

高等学校教材

常微分方程

(第二版)

张伟年 杜正东 徐 冰

高等教育出版社

数字课程账号



明码 3141 9755 0640 7581

数字课程网站

网址: <http://abook.hep.com.cn/40580>
<http://abook.hep.edu.cn/40580>

增值服务

使用说明详见书内数字课程说明页

ISBN 978-7-04-040580-4



9 787040 405804 >

定价 24.80元

高等学校教材

常微分方程

(第二版)

张伟年 杜正东 徐 冰

CHANG WEIFEN FANGCHENG

高等教育出版社·北京

内容提要

本书介绍常微分方程的基础知识,包括基本理论、方法和在工程实际中的若干应用。全书共分六章 28 节,包括绪论、初等积分法、线性方程、常系数线性方程、一般理论和定性理论初步等内容,涉及常微分方程模型、矩阵指数函数方法、微分不等式与比较定理、微分方程数值解、动力系统概念、周期轨道与 Poincaré 映射、平面 Hamilton 系统等方面知识。本书力求贴近工程实际,贴近现代微分方程的发展主流,贴近新时代读者的阅读习惯,为读者以后深入学习、研究和应用微分方程提供一个方便的台阶。

本书可以作为高等学校数学类专业常微分方程课程的教材,也可供其他希望了解常微分方程理论的相关专业人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/张伟年,杜正东,徐冰编著.--2 版.
--北京:高等教育出版社,2014.8
ISBN 978-7-04-040580-4
I. ①常… II. ①张… ②杜… ③徐… III. ①常微分方程-高等学校-教材 IV. ①O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 157315 号

策划编辑	兰莹莹	责任编辑	兰莹莹	封面设计	杨立新	版式设计	马敬茹
插图绘制	杜晓丹	责任校对	刁丽丽	责任印制	韩刚		

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印 刷	廊坊市文峰档案印务有限公司		http://www.landraco.com.cn
开 本	787mm×960mm 1/16	版 次	2006 年 4 月第 1 版
印 张	15		2014 年 8 月第 2 版
字 数	270 千字	印 次	2014 年 8 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	24.80 元
咨询电话	400-810-0598		

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 40580-00

序 言

近几十年来随着非线性科学的迅猛发展,微分方程在力学技术、电子技术、生物技术等诸多领域中愈加呈现其重要性。同时,在这些高新科学技术的推动下,微分方程理论也得到飞速的发展。从过去对平衡点、周期轨道等的定性研究到今天对非局部分岔、高余维分岔的分析判定,微分方程在理论和方法上正经历着一个新的跨越。常微分方程是大学阶段的基础课程之一,面对新的挑战,其教学内容既要保证基础训练,也要力争反映时代要求,引导学生走近学科前沿,让年轻的一代尽快跟上学科发展的主流。

这本《常微分方程》正是在这样的背景下写成的,它出自几位年轻学者的手,他们正活跃在微分方程和动力系统的科研和教学的第一线。他们不仅在多年的教学实践中积累了一定的经验,而且在艰苦的科研工作中获得许多新知。他们力求教材能贴近工程实际,贴近现代微分方程的发展主流,为读者今后的学习和工作提供一个好的平台。正如作者在前言中提到的四个线索,它们正是这本书的鲜明特点。

应该看到,近十多年来在我国已经和正在成长着一批踏实、勤奋的年轻人,他们正带领着自己年轻的团队工作在微分方程领域的前沿,为我国的科学和教育事业拼搏着,这是令人欣慰的。他们必将会在未来的微分方程教学、科研和应用中超越他们的前辈,取得更大的成绩。

张芷芬*

2004年11月12日于北京大学

* 张芷芬,数学家,北京大学数学科学学院教授、博士生导师.主要从事常微分方程定性理论和拓扑动力系统理论的研究,是国内这一领域的开拓者之一。

第二版前言

本书自第一版出版以来,已连续 8 年作为四川大学数学类专业“常微分方程”课程教材使用。在使用中我们发现了一些打印错误,也发现不少需要改进与提高的地方。

在本次修订中,为了保持教材风格的连续性,我们纠正了所发现的打印错误并改进了一些表达方式,同时保持原教材整体结构不变。我们调换了原教材第一章第一节例 1.2 和例 1.4 的位置,使得本书以单摆的例子开始,也以单摆的例子(第六章第六节例 6.9)结束,前后更好地呼应,形成一个完整的“故事”。

本书的修订得到了高等教育出版社、国家级精品资源共享课建设项目、四川大学教务处和数学学院的支持。不少使用本书的高等学校师生和自学者给我们提出了很多宝贵意见和建议,借此修订再版的机会,谨向他们致以衷心的感谢。

张伟年 杜正东 徐冰
2014 年 2 月于四川大学

第一版前言

用微商来描述事物变化的趋势,用物质不灭、能量守恒以及其他物质运动基本规律来建立已知量和未知量之间的关系,这样可以将来自物理、化学、生物、工程和经济等领域的一些实际问题表述为精确的等式形式。这种包含未知函数及其微商的等式就是我们将要学习的微分方程。

自 Newton(1643—1727),Leibniz(1646—1716)创立微积分以来,人们就开始研究微分方程。从最初的初等求解技巧到今天日益发达的数值模拟技术,从早期对方向场的理解到今天关于微分方程定性理论、分岔理论的成熟知识体系,三百多年的历史使这门数学分支不仅成为了数学学科中队伍最大、综合性最强的领域之一,而且成为数学以外学科最为关注的领域之一。它的发展极大地推动了自然科学、工程技术乃至社会科学的发展。尤其是地球椭圆轨道的计算、海王星的发现、弹道轨道的定位、大型机械振动的分析、自动控制的设计、气象数值预报、按龄人口增长宏观预测等等,微分方程为之提供了关键技术支撑。反过来这些实际问题也推动了微分方程领域走向纵深,使之成为当今经济发展、社会进步所不可缺少的一门高技术。

微分方程是研究自然科学,工程技术及社会生活中一些确定性现象的重要工具。通过研究微分方程的解的各种属性,我们就能解释一些现象、对未来的发展趋势作出预测、或者为我们设计新的装置提供参考。

我们将在前面四章介绍一些特殊形式的方程的精确求解方法。在第二章我们学习用初等积分法求解一些微分方程的技巧。在第三章和第四章我们用两章的篇幅详细介绍线性微分方程理论和求解方法,了解线性微分方程解的代数结构,为下一步深入学习非线性微分方程理论打下基础。

对非线性微分方程来说,除了极少数形式以外,绝大多数形式的方程(甚至是第二章提到的形式非常简单的 Riccati 方程)都没有初等解法。因此对这一类方程,我们首先在建立微分方程理论的基石,即解的存在性和唯一性的基础上学习解的近似计算方法。这将是本书第五章的内容。

近似计算只是研究微分方程的一种方法。它并不能解决一切问题,尤其是在系统对初始数据十分敏感的情况下。非线性微分方程的研究仍然是十分困难的。19 世纪末法国数学家 H. Poincaré 和俄国数学家 A. M. Lyapunov 开创了微分方程定性理论和稳定性理论。20 世纪初美国数学家 G. D. Birkhoff 继承和发

展了 H. Poincaré 的思想并提出了“动力系统”的理论。他们把微分方程研究推向了一个新的发展阶段。在第六章我们将介绍这方面的基本知识,学习根据方程本身特点来分析它们所描述的现象,引导读者对非线性问题的研究兴趣。对非线性问题的研究是自然科学和工程技术中十分重要的课题。大多数在实际应用中遇到的问题都是非线性的,而且即使是一些表面形式非常简单的非线性微分方程(如周期激励下的单摆方程)都蕴含着极为复杂的动力学性质。由于其复杂性和困难性,它又对现有的科学和技术水平提出了巨大挑战。

微分方程理论是一门综合性很强的知识体系。它的发展从来就离不开数学其他分支的发展。要研究好微分方程就需要泛函分析、微分几何、代数和拓扑等方面的新成果新方法支持。本书适宜于大学二年级开设。要学好微分方程理论,首先要具备微积分和线性代数的基础。

本书是为了适应新世纪课程改革的需要,参照我们的常微分方程课程教学实践和微分方程与动力系统科研需求,参考国内外多本经典教材来编写的。我们力图通过教材来形成我们的教学特色。我们加强构造积分因子技巧的训练并将计算首次积分同计算 Hamilton 能量函数以及构造 Lyapunov 函数的需要联系在一起;加强常数变易法和微分不等式的内容并与进一步学习非线性微分方程的渐近性态联系在一起;加强 Euler 指数函数法和特征理论并与微分方程平衡点分类联系在一起;加强 Picard 逼近的思想并与微分方程数值解法以及动力系统迭代行为联系在一起。我们用这四条主线将整个体系前后串在一起。我们注意减轻习题的计算量而着重突出思想与结构,并适当增加开放式思考和设计解决方案、编写计算程序的“动手环节”。在书中我们利用一些知识点,例如解空间与通常见到的欧氏空间的区别、特征根对复系统的要求、算子解法的算子的描述等等,引发读者对数学高年级课程的兴趣,促使读者将微分方程同数学的整个知识体系联系起来学习。

本书的写作得到了国家理科基地名牌课程建设项目的支持和四川大学教务处及数学学院领导的鼓励和帮助,在此我们深表谢意。作为我们教学实践和改革的一个阶段性总结,这本书一定还有许多需要完善的地方,因此我们真诚希望得到同行的批评指正,以便共同把微分方程的基础教学工作做好。

张伟年

2004 年 10 月于四川大学

目 录

第一章	绪论	1
§ 1.1	常微分方程模型	2
§ 1.2	微分方程求解思想	6
§ 1.3	基本问题	12
第二章	初等积分法	15
§ 2.1	变量分离形式	16
§ 2.2	恰当方程形式	27
§ 2.3	隐式方程	37
§ 2.4	初等积分法的一些应用	44
第三章	线性方程	60
§ 3.1	存在性与唯一性	60
§ 3.2	齐次线性方程组的通解结构	65
§ 3.3	非齐次线性方程组的通解	71
§ 3.4	高阶线性方程	74
§ 3.5	复值解和级数解法	80
第四章	常数系数线性方程	89
§ 4.1	齐次问题	90
§ 4.2	非齐次问题	94
§ 4.3	常数系数线性方程组	99
§ 4.4	应用:机械振动	108
第五章	一般理论	114
§ 5.1	Picard 存在唯一性定理	115
§ 5.2	Peano 存在性定理	122
§ 5.3	解的延拓	129
§ 5.4	微分不等式与比较定理	136
§ 5.5	解对初值和参数的依赖性	144
§ 5.6	微分方程数值解	153
第六章	定性理论初步	160
§ 6.1	动力系统概念	161

§ 6.2	Lyapunov 稳定性	164
§ 6.3	Lyapunov 直接法	173
§ 6.4	平面平衡点分析	179
§ 6.5	周期轨道与 Poincaré 映射	191
§ 6.6	平面 Hamilton 系统	200
外国数学家译名对照表		206
关键词索引		207
参考文献		211
部分习题答案和提示		213

第一章 绪 论

去粗取精,去伪存真,由此及彼,由表及里.

方程就是包含未知量的等式,求解方程就是要透过表象去探索内在的奥秘.读者已经熟悉的方程包括一般的代数方程及三角函数方程等,如 $x^2+5x-6=0$, 这些方程的未知量是一个量的某几个特定的值.但在科学技术和实际应用中还会碰到大量的方程,其未知量是一个函数,例如 $F(x, \phi(x))=0$, $\phi(x^2+1)=2\phi(x)$ 和 $\phi(\phi(x))=x$, 其中 ϕ 是未知函数. 这些方程称为函数方程或泛函方程. 其中,那些联系着自变量、未知函数以及未知函数的导数的函数方程称为微分方程,例如

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + k^2\phi + \gamma\phi^3 = A\cos \omega t, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}. \quad (1.2)$$

上述第一个方程为常微分方程 (ordinary differential equation), 其未知函数 $\phi(t)$ 是关于自变量 t 的一元函数; 第二个方程为偏微分方程 (partial differential equation), 其未知函数 $\phi(t, x)$ 为关于自变量 t, x 的多元函数. 严格地说, 常微分方程的一般形式是

$$F(t, \phi, \phi', \cdots, \phi^{(n)}) = 0, \quad (1.3)$$

其中 F 是一个 $n+2$ 元的已知函数, 而 $\phi', \cdots, \phi^{(n)}$ 是未知函数 $\phi(t)$ 的一阶直至 n 阶导数. 我们称 n 为方程 (1.3) 的阶, 称方程 (1.3) 为 n 阶常微分方程. 本书主要介绍常微分方程的理论、方法和应用. 因此当不会引起混淆时, 又常简称 (1.3) 为 n 阶微分方程或 n 阶方程.

自 Newton (1643—1727), Leibniz (1646—1716) 创立微积分以来, 人们就开始研究微分方程. 三百多年来, 微分方程的发展极大地推动了自然科学、技术科学和社会科学的发展. 到今天它已广泛地渗透到了物理学、化学、生物学、工程技术乃至社会科学等各个领域, 反过来这些领域中提出的实际问题也推动了微分方程领域走向纵深, 使之成为当今经济发展和社会进步所不可缺少的一门高技术.



图 1.1 I. Newton (1643—1727)



图 1.2 G. W. Leibniz (1646—1716)

§ 1.1 常微分方程模型

设有一个质量为 m 的物体在 x 轴上作直线运动,由著名的 Newton 第二运动定律,其位移 x 作为时间 t 的函数满足等式

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}),$$

其中 x 的一阶导数 $\dot{x}$ 为物体的运动速度,二阶导数 $\ddot{x}$ 为物体的加速度, F 是与时间 t 、位移 x 及速度 $\dot{x}$ 有关的外力的总和. 这就是在实际问题中最常见的微分方程的例子. 在几何学中的无穷小分析和曲面、曲线方程的描述中我们也会见到许多微分方程. 在物理学、化学、生物学、经济学中的许多基本规律和在电子工程、机械工程、控制技术、航天技术中的许多基本原理都可以表述为微分方程这样的数学形式. 从分析实际问题到提出这样的数学形式的过程叫做数学建模. 通过建立微分方程模型可以把一个实际问题转换成求解微分方程.

下面我们再通过一些具体例子来说明如何对一个实际问题建立常微分方程模型.

例 1.1 设质点 B 做自由落体运动,即只考虑重力对落体的作用而忽略空气阻力等其他外力的影响. 设落体 B 作垂直于地面的运动,取坐标轴 y 从地面垂直向上,见图 1.3. 因为 $y=y(t)$ 表示 B 在时刻 t 的位置坐标,所以它对 t 的一阶导数 $\dot{y} = \dot{y}(t)$ 表示 B 在时刻 t 的瞬时速度,其二阶导数 $\ddot{y} = \ddot{y}(t)$ 表示 B 在时刻 t 的瞬时加速度. 假设 B 的质量为 m ,

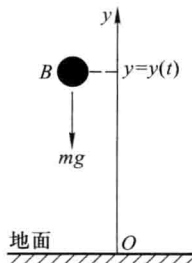


图 1.3 自由落体

重力加速度为 g (一般取为常数 9.80 m/s^2). 由 Newton 第二定律得出 $m\ddot{y} = -mg$, 从而得到一个二阶微分方程

$$\ddot{y} = -g. \quad (1.4)$$

例 1.2 考虑一个铅直平面上的单摆在无阻力情况下的自由摆动, 摆锤质量为 m , 摆臂质量相对太小而忽略不计, 摆臂长度为 l . 记重力加速度为 g . 设在某个时刻 t , 摆臂与铅直线的夹角为 $\theta(t)$. 这个夹角的变化给出了单摆运动的规律. 由图 1.4 所示的受力分析表明, 摆锤所受的外力 (包括重力和摆臂的牵引力) 的总和成为一个相切于圆周形式的摆轨道上的力 $F = -mg \sin \theta$. 摆锤从铅直状态到当前状态的位移 $x(t)$ 按弧长计算应该等于 $l\theta(t)$. 由 Newton 第二定律, $m\ddot{x} = -mg \sin \theta$. 因而得到 $\theta(t)$ 满足的微分方程

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta. \quad (1.5)$$

例 1.3 弹簧振子: 设质量为 m 的弹簧振子作水平自由振动, 见图 1.5. 假设弹簧的弹性系数为 k , 阻力与速度成正比, 阻尼系数为 μ . 用 $x(t)$ 表示振子当前所处的位置, 并假设弹簧松弛时振子所处的位置为 $x=0$. 那么振子在时刻 t 受到的弹性力为 $-kx(t)$, 阻力等于 $-\mu \frac{dx}{dt}$. 由 Newton 第二定律得

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \mu \frac{dx}{dt},$$

从而得到一个二阶微分方程

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (1.6)$$

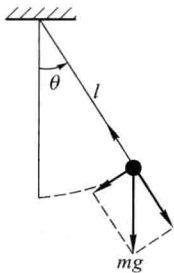


图 1.4 无阻力单摆

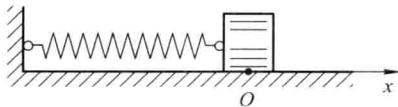


图 1.5 弹簧振子

例 1.4 考虑一个由电阻 R 、电感 L 、电容 C 串联组成的简单闭合电路, 参看图 1.6. 如果在某一时刻将电容器充电使它得到一个电位差, 然后断开电源. 在电感的作用下这个闭合电路中开始了电流振荡. 我们用 $v(t)$ 表示在时刻 t 电容

器两极间的电位差,并用 $v(t)$ 的函数规律来刻画该电路振荡的规律. 令 $i(t)$ 表示电流强度. 按照总电动势 $i(t)R$ 等于电容器的电位差 $-v(t)$ 和电感电动势 $-L \frac{di(t)}{dt}$ 的总和,我们得到

$$i(t)R = -v(t) - L \frac{di(t)}{dt}. \quad (1.7)$$

由于 $v(t) = \frac{Q(t)}{C}$, 其中 $Q(t)$ 是在时刻 t 电容器上的电量, 而 $i(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$, 因此

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}, \quad \frac{di(t)}{dt} = C \frac{d^2v(t)}{dt^2}, \quad (1.8)$$

这样, 由 (1.7) 式和 (1.8) 式可以得到微分方程

$$L \frac{d^2v}{dt^2} + R \frac{dv}{dt} + \frac{1}{C}v = 0. \quad (1.9)$$

例 1.5 经典天体力学中的 Kepler 第一定律指出, 行星以椭圆轨道围绕太阳运转. 但对水星和金星的观测表明, 这实际上只是一种粗糙的描述, 由于各个天体在万有引力作用下互相影响, 行星的实际运行轨道为缓慢进动的椭圆: 其轨道的形状在运行一周后与椭圆几乎没有偏差, 但是轨道的性态随时间而逐渐发生变化, 在图 1.7 中我们画出了某行星围绕太阳运转的实际运行轨道的示意图, 其中我们以夸张的形式描绘了其进动的椭圆轨道.

研究多个天体在万有引力作用下的运动规律是现代天体力学和数学中的重要课题, 称为多体问题. 其中最简单的是如下的二体问题: 考虑两个物体在万有引力作用下运动. 设两个物体质量分别是 M 和 m , 在 $\mathbb{R}^3$ 中关于坐标原点的向径分别为 $\mathbf{r}_s$ 和 $\mathbf{r}_p$. 用 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s$ 表示质量为 m 的物体相对于质量为 M 的物体的位置. 根据万有引力定律,

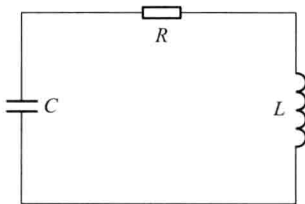


图 1.6 RLC 回路

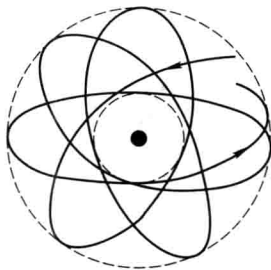


图 1.7 行星的实际运行轨道

$$M\ddot{\mathbf{r}}_s = \frac{\mu M m}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1.10)$$

$$m\ddot{\mathbf{r}}_p = -\frac{\mu Mm}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1.11)$$

其中 $r = |\mathbf{r}|$, 将方程(1.10)乘 m 并将方程(1.11)乘 M , 将两个乘积相减得到

$$mM(\ddot{\mathbf{r}}_s - \ddot{\mathbf{r}}_p) = \mu(m+M) \frac{Mm}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

显然, $\ddot{\mathbf{r}}_s - \ddot{\mathbf{r}}_p = -\ddot{\mathbf{r}}$. 因此我们得到 $\mathbf{r}$ 满足的微分方程

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\lambda}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1.12)$$

其中 $\lambda = \mu(M+m)$.

例 1.6 在研究一个仅由一种捕食者和一种被捕食者(即食饵)构成的简单生态系统(见图 1.8)时, 我们常要研究捕食者数量 $x(t)$ 和食饵数量 $y(t)$ 之间的关系. 设 $x(t) > 0, y(t) > 0$. 一个简单的情形是:

(i) 当不考虑捕食者时食饵自身有充足食物和空间而自由地以增长率 β 成长, 亦即 $\dot{y} = \beta y$; 当捕食者存在时食饵的增长率与捕食者数量 $x(t)$ 成正比地下降, 即 $\dot{y} = (\beta - sx)y$, 其中 β, s 是正的常数;

(ii) 当没有食饵时捕食者按固定比率 α 死亡, 即 $\dot{x} = -\alpha x$; 当有食饵时捕食者数量增长率与食饵数量 $y(t)$ 成正比地增长, 即 $\dot{x} = (-\alpha + ry)x$, 其中 α, r 是正的常数.

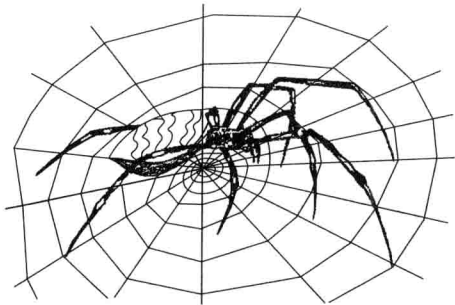


图 1.8 捕食者模型: 正在等待猎物的蜘蛛

因而, 我们得到了 $x(t)$ 和 $y(t)$ 满足的微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-\alpha + ry), \\ \dot{y} = y(\beta - sx). \end{cases} \quad (1.13)$$

例 1.7 如果一平面曲线 γ 过定点 M_0 , 且 γ 上任意一点 M (M_0 除外) 的切线与直线 M_0M 的夹角恒等于常数 α_0 , 求这条曲线所满足的微分方程.

解 设坐标原点为 M_0 . 我们在 Oxy 平面坐标系下考虑. 设曲线 γ 的方程为 $y=y(x)$. 过点 $M(x, y)$ 的切线与 x 轴的夹角 θ 满足 $\tan \theta = \frac{dy}{dx}$. 直线 M_0M 与 x 轴的夹角 β 满足 $\tan \beta = \frac{y}{x}$. 按照夹角关系, 我们知道 $\alpha_0 = \theta - \beta$, 参看图 1.9. 因此,

$$\begin{aligned}\tan \alpha_0 &= \tan(\theta - \beta) = \frac{\tan \theta - \tan \beta}{1 + \tan \theta \tan \beta} \\ &= \frac{x \dot{y}(x) - y(x)}{x + \dot{y}(x)y(x)}.\end{aligned}$$

因而得到 $y(x)$ 满足的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\tan \alpha_0)x + y}{x - (\tan \alpha_0)y}. \quad (1.14)$$

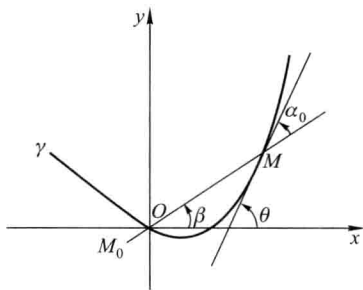


图 1.9 例 1.7

习题 1.1

1. 一船以恒定的速度 v_0 垂直向河对岸驶去, 设水流沿 x 轴方向并且其速度与船离两岸的距离乘积成正比, 比例系数为 k , 河宽为 a . 求该船的运动轨迹满足的微分方程.
2. 求 Otx 平面上一曲线所满足的微分方程, 使其上每点处的切线与该点的向径和 Ox 轴构成一个等腰三角形.

§ 1.2 微分方程求解思想

对于一般形式的微分方程 (1.3) 来说, 如果函数 $\phi(t)$ 在区间 J 上连续, 有直到 n 阶的导数, 而且对所有的 $t \in J$, (1.3) 恒成立, 则称 $\phi(t)$ 为方程 (1.3) 在区间 J 上的一个解.

一、计算与近似计算

在例 1.1 中我们建立了自由落体的微分方程模型. 为了得出落体的运动规律, 需要求解这个二阶微分方程. 在 (1.4) 两侧对 t 积分一次, 得到

$$\dot{y} = -gt + C_1, \quad (1.15)$$

其中 C_1 是一个任意常数. 再把 (1.15) 两边对 t 积分一次, 得到

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2, \quad (1.16)$$

其中 C_2 是另一个任意常数. 易知 (1.16) 是微分方程 (1.4) 包含两个独立的任意常数的解. 这样形式的解称为方程 (1.4) 的 **通解**. 这里“独立”是指这个通解 $y(t, C_1, C_2)$ 及其关于 t 的导数 $\dot{y}(t, C_1, C_2)$ 满足

$$\det \frac{\partial(y, \dot{y})}{\partial(C_1, C_2)} \neq 0.$$

准确地说, 通解 (1.16) 是一族解. 当任意常数被完全确定时我们也相应获得一个特定的解, 称为 **特解**.

通解 (1.16) 给出了自由落体的运动规律, 它显然包含微分方程 (1.4) 的无穷多个特解. 这同其他形式的函数方程一样具有多解性. 为了解决这种求解结果的不确定性问题, 我们需要对方程 (1.4) 附加定解条件. 如果我们指明落体运动的初始状态, 包括在初始时刻 ($t=0$) 的位置 (高度) y_0 和初速度 v_0 , 即

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = v_0, \quad (1.17)$$

我们就能从通解 (1.16) 中确定 $C_2 = y_0, C_1 = v_0$, 从而得到一个唯一的适合条件 (1.17) 的特解

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0. \quad (1.18)$$

条件 (1.17) 称为方程 (1.4) 的 **初值条件**, 而把附加了初值条件的方程

$$\begin{cases} \ddot{y} = -g, \\ y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = v_0 \end{cases} \quad (1.19)$$

称为 **初值问题**, 把 (1.18) 称为是初值问题 (1.19) 的解. 由于 Cauchy (图 1.10) 在 19 世纪 20 年代首次建立了初值问题解的存在唯一性定理, 因此又把初值问题称为 **Cauchy 问题**. 有时也把上述初值问题直接记为 (1.4) + (1.17).

可以看出, 初值问题 (1.19) 真正能够确切地反映一个自由落体的运动规律, 而方程 (1.4) 所表达的只是物体自由下落时在任意瞬间 t 所满足的关系式. 事实上, 在同一时刻从不同高度和 (或) 以不同初速度自由下落的物体将表现为



图 1.10 A. L. Cauchy (1789—1857) 首次建立了初值问题解的存在唯一性定理

不同的运动.

在第一节所见到的方程并不是都像对上述自由落体问题一样可以采用直接积分的办法求解,有的方程如(1.1)甚至难以求出通解的精确形式.然而我们可以迭代地构造一个函数序列来逼近其初值问题的特解.例如将初值问题

$$\dot{\phi}(t) = f(t, \phi(t)), \quad (1.20)$$

$$\phi(t_0) = x_0 \quad (1.21)$$

用等价积分方程形式

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \phi(\tau)) d\tau \quad (1.22)$$

表示,我们可以构造函数序列 $\{\phi_n(t)\}$ 来逼近(1.20)的初值问题的解.这个函数序列是利用递推关系

$$\phi_0(t) \equiv x_0,$$

$$\phi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \phi_{n-1}(\tau)) d\tau, \quad n = 1, 2, \dots$$

来定义的.在保证了收敛性的情形下,对较大的 n ,函数 $\phi_n(t)$ 就是一个近似解.这一思想将在第五章得到完整的阐述.

二、几何分析

我们以后将看到,能用初等方法求出精确解的微分方程为数很少.事实上,有的方程也没有必要非要给出解的精确表达式不可.通过几何上的分析完全可以获得解的很多重要信息,推断解的某些重要属性,从而使该微分方程问题在一

定程度上获得解决.

考虑方程(1.20)并假定 $f(t, x)$ 在平面上或其一个区域 G 上连续. 该方程的解 $x = \phi(t)$ 在 Otx 平面上给出了一条光滑曲线 Γ , 称为该方程的一条积分曲线(integral curve).

微分方程(1.20)在 Otx 平面上的每一个使该方程有定义的点 $P_0: (t_0, x_0)$ 处都指明了一个方向, 那就是积分曲线在该点的斜率. 像这样逐点定义了方向斜率的平面(或区域 G)称为微分方程的**方向场**, 参看图 1.11. 方程的解就是在这样的斜率指引下走出来的, 每到一处就修正前进方向. 显然, 在点 P_0 处积分曲线 Γ 有切线

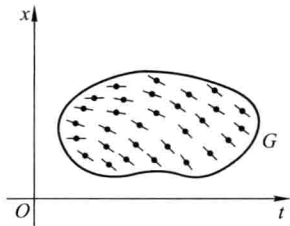


图 1.11 方向场

$$x = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0).$$

过任意一个 P_0 点作上述切线的短小的线段, 这样我们就掌握了方程(1.20)定义的方向场的全部情况. 因此, 积分曲线就是一条每个点的切向都与方向场一致的光滑曲线. 微分方程的求解就是要寻找这样的积分曲线.

积分曲线的分布状况可以由先求出一些**等倾线**来略见一斑, 而没有必要把每个点上的方向都画出来. 所谓“等倾线”(isoclines), 就是上面每个点的斜率都一样的曲线, 它由关系

$$f(t, x) = k$$

确定. 特别地, 当 $k=0$ 时, 称相应的等倾线为水平等倾线; 当 $k=\infty$, 即 $\frac{1}{f(t, x)}=0$ 时, 称相应的等倾线为竖直等倾线.

例 1.8 考虑方程

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x-t}{x+t}. \quad (1.23)$$

斜率为 k 的等倾线满足

$$\frac{x-t}{x+t} = k, \quad \text{即} \quad x = \frac{1+k}{1-k}t.$$

因此, 过原点的直线都是等倾线. 其中水平等倾线为 $x=t$, 而竖直等倾线为 $x=-t$. 进而可以看出, 这些等倾线同方向场的方向成 45° 角. 更严格地看, 这个夹角 $\theta = \alpha_i - \alpha_v$, 其中 α_i, α_v 分别是等倾线和方向场的方向与 t 坐标轴的夹角. 易见,

$$\tan \theta = \frac{\tan \alpha_i - \tan \alpha_v}{1 + \tan \alpha_i \tan \alpha_v} = \frac{\frac{1+k}{1-k} - k}{1 + \frac{1+k}{1-k}k} = 1.$$

容易看出,方程的积分曲线是围绕坐标原点旋转的螺线,且沿顺时针方向是由里向外的,见图 1.12 所示.

细心的读者可能会发现,在直线 $x = -t$ 上,方程(1.23)是没有意义的,但从方向场的角度来看,在直线 $x = -t$ 上每一点方向场的方向都是垂直的,这时我们可用方程

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x+t}{x-t}$$

来代替原方程(1.23),这样在竖直等倾线 $x = -t$ 附近,我们可以把积分曲线看成 t 关于 x 的函数.

例 1.9 考虑方程

$$\frac{dx}{dt} = x(2-x). \quad (1.24)$$

它有水平等倾线 $x=0$ 和 $x=2$. 在区域 $x<0$, $0<x<2$ 和 $x>2$ 上导数 $\frac{dx}{dt}$ 分别是 <0 , >0 和 <0 的,因此,方向场的方向分别是递减、递增和递减的. 容易看出方程的积分曲线分别以水平等倾线 $x=0$ 或 $x=2$ 为渐近线,而且,这两条水平等倾线本身也是积分曲线,它们是方程(1.24)的常数解,称为平衡解(equilibrium solution). 进一步有

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2(1-x) \frac{dx}{dt} = 2x(x-1)(x-2).$$

因此我们还能得到积分曲线的凹凸性等方面的信息,由此可画出方程(1.24)的积分曲线在 Otx 平面上的分布,见图 1.13.

从上述例子可以看出,像平衡解那样的特解对于从几何上分析微分方程性质是十分重要的. 除了平衡解,我们还关心方程的周期解、不变曲线等,以及他们周围的积分曲线相对于他们的趋势. 这些问题仅仅用方向场来判断是远远不够的,尤其是对于一个形式较复杂的微分方程. 方向场是对微分方程几何理论的初步认识,是微分方程定性理论的开端. 关于微分方程的定性理论将在第六章详细介绍.

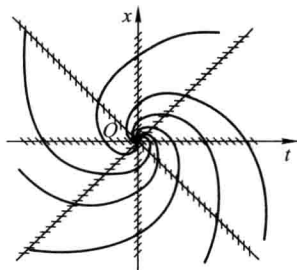


图 1.12 例 1.8

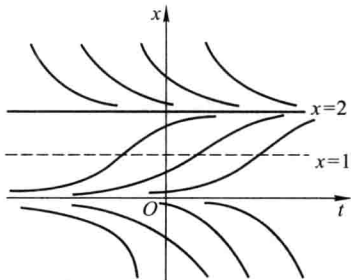


图 1.13 例 1.9

三、微分方程形式

前面我们无论是近似求解还是作几何分析,总是考虑一阶微分方程.事实上,我们经常需要把一个高阶方程化成一个低阶(一阶)方程,把一个复杂的微分方程形式化成简单的微分方程形式.

如果能从隐式微分方程(1.3)中解出最高次微商,得到

$$\phi^{(n)}(t) = f(t, \phi(t), \dots, \phi^{(n-1)}(t)), \quad (1.25)$$

则称方程(1.25)是方程(1.3)的**规范形式**.将 n 阶方程(1.25)化成一阶方程的办法是令

$$x_1 = \phi, \quad x_2 = \dot{\phi}, \quad \dots, \quad x_n = \phi^{(n-1)},$$

从而考虑关于 n 维向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 的微分方程,即微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n, \\ \frac{dx_n}{dt} = f(t, x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (1.26)$$

容易验证(1.25)和(1.26)是等价的.相应地,可以将(1.25)的初值条件

$$\phi(t_0) = x_1^0, \quad \dot{\phi}(t_0) = x_2^0, \quad \dots, \quad \phi^{(n-1)}(t_0) = x_n^0 \quad (1.27)$$

等价地化成

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = x_n^0. \quad (1.28)$$

因此,式(1.26)和式(1.28)成为我们往后讨论微分方程初值问题的基本形式.

一个微分方程形式的简化常常是解决这个微分方程问题的重要步骤.就像对初等形式的代数方程一样,在实施求解过程的开始,我们通常尝试消元和降次.在未来的微分方程理论学习中,我们会了解到微分方程的正规形(normal form)和不变流形(invariant manifold)理论以及他们对简化方程形式的作用.

习题 1.2

1. 证明对任意常数 C , 函数 $x(t) = Ce^{-3t} + 2t + 1$ 是微分方程

$$\dot{x} + 3x = 6t + 5$$

的解.进而计算该方程满足初值条件 $x(0) = 3$ 的解.

2. 放射性物质镭的裂变速度与存余量成正比 k . 设已知在某时刻 t_0 容器中镭的质量是 R_0 . 要求确定镭在任意时刻 t 的质量 $R(t)$.

3*. 求以初速度 v_0 在空气中铅直上抛的物体的运动方程, 其中物体质量为 m , 阻力与速度的平方成正比, 比例系数为 k^2 . 又问物体达到最高点的时间是多少?

4. 把例 1.2 和例 1.3 的微分方程化成规范的一阶方程组形式.

5. 作出下列方程的方向场, 并描出经过指定点的积分曲线:

$$(1) \frac{dx}{dt} = |x|, (0,0), (0,-1);$$

$$(2) \frac{dx}{dt} = t^2 + x^2, (0,0), (0,-1/2), (\sqrt{2}, 0);$$

$$(3) \frac{dx}{dt} = t^2 - x^2, (0,0), (0,1).$$

§ 1.3 基本问题

对于微分方程的解, 我们可以证明这样的事实: 设 G 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个区域, 给一个定义在区间 J 上且包含 n 个独立参数 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 的函数族 $\phi(t, C_1, \dots, C_n)$, 其中 $(C_1, C_2, \dots, C_n) \in G$, 如果它们对 t 是 n 次可微的, 则一定是某个 n 阶微分方程的通解. 反之, n 阶微分方程的通解一定包含 n 个独立的任意常数.

我们只证明这个事实的前一半, 而把后半留给读者去思考或查阅有关参考书. 根据独立性, 函数

$$\phi, \frac{\partial \phi}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{n-1} \phi}{\partial t^{n-1}}$$

对参数 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 存在连续偏导数且 Jacobi 行列式

$$\det \frac{\partial \left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{n-1} \phi}{\partial t^{n-1}} \right)}{\partial (C_1, C_2, \dots, C_n)} \neq 0 \quad (1.29)$$

对所有 $(t, C_1, \dots, C_n) \in J \times G$ 成立. 将

$$x = \phi(t, C_1, \dots, C_n) \quad (1.30)$$

两端对 t 求导数依次得到

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, C_1, \dots, C_n), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \phi(t, C_1, \dots, C_n) \end{cases} \quad (1.31)$$

和

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \phi(t, C_1, \dots, C_n). \quad (1.32)$$

条件(1.29)使我们能够用隐函数定理从式(1.30)和(1.31)中解出变元 $C_1, C_2, \dots, C_n$, 即得到函数

$$C_j = h_j\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right),$$

其中 $j=1, 2, \dots, n$. 将这 n 个函数代入(1.32)便得到一个 n 阶微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \phi\left(t, h_1(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}), \dots, h_n(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})\right).$$

我们在上面的证明中事实上提供了一种求给定几何曲线族所满足的微分方程的方法. 另外, 微分方程还可以用来描述弹道轨迹、化学实验中反应物与生成物的浓度之间的动态平衡关系以及经济系统中几种商品价格的平衡问题. 读者可以自己去查阅参考书并思考这些实际问题的微分方程模型.

关于微分方程形式, 我们要区分“线性”与“非线性”. 当微分方程(1.3)中函数 F 对未知函数 ϕ 及其各阶导数 $\dot{\phi}, \dots, \phi^{(n)}$ 的全体而言是一次的, 也就是说, $F(t, x_0, \dots, x_n)$ 关于变量 $(x_0, \dots, x_n)$ 是一次的, 则称该方程是**线性的**. 否则称为**非线性的**. 一阶线性微分方程组的规范形式为

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.33)$$

其中 x, f 是 n 维向量值函数, $A(t)$ 是 $n \times n$ 阶矩阵值函数. 从前面的例子中可以看出方程(1.6)和(1.9)是线性的, 而方程(1.5)、(1.12)和(1.13)是非线性的. 本书的主要篇幅是介绍线性微分方程的理论和方法, 它是进一步研究非线性微分方程的基础. 一个非线性微分方程在具有一定可微性的条件下可以在局部展开成线性项加上高次项, 从而将原微分方程看作一个线性微分方程的“扰动”. 有的时候这种扰动是不能动摇线性方程部分所确定下来的结构的, 有的时候这种改变却的确要发生. 这就是以后我们要学习的稳定性问题.

在以后的学习中我们将看到, 在初等积分方法和线性微分方程理论的基础上, 我们能够进一步对非线性微分方程作数值计算或定性分析, 从而确认物理现象, 预见运动将怎样进行, 进而给出合理的设计方案.

习题 1.3

1. 求下列曲线族满足的微分方程:

(1) $x = Ct + C^2$;

$$(2) \quad x = C_1 e^t \cos t + C_2 e^t \sin t;$$

$$(3) \quad (t-C_1)^2 + (x-C_2)^2 = 1,$$

其中 C, C_1, C_2 是参数.

2. 平面上安放长度为 $2a$ 的细磁棒, 如果撒上一些小铁钉, 它们将按磁场的方向排列. 可将细磁棒简化为放在两端点处的两个异性点磁荷, 磁量分别为 $+1$ 和 -1 . 试求出这个磁场满足的微分方程. 进而, 画出磁场的方向场图并分析上面的积分曲线.

第二章 初等积分法

众所周知,没有什么比提出困难而又有用的问题更能激发杰出的天才人物来为增长人类知识而工作了.

——约翰·伯努利(Johann Bernoulli 1667—1748)

微分方程的求解是一个技巧性很高的工作,即使是一阶微分方程的求解也是十分困难的. Newton, Leibniz, Bernoulli 兄弟和 Euler 等数学家对一些特定形式的微分方程给出了精确求解方法. 这些方法是把微分方程的求解问题化成初等函数的积分问题,因此称为初等积分法. 这些方法是最经典、最古老的方法,也是最基本、最重要的方法. 我们将看到,线性方程的求解和 Hamilton 系统的能量计算都离不开它.



图 2.1 L. Euler(1707—1783)



图 2.2 Johann Bernoulli(1667—1748)

对于一阶微分方程

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \quad (2.1)$$

有时我们难以把它的解表示成未知函数 y 关于自变量 x 的显函数,这时若方程 $\Phi(x, y, C) = 0$ 当常数 C 在某个给定的区域取值时所确定的隐函数 $y = \varphi(x)$ 是方程(2.1)的解,则称 $\Phi(x, y, C) = 0$ 是方程(2.1)的隐式解.

§ 2.1 变量分离形式

一、变量分离方程

形如

$$\frac{dy}{dx} = h(x)g(y) \quad (2.2)$$

的一阶微分方程称为变量分离形式的方程,其中函数 $h(x)$ 在区间 (a, b) 上连续, $g(y)$ 在区间 (c, d) 上连续且不等于 0.

将方程(2.2)作等式变形得到

$$\frac{dy}{g(y)} = h(x) dx.$$

两端积分得

$$G(y) = H(x) + C, \quad (2.3)$$

其中 C 是某个常数且

$$G(y) = \int \frac{dy}{g(y)}, \quad H(x) = \int h(x) dx,$$

这里我们把不定积分 $G(y)$ 及 $H(x)$ 分别理解为函数 $\frac{1}{g(y)}$ 及 $h(x)$ 的某个原函数,而把积分常数 C 明确写出来. 如无特别申明,本书以后遇到的不定积分均作这样的理解.

容易看出(2.3)就是方程(2.2)的隐式通解. 事实上,

$$G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0,$$

故 G 存在逆函数 G^{-1} , 从而得到

$$y = G^{-1}(H(x) + C). \quad (2.4)$$

可以验证对任意常数 C , (2.4) 都是方程(2.2)的解.

进而,考虑初值条件

$$y(x_0) = y_0, \quad (2.5)$$

其中 $a < x_0 < b, c < y_0 < d$. 将(2.5)代入(2.3)得到

$$C = G(y_0) - H(x_0).$$

从而获得方程(2.2)在初值条件(2.5)下的解

$$y = G^{-1}(H(x) + G(y_0) - H(x_0)).$$

这种求解方法也称为分离变量法.

例 2.1 求微分方程

$$\frac{dy}{dx} = x(1 + y^2) \quad (2.6)$$

的通解.

解 显然,这是变量分离的方程. 分离变量后得

$$\frac{dy}{1 + y^2} = x dx,$$

两边积分,得

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int x dx,$$

因而(2.6)的通解为

$$y = \tan\left(\frac{x^2}{2} + C\right),$$

其中 C 为任意常数.

例 2.2 求微分方程

$$(x + 3) \frac{dy}{dx} = 4y \quad (2.7)$$

的通解.

解 显然,这是变量分离的方程. 当 $y \neq 0$ 时,分离变量后得

$$\frac{dy}{y} = 4 \frac{dx}{x + 3},$$

两端积分得

$$\ln |y| = \ln(x + 3)^4 + C_1,$$

从而

$$|y| = e^{C_1} (x + 3)^4,$$

即

$$y = C(x + 3)^4,$$

其中 $C = \pm e^{C_1}$ 是非零的任意常数. 显然 $y = 0$ 也是方程(2.7)的解. 故所求方程的通解为

$$y = C(x + 3)^4,$$

其中 C 为任意常数.

二、可化为变量分离方程的类型

许多表面上看来不是变量分离形式的方程可以通过变量变换的方法化成变量分离的形式. 下面我们介绍几种重要的可化为变量分离形式的方程.

1) 一阶线性微分方程, 即

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + f(x). \quad (2.8)$$

当 $f(x) \equiv 0$ 时, 称方程 (2.8) 为齐次线性方程; 否则, 称方程 (2.8) 为非齐次线性方程.

假定函数 $a(x)$, $f(x)$ 在区间 (a, b) 上连续. 我们先求解齐次线性方程

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y, \quad (2.9)$$

它是变量分离的方程. 当 $y \neq 0$ 时, 分离变量后得

$$\frac{dy}{y} = a(x) dx,$$

两端积分

$$\int \frac{dy}{y} = \int a(x) dx,$$

得

$$\ln |y| = \int a(x) dx + C_1,$$

从而

$$|y| = e^{\int a(x) dx + C_1} = e^{C_1} e^{\int a(x) dx},$$

即

$$y = Ce^{\int a(x) dx},$$

其中 $C = \pm e^{C_1}$ 是非零的任意常数. 显然 $y=0$ 也是方程 (2.9) 的解. 故齐次线性方程 (2.9) 的通解为

$$y = Ce^{\int a(x) dx}, \quad (2.10)$$

其中 C 为任意常数.

为了进一步求非齐次线性方程 (2.8) 的通解, 我们的思想是把 (2.9) 的通解表达式 (2.10) 中的常数 C 换成 x 的函数 $c(x)$, 从而先求形如

$$y = c(x) e^{\int a(x) dx} \quad (2.11)$$

的解,其中 $c(x)$ 看成待定函数. 注意到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx} \cdot e^{\int a(x) dx} + c(x) a(x) e^{\int a(x) dx}.$$

将(2.11)代入方程(2.8)得

$$\frac{dc}{dx} \cdot e^{\int a(x) dx} + c(x) a(x) e^{\int a(x) dx} = a(x) c(x) e^{\int a(x) dx} + f(x),$$

化简后得

$$\frac{dc}{dx} = f(x) e^{-\int a(x) dx}.$$

两端积分,得

$$c(x) = \int f(x) e^{-\int a(x) dx} dx + C,$$

其中 C 为任意常数. 把上式代入(2.11), 便得非齐次线性方程(2.8)的通解

$$y = e^{\int a(x) dx} \left(\int f(x) e^{-\int a(x) dx} dx + C \right), \quad (2.12)$$

其中 C 为任意常数. 将(2.12)式改写成两项之和, 即

$$y = C e^{\int a(x) dx} + e^{\int a(x) dx} \int f(x) e^{-\int a(x) dx} dx. \quad (2.13)$$

易见,右端第一项是对应的齐次线性方程(2.9)的通解,第二项是非齐次线性方程(2.8)的一个特解. 由此可知,一阶非齐次线性方程的通解等于对应的齐次线性方程的通解与非齐次线性方程的一个特解之和. 上述非齐次线性方程的求解思想和过程被称为**常数变易法**. 通解公式(2.13)称为**常数变易公式**.

例 2.3 试求方程

$$\frac{dy}{dx} = -2xy + 2xe^{-x^2} \quad (2.14)$$

的通解.

解 在方程(2.14)中, $a(x) = -2x$, $f(x) = 2xe^{-x^2}$. 根据公式(2.12), 可求出方程(2.14)的通解为

$$y = e^{-\int 2x dx} \left(C + \int 2xe^{-x^2} e^{\int 2x dx} dx \right),$$

即 $y = e^{-x^2} (C + x^2)$, 其中 C 为任意常数.

2) Bernoulli 方程, 即形如

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + f(x)y^\alpha \quad (2.15)$$

的方程. 当 $\alpha=0$ 或 $\alpha=1$ 时这是上述讨论过的线性微分方程. 虽然当 $\alpha \neq 0, 1$ 时该方程不是线性的, 但是可以通过变量替换把它化为一阶线性方程.



图 2.3 Jacob Bernoulli (1654—1705) 建立并求解了 Bernoulli 方程

事实上, 若 $\alpha \neq 0, 1$, 设 $y \neq 0$. 我们用 y^α 除方程 (2.15) 的两端, 得到

$$y^{-\alpha} \frac{dy}{dx} = a(x)y^{1-\alpha} + f(x).$$

引入新的未知函数 $z = y^{1-\alpha}$, 由

$$\frac{dz}{dx} = (1-\alpha)y^{-\alpha} \frac{dy}{dx},$$

得

$$\frac{dz}{dx} = (1-\alpha)a(x)z + (1-\alpha)f(x).$$

这是一个关于 z 的一阶线性方程. 求出它的通解后, 以 $y^{1-\alpha}$ 代 z , 就得到方程 (2.15) 的通解

$$y^{1-\alpha} = e^{\int (1-\alpha)a(x)dx} \int (1-\alpha)f(x)e^{-\int (1-\alpha)a(x)dx} dx + Ce^{\int (1-\alpha)a(x)dx}, \quad (2.16)$$

其中 C 为任意常数. 显然 $y=0$ 也为方程 (2.15) 的解.

例 2.4 试求方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{x}y + x^2y^2 \quad (x > 0) \quad (2.17)$$

的通解.

解 这是 Bernoulli 方程, 其中 $a(x) = -\frac{3}{x}$, $f(x) = x^2$, $\alpha = 2$. 根据公式 (2.16), 当 $y \neq 0$ 时, 可求出方程 (2.17) 的通解为

$$\begin{aligned} y^{-1} &= C e^{\int \frac{3}{x} dx} - e^{\int \frac{3}{x} dx} \int x^2 e^{-\int \frac{3}{x} dx} dx \\ &= C x^3 - x^3 \ln x, \end{aligned}$$

即 $y = x^{-3}(C - \ln x)^{-1}$, 其中 C 为任意常数. 此外, $y=0$ 也是方程 (2.17) 的解.

3) 齐次方程, 即形如

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.18)$$

的方程. 其中右端的函数 $f(x, y)$ 是变量 x, y 的零次齐次函数, 即对任意不为 0 的常数 λ , 都有

$$f(\lambda x, \lambda y) \equiv f(x, y).$$

在方程 (2.18) 中引入新的未知变量 $u = \frac{y}{x}$, 即 $y = ux$, 因此

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}.$$

代入方程 (2.18), 得

$$u + x \frac{du}{dx} = f(x, ux) = f(1, u),$$

即

$$x \frac{du}{dx} = f(1, u) - u, \quad (2.19)$$

这是一个变量分离的方程. 分离变量并两端积分, 得

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x}.$$

求出积分后, 再用 $\frac{y}{x}$ 代替 u , 就得到原方程 (2.18) 的通解.

上述分离变量的过程要求 (2.19) 中 $f(1, u) - u \neq 0$. 如果 $f(1, u) - u$ 有零点 u_0 , 从 (2.19) 中直接看出 $u = u_0$ 是方程 (2.19) 的解, 从而 $y = u_0 x$ 也是方程 (2.18) 的解. 如果 $f(1, u) - u \equiv 0$, 即 $f(x, y) = \frac{y}{x}$, 则方程 (2.18) 本身已经是变量

分离的形式了.

例 2.5 试求方程

$$x^2 \frac{dy}{dx} - 3xy - 2y^2 = 0 \quad (2.20)$$

的通解.

解 这是一个齐次方程, 它可改写为

$$\frac{dy}{dx} - 3 \frac{y}{x} - 2 \left(\frac{y}{x} \right)^2 = 0, \quad (2.21)$$

令 $z = \frac{y}{x}$, 得

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dz}{dx} + z,$$

方程(2.21)变为

$$x \frac{dz}{dx} = 2z(1+z). \quad (2.22)$$

当 $z \neq 0$ 且 $1+z \neq 0$ 时, 分离变量并两端积分, 得到

$$\frac{z}{1+z} = Cx^2,$$

其中 $C \neq 0$ 为任意非零常数. 此外易见 $z=0$ 及 $z=-1$ 也是方程(2.22)的解. 将 z 换成 $\frac{y}{x}$ 并化简, 得方程(2.20)的通解为

$$y = Cx^2(x+y),$$

以及特解 $y=-x$, 其中 C 为任意常数.

4) 线性分式形式的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \quad (2.23)$$

(其中 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 都是给定的常数) 本身不是齐次方程, 但可以通过变量替换化为齐次方程, 从而求出它的通解.

当 $c_1 = c_2 = 0$ 时, 函数

$$f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right)$$

是零次齐次函数, 此时方程(2.23)已是齐次方程.

当 c_1 和 c_2 不全为零时, 可分如下两种情况讨论:

$$\text{情况 I: } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0.$$

这时可取常数 h 和 k , 使得

$$\begin{cases} a_1 h + b_1 k + c_1 = 0, \\ a_2 h + b_2 k + c_2 = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

显然线性方程组 (2.24) 有唯一的解

$$h = \frac{b_1 c_2 - c_1 b_2}{\Delta}, \quad k = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{\Delta}.$$

然后作平移变换

$$x = \xi + h, \quad y = \eta + k,$$

就可将方程 (2.23) 化为齐次方程

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1 \xi + b_1 \eta}{a_2 \xi + b_2 \eta}\right),$$

求出该齐次方程的通解后, 在通解中以 $x-h$ 代 ξ , $y-k$ 代 η , 便得方程 (2.23) 的通解.

$$\text{情况 II: } \Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$$

这时有如下三种可能:

$$(i) \quad b_1 \neq 0, a_1 \neq 0 \text{ 且 } \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \lambda, \text{ 这里 } \lambda \text{ 为常数.}$$

这时方程 (2.23) 可写成

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\lambda(a_1 x + b_1 y) + c_2}\right).$$

引入新变量 $z = a_1 x + b_1 y$, 可将方程 (2.23) 化为变量分离的方程

$$\frac{dz}{dx} = a_1 + b_1 f\left(\frac{z + c_1}{\lambda z + c_2}\right).$$

$$(ii) \quad b_1 \neq 0, a_1 = a_2 = 0 \text{ 或者 } a_1 \neq 0, b_1 = b_2 = 0.$$

这时方程 (2.23) 的形式分别为

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{b_1 y + c_1}{b_2 y + c_2}\right), \quad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + c_1}{a_2 x + c_2}\right),$$

它们已经是变量分离的形式了.

(iii) $b_1 = a_1 = 0$.

这时方程(2.23)的形式为

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

引入新变量 $z = a_2x + b_2y$, 则方程(2.23)就化为变量可分离的方程

$$\frac{dz}{dx} = a_2 + b_2f\left(\frac{c_1}{z + c_2}\right).$$

因此通过变量代换总可以将方程(2.23)化为变量分离的方程, 从而求出其通解.

例 2.6 求方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y + 4}{x + y - 1} \quad (2.25)$$

的通解.

解 这是一个线性分式方程. 令 $x = \xi + 3, y = \eta - 2$, 可将此方程变为

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{2\eta}{\xi + \eta}, \quad (2.26)$$

令 $z = \frac{\eta}{\xi}$, 得到

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \xi \frac{dz}{d\xi} + z,$$

方程(2.26)变为

$$\xi \frac{dz}{d\xi} + z = \frac{2z}{1 + z},$$

分离变量并两端积分, 得

$$\xi = C \frac{z}{(1 - z)^2}.$$

再由

$$z = \frac{\eta}{\xi} = \frac{y + 2}{x - 3},$$

得方程(2.25)的通解为

$$C(y + 2) = (x - y - 5)^2,$$

其中 C 为任意常数. 此外, $y = -2$ 也是方程(2.25)的解.

习题 2.1

1. 在方程 $\frac{dy}{dx} = h(x)g(y)$ 中如果没有假设 $g(y) \neq 0$, 讨论怎样用分离变量法来求解微分方程.

2. 试用分离变量法求下列一阶微分方程的解:

$$(1) \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y};$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = y^2 \cos x;$$

$$(3) \frac{dy}{dx} = 2xy;$$

$$(4) xy(1+x^2)dy = (1+y^2)dx;$$

$$(5) \frac{dy}{dx} = e^{2y-4x};$$

$$(6) \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^2-1};$$

$$(7) \frac{dy}{dx} = \frac{y^2-1}{2};$$

$$(8) \frac{dy}{dx} = e^x \cos^2 y;$$

$$(9) \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(10) \frac{dy}{dx} = 2xy^2;$$

$$(11) (x+1) \frac{dy}{dx} = 2y;$$

$$(12) \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2 + e^y};$$

$$(13) x(y^2-1)dx + y(x^2-1)dy = 0.$$

3. 将下列方程化为可分离变量方程, 并求解:

$$(1) \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x};$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{x-y+1}{x+y-3};$$

$$(3) y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx};$$

$$(4) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y};$$

$$(5) (2x+y-4)dx + (x+y-1)dy = 0;$$

$$(6) (x^3 + y^3) dx - 3xy^2 dy = 0;$$

$$(7) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1;$$

$$(8) \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy};$$

$$(9) \frac{dy}{dx} = \frac{x-y+5}{x-y-2};$$

$$(10) \frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2;$$

$$(11) \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x};$$

$$(12) \frac{dy}{dx} = \frac{y-x-2}{x+y+4};$$

$$(13) 2x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2;$$

$$(14) \frac{dy}{dx} = \sin(x+y+1);$$

$$(15) x \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$$

4. 解下列线性微分方程:

$$(1) \frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}};$$

$$(2) \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x};$$

$$(3) x \frac{dy}{dx} + y = e^x \quad (x > 0);$$

$$(4) x^2 dy + (3xy + x - 4) dx = 0;$$

$$(5) (x+1) \frac{dy}{dx} - y = x \quad (x > -1);$$

$$(6) \frac{dy}{dx} - 2xy = x.$$

5. 求下列方程的通解:

$$(1) \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x - y^2};$$

$$(2) ydx + (x - y^3)dy = 0;$$

$$(3) ydx - (x + \sqrt{x^2 + y^2})dy = 0.$$

6. 求下列初值问题的解:

$$(1) (1 + e^y) \frac{dy}{dx} = \cos x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3;$$

$$(2) y(1 + x^2)dy = x(1 + y^2)dx, y(0) = 1;$$

$$(3) (1 + e^x)y \frac{dy}{dx} = e^x, y(0) = 1;$$

$$(4) \frac{dy}{dx} + y \sin x = 0, y(0) = \frac{3}{2};$$

$$(5) e^y \frac{dy}{dx} - x - x^3 = 0, y(1) = 1;$$

$$(6) \frac{dy}{dx} + 2xy = x, y(1) = 2.$$

7. 求解下列 Bernoulli 方程:

$$(1) \frac{dy}{dx} = 6 \frac{y}{x} - xy^2;$$

$$(2) \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2 \ln x;$$

$$(3) x \frac{dy}{dx} - 4y = 2x^2 \sqrt{y} \quad (x \neq 0, y > 0);$$

$$(4) \frac{dy}{dx} - 2xy = 2x^3 y^2.$$

8. 设有一过原点的曲线, 其上任一点的切线斜率为

$$\frac{\sqrt{1-y^2}}{1+x^2},$$

试求该曲线方程.

9. 一曲线过点(4,6), 它在两坐标轴间的任一切线线段均被切点所平分, 试求该曲线方程.

10. 验证形如

$$yg(xy)dx + xh(xy)dy = 0$$

的微分方程, 可经变量代换 $z=xy$ 化为可分离变量的方程.

11. 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

的两个互异解. 求证对于该方程的任一解 $y(x)$, 成立恒等式

$$\frac{y(x) - y_1(x)}{y_2(x) - y_1(x)} = C,$$

其中 C 是某常数.

§ 2.2 恰当方程形式

把一阶微分方程写成

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.27)$$

的形式后,如果方程(2.27)的左边恰好是某一函数 $u=U(x,y)$ 的全微分,即

$$dU(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy, \quad (2.28)$$

则称方程(2.27)为恰当方程或全微分方程. 在这种情况下,

$$U(x,y) = C$$

是恰当方程(2.27)的隐式通解,其中 C 为任意常数,称函数 $U(x,y)$ 为方程(2.27)的首次积分.

事实上,回顾数学分析的知识. 如果函数 $u=U(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分,则该函数在点 (x,y) 的偏导数

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}$$

一定存在,并且函数 $u=U(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分为

$$du = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy.$$

如果函数 $u=U(x,y)$ 在点 (x,y) 的偏导数

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}$$

连续,则函数 $u=U(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分. 当方程(2.27)为恰当方程时,从(2.28)知

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y). \quad (2.29)$$

从而方程(2.27)等价于

$$dU(x,y) = 0. \quad (2.30)$$

如果 $y=\phi(x)$ 是方程(2.27)的解,则它亦是方程(2.30)的解. 因此, $dU(x,\phi(x)) \equiv 0$, 即 $U(x,\phi(x)) \equiv C$. 这意味着方程(2.27)的解 $y=\phi(x)$ 是由方程 $U(x,y) \equiv C$ 所确定的隐函数.

反之,如果方程 $U(x,y) \equiv C$ 确定一个可微的隐函数 $y=\phi(x)$, 则

$$U(x,\phi(x)) \equiv C.$$

对 x 求导可得

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

即 $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. 这意味着由方程 $U(x,y) \equiv C$ 所确定的隐函数 $y=\phi(x)$ 是方程(2.27)的解.

例 2.7 解方程 $(3x^2y^2+y)dx + (2x^3y+x)dy = 0$.

解 令 L 表示该式左端, 重新分组得

$$\begin{aligned} L &= (3x^2y^2dx + 2x^3ydy) + (ydx + xdy) \\ &= d(x^3y^2) + d(xy) \\ &= d(x^3y^2 + xy). \end{aligned}$$

故其通解为 $x^3y^2 + xy = C$.

上述通过观察、分组和利用简单函数 $xy, \frac{y}{x}$ 的全微分形式来求解恰当方程的方法虽然重要, 但我们希望知道在一般情形下:

1. 如何判断方程(2.27)是否为恰当方程?
2. 若方程(2.27)为恰当方程, 如何寻求它的首次积分 $U(x, y)$?

下面的定理回答了这两个问题:

定理 2.1 若函数 M, N 在某个开的矩形区域 G 内具有连续的一阶偏导数, 则方程(2.27)为恰当方程的充要条件是

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (2.31)$$

如果方程(2.27)为恰当方程, 则其通解为

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = C, \quad (2.32)$$

或等价地,

$$\int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy = C, \quad (2.33)$$

其中 C 是一个任意常数且 (x_0, y_0) 为区域 G 内任意取定的一点.

证明 如果方程(2.27)为恰当方程, 则从(2.28)和(2.29)知存在函数 $U(x, y)$ 满足(2.29). 由 M, N 的连续可微性得

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

从而(2.31)得证.

欲证条件(2.31)的充分性, 我们实质上只要证明(2.32)和(2.33). 对(2.29)的第一式积分, 得

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \xi(y), \quad (2.34)$$

其中 $\xi(y)$ 是某个待定函数. 由于 $U(x, y)$ 满足 (2.29) 的第二式, 对 (2.34) 求导并利用 (2.31) 得到

$$\begin{aligned} N(x, y) &= \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial y} M(x, y) dx + \xi'(y) \\ &= \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial x} N(x, y) dx + \xi'(y) \\ &= N(x, y) - N(x_0, y) + \xi'(y). \end{aligned}$$

从中得出 $\xi'(y) = N(x_0, y)$, 从而可以确定 $\xi'(y)$ 的一个原函数

$$\xi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy.$$

这样就求得了一个满足 (2.29) 的函数

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy.$$

因此 (2.32) 得证.

如果上述推理先从 (2.29) 的第二式出发, 则可以给出 $U(x, y)$ 的另一个表达式 (2.33). $\square$

例 2.8 求方程

$$(x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy = 0$$

的通解.

解 因为 $M(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$, $N(x, y) = x^2 - 2xy - y^2$, 所以

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x - 2y = \frac{\partial N}{\partial x},$$

这是一个恰当方程. 取 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, 由公式 (2.33),

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_0^x x^2 dx + \int_0^y (x^2 - 2xy - y^2) dy \\ &= \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3}. \end{aligned}$$

故该方程的通解为

$$\frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} = C.$$

有的方程即使是分组也无法看出它是恰当方程. 这时我们问: 是否可以将方程做等式变形从而化成一个恰当方程呢? 我们注意到, 方程(2.27)同方程

$$\mu(x, y)(M(x, y)dx + N(x, y)dy) = 0$$

具有某种等价性. 这提示我们去寻找一个合适的因子 $\mu(x, y)$, 这就是重要的积分因子法.

如果方程(2.27)本身不是恰当方程, 但乘上一个适当的非零函数 $\mu = \mu(x, y)$ 后, 能使方程

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0 \quad (2.35)$$

成为恰当方程, 即存在函数 $W(x, y)$, 使

$$dW(x, y) = \mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy,$$

则称函数 $\mu(x, y)$ 为方程(2.27)的积分因子. 这时 $W(x, y) = C$ 为方程(2.35)的通解, 因而也必为方程(2.27)的通解.

例如, 方程

$$ydx - xdy = 0 \quad (2.36)$$

不是恰当方程, 因为

$$M(x, y) = y, N(x, y) = -x, \frac{\partial M}{\partial y} = 1, \frac{\partial N}{\partial x} = -1.$$

但若用因子 $\frac{1}{y^2}$ 乘以该方程的两边, 则其等价方程满足

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2} = 0,$$

显然它是恰当方程. 因此 $\frac{1}{y^2}$ 是方程(2.36)的一个积分因子, 由此我们求得了该

方程的通解 $\frac{x}{y} = C$.

根据定理 2.1, 函数 $\mu(x, y)$ 为方程(2.27)的积分因子的充要条件是

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

即

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu. \quad (2.37)$$

由一阶线性偏微分方程的理论知方程(2.37)的解存在, 这表明形如(2.27)的微分方程必定存在积分因子. 在一般情况下, 由偏微分方程(2.37)求解 μ 比求解方程(2.27)本身更困难. 但是, 在某些特殊情况下, 求方程(2.37)的一个特解还是容易的, 因此方程(2.37)提供了求方程(2.27)的某些特殊形式的积分因子的方法.

例如, 我们可以尝试寻找只依赖于变量 x 的积分因子 $\mu=\mu(x)$. 这时方程(2.37)变为

$$N \frac{d\mu}{dx} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu,$$

即

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx. \quad (2.38)$$

为了方便起见, 记

$$E(x, y) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (2.39)$$

并称之为恰当判别式, 因为 $E(x, y)=0$ 意味着方程(2.27)为恰当方程. 因此, (2.38)表明: 当且仅当 $\frac{E}{N}$ 只依赖于变量 x 而与变量 y 无关时, 方程(2.27)存在只依赖于变量 x 的积分因子 $\mu(x)$. 此时,

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{E}{N} dx\right). \quad (2.40)$$

类似地, 当且仅当 $\frac{E}{M}$ 只依赖于变量 y 而与变量 x 无关时, 方程(2.27)存在只依赖于变量 y 的积分因子 $\mu(y)$. 此时,

$$\mu(y) = \exp\left(-\int \frac{E}{M} dy\right). \quad (2.41)$$

例 2.9 用积分因子法求解线性方程

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + f(x).$$

解 先把方程写成对称形式

$$(a(x)y + f(x))dx - dy = 0,$$

因此 $M(x, y) = a(x)y + f(x)$, $N(x, y) = -1$. 易见

$$E = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = a(x),$$

它一般是非零函数, 所以方程不是恰当方程. 由于 $\frac{E}{N} = -a(x)$ 与 y 无关, 因此该方程有只依赖于变量 x 的积分因子

$$\mu(x) = e^{-\int a(x) dx}.$$

这样我们得到

$$\begin{aligned} & e^{-\int a(x) dx} \{ (a(x)y + f(x)) dx - dy \} \\ &= a(x) e^{-\int a(x) dx} y dx - e^{-\int a(x) dx} dy + f(x) e^{-\int a(x) dx} dx \\ &= -d \left\{ e^{-\int a(x) dx} y \right\} + d \left\{ \int f(x) e^{-\int a(x) dx} dx \right\}. \end{aligned}$$

因此得到通解

$$-e^{-\int a(x) dx} y + \int f(x) e^{-\int a(x) dx} dx = C.$$

这与常数变易公式(2.13)相同.

在实际应用中我们常常可通过分组观察的方法和积分因子法相结合来求解微分方程(2.27).

例 2.10 求解方程 $(e^x + 3y^2) dx + 2xy dy = 0$.

解 分组观察方程的左端,

$$\begin{aligned} (e^x + 3y^2) dx + 2xy dy &= de^x + \frac{1}{x^2} \{ 3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy \} \\ &= de^x + \frac{1}{x^2} d(x^3 y^2) \\ &= \frac{1}{x^2} \left\{ d \left(\int x^2 de^x \right) + d(x^3 y^2) \right\}. \end{aligned}$$

由分部积分得

$$\int x^2 de^x + x^3 y^2 = (x^2 - 2x + 2)e^x + x^3 y^2.$$

因此, 通解为

$$(x^2 - 2x + 2)e^x + x^3 y^2 = C.$$

通过分组观察的方法求解方程(2.27)时常会遇到下面一些二元函数的全

微分公式:

$$d(xy) = ydx + xdy,$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2},$$

$$d(x^2 + y^2) = 2(xdx + ydy),$$

$$d\left(\arctan \frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

$$d\left(\ln \frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{xy}.$$

一般说来, 我们有这样的结果:

定理 2.2 如果方程(2.27)有积分因子 $\mu(x, y)$ 和相应的原函数 $U(x, y)$, 即

$$dU(x, y) = \mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy,$$

则 $\mu(x, y)h(U(x, y))$ 也是方程(2.27)的一个积分因子, 其中 h 是任意一个可微的非零函数.

证明 由假设知

$$\begin{aligned} & \mu(x, y)h(U(x, y))M(x, y)dx + \mu(x, y)h(U(x, y))N(x, y)dy \\ &= h(U(x, y))\{\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy\} \\ &= h(U(x, y))dU(x, y) = dH(U(x, y)), \end{aligned}$$

其中 H 是 h 的一个原函数. $\square$

假设方程(2.27)左端可以分成两组

$$(M_1dx + N_1dy) + (M_2dx + N_2dy) = 0,$$

其中第一组和第二组各有积分因子 μ_1 和 μ_2 及相应的原函数 U_1 和 U_2 . 由定理 2.2, 对任意可微函数 h_1, h_2 , 这两个组可以分别有积分因子 $\mu_1 h_1(U_1)$ 和 $\mu_2 h_2(U_2)$. 为了找出两组公共的积分因子, 我们需要寻求合适的可微函数 h_1, h_2 , 使得

$$\mu_1 h_1(U_1) = \mu_2 h_2(U_2).$$

如果这样的 h_1, h_2 已经找到, 那么 $\mu = \mu_1 h_1(U_1)$ 就是原方程(2.27)的积分因子.

例 2.11 设 $r, s, \rho, \sigma, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ 是任意常数, 其中 $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. 求方程

$$x^r y^s (\alpha y dx + \beta x dy) + x^\rho y^\sigma (\gamma y dx + \delta x dy) = 0$$

的通解.

解 取

$$\mu_1 = x^{\frac{\alpha}{\beta}-1}, \quad \mu_2 = x^{\frac{\gamma}{\delta}-1}.$$

则

$$\mu_1(\alpha y dx + \beta x dy) = \beta \left\{ \frac{\alpha}{\beta} y x^{\frac{\alpha}{\beta}-1} dx + x^{\frac{\alpha}{\beta}} dy \right\} = \beta d(x^{\frac{\alpha}{\beta}} y),$$

$$\mu_2(\gamma y dx + \delta x dy) = \delta d(x^{\frac{\gamma}{\delta}} y).$$

因此方程中的两组分别有积分因子

$$\mu_3 = x^{\frac{\alpha}{\beta}-1} (x^{-r} y^{-s}), \quad \mu_4 = x^{\frac{\gamma}{\delta}-1} (x^{-\rho} y^{-\sigma}).$$

相应的原函数分别为 $\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}} y, \delta x^{\frac{\gamma}{\delta}} y$.

欲求可微函数 h_1, h_2 , 使得

$$x^{\frac{\alpha}{\beta}-1-r} y^{-s} h_1(\beta x^{\frac{\alpha}{\beta}} y) = x^{\frac{\gamma}{\delta}-1-\rho} y^{-\sigma} h_2(\delta x^{\frac{\gamma}{\delta}} y). \quad (2.42)$$

由于(2.42)两边都是由幂函数构成的单项式形式, 因此只考虑如下形式的 h_1, h_2 :

$$h_1(z) = z^m, \quad h_2(z) = z^n,$$

而(2.42)式两边也都应该是单项式, 不妨记为 $x^k y^l$. 因为 h_1, h_2 的选择有一定的随意性, 因此我们不必对函数 h_1, h_2 考虑自变量中的系数 β 和 δ . 这样(2.42)就简化为

$$x^{\frac{\alpha}{\beta}-1-r} y^{-s} (x^{\frac{\alpha}{\beta}} y)^m = x^{\frac{\gamma}{\delta}-1-\rho} y^{-\sigma} (x^{\frac{\gamma}{\delta}} y)^n = x^k y^l. \quad (2.43)$$

比较(2.43)中第一项和第三项中 x, y 的指数可得到比例关系

$$\frac{k+r+1-\alpha/\beta}{l+s} = \frac{\alpha/\beta}{1}.$$

整理得到

$$\alpha(l+s+1) - \beta(k+r+1) = 0. \quad (2.44)$$

同理对(2.43)中的第二项和第三项分别比较 x, y 的指数, 得到

$$\gamma(l+\sigma+1) - \delta(k+\rho+1) = 0. \quad (2.45)$$

从而确定了方程的积分因子为 $x^k y^l$, 其中 k, l 满足(2.44)和(2.45). 最后得到通解

$$\frac{\alpha}{r+k+1} x^{r+k+1} y^{s+l+1} + \frac{\gamma}{\rho+k+1} x^{\rho+k+1} y^{\sigma+l+1} = C.$$

习题 2.2

1. 验证下列方程是恰当方程, 并求出方程的解:

$$(1) (3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2y + 4y^3) dy = 0;$$

$$(2) \left(\cos x + \frac{1}{y} \right) dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \right) dy = 0;$$

$$(3) (5x^4 + 3xy^2 - y^3) dx + (3x^2y - 3xy^2 + y^2) dy = 0;$$

$$(4) (x^2 + y) dx + (x + y) dy = 0;$$

$$(5) \frac{dy}{dx} = -\frac{6x + y + 2}{x + 8y - 3};$$

$$(6) xy dx + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{y} \right) dy = 0;$$

$$(7) 3x^2 - 2y^2 + (1 - 4xy) \frac{dy}{dx} = 0;$$

$$(8) (x^3 + xy^2) dx + (x^2y + y^3) dy = 0;$$

$$(9) 3y + e^x + (3x + \cos y) \frac{dy}{dx} = 0.$$

2. 求下列初值问题的解:

$$(1) 3x^2y + 8xy^2 + (x^3 + 8x^2y + 12y^2) \frac{dy}{dx} = 0, y(2) = 1;$$

$$(2) 4x^3 e^{x+y} + x^4 e^{x+y} + 2x + (x^4 e^{x+y} + 2y) \frac{dy}{dx} = 0, y(0) = 1.$$

3. 试证: 齐次方程

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

当 $xM + yN \neq 0$ 时存在积分因子

$$\mu = \frac{1}{xM + yN}.$$

4. 试用积分因子法解下列方程:

$$(1) y dx + (y - x) dy = 0;$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \quad (y > 0);$$

$$(3) (x^2 + y^2 + y) dx - x dy = 0;$$

$$(4) \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \right) dx + (x^2 + y^2) dy = 0;$$

$$(5) 2xy \ln y dx + (x^2 + y^2 \sqrt{1 + y^2}) dy = 0.$$

5. 试求 Bernoulli 方程

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + f(x)y^\alpha \quad (\alpha \neq 0, 1)$$

的积分因子.

6. 试求变量可分离方程

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$$

的积分因子.

7. 试求能使微分方程

$$y^2 \sin x dx + y f(x) dy = 0$$

成为恰当方程的所有的函数 $f(x)$, 并根据所得的 $f(x)$ 求该方程的解.

8. 已知微分方程

$$(x^2 + y) dx + f(x) dy = 0$$

有积分因子 $\mu = x$, 试求所有可能的函数 $f(x)$.

9. 假设微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \tan y - e^x \sec y$$

有形如 $e^{-ax} \cos y$ 的积分因子, 试确定其中的常数 a , 并求解该方程.

§ 2.3 隐式方程

在实际问题中常会出现导数未解出的一阶微分方程, 它们不是前面两节所讨论的方程形式. 这就是本节要讨论的一阶隐式方程, 其一般形式为

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \quad (2.46)$$

求解这类方程的基本思想是将 $p = \frac{dy}{dx}$ 看成独立的变量而考虑由代数方程 $F(x, y, p) = 0$ 所定义的 $\mathbb{R}^3$ 上的曲面的参数化, 再通过变量替换的方法把方程 (2.46) 化为导数已解出的显式方程, 然后用上两节给出的方法求解.

对一般形式的方程 (2.46), 其具体做法是:

第一步 将曲面 $F(x, y, p) = 0$ 表示成参数形式

$$x = \phi(s, t), \quad y = \psi(s, t), \quad p = \kappa(s, t). \quad (2.47)$$

第二步 对 (2.47) 求 x, y 的微分, 用 $p = \frac{dy}{dx}$ 给出 dy 和 dx 的关系:

$$dx = \frac{\partial \phi}{\partial s} ds + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt, \quad (2.48)$$

$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial s} ds + \frac{\partial \psi}{\partial t} dt, \quad (2.49)$$

$$dy = \frac{dy}{dx} dx = \kappa dx. \quad (2.50)$$

第三步 将(2.48)、(2.49)代入(2.50)得

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} ds + \frac{\partial \psi}{\partial t} dt = \kappa \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} ds + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt \right).$$

合并得到

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial s} - \frac{\partial \phi}{\partial s} \kappa \right) ds + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \kappa \right) dt = 0. \quad (2.51)$$

从而化成了第2节讨论的对称形式的微分方程.

第四步 如果用第1节和第2节的方法已求得了方程(2.51)的通解 $s = w(t, C)$, 则将它代入(2.47)就得到方程(2.46)的参数形式的解

$$\begin{cases} x = \phi(w(t, C), t), \\ y = \psi(w(t, C), t), \end{cases} \quad (2.52)$$

其中 C 为任意常数. 如果方程(2.51)的通解是另一种形式 $t = w(s, C)$, 我们可得到类似结果.

下面我们用这一方法讨论几类特殊形式的方程(2.46):

1) 可以解出 y 的方程:

$$y = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right), \quad (2.53)$$

这里函数 f 有连续的一阶偏导数. 这时曲面 $F(x, y, p) = 0$ 的参数形式可为

$$x = x, \quad y = f(x, p), \quad p = p,$$

其中 $x, p = \frac{dy}{dx}$ 为参数. 对方程(2.53)两边关于 x 求导, 得

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(x, p) + \frac{\partial f}{\partial p}(x, p) \frac{dp}{dx},$$

因此得到如下对称形式的方程:

$$\left(p - \frac{\partial f}{\partial x}(x, p)\right) dx - \frac{\partial f}{\partial p}(x, p) dp = 0. \quad (2.54)$$

2) 可以解出 x 的方程:

$$x = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right), \quad (2.55)$$

这里函数 f 有连续的一阶偏导数. 类似地, 曲面 $F(x, y, p) = 0$ 的参数形式可为

$$x = f(y, p), \quad y = y, \quad p = p,$$

其中 $y, p = \frac{dy}{dx}$ 为参数. 对方程 (2.55) 两边关于 x 求导, 得

$$1 = \frac{\partial f}{\partial y}(y, p)p + \frac{\partial f}{\partial p}(y, p) \frac{dp}{dx}. \quad (2.56)$$

由于

$$\frac{dp}{dx} = p \frac{dp}{dy},$$

因此从 (2.56) 得到

$$1 = \frac{\partial f}{\partial y}(y, p)p + \frac{\partial f}{\partial p}(y, p)p \frac{dp}{dy}.$$

由上式可解出 $\frac{dp}{dy}$, 从而得到如下规范形式的一阶微分方程:

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{\partial f}{\partial y}(y, p)}{\frac{\partial f}{\partial p}(y, p)}. \quad (2.57)$$

3) 不显含 y 的隐式方程:

$$F\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \quad (2.58)$$

令 $p = \frac{dy}{dx}$, 这时代数方程 $F(x, p) = 0$ 代表 Oxp 平面上的一条曲线, 设该曲线有参数表示

$$x = \varphi(s), \quad p = \psi(s), \quad (2.59)$$

其中 s 为参数. 由微分关系得

$$dy = p dx = \psi(s) dx, \quad dx = \varphi'(s) ds,$$

因此

$$dy = \psi(s) \varphi'(s) ds,$$

这是一个变量分离的方程, 其通解为

$$y(s) = \int \psi(s) \varphi'(s) ds + C,$$

其中 C 为任意常数. 由此得方程 (2.58) 的参数形式的通解为

$$\begin{cases} x = \varphi(s), \\ y = \int \psi(s) \varphi'(s) ds + C. \end{cases} \quad (2.60)$$

4) 不显含 x 的隐式方程:

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \quad (2.61)$$

令 $p = \frac{dy}{dx}$, 同样, 代数方程 $F(y, p) = 0$ 代表 Oyp 平面上的一条曲线, 设其参数表示为

$$y = \varphi(s), \quad p = \psi(s). \quad (2.62)$$

由微分关系得

$$dy = \varphi'(s) ds, \quad dy = p dx = \psi(s) dx,$$

因此,

$$dx = \frac{\varphi'(s)}{\psi(s)} ds.$$

故方程 (2.61) 的参数形式的通解为

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(s)}{\psi(s)} ds + C, \\ y = \varphi(s), \end{cases} \quad (2.63)$$

其中 C 为任意常数.

下面我们通过一些具体的例子来说明这些求解方法.

例 2.12 解方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 2x \frac{dy}{dx} - y = 0. \quad (2.64)$$

解 令 $p = \frac{dy}{dx}$, 则 (2.64) 成为

$$y = p^3 + 2xp. \quad (2.65)$$

对方程 (2.65) 两边关于 x 求导, 得

$$p = 3p^2 \frac{dp}{dx} + 2x \frac{dp}{dx} + 2p,$$

即

$$(3p^2 + 2x) dp + p dx = 0, \quad (2.66)$$

当 $p \neq 0$ 时, 方程 (2.66) 有积分因子 $\mu = p$, 用 μ 乘 (2.66) 的两端, 得

$$3p^3 dp + (2xpd p + p^2 dx) = 0.$$

由此求出方程 (2.66) 的隐式通解:

$$\frac{3p^4}{4} + xp^2 = C_1,$$

其中 C_1 为任意常数. 解出 x 得

$$x = \frac{C_1 - \frac{3}{4}p^4}{p^2} = \frac{C - 3p^4}{4p^2},$$

其中 $C = 4C_1$. 从而方程 (2.64) 的参数形式的解为

$$\begin{cases} x = \frac{C - 3p^4}{4p^2}, \\ y = p^3 + 2p \frac{C - 3p^4}{4p^2} = \frac{C - p^4}{2p} \end{cases} \quad (p \neq 0).$$

当 $p = 0$ 时, 由 (2.65) 可直接推知 $y = 0$ 也是方程 (2.64) 的解.

例 2.13 解方程

$$x^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 3x \frac{dy}{dx} = 0.$$

解 令 $\frac{dy}{dx} = p = tx$, 则由方程得

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad p = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

于是

$$dy = \frac{9(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3} dt.$$

两边积分, 可得

$$y = \int \frac{9(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3} dt = \frac{3(1+4t^3)}{2(1+t^3)^2} + C.$$

因此, 方程的参数形式的通解为

$$\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3}, \\ y = \frac{3(1+4t^3)}{2(1+t^3)^2} + C, \end{cases}$$

其中 C 为任意常数.

例 2.14 解方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - y^2\left(4 - \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

解 令 $\frac{dy}{dx} = p$, $y = pt$, 由方程可得

$$p = \frac{4t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{4t^3}{1+t^2}.$$

当 $p \neq 0$ 时, 有 $dx = \frac{1}{p} dy$, 则

$$x = \int \frac{3+t^2}{1+t^2} dt = t + 2\arctan t + C.$$

因此, 该方程的参数形式的解为

$$\begin{cases} x = t + 2\arctan t + C, \\ y = \frac{4t^3}{1+t^2}, \end{cases}$$

其中 C 为任意常数. 此外, 当 $p=0$ 时, 易知 $y=0$ 也是方程的解.

在某些情况下我们可从隐式方程中解出 $\frac{dy}{dx}$, 因此可以将方程化成前两节讨论过的显式方程. 例如若方程 (2.46) 的左边是 $\frac{dy}{dx}$ 的 n 次多项式, 即方程 (2.46) 的形式为

$$\sum_{k=0}^n a_k(x, y) \left(\frac{dy}{dx} \right)^k = 0. \quad (2.67)$$

若方程 (2.67) 关于 $\frac{dy}{dx}$ 的多项式有 s 个不同的实根 $f_k(x, y), k=1, 2, \dots, s, s \leq n$, 则对每个 k , 方程 (2.67) 的求解问题都可归结为形式较简单的显式方程

$$\frac{dy}{dx} = f_k(x, y)$$

的求解问题. 例如方程

$$y'^2 - \left(xy + \frac{1}{2y} \right) y' + \frac{x}{2} = 0,$$

可写成

$$\left(y' - \frac{1}{2y} \right) (y' - xy) = 0,$$

由此得两个方程

$$y' = \frac{1}{2y}, \quad y' = xy.$$

对这两个方程分别用分离变量法求解, 从而得到原方程的不同的解为

$$x = y^2 + C_1,$$

或

$$y = C_2 e^{\frac{x^2}{2}},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

另外, 若方程 (2.46) 不显含 x 和 y , 即方程 (2.46) 的形式为

$$F\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0. \quad (2.68)$$

这时若方程(2.68)至少有一个实根 $y' = p$, 则有 $y = px + C$. 将 $p = \frac{y-C}{x}$ 代入方程(2.68), 即得方程(2.68)的隐式通解

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0,$$

其中 C 为任意常数. 例如方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^7 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 5 = 0.$$

由于方程的左边是一个关于 $\frac{dy}{dx}$ 的 7 次多项式, 因此该方程至少有一个实根, 故有隐式通解

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^7 - 2\left(\frac{y-C}{x}\right)^4 + 5\left(\frac{y-C}{x}\right)^3 + 5 = 0,$$

其中 C 为任意常数.

§ 2.4 初等积分法的一些应用

一、奇解

初等积分法的一个重要应用是讨论方程的奇解. 对于某些微分方程, 有时存在一条特殊的积分曲线, 它不属于该方程的积分曲线族, 但在它的每一点上都有积分曲线族中的某条曲线与它相切. 在几何学上, 这条特殊的积分曲线称为该积分曲线族的包络. 从微分方程的角度来看, 在这条特殊的积分曲线上的每一点处, 解的唯一性都被破坏. 通常, 我们把这条特殊的积分曲线所对应的解称为方程的奇解.

下面我们给出曲线族的包络的确切定义. 设

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (2.69)$$

为给定的平面单参数曲线族, 其中 C 为参数, $\Phi(x, y, C)$ 作为 (x, y, C) 的三元函数连续可微. 曲线族(2.69)的包络是指这样的曲线 Γ , 它本身并不包含在曲线族(2.69)中, 但过曲线 Γ 的每一点, 有曲线族(2.69)中的一条曲线和 Γ 在这点相切. 例如, 单参数曲线族 $y = \cos(x+C)$ 显然有包络 $y = 1$ 和 $y = -1$. 然而, 一般的曲线族不一定有包络, 例如同心圆族和平行线族都没有包络.

由微分几何学知识, 曲线族(2.69)如果有包络, 则当函数 $\Phi(x, y, C)$ 是 x, y, C 的连续可微函数时, 其包络应满足关系式

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0. \end{cases} \quad (2.70)$$

通常, 我们把关系式(2.70)或由它消去 C 而得到的关于 x, y 的关系式 $\Omega(x, y) = 0$ 所确定的曲线称为 C -判别曲线. 它只是一个必要条件. $\Omega(x, y) = 0$ 可能有几个分支, 哪一个分支才是包络还需要验证.

例如考虑方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y,$$

分解因式得

$$\frac{dy}{dx} = \pm 2\sqrt{y}, \quad y \geqslant 0.$$

求积分可得该方程的通解为

$$\Phi(x, y, C) = y - (x + C)^2 = 0.$$

由此得 C -判别曲线满足方程:

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = y - (x + C)^2 = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 2(x + C) = 0. \end{cases} \quad (2.71)$$

从中消去 C 得 $y=0$. 易见 $y=0$ 是方程的抛物线解族 $y=(x+C)^2$ 的包络, 见图 2.4. 显然它也是该方程的解, 因而 $y=0$ 是该方程的奇解.

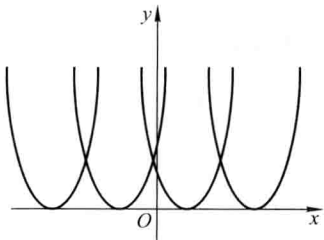


图 2.4 $y=0$ 是抛物线族 $y=(x+C)^2$ 的包络

下面给出另一个判断奇解的方法.

定理 2.3 设函数 $F(x, y, p)$ 连续且对 x, y, p 连续可微, 则方程

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

的奇解 $y = \phi(x)$ 应满足关系式

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F'_p(x, y, p) = 0, \end{cases} \quad (2.72)$$

或满足从中消去 p 而得到的关系式 $\Delta(x, y) = 0$, 其中 $p = \frac{dy}{dx}$.

证明 由于奇解 $y = \phi(x)$ 也是方程的解, 因此它显然满足 (2.72) 的第一式, 故只需要证明它也满足 (2.72) 的第二式. 用反证法. 假设在某点 x_0 处,

$$\frac{\partial F}{\partial p}(x_0, y_0, p_0) \neq 0,$$

其中 $y_0 = \phi(x_0)$, $p_0 = \phi'(x_0)$. 由于 $F(x_0, y_0, p_0) = 0$, 由隐函数定理, 存在点 (x_0, y_0) 的某邻域, 使得在该邻域内, 由方程

$$F(x, y, y') = 0 \quad (2.73)$$

可以唯一地确定

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (2.74)$$

其中函数 $f(x, y)$ 满足 $f(x_0, y_0) = p_0$ 且连续, 并对 y 连续可微. 因此 (2.73) 所有满足 $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = p_0$ 的解都是 (2.74) 的解. 而方程 (2.74) 满足 Picard 存在唯一性定理的条件 (参见第五章), 显然方程 (2.74) 满足初值条件 $y(x_0) = y_0$ 的唯一解只能是 $y = \phi(x)$. 因此, 在点 (x_0, y_0) 附近不可能存在方程 (2.73) 的其他解在该点与 $y = \phi(x)$ 相切. 这与 $y = \phi(x)$ 是奇解的假定矛盾. 证毕. $\square$

我们把由关系式 (2.72) 或关系式 $\Delta(x, y) = 0$ 所确定的曲线称为 p -判别曲线. 显然, 方程 $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ 若存在奇解, 则该奇解对应的积分曲线必在 p -判别曲线中. 至于 p -判别曲线是否是方程的奇解, 尚需进一步验证.

例 2.15 证明 Clairaut 方程

$$y = x \frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad (2.75)$$

恒有奇解, 其中一元函数 $f(u)$ 二次连续可微, 且 $f''(u) \neq 0$.

证明 令 $p = \frac{dy}{dx}$. 对方程两边关于 x 求导, 可得

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + f'(p) \frac{dp}{dx},$$

故或者 $\frac{dp}{dx} = 0$, 或者 $x + f'(p) = 0$.

若 $\frac{dp}{dx} = 0$, 则 $p = C$, 其中 C 为任意常数. 将它代入 (2.75) 即得 Clairaut 方程 (2.75) 的通解

$$y = Cx + f(C). \quad (2.76)$$

因此 Clairaut 方程的积分曲线族为直线族 (2.76). 显然, 直线族 (2.76) 的包络由关系式

$$\begin{cases} y = Cx + f(C), \\ x + f'(C) = 0 \end{cases} \quad (2.77)$$

所确定.

若 $x + f'(p) = 0$, 则可得方程 (2.75) 的参数形式的特解为

$$\begin{cases} x = -f'(p), \\ y = -pf'(p) + f(p). \end{cases} \quad (2.78)$$

它也是 p -判别曲线, 并且它和 (2.77) 有相同的形式. 不难验证由 (2.78) 消去 p 后得到的是方程 (2.75) 的一个奇解.

事实上, 若把 p 看成参数, 则曲线 (2.78) 的切线的斜率为

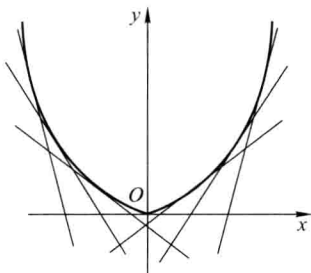
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dp}}{\frac{dx}{dp}} = \frac{-pf''(p)}{-f''(p)} = p.$$

把 $x = -f'(p)$ 和 $\frac{dy}{dx} = p$ 代入 (2.78) 的后一式, 即可得

$$y = x \frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

因此所给 p -判别曲线是方程 (2.75) 的一条积分曲线. 读者可进一步由定义证明它确实是方程 (2.75) 的一个奇解.

例如当 $f(p) = -p^2$ 时, 容易由上面的结果知相应的 Clairaut 方程的积分曲线族为直线族 $y = Cx - C^2$, 它的包络为抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$, 方程的积分曲线在 Oxy 平面上的分布如图 2.5 所示.

图 2.5 当 $f(p) = -p^2$ 时 Clairaut 方程的积分曲线分布图

二、高阶微分方程

对于高阶微分方程

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0, \quad (2.79)$$

一般没有普遍的解法, 求解高阶微分方程的基本思想是降阶, 即通过变量变换的方法将方程(2.79)化为阶数较低的方程来求解, 从而将问题简化. 对某些特殊形式的方程这往往是有效的. 下面我们介绍几类可通过降阶的方法求解的高阶微分方程.

1) 不显含未知函数 y 的方程:

$$F\left(x, \frac{d^k y}{dx^k}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \quad (k \geq 1). \quad (2.80)$$

令 $p = \frac{d^k y}{dx^k}$, 则方程(2.80)变为关于 p 的 $n-k$ 阶微分方程

$$F\left(x, p, \frac{dp}{dx}, \dots, \frac{d^{n-k} p}{dx^{n-k}}\right) = 0. \quad (2.81)$$

如果能够求出方程(2.81)的通解 $p = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-k})$, 则方程

$$\frac{d^k y}{dx^k} = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-k}), \quad (2.82)$$

经过 k 次积分后得到的通解

$$y = \psi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

就是方程(2.80)的通解, 这里 $C_j, j=1, 2, \dots, n$ 为任意常数.

例 2.16 解方程

$$x \frac{d^3 y}{dx^3} - 2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 + 2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

解 令 $p = \frac{d^2 y}{dx^2}$, 则

$$x \frac{dp}{dx} - 2(p^2 - p) = 0. \quad (2.83)$$

当 $p \neq 0$ 且 $p \neq 1$ 时用分离变量法, 可得

$$p = \frac{1}{1 - ax^2},$$

其中 a 为任意非零常数. 当 $a > 0$ 时, 令 $a = C_1^2$, 则

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{1 - C_1^2 x^2}.$$

经过两次积分后解得

$$y = \frac{1}{2C_1^2} \ln |1 + C_1 x| |1 - C_1 x| + \frac{x}{2C_1} \ln \left| \frac{1 + C_1 x}{1 - C_1 x} \right| + C_2 x + C_3.$$

当 $a < 0$ 时, 令 $a = -C_1^2$, 则

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{1 + C_1^2 x^2}.$$

经过两次积分后解得

$$y = \frac{x}{C_1} \arctan(C_1 x) - \frac{1}{2C_1^2} \ln(1 + C_1^2 x^2) + C_2 x + C_3,$$

其中 $C_1 \neq 0$, C_2, C_3 为任意常数.

此外, 由于常函数 $p=0$ 和 $p=1$ 也是方程 (2.83) 的解, 因此, 函数 $y = C_1 x + C_2, y = \frac{1}{2} x^2 + C_1 x + C_2$ 亦为原方程的解, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

2) 不显含自变量 x 的方程:

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0. \quad (2.84)$$

这种方程也称为自治微分方程. 令 $p = \frac{dy}{dx}$, 则方程 (2.84) 可变为关于 p 的 $n-1$ 阶微分方程.

事实上, 若 $p = \frac{dy}{dx}$, 则

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy},$$

用数学归纳法容易证明: 对任意的 $1 < j \leq n$, $\frac{d^j y}{dx^j}$ 可以用

$$y, p, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{j-1} p}{dy^{j-1}}$$

来表出. 把它们代入方程 (2.84) 就得到形如

$$G\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}}\right) = 0 \quad (2.85)$$

的关于 p 的 $n-1$ 阶微分方程, 比方程 (2.84) 低了一阶.

例 2.17 解方程

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2 \frac{dy}{dx} = 0.$$

解 令 $p = \frac{dy}{dx}$, 则

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy}.$$

故原方程可化为

$$yp \frac{dp}{dy} - p^2 - 2p = 0. \quad (2.86)$$

易见 $p=0$ 和 $p=-2$ 是方程 (2.86) 的解. 因此, $y=C$, $y=-2x+C$ 是原方程的解, 其中 C 为任意常数.

当 $p \neq 0$ 且 $p \neq -2$ 时, 使用分离变量的方法, 可得方程 (2.86) 的通解为

$$p = C_1 y - 2,$$

其中 C_1 为任意常数. 求解方程

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y - 2.$$

当 $C_1 \neq 0$ 时, 原方程的通解为

$$y = C_2 e^{C_1 x} + \frac{2}{C_1},$$

其中 C_2 为任意常数. 当 $C_1 = 0$ 时, 即为上面讨论过的 $p = -2$ 的情况.

3) 齐次方程:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0, \quad (2.87)$$

其中左边是关于变量

$$y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$$

的零次齐次函数, 即

$$F\left(x, ty, t \frac{dy}{dx}, \dots, t \frac{d^n y}{dx^n}\right) = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right), \quad \forall t \neq 0.$$

显然, 当 $y \neq 0$ 时, 齐次方程 (2.87) 等价于

$$F\left(x, 1, \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{1}{y} \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0. \quad (2.88)$$

若令

$$p = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$$

并以它为新未知函数, 则方程就可降低一阶. 事实上, 在所作的假定下, 有

$$\frac{dy}{dx} = yp,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} p + y \frac{dp}{dx} = y \left(p^2 + \frac{dp}{dx} \right),$$

用数学归纳法不难证明: 对任意的 $1 < k \leq n$, $\frac{1}{y} \frac{d^k y}{dx^k}$ 可用

$$p, \frac{dp}{dx}, \dots, \frac{d^{k-1} p}{dx^{k-1}}$$

表出. 将这些表达式代入方程(2.88), 可得形如

$$G\left(x, p, \frac{dp}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}}\right) = 0 \quad (2.89)$$

的关于 p 的 $n-1$ 阶微分方程, 比方程(2.87)低了一阶.

例 2.18 解方程

$$x^2 y \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(y - x \frac{dy}{dx}\right)^2.$$

解 令 $p = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$, 则

$$\frac{dy}{dx} = yp,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} p + y \frac{dp}{dx} = yp^2 + y \frac{dp}{dx}.$$

故原方程可化为

$$x^2 y^2 \frac{dp}{dx} = y^2 - 2xy^2 p. \quad (2.90)$$

当 $y \neq 0$ 时, 方程(2.90)等价于

$$x^2 \frac{dp}{dx} = 1 - 2xp.$$

解得

$$p = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2},$$

其中 C_1 为任意常数. 因此原方程的通解为

$$y = C_2 e^{\int p dx} = C_2 x e^{\frac{C_1}{x}},$$

其中 C_2 为任意常数.

此外, $y=0$ 显然是原方程的一个特解, 但此解已包含在上面的通解表达式之中(取 $C_2=0$ 即得).

4) 全微分方程:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0, \quad (2.91)$$

其中左边是某个形如

$$\Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

的表达式对 x 的全导数, 即

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = \frac{d}{dx} \Phi\left(x, y, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right),$$

这里 $n+1$ 元函数 $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ 的对各变元的一阶偏导数都存在且连续, 故方程 (2.91) 有形式:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \frac{dy}{dx} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n+1}} \frac{d^n y}{dx^n}.$$

其中函数 $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ 的对各变元的一阶偏导数在

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

处取值.

此时, 方程 (2.91) 等价于

$$\Phi\left(x, y, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = C, \quad (2.92)$$

其中 C 为任意常数. 而方程 (2.92) 是 $n-1$ 阶的, 这样就降低了方程 (2.91) 的阶数. 与一阶微分方程类似, 有时方程 (2.91) 本身不是全微分方程, 但乘上适当的函数

$$\mu\left(x, y, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

后, 就变为全微分方程. 这时, 也称函数 μ 为积分因子.

例 2.19 解方程

$$(1 + y^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

解 当 $y' \neq 0$ 时, 由于

$$\frac{y''}{y'} - \frac{2yy'}{1+y^2} = (\ln |y'| - \ln(1+y^2))',$$

故原方程可化为

$$\ln |y'| - \ln(1 + y^2) = C_0,$$

其中 C_0 为任意常数, 这等价于

$$y' = \widetilde{C}(1 + y^2) \quad (\widetilde{C} := \pm e^{C_0}).$$

由此解得 $y = \tan(\widetilde{C}x + C_2)$, 其中 C_2 为任意常数.

此外, 当 $y' = 0$ 时, $y = C$ 也是原方程的解, 其中 C 为任意常数.

因此原方程的通解可统一表示为

$$y = \tan(C_1x + C_2),$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

三、平面保守系统

在第一章的例 1.3 中如果不考虑阻力, 即设 $\mu = 0$, 则方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (2.93)$$

它描述了线性弹簧振子的自由振动. 这是一个二阶的自治微分方程. 按照前面的降阶法, 令 $y = \frac{dx}{dt}$, 则

$$\frac{d^2x}{dt^2} = y \frac{dy}{dx}.$$

代入(2.93)即得如下对称形式的一阶方程

$$kx dx + m y dy = 0. \quad (2.94)$$

它是一个恰当方程, 具有原函数

$$H(x, y) = \frac{m}{2}y^2 + \frac{k}{2}x^2.$$

因此(2.94)的通解为 $H(x, y) = C$. 如果 $k > 0$, 对每个 $C > 0$, 曲线 $H(x, y) = C$ 是一个椭圆. 如果 $k < 0$, 对每个 $C \neq 0$, 曲线 $H(x, y) = C$ 是双曲线. 我们常将系统(2.93)表示的运动刻画在 Oxy 平面上, 这时称 Oxy 平面为相平面. 该相平面上的这些曲线称为系统的轨道. 相平面上的轨道分布图称为相图. 在图 2.6 和图 2.7 中我们分别画出了当 $k > 0$ 及 $k < 0$ 时系统(2.93)的相图, 其中箭头方向为当 $t \rightarrow +\infty$ 时 x 和 y 变动的方向. 在 $k > 0$ 情形下的相图表明, 线性弹簧振子的自由振

动呈周期运动.

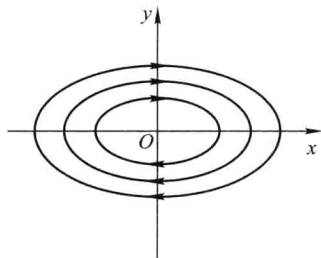


图 2.6 $k > 0$ 时 (2.93) 的相图

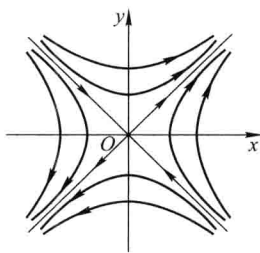


图 2.7 $k < 0$ 时 (2.93) 的相图

进一步, 在函数 $H(x, y)$ 中 $\frac{1}{2}my^2$ 和 $\frac{1}{2}kx^2$ 分别表示振子的动能和势能. 因此 $H(x, y)$ 是系统的总机械能. 方程 (2.93) 的通解形式表明, 在任何一条轨道上, 总机械能是恒定不变的. 我们称这种系统为保守系统. 以后我们会知道 (2.93) 描述的是一个平面 Hamilton 系统, 这种系统的运动轨道都在能量等位线上.

方程 (2.93) 是下面更一般方程的特殊情况:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g(x) = 0. \quad (2.95)$$

方程 (2.95) 称为 Newton 系统. 按照上面的做法, 方程可以化成

$$ydy + g(x)dx = 0. \quad (2.96)$$

同样可以得到总机械能

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x),$$

其中

$$G(x) = \int_0^x g(x) dx.$$

不难看出方程 (2.96) 的通解为 $H(x, y) = C$, 其中 C 为任意常数. 因为

$$y = \pm \sqrt{2(C - G(x))},$$

所以方程 (2.95) 的解 $x(t)$ 可以通过求解下列变量分离形式的一阶方程

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{2(C - G(x))} \quad (2.97)$$

得到. 在求解 (2.97) 的过程中往往会遇到计算困难, 因为分离变量后关于 x 的

积分常常涉及椭圆积分. 读者不妨尝试用这里介绍的方法解决第一章例 1.2 提出的单摆问题.

四、Riccati 方程

Riccati 方程是一类形式上看起来十分简单的一阶微分方程, 其方程右端为二次多项式. 它可以表示成

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t), \quad (2.98)$$

其中函数 a, b, c 在区间 I 上连续且 $a(t) \neq 0$. 如果已经知道其一个特解 $\phi(t)$, 我们可通过变换 $y = x - \phi(t)$ 把方程 (2.98) 化成一个 Bernoulli 方程

$$\frac{dy}{dt} = (2a(t)\phi(t) + b(t))y + a(t)y^2. \quad (2.99)$$

从而可以用初等积分法求出通解.



图 2.8 J. Riccati (1676—1754)

然而问题是怎样找到特解 $\phi(t)$ 呢? 很早人们就在探索这个有代表性的问题. 不妨考虑一个形式具体一些的 Riccati 方程

$$\frac{dx}{dt} = -x^2 + ct^m, \quad (2.100)$$

其中 c 是常数且 $t \neq 0, x \neq 0$. 显然当 $m=0$ 时 (2.100) 已经是变量分离形式的方程. 当 $m=-2$ 时, 在变换 $y = tx$ 下, 方程 (2.100) 也可化成变量分离形式的方程

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-y^2 + y + c}{t}.$$

当 $m = \frac{-4k}{2k+1}$ 时, 容易验证通过变换

$$t = \tau^{-\frac{1}{m+1}}, \quad x = \left(\frac{c}{m+1} \right) \frac{1}{\tau - y\tau^2},$$

方程 (2.100) 仍化成 (2.100) 的形式, 即

$$\frac{dy}{d\tau} = -y^2 + c'\tau^n, \quad (2.101)$$

其中

$$c' = \frac{c}{(m+1)^2}, \quad n = \frac{-4(k-1)}{2(k-1)+1}.$$

因此重复上述过程 k 次后原方程 (2.100) 可以化成 (2.100) 的形式, 其中 $m=0$, 从而得到一个变量分离形式的方程. 类似地可以证明当 $m = \frac{-4k}{2k-1}$ 时原方程 (2.100) 也可以化成 (2.100) 的形式, 其中 $m=0$.

因此, 条件

$$m = 0, -2, \frac{-4k}{2k \pm 1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.102)$$

是 Riccati 方程 (2.100) 可以用初等积分法求解的一个充分条件. 不幸的是, 1841 年 Liouville 证明条件 (2.102) 还是必要的, 参见文献 [25] 第 113—123 页. 这个例子表明: 并不是所有的微分方程都可以用初等积分法求出其通解, 即使是形式非常简单的非线性微分方程也是如此. 因此人们不再把主要精力用于追求微分方程的初等积分法求解, 转而考虑怎样从微分方程表达形式本身的特点去分析推断其解的属性. 人们不再刻意在乎方程解的解析表达式, 而希望能获得一个相对满意的近似结果, 甚至不在乎方程解的近似解, 而直接由方程本身的特点来准确地判定解是否具有周期性、有界性、稳定性, 等等, 因为这些性质才是人们对方程所描述的运动状况所要关心的实质性问题.



图 2.9 J. Liouville(1809—1882)证明 Riccati 方程一般不能用初等积分法求解

习题 2.4

1. 求下列方程的通解:

$$(1) \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 2\frac{dy}{dx} - x = 0;$$

$$(2) y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2};$$

$$(3) y^2\left(1 - \frac{dy}{dx}\right) = \left(2 - \frac{dy}{dx}\right)^2;$$

$$(4) \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4xy\frac{dy}{dx} + 8y^2 = 0;$$

$$(5) y^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 3y\frac{dy}{dx} = 0;$$

$$(6) \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 - 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0.$$

2. 解下列方程, 并求奇解(如果存在的话):

$$(1) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 - 1 = 0;$$

$$(2) x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} + 1 = 0;$$

$$(3) y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2;$$

$$(4) x - y = \frac{4}{9}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{8}{27}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3;$$

$$(5) \frac{dy}{dx} = -\sqrt{y-x} + 1;$$

$$(6) \frac{dy}{dx} = -x + \sqrt{x^2 + 2y}.$$

3. 求下列高阶方程的解:

$$(1) \frac{d^5 y}{dx^5} - \frac{1}{x} \frac{d^4 y}{dx^4} = 0;$$

$$(2) y \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0;$$

$$(3) (1+x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} = 2x \frac{dy}{dx};$$

$$(4) y \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx} \right)^2;$$

$$(5) \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 = \frac{dy}{dx};$$

$$(6) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{1-y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0;$$

$$(7) 4 \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d^2 y}{dx^2};$$

$$(8) (1+x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 1 = 0;$$

$$(9) \frac{dy}{dx} \frac{d^3 y}{dx^3} - \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 = 0.$$

4. 已知某曲线, 它的方程 $y=y(x)$ 满足微分方程

$$x \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = y,$$

且与另一曲线 $y=e^{-x}$ 在点 $(0,1)$ 相切, 求此曲线方程.

5. 证明方程

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 3xy \frac{dy}{dx} + 3y^2 = 0$$

只有零解.

6. 试证: 若 $y=\varphi(x)$ 是方程

$$\frac{dy}{dx} = p(x) \sin y$$

的满足初值条件 $\varphi(0)=0$ 的解, 则 $\varphi(x) \equiv 0$, 其中 $p(x)$ 在 $-\infty < x < \infty$ 上连续.

第三章 线性方程

当我们用这种方法预先获得有关这些问题的信息时,完成它们的证明当然要比没有任何信息的情况下去发现其证明容易得多……这种方法一旦被建立起来,我们的同代人或后继者中的某些人将会利用它发现另外一些我尚未想到的定理.

——阿基米德 (Archimedes 287 B. C. —212 B. C.)

考虑如下形式的微分方程组:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

其中 $\mathbf{x}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$. 若函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在某点 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ 处有 Taylor 展开

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{R}(\mathbf{x}),$$

其中 $\|\mathbf{R}(\mathbf{x})\|$ 是 $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ 的高阶无穷小(这里 $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ 是向量 $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ 的范数,其定义见下面 § 3.1), $\mathbf{A}$ 为 $n \times n$ 阶矩阵,则在 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ 附近向量值函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 可以用其线性部分

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

来逼近,因此人们自然地想到用如下形式的线性微分方程组的解来逼近方程组 (3.1) 在 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ 附近的解:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

从这个意义上说,研究线性微分方程及线性微分方程组是进一步研究一般(非线性)微分方程及微分方程组的基础.

在第二章我们已讨论了含一个未知函数的一阶线性微分方程的求解.然而在实际问题中往往要涉及几个未知函数和它们的导数,因而相应的数学模型需要用微分方程组来表示,我们自然需要解决多维的线性微分方程组的求解问题.

§ 3.1 存在性与唯一性

考虑含 n 个未知函数的一阶线性微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t), \end{cases} \quad (3.2)$$

其中已知函数 $a_{ij}(t), f_i(t) (i, j=1, 2, \dots, n)$ 都是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数. 令

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

则可以用矩阵记号把方程组(3.2)写为

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t). \quad (3.3)$$

当 $\mathbf{f}(t) \equiv \mathbf{0}$ 时, 我们称方程组(3.3)是齐次的; 否则, 就称为是非齐次的.

对方程组(3.3), 我们首先需要知道它满足给定的初值条件的解是否存在, 如果存在是否唯一. 下面的存在唯一性定理回答了这一基本问题:

定理 3.1 假设 $\mathbf{A}(t)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的 $n \times n$ 阶连续矩阵函数, $\mathbf{f}(t)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的 n 维连续列向量函数. 则对于区间 $[\alpha, \beta]$ 上的任意实数 t_0 及任意 n 维常向量 $\mathbf{x}^0$, 方程组(3.3)在区间 $[\alpha, \beta]$ 上存在唯一解 $\mathbf{x}(t)$ 满足初值条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$.

这个结果不仅告诉我们初值问题解的存在性和唯一性, 而且指出解的存在区间和已知函数连续的区间是一样大的.

为了理解和证明这个定理, 我们需要了解矩阵函数的一些性质. 对矩阵函数的加法、乘法的定义与普通的常数矩阵相同. 称矩阵 $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))$ 是连续的 (或可微的), 如果其每一个元素 $a_{ij}(t)$ (其中 $i, j=1, 2, \dots, n$) 都是实变量 t 的连续函数 (或可微函数). 在可微的情形下,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}(t) = \left(\frac{d}{dt}a_{ij}(t) \right).$$

矩阵函数的导数也满足

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(A_1(t) + A_2(t)) &= \frac{dA_1(t)}{dt} + \frac{dA_2(t)}{dt}, \\ \frac{d}{dt}(A_1(t)A_2(t)) &= \frac{dA_1(t)}{dt}A_2(t) + A_1(t)\frac{dA_2(t)}{dt}.\end{aligned}$$

如果矩阵 $A(t) = (a_{ij}(t))$ 的每个元素 $a_{ij}(t)$ (其中 $i, j = 1, 2, \dots, n$) 都在 t 的区间 $[\alpha, \beta]$ 上可积, 就称矩阵 $A(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上可积, 并且

$$\int_{\alpha}^{\beta} A(t) dt = \left(\int_{\alpha}^{\beta} a_{ij}(t) dt \right).$$

为了讨论矩阵函数序列的收敛问题, 对矩阵 A 及向量 x 我们引入其范数为

$$\|A\| = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|, \quad \|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

显然对任意 $n \times n$ 阶矩阵 A_1, A_2 及 n 维向量 x_1, x_2 , 有如下性质:

$$\|A_1 + A_2\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|, \quad \|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|,$$

$$\|\gamma A\| = |\gamma| \|A\|, \quad \|\gamma x\| = |\gamma| \|x\|, \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}(\text{或 } \mathbb{C}),$$

$$\|A_1 A_2\| \leq \|A_1\| \|A_2\|,$$

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} A(t) dt \right\| \leq \int_{\alpha}^{\beta} \|A(t)\| dt.$$

考虑 $n \times n$ 阶矩阵函数序列 $\{A_k(t)\}$, 其中 $A_k(t) = (a_{ij}^{(k)}(t))$. 称它对所有的 $\alpha \leq t \leq \beta$ 收敛(一致收敛), 如果对任意的 $i, j = 1, 2, \dots, n$, 函数序列 $\{a_{ij}^{(k)}(t)\}$ 对所有的 $\alpha \leq t \leq \beta$ 收敛(一致收敛). 同理, 称矩阵函数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)$$

对所有的 $\alpha \leq t \leq \beta$ 收敛(一致收敛), 如果对任意的 $i, j = 1, 2, \dots, n$, 函数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}(t)$$

对所有的 $\alpha \leq t \leq \beta$ 收敛(一致收敛).

定理 3.1 的证明 第一步 容易验证, 方程组 (3.3) 关于 $x(t_0) = x^0$ 的初值问题等价于求积分方程

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t (A(\tau)x(\tau) + f(\tau)) d\tau \quad (3.4)$$

在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的连续解. 事实上, 如果连续函数 $\mathbf{x}(t)$ 是积分方程(3.4)的解, 由方程(3.4)右端立即看出 $\mathbf{x}(t)$ 也是可微的. 因此对方程(3.4)的两端关于 t 求导可推出微分方程组(3.3)的形式. 方程(3.4)称为(3.3)的等价积分方程.

第二步 利用积分方程(3.4)构造向量函数序列 $\{\mathbf{x}_k(t)\}$, 其中 $\mathbf{x}_0(t) \equiv \mathbf{x}^0$, 且

$$\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^t (\mathbf{A}(\tau) \mathbf{x}_{k-1}(\tau) + \mathbf{f}(\tau)) d\tau, \quad (3.5)$$

这里 $k=1, 2, \dots$ 且 $t \in [\alpha, \beta]$. 容易归纳地证明, 对任意正整数 k , 向量函数 $\mathbf{x}_k(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上有定义并且连续. 我们将证明向量函数序列 $\{\mathbf{x}_k(t)\}$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上是一致收敛的, 它的极限函数 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续且满足等价积分方程(3.4).

第三步 向量函数序列 $\{\mathbf{x}_k(t)\}$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛. 为此只需证明向量函数级数

$$\mathbf{x}_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} (\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_{j-1}(t)), \quad \alpha \leq t \leq \beta \quad (3.6)$$

在区间 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛, 因为它的前 k 项之和为 $\mathbf{x}_k(t)$.

因为 $\mathbf{A}(t)$ 和 $\mathbf{f}(t)$ 都在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 所以 $\|\mathbf{A}(t)\|$ 和 $\|\mathbf{f}(t)\|$ 都在区间 $[\alpha, \beta]$ 上有界, 即存在大于零的常数 M , 使得

$$\|\mathbf{A}(t)\| \leq M, \quad \|\mathbf{f}(t)\| \leq M, \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

成立. 利用(3.5)可以归纳地证明在区间 $[\alpha, \beta]$ 上成立

$$\|\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_{j-1}(t)\| \leq (\|\mathbf{x}^0\| + 1) \frac{M^j}{j!} |t - t_0|^j. \quad (3.7)$$

证明 $j=1$ 的情形和在假设 $j=m$ 成立时证明 $j=m+1$ 情形的的方法基本上是一样的. 事实上, 由(3.5)和归纳法假设,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{m+1}(t) - \mathbf{x}_m(t)\| &\leq \left\| \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) \|\mathbf{x}_m(\tau) - \mathbf{x}_{m-1}(\tau)\| d\tau \right\| \\ &\leq M(\|\mathbf{x}^0\| + 1) \frac{M^m}{m!} \left| \int_{t_0}^t |\tau - t_0|^m d\tau \right| \\ &= (\|\mathbf{x}^0\| + 1) \frac{M^{m+1}}{(m+1)!} |t - t_0|^{m+1}. \end{aligned}$$

用比率判别的方法知级数

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{M^j}{j!} |t - t_0|^j$$

在区间 $[\alpha, \beta]$ 上是一致收敛的. 因此级数(3.6)在区间 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛. 从而, 向量函数序列 $\{x_k(t)\}$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上是一致收敛的.

第四步 根据收敛性, 设

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = x(t).$$

由序列 $\{x_k(t)\}$ 的连续性和一致收敛性, 它的极限函数 $x(t)$ 也在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续. 在(3.5)式两边令 $k \rightarrow \infty$ 取极限得到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = x^0 + \int_{t_0}^t \lim_{k \rightarrow \infty} (A(\tau)x_{k-1}(\tau) + f(\tau)) d\tau,$$

即极限函数 $x(t)$ 对所有的 $\alpha \leq t \leq \beta$ 都满足积分方程(3.4).

第五步 证明积分方程(3.4)的连续解的唯一性. 设 $\tilde{x}(t)$ 是在同一区间 $[\alpha, \beta]$ 上的积分方程(3.4)的另一个连续解. 容易证明 $y(t) := x(t) - \tilde{x}(t)$ 满足积分方程

$$y(t) = \int_{t_0}^t A(\tau)y(\tau) d\tau, \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

由连续性, 令 $L > 0$ 为 $\|y(t)\|$ 在有界闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上的一个上界. 和前面类似, 可以归纳地证明对任意正整数 k ,

$$\|y(t)\| \leq \frac{LM^k}{k!} |t - t_0|^k, \quad \alpha \leq t \leq \beta. \quad (3.8)$$

上面不等式的右端当 $k \rightarrow \infty$ 时趋于零, 因此 $y(t) \equiv 0$, 即在区间 $[\alpha, \beta]$ 上 $\tilde{x}(t) \equiv x(t)$. 定理证毕. $\square$

在证明定理 3.1 时所采用的逐次逼近法是 Picard (1856—1941) 给出的. 我们将在第五章用它给出一般非线性微分方程的解的存在唯一性定理. Picard 逐次逼近法也是用来求方程近似解的一种方法.

习题 3.1

1. 试证明

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dt}a_{k1}(t) & \frac{d}{dt}a_{k2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{kn}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

2. 设

$$A = \begin{pmatrix} 2t^3 + 1 & t^2 \\ t & 4t^2 \end{pmatrix},$$

试计算并比较其导数的行列式和其行列式的导数.

3. 设 $x(t)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数, 且当 $\alpha \leq t \leq \beta$ 时,

$$|x(t)| \leq L + M \int_{\alpha}^t |x(\tau)| d\tau,$$

其中 L, M 是非负常数. 试用逐次逼近法证明:

$$|x(t)| \leq Le^{M(t-\alpha)}, \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

§ 3.2 齐次线性方程组的通解结构

本节讨论齐次线性微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (3.9)$$

的解的结构. 假设 $A(t)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的 $n \times n$ 阶连续矩阵函数. 一个最基本的结果是:

定理 3.2 (叠加原理) 如果 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是齐次线性微分方程组 (3.9) 的两个解, 则

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$$

也是 (3.9) 的解, 其中 C_1, C_2 是任意常数. 并且齐次线性微分方程组 (3.9) 解的全体 S 为一个 n 维线性空间.

为了证明这个定理, 我们需要引入若干个向量函数线性无关的概念. 给定定义在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的 n 个向量函数 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, 如果存在 n 个不全为零的常数 $C_1, C_2, \dots, C_n$, 使得

$$\sum_{k=1}^n C_k \mathbf{x}_k(t) \equiv \mathbf{0}, \quad \forall t \in [\alpha, \beta], \quad (3.10)$$

则称 $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上 **线性相关**; 否则就称这些向量函数在区间 $[\alpha, \beta]$ 上 **线性无关**.

定理 3.2 的证明 定理的前一半根据求导公式容易得到. 我们只需证明 (3.9) 的解的全体 S 为一个 n 维线性空间.

我们先证明方程组 (3.9) 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上一定存在 n 个线性无关的解 $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$. 在 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ (或 $\mathbb{C}^n$) 上任意选择 n 个线性无关的向量 $\mathbf{x}_1^0, \mathbf{x}_2^0, \dots, \mathbf{x}_n^0$. 根据定理 3.1, 对任意的 k ($1 \leq k \leq n$) 及区间 $[\alpha, \beta]$ 上的任意实数 t_0 , 方程组 (3.9) 在 t 的区间 $[\alpha, \beta]$ 上存在唯一满足初值条件 $\mathbf{x}_k(t_0) = \mathbf{x}_k^0$ 的解 $\mathbf{x}_k(t)$. 若有常数 $C_1, C_2, \dots, C_n$, 满足

$$\sum_{k=1}^n C_k \mathbf{x}_k(t) \equiv \mathbf{0}, \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

则必有

$$\sum_{k=1}^n C_k \mathbf{x}_k^0 = \sum_{k=1}^n C_k \mathbf{x}_k(t_0) = \mathbf{0}.$$

由于向量 $\mathbf{x}_1^0, \mathbf{x}_2^0, \dots, \mathbf{x}_n^0$ 是线性无关的, 因此 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 必全为零. 这表明方程组 (3.9) 的解 $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ 是线性无关的.

其次我们证明, 方程组 (3.9) 的任一解 $\mathbf{x}(t)$ 都可表示为上述 n 个线性无关解的线性组合

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^n C_k \mathbf{x}_k(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta. \quad (3.11)$$

其中 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 为常数. 一方面, 由于向量组 $\mathbf{x}_1^0, \mathbf{x}_2^0, \dots, \mathbf{x}_n^0$ 线性无关, 它们构成了 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ (或 $\mathbb{C}^n$) 的一组基, 故存在常数 $C_1, C_2, \dots, C_n$, 使得

$$\mathbf{x}(t_0) = \sum_{k=1}^n C_k \mathbf{x}_k^0 = \sum_{k=1}^n C_k \mathbf{x}_k(t_0). \quad (3.12)$$

另一方面, 由本定理的第一部分知,

$$\sum_{k=1}^n C_k \mathbf{x}_k(t)$$

也是方程组 (3.9) 的满足初值条件 $\mathbf{x}(t_0)$ 的解. 因此由解的存在唯一性定理 (即定理 3.1) 知 (3.11) 成立. $\square$

上述证明告诉我们, 在固定 t_0 的情形下, n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ (或 $\mathbb{C}^n$) 上任意一个

常向量 $\mathbf{x}^0$ 都唯一地对应于齐次方程组 (3.9) 的一个解 $\mathbf{x}(t)$. 映射 $\sigma: \mathbf{x}^0 \mapsto \mathbf{x}(t)$ 事实上给出了由函数组成的空间 S 与线性空间 $\mathbb{R}^n$ (或 $\mathbb{C}^n$) 之间的同构关系.

齐次方程组 (3.9) 的 n 个线性无关的解合起来称为该方程组的一个基本解组. 显然基本解组不是唯一的. 如果齐次方程组 (3.9) 有基本解组 $\{\mathbf{x}_k(t): k=1, 2, \dots, n\}$, 则齐次方程组 (3.9) 的通解必可表示为 (3.11) 的形式. 因此, 求方程组 (3.9) 的通解的问题可归结为求它的 n 个线性无关的特解的问题.

接下来一个自然的问题就是: 假设已知

$$\mathbf{x}_k(t) = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix}, \quad k=1, 2, \dots, n$$

是方程组 (3.9) 的 n 个解, 我们怎样判定它们是否线性无关呢? 为讨论这一问题, 我们引入如下的概念:

定义 3.1 由方程组 (3.9) 的 n 个解 $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ 构成的矩阵

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

称为方程组 (3.9) 的一个解矩阵. 其行列式 $\det X(t)$ 称为这个解组的 Wronski 行列式.

由线性代数知识易知: 若定义在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的 n 个向量函数 $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ 线性相关, 则在区间 $[\alpha, \beta]$ 上其 Wronski 行列式 $\det X(t) \equiv 0$. 下面的定理给出了一个判定方程组 (3.9) 的某个解组是否线性无关的简捷的方法:

定理 3.3 方程组 (3.9) 的解组 $\{\mathbf{x}_k(t): k=1, 2, \dots, n\}$ 线性无关的充要条件是它们的 Wronski 行列式 $\det X(t)$ 在某点 $t=t_0 \in [\alpha, \beta]$ 处取值不为零. 并且 $\det X(t)$ 满足 Liouville 公式

$$\det X(t) = \det X(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(\tau) d\tau\right), \quad (3.13)$$

其中 $t, t_0 \in [\alpha, \beta]$, $\operatorname{tr} A(t)$ 是矩阵 $A(t)$ 的迹, 即

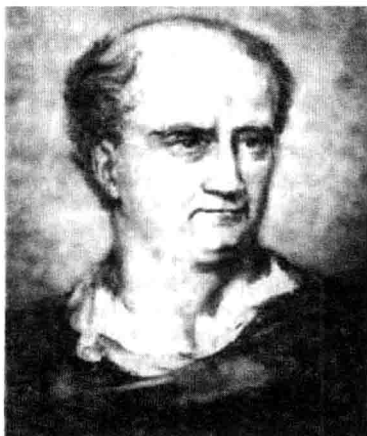


图 3.1 H. Wronski (1778—1853)

$$\operatorname{tr} A(t) = \sum_{k=1}^n a_{kk}(t).$$

证明 根据行列式的定义以及函数和、积的求导公式,容易证明

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det X(t) &= \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{d}{dt}x_{11}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \frac{d}{dt}x_{21}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}x_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \\ &\quad + \cdots + \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dt}x_{n1}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}x_{nn}(t) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

由于 $\mathbf{x}_k(t), k=1, 2, \dots, n$ 是方程组 (3.9) 的解, 故

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} \frac{d}{dt}x_{11}(t) & \frac{d}{dt}x_{12}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}x_{k1}(t) & \sum_{k=1}^n a_{1k}x_{k2}(t) & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k}x_{kn}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \\
 &= a_{11}(t) \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \\
 &= a_{11}(t) \det \mathbf{X}(t).
 \end{aligned}$$

同理可得 (3.14) 右端的第 k 个行列式的值等于 $a_{kk}(t) \det \mathbf{X}(t)$, 其中 $k=1, 2, \dots, n$. 从而,

$$\frac{d}{dt} \det \mathbf{X}(t) = \sum_{k=1}^n a_{kk}(t) \det \mathbf{X}(t) = \operatorname{tr} \mathbf{A}(t) \det \mathbf{X}(t).$$

这是关于 $\det \mathbf{X}(t)$ 的一阶线性方程, 其解为

$$\det \mathbf{X}(t) = \det \mathbf{X}(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \operatorname{tr} \mathbf{A}(\tau) d\tau \right),$$

因此 Liouville 公式成立. 按照这个公式, 我们容易知道 $\det \mathbf{X}(t)$ 恒为 0 (无零点) 当且仅当 $\det \mathbf{X}(t)$ 在某点 t_0 等于 0 (不等于 0). 定理证毕. $\square$

定理 3.3 的第一部分还可以利用解的唯一性 (定理 3.1) 来给出证明. 我们将其作为习题留给读者. 由定理 3.3, 只需在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的任一点 t_0 处计算给定解组的 Wronski 行列式 $\det \mathbf{X}(t_0)$, 就可根据 $\det \mathbf{X}(t_0)$ 是否为零来判断其是否线性无关.

值得注意的是,上述函数矩阵的行列式或恒为零或恒不为零的结果只适用于由齐次线性微分方程组给出的解矩阵.一般的函数矩阵没有这样的性质,更不能用它来判断向量函数组是否线性无关.例如,下列两个向量函数:

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的 Wronski 行列式恒等于零,但它们却是线性无关的.

定义 3.2 当解组 $\{\mathbf{x}_k(t): k=1, 2, \dots, n\}$ 是一个基本解组时,我们称解矩阵

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

为方程组(3.9)的一个基(本)解矩阵.特别地,如果在某点 t_0 处 $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{I}$ (即单位矩阵),则称 $\mathbf{X}(t)$ 为标准解矩阵.

根据前面的定理,设 $\mathbf{X}(t)$ 为方程组(3.9)的一个基解矩阵,则方程组(3.9)的任一解 $\mathbf{x}(t)$ 都可以表示为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c},$$

其中 $\mathbf{c}$ 是某常向量.反之,对于任意常向量 $\mathbf{c}$,向量函数 $\mathbf{X}(t)\mathbf{c}$ 都是方程组(3.9)的解.如果考虑初值条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$,则可以确定常数 $\mathbf{c} = \mathbf{X}^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0$.因此,方程组(3.9)满足初值条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ 的解为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t, t_0)\mathbf{x}^0,$$

其中 $\mathbf{X}(t, t_0) := \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0)$ 是一个标准解矩阵.

习题 3.2

1. 验证

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

是微分方程组:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

的基解矩阵.

2. 如果齐次方程组 $\frac{dx}{dt} = A_1(t)x$ 与 $\frac{dx}{dt} = A_2(t)x$ 有一个相同的基解矩阵, 证明: $A_1(t) = A_2(t)$.

3. 如果向量函数

$$\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

为齐次微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} x$$

的基本解组, 试求 $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$.

4. 利用解的存在唯一性定理证明: 方程组 $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ 的解组 $\{x_k(t); k = 1, 2, \dots, n\}$ 线性无关的充要条件是它们的 Wronski 行列式 $\det X(t)$ 在某点 $t = t_0 \in [\alpha, \beta]$ 处取值不为零.

5. 设 $X(t)$ 是方程组 $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ 的解矩阵, 证明 $X(t)$ 满足矩阵微分方程

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X,$$

并且若 $X(t)$ 是方程组 $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ 的基解矩阵, 证明对任意非奇异的常数矩阵 C , 矩阵 $X(t)C$ 也是 $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ 的基解矩阵. 反之, 设 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 都是方程组 $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ 的基解矩阵, 则必存在一个非奇异的常数矩阵 C , 使得 $X_2(t) = X_1(t)C$.

6. 设 $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, A 是 ω 周期连续的, 且 $X(t)$ 为基解矩阵. 证明: $X(t+\omega)$ 也是基解矩阵, 且存在可逆矩阵 C , 使得 $X(t+\omega) = X(t)C$.

§ 3.3 非齐次线性方程组的通解

本节我们利用上节的结果进一步给出非齐次线性方程组

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) \quad (3.15)$$

的解的结构. 我们假设 $A(t)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的 $n \times n$ 阶连续矩阵函数, $f(t)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的 n 维连续列向量函数. 当 $f(t) \equiv 0$ 时, 方程组 (3.15) 变为 (3.9). 我们称方程组 (3.9) 是方程组 (3.15) 相应的齐次线性方程组.

容易验证, 方程组 (3.15) 的解与方程组 (3.9) 的解之间有如下关系: 如果 $x_1^*(t)$ 和 $x_2^*(t)$ 是方程组 (3.15) 的两个解, 则 $x_1^*(t) - x_2^*(t)$ 是相应的齐次线性

方程组(3.9)的解;反之,如果 $\mathbf{x}^*(t)$ 和 $\mathbf{x}(t)$ 分别是方程组(3.15)和方程组(3.9)的解,则 $\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{x}(t)$ 也是方程组(3.15)的解.一般地,非齐次线性方程组的通解结构如下:

定理 3.4 若 $\mathbf{x}^*(t)$ 是方程组(3.15)的某个解,则方程组(3.15)的任一解 $\mathbf{x}(t)$ 都可以表示为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c} + \mathbf{x}^*(t), \quad (3.16)$$

其中 $\mathbf{c}$ 是 n 维常数列向量, $\mathbf{X}(t)$ 是相应齐次方程组(3.9)的基解矩阵.

证明 由方程组(3.15)的解与方程组(3.9)的解之间的关系知, $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)$ 是齐次方程组(3.9)的解.由上一节知识,存在一个 n 维常数列向量 $\mathbf{c}$, 使得 $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c}$, 从而得到(3.16). $\square$

定理 3.4 表明,要找出方程组(3.15)的全部解,只需找出它的一个特解以及它相应的齐次线性方程组(3.9)的基解矩阵即可.下面我们将运用本书最重要的方法之一,即常数变易法来证明:只要找到齐次方程组(3.9)的基解矩阵 $\mathbf{X}(t)$, 就能确定非齐次线性方程组(3.15)的一个特解,从而给出其通解.这就是下面的定理:

定理 3.5 若矩阵函数 $\mathbf{X}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ 是齐次线性方程组(3.9)的基解矩阵,则非齐次线性方程组(3.15)的通解为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c} + \mathbf{X}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{X}^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau) d\tau, \quad (3.17)$$

其中 $\mathbf{c}$ 为 n 维常数列向量, 方程组(3.15)满足初值条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ 的解为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t, t_0)\mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^t \mathbf{X}(t, \tau)\mathbf{f}(\tau) d\tau, \quad (3.18)$$

其中 $t, t_0 \in [\alpha, \beta]$, $\mathbf{X}(t, t_0) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0)$.

由于我们在证明中用到的方法叫做常数变易法,因此,我们把(3.17)或(3.18)称为常数变易公式.

证明 由上一节知识,齐次方程组(3.9)的通解为 $\mathbf{X}(t)\mathbf{c}$, 其中 $\mathbf{c}$ 为任意 n 维常数列向量.现在我们把常数向量 $\mathbf{c}$ 变易为 t 的待定列向量函数 $\mathbf{c}(t)$, 以期寻找非齐次线性方程组(3.15)的形如

$$\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c}(t) \quad (3.19)$$

的特解.把(3.19)代入非齐次线性方程组(3.15),得到

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt}\mathbf{c}(t) + \mathbf{X}(t)\frac{d\mathbf{c}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{f}(t).$$

由于 $\mathbf{X}(t)$ 是齐次方程组 (3.9) 的解矩阵, 所以有

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t).$$

因此向量函数 $\mathbf{c}(t)$ 满足微分方程组

$$\mathbf{X}(t) \frac{d\mathbf{c}(t)}{dt} = \mathbf{f}(t). \quad (3.20)$$

因为 $\mathbf{X}(t)$ 是方程组 (3.9) 的基解矩阵, 所以它的逆 $\mathbf{X}^{-1}(t)$ 存在. 从而由 (3.20) 得

$$\frac{d\mathbf{c}(t)}{dt} = \mathbf{X}^{-1}(t)\mathbf{f}(t).$$

对上式两边积分得到

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}^0 + \int_{t_0}^t \mathbf{X}^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau) d\tau.$$

其中 $\mathbf{c}^0$ 为常向量. 特别地, 取 $\mathbf{c}^0 = \mathbf{0}$, 就得到方程组 (3.15) 的一个特解

$$\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{X}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{X}^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau) d\tau.$$

再由定理 3.4 即得 (3.17) 并相应得到 (3.18). 定理得证. $\square$

尽管在上一节我们给出了验证齐次线性方程组 (3.9) 的一个解矩阵是否为基解矩阵的方法, 然而, 要计算一个齐次线性微分方程组的基解矩阵仍然不是一件容易的事. 对常系数矩阵 $\mathbf{A}(t) \equiv \mathbf{A}$ 的情形, 我们将在第四章给出求解基解矩阵的方法.

习题 3.3

1. 考虑方程组

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad (3.21)$$

其中

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \cos^2 t & \frac{1}{2} \sin 2t - 1 \\ \frac{1}{2} \sin 2t + 1 & \sin^2 t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

(1) 试验证

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t & -\sin t \\ e^t \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

是对应的齐次方程组

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

的基解矩阵.

(2) 试求(3.21)的满足初值条件

$$x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

的解.

2. 设 $A(t)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的 $n \times n$ 阶连续矩阵函数, $f(t)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的不恒为零的 n 维连续列向量. 试证: 非齐次线性方程组

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$$

存在且至多存在 $n+1$ 个线性无关的解.

3. 设 $n \times n$ 矩阵函数 $A(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, n 维向量函数 $f(t, x)$ 在区域 $\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; \alpha \leq t \leq \beta, \|x\| < \infty\}$ 上连续. 证明初值问题

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

等价于求解积分方程

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(\tau)f(\tau, x(\tau))d\tau,$$

其中 $t, t_0 \in [\alpha, \beta]$, $X(t)$ 是相应齐次线性方程组的基解矩阵.

§ 3.4 高阶线性方程

n 阶线性微分方程的一般形式为

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = f(t), \quad (3.22)$$

这里假设系数 $a_1(t), a_2(t), \cdots, a_n(t)$ 都在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续. 当 $f(t) \equiv 0$ 时方程(3.22)变为齐次线性微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = 0. \quad (3.23)$$

若令

$$x_1 = x, \quad x_2 = \frac{dx}{dt}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}, \quad (3.24)$$

则方程(3.22)可以转换成一阶线性微分方程组

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad (3.25)$$

其中

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_1(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}.$$

当 $f(t) \equiv 0$ 时, 方程组(3.25)变为齐次线性微分方程组

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}. \quad (3.26)$$

显然, 由方程(3.22)的任一解 $x = \phi(t)$ 可得到方程组(3.25)的一个解

$$\begin{pmatrix} \phi(t) \\ \phi'(t) \\ \vdots \\ \phi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

反之, 方程组(3.25)的任一解的第一个分量就是方程(3.22)的解. 特别地, 方程(3.22)满足初值条件

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_0^1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1}$$

的解在区间 $[\alpha, \beta]$ 上存在并且唯一.

例 3.1 考虑方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = f(t). \quad (3.28)$$

它等价于方程组

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

这里 $\mathbf{x} = \left(x, \frac{dx}{dt} \right)^T$. 可以验证

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

为方程组(3.29)对应的齐次线性方程组的基解矩阵. 并且

$$\mathbf{X}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

利用常数变易公式可得方程组(3.29)的通解为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \mathbf{X}(t) \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^t \mathbf{X}^{-1}(\tau) \begin{pmatrix} 0 \\ f(\tau) \end{pmatrix} d\tau \right\} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + \int_{t_0}^t \sin(t - \tau) f(\tau) d\tau \\ -c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) + \int_{t_0}^t \cos(t - \tau) f(\tau) d\tau \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

因此方程(3.28)的通解为

$$x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + \int_{t_0}^t \sin(t - \tau) f(\tau) d\tau,$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

由于 n 阶线性微分方程(3.22)利用上述转化方式可变换为与之等价的一阶线性微分方程组(3.25), 因此我们可以把前几节的主要结果平行地推广到方程(3.22). 与方程组(3.25)相对应的, 假设函数 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 是齐次线性微分方程(3.23)的 n 个解, 我们称

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \quad (3.30)$$

为解组 $\{x_k(t); k=1, 2, \cdots, n\}$ 的 Wronski 行列式. 齐次线性微分方程 (3.23) 的 n 个线性无关的解的全体称为该方程的一个基本解组. 利用关系式 (3.24), 我们可以把关于方程组 (3.26) 的定理自然转述到高次方程 (3.23) 上.

定理 3.6 齐次线性微分方程 (3.23) 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上存在 n 个线性无关的解 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$. 并且方程 (3.23) 的通解为

$$x(t) = \sum_{k=1}^n C_k x_k(t), \quad (3.31)$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是任意常数.

定理 3.7 n 阶齐次线性微分方程 (3.23) 的解组 $\{x_k(t); k=1, 2, \cdots, n\}$ 线性无关的充要条件是它的 Wronski 行列式 $W(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上恒不为零, 而这等价于 $W(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 的某点 t_0 处不为零, 并且方程 (3.23) 的任一解组 $\{x_k(t); k=1, 2, \cdots, n\}$ 的 Wronski 行列式满足 Liouville 公式

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau\right). \quad (3.32)$$

这里由于与方程 (3.23) 等价的方程组 (3.26) 中矩阵函数 $A(t)$ 的迹 $\text{tr } A(t) = -a_1(t)$, 因此由关于方程组的 Liouville 公式即可得到关于方程 (3.23) 的 Liouville 公式 (3.32). 特别地, 当 $n=2$ 时, 如果知道方程 (3.23) 的一个非零解, 利用 Liouville 公式 (3.32), 就可以求出方程 (3.23) 的通解.

例 3.2 设 $x_1(t)$ 是二阶齐次线性方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_2(t)x = 0 \quad (3.33)$$

的一个非零解, 其中 $a_1(t)$ 和 $a_2(t)$ 是 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数, 则方程 (3.33) 的通解为

$$x(t) = x_1(t) \left(C_2 + C_1 \int \frac{1}{x_1^2(t)} e^{-\int a_1(t) dt} dt \right). \quad (3.34)$$

证明 为简便起见, 假设 $x_1(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上恒不为零. 设 $x(t)$ 为方程 (3.33) 的任一解, 则由 Liouville 公式 (3.32) 可得

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x(t) \\ x_1'(t) & x'(t) \end{vmatrix} = C_1 e^{-\int a_1(t) dt},$$

亦即

$$x'(t)x_1(t) - x(t)x_1'(t) = C_1 e^{-\int a_1(t) dt}.$$

上式两端同乘以积分因子 $\frac{1}{x_1^2(t)}$, 可得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x(t)}{x_1(t)} \right) = \frac{C_1}{x_1^2(t)} e^{-\int a_1(t) dt}.$$

积分上式, 就可得公式 (3.34).

这个例子告诉我们一个利用 Liouville 公式降阶的方法. 一般地, 如果事先能够知道齐次高阶方程 (3.23) 的一个非平凡解 $x = \phi(t)$, 即 $\phi(t) \neq 0$, 我们还可以用变量替换 $x = \phi(t)y$ 把方程化成关于函数 $v := \frac{dy}{dt}$ 的低一阶的齐次线性微分方程. 事实上, 对这个变量替换求导并代入 (3.23), 可得到形如

$$\phi(t) \frac{d^n y}{dt^n} + b_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_{n-1}(t) \frac{dy}{dt} + b_n(t)y = 0$$

的方程, 它一定有解 $y(t) \equiv 1$, 因为 $x = \phi(t)$ 是方程 (3.23) 的解. 由此推出, $b_n(t) \equiv 0$, 因此原方程可化为如下的 $n-1$ 阶线性微分方程

$$\phi(t) \frac{d^{n-1} v}{dt^{n-1}} + b_1(t) \frac{d^{n-2} v}{dt^{n-2}} + \cdots + b_{n-1}(t)v = 0.$$

根据非齐次线性方程组 (3.25) 与非齐次线性高阶微分方程 (3.22) 的关系, 我们把非齐次线性微分方程组的常数变易公式应用到方程 (3.22) 上, 容易得到下面的结果.

定理 3.8 设 $\{x_k(t); k=1, 2, \cdots, n\}$ 是 n 阶齐次线性微分方程 (3.23) 在 $[\alpha, \beta]$ 上的一个基本解组, 则非齐次线性微分方程 (3.22) 在 $[\alpha, \beta]$ 上的通解为

$$x(t) = \sum_{k=1}^n C_k x_k(t) + x^*(t), \quad (3.35)$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为任意常数, 而

$$x^*(t) = \sum_{k=1}^n \int_{t_0}^t \frac{x_k(\tau) W_k(\tau)}{W(\tau)} f(\tau) d\tau \quad (3.36)$$

是方程 (3.22) 的一个特解, $W(t)$ 是解组 $\{x_k(t); k=1, 2, \cdots, n\}$ 的 Wronski 行列

式, $W_k(t)$ 是 $W(t)$ 中第 n 行第 k 列元素的代数余子式.

习题 3.4

1. 证明: 若 $x_s(t), s=1, 2, \dots, m$ 分别是方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n(t)x = f_s(t), \quad s = 1, 2, \dots, m$$

的解, 则

$$x(t) = \sum_{s=1}^m C_s x_s(t)$$

是方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n(t)x = \sum_{s=1}^m C_s f_s(t)$$

的解, 其中 $C_1, C_2, \dots, C_m$ 为常数.

2. 设 $x(t)$ 是线性微分方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_2(t)x = 0$$

的非零解. 试证: 当 $x(t_0) = 0$ 时, $x'(t_0) \neq 0$.

3. 验证 $x = \frac{1}{t} \sin t$ 是方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2}{t} \frac{dx}{dt} + x = 0$$

的解, 并求该方程的通解.

4. 不用 Liouville 公式而直接用变量代换 $x = x_1(t)y$ 来对方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_2(t)x = 0$$

降阶并证明其通解表达式.

5. 设 $x_1(t), x_2(t)$ 是二阶线性微分方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_2(t)x = f(t)$$

对应的齐次方程的两个线性无关的特解, 其中 $a_1(t)$ 和 $a_2(t)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数. 证明所给方程在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的通解为

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \int_{t_0}^t \frac{x_1(\tau)x_2(t) - x_1(t)x_2(\tau)}{x_1(\tau)x_2'(\tau) - x_1'(\tau)x_2(\tau)} f(\tau) d\tau,$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

6. 求方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = t \sin 2t$$

的通解. 已知其对应的齐次线性方程有基本解组 $\cos 2t, \sin 2t$.

§ 3.5 复值解和级数解法

根据上面的讨论可知, 求线性微分方程或线性微分方程组的通解的问题实质上是求相应的齐次线性方程或齐次线性方程组的基本解组. 这即使对常系数的齐次线性方程或齐次线性方程组都不是一件容易的事. 我们将在第四章用 Euler 待定指数函数法来解决这个问题. Euler 待定指数函数法将导出方程或方程组相应的特征多项式, 而特征多项式的根必然涉及复数. 因此, 即使只研究实数域上的线性微分方程或线性微分方程组, 我们仍有必要在更宽的复数范围内来讨论. 在下一章我们将看到, 有时从复值解提取需要的实值解比直接寻求实值解更容易. 我们将指出, 前面关于线性方程或线性方程组实值解的所有定理都可以推广到实自变量的复值解情形.

我们首先需要了解复值函数的概念. 同复数一样, 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上定义的一个复值函数 $z(t)$ 也包含实部 $x(t)$ 和虚部 $y(t)$, 即

$$z(t) = x(t) + iy(t),$$

其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是在 $[\alpha, \beta]$ 上定义的实函数, i 是虚数单位 ($i^2 = -1$). 这个定义意味着一个实自变量的复值函数 $z(t)$ 等价于两个实函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的有序组合. 如果实函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 则称复值函数 $z(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续; 如果实函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都在 $[\alpha, \beta]$ 上可微, 则称复值函数 $z(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可微, 且其导数为

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt}.$$

由定义容易看出

$$\frac{d}{dt}(z_1(t) + z_2(t)) = \frac{dz_1}{dt} + \frac{dz_2}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(Cz(t)) = C \frac{dz}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(z_1(t)z_2(t)) = \frac{dz_1}{dt}z_2(t) + z_1(t)\frac{dz_2}{dt},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{z_1(t)}{z_2(t)} \right) = \frac{\frac{dz_1}{dt} z_2(t) - z_1(t) \frac{dz_2}{dt}}{z_2^2(t)} \quad (z_2(t) \neq 0),$$

其中 C 是任意复值常数.

复数的指数形式是很重要的一种表达形式. 在第四章的讨论中, 复值函数 $e^{\lambda t}$ 将起重要的作用, 其中 λ 是复常数. 首先对任意复数 $\lambda = a + ib$ (其中 a, b 为实数), 定义

$$e^{\lambda} = e^{a+ib} = e^a (\cos b + i \sin b), \quad (3.37)$$

这里 e^a 取通常的实数值. 对任意复数 λ_1, λ_2 , 容易验证

$$e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} = e^{\lambda_1 + \lambda_2}. \quad (3.38)$$

现在, 我们来考虑所谓的复指数函数 $e^{\lambda t}$, 其中 $\lambda = a + ib$, t 为实变量. 由定义 (3.37) 可得

$$e^{\lambda t} = e^{at} \cos(bt) + i e^{at} \sin(bt).$$

根据对复值函数的导数的定义, 我们可以验证

$$\frac{d}{dt} (e^{\lambda t}) = \lambda e^{\lambda t}. \quad (3.39)$$

同理可定义 $n \times n$ 阶复值矩阵函数

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_R(t) + i \mathbf{A}_I(t),$$

其中 $\mathbf{A}_R(t)$ 和 $\mathbf{A}_I(t)$ 是在 $\alpha \leq t \leq \beta$ 上有定义的 $n \times n$ 阶实矩阵函数. 类似地还可定义 n 维复值列向量函数. 进而, 如果实矩阵函数 $\mathbf{A}_R(t)$ 和 $\mathbf{A}_I(t)$ 都在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 则称复值矩阵函数 $\mathbf{A}(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续. 如果实矩阵函数 $\mathbf{A}_R(t)$ 和 $\mathbf{A}_I(t)$ 都在 $[\alpha, \beta]$ 上可微, 则称复值矩阵函数 $\mathbf{A}(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可微, 且定义其导数为

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{A}_R(t)}{dt} + i \frac{d\mathbf{A}_I(t)}{dt}.$$

如果实矩阵函数 $\mathbf{A}_R(t)$ 和 $\mathbf{A}_I(t)$ 都在 $[\alpha, \beta]$ 上可积, 则称复值矩阵函数 $\mathbf{A}(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可积, 且定义

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{A}(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{A}_R(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{A}_I(t) dt.$$

读者可以自己证明这样的事实: 复值向量函数 $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) + i\mathbf{y}(t)$ 与其共轭函数 $\bar{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{x}(t) - i\mathbf{y}(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上线性无关的充要条件是实向量函数 $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ 在

$[\alpha, \beta]$ 上线性无关.

关于复值线性方程组

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t), \quad (3.40)$$

我们容易证明以下结果:

定理 3.9 设 $A(t) = A_R(t) + iA_I(t)$ 是 $[\alpha, \beta]$ 上的 $n \times n$ 阶复值连续矩阵, $f(t) = f_R + if_I(t)$ 是 $[\alpha, \beta]$ 上的 n 维复值连续列向量. 若 $z(t) = x(t) + iy(t)$ 是线性方程组 (3.40) 的复值解, 则实连续函数 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 是实方程组

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_R(t) & -A_I(t) \\ A_I(t) & A_R(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_R(t) \\ f_I(t) \end{pmatrix}$$

的解. 反之亦然.

根据定理 3.9, 前面关于线性方程组实值解的所有定理都可以推广到实自变量的复值解情形. 另外, 在定理 3.9 中取 $A_I(t) \equiv 0$, $f_R(t) \equiv 0$, $f_I(t) \equiv 0$ 即可证得如下结论.

定理 3.10 复值向量函数 $z(t) = x(t) + iy(t)$ 是实系数齐次线性微分方程组

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z \quad (3.41)$$

(即矩阵 $A(t)$ 是实值的) 的解的充要条件是该函数的实部 $x(t)$ 和虚部 $y(t)$ 都是方程组 (3.41) 的解.

对于齐次线性微分方程

$$\frac{d^n z}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} z}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t) z = 0$$

的复值解 $z(t) = x(t) + iy(t)$, 根据它与齐次线性微分方程组之间的关系, 可得到与定理 3.9 和定理 3.10 类似的结论.

尽管在第四章我们将给出求解常系数线性微分方程的有效方法, 然而对不是常系数的情形我们仍需要研究, 至少是近似求解的办法. 尽管在本章第 1 节给出的逐次逼近法可以用来计算近似解, 然而计算对应积分方程中被积函数的原函数时往往十分困难或极为繁琐. 另一个求解的途径是寻求幂级数形式的解, 即所谓的幂级数解法. 为了简明地展现该方法, 我们下面将只限于讨论二阶齐次线性微分方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a(t) \frac{dx}{dt} + b(t)x = 0. \quad (3.42)$$

方程的幂级数解法所涉及的问题不仅包括形式幂级数的递归计算,还包括级数的收敛性.

实变量 t 的函数 $x(t)$ 被称为在点 $t=t_0$ 处解析,如果存在实数 ρ ,使得当 $|t-t_0|<\rho$ 时, $x(t)$ 可以展开成 $t-t_0$ 的收敛的幂级数

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (t-t_0)^j,$$

其中 $c_j, j=0,1,2,\dots$ 为常数.

为了保证收敛性,我们需要下列结果.

定理 3.11 (Cauchy 定理) 如果函数 $f(t, x)$ 在矩形区域

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t-t_0| < \alpha, |x-x_0| < \beta\}$$

上可以展开成 $t-t_0$ 和 $x-x_0$ 的一个收敛幂级数

$$f(t, x) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \gamma_{kl} (t-t_0)^k (x-x_0)^l, \quad (3.43)$$

则初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.44)$$

在 t_0 附近存在唯一的解析解.

证明 考虑初值问题 (3.44) 的形式幂级数解

$$x(t) = x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j (t-t_0)^j, \quad (3.45)$$

其中 $c_j, j=1,2,\dots$ 为待定常数. 直接计算得到

$$c_1 = \gamma_{00}, \quad c_2 = \frac{1}{2!} (\gamma_{10} + \gamma_{01} \gamma_{00}).$$

一般地有

$$c_n = \frac{1}{n!} x^{(n)}(t_0) = P_n(\gamma_{00}, \gamma_{01}, \gamma_{10}, \dots, \gamma_{n-1,0}), \quad n=1,2,\dots$$

这里 P_n 是一个正系数的多项式函数. 显然这组常数是唯一确定的. 下面只需要证明级数 (3.45) 的收敛性.

由于级数 (3.43) 收敛, 对任意取定的正数 $\alpha_1 < \alpha, \beta_1 < \beta$, 级数

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} |\gamma_{kl}| \alpha_1^k \beta_1^l$$

是收敛的. 因此, 这个正项级数的通项是有界的, 即存在常数 $M > 0$, 使得

$$|\gamma_{kl}\alpha_1^k\beta_1^l| \leq M, \quad k, l = 0, 1, \dots \quad (3.46)$$

因此考虑在矩形区域

$$R_1 = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| < \alpha_1, |x - x_0| < \beta_1\}$$

上的级数

$$F(t, x) = \sum_{k, l=0}^{\infty} \frac{M}{\alpha_1^k \beta_1^l} (t - t_0)^k (x - x_0)^l, \quad (3.47)$$

我们称(3.47)为(3.43)的优级数. 易见它是收敛的并且

$$F(t, x) = \frac{M}{\left(1 - \frac{t - t_0}{\alpha_1}\right) \left(1 - \frac{x - x_0}{\beta_1}\right)}. \quad (3.48)$$

利用表达式(3.48), 初值问题

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

可以用分离变量法求解. 可以看出所得的解

$$x(t) = x_0 + \beta_1 - \beta_1 \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1 M}{\beta_1} \ln\left(1 - \frac{t - t_0}{\alpha_1}\right)} \quad (3.49)$$

在 t_0 附近解析. 同理可以讨论初值问题

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

在 t_0 附近的形式级数解

$$x(t) = x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{c}_j (t - t_0)^j, \quad (3.50)$$

其中 $\tilde{c}_n = P_n(\Gamma_{00}, \Gamma_{01}, \Gamma_{10}, \dots, \Gamma_{n-1,0})$ 且 $\Gamma_{kl} := \frac{M}{\alpha_1^k \beta_1^l}$. 显然 $\tilde{c}_n \geq 0$. 利用不等式

(3.46) 和 P_n 是正系数的多项式函数的事实, 我们得到 $|c_n| \leq \tilde{c}_n$. 因此级数(3.50)是级数(3.45)的优级数. 在讨论(3.49)时我们既然已经知道级数(3.50)是收敛的, 因此断定级数(3.45)也是收敛的. 从而完成了定理证明. $\square$

利用这个定理可以直接得到以下结论:

定理 3.12 如果方程(3.42)的系数 $a(t), b(t)$ 在区间 $|t - t_0| < \rho$ 内都可以

展开成 $t-t_0$ 的收敛幂级数, 则方程 (3.42) 在区间 $|t-t_0|<\rho$ 上存在收敛的幂级数解

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (t-t_0)^j, \quad (3.51)$$

其中 c_0, c_1 为任意常数 (它们可由方程 (3.42) 在 t_0 点的初值条件来决定), 而 $c_2, c_3, \dots$ 可以从 c_0, c_1 出发由递推公式依次确定.

事实上, 收敛性由定理 3.11 保证. 为了计算方程 (3.42) 的这个解 $x(t)$, 先把系数 $a(t), b(t)$ 在 $|t-t_0|<\rho$ 上展开成 $t-t_0$ 的幂级数

$$a(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (t-t_0)^j, \quad b(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j (t-t_0)^j, \quad (3.52)$$

并且假设解 $x(t)$ 可以展开成幂级数 (3.51). 然后把它们代入方程 (3.42) 并比较 $t-t_0$ 的同次幂的系数, 就可递推地确定系数 $c_j, j=0, 1, \dots$, 从而求出解 $x(t)$. 这个递推过程可在下面的例子中展示出.

例 3.3 在 $t=0$ 附近求解 Legendre 方程

$$(1-t^2) \frac{d^2 x}{dt^2} - 2t \frac{dx}{dt} + L(L+1)x = 0.$$

解 把 (3.51) 代入方程得到

$$(1-t^2) \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)c_j t^{j-2} - 2t \sum_{j=1}^{\infty} j c_j t^{j-1} + L(L+1) \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j = 0.$$

合并同类项得

$$\sum_{j=0}^{\infty} \{ (j+2)(j+1)c_{j+2} + (L+j+1)(L-j)c_j \} t^j = 0.$$

比较系数得到

$$(j+2)(j+1)c_{j+2} + (L+j+1)(L-j)c_j = 0, \quad j=0, 1, \dots.$$

因此可得递推公式

$$c_{2j} = (-1)^j \frac{(L-2j+2) \cdots (L-2)L(L+1)(L+3) \cdots (L+2j-1)}{(2j)!} c_0,$$

$$c_{2j+1} = (-1)^j \frac{(L-2j+1) \cdots (L-3)(L-1)(L+2)(L+4) \cdots (L+2j)}{(2j+1)!} c_1,$$

其中 $j=1, 2, \dots$. 由此而得到的解是依赖于任意常数 c_0, c_1 的. 如果分别取 $c_0=1, c_1=0$ 和 $c_0=0, c_1=1$ 我们可以各确定一个解 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$. 读者可以证明 $x_1(t)$

和 $x_2(t)$ 构成 Legendre 方程的基本解组. 从而我们求出了 Legendre 方程的通解.

如果系数 $a(t), b(t)$ 在 $t=t_0$ 处不是解析的, 比如, 分母出现 $t-t_0$ 的方幂, 我们可以尝试求

$$x(t) = (t - t_0)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} c_j (t - t_0)^j$$

的形式级数解, 其中 ν 和 c_j 均为待定常数.

例 3.4 在 $t=0$ 附近用幂级数法求解 Bessel 方程

$$t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + t \frac{dx}{dt} + (t^2 - n^2)x = 0,$$

其中常数 $n \geq 0$.

解 如果把 Bessel 方程写成方程 (3.42) 的形式, 则系数

$$a(t) = \frac{1}{t}, \quad b(t) = 1 - \frac{n^2}{t^2},$$

它们在 $t=0$ 处都不解析. 考虑如下形式的幂级数解

$$x(t) = t^\nu \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j. \quad (3.53)$$

将它代入 Bessel 方程并合并同类项得

$$\sum_{j=0}^{\infty} \{(\nu + j)^2 - n^2\} c_j t^{\nu+j} + \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^{\nu+j+2} = 0.$$

令各项系数等于零得

$$\nu^2 - n^2 = 0, \quad (3.54)$$

$$c_1 \{(\nu + 1)^2 - n^2\} = 0, \quad (3.55)$$

.....

$$c_j \{(\nu + j)^2 - n^2\} + c_{j-2} = 0. \quad (3.56)$$

从 (3.54) 知, $\nu = n$ 或 $\nu = -n$.

若 $\nu = n$, 则从递推公式 (3.55) 和 (3.56) 可得 $c_{2j+1} = 0, j=0, 1, \dots$, 且

$$c_{2j} = \frac{(-1)^j}{2^{2j}(n+1)(n+2)\cdots(n+j)j!} c_0,$$

由此可确定一个含任意常数 c_0 的解 $x_1(t)$. 当取

$$c_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$$

时函数 $x_1(t)$ 称为 n 阶 Bessel 函数, 这里函数 $\Gamma(s)$ 定义为当 $s>0$ 时

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx,$$

当 $s<0$ 且非整数时由递推公式

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} \Gamma(s+1)$$

定义.

若 $\nu = -n$, 在 $2n$ 不是整数的情况下, 我们类似得出另一个含任意常数 c_0 的解 $x_2(t)$. 当取

$$c_0 = \frac{1}{2^{-n} \Gamma(-n+1)}$$

时, 函数 $x_2(t)$ 称为 $-n$ 阶 Bessel 函数.

习题 3.5

1. 求 Airy 方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - tx = 0, \quad -\infty < t < \infty$$

在 $t=0$ 处展开的幂级数解.

2. 用幂级数法求方程

$$(t^2 - 2t) \frac{d^2 x}{dt^2} + 5(t - 1) \frac{dx}{dt} + 3x = 0$$

满足初值条件 $x(1)=10, x'(1)=3$ 的解.

3. 求解 Hermite 方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2t \frac{dx}{dt} + \lambda x = 0, \quad -\infty < t < \infty,$$

其中 λ 为常数. 证明当 $\lambda=2n$ 时, 该方程有次数为 n 的多项式解.

4. 设复值向量函数 $z(t) = x(t) + iy(t)$ 是线性微分方程组

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f_R(t) + if_I(t)$$

的复值解, 其中 $f_R(t)$ 和 $f_I(t)$ 都是实的. 试证: $z(t)$ 的实部 $x(t)$ 和虚部 $y(t)$ 分别是方程组

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f_R(t)$$

和

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f_i(t)$$

的解.

5. 设复值向量函数 $z(t) = x(t) + iy(t)$ 是线性微分方程组

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t)$$

的解, 其中 A 和 f 都是实的. 试证 $x(t)$ 也是该方程组的解, 而 $y(t)$ 是对应的齐次线性微分方程组

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z$$

的解.

第四章 常系数线性方程

它一旦被发现,所有这类曾使我绞尽脑汁的问题,似乎都变成儿童的游戏了.

——莱布尼茨(G. W. Leibniz 1646—1716)

考虑一般的 n 阶线性微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t), \quad (4.1)$$

其中系数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是常数. 如果引入微分算子 $D = \frac{d}{dt}$ 的记号, 那么

$$D^n = \frac{d^n}{dt^n},$$

从而方程(4.1)可以简化为算子形式

$$P(D)x = f(t), \quad (4.2)$$

其中

$$P(D) := D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$$

是关于 D 的一个 n 次多项式. 算子 D 可以看作是连续函数空间 $C^0(J)$ 上函数到函数的映射, 这里 J 是函数的定义域. 算子 D 的定义域为连续可微函数空间 $C^1(J)$, 这是 $C^0(J)$ 的一个子空间. 可以看出, $C^0(J)$ 和 $C^1(J)$ 都是线性空间, 而 D 是上面的一个线性算子. 有关这些空间和算子的深入结果将在泛函分析课程中学习.

在第三章我们知道, 方程(4.1)的通解是由其一个确定的特解和相应的齐次方程的通解两部分构成的. 因此我们要求齐次方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0 \quad (4.3)$$

的通解. 一旦这个齐次方程的通解被确定, 非齐次方程(4.1)的特解原则上可以用常数变易法得到.

§ 4.1 齐次问题

在第三章我们看到,高阶线性方程(4.1)可以通过一个简单的变换化为与其等价的线性方程组.因此我们完全可以只考虑一般的齐次线性方程组的求解问题,然后把齐次线性方程(4.3)作为其特例.但是由于将齐次方程(4.3)化为与其等价的齐次线性方程组后,其系数矩阵具有特别简单的形式,因而其求解过程也要简单得多.

关于齐次方程(4.3)的通解,我们采用经典的 **Euler** 待定指数函数法,也就是寻求形如

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad (4.4)$$

的解,其中 λ 为待定指数.将(4.4)代入方程(4.3)得到

$$P(D)e^{\lambda t} = P(\lambda)e^{\lambda t} = 0, \quad (4.5)$$

从而化成多项式方程

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (4.6)$$

的求根问题,该多项式称为**特征多项式**, (4.6)称为**特征方程**,它的根称为**特征根**,相应于(4.4)形式的解称为**特征解**.我们的想法是,求出所有的特征解并设法用它们来表示齐次方程(4.3)的所有解.

定理 4.1 设(4.6)有 n 个互异的根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则齐次方程(4.3)有基本解组 $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}$.

证明 显然函数 $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}$ 都是方程(4.3)的解.我们只要验证它们是线性无关的.按第三章的知识,我们计算它们的 Wronski 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)t}$$

$$= \prod_{1 \leq j < k \leq n} (\lambda_k - \lambda_j) e^{-a_1 t} \neq 0,$$

其中我们用到 Vandermonde 行列式的计算、多项式根与系数的关系以及 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 互异的事实. 因而我们得到了 n 个线性无关的解, 它们构成了齐次方程 (4.3) 的解空间的一组基. $\square$

定理 4.2 设 (4.6) 只有 r 个互异的根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, 它们分别有重数 $n_1, n_2, \dots, n_r$ (自然有 $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$), 则

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{n_1-1} e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_r t}, te^{\lambda_r t}, \dots, t^{n_r-1} e^{\lambda_r t}$$

构成齐次方程 (4.3) 的基本解组.

证明 我们分两步来证明本定理.

第一步 证明对任意的 $i (1 \leq i \leq r)$,

$$e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, \dots, t^{n_i-1} e^{\lambda_i t}$$

为线性无关的解.

为此, 我们首先证明

$$P(D)(t^l e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} [P(\lambda)t^l + lP'(\lambda)t^{l-1} + \dots + P^{(l)}(\lambda)], \quad (4.7)$$

其中 $l=1, 2, \dots, n_i-1$. 事实上, 对 (4.5) 关于复变量 λ 求 l 次导数, 即对 $P(D)e^{\lambda t} = P(\lambda)e^{\lambda t}$ 的 λ 求导, 即可归纳地得到 (4.7). 另外, 即使单纯从实函数的角度我们也能证明 (4.7), 具体地说, 我们利用乘积函数求导的 Leibniz 公式

$$(uv)^{(m)} = \sum_{k=0}^m C_m^k u^{(k)} v^{(m-k)}.$$

这个公式形式上类似于 Newton 二项式定理, 因此得到

$$D^m(e^{\lambda t} t^l) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^m C_m^k \lambda^k D^{m-k} t^l = e^{\lambda t} (D + \lambda)^m t^l.$$

根据 Taylor 展开式得到

$$\begin{aligned} P(D)(e^{\lambda t} t^l) &= e^{\lambda t} P(D + \lambda) t^l \\ &= e^{\lambda t} \left[P(\lambda) t^l + P'(\lambda) D t^l + \dots + P^{(l)}(\lambda) \frac{D^l t^l}{l!} \right], \end{aligned}$$

从而 (4.7) 得证.

既然 λ_i 为特征方程 (4.6) 的 n_i 重根, 必有

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{n_i} Q(\lambda).$$

故 $P(\lambda_i) = P'(\lambda_i) = \dots = P^{(n_i-1)}(\lambda_i) = 0$. 因此, 由 (4.7) 可见, 齐次方程 (4.3) 除有特征解 $e^{\lambda_i t}$ 外, 还有解 $te^{\lambda_i t}, t^2 e^{\lambda_i t}, \dots, t^{n_i-1} e^{\lambda_i t}$. 显然, 这 n_i 个解还是线性无关的, 因

为如果有常数 $C_0, C_1, \dots, C_{n_i-1}$ 满足

$$\sum_{k=0}^{n_i-1} C_k t^k e^{\lambda_i t} \equiv 0,$$

则

$$\sum_{k=0}^{n_i-1} C_k t^k \equiv 0.$$

从而 $C_0 = \dots = C_{n_i-1} = 0$.

第二步 证明将 i 分别取 $i=1, 2, \dots, r$ 后按第一步所得的各组函数合并在一起构成齐次方程(4.3)的解空间的一组基. 因为它们刚好是 n 个函数, 故只需要证明它们是线性无关的.

如果它们线性相关, 必有如下的恒等式:

$$e^{\lambda_1 t} \phi_1(t) + e^{\lambda_2 t} \phi_2(t) + \dots + e^{\lambda_r t} \phi_r(t) \equiv 0, \quad (4.8)$$

其中 $\phi_i, i=1, 2, \dots, r$, 都是多项式而且不全恒为 0. 不妨设这 r 个多项式都不恒为 0. 令 ϕ_i 的次数 $\deg \phi_i = m_i, i=1, 2, \dots, r$. 如下方法可将(4.8)化成只含一个不恒为 0 的多项式情形. 我们的操作如下:

用 $e^{\lambda_1 t}$ 除(4.8)得

$$\phi_1(t) + e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \phi_2(t) + \dots + e^{(\lambda_r - \lambda_1)t} \phi_r(t) \equiv 0. \quad (4.9)$$

(4.9)两边再对 t 求导得

$$\begin{aligned} & \phi_1'(t) + e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} [\phi_2'(t) + (\lambda_2 - \lambda_1) \phi_2(t)] + \dots \\ & + e^{(\lambda_r - \lambda_1)t} [\phi_r'(t) + (\lambda_r - \lambda_1) \phi_r(t)] \equiv 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

显然除了第一项次数降为 m_1-1 外, 其余各项的系数多项式

$$\phi_i'(t) + (\lambda_i - \lambda_1) \phi_i(t)$$

的次数仍然是 $m_i (i=2, 3, \dots, r)$. 由于 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 互异, $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, 因此可以利用指数函数求导的性质继续对第一项降次. 这样连续地对(4.9)共求 m_1+1 次导可以得到

$$e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \psi_2(t) + \dots + e^{(\lambda_r - \lambda_1)t} \psi_r(t) \equiv 0, \quad (4.11)$$

其中 $\psi_2(t), \psi_3(t), \dots, \psi_r(t)$ 都是次数分别为 $m_2, m_3, \dots, m_r$ 的不恒为 0 的多项式而且原来的第一项已经被消去.

令

$$s_2 = \lambda_2 - \lambda_1, s_3 = \lambda_3 - \lambda_1, \cdots, s_r = \lambda_r - \lambda_1.$$

由于它们也互异,将同样的方法用于(4.11)可以再消去第二项.如此重复下去,最后可化成仅有一项的情况,即

$$e^{\mu t} \pi(t) \equiv 0, \quad (4.12)$$

其中 μ 为常数而 $\pi(t)$ 为不恒为0的多项式.这是个矛盾,因为 $e^{\mu t} \neq 0$,故 $e^{\mu t} \pi(t) \neq 0$,这与(4.12)矛盾. $\square$

上述结论都是在复数域中讨论的.如果方程是实系数的,我们可以由下面的推论获得实数解的相应结果.

推论 若实系数齐次线性方程(4.3)有 r 个互异的实特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 及 l 对互异的复特征根 $\alpha_1 \pm i\beta_1, \alpha_2 \pm i\beta_2, \cdots, \alpha_l \pm i\beta_l$,重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_r$ 和 $m_1, m_2, \cdots, m_l$,并且满足

$$\sum_{k=1}^r n_k + 2 \sum_{k=1}^l m_k = n,$$

则方程(4.3)有如下实解并组成基本解组:

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_k t}, \quad t e^{\lambda_k t}, \quad \cdots, \quad t^{n_k-1} e^{\lambda_k t} \quad (k=1, 2, \cdots, r), \\ & e^{\alpha_j t} \cos \beta_j t, \quad t e^{\alpha_j t} \cos \beta_j t, \quad \cdots, \quad t^{m_j-1} e^{\alpha_j t} \cos \beta_j t \quad (j=1, 2, \cdots, l), \\ & e^{\alpha_j t} \sin \beta_j t, \quad t e^{\alpha_j t} \sin \beta_j t, \quad \cdots, \quad t^{m_j-1} e^{\alpha_j t} \sin \beta_j t \quad (j=1, 2, \cdots, l). \end{aligned}$$

证明 在第三章最后我们知道,一个实系数齐次线性方程如果具有复值解 $x(t) = u(t) + iv(t)$,那么 $u(t)$ 和 $v(t)$ 都是这个齐次线性方程的解.因此可以肯定上述 n 个实函数都是方程的解.由于定理4.2中的 n 个线性无关的解都可以表示为本推论中的 n 个实函数的常系数线性组合,因此,这 n 个实函数也必定是线性无关的. $\square$

例 4.1 求方程

$$\frac{d^3 x}{dt^3} - \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - x = 0$$

的实通解.

解 该方程的特征多项式为

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1),$$

因此特征根为 $1, \pm i$.按上述推论,得到实基本解组 $e^t, \cos t, \sin t$.这样就获得实

通解

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t,$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意实常数.

习题 4.1

1. 求下列齐次线性方程的实通解:

$$(1) \frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = 0;$$

$$(2) \frac{d^3 x}{dt^3} - \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} - 2x = 0;$$

$$(3) \frac{d^4 x}{dt^4} + 4x = 0;$$

$$(4) \frac{d^4 x}{dt^4} - 2 \frac{d^3 x}{dt^3} + 2 \frac{dx}{dt} - x = 0;$$

$$(5) \frac{d^2 x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 4x = 0;$$

$$(6) \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 4x = 0;$$

$$(7) \frac{d^3 x}{dt^3} + 4 \frac{dx}{dt} = 0;$$

$$(8) \frac{d^4 x}{dt^4} + 8 \frac{d^2 x}{dt^2} + 16x = 0.$$

2. 设 a, b, c 为正数. 试证当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 方程

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0$$

的每一个解都趋于零.

3*. 分析振动方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

的特征根并给出通解. 这里 $\delta \geq 0, \omega > 0$.

§ 4.2 非齐次问题

在已经获得齐次问题的通解的情况下, 求解非齐次问题的实质就是寻找一个特解. 尽管第三章指出, 这样的特解可以通过常数变易公式获得, 但是对具体问题来说这样的计算可能是相当复杂的. 针对几类特殊而常见的函数类型, 我们有更加简便的方法, 即算子解法.

考虑非齐次线性方程(4.1). 按照算子形式写法, 可以表述为(4.2). 如果把 $P(D)$ 的逆算子形式地记为 $\frac{1}{P(D)}$, 那么我们需要求

$$x(t) = \frac{1}{P(D)}f(t). \quad (4.13)$$

这里我们需要简要地说明一下怎样来理解和计算逆算子 $\frac{1}{P(D)}$. 注意到一个简单的情形是 $\frac{1}{D}$, 它对一个可积函数 $f(t)$ 的作用结果 $\frac{1}{D}f(t)$ 是不定积分 $\int f(t) dt$. 这是一个不唯一的结果, 它们之间相差一个常数. 然而, 我们现在只要求任何一个特解, 因此我们不顾及这个差异, 每次计算都选择方便简单的一个答案. 在这种方法中的大部分等号都是在这种意义下成立的.

算子 $\frac{1}{P(D)}$ 具有下列基本性质:

性质 1 $\frac{1}{D^n}f(t) = \int \cdots \int f(\tau) (d\tau)^n$, 即 n 累次积分.

性质 2 $\frac{1}{P(D)}$ 的作用是线性的, 即

$$\frac{1}{P(D)}\{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\} = \alpha \frac{1}{P(D)}f_1(t) + \beta \frac{1}{P(D)}f_2(t).$$

性质 3 如果 $P(D) = P_1(D)P_2(D)$, 则

$$\frac{1}{P(D)} = \frac{1}{P_1(D)} \cdot \frac{1}{P_2(D)} = \frac{1}{P_2(D)} \cdot \frac{1}{P_1(D)}.$$

这些性质不难用 $P(D)$ 的性质来验证. 进一步, 我们给出以下重要的计算公式. 为了方便记忆, 我们形象地给每个公式起了一个名字.

定理 4.3 i) 解析展开法或解析相除法: 对 k 次多项式 $f_k(t)$, 如果 $\frac{1}{P(x)}$ 在 $x=0$ 处解析且可以展开成

$$\frac{1}{P(x)} = Q_k(x) + H_k(x),$$

其中 $Q_k(x)$ 是 k 次多项式, 而 $H_k(x)$ 为 $k+1$ 次以上的所有高次项, 则

$$\frac{1}{P(D)}f_k(t) = Q_k(D)f_k(t).$$

ii) 代换法: 如果 $P(\lambda) \neq 0$, 那么 $\frac{1}{P(D)}e^{\lambda t} = \frac{1}{P(\lambda)}e^{\lambda t}$.

iii) 二项式法: $\frac{1}{P(D)}e^{\lambda t}v(t) = e^{\lambda t}\frac{1}{P(D+\lambda)}v(t)$.

证明 对 i), 只要注意到 $D^{k+i}f_k(t) \equiv 0, \forall i \geq 1$. 更简单地看, 将 $P(D)$ 按升幂排列后作除法 $1/P(D)$, 设在第 $k+1$ 步时得到商 $Q_k(D)$ 和余式 $R_k(D)$, 它们必然是 k 次多项式和形如

$$R_k(D) = c_{k+1}D^{k+1} + c_{k+2}D^{k+2} + \cdots + c_{k+n}D^{k+n}$$

的多项式. 按除法关系我们有 $1 = P(D)Q_k(D) + R_k(D)$. 从而

$$\begin{aligned} f_k(t) &= P(D)Q_k(D)f_k(t) + R_k(D)f_k(t) \\ &= P(D)Q_k(D)f_k(t). \end{aligned}$$

这样也得到同样形式的结果.

对 ii), 从上节的重要公式 (4.5), 即 $P(D)e^{\lambda t} = P(\lambda)e^{\lambda t}$, 可直接得知.

对 iii) 的“二项式法”名称来自上节定理 4.2 证明中使用的二项式定理. 事实上,

$$\begin{aligned} D^m(e^{\lambda t}v(t)) &= \sum_{k=0}^m C_m^k D^k e^{\lambda t} \cdot D^{m-k}v(t) \\ &= \sum_{k=0}^m C_m^k \lambda^k e^{\lambda t} \cdot D^{m-k}v(t) \\ &= e^{\lambda t}(D + \lambda)^m v(t), \end{aligned}$$

从而,

$$P(D)(e^{\lambda t}v(t)) = e^{\lambda t}P(D + \lambda)v(t).$$

利用该结果, 我们得到

$$\begin{aligned} P(D)\left[e^{\lambda t}\frac{1}{P(D + \lambda)}v(t)\right] &= e^{\lambda t}P(D + \lambda)\left[\frac{1}{P(D + \lambda)}v(t)\right] \\ &= e^{\lambda t}v(t). \end{aligned}$$

求逆便得到结论. $\square$

注 4.1 解析展开法的一个最直接和最常用的实例是

$$\frac{1}{1-D}f_k(t) = (1 + D + D^2 + \cdots + D^k)f_k(t).$$

注 4.2 从代换法可以获得下列结果:

$$\frac{1}{P(D^2)} \begin{Bmatrix} \cos at \\ \sin at \end{Bmatrix} = \frac{1}{P(-a^2)} \begin{Bmatrix} \cos at \\ \sin at \end{Bmatrix},$$

其中 $P(-a^2) \neq 0$. 事实上, 对上述三角函数我们考虑辅助函数 e^{iat} . 用代换法得到

$$\frac{1}{P(D^2)} e^{iat} = \frac{1}{P((ia)^2)} e^{iat} = \frac{1}{P(-a^2)} e^{iat}.$$

分别取其实部和虚部就获得我们需要的结果.

注 4.3 在 $P(\lambda) = 0$ 的情形下我们不能使用代换法, 但可以使用二项式法. 事实上,

$$\frac{1}{P(D)} e^{\lambda t} = e^{\lambda t} \frac{1}{P(D + \lambda)} \cdot 1.$$

对于非齐次线性方程(4.1), 当其非齐次项 $f(t)$ 为某几类特殊函数时, 除了可用算子解法求其特解外, 还有比较系数法和 Laplace 变换法等简便的方法. 限于篇幅, 这里不再一一介绍, 有兴趣的读者可查阅相关的参考文献. 下面通过具体例子来看看怎样使用算子解法求非齐次线性方程的一个特解.

例 4.2 $(D - \lambda)' Q(D)x = e^{\lambda t}$, 其中 $Q(\lambda) \neq 0$.

解 由于 $\frac{1}{(D - \lambda)^r}$ 对函数 $e^{\lambda t}$ 不满足代换法的条件, 因此先用代换法计算 $\frac{1}{Q(D)} e^{\lambda t}$, 再对所得结果用二项式法, 得

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{(D - \lambda)^r Q(D)} e^{\lambda t} = \frac{1}{Q(\lambda)} \frac{1}{(D - \lambda)^r} e^{\lambda t} \\ &= \frac{e^{\lambda t}}{Q(\lambda)} \cdot \frac{1}{((D + \lambda) - \lambda)^r} \cdot 1 \\ &= \frac{e^{\lambda t}}{Q(\lambda)} \int \cdots \int 1 (dt)^r \\ &= \frac{e^{\lambda t}}{Q(\lambda)} \frac{t^r}{r!}. \end{aligned}$$

例 4.3 $(D^3 - 2D^2 + D - 2)x = t^3 \sin t$.

解 既然出现三角函数, 首先用辅助函数 $t^3 e^{it}$ 化成指数函数问题. 考虑辅助方程

$$(D^3 - 2D^2 + D - 2)z = t^3 e^{it}.$$

显然 $P(D) := D^3 - 2D^2 + D - 2 = (D^2 + 1)(D - 2)$ 使得 $P(i) = 0$, 而且还有多项式因子 t^3 , 故不能用代换法解决, 而要用二项式法和解析展开法. 因此

$$\begin{aligned}
 z(t) &= \frac{1}{D^3 - 2D^2 + D - 2} t^3 e^{it} \\
 &= e^{it} \frac{1}{(D + i)^3 - 2(D + i)^2 + (D + i) - 2} t^3 \\
 &= e^{it} \frac{1}{D^3 - (2 - 3i)D^2 - (2 + 4i)D} t^3 \\
 &= -\frac{e^{it}}{2 + 4i} \frac{1}{D} \frac{1}{1 - \frac{4 + 7i}{10}D - \frac{1 - 2i}{10}D^2} t^3 \\
 &= -\frac{e^{it}}{2 + 4i} \frac{1}{D} \left[1 + \frac{4 + 7i}{10}D + \frac{1 - 2i}{10}D^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{4 + 7i}{10}D + \frac{1 - 2i}{10}D^2 \right)^2 + \left(\frac{4 + 7i}{10}D \right)^3 \right] t^3 \\
 &= -\frac{e^{it}}{2 + 4i} \frac{1}{D} \left[1 + \frac{4 + 7i}{10}D + \frac{-23 + 36i}{100}D^2 - \frac{164 + 27i}{1\,000}D^3 \right] t^3 \\
 &= -\frac{e^{it}}{2 + 4i} \left[\frac{1}{D} + \frac{4 + 7i}{10} + \frac{-23 + 36i}{100}D - \frac{164 + 27i}{1\,000}D^2 \right] t^3 \\
 &= -\frac{e^{it}}{10}(1 - 2i) \left[\frac{t^4}{4} + \frac{4 + 7i}{10}t^3 + \frac{-69 + 108i}{100}t^2 - \frac{984 + 162i}{1\,000}t \right] \\
 &= -\frac{1}{10}(\cos t + i \sin t) \left[\left(\frac{t^4}{4} + \frac{18}{10}t^3 + \frac{147}{100}t^2 - \frac{1\,308}{1\,000}t \right) \right. \\
 &\quad \left. - i \left(\frac{t^4}{2} + \frac{t^3}{10} - \frac{246}{100}t^2 - \frac{1\,806}{1\,000}t \right) \right].
 \end{aligned}$$

取虚部得到

$$\begin{aligned}
 x(t) &= -\frac{1}{10} \left[\left(\frac{t^4}{4} + \frac{18}{10}t^3 + \frac{147}{100}t^2 - \frac{1\,308}{1\,000}t \right) \sin t \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{t^4}{2} + \frac{t^3}{10} - \frac{246}{100}t^2 - \frac{1\,806}{1\,000}t \right) \cos t \right].
 \end{aligned}$$

例 4.4 $(D+1)x = e^t$.

解 基本思想是配项并利用二项式法使 $\frac{1}{D+1}$ 变成 $\frac{1}{D}$ 的直接积分.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{D+1} e^t = \frac{1}{D+1} e^{-t} \cdot e^{e^t} e^t \\ &= e^{-t} \frac{1}{(D-1)+1} e^{e^t} e^t = e^{-t} \int e^{e^t} e^t dt = e^{-t} e^{e^t}. \end{aligned}$$

习题 4.2

1. 求下列非齐次线性方程的实通解:

(1) $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 1 + t^2$;

(2) $\frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = \cos 2t + \cos 4t$;

(3) $\frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = t \sin 2t$;

(4) $\frac{d^3 x}{dt^3} - 4 \frac{d^2 x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} = t^2$;

(5) $\frac{d^2 x}{dt^2} - 3 \frac{dx}{dt} + 2x = \sin e^{-t}$;

(6) $\frac{d^3 x}{dt^3} - 5 \frac{d^2 x}{dt^2} + 8 \frac{dx}{dt} - 4x = e^{3t}$;

(7) $\frac{d^2 x}{dt^2} - 2x = 4t^2 e^{t^2}$;

(8) $\frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} + x = t e^t$.

2. 证明 Cauchy-Euler 方程

$$a_2 t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 t \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

在适当的自变量代换下,能化为常系数线性方程,其中 a_0, a_1, a_2 均为常数, $a_2 \neq 0$, $f(t)$ 在某给定区间连续.

§ 4.3 常系数线性方程组

由第三章的理论,对于线性方程组,只要得到了其相应的齐次线性方程组的基本解组,我们就可以用常数变易公式给出它的通解. 因此本节我们主要给出常系数齐次线性方程组的基本解组的求解方法.

将常系数齐次线性方程组表述为矩阵形式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

由于需要考虑特征值, 因此我们在复数域讨论方程组 (4.14). 简记列向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 和 $n \times n$ 阶矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})$. 同样用 Euler 指数函数法, 设 (4.14) 有如下形式的特解:

$$\mathbf{x} = \mathbf{c} e^{\lambda t}, \quad (4.15)$$

其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和非零向量 $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \in \mathbb{C}^n$ 都是待定的. 将 (4.15) 代入 (4.14) 得

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad (4.16)$$

从而化成了线性代数中求矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值 λ 和相应的特征向量 $\mathbf{c}$ 的问题. 方程组 (4.14) 有非零解当且仅当系数行列式 $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$. 我们称 $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ 为特征方程.

定理 4.4 如果矩阵 $\mathbf{A}$ 有 n 个彼此互异的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则方程组 (4.14) 有基本解组 $\mathbf{c}^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \mathbf{c}^{(2)} e^{\lambda_2 t}, \dots, \mathbf{c}^{(n)} e^{\lambda_n t}$, 其中 $\mathbf{c}^{(1)}, \mathbf{c}^{(2)}, \dots, \mathbf{c}^{(n)}$ 是分别相应于 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的特征向量.

定理的证明是根据十分基本的线性代数知识, 在定理的条件下矩阵 $\mathbf{A}$ 可对角化, 对应的特征向量 $\mathbf{c}^{(1)}, \mathbf{c}^{(2)}, \dots, \mathbf{c}^{(n)}$ 是线性无关的并构成 $\mathbb{C}^n$ 的一组基. 读者自己可以参照过去的讨论给出当 $\mathbf{A}$ 是实矩阵时 (4.14) 的实基本解组的结论和表达形式.

较困难的问题是上述 $\mathbf{A}$ 不可对角化的情形. 在一般情况下 $\mathbf{A}$ 的特征方程可以有重根, 故 $\mathbf{A}$ 只能在 $\mathbb{C}$ 上化成 Jordan 标准形. 我们将引入矩阵指数函数的方法.

一、矩阵指数函数

引理 4.1 n 阶方阵的全体 $\mathcal{M}(n)$ 是一个 n^2 维线性空间. 它关于模

$$\|\mathbf{A}\| := \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|, \quad \mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(n)$$

是完备的, 即其任何 Cauchy 列都收敛, 而且对任意的 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}(n)$, 有

(i) $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$. 特别地, 对 $k \geq 1$, 有 $\|\mathbf{A}^k\| \leq \|\mathbf{A}\|^k$.

(ii) 幂级数

$$I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots$$

绝对收敛, 其中 I 是单位矩阵.

证明 完备性是欧氏空间上数学分析的基本结果. (i) 容易得到验证. 关于 (ii), 注意到 $M := \|A\| < \infty$. 对级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$$

用比率判别法可以得到其收敛性. $\square$

据此我们可以引入记号

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},$$

并称之为矩阵 A 的指数函数. 显然它是一般指数函数的推广, 并且 $e^A \in \mathcal{M}(n)$. 对任意的 $A, B \in \mathcal{M}(n)$, 容易证明以下基本性质:

(1) 若 $AB = BA$, 则 $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

(2) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

(3) 若 $P \in \mathcal{M}(n)$ 是可逆的, 则 $e^{PAP^{-1}} = P e^A P^{-1}$.

利用矩阵指数函数, 我们可以简便地表述线性微分方程组的基本结果.

定理 4.5 (i) 齐次线性方程组 (4.14) 有基本解矩阵 $X(t) = e^{tA}$. 我们称之为方程组 (4.14) 的标准解矩阵, 因为它满足 $X(0) = I$. (ii) 非齐次线性方程组 $\dot{x} = Ax + f(t)$ (其中 $f(t)$ 是 n 维向量值函数) 的通解为

$$x(t) = e^{tA}c + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}f(s)ds,$$

其中 c 为任意常向量.

证明 首先证明对 t 在任意有限区间上 e^{tA} 是解矩阵. 事实上, 同引理 4.1 由比率判别法知道级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

和它的形式逐项求导的级数都一致收敛. 故可逐项求导得到

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = A + tA^2 + \frac{t^2}{2}A^3 + \cdots = Ae^{tA}.$$

进而, 由 Wronski 行列式 $\det X(0) = \det I = 1 \neq 0$ 知 $X(t)$ 的非奇异性. 因此 e^{tA} 是一个基本解矩阵.

结论(ii)是第三章结果的明显推论. $\square$

二、标准解矩阵的初等表达

由定义可知标准解矩阵 e^{tA} 是一个无穷和形式. 我们将致力于它的初等表达, 也就是寻求它的一个初等函数的有限和的等价表达式.

由线性代数知识, 任意一个 $\mathbb{C}$ 上的方阵必相似于一个 Jordan 型矩阵. 因此存在一个可逆矩阵 P , 使之化成对角块矩阵, 即

$$P^{-1}AP = J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_s)_{n \times n},$$

其中 J_i 为 n_i 阶 Jordan 块, 即

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_i \times n_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

且 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 为 A 的特征根, $n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$. 方程组(4.14)在相似变换下变成了 $\dot{y} = Jy$.

由定理 4.5 和矩阵指数函数性质, 方程组(4.14)有基本解矩阵 $e^{tA} = e^{tPJP^{-1}} = Pe^{tJ}P^{-1}$. 因而 $e^{tA}P = Pe^{tJ}$. 由于可逆矩阵 P 把一组基变成另一组基, 因此 $e^{tA}P$ 也是方程组(4.14)的一个基本解矩阵. 因此, 我们将等价地考虑并计算方程组(4.14)的基本解矩阵 Pe^{tJ} . 如果求出了 J 和 P , 用 Pe^{tJ} 的 n 个列向量就构成一个基本解组. 而事实上, 我们只需要直接求出 Pe^{tJ} 的每个列向量的表达式.

为研究 Pe^{tJ} 的结构, 考虑

$$J_i = \lambda_i I + Z, \quad (4.17)$$

其中 $\lambda_i I$ 为对角矩阵而 Z 为幂零矩阵, 即

$$\lambda_i I = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

易见

$$\mathbf{Z}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{Z}^k = \mathbf{O}, \forall k \geq n_i.$$

这决定了我们可以获得“有限和”的表达式, 因为

$$\begin{aligned} e^{i\mathbf{Z}} &= \mathbf{I} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \dots + \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

显然,

$$\begin{aligned} e^{\lambda_i t \mathbf{I}} &= \mathbf{I} + \begin{pmatrix} \lambda_i t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i t \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} \lambda_i^2 t^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i^2 t^2 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix} = e^{\lambda_i t} \mathbf{I}, \end{aligned}$$

故

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_i t} \cdot e^{iZ} = e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ & & 1 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}_{n_i \times n_i} \quad (4.18)$$

进而考虑 Jordan 型矩阵 $J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_s)$. 我们要计算的基本解矩阵可以表述为

$$\begin{aligned} P e^{Jt} &= (P_1, P_2, \dots, P_s) \text{diag}(e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \dots, e^{J_s t}) \\ &= (P_1 e^{J_1 t}, P_2 e^{J_2 t}, \dots, P_s e^{J_s t}), \end{aligned} \quad (4.19)$$

其中 $P_i = (p_1, p_2, \dots, p_{n_i})$ 为 P 的 $n \times n_i$ 子阵, 由 n_i 个列向量构成. 考虑 (4.19) 中 s 组列向量中的任意一组

$$P_i e^{J_i t} = e^{\lambda_i t} \left(p_1, t p_1 + p_2, \dots, \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} p_1 + \dots + p_{n_i} \right).$$

这表明 $P_i e^{J_i t}$ 的每个列向量形如

$$x(t) = e^{\lambda_i t} \left[c_0 + \frac{t}{1!} c_1 + \dots + \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} c_{n_i-1} \right], \quad (4.20)$$

其中 $c_0, c_1, \dots, c_{n_i-1}$ 待定. 这就是我们要寻求的基本解组的“有限和”表述.

三、重特征根情形结论

假设矩阵 A 有互异的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, 其重数分别为 $n_1, n_2, \dots, n_s$ 且 $n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$. 在 A 的 Jordan 标准形中, 特征根 λ_i 对应的 Jordan 块可能不止一个. 但由上面的推导可以看到, 在 $P e^{Jt}$ 中与 λ_i 对应的列向量都具有 (4.20) 的形式, 且这里式 (4.20) 中的 n_i 对应于 λ_i 的重数. 在下面我们还将用到如下的线性代数知识:

引理 4.2 设 A 有互异的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, 重数分别为 $n_1, n_2, \dots, n_s$ 且 $n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$. 则 $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$, 其中

$$V_i = \{ c \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda_i I)^{n_i} c = 0 \}$$

为 n_i 维线性子空间, 它在 A 的作用下不变.

引理 4.3 (待定系数 $\mathbf{c}_i$ 的确定) 设 λ_i 为 $\mathbf{A}$ 的 n_i 重特征根, 则 (4.20) 表示的函数 $\mathbf{x}(t)$ 是齐次线性方程组 (4.14) 的非零解, 当且仅当 $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{n_i-1}$ 满足

$$\begin{cases} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{n_i} \mathbf{c}_0 = \mathbf{0}, & \mathbf{c}_0 \neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{c}_1 = (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{c}_0, \\ \mathbf{c}_2 = (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{c}_1, \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{n_i-1} = (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{c}_{n_i-2}. \end{cases} \quad (4.21)$$

证明 将待定式 (4.20) 代入方程组 (4.14), 并消去等式两边的公因子 $e^{\lambda_i t}$ 得

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \left(\mathbf{c}_0 + \frac{t}{1!} \mathbf{c}_1 + \frac{t^2}{2!} \mathbf{c}_2 + \dots \right) = \mathbf{c}_1 + \frac{t}{1!} \mathbf{c}_2 + \frac{t^2}{2!} \mathbf{c}_3 + \dots.$$

比较 t 同次幂的系数得到

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{c}_0 = \mathbf{c}_1, \dots, (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{c}_{n_i-2} = \mathbf{c}_{n_i-1}, (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{c}_{n_i-1} = \mathbf{0}.$$

从而 $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^k \mathbf{c}_0 = \mathbf{c}_k$ 且 $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{n_i} \mathbf{c}_0 = \mathbf{0}$. 这就得到 (4.21). 显然 $\mathbf{c}_0$ 必为 (4.21) 第一方程的非零解, 否则可以递推出 $\mathbf{c}_1 = \dots = \mathbf{c}_{n_i-1} = \mathbf{0}$. 从而只获得平凡解 $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$. $\square$

据此我们得到本节最重要的定理.

定理 4.6 假设 $n \times n$ 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 有互不相同的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, 重数为 $n_1, n_2, \dots, n_s$ 且 $n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$. 则齐次线性方程组 (4.14) 有基本解组

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_1 t} \mathbf{P}_1^{(1)}(t), \dots, e^{\lambda_1 t} \mathbf{P}_{n_1}^{(1)}(t), \\ & e^{\lambda_2 t} \mathbf{P}_1^{(2)}(t), \dots, e^{\lambda_2 t} \mathbf{P}_{n_2}^{(2)}(t), \\ & \dots \dots \dots \\ & e^{\lambda_s t} \mathbf{P}_1^{(s)}(t), \dots, e^{\lambda_s t} \mathbf{P}_{n_s}^{(s)}(t), \end{aligned} \quad (4.22)$$

这里

$$\mathbf{P}_j^{(i)}(t) = \mathbf{c}_{j0}^{(i)} + \frac{t}{1!} \mathbf{c}_{j1}^{(i)} + \dots + \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \mathbf{c}_{j(n_i-1)}^{(i)} \quad (4.23)$$

是相应于 λ_i 的某个向量多项式, 共有 n_i 个 ($j=1, 2, \dots, n_i$), 其中

(i) 零次项向量 $\mathbf{c}_{10}^{(i)}, \dots, \mathbf{c}_{n_i 0}^{(i)}$ 为 (4.21) 第一个方程的 n_i 个线性无关解, 亦即

引理 4.2 中不变子空间 V_i 的一组基,

(ii) 向量多项式 (4.23) 中的系数向量 $\mathbf{c}_{j1}^{(i)}, \dots, \mathbf{c}_{j(n_i-1)}^{(i)}$ 由零次项向量 $\mathbf{c}_{j0}^{(i)}$ 和引理 4.3 的递推公式 (4.21) 确定.

该定理表明, 在引理 4.2 的分解中 V_i 有 n_i 个基向量, 每个基向量确定一个向量多项式 $\mathbf{P}_j^{(i)}(t)$. 另外, 当 $\mathbf{A}$ 是实矩阵时, 我们可取实部和虚部来给出实的基本解组.

证明 由引理 4.3 知, (4.22) 中 n 个函数都是齐次线性方程组 (4.14) 的解. 下面验证这 n 个解线性无关. 令这 n 个解组成的基本解矩阵为 $\mathbf{X}(t)$. 易见

$$\mathbf{X}(0) = (\mathbf{c}_{10}^{(1)}, \dots, \mathbf{c}_{n_1 0}^{(1)}; \mathbf{c}_{10}^{(2)}, \dots, \mathbf{c}_{n_2 0}^{(2)}; \dots; \mathbf{c}_{10}^{(s)}, \dots, \mathbf{c}_{n_s 0}^{(s)}) \quad (4.24)$$

完全由“零次项向量”构成. 由引理 4.2, 子空间

$$V_i = \{\mathbf{c} \in \mathbb{C}^n \mid (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{n_i} \mathbf{c} = \mathbf{0}\}$$

为 n_i 维, 故从 (4.21) 第一式的线性方程组必恰能解出 n_i 个线性无关的向量 $\mathbf{c}_{10}^{(i)}, \dots, \mathbf{c}_{n_i 0}^{(i)}$. 因此, (4.24) 的列向量组成 $\mathbb{C}^n$ 的一组基, 即 Wronski 行列式 $\det \mathbf{X}(0) \neq 0$. 从而定理得证. $\square$

例 4.5 求解方程组

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

解 从 $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda(\lambda - 1)^2$ 得到单根 $\lambda_1 = 0$ 和二重根 $\lambda_2 = 1$. 对 $\lambda_1 = 0$, 为求 $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{c} = \mathbf{0}$ 的非平凡解, 我们对 $\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}$ 作初等行变换

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

从而通过确定基础解系得到 $\mathbf{c}_1 = (-1, 1, 1)^T$.

再对 $\lambda_2 = 1$ 求 $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})^2 \mathbf{c} = \mathbf{0}$ 的非平凡解, 由于

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

容易得到两个线性无关的解 $\mathbf{c}_{20} = (1, 1, 0)^T$ 和 $\mathbf{c}_{30} = (-1, 0, 1)^T$. 代入 (4.21) 递

推得

$$\mathbf{c}_{21} = (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) \mathbf{c}_{20} = (0, 1, 1)^T,$$

$$\mathbf{c}_{31} = (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) \mathbf{c}_{30} = (0, -1, -1)^T.$$

最后得到基本解矩阵

$$\begin{aligned} X(t) &= \left(\mathbf{c}_1 e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t} \left(\mathbf{c}_{20} + \frac{t}{1!} \mathbf{c}_{21} \right), e^{\lambda_2 t} \left(\mathbf{c}_{30} + \frac{t}{1!} \mathbf{c}_{31} \right) \right) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & e^t & -e^t \\ 1 & (1+t)e^t & -te^t \\ 1 & te^t & (1-t)e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因此通解为

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \\ t \end{pmatrix} e^t + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -t \\ 1-t \end{pmatrix} e^t,$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

习题 4.3

1. 由高阶线性微分方程组成的方程组可以表述为算子形式

$$\begin{pmatrix} a_{11}(D) & \cdots & a_{1n}(D) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(D) & \cdots & a_{nn}(D) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

其中矩阵系数都是算子多项式. 用 Cramer 法则解出

$$x_i(t) = \frac{\det \Delta_i}{\det \Delta}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{pmatrix} a_{11}(D) & \cdots & a_{1n}(D) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(D) & \cdots & a_{nn}(D) \end{pmatrix}, \\ \Delta_i &= \begin{pmatrix} a_{11}(D) & \cdots & a_{1(i-1)}(D) & f_1(t) & a_{1(i+1)}(D) & \cdots & a_{1n}(D) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(D) & \cdots & a_{n(i-1)}(D) & f_n(t) & a_{n(i+1)}(D) & \cdots & a_{nn}(D) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

显然 Δ_i 是一个可以计算的已知函数 $\Delta_i(t)$, 而 Δ 仍为算子多项式. 从而问题简化为对每个 $i=1, 2, \dots, n$ 求解算子形式的单个的高阶线性微分方程 $\Delta x_i = \Delta_i$. 试用这种思想求解方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1 - \dot{x}_2 + x_1 = -t, \\ \ddot{x}_1 - \dot{x}_2 + 3x_1 - x_2 = e^{2t}. \end{cases}$$

2. 试用矩阵指数函数思想理解并证明定理 4.4.

3. 求解下列方程组:

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = -3x + 48y - 28z, \quad \frac{dy}{dt} = -4x + 40y - 22z,$$

$$\frac{dz}{dt} = -6x + 57y - 31z;$$

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x;$$

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = -5x - 10y - 20z, \quad \frac{dy}{dt} = 5x + 5y + 10z,$$

$$\frac{dz}{dt} = 2x + 4y + 9z;$$

$$(4) \quad \frac{dx}{dt} = 3x - y, \quad \frac{dy}{dt} = -4x - y,$$

$$\frac{dz}{dt} = 4x - 8y - 2z;$$

$$(5) \quad \frac{dx}{dt} = 9x - 5y, \quad \frac{dy}{dt} = -y + 5z,$$

$$\frac{dz}{dt} = -y + 5z;$$

$$(6) \quad \frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = -2x + 3y,$$

$$\frac{dz}{dt} = 5z;$$

$$(7) \quad \frac{dx}{dt} = 2x + y + 3z, \quad \frac{dy}{dt} = 2y - z,$$

$$\frac{dz}{dt} = 2z.$$

4*. 给定齐次方程组 $\dot{x} = Ax$, 其中 A 为常数值矩阵. 证明:

(1) 若 A 的所有特征根实部都小于 0, 则所有解当 $t \rightarrow +\infty$ 时趋于 0;

(2) 若 A 的所有特征根实部都小于等于 0 且零实部的特征根都是简单根, 则一切解 $\forall t \geq 0$ 都有界;

(3) 若 A 有一个特征根实部大于 0, 则有解当 $t \rightarrow +\infty$ 时趋向无穷.

§ 4.4 应用: 机械振动

我们现在回过头来讨论在本书第一章例 1.3 中遇到的弹性振动问题. 我们

已经得到运动方程

$$m\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \quad (a \geq 0, b > 0). \quad (4.25)$$

我们分成下面四种情况讨论方程(4.25)的解.

1. 无阻尼自由振动

这时 $a=0$, 方程为

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (4.26)$$

其中 $\omega^2 = \frac{b}{m}$. 它描述了物体的自由振动.

从 $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ 解得一对共轭虚根 $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$. 故通解为

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

如果初值条件为 $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = x'_0$, 代入通解则可确定常数 C_1 和 C_2 , 从而得到

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{x'_0}{\omega} \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.27)$$

其中

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_0'^2}{\omega^2}}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{-x'_0}{x_0 \omega}\right).$$

对(4.27)的物理解释是, 物体的自由振荡是具有确定的周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (称为固有周期)、确定的振幅 A (称为固有振幅) 和确定的初相位 φ (称为固有初相位) 的周期振动, 称为谐振动, 见图 4.1.

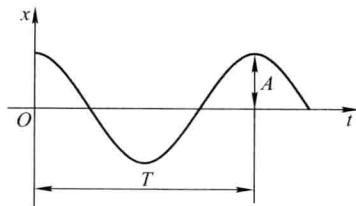


图 4.1 谐振动

2. 有阻尼自由振动

这时 $a>0$, 方程为

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (4.28)$$

其中 $2\delta = \frac{a}{m}, \omega^2 = \frac{b}{m}$. 从 $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$ 求得特征根

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2},$$

易见实部 $\Re \lambda_{1,2} < 0$. 讨论判别式 $\Delta := \delta^2 - \omega^2$ 得知:

- (1) 当 $\delta > \omega$ 时, 有两个实根 $-\lambda_1, -\lambda_2$;
- (2) 当 $\delta = \omega$ 时, 有一个实重根 $-\lambda$;
- (3) 当 $\delta < \omega$ 时, 有一对共轭复根 $-\alpha \pm i\beta$.

故在三种情况下分别得到解的表达式:

- (1) $x(t) = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}$;
- (2) $x(t) = C_1 e^{-\lambda t} + C_2 t e^{-\lambda t}$;
- (3) $x(t) = C_1 e^{-\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{-\alpha t} \sin \beta t$.

显然在三种情形下运动都渐弱, 最终趋于平衡位置 0. 情形(3)称为阻尼谐振, 它在初值条件 $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = x'_0$ 下通过确定常数 C_1, C_2 的值而得到

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\alpha t} \left(x_0 \cos \beta t + \frac{x'_0 + \alpha x_0}{\beta} \sin \beta t \right) \\ &= A e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \psi), \end{aligned}$$

其中

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\alpha x_0 + x'_0)^2}{\beta^2}}, \quad \psi = -\arctan\left(\frac{x'_0 + \alpha x_0}{\beta x_0}\right).$$

这表明尽管振幅越来越小, 但周期 $T = \frac{2\pi}{\beta}$ 保持恒定, 见图 4.2. 这个周期称为假定周期. 此外, 在情形(1)和(2)下不呈现振动特性, 称为有限运动, 见图 4.3 或图 4.4. 从阻尼谐振到有限运动的转换有一个临界参数值 $\delta = \omega$, 称为阻尼临界值, 在此恰好抑制振动.

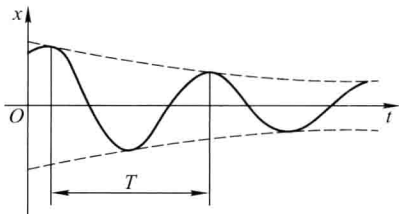


图 4.2 阻尼谐振

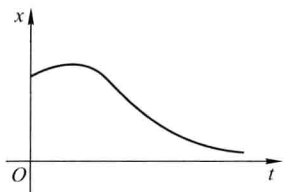


图 4.3 有限运动

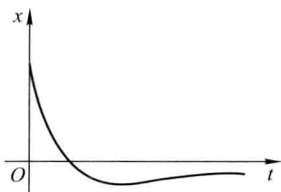


图 4.4 有限运动

3. 无阻尼强迫振动

在外力强迫下的无阻尼振动,其方程为

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cos pt, \quad (4.29)$$

其中 $F_0 \cos pt$ 为周期外力.

如果强迫频率不同于固有频率,即 $p \neq \omega$,我们用算子解法求特解得

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{D^2 + \omega^2} \cdot \frac{F_0}{m} \cos pt \\ &= \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{-p^2 + \omega^2} \cos pt \\ &= \frac{F_0/b}{1 - (p/\omega)^2} \cos pt. \end{aligned}$$

故通解为

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{F_0/b}{1 - (p/\omega)^2} \cos pt. \quad (4.30)$$

因此它是固有振动与强迫振动的合成,通常不是谐振动.然而,当两个频率非常接近时,即 $p \approx \omega$ 的情形,一种被称为拍振的现象则凸显出来.这时频率可看作固定而振幅时大时小.为看清楚这一现象,取初值条件 $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$. 通过确定(4.30)中的常数 C_1, C_2 ,得到

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0/b}{1 - (p/\omega)^2} (\cos pt - \cos \omega t) \\ &= \frac{2F_0/b}{1 - (p/\omega)^2} \sin \left(\frac{\omega - p}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega + p}{2} t \right). \end{aligned}$$

这样可以看作一个具有“交变振幅”的谐振动,振幅的变化周期为 $\tau = \frac{2\pi}{\omega-p}$, 交变振幅的频率 $\frac{\omega-p}{2}$ 极小,与谐振频率 $\frac{\omega+p}{2}$ 形成鲜明对比,见图 4.5. 我们将 $\omega-p$ 称为拍频.

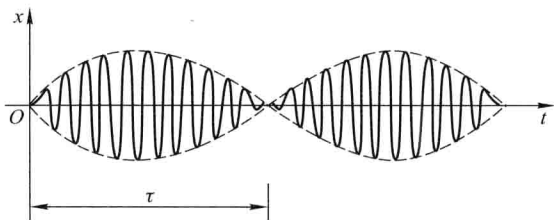


图 4.5 拍振现象

如果强迫频率与固有频率相等,即 $p = \omega$,则将发生共振现象.在这种条件下用算子解法求得特解

$$x(t) = \frac{1}{D^2 + \omega^2} \left(\frac{F_0}{m} \cos \omega t \right) = \frac{F_0}{2m\omega} t \sin \omega t.$$

它表明在振动中振幅逐渐加大而最终趋于无穷.

4. 有阻尼强迫振动

在外力强迫下的有阻尼振动,其方程为

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cos pt, \quad (4.31)$$

其中 $F_0 \cos pt$ 为周期外力而 $\delta > 0$. 考虑辅助方程

$$\ddot{z} + 2\delta\dot{z} + \omega^2 z = \frac{F_0}{m} e^{ipt}.$$

用算子解法求特解得到

$$\begin{aligned} x(t) &= \Re z(t) = \Re \left[\frac{1}{D^2 + 2\delta D + \omega^2} \left(\frac{F_0}{m} e^{ipt} \right) \right] \\ &= \Re \left(\frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{(ip)^2 + 2\delta(ip) + \omega^2} e^{ipt} \right) \\ &= A \cos(pt + \varphi), \end{aligned}$$

其中

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{2\delta p}{p^2 - \omega^2}\right).$$

这表明频率被强迫频率 p 锁定, 即系统的固有频率 ω 完全被 p 掩盖, 系统按频率 p 来振动.

进而, 将振幅看作 p 的函数并配成完全平方, 我们得到

$$A(p) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(p^2 - (\omega^2 - 2\delta^2))^2 + (4\delta^2\omega^2 - 4\delta^4)}}.$$

显然, 当 $p = \hat{p} := \sqrt{\omega^2 - 2\delta^2}$ 时振幅 A 达到最大值, 因此我们也认为发生了共振现象. $\hat{p}$ 称为共振频率. 特别在无阻尼时, $\hat{p} = \omega$.

习题 4.4

1. 1 kg 的重物悬挂在一弹簧上, 使它伸长了 $\frac{49}{320}$ m 后处于平衡位置. 今自平衡位置将重物拉下 $\frac{1}{4}$ m 后放手, 使其自由振动. 现不计空气阻力, 求其振动规律. ($g = 9.8$ m/s².)
2. 考虑一个由电感 L 和电容 C 串联组成的简单闭合电路. 试证电容器上的电位差 $v(t)$ 是关于时刻 t 的周期函数.
3. 考虑一个由电感 L , 电容 C 和电源 E 串联组成的简单闭合电路, 其中 $E = E_0 \sin \omega t$. 试证当 $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 时, 将发生共振现象, 且当 $t \rightarrow \infty$ 时, 电位差 $v(t)$ 变得无界.