad t \in [t_0, t_1].$$

2. 设函数 $f(t, x)$ 在平面区域 G 内连续, 关于 x 满足 Lipschitz 条件, L 是 Lipschitz 常数, $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 分别是方程 $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ 的 ε_1 和 ε_2 逼近解, 都在区间 $[t_1, t_2]$ 上有定义, $t_0 \in$

$[t_1, t_2]$ 且

$$|\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)| \leq \delta.$$

用 Gronwall 不等式证明: 当 $t \in [t_1, t_2]$ 时,

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq \delta e^{L|t-t_0|} + \frac{\varepsilon}{L}(e^{L|t-t_0|} - 1),$$

其中 $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

3. 不用推广的 Gronwall 不等式, 直接证明 Gronwall 不等式的另一推广: 设 $x(t)$, $f(t)$ 为区间 $[t_0, t_1]$ 上的连续函数, $f(t) \geq 0$, C, K 为常数, $K \geq 0$. 若当 $t \in [t_0, t_1]$ 时有

$$x(t) \leq C + \int_{t_0}^t [f(\tau)x(\tau) + K] d\tau,$$

则当 $t \in [t_0, t_1]$ 时,

$$x(t) \leq [C + K(t - t_0)] \exp \left(\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \right).$$

4. 证明第二比较定理.

5. 设初值问题

$$\frac{dx}{dt} = t^2 + (x+1)^2, \quad x(0) = 0 \quad (5.34)$$

的解的右侧最大存在区间为 $[0, \beta)$, 按下列步骤证明 $\frac{\pi}{4} < \beta < 1$:

(1) 利用不等式: 当 $|t| \leq 1$ 时,

$$(x+1)^2 \leq t^2 + (x+1)^2 \leq 1 + (x+1)^2,$$

证明 $\frac{\pi}{4} \leq \beta \leq 1$.

(2) 在 (5.34) 的积分曲线上取一点 (ξ, η) , 其中 ξ 为充分小的正数, 比较 (5.34) 和初值问题

$$\frac{dx}{dt} = (x+1)^2, \quad x(\xi) = \eta,$$

证明 $\beta < 1$.

(3) 取正数 λ , 使得 $1-\lambda$ 为充分小的正数, 比较 (5.34) 和初值问题

$$\frac{dx}{dt} = \lambda^2 + (x+1)^2, \quad x(0) = 0,$$

证明 $\beta > \frac{\pi}{4}$.

6. 证明: 若初值问题

$$\frac{dx}{dt} = \sin(tx), \quad x(0) = x_0$$

的积分曲线与直线 $x=t$ 当 $t>0$ 时有交点, 则

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0.$$

其中 $x_0 > 0$, $x(t)$ 为初值问题的解.

§ 5.5 解对初值和参数的依赖性

前面我们在讨论解的存在性和解的延拓时, 都是把初值 (t_0, x_0) 看成固定的, 因此得到的解 φ 只是 t 的函数 $\varphi(t)$. 如果初值发生了改变, 则相应的初值问题的解也随之改变. 因此, 初值问题的解 φ 不仅依赖于自变量 t , 而且还依赖于初值 (t_0, x_0) . 如果微分方程还包含某个参数 λ , 那么这个解除了依赖于 t , 还依赖于 t_0, x_0, λ , 从而微分方程的解可以看成关于四个变量 (t, t_0, x_0, λ) 的函数, 记为 $x = \varphi(t; t_0, x_0, \lambda)$. 我们有必要研究解 $\varphi(t; t_0, x_0, \lambda)$ 对参数 (t_0, x_0, λ) 的连续依赖性和可微依赖性. 在实际应用中, 我们关心这样的依赖性, 是因为一个初值问题的初始值或参数值往往是由实验测定的, 不可避免地会带有误差. 因此, 重要的问题就是当初值或参数值发生微小改变时相应的解如何改变?

更一般地, 考虑初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda), \quad x(t_0) = x_0, \quad (5.35)$$

其中 $x, x_0, f \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^m$. 作平移变换 $\tilde{t} = t - t_0, \tilde{x} = x - x_0$, 并把新的变量仍记为 t, x , 则初值问题(5.35)可化为

$$\frac{dx}{dt} = f(t + t_0, x + x_0, \lambda), \quad x(0) = 0. \quad (5.36)$$

这样我们就把初值统一地固定在 $(0, 0)$ 处, 而把问题化成对参数的依赖性问题. 这里 (t_0, x_0) 被看成同 λ 一样的参数. 因此, 对初值的依赖性可归结为对参数的依赖性. 下面我们讨论初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda), \quad x(0) = 0 \quad (5.37)$$

对参数 λ 的依赖性.

定理 5.9 (连续依赖性定理) 设 $f: G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为连续函数, 其中

$$G = \{(t, x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : |t| \leq a, \|x\| \leq b, \|\lambda - \lambda_0\| \leq c\},$$

而且 f 对 x 满足 Lipschitz 条件

$$\|f(t, x_1, \lambda) - f(t, x_2, \lambda)\| \leq L \|x_1 - x_2\|,$$

其中 $L \geq 0$ 是常数. 则初值问题 (5.37) 的解 $\varphi(t, \lambda)$ 在区域 $D = \{(t, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t| \leq h, \|\lambda - \lambda_0\| \leq c\}$ 上连续, 其中

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\},$$

$$M = \max\{\|f(t, x, \lambda)\| : (t, x, \lambda) \in G\}.$$

证明 证明过程与第一节的 Picard 存在唯一性定理证明类似, 只是增加 Picard 序列对参数 λ 的连续性. 因此我们只给出证明梗概.

第一步 初值问题 (5.37) 等价于积分方程

$$x(t) = \int_0^t f(\tau, x(\tau), \lambda) d\tau.$$

第二步 用等价积分方程构造 Picard 序列 $\{\varphi_k(t, \lambda)\}$, 其中 $\varphi_0(t, \lambda) \equiv 0$, 且

$$\varphi_{k+1}(t, \lambda) := \int_0^t f(\tau, \varphi_k(\tau, \lambda), \lambda) d\tau, \quad (5.38)$$

这里 $(t, \lambda) \in D$. 归纳地证明 $\varphi_k(t, \lambda)$ 对 $(t, \lambda) \in D$ 连续.

第三步 归纳地证明

$$\|\varphi_k(t, \lambda) - \varphi_{k-1}(t, \lambda)\| \leq \frac{ML^{k-1}}{k!} |t|^k,$$

从而, 序列 $\{\varphi_k(t, \lambda)\}$ 对 $(t, \lambda) \in D$ 一致地收敛.

第四步 令

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(t, \lambda) = \varphi(t, \lambda).$$

可以验证 φ 是初值问题 (5.37) 的解. 根据第三步证明的收敛一致性, φ 对 $(t, \lambda) \in D$ 连续.

第五步 类似第一节的 Picard 存在唯一性定理可以证明 φ 的唯一性. 从而证明了定理 5.9. $\square$

相应于局部存在的解在某个区间上的整体延拓, 我们还有以下结果. 我们只叙述方程的解关于初值的依赖性, 读者可自己考虑解关于参数的依赖性.

定理 5.10 (整体连续依赖性定理) 设 $f: G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为连续函数, 其中 G 为 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 上一个开区域, f 对 x 满足局部 Lipschitz 条件, 即 $\forall P \in G$, 存在以 P 为中心的矩形邻域 $\Omega(P) \subset G$, 使得 f 在 $\Omega(P)$ 上是 Lipschitz 的. 设 $x = \xi(t)$ 是微分方程组 (5.2) 的一个解, 它至少在区间 $[a, b]$ 上存在. 则存在常数 $\delta > 0$, 当初值点 (t_0, x_0) 满足条件

$$a \leq t_0 \leq b, \quad \|x_0 - \xi(t_0)\| \leq \delta$$

时, (5.2) 满足初值条件 $x(t_0) = x_0$ 的解 $\varphi(t; t_0, x_0)$ 至少也在 $[a, b]$ 上存在, 且在区域

$$D_\delta = \{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t, t_0 \in [a, b], \|x_0 - \xi(t_0)\| \leq \delta\}$$

上对 (t, t_0, x_0) 连续.

证明 仍采用 Picard 逼近序列来证明, 但与定理 5.9 有所不同.

第一步 Lipschitz 常数的一致化. 由于积分曲线段

$$\Gamma := \{(t, x) : x = \xi(t), a \leq t \leq b\}$$

是 G 内的有界闭集, 用有限覆盖定理, 可以找到覆盖 Γ 的有限个小的开矩形邻域 $B(p_j)$ (其中 $j=1, 2, \dots, m$), 而在每个这样的邻域 $B(p_j)$ 上相应地有 Lipschitz 常数 $L_j > 0$. 在这有限个小邻域中可以比较出一个最小的“半径” (或相交部分的“半径”) $d > 0$. 因此存在 Γ 的“管状”邻域

$$\Sigma_d := \{(t, x) \in G : a \leq t \leq b, \|x - \xi(t)\| \leq d\},$$

使得 f 在 Σ_d 上是 (整体地) Lipschitz 的, 并且有 Lipschitz 常数 $L := \max \{L_1, L_2, \dots, L_m\}$, 见图 5.8.

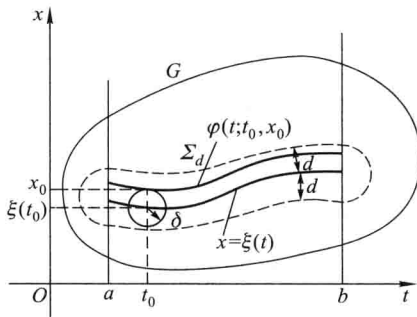


图 5.8 解关于初值的整体连续依赖性

第二步 用等价积分方程构造“管状”邻域 Σ_d 上的 Picard 序列 $\{\varphi_k(t; t_0, x_0)\}$, 其中 $\varphi_0(t; t_0, x_0) = x_0 + \xi(t) - \xi(t_0)$, 且

$$\varphi_{k+1}(t; t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_k(\tau; t_0, x_0)) d\tau.$$

第三步 取 $\delta = \frac{1}{2} e^{-L(b-a)} d$, 显然 $0 < \delta < d$. 我们在区域 D_δ 上归纳地证明

$$\|\varphi_k(t; t_0, x_0) - \xi(t)\| < d, \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} & \| \varphi_{k+1}(t; t_0, x_0) - \varphi_k(t; t_0, x_0) \| \\ & \leq \frac{(L |t - t_0|)^{k+1}}{(k+1)!} \|x_0 - \xi(t_0)\|, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5.40)$$

这里(5.39)保证 Picard 序列的函数图像仍留在管状邻域内.

事实上, 对 $k=0$,

$$\begin{aligned} & \| \varphi_0(t; t_0, x_0) - \xi(t) \| = \| x_0 - \xi(t_0) \| \leq \delta < d, \\ & \| \varphi_1(t; t_0, x_0) - \varphi_0(t; t_0, x_0) \| \\ & = \left\| \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_0(\tau; t_0, x_0)) d\tau - \xi(t) + \xi(t_0) \right\| \\ & = \left\| \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_0(\tau; t_0, x_0)) d\tau - \int_{t_0}^t f(\tau, \xi(\tau)) d\tau \right\| \\ & \leq L \left| \int_{t_0}^t \| \varphi_0(\tau; t_0, x_0) - \xi(\tau) \| d\tau \right| \\ & = L \| x_0 - \xi(t_0) \| |t - t_0|. \end{aligned}$$

因此当 $k=0$ 时(5.39)和(5.40)成立.

现假设对 $k \leq s-1$, 要证的(5.39)和(5.40)都成立, 则当 $k=s$ 时, 由关于(5.40)的归纳假设得

$$\begin{aligned} \| \varphi_s(t; t_0, x_0) - \xi(t) \| &= \left\| \sum_{k=1}^s \{ \varphi_k - \varphi_{k-1} \} + \{ \varphi_0 - \xi(t) \} \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^s \frac{(L |t - t_0|)^k}{k!} \|x_0 - \xi(t_0)\| + \|x_0 - \xi(t_0)\| \\ &\leq e^{L|t-t_0|} \delta \leq e^{L(b-a)} \delta < d, \end{aligned}$$

即归纳地证得(5.39). 对(5.40)当 $k=s$ 的归纳证明同理利用 Lipschitz 条件来完成.

第四步 从第三步知道, 构造的函数序列是一致收敛的. 令

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(t; t_0, x_0) = \varphi(t; t_0, x_0).$$

可以验证 φ 是(5.2)满足初值条件 $x(t_0) = x_0$ 的解. 根据第三步证明的一致收敛性, φ 对 $(t, t_0, x_0) \in D_\delta$ 连续. 类似地可以证明 φ 的唯一性. 从而证明了定理 5.10. $\square$

下面我们继续讨论解对初值和参数的连续可微性. 先看一个例子:

例 5.6 考虑如下的带参数 α 的初值问题:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} - x = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0.$$

不难利用第四章的方法求出它的解为

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{1}{2\sqrt{1+\alpha^2}} \{ [(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2})x_0 + x'_0] e^{(-\alpha + \sqrt{1+\alpha^2})(t-t_0)} \\ & + [(-\alpha + \sqrt{1+\alpha^2})x_0 - x'_0] e^{(-\alpha - \sqrt{1+\alpha^2})(t-t_0)} \}, \end{aligned}$$

它是 $(t, t_0, x_0, x'_0, \alpha)$ 的连续函数. 不难看出它对 $(t, t_0, x_0, x'_0, \alpha)$ 还是连续可微的.

事实上, 我们有下面的一般的结果:

定理 5.11 (C^1 依赖性定理) 设 G 定义同定理 5.9, $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为连续函数, 且对 $\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}$ 有连续偏导数. 则初值问题 (5.37) 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\lambda})$ 在区域

$$D = \{(t, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : |t| \leq h, \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_0\| \leq c\}$$

上是连续可微的, 其中 h, M 定义同定理 5.9.

证明 为了叙述方便, 我们只给出 $\mathbf{x}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}$ 都是一维情形的证明, 因此下面不再用黑体. 与定理 5.9 的证明类似, 我们采用下列步骤:

第一步 根据初值问题 (5.37) 的等价积分方程

$$x(t) = \int_0^t f(\tau, x(\tau), \lambda) d\tau,$$

构造 Picard 序列 $\{\varphi_k(t, \lambda)\}$, 其中 $\varphi_0(t, \lambda) \equiv 0$, 且

$$\varphi_{k+1}(t, \lambda) := \int_0^t f(\tau, \varphi_k(\tau, \lambda), \lambda) d\tau,$$

其中 $(t, \lambda) \in D$.

第二步 由 $f(t, x, \lambda)$ 对 x, λ 有连续偏导数及区域 G 是有界闭集, 类似定理 5.10 证明的第一步, 可以证明 $f(t, x, \lambda)$ 在 G 上对 x, λ 是 Lipschitz 的. 根据定理 5.9, 序列 $\{\varphi_k(t, \lambda)\}$ 对 $(t, \lambda) \in D$ 一致地收敛. 进而,

$$\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\lambda}) := \lim_{k \rightarrow \infty} \boldsymbol{\varphi}_k(t, \boldsymbol{\lambda})$$

是初值问题 (5.37) 的唯一解并且是一个连续函数.

第三步 欲证 $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\lambda})$ 对 $\boldsymbol{\lambda}$ 有连续偏导数, 只需要补充证明序列 $\left\{\frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda}\right\}$ 一致

收敛. 由 (5.38) 可以归纳地证明: $\varphi_k(t, \lambda)$ 对 $(t, \lambda) \in D$ 连续可微且满足

$$\frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial \lambda} = \int_0^t \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, \varphi_k, \lambda) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\tau, \varphi_k, \lambda) \right\} d\tau. \quad (5.41)$$

由 Cauchy 收敛基本定理, 我们只需要证明, 对任意给定的 $s = 1, 2, \dots$, 如下定义的序列

$$v_{k,s} := \left| \frac{\partial \varphi_{k+s}}{\partial \lambda} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda} \right| \quad (5.42)$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时对 $(t, \lambda) \in D$ 一致地趋于 0.

第四步 由于 G 是有界闭集且 $\frac{\partial f}{\partial \lambda}, \frac{\partial f}{\partial x}$ 连续, 故存在常数 $M_1 > 0$, 使得在 G 内

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right| \leq M_1, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq M_1. \quad (5.43)$$

注意到

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} \right| \leq \left| \int_0^t \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial \varphi_0}{\partial \lambda} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right| \right\} d\tau \right| \leq M_1 |t|.$$

可归纳地证明

$$\left| \frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda} \right| \leq M_1 |t| + \frac{(M_1 |t|)^2}{2!} + \dots + \frac{(M_1 |t|)^k}{k!}.$$

因此

$$\left| \frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda} \right| \leq \beta := e^{M_1 h}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.44)$$

其中 $(t, \lambda) \in D$, 即 $|t| \leq h$.

进一步, 利用 (5.42) 和 (5.41) 得

$$\begin{aligned} v_{k+1,s} &\leq \left| \int_0^t \left\{ \frac{\partial}{\partial x} f(\tau, \varphi_{k+s}, \lambda) \frac{\partial \varphi_{k+s}}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial x} f(\tau, \varphi_k, \lambda) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda} \right\} d\tau \right| \\ &\quad + \left| \int_0^t \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} f(\tau, \varphi_{k+s}, \lambda) - \frac{\partial}{\partial \lambda} f(\tau, \varphi_k, \lambda) \right\} d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(\tau, \varphi, \lambda) \right| v_{k,s} d\tau + d_{k,s}(t, \lambda), \end{aligned} \quad (5.45)$$

其中

$$\begin{aligned}
d_{k,s}(t, \lambda) &:= \left| \int_0^t \left\{ \frac{\partial}{\partial x} f(\tau, \varphi_{k+s}, \lambda) - \frac{\partial}{\partial x} f(\tau, \varphi, \lambda) \right\} \frac{\partial \varphi_{k+s}}{\partial \lambda} d\tau \right| \\
&+ \left| \int_0^t \left\{ \frac{\partial}{\partial x} f(\tau, \varphi, \lambda) - \frac{\partial}{\partial x} f(\tau, \varphi_k, \lambda) \right\} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda} d\tau \right| \\
&+ \left| \int_0^t \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} f(\tau, \varphi_{k+s}, \lambda) - \frac{\partial}{\partial \lambda} f(\tau, \varphi_k, \lambda) \right\} d\tau \right|.
\end{aligned}$$

注意到 φ 是 $\{\varphi_k\}$ 的极限, 而且 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ 连续, 故

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_{k,s}(t, \lambda) = 0$$

对 $(t, \lambda) \in D$ 和 $s=1, 2, \dots$ 一致地成立. 从而存在序列 $\{\varepsilon_k\}$, 使得 $\varepsilon_k > 0, \varepsilon_k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$, 而且

$$v_{k+1,s} \leq M_1 \left| \int_0^t v_{k,s} d\tau \right| + \varepsilon_k, \quad (5.46)$$

其中我们利用了 (5.45). 由于 $v_{k,s}(t, \lambda)$ 连续而且非负, 由 (5.44) 知 $v_{k,s} \leq 2\beta$. 利用 (5.46) 得

$$v_{k+1,s} \leq 2\beta M_1 |t| + \varepsilon_k.$$

归纳地可以证明

$$v_{k+m,s} \leq 2\beta \frac{(M_1 |t|)^m}{m!} + \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_{k+m-1-j} \frac{(M_1 |t|)^j}{j!}. \quad (5.47)$$

令 $E_k := \sup\{\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \dots\}$. 显然 $\{E_k\}$ 是一个单调递减的序列且趋于 0. 因此从 (5.47) 知道

$$v_{k+m,s} \leq 2\beta \frac{(M_1 |t|)^m}{m!} + e^{M_1 h} E_k. \quad (5.48)$$

易见 (5.48) 式右端两项分别当 $m \rightarrow \infty$ 和 $k \rightarrow \infty$ 时趋于 0. 从而对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得当 $m > N/2, k > N/2$ 时, $v_{k+m,s} \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, 即当 $k > N$ 时, $v_{k,s} < \varepsilon$, 亦即当 $k \rightarrow \infty$ 时 $\{v_{k,s}\}$ 一致趋于 0. 从而完成了第三步的要求.

第五步 由上可知, $\frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda}$ 一致收敛并且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda} = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda},$$

即 φ 对 λ 有连续偏导数. 对等价积分方程求导得到

$$\frac{d}{dt}\varphi(t, \lambda) = f(t, \varphi, \lambda),$$

它在 D 上是连续的. 因此 φ 对 $(t, \lambda) \in D$ 连续可微. 从而证明了定理 5.11. $\square$

当 x, λ 是一维时, 考虑初值问题 (5.35) 的解 $\varphi(t; t_0, x_0, \lambda)$. 根据定理 5.11, 我们有下列结果.

推论 5.5 $z := \frac{\partial \varphi}{\partial t_0}$ 满足初值问题

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(t, \varphi, \lambda) \right) z, \quad z(t_0) = -f(t_0, x_0, \lambda). \quad (5.49)$$

$z := \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$ 满足初值问题

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(t, \varphi, \lambda) \right) z, \quad z(t_0) = 1. \quad (5.50)$$

$z := \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$ 满足初值问题

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(t, \varphi, \lambda) \right) z + \frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \varphi, \lambda), \quad z(t_0) = 0. \quad (5.51)$$

上述三个线性方程 (5.49)、(5.50)、(5.51) 称为初值问题 (5.35) 关于 t_0, x_0, λ 的线性变分方程. 证明是利用初值问题 (5.35) 的等价积分方程来对 t_0, x_0, λ 作相应的求导. 读者可以自己完成推论 5.5 的证明.

例 5.7 设 $x = \varphi(t; t_0, x_0, \mu)$ 是如下带参数 μ 的初值问题:

$$\frac{dx}{dt} = \cos(\mu t x), \quad x(t_0) = x_0$$

的解, 求解初值问题

$$\frac{dz}{dt} = -\mu t z \sin(\mu t \varphi), \quad z(t_0) = -\cos(\mu t_0 x_0),$$

得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_0} = -\cos(\mu t_0 x_0) \exp \left(-\mu \int_{t_0}^t \tau \sin(\mu \tau \varphi(\tau; t_0, x_0, \mu)) d\tau \right).$$

求解初值问题

$$\frac{dz}{dt} = -\mu t z \sin(\mu t \varphi), \quad z(t_0) = 1,$$

得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = \exp \left(-\mu \int_{t_0}^t \tau \sin(\mu \tau \varphi(\tau; t_0, x_0, \mu)) d\tau \right).$$

求解初值问题

$$\frac{dz}{dt} = -\mu t z \sin(\mu t \varphi) - t \varphi \sin(\mu t \varphi), \quad z(t_0) = 0,$$

得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = -\exp(\eta(t, \varphi, \mu)) \int_{t_0}^t \tau \varphi \sin(\mu \tau \varphi) \exp(-\eta(\tau, \varphi, \mu)) d\tau,$$

其中

$$\eta(t, \varphi, \mu) = -\mu \int_{t_0}^t \tau \sin(\mu \tau \varphi) d\tau.$$

因此我们有

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t_0} \right|_{\mu=0} = -1, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \right|_{\mu=0} = 1, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} = 0.$$

习题 5.5

1. 设函数 $f(x, y), g(x, y)$ 在 Oxy 平面上某区域 G 内连续, 且满足 Lipschitz 条件, $(x_0, y_0) \in G$. 证明: $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ 当且仅当方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

在 (x_0, y_0) 的任意邻域内都有时间为任意大的轨道段. 这里我们把方程的解 $(x(t), y(t))$ 看成 Oxy 平面上以 t 为参数的曲线, 称为轨道.

2. 证明推论 5.5.

3. 给定方程

$$\frac{dx}{dt} = \sin(tx),$$

求 $\frac{\partial x}{\partial t_0}(t; t_0, x_0)$ 和 $\frac{\partial x}{\partial x_0}(t; t_0, x_0)$ 在 $t_0=0, x_0=0$ 处的表达式, 并证明若 $\varphi(t, \eta)$ 是方程满足初值条件 $x(0)=\eta$ 的解, 则恒有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(t, \eta) > 0.$$

4. 令

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix},$$

证明初值问题

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

的解 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 满足恒等式

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)}{\partial t_0} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)}{\partial x_i^0} f_i(t_0, \mathbf{x}_0) \equiv 0.$$

§ 5.6 微分方程数值解

在实际应用中常常需要求解如下形式的初值问题:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (5.52)$$

由 Picard 存在唯一性定理, 我们知道, 只要 $f(t, x)$ 连续且关于 x 满足局部 Lipschitz 条件, 初值问题 (5.52) 的解就存在唯一. 但是除了一些特殊形式的方程外, 能够用初等方法求得解析解的初值问题只是极少数, 为了适应科学技术的发展, 研究高精度和高效率的微分方程的数值解变得越来越重要, 特别是现代计算机技术的飞速发展为微分方程的数值计算提供了便利条件.

在本章介绍的 Picard 逐步逼近法和 Euler 折线法实际上就是两种求初值问题 (5.52) 的近似解的数值方法. 但是由于它们具有精度差和收敛速度较慢等缺点, 几乎没有多少实用性. 然而, 它们的思想成为了微分方程数值解技术的基础. 在本节我们将介绍两种常用的方法, 即改进的 Euler 方法和 Runge-Kutta 方法. 有兴趣进一步了解微分方程数值解的读者可参看文献 [13] 的第九章和 [21] 的第七章.

所谓初值问题 (5.52) 的数值解, 是指解 $x(t)$ 在一些离散的点 (称为节点) $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots$ 处的近似值 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$. 这里, 两个相邻节点的距离 $h_k = x_{k+1} - x_k$ 称为步长. 通常我们沿着节点的次序逐步求出 $x_1, x_2, \cdots, x_m$, 再用这些已知的近似值计算下一个 x_{m+1} . 因此, 首先要将初值问题 (5.52) 离散化, 然后再导出计算 x_{m+1} 的递推公式. 如果某种数值方法在计算 x_{m+1} 时只用到了前面一个节点处的近似值 x_m , 我们就称这种数值方法为单步法; 如果某种数值方法在计算 x_{m+1} 时用到了前面 k 个节点处的近似值 $x_{m-k+1}, \cdots, x_m$, 我们就称这种数值方法为 k

步法.

在本节我们假定所有的步长 $h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$ 均为相同的值 h , 因此对任意的 $m \geq 1, t_m = t_0 + mh$. 同时我们假设函数 $f(t, x)$ 充分光滑, 由参考文献[8]知初值问题(5.52)的解具有和 $f(t, x)$ 相同的光滑程度.

根据上面的记号, 在前面第2节介绍的初值问题(5.52)的 Euler 折线的递推公式可写成

$$x_n = x_{n-1} + hf(t_{n-1}, x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots. \quad (5.53)$$

因此只要知道了初始值 x_0 , 就可用(5.53)式逐步算出 $x_1, x_2, \dots, x_m$. (5.53)式就是著名的 **Euler 公式**.

例 5.8 考虑初值问题

$$\frac{dx}{dt} = x + t + 1, \quad x(0) = 0,$$

其中 $t \in [0, 1]$. 它的解析解为 $x(t) = 2e^t - t - 2$. 取 $h = 0.1$, 这里 $t_0 = 0, x_0 = 0$, 由 Euler 公式得递推公式

$$x_n = x_{n-1} + h(x_{n-1} + t_{n-1} + 1).$$

由此可得如下计算结果:

t_n	$x(t_n)$	x_n	$ x(t_n) - x_n $
0.1	0.110 341 836	0.100 000 000	0.010 341 836
0.2	0.242 805 516	0.220 000 000	0.022 805 516
0.3	0.399 717 616	0.362 000 000	0.037 717 616
0.4	0.583 649 396	0.528 200 000	0.055 449 396
0.5	0.797 442 542	0.721 020 000	0.076 422 542
0.6	1.044 237 600	0.943 122 000	0.101 115 600
0.7	1.327 505 414	1.197 434 200	0.130 071 214
0.8	1.651 081 856	1.487 177 620	0.163 904 236
0.9	2.019 206 222	1.815 895 382	0.203 310 840
1.0	2.436 563 656	2.187 484 920	0.249 078 736

其中 $x(t_n)$ 为准确值, x_n 为由 Euler 公式得到的近似值, $|x(t_n) - x_n|$ 为绝对误差.

由例 5.8 可看出 Euler 折线法的精度是很差的. 这点也可从几何直观看出来. 见图 5.9 所示: 假设 x_n 没有误差, 即点 $P_n: (t_n, x_n)$ 在积分曲线上, 则由 Euler 折线法作出的点 $P_{n+1}: (t_{n+1}, x_{n+1})$ 与 P_n 的连线 $P_n P_{n+1}$ 为积分曲线过 P_n 的切线. 可以看出点 P_{n+1} 已明显偏离了积分曲线. 由于每次计算 x_n 时都有这样显著的误差, 而这些误差又会逐步积累, 因此越到后面, 误差会越来越大, 这一点清楚地体

现在例 5.8 的表中.

为了改进 Euler 方法以提高计算的精度, 我们对方程(5.52)的两边从 t_n 到 t_{n+1} 积分, 得

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (5.54)$$

在(5.54)式中, 如果我们用梯形法逼近右边的积分, 即在被积区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 上以由被积函数所表示

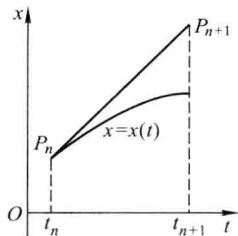


图 5.9 Euler 折线法的误差

的曲线分别与直线 $t=t_n$ 和 $t=t_{n+1}$ 相交所围成的梯形的面积近似代替(5.54)式右边的积分并用 x_n 代替 $x(t_n)$, x_{n+1} 代替 $x(t_{n+1})$, 就得到:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} [f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1})]. \quad (5.55)$$

由此得到一种新的近似方法, 称为**梯形方法**.

梯形方法与 Euler 公式有着本质的区别. Euler 公式(5.53)是关于 x_{n+1} 的一个显式计算公式, 通常称这一类方法为**显式法**, 而梯形公式(5.55)右端含有未知量 x_{n+1} , 它是关于 x_{n+1} 的一个函数方程, 这一类方法通常称为**隐式法**. 函数方程(5.55)可用迭代方法求解. 通常由 Euler 公式(5.53)提供迭代初值, 然后用梯形公式(5.55)反复迭代多次以求得 x_{n+1} 的近似值. 因此我们有递推公式

$$\begin{aligned} x_{n+1}^0 &= x_n + hf(t_n, x_n), \\ x_{n+1}^{k+1} &= x_n + \frac{h}{2} [f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1}^k)] \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

由此可见, 梯形方法的算法是相当复杂的, 在进行迭代运算时, 每次都要重新计算函数值 $f(t, x)$, 而这样的迭代又要反复进行多次, 计算量相当大. 为了简化计算, 我们通常只迭代一两次就转入下一步的计算, 这就极大地减少了计算量. 具体做法是: 先用 Euler 公式(5.53)求得一个初步的近似值 $\bar{x}_{n+1}$, 称为**预测值**, 它的精度可能很差, 再用梯形公式(5.55)得到一个校正值 x_{n+1} . 由此得到下列递推公式:

$$\begin{aligned} \text{预测: } \bar{x}_{n+1} &= x_n + hf(t_n, x_n), \\ \text{校正: } x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{2} [f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, \bar{x}_{n+1})]. \end{aligned} \quad (5.56)$$

我们称这样的预测—校正系统为**改进的 Euler 公式**. 公式(5.56)也可写成下面的形式:

$$\begin{cases} x_p = x_n + hf(t_n, x_n), \\ x_c = x_n + hf(t_{n+1}, x_p), \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} [x_p + x_c]. \end{cases}$$

例 5.9 考虑例 5.8 的初值问题, 仍取 $h=0.1$, 用改进的 Euler 公式得如下计算结果:

t_n	$x(t_n)$	x_n	$ x(t_n) - x_n $
0.1	0.110 341 836	0.110 000 000	0.000 341 836
0.2	0.242 805 516	0.242 050 000	0.000 755 516
0.3	0.399 717 616	0.398 465 250	0.001 252 366
0.4	0.583 649 396	0.581 804 101	0.001 845 295
0.5	0.797 442 542	0.794 893 532	0.002 549 010
0.6	1.044 237 600	1.040 857 353	0.003 380 247
0.7	1.327 505 414	1.323 147 375	0.004 358 039
0.8	1.651 081 856	1.645 577 849	0.005 504 007
0.9	2.019 206 222	2.012 363 523	0.006 842 699
1.0	2.436 563 656	2.428 161 693	0.008 401 963

同样地, 这里 $x(t_n)$ 为准确值, x_n 为近似值. 这个例子表明, 改进的 Euler 方法比 Euler 折线法的精度提高了很多.

改进的 Euler 方法和 Euler 折线法都是单步法. 单步法的一般形式为

$$x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, x_{n+1}, h). \quad (5.57)$$

如果(5.57)右边的函数 Φ 不含 x_{n+1} , 即为显式单步法, 其一般形式为

$$x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h). \quad (5.58)$$

为了讨论显式单步法的精度, 我们引入如下概念.

定义 5.2 设 $x(t)$ 为初值问题(5.52)的准确解, 则称

$$T_{n+1} = x(t_{n+1}) - x(t_n) - h\Phi(t_n, x(t_n), h) \quad (5.59)$$

为显式单步法(5.58)的局部截断误差.

假设在 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的计算中没有误差, 即有 $x_n = x(t_n)$. 则由(5.58),

$$x(t_{n+1}) - x_{n+1} = x(t_{n+1}) - x(t_n) - h\Phi(t_n, x(t_n), h) = T_{n+1}.$$

因此局部截断误差 T_{n+1} 可理解为用显式单步法(5.58)计算一步所产生的误差.

定义 5.3 设 $x(t)$ 为初值问题(5.52)的准确解. 若存在最大整数 p , 使得显式单步法(5.58)的局部截断误差满足

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= x(t_n + h) - x(t_n) - h\Phi(t_n, x(t_n), h) \\ &= \phi(t_n, x(t_n))h^{p+1} + O(h^{p+2}), \end{aligned}$$

则称显式单步法(5.58)具有 p 阶精度, $\phi(t_n, x(t_n))h^{p+1}$ 称为局部截断误差的主项.

对 Euler 公式(5.53), 利用 Taylor 公式, 其局部截断误差可计算如下:

$$\begin{aligned}
 T_{n+1} &= x(t_{n+1}) - x(t_n) - hf(t_n, x(t_n)) \\
 &= x(t_n + h) - x(t_n) - hx'(t_n) \\
 &= \frac{h^2}{2}x''(t_n) + O(h^3).
 \end{aligned}$$

因此 Euler 公式具有一阶精度, 其局部截断误差主项为 $\frac{h^2}{2}x''(t_n)$.

上述讨论对隐式单步法(5.57)也同样适用. 特别地, 对梯形公式(5.55)有

$$\begin{aligned}
 T_{n+1} &= x(t_{n+1}) - x(t_n) - \frac{h}{2}[f(t_n, x(t_n)) + f(t_{n+1}, x(t_{n+1}))] \\
 &= x(t_n + h) - x(t_n) - \frac{h}{2}[x'(t_n) + x'(t_n + h)] \\
 &= -\frac{h^3}{12}x'''(t_n) + O(h^4).
 \end{aligned}$$

因此梯形公式具有二阶精度, 其局部截断误差主项为 $-\frac{h^3}{12}x'''(t_n)$. 同样可证明改进的 Euler 公式(5.56)也具有二阶精度. 因此梯形方法和改进的 Euler 方法的精度都比 Euler 公式的精度高.

由(5.54)式可知, 若要使初值问题(5.52)的近似计算的精度得到提高, 关键在于提高(5.54)式右边的积分的数值计算的精度, 这就必然要增加求积节点. 一般地, (5.54)式右边的积分可用求积公式近似地得到

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t)) dt \approx h \sum_{i=1}^q w_i f(t_n + \lambda_i h, x(t_n + \lambda_i h)), \quad (5.60)$$

其中 w_i, λ_i 为常数. 一般来说, q 越大, 即节点数越多, 精度越高.

由(5.60)式可推导出计算 x_{n+1} 的隐式公式, 为得到便于计算的显式公式, 类似于改进的 Euler 公式(5.56), 可将公式表示为

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + h \sum_{i=1}^q w_i K_i, \\
 K_1 &= f(t_n, x_n), \\
 K_i &= f\left(t_n + \lambda_i h, x_n + h \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j K_j\right) \quad (i = 2, 3, \dots, q).
 \end{aligned} \quad (5.61)$$

其中 μ_j 为常数. 公式(5.61)称为 q 级显式 **Runge-Kutta 方法**, 简称 **R-K 方法**. 当 $q=1$ 时, 即为 Euler 公式(5.53), 而改进的 Euler 公式(5.56)为当 $q=2$ 时的一种显式 Runge-Kutta 方法.

要使公式(5.61)的局部截断误差的阶数 p 提高,就要增加 q 的值.在实际应用中较常用的是如下的四阶 Runge-Kutta 公式:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= f(t_n, x_n), \\
 K_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}K_1\right), \\
 K_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}K_2\right), \\
 K_4 &= f(t_n + h, x_n + hK_3), \\
 x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),
 \end{aligned} \tag{5.62}$$

它具有四阶精度. 公式(5.62)的推导及其局部截断误差的阶数的证明都相当复杂,这里从略.

例 5.10 仍考虑例 5.8 的初值问题,仍取 $h=0.1$,用四阶 Runge-Kutta 公式(5.62)得如下计算结果:

t_n	$x(t_n)$	x_n	$ x(t_n) - x_n $
0.1	0.110 341 836	0.110 341 667	1.693×10^{-7}
0.2	0.242 805 516	0.242 805 142	3.742×10^{-7}
0.3	0.399 717 616	0.399 716 994	6.217×10^{-7}
0.4	0.583 649 396	0.583 648 480	9.157×10^{-7}
0.5	0.797 442 542	0.797 441 277	1.265×10^{-6}
0.6	1.044 237 600	1.044 235 924	1.676×10^{-6}
0.7	1.327 505 414	1.327 503 253	2.161×10^{-6}
0.8	1.651 081 856	1.651 079 126	2.730×10^{-6}
0.9	2.019 206 222	2.019 202 827	3.395×10^{-6}
1.0	2.436 563 656	2.436 559 488	4.168×10^{-6}

同样地,这里 $x(t_n)$ 为准确值, x_n 为近似值.

比较例 5.8, 例 5.9 和例 5.10 的结果,可看出四阶 Runge-Kutta 公式的精度比改进的 Euler 方法和 Euler 折线法的精度都要高得多,但同时它的计算量也要大得多,不过我们可通过放大步长的方法减少计算量.

例 5.11 对例 5.8 的初值问题,取 $h=0.2$,用四阶 Runge-Kutta 公式(5.62)

得如下计算结果:

t_n	$x(t_n)$	x_n	$ x(t_n) - x_n $
0.2	0.242 805 516	0.242 800 000	$5.516 0 \times 10^{-6}$
0.4	0.583 649 396	0.583 635 920	$1.347 6 \times 10^{-5}$
0.6	1.044 237 600	1.044 212 913	$2.468 7 \times 10^{-5}$
0.8	1.651 081 856	1.651 041 652	$4.020 4 \times 10^{-5}$
1.0	2.436 563 656	2.436 502 274	$6.138 2 \times 10^{-5}$

在例 5.11 中,步长被放大了一倍,其计算量和例 5.9 所用的改进的 Euler 方法差不多,但精度却比改进的 Euler 方法高得多.

值得注意的是四阶 Runge-Kutta 公式的精度虽然很高,但它要求初值问题 (5.52) 的解具有较好的光滑性,如果 (5.52) 的解光滑性较差,用四阶 Runge-Kutta 公式求得的近似解的精度可能反而不如改进的 Euler 方法. 因此我们需要根据具体问题选择适当的方法.

习题 5.6

1. 证明改进的 Euler 公式具有二阶精度.
2. 选择你最熟悉的算法语言编写程序,分别用 Euler 折线法、改进的 Euler 方法和四阶 Runge-Kutta 公式求解初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

取步长 $h=0.1$, 用所编程序求解初值问题

$$\frac{dx}{dt} = x + \sin t, \quad x(0) = \frac{1}{2},$$

其中 $t \in [0, 1]$, 并与它的解析解 $x(t) = e^t - \frac{1}{2}(\sin t + \cos t)$ 进行比较.

3. 取步长 $h=0.1$, 用四阶 Runge-Kutta 公式计算积分

$$\int_0^1 e^{-t^2} dt$$

的近似值.

第六章 定性理论初步

有些人,甚至我们自己的人,都认为外国数学家使用的方法虽然不够精确,并且也许是几何化的方法,但却更清楚了.

——伯克莱 (George Berkeley 1685—1753)

我们研究微分方程的目的主要是求方程的解和确定解的属性,即对方程进行定量和定性研究. 由于绝大多数的方程不能通过初等方法求得解析解,因此直接通过微分方程本身的结构而不是借助于微分方程的求解来研究解的属性及微分方程所定义的积分曲线的分布就显得特别重要. 随着计算机技术的日新月异,使得对微分方程的高效率、高精度的近似解法的研究飞速发展,为微分方程的定量研究提供了有力工具. 然而对微分方程的定性研究仍是不可或缺的. 一方面,微分方程的定性结果往往成为定量数值计算的可行性、可靠性的有力保证并为之提供新的思想方法;另一方面,在系统对微小误差都十分敏感的情况下,往往使用定性理论的分析办法更为有效.



图 6.1 H. Poincaré(1854—1912)

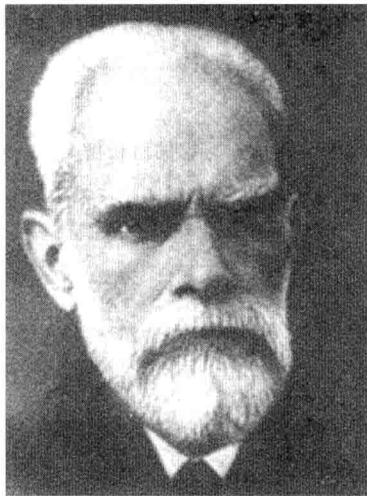


图 6.2 A. M. Lyapunov(1857—1918)

微分方程定性理论是由法国数学家 Poincaré(1854—1912) 在 19 世纪 80 年

代所开创的. 俄罗斯数学家 Lyapunov (1857—1918) 在同一时期对微分方程的解的稳定性作了深入的研究, 是微分方程定性理论的另一开拓者. 此后美国数学家 Birkhoff (1884—1944) 继承和发展了定性理论并提出了动力系统的概念. 自 20 世纪 30 年代以来, 动力系统理论有了长足的发展, 目前已成为一个重要的数学分支, 并广泛渗透到了自然科学、工程技术和社会科学各个领域.

§ 6.1 动力系统概念

在上一章研究的微分方程组中, 如果 $f(t, x)$ 只和 x 有关, 即

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (6.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$, 则称该微分方程组为自治微分方程组或自治系统. 从物理上, 可以把自治系统直观地理解为物体在空间 $\mathbb{R}^n$ 中运动, 而在此空间中的每一点 x 处的速度 $f(x)$ 是已经被规定好的且与时间无关. 我们把物体运动状态 (位置 x) 所在的空间 $\mathbb{R}^n$ 称为相空间, 把这种空间以及在其上面每一点处都定义的速度整体称为一个向量场, 把物体在这个向量场支配下走出的曲线称为轨道.

我们知道, 方程组 (6.1) 在满足解的存在唯一性条件下对任何初值条件 $x(t_0) = x_0$ 都确定唯一的一条解曲线 $x = \varphi(t; t_0, x_0)$, 即在 tx 空间 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 上的积分曲线. 容易看出, 它相应地在相空间上确定了一条轨道, 而这条轨道是该积分曲线沿 t 轴方向的投影. 因此物体从不同的点出发可能会有不同的轨道.

我们的定性研究不只是研究某一个初值条件下方程有什么样的解, 而是要研究在相空间上各运动轨道是怎样的几何状况. 显然我们不可能逐个单一地研究每一条轨道, 事实上也没有必要那么做. 我们要研究一些特殊而重要的轨道 (如平衡点、闭轨等) 并研究它们附近的轨道状况 (尤其是 $t \rightarrow \pm\infty$ 时的趋势), 进而研究在它们之间轨道会发生的事情, 最终给出全局的轨道结构分布. 这样的结果可以很好地指导实际应用. 点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 称为平衡点, 如果从该点出发的轨道一直驻留在该点. 这时方程组 (6.1) 关于初值条件 $x(t_0) = x_0$ 的解是一个常值函数 $x(t) \equiv x_0$ 或者说有一个定常解, 因此在该点处向量场定义的速度 $f(x_0) = 0$. 物理上认为物体在该点是静止的或者说是处于平衡态的. 正是由于速度为零给向量场的轨道带来了奇异性质, 我们也把平衡点称为奇点. 如果一个非定常的解 $\varphi(t; t_0, x_0)$ 是 t 的周期函数, 那么它在相空间描述的是一条闭曲线. 我们称之为闭轨或周期轨. 它在物理上描述一个周期运动.

自治系统 (6.1) 的解具有以下基本性质, 这些性质是非自治系统所不具备的.

定理 6.1 设自治系统(6.1)满足解的存在唯一性条件并且解的存在区间是 $(-\infty, +\infty)$. 则方程的解 $\varphi(t; t_0, x_0)$ 具有

(i) 积分曲线的平移不变性: 对任意常数 τ , 函数 $\varphi(t+\tau; t_0, x_0)$ 也是(6.1)的解. 进而 $\varphi(t-t_0; 0, x_0) \equiv \varphi(t; t_0, x_0)$, 因此初值取在 $t_0=0$ 的所有解 $\varphi(t, x_0) := \varphi(t; 0, x_0)$ 的性质代表了方程组(6.1)的一切解的性质.

(ii) 群性质: $\varphi(0, x_0) = x_0, \varphi(t, \varphi(s, x_0)) = \varphi(t+s, x_0), \forall t, s \in \mathbb{R}$.

(iii) 轨道唯一性: 通过相空间的任意一点只有方程组(6.1)唯一的一条轨道.

证明 性质(i)的前半部分可以直接验证. 从此知道, 对任意的 (t_0, x_0) , 函数 $x = \varphi(t-t_0; 0, x_0)$ 也是(6.1)的解, 而且与解 $\varphi(t; t_0, x_0)$ 满足同样的初值条件 $x(t_0) = x_0$. 由解的唯一性, 必有

$$\varphi(t; t_0, x_0) \equiv \varphi(t-t_0; 0, x_0).$$

由性质(i), 显然 $\varphi(t, \varphi(s, x_0))$ 和 $\varphi(t+s, x_0)$ 都是系统(6.1)的解, 并且由定义, 当 $t=0$ 时, $\varphi(0, \varphi(s, x_0)) = \varphi(s, x_0)$. 故这两个解满足同样的初值条件. 由解的唯一性, $\varphi(t, \varphi(s, x_0)) \equiv \varphi(t+s, x_0)$. 因此性质(ii)得证.

关于性质(iii), 若系统(6.1)在时刻 $t=t_0$ 和 $t=\tilde{t}_0$ 分别过相空间中点 x_0 和 $\tilde{x}_0$ 的轨道相交, 设它们所对应的系统(6.1)的解分别为 $\varphi(t-t_0, x_0)$ 和 $\varphi(t-\tilde{t}_0, \tilde{x}_0)$, 则存在 t_1, t_2 , 使得 $\varphi(t_1-t_0, x_0) = \varphi(t_2-\tilde{t}_0, \tilde{x}_0)$. 由(ii)的群性质得

$$\begin{aligned} \varphi(t-t_0, x_0) &= \varphi(t-t_1, \varphi(t_1-t_0, x_0)) \\ &= \varphi(t-t_1, \varphi(t_2-\tilde{t}_0, \tilde{x}_0)) = \varphi(t-t_1+t_2-\tilde{t}_0, \tilde{x}_0). \end{aligned}$$

这表明解 $\varphi(t-t_0, x_0)$ 和 $\varphi(t-\tilde{t}_0, \tilde{x}_0)$ 在相空间由相同的几何点组成, 即它们的轨道重合. 因此系统(6.1)的两条轨道要么完全重合, 要么永不相交. $\square$

在上述定理中我们假设了解的存在区间是 $(-\infty, +\infty)$. 如果方程组(6.1)不满足这个性质, 我们可以另外考虑自治系统

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(x)}{\sqrt{1 + \|f(x)\|^2}}. \quad (6.2)$$

我们可以证明: 方程组(6.2)与(6.1)在相空间上有相同的轨道, 而根据第五章的延拓定理, 方程组(6.2)的解的存在区间是 $(-\infty, +\infty)$. 因此当我们研究(6.1)在相空间上的轨道结构时, 不妨设它的解的存在区间都是 $(-\infty, +\infty)$.

事实上, 设 $x = \psi(t)$ 是(6.2)的满足初值条件 $x(0) = x_0$ 的解, 令

$$s = w(t) := \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{1 + \|f(\psi(\tau))\|^2}}.$$

由于 $w'(t) > 0$, 因此 $s = w(t)$ 有光滑的反函数 $t = w^{-1}(s)$. 设 $\phi(s) = \psi(w^{-1}(s))$, 则由 (6.2) 可推出

$$\frac{d\phi}{ds} = f(\phi(s)), \quad \phi(0) = x_0.$$

因此如果我们把方程组 (6.1) 的自变量符号改为 s , 则 $x = \phi(s)$ 是 (6.1) 的满足初值条件 $x(0) = x_0$ 的解, 从几何上看, 它和 $x = \psi(t)$ 在相空间上代表同一条曲线, 只是参数表示不同而已. 这就证明了 (6.2) 与 (6.1) 在相空间上有相同的轨道.



图 6.3 G. D. Birkhoff (1884—1944) 提出了动力系统的概念

我们将定理 6.1 给出的解的性质归纳起来. 简记 $\varphi^t(x) := \varphi(t, x)$. 则 $\{\varphi^t : t \in \mathbb{R}\}$ 构成了相空间 $\mathbb{R}^n$ 上的一个单参数变换族, 满足

- (1) $\varphi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是连续的;
- (2) φ^0 为恒同变换, 即 $\varphi^0(x) = x$;
- (3) $\varphi^t \circ \varphi^s = \varphi^{t+s}$.

一般地, 我们将满足上述三条的单参数连续变换族 $\{\varphi^t : t \in \mathbb{R}\}$ 称为一个动力系统或流. 特别地, 由于 t 在 $\mathbb{R}$ 中连续取值, 有时我们称之为连续动力系统. 当 t 取值在 $\mathbb{Z}$ 时, 称 $\{\varphi^t : t \in \mathbb{Z}\}$ 为离散动力系统.

对于非自治系统

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (6.3)$$

我们显然没有上述的好性质. 然而, 如果我们在高一维空间来看, 这个系统仍然可以定义一个动力系统. 事实上, 在 (x, θ) 的相空间 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 上考虑如下与 (6.3)

等价的系统:

$$\frac{dx}{dt} = f(\theta, x), \quad \frac{d\theta}{dt} = 1. \quad (6.4)$$

它显然是一个自治系统,称为(6.3)的扭扩系统(suspension system).

§ 6.2 Lyapunov 稳定性

在实际应用中遇到的问题大多数都是非线性的. 为了便于研究,人们常常将模型理想化,忽略掉某些次要因素. 这样的简化不是随意的,必须保证简化后的结果仍然能够抓住所考虑问题的本质特征,而不至于严重歪曲. 另一方面,在实际应用中,用微分方程描述的实际问题,比如物质的运动,其特解密切依赖于初始值,而初始值往往是由实验测定的,不可避免地带有误差. 因此人们要问:在什么条件下,这样的误差不会严重影响微分方程的解,以至于导致“差之毫厘,失之千里”的结果? 这就是我们要考虑的稳定性问题.

在第五章讨论的解对初值的连续依赖性并没有真正回答上述问题,因为在那里我们只考虑了自变量在有限闭区间上的情况. 具体地说,设 $f(t, x)$ 对 x 在区域 $G \subset \mathbb{R}^n$ 内和对 $t \in (-\infty, \infty)$ 连续且关于 x 满足局部 Lipschitz 条件,并设 $x = \varphi(t)$ 是微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (6.5)$$

的特解,在有限闭区间 $[a, b]$ 上有定义且 $t_0 \in [a, b]$. 则当 x_0 充分靠近 $\varphi(t_0)$ 时,方程组(6.5)满足初值条件 $x(t_0) = x_0$ 的解 $x = x(t; t_0, x_0)$ 在区间 $[a, b]$ 上也有定义并且一致地有

$$\lim_{x_0 \rightarrow \varphi(t_0)} x(t; t_0, x_0) = \varphi(t).$$

即对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 必能找到 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得只要 $\|x_0 - \varphi(t_0)\| < \delta$, 就有

$$\|x(t; t_0, x_0) - \varphi(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in [a, b].$$

然而,这并不能保证系统关于 t 的长远趋势. 当把自变量 t 扩展到无限区间上,上述结论就不一定成立了.

例如一阶方程

$$\frac{dx}{dt} = 1 - x^2 \quad (6.6)$$

有两个定常解 $x_1(t) \equiv -1$ 和 $x_2(t) \equiv 1$. 显然当 $x_0 \neq \pm 1$ 时(6.6)关于初值条件

$x(0) = x_0$ 的解为

$$x(t) = \frac{(1+x_0)e^{2t} - (1-x_0)}{(1+x_0)e^{2t} + (1-x_0)}.$$

不难看出当 $x_0 > 1$ 或 $x_0 \in (-1, 1)$ 时初值问题的解都渐近地趋于特解 $x_2(t) \equiv 1$; 而当 $x_0 < -1$ 或 $x_0 \in (-1, 1)$ 时初值问题的解都越来越远离特解 $x_1(t) \equiv -1$, 并以水平直线 $x = -1$ 为渐近线, 见图 6.4. 粗略地说, 一个微分方程的特解, 如果其初始值发生了微小的偏差, 所得到的解与该特解的偏差还能保持在很小的范围内, 则这样的特解被称为是稳定的, 否则称为不稳定的. 在这样的意义下, 特解 $x_2(t) \equiv 1$ 是稳定的而 $x_1(t) \equiv -1$ 是不稳定的. 通常, 不稳定的特解不能作为我们设计的依据, 而稳定的特解才是我们最感兴趣的.

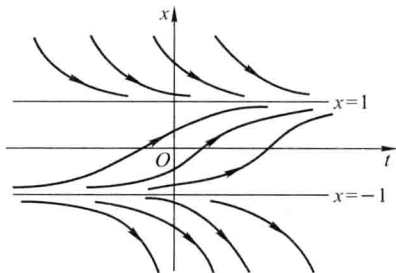


图 6.4 方程 (6.6) 的稳定特解 $x_2(t) \equiv 1$ 和不稳定特解 $x_1(t) \equiv -1$

设 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 是微分方程组 (6.5) 的一个特解, 它在区间 $[t_0, \infty)$ 上有定义. 如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 必能找到 $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$, 使得只要

$$\|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\varphi}(t_0)\| < \delta,$$

方程组 (6.5) 满足初值条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 的解 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 就在区间 $[t_0, \infty)$ 上有定义, 并且满足

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) - \boldsymbol{\varphi}(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0,$$

我们就称这个解是 (Lyapunov 意义下) 稳定的, 见图 6.5. 进而, 如果 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 是 Lyapunov 稳定的, 而且存在常数 $\delta_0 > 0$, 使得当 $\|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\varphi}(t_0)\| < \delta_0$ 时有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) - \boldsymbol{\varphi}(t)\| = 0,$$

则称解 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 是 (Lyapunov 意义下) 渐近稳定的, 见图 6.6. 显然, 渐近稳定包含稳定性和吸引性, 其中 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)$ 的 δ_0 -邻域就是一个吸引区域. 如果 $\delta_0 = \infty$, 则称解 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 是全局渐近稳定的.

如果解 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 不是稳定的, 即存在常数 $\varepsilon > 0$, 使得对任意给定的 $\delta > 0$, 都有一个 $\mathbf{x}_0$ 满足 $\|\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\varphi}(t_0)\| < \delta$, 使得对方程组 (6.5) 满足初值条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 的解 $\mathbf{x}$

$=\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$, 存在一个 $t_1 > t_0$, 使得

$$\|\mathbf{x}(t_1; t_0, \mathbf{x}_0) - \boldsymbol{\varphi}(t_1)\| = \varepsilon,$$

则称解 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 是 (Lyapunov 意义下) 不稳定的, 见图 6.7.

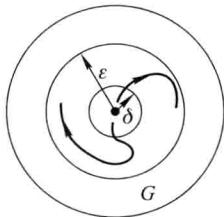


图 6.5 稳定的零解

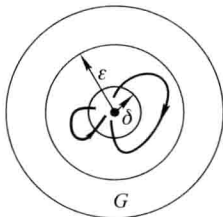


图 6.6 渐近稳定的零解

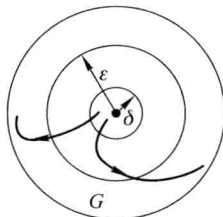


图 6.7 不稳定的零解

由上述定义, 方程 (6.6) 的特解 $x_2(t) \equiv 1$ 是渐近稳定的, $x_1(t) \equiv -1$ 是不稳定的.

下面我们针对微分方程组 (6.5) 的零解来给出判断稳定性的方法. 微分方程组 (6.5) 的任一特解 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 的稳定性问题都可归结为形如 (6.5) 的另一方程组零解的稳定性问题. 这是因为通过变换

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\varphi}(t)$$

可将微分方程组 (6.5) 变换为

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \tilde{\mathbf{f}}(t, \mathbf{z}) := \mathbf{f}(t, \mathbf{z} + \boldsymbol{\varphi}(t)) - \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\varphi}(t)). \quad (6.7)$$

显然 $\tilde{\mathbf{f}}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$. 这样 (6.5) 的特解 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 就变成了 (6.7) 的零解 $\mathbf{z}(t) \equiv \mathbf{0}$.

判断稳定性的基本方法是研究方程的线性近似. 在微分方程组 (6.5) 中假设 $\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, 并对 $\mathbf{x}$ 有二阶连续偏导数. 显然 (6.5) 有零解 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 由于 $\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, 因此可将函数 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 按 $\mathbf{x}$ 进行 Taylor 展开, 从而方程组 (6.5) 可写成如下形式:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{R}(t, \mathbf{x}), \quad (6.8)$$

其中 $\mathbf{A}(t)$ 是一个对 $t \geq t_0$ 连续的 $n \times n$ 阶矩阵函数, n 阶向量函数 $\mathbf{R}(t, \mathbf{x})$ 在区域 $G = \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq t_0, \|\mathbf{x}\| \leq M\}$ 上连续、关于 $\mathbf{x}$ 满足局部 Lipschitz 条件, 并且进一步假设对 $t \geq t_0$ 一致地满足 $\mathbf{R}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ 和

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{R}(t, \mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0. \quad (6.9)$$

为了研究零解的稳定性, 只须考察当 $\|\mathbf{x}_0\|$ 较小时方程组 (6.8) 满足初值条件

$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 的解. 因此, 一个自然的想法是考虑在什么情形下 (6.8) 的线性部分

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (6.10)$$

的零解稳定性能够决定 (6.8) 的零解稳定性. (6.10) 称为 (6.8) 的关于零解的线性变分方程组或线性近似方程组. 为此, 我们要先讨论线性方程组 (6.10) 零解的稳定性.

引理 6.1 (i) 线性方程组 (6.10) 的零解是稳定的, 当且仅当 (6.10) 的所有解当 $t \geq t_0$ 时都是有界的, 即存在常数 $K > 0$, 使得

$$\|\mathbf{X}(t)\| \leq K, \forall t \geq t_0,$$

其中 $\mathbf{X}(t)$ 是 (6.10) 满足 $\mathbf{X}(t_0)$ 为单位矩阵 $\mathbf{I}$ 的基本解矩阵.

(ii) 线性方程组 (6.10) 的零解是渐近稳定的, 当且仅当

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{X}(t)\| = 0.$$

证明 (i) 和 (ii) 的充分性是不证自明的. (ii) 的必要性也是明显的, 留给读者去练习. 为证明 (i) 的必要性, 设线性方程组 (6.10) 的零解是稳定的, 即对某给定的常数 $\varepsilon_0 > 0$, 都能找到 $\delta_0 > 0$, 使得方程组 (6.10) 的解 $\mathbf{x}(t)$ 只要 $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta_0$ 成立, 则均有

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon_0, \forall t \geq t_0.$$

对任给的初值条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 考虑相应的解 $\mathbf{x}(t)$. 易见 $\mathbf{y}(t) := \frac{\delta_0}{2\|\mathbf{x}_0\|}\mathbf{x}(t)$ 仍是齐次线性方程组 (6.10) 的解, 而且满足 $\|\mathbf{y}(t_0)\| < \delta_0$. 因此 $\|\mathbf{X}(t)\mathbf{y}(t_0)\| < \varepsilon_0$, 亦即

$$\|\mathbf{X}(t)\mathbf{x}_0\| < \frac{2\varepsilon_0}{\delta_0}\|\mathbf{x}_0\|.$$

因此, 方程组 (6.10) 的每个解都有界. 特别是分别选 $\mathbf{x}_0$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ 中的向量时, 其中 $\mathbf{e}_j$ 是第 j 个分量为 1 的单位向量, 可以得到 $\|\mathbf{X}(t)\mathbf{e}_j\| < \frac{2\varepsilon_0}{\delta_0}$. 从而 $\mathbf{X}(t)$ 的每个列向量有界, 因此 $\mathbf{X}(t)$ 有界. $\square$

由引理 6.1 和第四章关于常数系数齐次线性方程组的解结构, 我们可以对 $\mathbf{A}(t)$ 是常矩阵的情形获得以下结论.

定理 6.2 设矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 为常矩阵 $\mathbf{A}$, 则

(i) 方程组 (6.10) 的零解是渐近稳定的, 当且仅当 $\mathbf{A}$ 的全部特征根的实部都是负数.

(ii) 方程组 (6.10) 的零解是稳定的, 当且仅当 $\mathbf{A}$ 的全部特征根的实部都是

非正的,且实部为零的特征根所对应的 Jordan 块都是一阶的.

(iii) 方程组(6.10)的零解是不稳定的,当且仅当 A 的特征根中至少有一个实部为正,或至少有一个特征根实部为零且其对应的 Jordan 块的阶数大于 1.

我们略去该定理的证明过程,但提请读者注意:方程组(6.10)的基本解矩阵由形如 $e^{\lambda_j t} P(t)$ 的列向量组成,其中

$$P(t) = r_0 + tr_1 + \cdots + \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!} r_{n_j-1}.$$

如果实部 $\Re \lambda_j < 0$,反复运用洛必达法则(L'Hospital rule)可推出

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_j t} P(t) = 0.$$

如果实部 $\Re \lambda_j = 0$,则 $e^{\lambda_j t} P(t)$ 有界当且仅当 $P(t)$ 有界,亦即,有界当且仅当 $P(t)$ 中 $r_1 = \cdots = r_{n_j-1} = 0$.

现在回到前面的问题:方程组(6.8)的零解的稳定性是否可由方程组(6.10)的零解的稳定性来确定呢?我们有下面的定理.

定理 6.3 若矩阵 $A(t)$ 是常矩阵 A 且条件(6.9)满足. 则

(i) 当 A 的全部特征根的实部都是负数时,方程组(6.8)的零解是渐近稳定的.

(ii) 当 A 的特征根中至少有一个实部为正时,方程组(6.8)的零解是不稳定的.

证明 我们只证(i)的结论. 取 x_0 使得 $\|x_0\| < M$, 则方程组(6.8)满足初值条件 $x(t_0) = x_0$ 的解 $x(t) = \varphi(t)$ 对 $t \geq t_0$ 且充分靠近 t_0 的 t 是存在的. 设其最大存在区间为 $[t_0, t_1)$. 由常数变易公式得

$$\varphi(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} R(s, \varphi(s)) ds. \quad (6.11)$$

由于 A 的特征根实部都是负的,可以证明存在常数 $K > 0, \rho > 0$, 使得

$$\|e^{(t-t_0)A}\| \leq K e^{-\rho(t-t_0)}, \quad t \geq t_0. \quad (6.12)$$

事实上,存在可逆矩阵 P , 使得 $PAP^{-1} = J$ 成为 Jordan 标准形. 为简单起见,不妨像第四章一样设 J 为一个 Jordan 块, 即 $J = \lambda_j I + N$, 其中 λ_j 是该 Jordan 块 J 对应的特征根而 N 是幂零矩阵. 读者不难由第四章的知识证明: 存在常数 $K_j > 0, 0 < \delta_j < -\Re \lambda_j$, 使得对 $t \geq t_0$ 有

$$\begin{aligned} \|e^{(t-t_0)A}\| &\leq \|P\| \|P^{-1}\| \|e^{(t-t_0)J}\| \\ &\leq K_j e^{(\Re \lambda_j + \delta_j)(t-t_0)}. \end{aligned}$$

这样便证明了(6.12).

另一方面,对上述取定的 K 和 ρ ,任取正的常数 $\alpha < \frac{\rho}{2K}$. 由(6.9),可以找到(或调整)上面考虑的常数 $M > 0$,使得当 $\|x\| < M$ 时有

$$\|R(t, x)\| \leq \alpha \|x\|. \quad (6.13)$$

由连续性,不妨用前面设定的区间 $[t_0, t_1)$ 表示满足 $\|\varphi(t)\| < M$ ($\forall t \in [t_0, t_1)$) 的极大区间. 由(6.11), (6.12) 和(6.13)知, $\forall t \in [t_0, t_1)$ 有

$$\|\varphi(t)\| \leq K\|x_0\|e^{-\rho(t-t_0)} + K\alpha \int_{t_0}^t e^{-\rho(t-s)} \|\varphi(s)\| ds,$$

亦即

$$e^{\rho(t-t_0)} \|\varphi(t)\| \leq K\|x_0\| + K\alpha \int_{t_0}^t e^{\rho(s-t_0)} \|\varphi(s)\| ds.$$

用第五章给出的 Gronwall 不等式,

$$e^{\rho(t-t_0)} \|\varphi(t)\| \leq K\|x_0\| e^{K\alpha(t-t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, t_1).$$

按 α 的定义,上式等价于

$$\|\varphi(t)\| \leq K\|x_0\| e^{-(\rho-K\alpha)(t-t_0)} < K\|x_0\| e^{-\frac{\rho}{2}(t-t_0)}. \quad (6.14)$$

兹取正数 $\sigma < \frac{M}{K}$ 并考虑满足 $\|x_0\| < \sigma$ 的初值 x_0 . 由(6.14)知, $\|\varphi(t)\| \leq K\sigma < M, \forall t \in [t_0, t_1)$. 由解的延拓定理,必有 $t_1 = +\infty$. 由(6.14), $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$. 因此方程组(6.8)的零解是渐近稳定的. $\square$

由定理 6.3 的结论(i)可知为了判定方程组(6.8)的零解是否渐近稳定,需要确定矩阵 A 的全部特征根的实部是否全为负数,当矩阵 A 的阶数较大时,直接求出 A 的全部特征根的精确值是很困难,甚至是不可能的,这时可用下面的 Routh-Hurwitz 定理来判定矩阵 A 的全部特征根的实部是否全为负数:

定理 6.4 (Routh-Hurwitz 定理) 实系数多项式

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

的全部根的实部均为负数的充要条件是下面的 Routh-Hurwitz 矩阵

$$D_n := \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & a_{2n-5} & a_{2n-6} & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

的全部主子式为正,即

$$\Delta_1 := a_1 > 0, \quad \Delta_2 := \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \\ \Delta_3 := \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \cdots, \quad \Delta_n := \det D_n > 0,$$

其中当 $k > n$ 时 $a_k = 0$.

Routh-Hurwitz 定理的证明可见参考文献[6].

例 6.1 考虑单摆系统,即系于一根长为 l ,一端固定于 O 点的线上,质量为 m 的质点 M 在重力作用下在垂直于地面的平面上沿圆周运动. 假设摆是在一个黏性介质中运动,沿着摆的运动方向有一个与切向速度成正比的阻力,设阻力系数为 μ . 取逆时针运动的方向作为摆与铅垂线所成的夹角 φ 的正方向. 读者不难由 Newton 运动定律推出摆的运动方程为

$$ml \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi - \mu l \frac{d\varphi}{dt},$$

即

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \varphi - \frac{\mu}{m} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (6.15)$$

令 $x = \varphi, y = \frac{d\varphi}{dt}$, 则方程(6.15)化为

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{l} \sin x - \frac{\mu}{m} y. \quad (6.16)$$

显然(6.16)有零解,相应的线性近似方程组为

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{l} x - \frac{\mu}{m} y. \quad (6.17)$$

读者可验证(6.16)的非线性项满足条件(6.9). 不难求出(6.17)的系数矩阵的两个特征根 λ_1, λ_2 为

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\mu}{2m} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\mu}{m}\right)^2 - \frac{4g}{l}}.$$

如果 $\mu > 0$, 即摆有阻力, 则当 $\left(\frac{\mu}{m}\right)^2 - \frac{4g}{l} > 0$ 时, λ_1, λ_2 为相异负实数; 当 $\left(\frac{\mu}{m}\right)^2 - \frac{4g}{l} = 0$ 时, λ_1, λ_2 为相等负实数; 当 $\left(\frac{\mu}{m}\right)^2 - \frac{4g}{l} < 0$ 时, λ_1, λ_2 为有负实部的共轭复数.

在这三种情况下由定理 6.3 知(6.16)的零解都是渐近稳定的.

如果 $\mu = 0$, 即摆没有阻力, 则 λ_1, λ_2 为一对纯虚根. 这时零解的稳定性不能由其线性近似方程的零解稳定性来确定. 我们称之为临界情形并用下节的 Lyapunov 直接法来判定.

对方程组(6.16), 除了零解以外, 还有无穷多个定常解:

$$x(t) \equiv n\pi, \quad y(t) \equiv 0 \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

由于 $\sin x$ 的周期性, 我们只需分析定常解: $x(t) \equiv \pi, y(t) \equiv 0$. 做变换 $u = x - \pi, v = y$, 方程组(6.16)变为

$$\frac{du}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{g}{l} \sin u - \frac{\mu}{m} v. \quad (6.18)$$

它的线性近似方程组为

$$\frac{du}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{g}{l} u - \frac{\mu}{m} v.$$

其系数矩阵的特征根为

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\mu}{2m} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\mu}{m}\right)^2 + \frac{4g}{l}}.$$

这是一对异号实根, 因此由定理 6.3 知(6.18)的零解是不稳定的, 从而(6.16)的特解 $x(t) \equiv \pi, y(t) \equiv 0$ 不稳定.

习题 6.2

1. 分别求方程

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3$$

在 $\mu = -1, \mu = 0, \mu = 1$ 三种情况下的通解并画出积分曲线在 Otx 平面上的分布状况, 由此讨论各种情况下每个定常解的稳定性.

2. 设函数 $f(t, x)$ 在区域 $G = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2; t \geq 0, |x| \leq H\}$ 上连续, $f(t, 0) \equiv 0$, 方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

满足解的存在唯一性条件,其零解稳定,并且存在 $x_1 > 0$ 和 $x_2 < 0$,使得分别由初值条件 $x(0) = x_1$ 和 $x(0) = x_2$ 确定的解当 $t \rightarrow +\infty$ 时都趋于零. 证明方程的零解渐近稳定.

3. 设 $\mu > 0, b > 0, p, q$ 均为正整数且 $q \geq 2$. 给定方程组

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \mu x - x^p y^q, \quad \frac{dy}{dt} = b(x^p y^q - y),$$

作变量变换,使其定常解 $(x(t), y(t)) = \left(\frac{1}{\mu}, 0\right)$ 对应于新方程组的零解并讨论其稳定性.

4. 考虑下列两个方程组:

$$\frac{dx}{dt} = (A + B(t))x, \quad (6.19)$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (6.20)$$

其中 A 为常数值矩阵, $B(t)$ 为 $t \geq 0$ 上的连续矩阵值函数,且满足条件

$$\int_0^{+\infty} \|B(t)\| dt < \infty,$$

证明若 (6.20) 的所有解当 $t \geq 0$ 时有界,则 (6.19) 的所有解当 $t \geq 0$ 时也有界.

5. 设 $\mu > 0$, 讨论 van der Pol 方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0$$

的零解的稳定性.

6. 设 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ 都是正数, $x \geq 0, y \geq 0$, 求出方程组

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha x + \beta x^2 - \gamma xy, \quad \frac{dy}{dt} = -\delta y + \varepsilon xy$$

的所有定常解并讨论其稳定性.

7. 在方程组

$$\frac{dx}{dt} = Ax + R(t, x)$$

中, 设 A 为常数值矩阵, 函数 $R(t, x)$ 在区域

$$G = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq t_0, \|x\| \leq M\}$$

上连续可微, $R(t, 0) = 0$ 且满足条件 $\|R(t, x)\| \leq \alpha(t) \|x\|$, 其中 $\alpha(t)$ 为 $t \geq t_0$ 上的非负连续函数, 且

$$\int_{t_0}^{+\infty} \alpha(t) dt < \infty,$$

证明若相应的齐次线性方程组的所有解当 $t \geq t_0$ 时有界, 则所给方程组的零解是稳定的.

§ 6.3 Lyapunov 直接法

在上一节中介绍的由线性近似来判定稳定性的方法没有回答当矩阵 A 具有实部为零的特征根的情形,即所谓**临界情形**. 比如在例 6.1 中无阻力的数学摆. 这时(6.8)的零解稳定性不能仅由其线性近似方程来决定,方程的高阶项对稳定性的影响是不可忽视的. 对这种情形,我们将采用 **Lyapunov 直接法**. 这种方法也称为 Lyapunov 第二方法,它在许多实际问题中得到了广泛的应用,成为研究稳定性问题的基本方法. Lyapunov 为研究运动稳定性创立的另一个著名方法,即所谓 Lyapunov 第一方法,要用到微分方程的级数解,在后来少有发展,因此现在也少有使用.

为简单起见,我们只考虑自治系统

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (6.21)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$, $f(0) = 0$ 且 $f(x)$ 在区域 $G = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| \leq M\}$ 内连续可微. 显然方程组(6.21)的初值问题的解具有存在唯一性,而且方程组(6.21)有零解.

一个简单的想法是:观察在零解附近任意一个解 $x(t)$ 的轨道是否越走距离零解(即相空间的原点 O)越近或始终不远离零解. 这样的观察需要借助一种工具,或者是某种“距离函数”、“位势函数”、“能量函数”,或者是其他什么意义下的函数,它们实时监测点 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ 与 O 的位置关系. 显然我们常用的距离函数

$$\sqrt{x_1^2(t) + \dots + x_n^2(t)}$$

可以起到这种作用,然而它不一定是唯一的选择,甚至并不是一个好的选择,因为它的可微性很差.

定义 6.1 设 $V(x)$ 为定义在闭区域 $\{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| \leq M_1\}$ 上的连续实函数,满足 $V(0) = 0$, 其中 $0 < M_1 \leq M$. 若恒有 $V(x) \geq 0$, 则称函数 V 为**常正的**. 若对一切 $\|x\| \neq 0$ 都有 $V(x) > 0$, 则称函数 V 为**定正的**. 若 $-V$ 是常正(或定正)的, 则称函数 V 为**常负(或定负)**的.

函数 $V(x, y) = (x+y)^2$ 为常正的, 函数 $V(x, y) = x^2 + y^2$ 为定正的. 对常见的二次型函数

$$V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

当 $a > 0$ 且 $b^2 - 4ac < 0$ 时是定正的, 当 $a < 0$ 且 $b^2 - 4ac < 0$ 时是定负的.

我们将用定正的连续可微函数 $V(x)$ 来观察轨道上动点 $x(t)$ 与原点 O 的位

置关系. $V(\mathbf{x}(t))$ 关于 t 的增减性可以反映出轨道运动的稳定性. 为此, 我们需要将方程组 (6.21) 的解 $\mathbf{x}(t)$ 代入 $V(\mathbf{x})$ 并考虑对 t 的导数

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.21)} := \frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i.$$

定理 6.5 (Lyapunov 稳定性判据)

(i) 若存在定正函数 $V(\mathbf{x})$, 其通过方程组 (6.21) 的导数 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.21)}$ 为常负函数, 则方程组 (6.21) 的零解是稳定的.

(ii) 若存在定正函数 $V(\mathbf{x})$, 使得导数 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.21)}$ 是定负的, 则方程组 (6.21) 的零解是渐近稳定的.

(iii) 若存在定正函数 $V(\mathbf{x})$, 使得导数 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.21)}$ 是定正的, 则方程组 (6.21) 的零解是不稳定的.

(iv) 若存在函数 $V(\mathbf{x})$ 和非负常数 μ , 在 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的任意小邻域内都存在 $\bar{\mathbf{x}}$, 使得函数 $V(\bar{\mathbf{x}}) > 0$, 且导数 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.21)}$ 可表述为

$$\frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} = \mu V(\mathbf{x}(t)) + W(\mathbf{x}(t)), \quad (6.22)$$

其中当 $\mu=0$ 时 $W(\mathbf{x})$ 为定正函数, 而当 $\mu \neq 0$ 时 $W(\mathbf{x})$ 为常正函数, 则方程组 (6.21) 的零解是不稳定的.

构造上述函数 V 是非常具有技巧性的工作. 我们通常把函数 V 称为 **Lyapunov 函数**.

证明 关于结论 (i), 考虑任意给定的正数 $\varepsilon \leq M_1$. 由 $V(\mathbf{x})$ 的连续性和定正性, 必有正数 $\eta(\varepsilon)$, 使得

$$\eta(\varepsilon) = \min_{\varepsilon \leq \|\mathbf{x}\| \leq M_1} V(\mathbf{x}). \quad (6.23)$$

再由 $V(\mathbf{x})$ 的连续性及 $V(\mathbf{0})=0$ 知, 存在正数 $\delta=\delta(\varepsilon)<\varepsilon$, 使得只要 $\|\mathbf{x}\|<\delta$ 就有 $V(\mathbf{x})<\eta(\varepsilon)$. 现在设 $\|\mathbf{x}_0\|<\delta$, 则 $V(\mathbf{x}_0)<\eta(\varepsilon)$. 令 $\mathbf{x}(t)$ 为方程组 (6.21) 满足初值条件 $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$ 的解, 其最大存在区间为 $[t_0, t_1)$. 由假设, $\frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} \leq 0$, 因此对任意的 $t \in [t_0, t_1)$, 都有

$$V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}_0) < \eta(\varepsilon).$$

按照 (6.23) 可知道, $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ 在区间 $[t_0, t_1)$ 上成立. 另一方面, 由解的延拓

定理, 必有 $t_1 = +\infty$. 因此解 $\mathbf{x}(t)$ 对一切 $t \geq t_0$ 均有定义且 $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$. 故方程组 (6.21) 的零解是稳定的.

再证结论 (ii). 由于 $\frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt}$ 定负, 按照结论 (i), 方程组 (6.21) 的零解是稳定的. 取上面稳定性证明中的正数 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 为 δ_0 . 从而当 $\|\mathbf{x}_0\| < \delta_0$ 时, 方程组 (6.21) 满足初值条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 的解 $\mathbf{x}(t)$ 对一切 $t \geq t_0$ 均有定义且满足 $\|\mathbf{x}(t)\| \leq M_1$. 我们只需证明

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}. \quad (6.24)$$

为此我们将证明

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\mathbf{x}(t)) = 0. \quad (6.25)$$

事实上, 如果 (6.25) 成立而 (6.24) 不成立, 由于解 $\mathbf{x}(t)$ 在区间 $[t_0, +\infty)$ 上有界, 必有序列 $t_k \rightarrow +\infty$, 使得存在极限

$$\tilde{\mathbf{x}} := \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t_k) \neq \mathbf{0}.$$

由 (6.25) 及 $V(\mathbf{x})$ 的连续性,

$$V(\tilde{\mathbf{x}}) = \lim_{k \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}(t_k)) = 0,$$

这与 $V(\mathbf{x})$ 为定正函数矛盾.

下面我们来证明 (6.25). 由于 $\frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt}$ 定负, 在区间 $[t_0, +\infty)$ 上 $V(\mathbf{x}(t)) \geq 0$ 而且为 t 的严格递减函数, 故存在极限

$$c := \lim_{t \rightarrow +\infty} V(\mathbf{x}(t)).$$

由 $V(\mathbf{x})$ 的连续性和定正性知 $c \geq 0$ 且

$$V(\mathbf{x}(t)) \geq c, \quad \forall t \in [t_0, +\infty).$$

若 $c > 0$, 则存在常数 $\alpha > 0$, 使得 $\|\mathbf{x}(t)\| \geq \alpha$. 再由 $\frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt}$ 的定负性和连续性, 必存在

$$m = \max_{\alpha \leq \|\mathbf{x}\| \leq M_1} \frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} < 0.$$

从而当 $t \in [t_0, +\infty)$ 时有

$$V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}_0) + m(t - t_0). \quad (6.26)$$

在不等式 (6.26) 两边令 $t \rightarrow +\infty$, 则左边收敛于正数 c , 右边趋于 $-\infty$, 这显然是不

可能的. 故必有 $c=0$, 即 (6.25) 成立. 因此方程组 (6.21) 的零解是渐近稳定的.

最后我们只需要证明比 (iii) 更广泛的结论 (iv). 由假设, 对任意给定的正数 $\delta < M_1$, 都能找到 $\mathbf{x}_0$, 使得 $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ 且 $V(\mathbf{x}_0) > 0$. 我们只要证明: 若 $\mathbf{x}(t)$ 为方程组 (6.21) 满足初值条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 的解, 则必有 $\bar{t} \in [t_0, +\infty)$, 使得 $\|\mathbf{x}(\bar{t})\| > M_1$.

如若不然, 则

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq M_1, \quad \forall t \geq t_0. \quad (6.27)$$

因为 $V(\mathbf{x})$ 在闭区域 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \|\mathbf{x}\| \leq M_1\}$ 上连续, 故 $V(\mathbf{x}(t))$ 对一切 $t \in [t_0, +\infty)$ 必有界.

另一方面, 由 (6.22) 并用常数变易公式可知对一切 $t \geq t_0$, 都有

$$V(\mathbf{x}(t)) = e^{\mu(t-t_0)} \left[V(\mathbf{x}_0) + \int_{t_0}^t W(\mathbf{x}(\tau)) e^{-\mu(\tau-t_0)} d\tau \right]. \quad (6.28)$$

当 $\mu \neq 0$ 时, $\mu > 0$ 且 $W(\mathbf{x})$ 为常正函数, 故由 (6.28) 知

$$V(\mathbf{x}(t)) \geq V(\mathbf{x}_0) e^{\mu(t-t_0)} \geq V(\mathbf{x}_0) > 0, \quad \forall t \geq t_0.$$

因此当 $t \rightarrow +\infty$ 时 $V(\mathbf{x}(t))$ 趋于 $+\infty$. 这与上述 $V(\mathbf{x}(t))$ 的有界性矛盾.

当 $\mu = 0$ 时, 因为 $W(\mathbf{x})$ 是定正的, 从 (6.28) 知

$$V(\mathbf{x}(t)) \geq V(\mathbf{x}_0) > 0, \quad \forall t \geq t_0.$$

由 $V(\mathbf{x})$ 的连续性及 $V(\mathbf{0}) = 0$ 知, 存在 $\alpha > 0$, 使得在区间 $[t_0, +\infty)$ 上 $\|\mathbf{x}(t)\| \geq \alpha$. 由于 $W(\mathbf{x})$ 为定正函数且连续, 故存在

$$m := \min_{\alpha \leq \|\mathbf{x}\| \leq M_1} W(\mathbf{x}) > 0.$$

从而由 (6.28) 知,

$$V(\mathbf{x}(t)) \geq V(\mathbf{x}_0) + m(t - t_0), \quad \forall t \geq t_0.$$

因此当 $t \rightarrow +\infty$ 时同样有 $V(\mathbf{x}(t))$ 趋于 $+\infty$. 这也与上述 $V(\mathbf{x}(t))$ 的有界性矛盾. 从而证明了方程组 (6.21) 的零解是不稳定的. 定理证毕. $\square$

定理 6.5 有较强的几何意义, 我们以二维的情形为例来说明这一点. 这时方程组 (6.21) 的解 $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ 可看成平面上以 t 为参数的一条曲线, 即轨道. 考虑曲线族

$$V(x_1, x_2) = c \quad (c > 0). \quad (6.29)$$

设 $V(x_1, x_2)$ 为定正函数, 即 $V(0, 0) = 0$, 而当 $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ 时 $V(0, 0) > 0$, 则当 c 充分小时, 随着 c 逐渐增大, 由 (6.29) 我们得到一族彼此不相交的、相互嵌套的 (即一个包含另一个的) 闭曲线族, 它们都包含原点在内, 见图 6.8.

若导数 $\frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} \leq 0$, 则 $V(x_1(t), x_2(t))$ 对 $t \geq t_0$ 为不增函数, 因此轨道 $(x_1(t), x_2(t))$ 当 $t \geq t_0$ 时要么随 t 的增加而一层层地进入闭曲线族 (6.29) 所围的区域, 要么沿着这些曲线运动, 而不会由闭曲线族 (6.29) 的内部走到其外部. 从而可以理解其零解的稳定性, 参看图 6.9. 若导数 $\frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt}$ 具有定负性, 则任一轨道 $(x_1(t), x_2(t))$ 当 $t \geq t_0$ 时只能随 t 的增加而由外向内地进入闭曲线族 (6.29) 并渐近地趋于原点, 因而零解是渐近稳定的. 对不稳定的情形, 可以看出在定理的条件下轨道将自内而外地离开曲线族 (6.29).

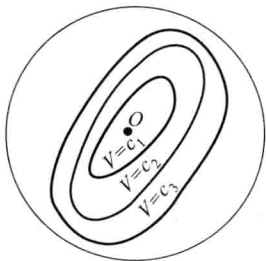
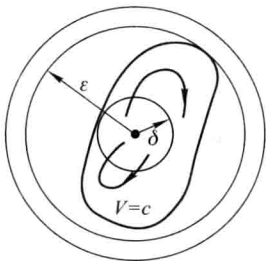
图 6.8 闭曲线族 $V=c (c_1 < c_2 < c_3)$ 

图 6.9 零解的稳定性与 Lyapunov 函数

在应用定理 6.5 时最大的困难是构造适当的 Lyapunov 函数. 遗憾的是并没有构造 Lyapunov 函数的一般方法. 这依赖人们的经验. 人们有时寻求二次型函数形式的 Lyapunov 函数, 有时把系统理解为质点的运动方程而用系统的总能量作为 Lyapunov 函数. 当系统有阻力时, 可以预期质点的总能量会逐步减少, 直到全部耗尽, 而运动也逐步停下来.

例 6.2 对例 6.1 中的系统 (6.16), 即

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{l} \sin x - \frac{\mu}{m} y,$$

我们已指出当摆没有阻力, 即 $\mu=0$ 时为临界情形, 零解的稳定性不能由其线性近似来判定. 我们知道 $x=\varphi$ 表示摆所处的位置, 即与铅直线的夹角, 而 y 表示摆的速度. 设摆在 $\varphi=0$ 时离地面的高度为 h_0 , 则其总能量为

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \left(l \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + mgl(1 - \cos \varphi) + mgh_0 \\ &= ml^2 \left\{ \frac{1}{2} y^2 + \frac{g}{l} (1 - \cos x) \right\} + mgh_0. \end{aligned}$$

据此构造 Lyapunov 函数

$$V(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + \frac{g}{l} (1 - \cos x).$$

它是定正的,其沿轨道的导数为

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.16)} = -\frac{\mu}{m}(y(t))^2 = 0,$$

因为 $\mu=0$. 由定理 6.5 知系统 (6.16) 的零解是稳定的.

在上面例子的分析中读者可以发现,当 $\mu>0$ 时 $\frac{dV}{dt}$ 仅为常负的. 因此定理 6.5 还不能直接给出渐近稳定性. 不难看出使 $\frac{dV}{dt}=0$ 的点都在 x 轴上(即 $y=0$),而在原点的邻域内 x 轴上除零解外不含方程的整条正半轨道(即解 $(x(t), y(t))$ 当 $t \geq t_0$ 时在平面上定义的曲线). 这时由下面的定理可知 (6.16) 的零解是渐近稳定的.

定理 6.6 若存在定正函数 $V(x)$, 其通过方程组 (6.21) 的导数 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.21)}$ 为常负函数, 但使 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.21)} = 0$ 的点 x 的集合中除 (6.21) 的零解外不包含 (6.21) 的整条正半轨道, 则方程组 (6.21) 的零解是渐近稳定的.

定理 6.6 的证明与定理 6.5 的证明类似, 我们将其作为习题留给读者.

习题 6.3

1. 设在 Oxy 平面上原点的某邻域内有 $P(x, y) < 0, Q(x, y) < 0$ 且 $P(x, y), Q(x, y)$ 连续可微. 证明方程组

$$\frac{dx}{dt} = xP(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = yQ(x, y)$$

的零解渐近稳定.

2. 构造形如 $V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ 的 Lyapunov 函数, 讨论下列方程组零解的稳定性:

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = -x + y - xy^2, \quad \frac{dy}{dt} = -2x - y - x^2y;$$

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = y^3 + x^2y, \quad \frac{dy}{dt} = x^3 - xy^2;$$

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = 2x + y + xy, \quad \frac{dy}{dt} = x - 2y + x^2 + y^2;$$

$$(4) \quad \frac{dx}{dt} = -x^3 + y^4, \quad \frac{dy}{dt} = -y^3 + y^4;$$

$$(5) \quad \frac{dx}{dt} = \sin y, \quad \frac{dy}{dt} = -2x - 3y.$$

3. 构造形如 $V(x, y) = \alpha xy^2 + \beta x^3$ 的 Lyapunov 函数, 讨论下列方程组零解的稳定性:

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - y^2, \quad \frac{dy}{dt} = -2xy.$$

4. 设在 Oxy 平面上 $f(x, y)$ 连续可微, 给定方程组

$$\frac{dx}{dt} = y - xf(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = -x - yf(x, y),$$

证明若在原点的某邻域内有 $f(x, y) > 0$, 则零解渐近稳定, 若有 $f(x, y) < 0$, 则零解不稳定.

5. 设 $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$, $P(x, y), Q(x, y)$ 连续可微, 且存在 α, β , 使得在 Oxy 平面上原点的某邻域内除去原点外有

$$\alpha P(x, y) + \beta Q(x, y) > 0.$$

证明方程组

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

的零解不稳定.

6. 设函数 $g(x)$ 连续可微, $g(0) = 0$ 且当 $x \neq 0$ 时有 $xg(x) > 0$. 证明方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g(x) = 0$$

的零解是稳定的, 但不是渐近稳定的.

7. 设 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 都是正数, $\beta\gamma - \alpha\delta < 0$, 函数 $f(y)$ 连续可微, $f(0) = 0$ 且当 $y \neq 0$ 时有 $yf(y) > 0$. 利用形如

$$V = \frac{1}{2}Ax^2 + B \int_0^y f(u) du$$

的 Lyapunov 函数讨论方程组

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha x + \beta f(y), \quad \frac{dy}{dt} = \gamma x - \delta f(y)$$

的零解的稳定性.

8. 给定方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (6.30)$$

若存在定正函数 $V(x)$, 其通过方程组 (6.30) 的导数 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.30)}$ 为常负函数, 但使 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.30)} = 0$ 的点 x 的集合中除 (6.30) 的零解外不包含 (6.30) 的整条正半轨, 证明方程组 (6.30) 的零解是渐近稳定的.

§ 6.4 平面平衡点分析

前面我们研究了系统的零解的稳定性. 零解实质上是系统在相空间上的一个平衡点 O , 而仅仅看懂平衡点的稳定性是不够的. 即使我们知道平衡点 O 是渐近稳定的, 我们还应该知道 O 点周围的轨道是否以某个固定方向逼近 O 点. 如果平衡点 O 是不稳定的, 在 O 附近或许所有轨道都远离 O 而去, 或许还存在逼

近 O 点的轨道. 我们怎样才能获得 O 点附近轨道的“走法”呢? 此外, 即使知道平衡点 O 的稳定性, 有的系统无论被怎样的微小改变都不改变 O 点的稳定性 (甚至 O 点附近轨道的“走法”), 有的系统却容易改变. 我们怎样去鉴别它们呢? 这些关于平衡点 O 附近轨道的“走法”包括 O 点的稳定性在内的性质即是本节要讨论的平衡点的定性性质.

在本节我们讨论平面自治系统

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y), \quad (6.31)$$

这里 $X(x, y)$ 和 $Y(x, y)$ 为连续函数并对 x 和 y 具有二阶连续偏导数, 则系统 (6.31) 满足解的存在唯一性条件. 在系统 (6.31) 中, 如果 $X(x, y)$ 和 $Y(x, y)$ 不同时为零, 则可消去自变量 t . 比如若 $X(x, y) \neq 0$, 则有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)}, \quad (6.32)$$

若 $Y(x, y) \neq 0$, 则有

$$\frac{dx}{dy} = \frac{X(x, y)}{Y(x, y)}. \quad (6.33)$$

(6.32) 和 (6.33) 分别为一阶微分方程, 满足解的存在唯一性条件和解对初值的连续性条件, 其解所确定的积分曲线即为系统 (6.31) 的轨道. 这时过相平面上每一点都有且仅有一条轨道通过. 因此对相平面上一点 (x_0, y_0) , 如果 $X(x_0, y_0)$ 和 $Y(x_0, y_0)$ 不同时为零, 其附近的轨道结构是简单的: 在 (x_0, y_0) 的某一个邻域内, 系统 (6.31) 的轨道为一族不相交的曲线. 我们称这样的点为常点.

因此在研究相图的局部结构时问题就集中在系统 (6.31) 的平衡点附近, 这些平衡点由方程组

$$X(x, y) = 0, \quad Y(x, y) = 0 \quad (6.34)$$

决定. 一个动力系统可能有多个平衡点. 我们可分别将它们平移到原点 O , 然后讨论一个等价系统在原点 O 附近的定性性质. 因此不失一般性, 下面设平衡点在原点.

若 Oxy 平面上的原点是系统 (6.31) 的平衡点, 则可将 (6.31) 右端进行 Taylor 展开并写成如下形式:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + R_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy + R_2(x, y), \quad (6.35)$$

其中 $R_j(x, y) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$, $j = 1, 2$, 称为高次项. 同前面讨论稳定性一样, 我们问: (6.35) 在原点附近的轨道结构是否和其线性部分

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy \quad (6.36)$$

在 origin 附近的轨道结构相似呢? 在回答这个问题之前, 我们首先要学会分析线性系统 (6.36) 的平衡点的定性性质.

用 $\mathbf{A}$ 表示 (6.36) 右端的系数矩阵. 首先考虑矩阵 $\mathbf{A}$ 非退化的情形, 即 $\det \mathbf{A} \neq 0$, 这时 $\mathbf{A}$ 在复数域 $\mathbb{C}$ 有两个非零特征根 λ_1, λ_2 . 由线性代数中的 Jordan 标准形理论, 存在非奇异的线性变换 $\mathbf{P}$, 通过线性变换 $(u, v)^T = \mathbf{P}(x, y)^T$ 把系统 (6.36) 化成

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (6.37)$$

其中 $\mathbf{J} := \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1}$ 是下面三种形式之一:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ 为实数, λ, μ, β 均非零. 这里第一、二种形式对应于矩阵 $\mathbf{A}$ 仅有实特征根的情形, 第三种形式相应于矩阵 $\mathbf{A}$ 具有一对共轭复根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ 的情形.

事实上, 所求线性变换可按下述方法给出: 首先注意到当 $b=c=0$ 时方程组 (6.36) 已为第一种形式的标准形, 因此下面设 b, c 不同时为 0, 这时可分三种情况讨论:

(i) 若特征根 $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \mu$ 为相异实根, 当 $b \neq 0$ 或 $c \neq 0$ 时分别用线性变换

$$u = (d - \lambda_1)x - by, \quad v = (d - \lambda_2)x - by,$$

或

$$u = -cx + (a - \lambda_1)y, \quad v = -cx + (a - \lambda_2)y,$$

可将方程组 (6.36) 化为第一种形式的标准形.

(ii) 若特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 为相同实根, 当 $b \neq 0$ 或 $c \neq 0$ 时分别用线性变换

$$u = (\lambda - d)x + by, \quad v = x,$$

或

$$u = cx + (\lambda - a)y, \quad v = y,$$

可将方程组 (6.36) 化为第二种形式的标准形.

(iii) 若特征根 $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ 为共轭复根, 设 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$), 则用线性变换

$$u = -cx + (a - \alpha)y, \quad v = \beta y,$$

或

$$u = (d - \alpha)x - by, \quad v = \beta x,$$

均可将方程组(6.36)化为第三种形式标准形.

读者应注意将方程组(6.36)化为标准形式(6.37)的线性变换并不是唯一的.

显然,可逆线性变换(6.37)不改变平衡点的位置和相图结构,因此我们仅讨论由上述三种标准矩阵定义的系统.

对第一种形式的矩阵 A ,可分为三种情况讨论:

(I.1) $\lambda = \mu$;

(I.2) $\lambda \neq \mu$ 且 $\lambda\mu > 0$;

(I.3) $\lambda \neq \mu$ 且 $\lambda\mu < 0$.

在情况(I.1),方程组(6.36)可化成

$$\frac{du}{dt} = \lambda u, \quad \frac{dv}{dt} = \lambda v,$$

其解为 $u(t) = u_0 e^{\lambda t}$, $v(t) = v_0 e^{\lambda t}$, 其中 u_0, v_0 为任意常数. 易见,当 $\lambda < 0$ 时轨道方向将趋向平衡点 O , 系统(6.36)的零解是渐近稳定的; 当 $\lambda > 0$ 时, 轨道方向将远离平衡点 O , 系统(6.36)的零解是不稳定的. 进而, $\frac{u}{v} = \frac{u_0}{v_0}$, 这表明平衡点附近的轨道都是过 O 点的直线. 因此 O 点附近的轨道当 $\lambda < 0$ 时是射向原点 O 的直线束, 当 $\lambda > 0$ 时是从原点 O 射向四面八方的直线束. 这样的平衡点称为星形结点(或临界结点), 见图 6.10 及图 6.11.

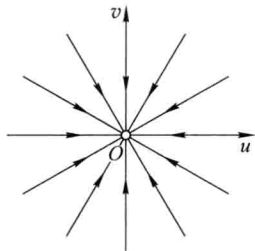


图 6.10 稳定的星形结点 ($\lambda < 0$)

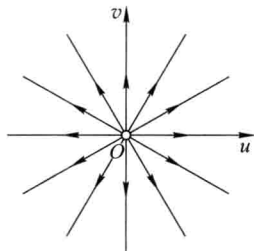


图 6.11 不稳定的星形结点 ($\lambda > 0$)

在情况(I.2), 方程组(6.36)可化成

$$\frac{du}{dt} = \lambda u, \quad \frac{dv}{dt} = \mu v. \quad (6.38)$$

同理可以得到通解 $u(t) = u_0 e^{\lambda t}$, $v(t) = v_0 e^{\mu t}$, 同样知道原点 O 的稳定性: 当 $\lambda < 0$, $\mu < 0$ 时渐近稳定, 当 $\lambda > 0, \mu > 0$ 时不稳定. 与情况(I.1)类似, 可以知道 $|u|^\mu / |v|^\lambda$

等于某个常数. 这也可以直接从上述方程组相应的轨道的微分方程看出. 当 $u \neq 0$ 时, 该方程组的轨道满足微分方程

$$\frac{dv}{du} = \frac{\mu}{\lambda} \frac{v}{u}, \quad (6.39)$$

从 (6.39) 中解得 $v = C|u|^{\mu/\lambda}$, 其中 C 是任意常数. 因此在 Ouv 平面上 (除坐标轴外) 轨道作为幂函数曲线形成了一族以原点 O 为顶点的“抛物线”. 尤其是, 当 $|\lambda| < |\mu|$ 时这个“抛物线”族与 u 轴相切于 O 点; 当 $|\mu| < |\lambda|$ 时这个“抛物线”族与 v 轴相切于 O 点. 易见 v 轴 (即 $u=0$) 的正半轴和负半轴也分别是方程组的轨道. 这样的平衡点称为**两向结点** (或**正常结点**), 见图 6.12 及图 6.13.

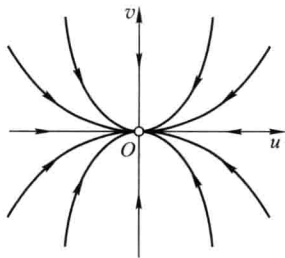


图 6.12 稳定的两向结点 ($\mu < \lambda < 0$)

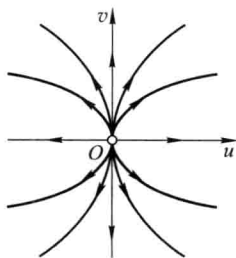


图 6.13 不稳定的两向结点 ($\lambda > \mu > 0$)

在情况 (I.3), 同样根据 (6.38) 或 (6.39) 的通解可以知道原点 O 总是不稳定的, 而且在 uv 平面上 (除坐标轴外) 轨道形成了一族以两个坐标轴为渐近线的“双曲线”. 尤其是, 当 $\lambda < 0, \mu > 0$ 时这个“双曲线”族相应于 $t \rightarrow +\infty$ 渐近于 v 轴; 当 $\lambda > 0, \mu < 0$ 时这个“双曲线”族相应于 $t \rightarrow +\infty$ 渐近于 u 轴. 这样的平衡点称为**鞍点**, 见图 6.14 及图 6.15.

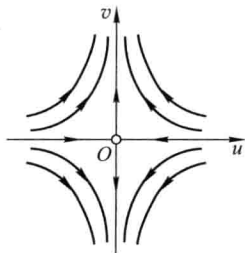


图 6.14 鞍点 ($\lambda < 0, \mu > 0$)

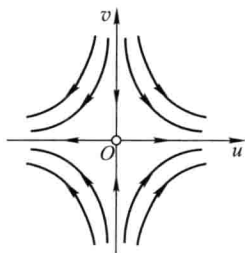


图 6.15 鞍点 ($\lambda > 0, \mu < 0$)

第二种形式的矩阵 A 具有一个二重实根且 Jordan 块是二阶的. 为方便起见, 我们把这一情形称为情形 (II). 从方程的通解容易看出: 平衡点 O 当 $\lambda < 0$ 时渐近稳定, 当 $\lambda > 0$ 时不稳定. 当 $u \neq 0$ 时, 考虑轨道相应的微分方程

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{u}v. \quad (6.40)$$

用常数变易公式得到通解为

$$v = Cu + \frac{u}{\lambda} \ln |u|,$$

其中 C 是任意常数. 因此, $\lim_{u \rightarrow 0} v = 0$, 即平衡点附近的轨道当 $\lambda < 0$ 时逼近原点而当 $\lambda > 0$ 时离 O 而去. 另一方面, v 轴 (即 $u = 0$) 的正半轴和负半轴本身也分别是轨道. 将这个通解代入 (6.40) 得到

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{dv}{du} &= \frac{1}{\lambda} + C + \frac{1}{\lambda} \lim_{u \rightarrow 0} \ln |u| \\ &= \begin{cases} +\infty, & \text{当 } \lambda < 0, \\ -\infty, & \text{当 } \lambda > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.41)$$

因此, 平衡点 O 附近的轨道与 v 轴相切于 O 点. 这样的平衡点称为单向结点 (或退化结点), 见图 6.16 及图 6.17.

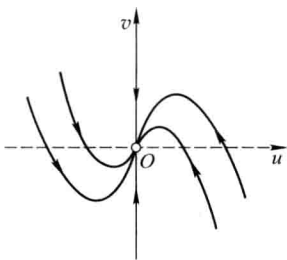


图 6.16 稳定的单向结点 ($\lambda < 0$)

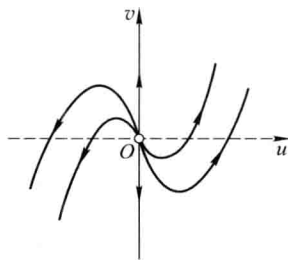


图 6.17 不稳定的单向结点 ($\lambda > 0$)

第三种形式的矩阵 A 有一对共轭复根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ 且 $\beta \neq 0$. 取极坐标 $u = r \cos \theta$, $v = r \sin \theta$, 利用计算导数的公式

$$\begin{cases} \dot{u} = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \cdot \dot{\theta}, \\ \dot{v} = \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \cdot \dot{\theta}, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \dot{r} = \dot{u} \cos \theta + \dot{v} \sin \theta, \\ \dot{\theta} = \frac{-\dot{u} \sin \theta + \dot{v} \cos \theta}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \end{cases}$$

方程组可以化为

$$\frac{dr}{dt} = \alpha r, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\beta. \quad (6.42)$$

从中解得

$$r(t) = \rho_0 e^{\alpha t}, \quad \theta(t) = -\beta t + \delta, \quad (6.43)$$

其中 ρ_0, δ 为任意常数. 因此平衡点 O 附近的轨道是

$$r(\theta) = [\rho_0 e^{\frac{\alpha}{\beta}\delta}] e^{-\frac{\alpha}{\beta}\theta}. \quad (6.44)$$

这时分为两种情形: (Ⅲ. 1) $\alpha \neq 0$ 和 (Ⅲ. 2) $\alpha = 0$.

在情形 (Ⅲ. 1), 由 (6.44) 知平衡点 O 附近的轨道是一族螺线. 由 (6.43) 知, 当 $\alpha < 0$ 时平衡点 O 渐近稳定, 当 $\alpha > 0$ 时平衡点 O 不稳定. 当 $\beta > 0$ 时螺线顺时针盘旋, 当 $\beta < 0$ 时螺线逆时针盘旋. 这样的平衡点称为**焦点**, 见图 6.18 及图 6.19.

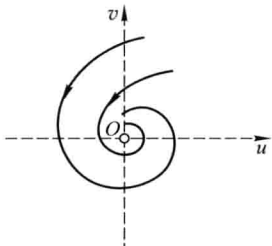


图 6.18 稳定的焦点 ($\alpha < 0, \beta < 0$)

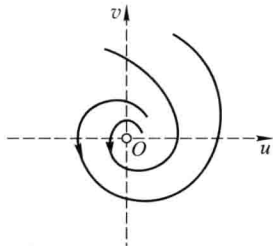


图 6.19 不稳定的焦点 ($\alpha > 0, \beta < 0$)

在情形 (Ⅲ. 2), 由 (6.44) 知 $r(t) \equiv \rho_0$, 因此平衡点 O 附近的轨道是一族同心圆. 这时平衡点 O 是稳定的但不渐近稳定. 这样的平衡点称为**中心**, 见图 6.20 及图 6.21.

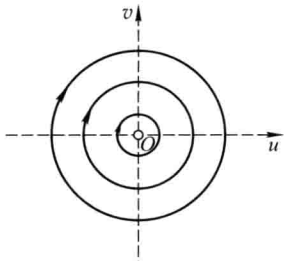


图 6.20 中心 ($\alpha = 0, \beta > 0$)

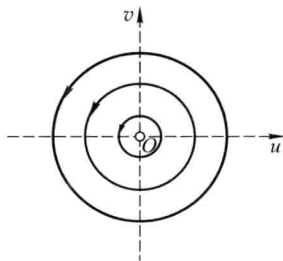


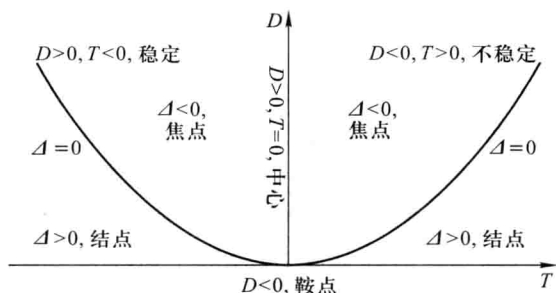
图 6.21 中心 ($\alpha = 0, \beta < 0$)

上面的分析结果也可以通过

$$T := \text{tr}(\mathbf{A}), \quad D := \det(\mathbf{A}), \quad \Delta := T^2 - 4D$$

三个量之间的相互关系来判定, 这些关系是根据二次多项式方程根与系数的关系得到的. 在图 6.22 中我们在 TD 坐标系中描述了这些关系, 其中抛物线 $\Delta = 0$ 对应着星形结点或单向结点, T 轴对应着下面我们将要讨论的退化平衡点, 正半 D 轴对应着中心.

对于一般形式的线性方程组 (6.36), 可用前述线性变换将其化为标准形,

图 6.22 平面线性系统平衡点的分类与 T, D, Δ 的关系

并由标准形的相图不难通过逆变换画出原系统的相图. 但是这种方法计算量较大, 下面我们介绍一个简单实用的方法.

我们可先由系数矩阵 A 的特征根迅速判断出平衡点的类型和稳定性, 然后利用平面线性系统平衡点的下面两个性质作出相图: 首先, 注意到当 $t \rightarrow +\infty$ 或 $t \rightarrow -\infty$ 时, 某些轨道将沿某一确定的方向 (称为平衡点的特殊方向) 趋于平衡点, 特别地, 两向结点和鞍点有两个特殊方向, 单向结点有一个特殊方向, 星形结点有无穷个特殊方向, 焦点和中心没有特殊方向; 并且当某条直线给出平衡点的特殊方向时, 它被平衡点分割的两条射线都是系统的轨道, 这些性质在仿射变换下保持不变. 其次, 平面线性系统 (6.36) 在相平面上给出的方向场关于平衡点 $(0, 0)$ 对称, 即若 $(P(x, y), Q(x, y))$ 为系统在点 (x, y) 给出的方向, 则 $(-P(x, y), -Q(x, y))$ 为系统在点 $(-x, -y)$ 给出的方向.

下面我们通过具体的例子来说明如何利用这种方法.

例 6.3 考虑如下的平面线性系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases} \quad (6.45)$$

首先计算系数矩阵 A 的特征根. $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$. 从而, 特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$, 是一对相异正实根, 属于情形 (I. 2). 因此原点 $O: (0, 0)$ 作为系统 (6.45) 的平衡点是一个不稳定的两向结点.

为了画出相图, 我们需要找出平衡点 $(0, 0)$ 的两个特殊方向, 为此先求出 A 的特征向量. 对应于 λ_1, λ_2 , 容易得到关于 $\xi_j = (u_j, v_j)^T$ 的齐次线性方程组

$$(A - \lambda_j I) \xi_j = \begin{pmatrix} 3 - \lambda_j & 0 \\ 2 & 1 - \lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2$$

的基础解系,即对应于 $\lambda_1=1$ 有特征向量 $\xi_1=(0,1)^T$,对应于 $\lambda_2=3$ 有特征向量 $\xi_2=(1,1)^T$. 这样,我们相应绘出两条直线 ℓ_1 和 ℓ_2 ,它们上面的轨道都是继续沿着它们且背离原点 O . 因为 $|\lambda_1|<|\lambda_2|$,因此除了 ℓ_2 上的轨道外,所有轨道的曲线都与 ℓ_1 相切于 O 点,从而直线 ℓ_1 和 ℓ_2 分别给出了平衡点 $(0,0)$ 的两个特殊方向. 由此不难画出系统(6.45)的相图,见图 6.23.

例 6.4 考虑如下的平面线性系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y. \end{cases} \quad (6.46)$$

系数矩阵 A 的特征根是重根 $\lambda_{1,2}=-2$,因此平衡点 O 或者是稳定的星形结点或者是稳定的单向结点. 它们之间的区别在于平衡点 $(0,0)$ 有多少个特殊方向,无穷个对应于前者,唯一的一个对应于后者. 为进一步判断,我们同样先求出 A 的特征向量,为此求解齐次线性方程组

$$(A - \lambda_1 I)\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

即 $u_1 - v_1 = 0$,从而得到一个特征向量 $\xi_1=(1,1)^T$. 显然,总共能解出的线性无关的特征向量组有且只有一个向量组成. 因此 O 是稳定的单向结点. 沿特征向量 $\xi_1=(1,1)^T$ 绘出一条直线 ℓ_1 ,它上面的轨道继续沿着它指向原点 O . 其余所有轨道的曲线都与 ℓ_1 相切于 O 点,见图 6.24.

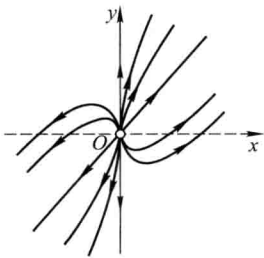


图 6.23 例 6.3

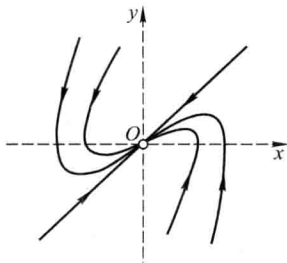


图 6.24 例 6.4

从上面两个例子可看出平衡点 $(0,0)$ 的特殊方向由矩阵 A 的实特征向量给出. 对星形结点,这时矩阵 A 可对角化,容易看出每个向量都是特征向量,从而都是特殊方向,因此星形结点有无穷个特殊方向,而对焦点和中心,矩阵 A 没有实特征向量,因此没有特殊方向.

例 6.5 考虑如下的平面线性系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases} \quad (6.47)$$

系数矩阵 A 的特征根是一对共轭复根 $\lambda_{1,2} = \pm i$. 由于实部为零, 平衡点 O 是一个中心. 它当然是稳定的. 由于轨道是盘旋的, 我们只需要判断盘旋的方向. 为此, 考虑 x 轴 (相应于极坐标下的极轴) 上的任意一点 Q , 不妨取 $Q: (1, 0)$. 易见在 Q 点处 $\dot{x} = y = 0, \dot{y} = -x = -1$, 亦即在 Q 点向量场方向为 $(0, -1)$, 因此盘旋方向是顺时针的, 见图 6.25.

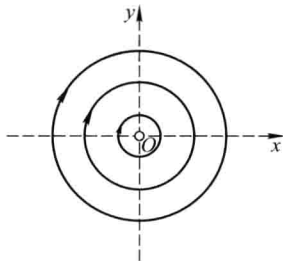


图 6.25 例 6.5

以上我们讨论了系数矩阵 A 没有零特征根的各种情形. 所有上述类型的平衡点都称为**初等平衡点**, 否则就称为**退化平衡点** (或**高阶平衡点**). 我们也将除去中心以外的上述初等平衡点称为是**粗的**, 其余的平衡点称为是**细的**. 我们可以进一步证明 (参见文献[29]的第二章):

如果系统 (6.35) 的线性部分 (6.36) 具有粗的平衡点 O , 那么系统 (6.35) 在原点 O 的小邻域内与线性化系统 (6.36) 具有相同的定性性质. 事实上, 在动力系统理论中, 上述粗的平衡点都是双曲平衡点, 即线性化系统 (6.36) 的特征根实部都不为零. 这样的系统 (6.35) 即使形式上发生“微小改变”, 其在该平衡点附近轨道状况与原来系统轨道的状况一定是具有相同的拓扑结构的. 在该平衡点附近系统 (6.35) 轨道的拓扑结构与线性化系统 (6.36) 轨道的拓扑结构是一样的.

关于细的平衡点, 我们未必有非线性系统和它的线性化系统之间的这种一致性. 我们首先要考虑中心. 容易从一些例子中看到, 即使线性部分 (6.36) 具有中心 O , 系统 (6.35) 的平衡点 O 也可以是一个焦点. 我们称这样的平衡点为非线性系统 (6.35) 的**细焦点**或**中心型焦点**. 这需要做进一步的中心焦点判定 (参见文献[29]的第二章).

另一类细的平衡点就是退化平衡点, 即系数矩阵 A 有零特征根, 亦即 $\det(A) = 0$. 对线性系统 (6.36) 来说, A 的特征方程为 $\lambda^2 - (a+d)\lambda = 0$, 特征根为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = a+d$. 尤其当 $a \neq 0$ 或 $b \neq 0$ 时, 方程组 (6.36) 可写成

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = k(ax + by), \quad (6.48)$$

其中 k 为常数. 显然直线 $ax + by = 0$ 上的所有点均为方程组 (6.48) 的平衡点. 这样的直线称为**奇线**. 从 (6.48) 可以得到相空间上轨道满足的微分方程 $\frac{dy}{dx} = k$, 因

此轨道为一族平行直线 $y=kx+C_0$, 其中 C_0 为任意常数. 另一方面, 由 (6.48) 得

$$\frac{d}{dt}(ax+by) = \lambda_2(ax+by).$$

因此, $ax+by=C_1e^{\lambda_2 t}$. 其中 C_1 为任意常数. 所以当 $\lambda_2 < 0$ 时, 轨道趋近于奇线上的点, 当 $\lambda_2 > 0$ 时, 轨道远离奇线上的点, 见图 6.26 及图 6.27.

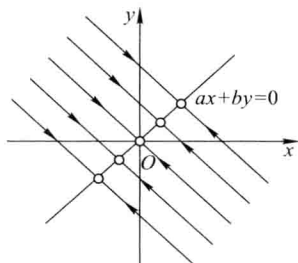


图 6.26 $a^2+b^2 \neq 0$ 且 $a+d < 0$

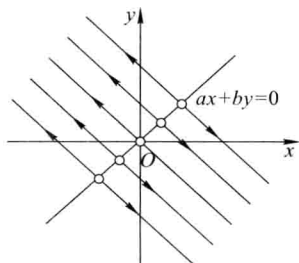


图 6.27 $a^2+b^2 \neq 0$ 且 $a+d > 0$

若 $\lambda_2 = 0$, 即 A 的特征根都为零, 则由方程组 (6.48) 系数矩阵的迹为零得知 $a+k=0$. 易知 (6.48) 的轨道与奇线 $ax+by=0$ 平行.

(6.48) 的通解为

$$x(t) = bC_0t + C_2, \quad y(t) = dC_0t + (kC_2 + C_0),$$

其中 C_2 为任意常数. 这时轨道的走向由 b, d, C_0 的符号确定, 奇线 $ax+by=0$ 将相平面划分为两部分, 不同部分的轨道的走向正好相反, 在图 6.28 中我们画出了当 $b < 0, d < 0$ 时系统的相图, 读者可类似地画出其他情况下系统的相图.

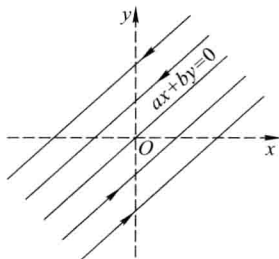


图 6.28 $b < 0, d < 0$
且 $a+d=0$

如果 $a=b=0$ 但 c, d 不全为零, 则 $cx+dy=0$ 为奇线, 轨道为一族平行于 y 轴的直线, 见图 6.29 及图 6.30. 如果 $a=b=c=d=0$, 则平衡点充满了整个相平面.

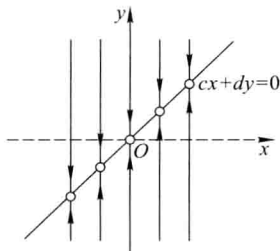


图 6.29 $a=b=0$ 且 $d < 0$

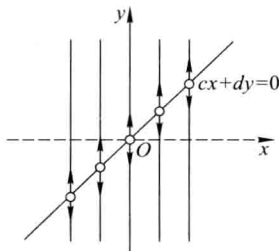


图 6.30 $a=b=0$ 且 $d > 0$

具有退化平衡点的线性系统和非线性系统的定性性质很不相同. 对非线性系统的退化平衡点判定是一件技术性很强的工作, 对这一方面有兴趣的读者可参阅文献[29]的第二章.

习题 6.4

1. 求出下列线性系统的平衡点, 判断其类型和稳定性, 并画出相图:

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = -x + y - 2, \quad \frac{dy}{dt} = -2x - y - 1;$$

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = 2x + 7y - 7, \quad \frac{dy}{dt} = x - 2y + 2;$$

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = 7x + 3y - 7, \quad \frac{dy}{dt} = 6x + 4y - 6;$$

$$(4) \quad \frac{dx}{dt} = 5x + 3y + 8, \quad \frac{dy}{dt} = -3x - 5y - 8.$$

2. 设 α, β, γ 都是实数且 $\alpha\gamma \neq 0$. 讨论线性系统

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta y, \quad \frac{dy}{dt} = \gamma y$$

的平衡点类型和稳定性, 并画出 α, β, γ 在各种不同情况下系统的相图.

3. 考虑关于二元函数 $\phi(x, t)$ 的非线性偏微分方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} = c \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},$$

它描述了一类波的传播, 称为 Burger 方程, 其中 $c > 0$ 为波的传播速度. 令 $\xi = x - ct$, $u(\xi) = \phi(x, t)$. 请推导以 ξ 为自变量的函数 $u(\xi)$ 所满足的常微分方程, 并将其化为等价的一阶微分方程组. 画出该微分方程组的相图.

4. 求出下列非线性系统的平衡点, 并判断哪些是双曲平衡点. 对双曲平衡点判断其类型和稳定性, 并画出系统在平衡点附近的相图:

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = -6y + 2xy - 8, \quad \frac{dy}{dt} = y^2 - x^2;$$

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = -x + e^{-y} - 1, \quad \frac{dy}{dt} = 1 - e^{x+y};$$

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = \sin y, \quad \frac{dy}{dt} = x + x^3.$$

5. 引入极坐标并画出下面系统的相图:

$$\frac{dx}{dt} = x(x^2 + y^2 - 1), \quad \frac{dy}{dt} = y(x^2 + y^2 - 1).$$

6. 引入极坐标, 观察并说明原点是系统

$$\frac{dx}{dt} = -y - x\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{dy}{dt} = x - y\sqrt{x^2 + y^2}$$

的稳定焦点.

§ 6.5 周期轨道与 Poincaré 映射

微分方程定性理论的一个重要任务就是确定一个微分方程的轨道在相空间中的分布情况和拓扑结构,即相图的结构.前面的方法使我们能够分析一些平面动力系统的平衡点的定性性质.对于非线性系统来说,我们所得到的这些结果不过是系统在平衡点附近的轨道结构,即系统的局部结构.要想知道系统在远离平衡点之处的事情,我们至少要分析微分方程的其他形式的、非定常的有界解.其中最重要的一类就是系统的周期解或闭轨.

在上一节中我们看到,线性系统的中心附近被一族闭轨所充满.对非线性系统(6.31)还有另一种情况:某一条闭轨存在一个邻域,系统在这个邻域内没有其他闭轨,即这样的闭轨是孤立的.我们把孤立的闭轨称为**极限环**,它是另外的轨道的极限集合.

由极限环的定义,若 Γ 是(6.31)的极限环,则 Γ 有一个外侧邻域和一个内侧邻域,使得在这些邻域内(6.31)没有其他闭轨,这时由这些邻域内出发的轨道都是盘旋地趋于或远离极限环 Γ .为了区分各种不同情况,从而更好地研究极限环本身的性质,我们引入如下关于极限环稳定性的概念:称极限环 Γ 为**稳定极限环**,如果当 $t \rightarrow +\infty$ 时极限环 Γ 内外两侧的轨道都盘旋地趋于 Γ ,见图 6.31;称极限环 Γ 为**不稳定极限环**,如果当 $t \rightarrow -\infty$ 时极限环 Γ 内外两侧的轨道都盘旋地趋于 Γ ,见图 6.32;称极限环 Γ 为**半稳定极限环**,如果极限环 Γ 某一侧的轨道当 $t \rightarrow +\infty$ 时盘旋地趋于 Γ 而另一侧的轨道当 $t \rightarrow -\infty$ 时盘旋地趋于 Γ ,见图 6.33 或图 6.34.

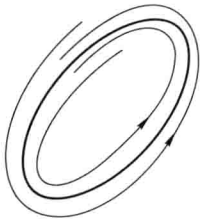


图 6.31 稳定极限环

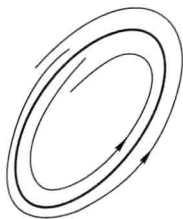


图 6.32 不稳定极限环

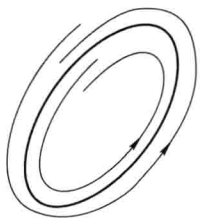


图 6.33 半稳定极限环

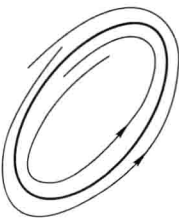


图 6.34 半稳定极限环

平衡点和闭轨都可以成为其他轨道的极限状态. 一般地, 对于自治系统 (6.1) 的轨道 $x = \varphi(t, x_0)$, 如果存在序列 $t_n \rightarrow +\infty$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(t_n, x_0) = x^*,$$

则称 x^* 为该轨道的 ω 极限点; 如果存在序列 $t_n \rightarrow -\infty$, 使得上述极限关系成立, 则称 x^* 为该轨道的 α 极限点. 轨道 $\varphi(t, x_0)$ 的 ω 极限点的全体 $\omega(x_0, \varphi)$ 称为该轨道的 ω 极限集. 轨道 $\varphi(t, x_0)$ 的 α 极限点的全体 $\alpha(x_0, \varphi)$ 称为该轨道的 α 极限集. ω 极限集和 α 极限集的全体

$$L(x_0, \varphi) := \omega(x_0, \varphi) \cup \alpha(x_0, \varphi)$$

称为该轨道的极限集. 显然, 系统 (6.31) 的平衡点和闭轨的 ω 极限集和 α 极限集就是该轨道本身.

相对于三维或更高维相空间上的动力系统来说, 平面动力系统的轨道情况相对单纯, 这是因为平面上有 Jordan 闭曲线定理, 即平面上任一简单闭曲线 γ 把平面分割为两部分, 连接这两部分中任意点的连续路径必与 γ 相交. 利用这一性质, 我们可以获得以下著名结果 (参见文献 [29] 的第一章), 它是判断极限环存在性的重要方法.

定理 6.7 (Poincaré-Bendixson 环域定理) 设函数 $X(x, y)$ 和 $Y(x, y)$ 为 Oxy 坐标平面上某区域 G 内的连续可微函数. 如果在 G 内存在有界环形闭区域

$$\overline{D} = L_1 \cup D \cup L_2,$$

其中 L_1 是 D 的内边界、 L_2 是 D 的外边界、而 L_1, L_2 都是简单闭曲线且都不是系统 (6.31) 的闭轨, 满足条件: 在 $\overline{D}$ 内不含系统 (6.31) 的平衡点, 且系统 (6.31) 从 L_1 和 L_2 上出发的轨道都不能离开 $\overline{D}$, 或都不能进入 $\overline{D}$, 则系统 (6.31) 在 D 内存在一条闭轨 Γ , 见图 6.35 所示.

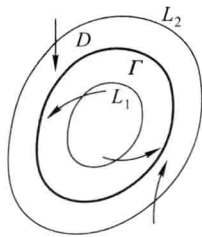


图 6.35 Poincaré-Bendixson 环域定理

上述有界环形区域的边界 L_1 和 L_2 分别称为环域的内境界线和外境界线. 应用上述定理判断极限环的存在性的关键在于构造这样的境界线, 只要能构造出这样的境界线及相应的环形区域, 则由 Poincaré-Bendixson 环域定理, 该区域内必有闭轨. 若能进一步判断该闭轨是孤立的, 则它就是极限环, 并且我们能大致确定极限环的位置: 这样的环形区域越狭小, 极限环的位置越精确.

例 6.6 考虑系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \frac{dy}{dt} = -x + y(1 - x^2 - y^2), \end{cases} \quad (6.49)$$

它以原点 O 为唯一的平衡点. 考虑两条闭曲线 $L_1: x^2 + y^2 = r_1^2 < 1$ 和 $L_2: x^2 + y^2 = r_2^2 > 1$ 以及它们围成的环域 D . 令

$$V(x, y) := x^2 + y^2.$$

易见

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.49)} &= 2x[y + x(1 - x^2 - y^2)] + 2y[-x + y(1 - x^2 - y^2)] \\ &= 2(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2). \end{aligned}$$

因此, 在 L_1 上 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.49)} > 0$, 在 L_2 上 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.49)} < 0$, 从而, 从境界线 L_1, L_2 出发的轨道都进入区域 D . 这样, 上述 Poincaré-Bendixson 环域定理保证了闭轨的存在性.

事实上, 我们可直接验证系统 (6.49) 有唯一的稳定极限环. 为此引入极坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 可将系统 (6.49) 化成

$$\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2), \quad \frac{d\theta}{dt} = -1.$$

容易求出其通解为

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + Ce^{-2t}}}, \quad \theta(t) = -(t - t_0),$$

其中 C, t_0 为任意常数. 相应地得到系统 (6.49) 的通解为

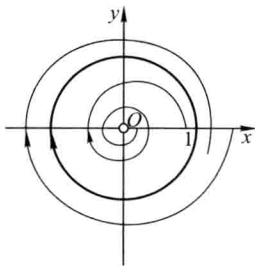
$$x(t) = \frac{\cos(t - t_0)}{\sqrt{1 + Ce^{-2t}}}, \quad y(t) = -\frac{\sin(t - t_0)}{\sqrt{1 + Ce^{-2t}}}. \quad (6.50)$$

不难看出, 当 $C=0$ 时, (6.50) 为闭轨 $\Gamma: x^2 + y^2 = 1$; 当 $C>0$ 时, (6.50) 为螺旋线, 并且当 $t \rightarrow +\infty$ 时从闭轨 Γ 内部盘旋地趋于 Γ ; 当 $C<0$ 时, (6.50) 也为螺旋线, 并且当 $t \rightarrow +\infty$ 时从闭轨 Γ 外部盘旋地趋于 Γ . 因此闭轨 Γ 为系统 (6.49) 唯一的稳定极限环, 参看图 6.36.

在什么情况下系统 (6.31) 不存在极限环呢?

利用 Green 公式, 我们不难证明如下结论.

图 6.36 系统 (6.49) 的相图



定理 6.8 (Bendixson 判据) 在 (6.31) 中设函数 $X(x, y)$ 和 $Y(x, y)$ 在 Oxy

平面上某区域 G 内连续可微. 如果在单连通区域 $D \subset G$ 内函数

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$$

不变号且在 D 内任何子区域上都不恒为零, 则系统 (6.31) 在 D 内不存在闭轨.

证明 用反证法. 设

$$\Gamma: x = x(t), \quad y = y(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

为 D 内闭轨, 它围成的 D 内的子区域为 D_0 . 由 Green 公式及 (6.31),

$$\begin{aligned} \iint_{D_0} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy &= \oint_{\Gamma} X dy - Y dx \\ &= \int_0^T \left(X \frac{dy}{dt} - Y \frac{dx}{dt} \right) dt = 0. \end{aligned}$$

但由定理假设, 必有

$$\iint_{D_0} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy \neq 0.$$

这就导致矛盾, 因此在区域 D 内不存在闭轨. $\square$

Bendixson 判据的如下推广是非常有用的. 其证明和定理 6.8 的证明完全类似, 我们把它留作习题.

定理 6.9 (Dulac 判据) 在 (6.31) 中设 $X(x, y)$ 和 $Y(x, y)$ 为 Oxy 平面上某区域 G 内的连续可微函数. 如果在 G 内存在单连通区域 D 及 D 内连续可微函数 $B(x, y)$, 使得在 D 内函数

$$\frac{\partial(BX)}{\partial x} + \frac{\partial(BY)}{\partial y}$$

不变号且在 D 内的任何子区域上都不恒为零, 则 (6.31) 在 D 内不存在闭轨.

定理 6.9 中的函数 $B(x, y)$ 称为 **Dulac 函数**, 它的构造同前面遇到的 Lyapunov 函数一样都是非常富有技巧性的.

例 6.7 设 a, b, α, β 为常数且 $b \neq 0$, 考虑方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + ax + b \frac{dx}{dt} - \alpha x^2 - \beta \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 0. \quad (6.51)$$

令 $y = \frac{dx}{dt}$, 则 (6.51) 化为 (6.31) 的形式, 其中

$$X(x, y) = y, \quad Y(x, y) = -ax - by + \alpha x^2 + \beta y^2.$$

构造 Dulac 函数

$$B(x, y) = be^{-2\beta x},$$

它显然满足

$$\frac{\partial(BX)}{\partial x} + \frac{\partial(BY)}{\partial y} = -b^2 e^{-2\beta x} < 0.$$

由定理 6.9, 方程(6.51)没有闭轨.

下面简要介绍研究闭轨的另一个重要方法, 即**后继函数法**. 假设原点 O 是系统(6.31)的中心型平衡点, 即它在 O 点的线性化系统(6.36)以 O 点为中心. 在这种情况下, 如果没有进一步的分析, 我们无法断定 O 是中心还是焦点, 更无法知道围绕 O 点是否还有闭轨以及有多少个闭轨.

在 O 点的小邻域 B_δ 内, 系统(6.31)可以等价地用(6.35)代替, 其中 $R_1(x, y), R_2(x, y)$ 相对于线性项来说是很小的. 考虑极坐标轴(即 x 的正半轴) Σ . 在 $\Sigma_0 := \Sigma \cap B_\delta$ 上任取一点 P_0 . 线性系统(6.36)从 P_0 出发的轨道是闭轨, 必定返回到 Σ_0 上(实质上返回到同一个点 P_0). 按照第五章解对参数的连续依赖性的思想, 我们也能够证明, 非线性系统(6.35)从 P_0 出发的轨道也会返回到 Σ_0 上的某个点 P_1 , 它在 P_0 附近, 见图 6.37. 这样我们就可定义一个映射

$$\Pi: \Sigma_0 \rightarrow \Sigma, \quad \Pi(P_0) = P_1.$$

从而系统在 O 点附近的闭轨问题等价于寻找映射 Π 的不动点 $Q \in \Sigma_0$, 即 $\Pi(Q) = Q$. 如果 Π 的不动点 Q 是吸引的(排斥的), 即**后继函数**

$$d(P) := \Pi(P) - P$$

在 Q 附近当 $P < Q$ 时恒大于零(小于零)而当 $P > Q$ 时恒小于零(大于零), 则相应的闭轨就是稳定的极限环(不稳定的极限环). 我们称 Σ_0 为 **Poincaré 截面**(或**无切线段**), 称 Π 为 **Poincaré 映射**.

Poincaré 映射将微分方程的轨道同集合上自映射的迭代联系在了一起. 用 Poincaré 映射来解剖微分方程, 我们可以把闭轨和其他轨道的动力学问题化成一个离散动力系统的不动点、周期点以及其他特殊轨道的判定. 因此离散动力系统是与微分方程紧密相关的一个重要的研究课题.

研究离散动力系统, 首先就要研究映射的**迭代**. 设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集, $f: X \rightarrow X$ 是一个连续自映射. 我们称复合映射 $f(f(x))$ 为 f 的 2 次迭代, 在不发生混淆时简记为 f^2 . 归纳地定义一般的 k 次迭代

$$f^k(x) = f(f^{k-1}(x)), \quad k = 2, 3, \dots$$

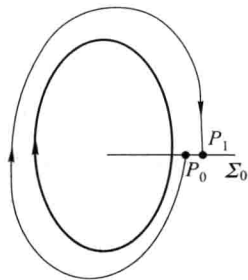


图 6.37 Poincaré 映射

补充地定义 $f^0(x) \equiv x$ (即 f^0 是恒同映射 Id). 那么,

$$\{f^k: k = 0, 1, 2, \dots\}$$

关于映射的复合。构成了一个半群, 我们称之为一个离散半动力系统. 如果 f 是一个同胚, 即 f 是单一的满射且其逆 f^{-1} 也是连续的, 那么我们可以将上述迭代半群扩展成一个群

$$\{f^k: k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

这就是我们前面定义的离散动力系统. 如上指出, 一个连续运动过程可以离散化. 反过来, 一个离散运动过程在某些条件下也可以由某个连续运动过程每隔一段时间采样而得, 或者说一个离散动力系统在某些条件下也可以嵌入到一个连续动力系统.

相应于前面考虑的微分方程, 对同胚 $f: X \rightarrow X$, 我们分别称集合

$$\text{Orb}_f(x_0) = \{f^k(x_0): k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\},$$

$$\text{Orb}_f^+(x_0) = \{f^k(x_0): k = 0, 1, 2, \dots\},$$

$$\text{Orb}_f^-(x_0) = \{f^{-k}(x_0): k = 0, 1, 2, \dots\}$$

为 f 过点 $x_0 \in X$ 的轨道, 正半轨和负半轨. 进而, 如果对某个 $x_0 \in X$, 存在自然数 p , 使得 $f^p(x_0) = x_0$, 则称 x_0 为 f 的周期点. 满足这一关系的最小正整数 p 称为 x_0 的周期. 这时当 $p=1$ 时有 $f(x_0) = x_0$, 而当 $p>1$ 时有

$$f^p(x_0) = x_0, \quad f^k(x_0) \neq x_0, \quad \forall k = 1, 2, \dots, p-1,$$

又称 x_0 为 f 的 p 周期点. 我们称过周期点的轨道为 f 的周期轨. 当 $p=1$ 时称 x_0 为 f 的不动点. 分别记 f 的周期点集和不动点集为 $\text{Per}(f)$ 和 $\text{Fix}(f)$.

为了进一步了解周期性, 我们考虑闭区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上的一维连续映射 $f: I \rightarrow I$. 如果 x_0 是 f 的 p 周期点, 且 f^p 在 x_0 连续可微并满足 $|(f^p(x_0))'| < 1$, 则 x_0 为 f 的稳定周期点. 如果 $|(f^p(x_0))'| > 1$, 则 x_0 为 f 的不稳定周期点. 周期点的稳定性反映了在迭代过程中周期点是吸引还是排斥它附近的点.

例 6.8 考虑自映射 $f_\lambda: I = [0, 1] \rightarrow I$, $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$, 其中 $\lambda \in [0, 4]$. 这个映射称为 **logistic 映射**, 它描述了无世代交叠的昆虫逐年的种群量的变化规律. 易见 f_λ 的不动点 x 应满足 $f_\lambda(x) = x$, 从中解出

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1 - \frac{1}{\lambda}.$$

可以验证: 当 $\lambda < 1$ 时, f_λ 只有唯一的一个不动点 $x_1 = 0$, 它是稳定的. 当 $1 < \lambda < 3$ 时, x_1 变为不稳定不动点, 同时 x_2 产生并成为稳定的不动点. 当 $\lambda > 3$ 时, x_2 变为不稳定不动点, 同时 f_λ 有两个 2 周期点

$$x_{\pm} = \frac{1}{2\lambda} (1 + \lambda \pm \sqrt{(\lambda + 1)(\lambda - 3)}).$$

它们可以通过 $f_{\lambda}^2(x) = x$ 解出. 当 $\lambda < 1 + \sqrt{6}$ 时这两个周期点都是稳定的. 读者还可以继续发掘下去. 这种随参数连续渐变而呈现出的周期性突变现象称为分岔. 上述过程呈现出一变二、二变四、四变八……的规律, 称为倍周期分岔现象或 Feigenbaum 分岔现象. 其中, 分岔现象发生的每一个参数点 $\lambda = 1, 3, 1 + \sqrt{6}, \dots$ 称为分岔点. 在图 6.38 中我们用所谓的分岔图来形象地展示了这一有趣的现象, 图中横坐标表示参数 λ 的值, 纵坐标表示对应的映射 f 的稳定的周期点随参数 λ 的变化而变化的情况, 读者可清楚地看到在分岔点处每个稳定的周期点失去稳定性后变为两个周期点, 同时周期扩大了一倍.

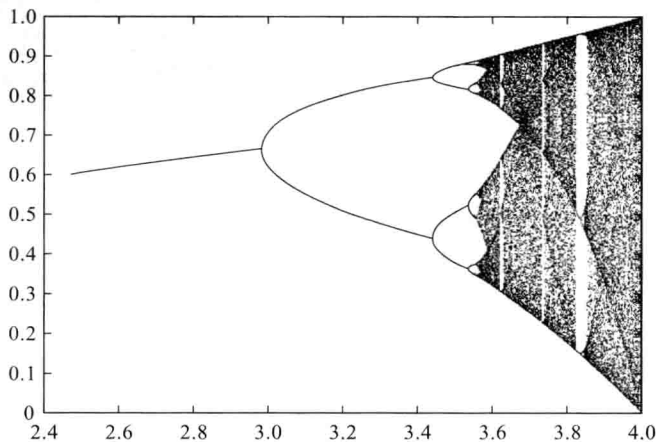


图 6.38 Feigenbaum 分岔现象

1964 年苏联数学家 A. N. Sharkovsky 对自然数作了重新排序, 称为 **Sharkovsky 序**:

$$\begin{aligned} & 3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft \dots \triangleleft 2n+1 \triangleleft 2n+3 \triangleleft \dots \\ & \triangleleft 2 \times 3 \triangleleft 2 \times 5 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \times (2n+1) \triangleleft 2 \times (2n+3) \triangleleft \dots \\ & \triangleleft 2^2 \times 3 \triangleleft 2^2 \times 5 \triangleleft \dots \triangleleft 2^2 \times (2n+1) \triangleleft 2^2 \times (2n+3) \triangleleft \dots \\ & \dots \dots \dots \dots \\ & \triangleleft 2^m \times 3 \triangleleft 2^m \times 5 \triangleleft \dots \triangleleft 2^m \times (2n+1) \triangleleft 2^m \times (2n+3) \triangleleft \dots \\ & \dots \dots \dots \dots \\ & \triangleleft 2^l \triangleleft 2^{l-1} \triangleleft \dots \triangleleft 16 \triangleleft 8 \triangleleft 4 \triangleleft 2 \triangleleft 1, \end{aligned}$$

并证明了如下重要结果 (参见文献 [28] 的第二章及 [30] 和 [31]), 它全面揭示了一维迭代动力系统的周期性规律.

定理 6.10 (Sharkovsky 定理) 设 f 为闭区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上的连续自映射且有 p

周期点,则对任何自然数 m ,只要 $p < m$, f 就必有 m 周期点.

1900 年著名数学家 Hilbert (1862—1943) 在国际数学家大会上提出了 23 个重要问题,其中第 16 问题的后半部分是要求给出平面多项式微分系统

$$\frac{dx}{dt} = P_k(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q_k(x, y)$$

的极限环个数的最大上界 $H(k)$ 以及极限环的相对位置. 这里要求 $H(k)$ 只与 x, y 的 k 次多项式 $P_k(x, y)$ 和 $Q_k(x, y)$ 的次数 k 有关,而不依赖于 $P_k(x, y)$ 和 $Q_k(x, y)$ 的具体形式. 近百年来围绕着这个问题不少数学家做了大量研究,但到目前为止连最简单的情况 $H(2)$ 都未解决. 目前只知道 $H(2) \geq 4, H(3) \geq 12, H(n) \geq n^2 \log(n)$. 对于一个给定的多项式系统,1923 年 Dulac 证明最多有有限个极限环,但他的证明被发现漏洞. 后来



图 6.39 D. Hilbert (1862—1943)

后来 Ecalle 及 Ilyashenko 分别独立地证明了 Dulac 的结果是正确的. 由此可见,关于微分方程的周期轨道的研究仍十分艰巨,还有不少重要问题有待人们去探索.

习题 6.5

1. 引入柱坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$. 证明: 当 $\mu \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, 方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (\mu - 1)x - y + xz, \\ \frac{dy}{dt} = x + (\mu - 1)y + yz, \\ \frac{dz}{dt} = \mu z - (x^2 + y^2 + z^2) \end{cases}$$

有使得 z 为常数的周期解, 并求出周期解的表达式.

2. 证明系统 $\frac{dx}{dt} = f(x)$ 的任一轨道的极限集都是闭集.
3. 证明系统 $\frac{dx}{dt} = f(x)$ 的轨道 $x = \varphi(t, x_0)$ 的 ω 极限集是空集的充要条件为

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t, x_0)\| = +\infty,$$

它的 α 极限集是空集的充要条件为

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|\varphi(t, x_0)\| = +\infty.$$

4. 证明系统 $\frac{dx}{dt} = f(x)$ 的轨道 $x = \varphi(t, x_0)$ 的 ω 极限集是单点集 $\{x^*\}$ 的充要条件为

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, x_0) = x^*,$$

它的 α 极限集是单点集 $\{x^*\}$ 的充要条件为

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, x_0) = x^*.$$

5. 证明 Dulac 判据.

6. 证明下列系统无闭轨:

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = -(1-x)^3 + xy^2, \quad \frac{dy}{dt} = y + y^3;$$

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = 2xy + x^3, \quad \frac{dy}{dt} = -x^2 + y - y^2 + y^3;$$

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = (1+x^2)y + x^3.$$

7. 构造形如 $B(x, y) = e^{mx+ny}$ 的 Dulac 函数, 证明系统

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x - y + x^2 + y^2$$

无闭轨, 其中 m, n 为常数.

8. 引入极坐标并用 Poincaré-Bendixson 环域定理证明系统

$$\frac{dx}{dt} = x - y - x^3, \quad \frac{dy}{dt} = x + y - y^3.$$

在环形区域 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ 内有闭轨.

9. 引入极坐标证明系统

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \quad \frac{dy}{dt} = x + y(1 - x^2 - y^2)$$

有唯一的极限环并用后继函数法讨论极限环的稳定性.

10. 令 $f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 1$, 计算 $f^n(x)$ 的表达式, 其中 $n \geq 1$.

11. 设

$$f(x) = \frac{x \cos \theta - \sin \theta}{x \sin \theta + \cos \theta},$$

证明当 $n \geq 1$ 时,

$$f^n(x) = \frac{x \cos n\theta - \sin n\theta}{x \sin n\theta + \cos n\theta}.$$

12. 设 $f: I \rightarrow I$ 为闭区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上的连续自映射, x_0 为 f 的 p 周期点, $\varphi = f^q$. 证明: 如果正整数 q 满足 $(p, q) = d, m = p/d$, 则 x_0 为 φ 的 m 周期点, 这里 (p, q) 为 p, q 的最大公约数. 特别地, 当 p, q 互素时, x_0 也为 φ 的 p 周期点. 反之, 如果 x_0 既为 f 的 p 周期点也为 φ 的 m 周期点, 则 $p = m(p, q)$.

13. 讨论 $\mathbb{R}$ 上的映射族 $g_\mu(x) = \mu - x^2$ 发生的 Feigenbaum 现象, 并计算前三个分岔点 μ_1, μ_2, μ_3 , 可用数值方法求出近似值.

§ 6.6 平面 Hamilton 系统

在这一节我们应用前面的定性理论方法来分析一类在物理学中重要的系统, 即 Hamilton 系统.

令 $W \subset \mathbb{R}^{2n}$ 为开集, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 且 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in W$, $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 为定义在 W 上的连续可微实函数. 称如下形式的系统

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}, \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (6.52)$$

为 W 上带 n 个自由度的 **Hamilton 系统**, 称 $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 为系统 (6.52) 的 **Hamilton 函数**, 其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top$,

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \frac{\partial H}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n} \right)^\top, \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, \frac{\partial H}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y_n} \right)^\top.$$

在经典天体力学的多体问题和无阻尼的机械振动中常常会遇到 Hamilton 系统, 这时 Hamilton 函数 $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 往往表示这样一个力学系统的总能量. 因此对一般的 Hamilton 系统 (6.52), 我们又称其 Hamilton 函数 $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 为 **能量函数**. 下面是 Hamilton 函数 $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的一个非常重要的性质.

定理 6.11 Hamilton 系统 (6.52) 的 Hamilton 函数 $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 沿着 (6.52) 的轨道等于常数.

证明 设 $(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ 为系统 (6.52) 的解, 则 $H(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ 为 t 的函数. 易见

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} \frac{d\mathbf{y}}{dt} \\ &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

这表明沿着轨道 $(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ 函数 $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 是一个常数. $\square$

定理 6.11 表明在一个无阻尼的机械振动系统中, 系统的总能量保持不变, 因此定理 6.11 表明 Hamilton 系统满足 **能量守恒定律**. 一般把满足能量守恒定律的系统称为 **保守系统**. 显然 Hamilton 系统是保守系统.

带一个自由度的 Hamilton 系统即为平面 Hamilton 系统. 我们前面有许多例子都涉及如下形式的微分方程:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + g(x) = 0, \quad (6.53)$$

其中 $x \in \mathbb{R}$, $g(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续可微函数. 如果用 y 表示速度, 上述方程可以等价地写成

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x). \quad (6.54)$$

不难证明它是 Hamilton 系统, 其 Hamilton 函数为

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + G(x),$$

其中

$$G(x) = \int_0^x g(s) ds$$

是系统运动的势能, 而 $\frac{y^2}{2}$ 是系统运动的动能. 因此这类特殊的平面 Hamilton 系统也被称为“动能+势能”型 Hamilton 系统. 容易看到 (x_0, y_0) 为 (6.54) 的平衡点当且仅当 $y_0 = 0$ 且 $g(x_0) = 0$. 在这种情况下 $G'(x_0) = 0$, 因此 x_0 为势能函数 $G(x)$ 的临界点.

定理 6.12 系统 (6.54) 的平衡点都在 x 轴上. $(x_0, 0)$ 为平衡点当且仅当 x_0 为势能函数 $G(x)$ 的临界点. 当 x_0 为 $G(x)$ 的严格极大值点时, 即 $G''(x_0) < 0$, $(x_0, 0)$ 为系统 (6.54) 的鞍点. 当 x_0 为 $G(x)$ 的严格极小值点时, 即 $G''(x_0) > 0$, $(x_0, 0)$ 为系统 (6.54) 的中心.

证明 只需要证明定理的后一半结论. 设 x_0 为 $G(x)$ 的严格极大值点, 这时必有

$$G'(x_0) = g(x_0) = 0, \quad G''(x_0) = g'(x_0) < 0, \quad (6.55)$$

在 $(x_0, 0)$ 处考虑系统 (6.54) 右边函数的 Jacobi 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g'(x_0) & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.56)$$

由 (6.55) 知 $\text{tr } A = 0$, $\det A = g'(x_0) < 0$. 可以断定矩阵 A 有两个符号相反的非零实特征根. 因此 $(x_0, 0)$ 是系统 (6.54) 的鞍点.

再设 x_0 为 $G(x)$ 的严格极小值点, 这时必有

$$G'(x_0) = g(x_0) = 0, \quad G''(x_0) = g'(x_0) > 0. \quad (6.57)$$

在 $(x_0, 0)$ 处 (6.54) 右边函数的 Jacobi 矩阵同样由 (6.56) 给出, 同时 $\text{tr } A = 0$, $\det A = g'(x_0) > 0$. 可以断定矩阵 A 的两个特征根是一对共轭纯虚根. 故 $(x_0, 0)$ 为系统 (6.54) 的线性部分的中心.

为了进一步证明 $(x_0, 0)$ 也为系统 (6.54) 的中心, 我们注意到, 定理 6.11 告诉我们系统 (6.54) 在平衡点 $(x_0, 0)$ 附近的轨道形成了相平面中的一族曲线

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + G(x) - G(x_0) \equiv C, \quad (6.58)$$

其中 C 为常数. 显然 $V(x_0, 0) = 0$, 即在平衡点 $(x_0, 0)$ 处 $C = 0$. 又由于 x_0 为 $G(x)$ 的严格极小值点, 因此存在 $(x_0, 0)$ 的闭邻域 $N_\delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + y^2 \leq \delta^2\}$, 使得在 $N_\delta \setminus \{(x_0, 0)\}$ 上 $V(x, y) > 0$. 令

$$l = \min_{(x, y) \in \partial N_\delta} V(x, y),$$

这里 $\partial N_\delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + y^2 = \delta^2\}$ 是 N_δ 的边界. 现在我们证明: 只要 $0 < C < l$, 曲线 (6.58) 就是包含平衡点 $(x_0, 0)$ 在内的闭曲线. 事实上, 设 γ 是由 $(x_0, 0)$ 出发到 ∂N_δ 的任意一条曲线. 则沿着 γ , $V(x, y)$ 的值由初始的 0 变到大于或等于 l . 对任意给定的常数 $0 < C < l$, 由 $V(x, y)$ 的连续性知, 在 γ 上必有一点使得 $V(x, y) = C$, 即 γ 必与曲线 (6.58) 相交. 这表明: 曲线 (6.58) 必为包含平衡点 $(x_0, 0)$ 在内的闭曲线.

现在取定某个 $C_0 < l$. 当 C 由 0 变到 C_0 时我们由 (6.58) 得到一族彼此不相交的同时包含平衡点 $(x_0, 0)$ 在内的闭曲线. 当 $C = 0$ 时它退化为平衡点 $(x_0, 0)$. 因此存在平衡点 $(x_0, 0)$ 的一个邻域, 使得系统 (6.54) 的轨道全为闭轨, 从而证明了 $(x_0, 0)$ 是系统 (6.54) 的中心. $\square$

由定理 6.12, 如果势能函数 $G(x)$ 仅有孤立临界点, 并且每个临界点都是严格极值点, 则不难由势能函数 $G(x)$ 的图像对应地在 Oxy 坐标系中画出系统 (6.54) 的相图, 参看图 6.40. 其中除了平衡点都在 x 轴上外, 轨道由曲线族 $H(x, y) = C$ 给出, 它们关于 x 轴是对称的.

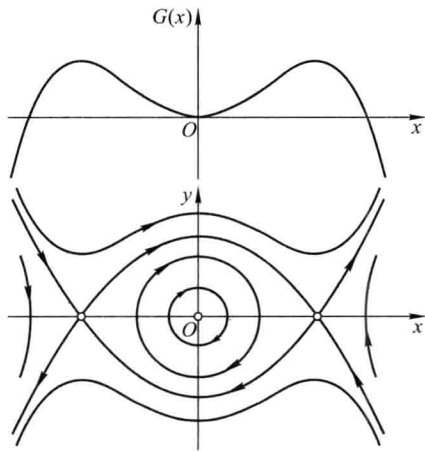


图 6.40 系统 (6.54) 的势能函数与相图

例 6.9 在例 6.1 的单摆中设 $\mu = 0$, 即系统无阻力, 则方程 (6.15) 变为

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\omega^2 \sin \varphi,$$

其中 $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ 为摆动的固有频率. 令 $x = \varphi, y = \frac{d\varphi}{dt}$, 上述系统等价地写成

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin x. \quad (6.59)$$

显然 (6.59) 是形如 (6.54) 的平面 Hamilton 系统, 其势能函数为 $G(x) = \omega^2(1 - \cos x)$, 其轨道由曲线族 $\frac{y^2}{2} + G(x) = C$ 给出.

进一步考虑势能函数的临界点

$$x_k = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

易见, 当 $k=2m (m \in \mathbb{Z})$ 时, x_k 为 $G(x)$ 的严格极小值点, $(x_k, 0)$ 为系统 (6.59) 的中心; 当 $k=2m+1 (m \in \mathbb{Z})$ 时, x_k 为 $G(x)$ 的严格极大值点, $(x_k, 0)$ 为系统 (6.59) 的鞍点. 进而, 我们可以计算在每个中心处的总能量为 $C_0 = H(2m\pi, 0) = 0$, 在每个鞍点处的总能量为 $C_1 = H((2m+1)\pi, 0) = 2\omega^2$. 因此对 $C \in (0, 2\omega^2)$, 曲线族 $\frac{y^2}{2} + G(x) = C$ 是一族闭轨. 根据对称性我们容易画出系统 (6.59) 的相图, 见图 6.41. 它形如一条连着一串的“小鱼”. 事实上在这些“小鱼”中存在这样的轨道, 当 $t \rightarrow +\infty$ 和 $t \rightarrow -\infty$ 时分别趋于两个相邻的鞍点. 我们称这样的轨道为异宿轨, 它相应于能量值 C_1 . 尤其是这样的轨道在 x 轴的两侧对称成对地出现, 每一对与相应的鞍点一起形成一个带有平衡点的闭曲线包围着一个中心. 我们称这样的闭曲线为异宿环或分界线环.

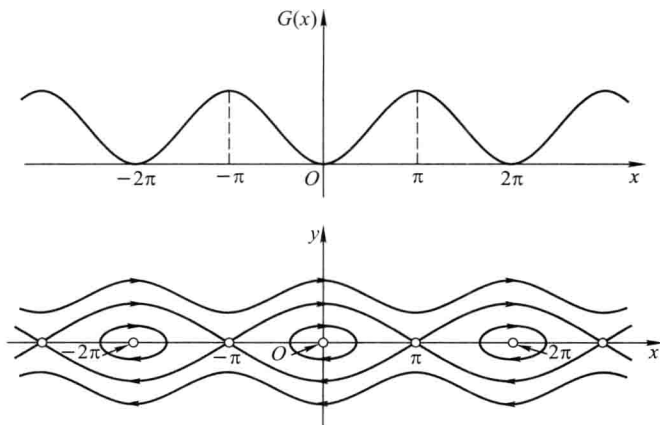


图 6.41 无阻尼单摆系统的势能函数与相图

平衡点、闭轨以及上述异宿轨之类的这些特殊轨道在平面自治系统的定性分析中起着关键性作用. 只要我们把它们的性态分析清楚了, 一个平面自治系统

的全局相图的结构也就比较清楚了.

习题 6.6

1. 令 $W \subset \mathbb{R}^2$ 为开集, $x \in W$, $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ 连续可微. 证明系统

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

为 W 上的 Hamilton 系统当且仅当在 W 上 $\operatorname{div}(f(x)) \equiv 0$.

2. 设 α, β, γ 都是实常数, $\beta > 0$. 考虑如下的波动方程:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} + \beta \phi^3 + \gamma \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$

设 c 为任意常数, 令 $\xi = x - ct$, $\phi(x, t) = u(\xi)$. 请推导出以 ξ 为自变量的函数 $u(\xi)$ 所满足的常微分方程, 并证明当 $c = \frac{\alpha}{\gamma}$ 时, 该微分方程的所有解均为周期解.

3. 设系统

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (6.60)$$

为 Hamilton 系统. 证明方程 $P(x, y) dy - Q(x, y) dx = 0$ 为恰当方程且其原函数为 (6.60) 的 Hamilton 函数.

4. 求出下列 Hamilton 系统的 Hamilton 函数并画出系统的相图:

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + x^2;$$

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + x^3;$$

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -1 + x^2.$$

5*. 证明: 平面 Hamilton 系统的任意一个流在将一个平面区域变换为另一个平面区域时保持面积不变.

提示: 当通过变换 $(u, v) = (u(x, y), v(x, y))$ 把一个平面区域 D_0 变换为另一个平面区域 D_1 时, D_1 的面积为

$$\iint_{D_0} \det \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right) dx dy.$$

6*. 设 $a(x, y), b(x, y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上不为零的连续可微函数. 证明: 连续可微函数 $u = U(x, y)$ 是一阶线性偏微分方程

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (6.61)$$

的解, 当且仅当 $U(x, y)$ 是常微分方程

$$\frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{b(x, y)} \quad (6.62)$$

的首次积分 (见第二章第 2 节). 方程 (6.62) 称为 (6.61) 的特征方程.

7. 求偏微分方程

$$(x^2 - y^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2xy \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

的一个解.

外国数学家译名对照表

Airy, G. B.	艾里	Jordan, C.	若尔当
Arzela, C.	阿尔泽拉	Kutta, M. W.	库塔
Ascoli, G.	阿斯科利	Lagrange, J. L.	拉格朗日
Bendixson, I.	本迪克松	Legendre, A. M.	勒让德
Bernoulli, J.	伯努利	Leibniz, G. W.	莱布尼茨
Bessel, W.	贝塞尔	Lyapunov, A. M.	李雅普诺夫
Birkhoff, G. D.	伯克霍夫	Liouville, J.	刘维尔
Burger	伯格	Lipschitz, R. O. S.	利普希茨
Cauchy, A. L.	柯西	Lorenz, E. N.	洛伦茨
Clairaut, A. C.	克莱罗	Newton, I.	牛顿
Cramer, G.	克拉默	Peano, G.	佩亚诺
Dulac, H.	迪拉克	Picard, E.	皮卡
Ecalte, J.	埃可	Poincaré, H.	庞加莱
Euler, L.	欧拉	Riccati, J.	里卡蒂
Feigenbaum, M. J.	费根鲍姆	Routh, E. J.	若思
Green, G.	格林	Runge, C.	龙格
Gronwall, T. H.	格朗沃尔	Sharkovsky, A. N.	沙科夫斯基
Hamilton, W. R.	哈密顿	Taylor, B.	泰勒
Hermite, C.	埃尔米特	Vandermonde, A. T.	范德蒙德
Hilbert, D.	希尔伯特	van der Pol, B.	范德波尔
Hurwitz, A.	赫尔维茨	Wintner, A. F.	温特
Ilyashenko, Y. S.	伊里雅申科	Wronski, H.	朗斯基
Jacobi, C.	雅可比		

关键词索引

A

鞍点 183
Ascoli-Arzelà 引理 124

B

半稳定极限环 191
饱和解 130
包络 44
保守系统 55, 200
倍周期分岔现象 197
Bendixson 判据 193
Bernoulli 方程 19
Bessel 方程 86
闭轨 161
边界 131
变量分离 16
标准解矩阵 70, 101
步长 154
不动点 196
不稳定极限环 191
不稳定周期点 196

C

C^1 依赖性定理 148
 C -判别曲线 45
Cauchy 定理 83
Cauchy 问题 7
常负 173
常数变易法 19
常数变易公式 19

常正 173
初等平衡点 188
初值条件, 初值问题 7
Clairaut 方程 46
粗的平衡点 188

D

代换法 96
单步法 154
单向结点 184
等度连续 124
等倾线 9
第一比较定理 138
第二比较定理 140
迭代 195
叠加原理 65
定负 173
定性性质 180
定正 173
动力系统 163
Dulac 函数 194
Dulac 判据 194

E

ε -逼近解 126
二项式法 96
Euler 待定指数函数法 90
Euler 公式 154
Euler 折线法 122

F

方向场 9

非齐次线性方程 18, 61
 非线性 13
 Feigenbaum 分岔现象 197
 分岔 197
 分岔点 197
 分界线环 204
 分离变量法 17
 负半轨 196

G

高阶平衡点 188
 共振 112
 共振频率 113
 Gronwall 不等式 136
 固有初相位 109
 固有振幅 109
 固有周期 109
 轨道 54, 161, 196
 轨道唯一性 162
 规范形式 11

H

Hamilton 函数 200
 Hamilton 系统 55, 200
 Hilbert 第 16 问题 198
 后继函数 195
 后继函数法 195

J

基本解矩阵 70
 基本解组 67
 积分曲线 9
 积分因子, 积分因子法 31
 极限环 191
 α 极限点, ω 极限点 192
 极限集 192
 α 极限集, ω 极限集 192
 渐近稳定 165

焦点 185
 节点 153
 解 6
 解矩阵 67
 解析相除法 95
 解析展开法 95
 精度 157
 Jordan 闭曲线定理 192
 局部截断误差 156
 矩阵指数函数 100

L

Legendre 方程 85
 离散半动力系统 196
 离散动力系统 163, 196
 连续动力系统 163
 连续依赖性定理 144
 两向结点 183
 Lyapunov 第二方法 172
 Lyapunov 函数 174
 Lyapunov 稳定 164
 Lyapunov 稳定性判据 173
 Lyapunov 直接法 172
 临界点 201
 临界结点 182
 临界情形 172
 Liouville 公式 67, 77
 Lipschitz 常数 115
 Lipschitz 条件 115
 流 163
 logistic 映射 196

M

幂级数解法 82

N

内境界线 192
 能量函数 200

能量守恒定律 200

Newton 系统 55

扭扩系统 164

P

p -判别曲线 46

拍频 112

拍振 111

Peano 存在性定理 122

Picard 存在唯一性定理 115

Picard 迭代序列 116

Picard 逐次逼近法 64, 116

频率锁定 113

平衡点 161

平衡解 10

平移不变性 161

Poincaré-Bendixson 环域定理 192

Poincaré 截面 195

Poincaré 映射 195

Q

齐次线性方程 18, 61

奇点 161

奇解 44

奇线 188

恰当方程 28

全局渐近稳定 165

全微分方程 28

群性质 162

R

Riccati 方程 56

Routh-Hurwitz 定理 169

Runge-Kutta 方法 158

Runge-Kutta 公式 158

S

Sharkovsky 定理 198

Sharkovsky 序 197

首次积分 28

算子解法 94

T

特解 7

特征多项式 90

特征方程 90

特征根, 特征解 90

梯形方法 155

通解 7

退化结点 184

退化平衡点 188

W

外境界线 192

稳定 165

稳定极限环 191

稳定周期点 196

Wronski 行列式 67, 77

无切线段 195

X

细的平衡点 188

细焦点 188

显式单步法 156

线性 13

线性变分方程 151

线性近似方程组 167

线性无关 66

线性相关 66

相空间 161

向量场 161

相平面 54

相图 54, 191

谐振动 109

星形结点 182

		Y	
解的延拓定理	131		正常结点 183
异宿轨	203		整体连续依赖性定理 145
异宿环	204		中心 185
一致有界	124		中心焦点判定 188
隐式解	15		中心型焦点 188
有界性	133		周期,周期点 196
		Z	周期轨 161,196
			自治系统 161
			阻尼临界值 110
			最大解,最小解 139
正半轨	196		

参考文献

- [1] V. I. Arnold. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: Springer-Verlag, 1982.
- [2] V. I. Arnold(阿诺德). 常微分方程. 沈家骥, 周宝熙, 卢亭鹤, 译. 北京: 科学出版社, 1985.
- [3] 蔡燧林. 常微分方程. 杭州: 浙江大学出版社, 1988.
- [4] E. A. Coddington, N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: McGraw-Hill, 1955.
- [5] 丁同仁, 李承治. 常微分方程教程. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [6] Ф. П. 甘特马赫尔. 矩阵论. 柯召, 译. 北京: 高等教育出版社, 1955.
- [7] J. Guckenheimer, P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [8] J. K. Hale. *Ordinary Differential Equations*. New York: Wiley, 1969.
- [9] P. Hartman. *Ordinary Differential Equations*. Second Edition. Boston - Basel - Stuttgart: Birkhäuser, 1982.
- [10] 金福临, 李训经. 常微分方程. 上海: 上海科学技术出版社, 1979.
- [11] W. Kohler, L. Johnson. *Elementary Differential Equations*. Boston: Addison - Wesley, 2003.
- [12] S. Lefschetz. *Ordinary Differential Equations: Geometric Theory*. New York: Interscience, 1957.
- [13] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析. 4 版. 北京: 清华大学出版社, 2001.
- [14] 林武忠, 汪志鸣, 张九超. 常微分方程. 北京: 科学出版社, 2003.
- [15] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*, New York: Springer-Verlag, 1991.
- [16] I. G. Petrovsky (彼得罗夫斯基). 常微分方程讲义. 黄克欧, 译. 北京: 高等教育出版社, 1957.
- [17] 秦元勋. 微分方程所定义的积分曲线. 北京: 科学出版社, 1959.
- [18] A. L. Rabenstein. *Elementary Differential Equations with Linear Algebra*. New York: Harcourt Brace Jovanovich, 1982.
- [19] G. Sansone, R. Conti. *Non-linear Differential Equations*. New York: Perga-

- mon, 1964.
- [20] V. V. Stepanov (史捷班诺夫). 微分方程教程. 卜元震, 译. 北京: 高等教育出版社, 1955.
- [21] J. Stoer, R. Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis*. 2nd Edition. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [22] W. F. Trench. *Elementary Differential Equations*. New York: Brook-Cole, 2000.
- [23] 王高雄, 周之铭, 朱思铭, 等. 常微分方程. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 1983.
- [24] 王柔怀, 伍卓群. 常微分方程讲义. 北京: 人民教育出版社, 1963.
- [25] G. N. Waston. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. 2nd Edition. London: Cambridge, 1944.
- [26] 叶彦谦. 常微分方程讲义. 2 版. 北京: 人民教育出版社, 1982.
- [27] 叶彦谦. 极限环论. 2 版. 上海: 上海科学技术出版社, 1984.
- [28] 张伟年. 动力系统基础. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [29] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论. 北京: 科学出版社, 1985.
- [30] 张筑生. 微分动力系统原理. 北京: 科学出版社, 1987.
- [31] 朱德明, 韩茂安. 光滑动力系统. 上海: 华东师范大学出版社, 1993.

部分习题答案和提示

习题 1.1

1. 以船的初始位置为坐标原点,取坐标轴 y 垂直于河对岸. 设船的运动轨迹为 $y=y(x)$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{v_0}{ky(a-y)}$.
2. 设曲线方程为 $x=x(t)$, 则有三种情况: $t^2+x^2 = \left(x-t \frac{dx}{dt}\right)^2$; $x^2 = t^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$; $2xt \frac{dx}{dt} = x^2 - t^2$.

习题 1.2

1. 初值问题的解为 $x(t) = 2e^{-3t} + 2t + 1$.
2. $R(t) = R_0 e^{-k(t-t_0)}$.
3. 令 $v = \frac{dx}{dt}$, 则运动方程为 $m \ddot{x} = m \dot{v} = -mg - k^2 v^2$, 初值条件为 $v(0) = v_0$. 物体达到最高点的时间是 $t = \frac{\sqrt{mg}}{gk} \arctan \frac{kv_0}{\sqrt{mg}}$.
4. 对例 1.2 的微分方程, 令 $x_1 = \theta, x_2 = \frac{d\theta}{dt}$, 则可将其化成规范的一阶方程组

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{g}{l} \sin x_1.$$

对例 1.3 的微分方程, 令 $y = \frac{dx}{dt}$, 则可将其化成规范的一阶方程组

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{k}{m}x - \frac{\mu}{m}y.$$

习题 1.3

1. (1) $x = t \frac{dx}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$;
- (2) $\frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} + 2x = 0$;
- (3) $\frac{d^2 x}{dt^2} = \pm \left[1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]^{3/2}$.

2. 建立 Oxy 平面坐标系, 使细磁棒的端点分别在 $A(-a, 0)$ 和 $B(a, 0)$ 点, 在 A 处的点磁荷的磁量为 $+1$, 在 B 处的点磁荷的磁量为 -1 . 所求磁场满足的微分方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)},$$

其中

$$P(x, y) = \frac{x+a}{\sqrt{((x+a)^2+y^2)^3}} - \frac{x-a}{\sqrt{((x-a)^2+y^2)^3}},$$

$$Q(x, y) = \frac{y}{\sqrt{((x+a)^2+y^2)^3}} - \frac{y}{\sqrt{((x-a)^2+y^2)^3}},$$

习题 2.1

1. 如果 $g(y_0) = 0$, 则 $y \equiv y_0$ 是方程的解. 如果 $g(y_0) \neq 0$, 则初值问题

$$\frac{dy}{dx} = h(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0$$

可用分离变量法来求解. 在实际求解中除了求出使 $g(y) = 0$ 的 y 值以外, 只要用 $g(y)$ 除方程 $\frac{dy}{dx} = h(x)g(y)$ 的两边, 然后求不定积分

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x) dx + C,$$

即可求出隐式通解.

2. (1) $x^2 + y^2 = C \quad (C > 0)$;

(2) $y = -\frac{1}{\sin x + C}, \quad y = 0$;

(3) $y = Ce^{x^2}$;

(4) $(1+x^2)(1+y^2) = Cx^2 \quad (C > 0)$;

(5) $e^{-4x} - 2e^{-2y} = C$;

(6) $y = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$;

(7) $y = \frac{1+Ce^x}{1-Ce^x}, \quad y = -1$;

(8) $y = \arctan(e^x + C), y = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \text{ 为任意整数})$;

(9) $y = \sin(\arcsin x + C), \quad y = -1, y = 1$;

(10) $y = -\frac{1}{x^2 + C}, \quad y = 0$;

(11) $y = C(x+1)^2$;

(12) $y^3 + e^y = \sin x + C$;

(13) $(x^2-1)(y^2-1) = C$.

3. (1) $\sin \frac{y}{x} = Cx$;
 (2) $y^2 + 2xy - x^2 - 6y - 2x = C$;
 (3) $\ln |y| - \frac{y}{x} = C, y=0$;
 (4) $y - \ln |x+y+1| = C$;
 (5) $2x^2 + 2xy + y^2 - 8x - 2y = C$;
 (6) $x^3 - 2y^3 = Cx$;
 (7) $(x-y)^2 + 2x = C$;
 (8) $y^2 = x^2(\ln x^2 + C)$;
 (9) $(x-y)^2 + 10x + 4y = C$;
 (10) $\ln |y+2| + 2\arctan\left(\frac{y+2}{x-3}\right) = C, y=-2$;
 (11) $y = x(\ln |x| + C)^2, y=0$;
 (12) $\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} = Ce^{-\arctan \frac{y+1}{x+3}} \quad (C>0)$;
 (13) $y = x - \frac{2x}{\ln |x| + C}$;
 (14) $\tan(x+y+1) - \sec(x+y+1) = x+C$. 此外, 对任意整数 k ,
 $y = -x-1+2k\pi - \frac{\pi}{2}$ 也是原方程的解;
 (15) $y = |x| \sin(\ln |x| + C)$. 此外, $x^2 - y^2 = 0$ 也是原方程的解.
4. (1) $y = C(x+1)^2 + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}}$;
 (2) $y = \frac{1}{x}(-\cos x + C)$;
 (3) $y = \frac{e^x + C}{x}$;
 (4) $x^3 y + \frac{x^3}{3} - 2x^2 = C$;
 (5) $y = C(x+1) + 1 + (x+1)\ln(x+1)$;
 (6) $y = -\frac{1}{2} + Ce^{x^2}$.
5. (1) $x = y^2(C - \ln |y|), y=0$;
 (2) $x = \frac{y^3}{4} + \frac{C}{y}, y=0$;
 (3) $y^2 = 2Cx + C^2$.
6. (1) $y + e^y = \sin x + 2 + e^3$;
 (2) $y = \sqrt{1+2x^2}$;
 (3) $y^2 = 2\ln(1+e^x) + 1 - 2\ln 2$;
 (4) $y = \frac{3}{2}e^{\cos x - 1}$;

$$(5) e^y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + e - \frac{3}{4};$$

$$(6) y = \frac{3}{2}e^{1-x^2} + \frac{1}{2}.$$

$$7. (1) \frac{x^6}{y} - \frac{x^8}{8} = C, \quad y=0;$$

$$(2) xy \left(C - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right) = 1, y=0;$$

$$(3) y = x^4 (\ln |x| + C)^2;$$

$$(4) y = \frac{1}{Ce^{-x^2} - x^2 + 1}, \quad y=0.$$

$$8. \text{ 该曲线方程为 } y = \sin(\arctan x).$$

$$9. \text{ 该曲线方程为 } xy = 24.$$

习题 2.2

$$1. (1) x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C;$$

$$(2) \sin x + \frac{x}{y} + \ln |y| = C;$$

$$(3) x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - xy^3 + \frac{y^3}{3} = C;$$

$$(4) \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + xy = C;$$

$$(5) 3x^2 + xy + 2x + 4y^2 - 3y = C;$$

$$(6) x^2y + \ln y^2 = C;$$

$$(7) x^3 - 2xy^2 + y = C;$$

$$(8) x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = C;$$

$$(9) e^x + 3xy + \sin y = C.$$

$$2. (1) x^3y + 4x^2y^2 + 4y^3 = 28;$$

$$(2) x^4 e^{x+y} + x^2 + y^2 = 1.$$

$$3. \text{ 提示: 由假设知存在函数 } \phi(t), \text{ 使得 } \frac{M(x, y)}{N(x, y)} = \phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$4. (1) \ln |y| + \frac{x}{y} = C, \quad y=0;$$

$$(2) y^2 = C(C + 2x);$$

$$(3) x + \arctan \frac{x}{y} = C;$$

$$(4) e^x \left(x^2y + \frac{y^3}{3} \right) = C;$$

$$(5) x^2 \ln y + \frac{1}{3}(1+y^2)^{\frac{3}{2}} = C.$$

$$5. \mu = y^{-\alpha} e^{(\alpha-1) \int a(x) dx}.$$

$$6. \mu = \frac{1}{P(x)N(y)}.$$

$$7. f(x) = -2\cos x + K, K \text{ 为任意常数. 通解为 } \left(\frac{K}{2} - \cos x\right)y^2 = C, C \text{ 为任意常数.}$$

$$8. f(x) = \frac{C}{x} + \frac{x}{2}.$$

$$9. a = 1, \text{ 方程的通解为 } e^{-x} \sin y + x = C.$$

习题 2.4

$$1. (1) x = p^3 + 2p, \quad y = \frac{3}{4}p^4 + p^2 + C;$$

$$(2) y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2, \quad y = \frac{x^2}{4};$$

$$(3) y = x + \frac{1}{x-C} - C, \quad y = \pm 2;$$

$$(4) y = C(x-C)^2, \quad y = \frac{4}{27}x^3;$$

$$(5) x(t) = \ln \frac{|t+1|}{\sqrt{t^2-t+1}} - \sqrt{3} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{t} + C, \quad y = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = 0;$$

$$(6) \left(\frac{y-C}{x}\right)^5 - 5\left(\frac{y-C}{x}\right)^2 + 1 = 0.$$

$$2. (1) y = \sin(x+C), \quad y = \pm 1, \text{ 奇解: } y = \pm 1;$$

$$(2) y = Cx + \frac{1}{C}, \quad y^2 = 4x, \text{ 奇解: } y^2 = 4x;$$

$$(3) y = \frac{1}{4}(x+C)^2, \quad y = 0, \text{ 奇解: } y = 0;$$

$$(4) (y+C)^2 = (x+C)^3, \quad y = x - \frac{4}{27}, \text{ 奇解: } y = x - \frac{4}{27};$$

$$(5) y = x + \frac{1}{4}(x-C)^2 \quad (x \leq C), \quad y = x, \text{ 奇解: } y = x;$$

$$(6) y = Cx + \frac{C^2}{2}, \quad y = -\frac{x^2}{2}, \text{ 奇解: } y = -\frac{x^2}{2}.$$

$$3. (1) y = C_1 x^5 + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5;$$

$$(2) y^2 = C_1 x + C_2;$$

$$(3) y = C_1(x^3 + 3x) + C_2;$$

$$(4) y = C_2 e^{C_1 x};$$

$$(5) y = \frac{1}{12}(x+C_1)^3 + C_2;$$

$$(6) y = C_2 e^{C_1 x} + 1;$$

$$(7) y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-\frac{x}{2}} + C_3 x + C_4;$$

$$(8) y = (1+C_1^{-2}) \ln |C_1 x - 1| + \frac{x}{C_1} + C_2;$$

$$(9) y = C_2 e^{C_1 x} + C_3, y = C_1 x + C_2.$$

$$4. y = 1 - x.$$

6. 提示: 用反证法. 若有 x_0 , 使得 $\varphi(x_0) \neq 0$, 不妨设 $x_0 > 0$, 则存在 $\bar{x}_0$, 使得 $\varphi(\bar{x}_0) = 0$ 且当 $x \in (\bar{x}_0, x_0]$ 时, $\varphi(x) \neq 0$.

习题 3.1

2. 导数的行列式为 $48t^3 - 2t$, 行列式的导数为 $40t^4 - 3t^2 + 8t$.

3. 提示: 不妨设 $x(t) \geq 0$. 由假设可知存在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数 $r(t) \leq 0$, 使得

$$x(t) = r(t) + L + M \int_{\alpha}^t x(\tau) d\tau.$$

构造逐步逼近序列 $\{x_k(t)\}$, 其中 $x_0(t) = r(t) + L$, 且

$$x_{k+1}(t) = r(t) + L + M \int_{\alpha}^t x_k(\tau) d\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

仿照定理 3.1 的证明.

习题 3.2

$$3. a_{11}(t) = a_{22}(t) = 0, a_{12}(t) = 1, a_{21}(t) = -1.$$

习题 3.3

$$1. (2) \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t - 2\sin t \\ -\sin t + 2\cos t \end{pmatrix}.$$

习题 3.4

$$3. \text{ 方程的通解为 } x = \frac{1}{t} (C_1 \sin t + C_2 \cos t).$$

$$6. x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - \frac{t^2}{8} \cos 2t + \frac{t}{16} \sin 2t.$$

习题 3.5

1. Airy 方程在 $t=0$ 附近的幂级数解为

$$x = C_1 [1 + A(t)] + C_2 [t + B(t)],$$

其中 C_1, C_2 为任意常数, 并且

$$A(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{3n}}{(3n)(3n-1)(3n-3)(3n-4) \cdots 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2},$$

$$B(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{3n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-3) \cdots 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}.$$

2. 所给方程的幂级数解为

$$x(t) = 7 + 3t + 7 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2j+1)(t-1)^{2j}}{2^j j!} \\ + 3 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^j (j+1)!(t-1)^{2j+1}}{3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2j+1)}.$$

3. Hermite 方程的幂级数解为 $x = C_1 H_1(t) + C_2 H_2(t)$, 其中

$$H_1(t) = 1 - \frac{\lambda t^2}{2!} - \frac{\lambda(4-\lambda)t^4}{4!} - \frac{\lambda(4-\lambda)(8-\lambda)t^6}{6!} + \cdots, \\ H_2(t) = t + \frac{(2-\lambda)t^3}{3!} + \frac{(2-\lambda)(6-\lambda)t^5}{5!} \\ + \frac{(2-\lambda)(6-\lambda)(10-\lambda)t^7}{7!} + \cdots.$$

习题 4.1

1. (1) $x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$;

(2) $x(t) = C_1 e^t + C_2 \cos \sqrt{2}t + C_3 \sin \sqrt{2}t$;

(3) $x(t) = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-t}(C_3 \cos t + C_4 \sin t)$;

(4) $x(t) = e^t(C_1 + C_2 t + C_3 t^2) + C_4 e^{-t}$;

(5) $x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$;

(6) $x(t) = e^{-t}(C_1 \cos \sqrt{3}t + C_2 \sin \sqrt{3}t)$;

(7) $x(t) = C_1 + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t$;

(8) $x(t) = (C_1 + C_2 t) \cos 2t + (C_3 + C_4 t) \sin 2t$.

3*: 当 $\delta > \omega$ 时, 实通解为

$$x(t) = e^{-\delta t}(C_1 e^{\sqrt{\delta^2 - \omega^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega^2}t}).$$

当 $\delta = \omega$ 时, 实通解为

$$x(t) = e^{-\delta t}(C_1 + C_2 t).$$

当 $\delta < \omega$ 时, 方程的实通解为

$$x(t) = e^{-\delta t}(C_1 \cos \sqrt{\omega^2 - \delta^2}t + C_2 \sin \sqrt{\omega^2 - \delta^2}t).$$

习题 4.2

1. (1) $x(t) = C_1 + C_2 e^{-t} + \frac{t^3}{3} - t^2 + 3t$;

(2) $x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + \frac{t}{4} \sin 2t - \frac{1}{12} \cos 4t$;

(3) $x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - \frac{1}{8} t^2 \cos 2t + \frac{1}{16} t \sin 2t$;

$$(4) x(t) = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{3t} + \frac{1}{9} t^3 + \frac{4}{9} t^2 + \frac{26}{27} t;$$

$$(5) x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - e^{2t} \sin e^{-t};$$

$$(6) x(t) = C_1 e^t + (C_2 + C_3 t) e^{2t} + \frac{1}{2} e^{3t};$$

$$(7) x(t) = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t} + e^{t^2};$$

$$(8) x(t) = (C_1 + C_2 t) e^t + \frac{1}{6} t^3 e^t.$$

习题 4.3

1. 方程组的通解为

$$x_1 = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t - 2 - t + \frac{2}{5} e^{2t},$$

$$x_2 = 2C_1 e^t + (C_2 - C_3) \cos t + (C_2 + C_3) \sin t + \frac{3}{5} e^{2t} - 3 - 3t.$$

$$3. (1) x = 3C_1 e^t + 4C_2 e^{2t} + 2C_3 e^{3t}, \quad y = 2C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 2C_3 e^{3t},$$

$$z = 3C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{3t};$$

$$(2) x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t;$$

$$(3) x = -2C_1 e^{5t} + C_2 (3 \cos t - \sin t) e^{2t} + C_3 (\cos t + 3 \sin t) e^{2t},$$

$$y = C_2 (2 \cos t + \sin t) e^{2t} + C_3 (-\cos t + 2 \sin t) e^{2t},$$

$$z = C_1 e^{5t} - 2C_2 e^{2t} \cos t - 2C_3 e^{2t} \sin t;$$

$$(4) x = C_2 e^{(1+2\sqrt{2})t} + C_3 e^{(1-2\sqrt{2})t},$$

$$y = C_2 (2 - 2\sqrt{2}) e^{(1+2\sqrt{2})t} + C_3 (2 + 2\sqrt{2}) e^{(1-2\sqrt{2})t},$$

$$z = C_1 e^{-2t} - 4C_2 (25 - 18\sqrt{2}) e^{(1+2\sqrt{2})t} - 4C_3 (25 + 18\sqrt{2}) e^{(1-2\sqrt{2})t};$$

$$(5) x = \frac{25}{9} C_1 + C_2 e^{4t} + C_3 e^{9t}, \quad y = 5C_1 + C_2 e^{4t},$$

$$z = C_1 + C_2 e^{4t};$$

$$(6) x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}, \quad y = C_1 e^t - C_2 e^{5t},$$

$$z = C_3 e^{5t};$$

$$(7) x = \left(C_1 + C_2 t + C_3 \left(3t - \frac{1}{2} t^2 \right) \right) e^{2t}, \quad y = (C_2 - C_3 t) e^{2t},$$

$$z = C_3 e^{2t}.$$

4. 提示: 设矩阵 A 有互不相同的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, 重数分别为 $n_1, n_2, \dots, n_s$ 且 $n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$, 则 $\dot{x} = Ax$ 的任一解 $x(t)$ 均有形式:

$$x(t) = \sum_{j=1}^s e^{\lambda_j t} P_j(t),$$

其中 $P_j(t)$ 为多项式且 $\deg P_j(t) \leq n_j - 1$.

习题 4.4

1. 该重物的振动方程为 $x(t) = \frac{1}{4} \cos 8t$.

习题 5.1

3. $\varphi_3(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + \frac{2}{3}t^4 + \frac{1}{3}t^5 + \frac{1}{9}t^6 + \frac{1}{63}t^7$.

4. 解的存在区间为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, 第三次近似解为

$$\varphi_3(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^5}{20} - \frac{t^8}{160} + \frac{t^{11}}{4\,400},$$

它在解的存在区间上的误差估计为 $|\varphi_3(t) - \varphi(t)| \leq \frac{1}{24}$, 其中 $\varphi(t)$ 为所给初值问题的真正解.

5. 解的存在区间为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, 所求近似解为

$$\varphi_3(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{t^5}{20} + \frac{t^8}{160} + \frac{t^{11}}{4\,400}.$$

6. 所给初值问题的 Picard 迭代序列如下:

$$\varphi_0(t) = 0,$$

$$\varphi_n(t) = -t - 2 + 2 \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \quad (n \geq 1).$$

它一致收敛于初值问题的解 $x(t) = 2e^t - t - 2$.

7. 所给初值问题的 Picard 迭代序列如下:

$$\varphi_0(t) = x_0,$$

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{x_0}{k!} \left(\int_{t_0}^t P(\tau) d\tau \right)^k + \int_{t_0}^t Q(\tau) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\int_{\tau}^t P(s) ds \right)^k d\tau \quad (n \geq 1).$$

它一致收敛于初值问题的解

$$x(t) = \exp \left(\int_{t_0}^t P(\tau) d\tau \right) \left\{ x_0 + \int_{t_0}^t Q(\tau) \exp \left(- \int_{t_0}^{\tau} P(s) ds \right) d\tau \right\}.$$

8. 提示: 构造逐步逼近迭代序列如下:

$$\varphi_0(t) = f(t),$$

$$\varphi_n(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, \tau) \varphi_{n-1}(\tau) d\tau.$$

然后仿照 Picard 存在唯一性定理的证明的步骤即可.

习题 5.2

1. 相应的 Euler 折线 $\varphi(t)$ 为

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{27}{64}t + \frac{189}{256}, & t \in \left[-1, -\frac{3}{4}\right), \\ \frac{9}{16}t + \frac{27}{32}, & t \in \left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right), \\ \frac{3}{4}t + \frac{15}{16}, & t \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right), \\ t + 1, & t \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \\ \frac{5}{4}t + \frac{15}{16}, & t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \\ \frac{25}{16}t + \frac{25}{32}, & t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \\ \frac{125}{64}t + \frac{125}{256}, & t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases}$$

$\varphi(t)$ 和精确解 $x(t) = e^t$ 在区间的等分点处的值及误差可列表如下:

t_n	$\varphi(t)$	精确解	误差
-1.00	0.316 41	0.367 88	0.051 47
-0.75	0.421 88	0.472 37	0.050 49
-0.50	0.562 50	0.606 53	0.044 03
-0.25	0.750 00	0.778 80	0.028 80
0.00	1.000 00	1.000 00	0.000 00
0.25	1.250 00	1.284 03	0.034 03
0.50	1.562 50	1.648 72	0.086 22
0.75	1.953 13	2.117 00	0.163 87
1.00	2.441 41	2.718 28	0.276 87

4.* 提示: 隐函数定理的存在性部分: 设 $F(x, y), F_x(x, y), F_y(x, y)$ 在矩形区域 $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ 上连续, $F(x_0, y_0) = 0, F_y(x_0, y_0) \neq 0$, 则函数方程 $F(x, y) = 0$ 在 x_0 的某邻域内存在解 $y = \varphi(x)$, 使得 $y_0 = \varphi(x_0)$.

为此考虑初值问题

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \quad y(x_0) = y_0,$$

并利用 Peano 存在定理.

习题 5.3

3. 提示: 设 $(\bar{t}, \bar{x})$ 是 G 中介于 $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 间的部分内的任一点, 且 $\bar{t}, t_0 \in (c, d) \subset (a, b), \varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 均在区间 (c, d) 上存在, 不妨设 $\bar{t} < t_0$. 令

$$\tilde{G} := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in (c, d), \varphi_1(t) \leq x \leq \varphi_2(t)\}.$$

则方程过点 $(\bar{t}, \bar{x}) \in G$ 的解 $x = \varphi(t)$ 向右延拓时必与域 $\tilde{G}$ 的边界曲线相交.

4. 提示: 用反证法. 不妨设所给初值问题的解 $x = x(t)$ 在区间 $[t_0, +\infty)$ 上存在, 令 $\alpha = \max\{t_0, 1\}$, 则在 $[\alpha, +\infty)$ 上有:

$$\frac{x'(t)}{1+x^2(t)} \geq 1,$$

由此导出矛盾.

5. (1) 最大存在区间为 $(0, +\infty)$, 当 $t \rightarrow 0^+$ 时解趋于 0, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时解趋于 $+\infty$.

(2) 最大存在区间为 $(0, +\infty)$, 当 $t \rightarrow 0^+$ 时解趋于 $-\infty$, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时解趋于 -1 .

6. 提示: 用反证法. 不妨设方程的解 $x = \varphi(t)$ 向右只可延拓到区间 $[t_0, \beta_0)$, 其中 $t_0 \in (a, b), \beta_0 < b$. 取定 α 及 β , 使得

$$a < \alpha < t_0 < \beta_0 < \beta < b,$$

则在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上, 函数 $A(t) \geq 0, B(t) \geq 0$ 均有界, 设法由 Wintner 定理导出矛盾.

习题 5.4

6. 提示: 设积分曲线 $\Gamma: x = x(t)$ 与直线 $L: x = t$ 当 $t > 0$ 时有交点 $P: (t_0, x_0)$, 其中 $t_0 > 0$, 则当 $t > t_0$ 时 Γ 将保持在 L 的下方. 取满足

$$t_0^2 < \left(2m - \frac{1}{2}\right) \pi$$

的最小正整数 m , 则 P 必在双曲线

$$H: tx = \left(2m - \frac{1}{2}\right) \pi \quad (t > 0, x > 0)$$

下方. 证明当 $t > t_0$ 时 Γ 也将保持在 H 的下方.

习题 5.5

3. 所求表达式为

$$\frac{\partial x}{\partial t_0}(t; t_0, x_0) \Big|_{t_0=0, x_0=0} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial x_0}(t; t_0, x_0) \Big|_{t_0=0, x_0=0} = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

4. 提示: 令

$$z(t) = \frac{\partial x(t; t_0, \mathbf{x}_0)}{\partial t_0} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial x(t; t_0, \mathbf{x}_0)}{\partial x_i^0} f_i(t_0, \mathbf{x}_0),$$

证明 $z(t)$ 为初值问题

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(t, x(t; t_0, x_0)) \right) z, \quad z(t_0) = 0$$

的解.

习题 5.6

1. 提示: 改进的 Euler 公式的局部截断误差为

$$T_{n+1} = x(t_{n+1}) - x(t_n) - \frac{h}{2} [f(t_n, x(t_n)) + f(t_{n+1}, x_p)].$$

其中 $x_p = x(t_n) + hf(t_n, x(t_n))$. 再利用 Taylor 展开计算即可.

2. 用 Euler 折线法, 计算结果如下:

t_n	$x(t_n)$	x_n	$ x(t_n) - x_n $
0.1	0.557 752 127 4	0.550 000 000 0	0.007 752 127 4
0.2	0.632 034 804 1	0.614 983 341 7	0.017 051 462 4
0.3	0.724 430 460 4	0.696 348 609 0	0.028 081 851 4
0.4	0.836 585 030 0	0.795 535 490 6	0.041 049 539 4
0.5	0.970 217 221 0	0.914 030 873 9	0.056 186 347 1
0.6	1.127 129 756 0	1.053 376 515 0	0.073 753 241 0
0.7	1.309 222 769 0	1.215 178 414 0	0.094 044 355 0
0.8	1.518 509 528 0	1.401 118 024 0	0.117 391 504 0
0.9	1.757 134 672 0	1.612 965 436 0	0.144 169 236 0
1.0	2.027 395 183 0	1.852 594 671 0	0.174 800 512 0

用改进的 Euler 方法, 计算结果如下:

t_n	$x(t_n)$	x_n	$ x(t_n) - x_n $
0.1	0.557 752 127 4	0.557 491 670 8	0.000 260 456 6
0.2	0.632 034 804 1	0.631 452 600 7	0.000 582 203 4
0.3	0.724 430 460 4	0.723 457 947 3	0.000 972 513 1
0.4	0.836 585 030 0	0.835 145 560 3	0.001 439 469 7
0.5	0.970 217 221 0	0.968 225 129 9	0.001 992 091 1
0.6	1.127 129 756 0	1.124 489 297 0	0.002 640 459 0
0.7	1.309 222 769 0	1.305 826 894 0	0.003 395 875 0
0.8	1.518 509 528 0	1.514 238 495 0	0.004 271 033 0
0.9	1.757 134 672 0	1.751 854 468 0	0.005 280 204 0
1.0	2.027 395 183 0	2.020 955 716 0	0.006 439 467 0

用四阶 Runge-Kutta 公式, 计算结果如下:

t_n	$x(t_n)$	x_n	$ x(t_n) - x_n $
0.1	0.557 752 127 4	0.557 752 013 7	1.137×10^{-7}
0.2	0.632 034 804 1	0.632 034 550 5	2.536×10^{-7}
0.3	0.724 430 460 4	0.724 430 036 4	4.240×10^{-7}
0.4	0.836 585 030 0	0.836 584 402 6	6.274×10^{-7}
0.5	0.970 217 221 0	0.970 216 351 9	8.691×10^{-7}
0.6	1.127 129 756 0	1.127 128 603 0	1.153×10^{-6}
0.7	1.309 222 769 0	1.309 221 284 0	1.485×10^{-6}
0.8	1.518 509 528 0	1.518 507 655 0	1.873×10^{-6}
0.9	1.757 134 672 0	1.757 132 351 0	2.321×10^{-6}
1.0	2.027 395 183 0	2.027 392 346 0	2.837×10^{-6}

其中 $x(t_n)$ 为准值, x_n 为近似值, $|x(t_n) - x_n|$ 为绝对误差.

3. 所求积分的近似值为 0.746 824 183 9.

习题 6.2

1. 当 $\mu = -1$ 时有一个定常解 $x(t) \equiv 0$, 渐近稳定. 通解为

$$x^2 = \frac{Ke^{-2t}}{1 - Ke^{-2t}}.$$

当 $\mu = 0$ 时有一个定常解 $x(t) \equiv 0$, 渐近稳定. 通解为

$$x^2 = \frac{1}{2t + K}.$$

当 $\mu = 1$ 时有三个定常解 $x_1(t) \equiv -1$, $x_2(t) \equiv 0$, $x_3(t) \equiv 1$, 其中 $x_1(t)$, $x_3(t)$ 渐近稳定, $x_2(t)$ 不稳定. 通解为

$$x^2 = \frac{Ke^{2t}}{1 + Ke^{2t}},$$

3. 作变换 $u = x - \frac{1}{\mu}$, $v = y$, 则原方程组变成

$$\frac{du}{dt} = -\mu u - \left(u + \frac{1}{\mu}\right)^p v^q, \quad \frac{dv}{dt} = b \left(\left(u + \frac{1}{\mu}\right)^p v^q - v \right),$$

其零解渐近稳定.

5. 所给 van der Pol 方程的零解不稳定.

6. 原方程组有三个定常解

$$A: (x(t), y(t)) \equiv (0, 0), \quad B: (x(t), y(t)) \equiv \left(\frac{\alpha}{\beta}, 0\right),$$

$$C: (x(t), y(t)) \equiv \left(\frac{\delta}{\varepsilon}, \frac{\beta\delta}{\gamma\varepsilon} - \frac{\alpha}{\gamma} \right).$$

定常解 A 渐近稳定, 定常解 B 和 C 不稳定.

习题 6.3

2. (1) 令 $V(x, y) = x^2 + y^2$, 原方程的零解渐近稳定;
- (2) 令 $V(x, y) = xy$, 原方程的零解不稳定;
- (3) 令 $V(x, y) = xy$, 原方程的零解不稳定;
- (4) 令 $V(x, y) = x^2 + y^2$, 原方程的零解渐近稳定;
- (5) 令 $V(x, y) = 4x^2 + (x+y)^2$, 原方程的零解渐近稳定.

3. 零解不稳定.

7. 零解渐近稳定.

8. 提示: 由假设知零解稳定, 即对任意给定的 $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < M_1$), 存在 $\delta(\varepsilon) > 0$, 使得当 $\|x_0\| < \delta$ 时, 方程组满足初值条件 $x(t_0) = x_0$ 的解 $x(t; t_0, x_0)$ 对一切 $t \geq t_0$ 均有定义且满足

$$\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon < M_1.$$

由 Weierstrass 聚点原理知集合

$$\Omega(x_0) := \{x^* : \text{存在序列 } t_n \rightarrow +\infty, \text{ 使得 } \lim_{n \rightarrow +\infty} x(t_n; t_0, x_0) = x^*\}$$

非空. 可用反证法证明 $\Omega(x_0) = \{0\}$, 由此容易推导出零解渐近稳定.

事实上, 若 $x^* \in \Omega(x_0)$ 但 $x^* \neq 0$, 先证明

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(t; t_0, x_0)) = V(x^*).$$

再证明存在 $\bar{t} \geq t_0$, 使得 $V(x(\bar{t}; t_0, x^*)) < V(x^*)$. 由此证明

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(x(t_n + \bar{t}; t_0, x_0)) = V(x(\bar{t}; t_0, x^*)) < V(x^*),$$

从而导出矛盾.

习题 6.4

1. (1) 平衡点 $(-1, 1)$ 为原系统的稳定焦点;
- (2) 平衡点 $(0, 1)$ 为原系统的鞍点, 不稳定;
- (3) 平衡点 $(1, 0)$ 为原系统的不稳定两向结点;
- (4) 平衡点 $(-1, -1)$ 为原系统的鞍点, 不稳定.
2. 所给线性系统的平衡点 $(0, 0)$ 的类型和稳定性可分为如下几种情况:
 - (1) 当 $\alpha\gamma < 0$ 时, 平衡点 $(0, 0)$ 为鞍点, 不稳定.
 - (2) 当 $\alpha\gamma > 0$ 且 $\alpha \neq \gamma$ 时, 平衡点 $(0, 0)$ 为两向结点. 当 $\alpha > 0$ 时不稳定, 当 $\alpha < 0$ 时稳定.
 - (3) 当 $\alpha = \gamma$ 且 $\beta \neq 0$ 时, 平衡点 $(0, 0)$ 为单向结点. 当 $\alpha > 0$ 时不稳定, 当 $\alpha < 0$ 时稳定.
 - (4) 当 $\alpha = \gamma$ 且 $\beta = 0$ 时, 平衡点 $(0, 0)$ 为星形结点. 当 $\alpha > 0$ 时不稳定, 当 $\alpha < 0$ 时稳定.
3. 函数 $u(\xi)$ 所满足的常微分方程为

$$(u - c) \frac{du}{d\xi} = c \frac{d^2 u}{d\xi^2}.$$

令 $\frac{du}{d\xi} = v$, 则该方程等价于一阶微分方程组

$$\frac{du}{d\xi} = v, \quad \frac{dv}{d\xi} = \frac{1}{c}(u - c)v.$$

4. (1) 原方程组有两个平衡点 $A(-1, -1), B(4, 4)$, 均为双曲平衡点. 其中 A 为稳定焦点, B 为不稳定焦点.

(2) 原方程组有唯一的平衡点 $O(0, 0)$, 不是双曲平衡点.

(3) 原方程组有无穷多个平衡点 $(0, k\pi) (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. 当 k 为偶数时平衡点为双曲平衡点, 且为鞍点, 不稳定; 当 k 为奇数时平衡点不是双曲平衡点.

5. 原系统有奇点 $(0, 0)$ 及奇线 $x^2 + y^2 = 1$. 除奇点及奇线外该方程组的轨线族为相平面上的一族射线 $\theta(t) = t_0$, 在奇线 $x^2 + y^2 = 1$ 内部, 它趋于奇点 $(0, 0)$, 在奇线 $x^2 + y^2 = 1$ 外部, 它远离奇线 $x^2 + y^2 = 1$. 故原点是稳定的星形结点.

习题 6.5

1. 当 $\mu \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, 原方程组有使得 z 为常数的周期解, 其表达式为

$$x(t) = \sqrt{(1-\mu)(2\mu-1)} \cos(t+t_0),$$

$$y(t) = \sqrt{(1-\mu)(2\mu-1)} \sin(t+t_0),$$

$$z(t) = 1 - \mu.$$

其中 t_0 为任意常数.

9. 原系统唯一的极限环为稳定极限环 $x^2 + y^2 = 1$.

$$10. f^n(x) = a^n x + \frac{1-a^n}{1-a} b.$$

13*. 前三个分岔点为 $\mu_1 = \frac{3}{4}, \mu_2 = \frac{5}{4}, \mu_3 = 1.368\ 098\ 939$.

习题 6.6

2. 函数 $u(\xi)$ 所满足的常微分方程为

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + (\alpha - \gamma c) \frac{du}{d\xi} + \beta u^3 = 0.$$

4. (1) Hamilton 函数为 $H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{3}x^3$;

(2) Hamilton 函数为 $H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{4}x^4$;

(3) Hamilton 函数为 $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + x - \frac{1}{3}x^3$.

5*. 提示: 设 $\{\varphi^t: t \in \mathbb{R}\}$ 是平面 Hamilton 系统

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y} := f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} := g(x, y)$$

的一个流, 其中映射 $\varphi^t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 中的变量为解的初值, 为清楚起见, 下用 (x_0, y_0) 表示. 令矩阵 $\mathbf{Z}(x_0, y_0, t)$ 为 $\varphi^t(x_0, y_0)$ 关于 (x_0, y_0) 的 Jacobi 矩阵, 则可证明 $\mathbf{Z}(x_0, y_0, t)$ 满足初值问题

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dt} = \frac{\partial(f(x_0, y_0), g(x_0, y_0))}{\partial(x_0, y_0)} \mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z}(x_0, y_0, t_0) = \mathbf{I}.$$

7: 该偏微分方程有一个解 $u = \frac{x^2}{y} + y$.