

周民强实变函数论第三版思考题习题参考解答

张祖锦编著

2021 年 5 月 28 日



图 1: 购买纸质书请扫以上小程序码



图 2: 跟锦数学, 跟锦考研, 小锦教学, 数学考研锦囊, 数学奥赛微信公众号

目录		
前言及记号	8	1.2.5 P011思考题01 . . 11
1 集合与点集	9	1.2.6 P011思考题02 . . 11
1.1 集合与子集合	9	1.3 映射与基数 12
1.2 集合的运算	9	1.3.1 P013思考题01 . . 12
1.2.1 P008思考题01 . .	9	1.3.2 P013思考题02 . . 12
1.2.2 P008思考题02 . .	9	1.3.3 P013思考题03 . . 13
1.2.3 P008思考题03 . .	10	1.3.4 P013思考题04 . . 14
1.2.4 P008思考题04 . .	10	1.3.5 P014思考题05 . . 15
		1.3.6 P017思考题01 . . 15
		1.3.7 P017思考题02 . . 15
		1.3.8 P017思考题03 . . 15

1.3.9	P023思考题04	. . 16	1.5.13	P036思考题06	. . 26
1.3.10	P023思考题05	. . 16	1.5.14	P038思考题07	. . 27
1.3.11	P023思考题06	. . 16	1.5.15	P038思考题08	. . 27
1.3.12	P023思考题07	. . 17	1.5.16	P038思考题09	. . 27
1.3.13	P023思考题08	. . 18	1.5.17	P038思考题10	. . 28
1.3.14	P024思考题09	. . 18	1.5.18	P039思考题11	. . 28
1.3.15	P024思考题10	. . 19	1.5.19	P039思考题12	. . 28
1.3.16	P024思考题11	. . 19	1.5.20	P039思考题13	. . 29
1.3.17	P024思考题12	. . 19	1.5.21	P039思考题14	. . 30
1.3.18	P024思考题13	. . 20	1.5.22	P039思考题15	. . 31
1.3.19	P024思考题14	. . 20	1.5.23	P042思考题01	. . 31
1.4	$\mathbb{R}^n$ 中点与点之间的距离		1.5.24	P042思考题02	. . 32
	点集的极限点	 21	1.5.25	P042思考题03	. . 32
1.4.1	P029思考题01	. . 21	1.5.26	P045思考题04	. . 33
1.4.2	P029思考题02	. . 21	1.5.27	P045思考题05	. . 34
1.4.3	P029思考题03	. . 21	1.5.28	P045思考题06	. . 35
1.4.4	P029思考题04	. . 22	1.5.29	P050思考题01	. . 35
1.4.5	P029思考题05	. . 22	1.5.30	P050思考题02	. . 35
1.5	$\mathbb{R}^n$ 中的基本点集: 闭集		1.5.31	P050思考题03	. . 35
	开集 · Borel 集 · Cantor 集	23	1.5.32	P050思考题04	. . 36
1.5.1	P032思考题01	. . 23	1.6	点集间的距离	 36
1.5.2	P032思考题02	. . 23	1.6.1	P053思考题01	. . 36
1.5.3	P032思考题03	. . 23	1.6.2	P053思考题02	. . 37
1.5.4	P032思考题04	. . 23	1.6.3	P053思考题03	. . 37
1.5.5	P032思考题05	. . 23	1.6.4	P053思考题04	. . 38
1.5.6	P032思考题06	. . 24	1.7	P053习题1	 38
1.5.7	P032思考题07	. . 24	1.7.1	习题1.01	 38
1.5.8	P036思考题01	. . 24	1.7.2	习题1.02	 38
1.5.9	P036思考题02	. . 25	1.7.3	习题1.03	 39
1.5.10	P036思考题03	. . 25	1.7.4	习题1.04	 41
1.5.11	P036思考题04	. . 26	1.7.5	习题1.05	 41
1.5.12	P036思考题05	. . 26	1.7.6	习题1.06	 42

1.7.7	习题1.07	42	1.7.39	习题1.39	59
1.7.8	习题1.08	43	1.7.40	习题1.40	60
1.7.9	习题1.09	43	1.7.41	习题1.41	60
1.7.10	习题1.10	44			
1.7.11	习题1.11	45	2	Lebesgue 测度	61
1.7.12	习题1.12	45	2.1	点集的 Lebesgue 测度	61
1.7.13	习题1.13	46	2.1.1	P071思考题01	61
1.7.14	习题1.14	46	2.1.2	P071思考题02	62
1.7.15	习题1.15	47	2.1.3	P071思考题03	62
1.7.16	习题1.16	47	2.2	可测集与测度	62
1.7.17	习题1.17	48	2.2.1	P078思考题01	62
1.7.18	习题1.18	48	2.2.2	P078思考题02	63
1.7.19	习题1.19	49	2.2.3	P078思考题03	64
1.7.20	习题1.20	50	2.2.4	P078思考题04	64
1.7.21	习题1.21	50	2.2.5	P078思考题05	65
1.7.22	习题1.22	51	2.2.6	P078思考题06	65
1.7.23	习题1.23	51	2.2.7	P078思考题07	66
1.7.24	习题1.24	52	2.2.8	P078思考题08	66
1.7.25	习题1.25	52	2.3	可测集与 Borel 集的关系	67
1.7.26	习题1.26	53	2.3.1	P084思考题01	67
1.7.27	习题1.27	54	2.3.2	P084思考题02	68
1.7.28	习题1.28	54	2.3.3	P084思考题03	68
1.7.29	习题1.29	54	2.4	正测度集与矩体的关系	69
1.7.30	习题1.30	55	2.4.1	P086思考题01	69
1.7.31	习题1.31	55	2.4.2	P086思考题02	69
1.7.32	习题1.32	56	2.5	不可测集	69
1.7.33	习题1.33	56	2.5.1	P088思考题01	69
1.7.34	习题1.34	56	2.5.2	P088思考题02	70
1.7.35	习题1.35	57	2.5.3	P088思考题03	71
1.7.36	习题1.36	57	2.5.4	P088思考题04	71
1.7.37	习题1.37	58	2.5.5	P088思考题05	71
1.7.38	习题1.38	59	2.5.6	P088思考题06	72
			2.6	连续变换与可测集	72

2.7	P094习题2	72	3.2.6	P119思考题06	85
2.7.1	习题2.01	72	3.3	可测函数与连续函数的关系	86
2.7.2	习题2.02	72	3.3.1	P123思考题01	86
2.7.3	习题2.03	73	3.3.2	P123思考题02	86
2.7.4	习题2.04	73	3.3.3	P125思考题01	87
2.7.5	习题2.05	74	3.3.4	P125思考题02	88
2.7.6	习题2.06	74	3.4	P125习题3	88
2.7.7	习题2.07	74	3.4.1	习题3.01	88
2.7.8	习题2.08	75	3.4.2	习题3.02	88
2.7.9	习题2.09	75	3.4.3	习题3.03	89
2.7.10	习题2.10	76	3.4.4	习题3.04	89
2.7.11	习题2.11	76	3.4.5	习题3.05	89
2.7.12	习题2.12	77	3.4.6	习题3.06	90
2.7.13	习题2.13	78	3.4.7	习题3.07	90
2.7.14	习题2.14	78	3.4.8	习题3.08	91
2.7.15	习题2.15	79	3.4.9	习题3.09	91
2.7.16	习题2.16	80	3.4.10	习题3.10	92
3	可测函数	80	3.4.11	习题3.11	93
3.1	可测函数的定义及其性质	80	3.4.12	习题3.12	93
3.1.1	P107思考题01	80	3.4.13	习题3.13	94
3.1.2	P107思考题02	81	3.4.14	习题3.14	95
3.1.3	P107思考题03	81	3.4.15	习题3.15	96
3.1.4	P107思考题04	81	3.4.16	习题3.16	97
3.1.5	P107思考题05	82	4	Lebesgue 积分	97
3.1.6	P109思考题06	82	4.1	非负可测函数的积分	97
3.1.7	P109思考题07	82	4.1.1	P137思考题01	97
3.2	可测函数列的收敛	83	4.1.2	P137思考题02	98
3.2.1	P119思考题01	83	4.1.3	P137思考题03	98
3.2.2	P119思考题02	84	4.1.4	P137思考题04	99
3.2.3	P119思考题03	84	4.1.5	P137思考题05	99
3.2.4	P119思考题04	85	4.1.6	P137思考题06	99
3.2.5	P119思考题05	85	4.1.7	P143思考题07	100

4.1.8	P143思考题08	. . . 100	4.6	P189习题4	 113
4.1.9	P143思考题09	. . . 101	4.6.1	习题4.01	 113
4.1.10	P143思考题10	. . . 101	4.6.2	习题4.02	 113
4.2	一般可测函数的积分	. . . 102	4.6.3	习题4.03	 113
4.2.1	P149思考题01	. . . 102	4.6.4	习题4.04	 114
4.2.2	P149思考题02	. . . 102	4.6.5	习题4.05	 114
4.2.3	P149思考题03	. . . 103	4.6.6	习题4.06	 115
4.2.4	P149思考题04	. . . 103	4.6.7	习题4.07	 116
4.2.5	P149思考题05	. . . 103	4.6.8	习题4.08	 116
4.2.6	P149思考题06	. . . 104	4.6.9	习题4.09	 118
4.2.7	P154思考题07	. . . 104	4.6.10	习题4.10	 118
4.2.8	P154思考题08	. . . 105	4.6.11	习题4.11	 119
4.2.9	P159思考题01	. . . 105	4.6.12	习题4.12	 119
4.2.10	P159思考题02	. . . 106	4.6.13	习题4.13	 120
4.2.11	P159思考题03	. . . 106	4.6.14	习题4.14	 120
4.2.12	P159思考题04	. . . 107	4.6.15	习题4.15	 121
4.2.13	P159思考题05	. . . 107	4.6.16	习题4.16	 122
4.2.14	P159思考题06	. . . 108	4.6.17	习题4.17	 123
4.2.15	P162思考题07	. . . 108	4.6.18	习题4.18	 123
4.2.16	P162思考题08	. . . 109	4.6.19	习题4.19	 124
4.2.17	P162思考题09	. . . 109	4.6.20	习题4.20	 124
4.2.18	P162思考题10	. . . 110	4.6.21	习题4.21	 125
4.3	可积函数与连续函数的关系	110	4.6.22	习题4.22	 125
4.4	Lebesgue 积分与 Rie-		4.6.23	习题4.23	 126
	mann 积分的关系	 110	4.6.24	习题4.24	 127
4.4.1	P173思考题01	. . . 110	4.6.25	习题4.25	 128
4.4.2	P173思考题02	. . . 111	4.6.26	习题4.26	 128
4.4.3	P173思考题03	. . . 111	4.6.27	习题4.27	 128
4.4.4	P177思考题04	. . . 112	4.6.28	习题4.28	 129
4.5	重积分与累次积分的关系	. 112	4.6.29	习题4.29	 129
4.5.1	P184思考题01	. . . 112	4.6.30	习题4.30	 130
4.5.2	P184思考题02	. . . 112	4.6.31	习题4.31	 130

4.6.32	习题4.32	131	5.5.1	P235思考题01	142
4.6.33	习题4.33	132	5.5.2	P235思考题02	142
4.6.34	习题4.34	132	5.5.3	P235思考题03	143
			5.5.4	P235思考题04	143
5	微分与不定积分	132	5.6	$\mathbb{R}$ 上的积分换元公式	144
5.1	单调函数的可微性	132	5.7	P241习题5	144
5.1.1	P211思考题01	132	5.7.1	习题5.01	144
5.1.2	P211思考题02	133	5.7.2	习题5.02	144
5.1.3	P211思考题03	133	5.7.3	习题5.03	145
5.2	有界变差函数	134	5.7.4	习题5.04	146
5.2.1	P218思考题01	134	5.7.5	习题5.05	147
5.2.2	P218思考题02	134	5.7.6	习题5.06	147
5.2.3	P218思考题03	135	5.7.7	习题5.07	148
5.2.4	P218思考题04	135	5.7.8	习题5.08	149
5.2.5	P218思考题05	136	5.7.9	习题5.09	149
5.2.6	P218思考题06	136	5.7.10	习题5.10	150
5.2.7	P218思考题07	137	5.7.11	习题5.11	150
5.2.8	P218思考题08	137	5.7.12	习题5.12	151
5.2.9	P218思考题09	138	5.7.13	习题5.13	152
5.2.10	P218思考题10	138	5.7.14	习题5.14	152
5.2.11	P218思考题11	139	5.7.15	习题5.15	153
5.3	不定积分的微分	139	5.7.16	习题5.16	154
5.3.1	P222思考题01	139	5.7.17	习题5.17	154
5.3.2	P222思考题02	140	5.7.18	习题5.18	154
5.4	绝对连续函数与微积分基本定理	140	5.7.19	习题5.19	155
5.4.1	P231思考题01	140	5.7.20	习题5.20	155
5.4.2	P231思考题02	140	6	L^p 空间	156
5.4.3	P231思考题03	141	6.1	L^p 空间的定义与不等式	156
5.4.4	P231思考题04	141	6.1.1	P250思考题01	156
5.4.5	P231思考题05	141	6.1.2	P250思考题02	156
5.5	分部积分公式与积分中值公式	142	6.1.3	P250思考题03	157
			6.1.4	P250思考题04	157

6.1.5	P253思考题05	158	6.3.8	P273思考题04	170
6.1.6	P253思考题06	158	6.3.9	P273思考题05	170
6.1.7	P253思考题07	159	6.4	L^p 空间的范数公式	170
6.1.8	P253思考题08	159	6.5	卷积	170
6.1.9	P256思考题09	159	6.6	弱收敛	170
6.1.10	P256思考题10	160	6.7	P289习题6	170
6.2	L^p 空间的结构	160	6.7.1	习题6.01	170
6.2.1	P259思考题01	160	6.7.2	习题6.02	171
6.2.2	P259思考题02	161	6.7.3	习题6.03	172
6.2.3	P259思考题03	161	6.7.4	习题6.04	172
6.2.4	P259思考题04	162	6.7.5	习题6.05	173
6.2.5	P259思考题05	163	6.7.6	习题6.06	173
6.2.6	P259思考题06	163	6.7.7	习题6.07	174
6.2.7	P259思考题07	164	6.7.8	习题6.08	174
6.2.8	P263思考题01	164	6.7.9	习题6.09	175
6.2.9	P263思考题02	165	6.7.10	习题6.10	175
6.3	L^2 内积空间	166	6.7.11	习题6.11	176
6.3.1	P267思考题01	166	6.7.12	习题6.12	177
6.3.2	P267思考题02	166	6.7.13	习题6.13	177
6.3.3	P267思考题03	166	6.7.14	习题6.14	178
6.3.4	P267思考题04	167	6.7.15	习题6.15	179
6.3.5	P273思考题01	167	6.7.16	习题6.16	179
6.3.6	P273思考题02	168	6.7.17	习题6.17	180
6.3.7	P273思考题03	168			

前言及记号

我们把周民强先生的实变函数论的思考题与习题全给解决了. 网络版本已经在微信公众号《数学竞赛》及《数学考研锦囊》中按小节发布了. 我们给出的参考解答有所不同. 有些题目小子有非常简单的解法, 所以非常短; 有些题目我们会尽可能地写清楚, 而不是一笔带过. 只要认真, 都能读懂. 毕竟要么给出完整的解答, 要么告诉读者用了哪一页哪个定理或例子. 你也许会发现, 很多等号或推出符号上面有字. 这都是精心打磨的, 只为节省纸张的情况下让你看的明白. 值得一提的是如下惊艳:

1. 第023页思考题6, 我们用有限覆盖定理给出了严苛的数学分析证明. 还指出它就是第244页习题 5.20 的直接推论.
2. 第084页思考题3, 我们有了非常简单的方法, 迅速得到结果.
3. 第193页习题28, 我们用绝对连续函数的性质给出了严苛证明.

因为这是后来写的. 做题时留下的愉悦没写下就忘记了. 不再赘述.

本书可作为综合大学、理工大学、师范院校数学类专业的教学参考用书, 也可作为有关研究生与自学者的参考书. 本书是作者差不多 20 年学习与教授实变函数所能给的. 目前, 他也开设了慕课

<https://mooc1.chaoxing.com/course/218151098.html>

只为更好地服务本校及外校学生. 八年的教学经历逐渐让他成长. 从最开始的密密麻麻的板书/快速有激情的演讲, 到现在的网页版 ppt 与板书相结合/慢悠悠地上课. 从一个有理想有干劲的青年到心外无物/宠辱不惊的世外人. 也将以前的诗词积淀融入课堂. 比如

1. 讲 Lebesgue 积分与 Riemann 积分比较, 则用“横看成岭侧成峰, 远近高低各不同”相联系.
2. 常用的“确界”方法, 就通过“行到水穷处, 坐看云起时”类比起来.
3. 讲“集族”的概念时, 通过《赠卫八处士》及其中的诗句“昔别君未婚, 儿女忽成行”来类比, 一些有关系的人在一起是家族, 而一些集合放在一起就是集族.
4. 球去掉北极点与平面对等, 则与“大漠孤烟直, 长河落日圆”类比.
5. 讲“孤立点”的定义时, 通过“花间一壶酒, 独酌无相亲”来衬托. 孤立点不可怕, 在孤立点处还不用验证连续性呢. 直接连续嘛.

小子也常将要学的实变函数的东西与以前的数学分析相比较, 提一些问题. 不一而足. 期待你能善待本书, 保存到永远. 毕竟有些东西你可能不是一下子能吸收的. 如果数学分析是用 $\epsilon - N$ 语言来说话 (啥东西都是个极限, 时不时取个极限), 那么实变函数是用集合语言来交流. 小哥, 学了数学是不是蛮好? 毕竟语言就有好几种. 中文, 英文, $\epsilon - N$ 语言, 集合语言等. 你才是真正的同声传译. 最后赠诗一首:

极限思想处处发, 集合交流到天涯.
伴君伴家已无物, 随心所欲笑哈哈.

本书记号如下: @跟锦数学微信公众号

E^c : E 的补集	$E[f > c]: \{x \in E; f(x) > c\}$	$E \in \mathcal{M}$: E 是可测集
-----------------	-----------------------------------	--------------------------------

1 集合与点集

1.1 集合与子集合

1.2 集合的运算

1.2.1 P008思考题01

设 A, B, E 是全集 X 的子集, 则 @跟锦数学微信公众号

$$B = (E \cap A)^c \cap (E^c \cup A) \text{ 当且仅当 } B^c = E.$$

张祖锦解. 由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} (E \cap A)^c \cap (E^c \cup A) &\stackrel{\text{De Morgan}}{=} (E^c \cup A^c) \cap (E^c \cup A) \\ &= (E^c \cap (E^c \cup A)) \cup (A^c \cap (E^c \cup A)) \\ &= E^c \cup ((A^c \cap E^c) \cup (A^c \cap A)) = E^c \cup (A^c \cap E^c) = E^c \end{aligned}$$

知 @跟锦数学微信公众号

$$B = (E \cap A)^c \cap (E^c \cup A) \Leftrightarrow B = E^c \Leftrightarrow B^c = E.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.2.2 P008思考题02

设 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots, B_1 \subset B_2 \subset \cdots$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n).$$

张祖锦解. 一方面, ⑧跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n) &\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \\ \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n) &\subset \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right). \end{aligned}$$

另一方面, 由 ⑧跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) &\Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ 且 } x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \\ \Rightarrow \exists n_0, \text{ s.t. } x \in A_{n_0} \text{ 且 } \exists n_1, \text{ s.t. } x \in B_{n_1} \\ A_n \nearrow, B_n \nearrow \Rightarrow \exists n = \max \{n_0, n_1\}, \text{ s.t. } x \in A_n \cap B_n &\Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n) \end{aligned}$$

知 $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n)$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

1.2.3 P008思考题03

设 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots, B_1 \supset B_2 \supset \cdots$, 则 ⑧跟锦数学微信公众号

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n).$$

张祖锦解. ⑧跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} A_i^c \nearrow, B_i^c \nearrow \xRightarrow{\text{思考题02}} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^c \right) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n^c \cap B_n^c) \\ \xRightarrow{\text{De Morgan}} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \right)^c &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n)^c \\ \xRightarrow{\text{De Morgan}} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) &= \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n). \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

1.2.4 P008思考题04

设有集合 A, B, E 和 F .

(1) 若有 $A \cup B = E \cup F, A \cap F = \emptyset, B \cap E = \emptyset$, 则 $A = E$ 且 $B = F$;

(2) 若 $A \cup B = E \cup F$, 令 $A_1 = A \cap E$, $A_2 = A \cap F$, 则 $A_1 \cup A_2 = A$.

张祖锦解.

(1) $A = A \cap (A \cup B) = A \cap (E \cup F) = (A \cap E) \cup (A \cap F) = A \cap E \subset E$. 交换 A, E 的位置我们发现 $E \subset A$, 而 $A = E$. 同理, $B = F$.

(2) $A_1 \cup A_2 = (A \cap E) \cup (A \cap F) = A \cap (E \cup F) = A \cap (A \cup B) = A$.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

1.2.5 P011思考题01

设 $\{f_n(x)\}$ 以及 $f(x)$ 都是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值函数, 且有 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), x \in \mathbb{R},$$

则对 $t \in \mathbb{R}$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\{x \in \mathbb{R}; f(x) \leq t\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R}; f_n(x) < t + \frac{1}{k}\right\}.$$

张祖锦解. 设 $A = \{x \in \mathbb{R}; f(x) \leq t\}$, $E_{nk} = \left\{x \in \mathbb{R}; f_n(x) < t + \frac{1}{k}\right\}$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x \in A &\Leftrightarrow f(x) \leq t \Leftrightarrow \forall k, f(x) < t + \frac{1}{n} \\ &\stackrel{\text{极限保号}}{\Rightarrow} \forall k, \exists m, \text{ s.t. } \forall n \geq m, f_n(x) < t + \frac{1}{n} \\ &\Rightarrow x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E_{nk}. \end{aligned}$$

另一方面, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E_{nk} &\Leftrightarrow \forall k, \exists m, \forall n \geq m, f_n(x) < t + \frac{1}{k} \\ &\stackrel{n \rightarrow \infty}{\Rightarrow} \forall k, f(x) \leq t + \frac{1}{k} \stackrel{k \rightarrow \infty}{\Rightarrow} f(x) \leq t \Leftrightarrow x \in A. \end{aligned}$$

故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

1.2.6 P011思考题02

设 $a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left(a_n - \frac{1}{k}, a_n + \frac{1}{k}\right) = \{a\}.$$

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m, \forall n \geq m, |a_n - a| < \varepsilon$$

交换

$$\Leftrightarrow \forall k, \exists m, \forall n \geq m, a \in \left(a_n - \frac{1}{k}, a_n + \frac{1}{k}\right) \Leftrightarrow a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left(a_n - \frac{1}{k}, a_n + \frac{1}{k}\right).$$

同上论述知 @跟锦数学微信公众号

$$b \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left(a_n - \frac{1}{k}, a_n + \frac{1}{k}\right) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \stackrel{m-}{\Rightarrow} b = a.$$

这就证明了 $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left(a_n - \frac{1}{k}, a_n + \frac{1}{k}\right) = \{a\}$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

1.3 映射与基数

1.3.1 P013思考题01

设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 记 $f_1(x) = f(x)$, $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). 若存在 n_0 , 使得 $f_{n_0}(x) = x$, 则 f 是 $\mathbb{R}$ 到 $f(\mathbb{R})$ 上的一一映射.

张祖锦解. 由 $f: \mathbb{R} \rightarrow f(\mathbb{R})$ 是满射知仅需验证 $f: \mathbb{R} \rightarrow f(\mathbb{R})$ 是单射. 事实上 @跟锦数学微信公众号

$$f(x) = f(y) \Rightarrow f_2(x) = f_2(y) \Rightarrow \dots \Rightarrow x = f_{n_0}(x) = f_{n_0}(y) = y.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

1.3.2 P013思考题02

不存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 f , 它在无理数集 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 上是一一映射, 而在 $\mathbb{Q}$ 上则不是一一映射.

张祖锦解. 用反证法. 若存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 使得 $f: \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 是一一映射, 而 $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ 不是一一映射.

(1) 若 $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ 不是单射, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\exists r, s \in \mathbb{Q}, r < s, \text{ s.t. } f(r) = f(s) \equiv A \in \mathbb{Q}.$$

取 $x \in (r, s) \setminus \mathbb{Q}$, 则 $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) \neq A$. 不妨设 $f(x) < A$, 则对 $\forall y \in (f(x), A) \setminus \mathbb{Q}$, 由连续函数介值定理, @跟锦数学微信公众号

$$\exists x_1 \in (r, x) \setminus \mathbb{Q}, x_2 \in (x, s) \setminus \mathbb{Q}, \text{ s.t. } f(x_1) = y = f(x_2).$$

这与 $f: \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 是一一映射矛盾.

(2) 若 $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ 不是满射, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\exists r \in \mathbb{Q}, \text{ s.t. } \forall s \in \mathbb{Q}, f(s) \neq r. \quad (*)$$

取 $y_1, y_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, s.t. $y_1 < r < y_2$, 由 $f: \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 是一一映射知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x_1 \neq x_2, \text{ s.t. } f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2).$$

不妨设 $x_1 < x_2$, 则由连续函数介值定理, @跟锦数学微信公众号

$$\exists t \in (x_1, x_2), \text{ s.t. } f(t) = r.$$

由 (*) 知 $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow r = f(t) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. 这与 $r \in \mathbb{Q}$ 矛盾. 故有结论.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.3.3 P013思考题03

$f: X \rightarrow Y$ 是满射当且仅当对任意的真子集 $B \subset Y$, 有 $f(f^{-1}(B)) = B$.
张祖锦解.

(1) $\Rightarrow$: 由 @跟锦数学微信公众号

$$y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(B), \text{ s.t. } y = f(x) \Rightarrow y = f(x) \in B$$

知 $f(f^{-1}(B)) \subset B$. 另一方面, 由 $f: X \rightarrow Y$ 是满射知 @跟锦数学微信公众号

$$y \in B \Rightarrow \exists x \in X, \text{ s.t. } y = f(x) \Rightarrow x \in f^{-1}(B) \Rightarrow y = f(x) \in f(f^{-1}(B)).$$

故 $B \subset f(f^{-1}(B))$.

(2) $\Leftarrow$: 若 Y 是单点集, 则 $f: X \rightarrow Y$ 是满射. 若 Y 不是单点集, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} y \in Y &\Rightarrow \{y\} \subsetneq Y \Rightarrow \{y\} = f(f^{-1}(\{y\})) \\ &\Rightarrow f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(\{y\}) \Rightarrow y = f(x). \end{aligned}$$

故 $f: X \rightarrow Y$ 是满射.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.3.4 P013思考题04

设 $f: X \rightarrow Y$ 是满射, 则下述命题等价:

- (1) f 是一一映射;
- (2) 对任意的 $A, B \subset X$, 有 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;
- (3) 对满足 $A \cap B = \emptyset$ 的 $A, B \subset X$, 有 $f(A) \cap f(B) = \emptyset$;
- (4) 对任意的 $A \subset B \subset X$, 有 $f(B \setminus A) = f(B) \setminus f(A)$.

张祖锦解.

(1) (1) $\Rightarrow$ (2): 由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Rightarrow \exists x \in A \cap B, \text{ s.t. } y = f(x) \Rightarrow y \in f(A), y \in f(B) \\ &\Rightarrow y \in f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

知 $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. 另一方面, 由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} y \in f(A) \cap f(B) &\Rightarrow \exists x_1 \in A, x_2 \in B, \text{ s.t. } y = f(x_1) = f(x_2) \\ &\stackrel{**}{\Rightarrow} x_1 = x_2 \in A \cap B \Rightarrow y = f(x_1) \in f(A \cap B) \end{aligned}$$

知 $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

(2) (2) $\Rightarrow$ (3): 对 $A \cap B = \emptyset$, 有 $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$.

(3) (3) $\Rightarrow$ (4): 对 $\forall A \subset B \subset X$, $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, 而 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} f(A) \cap f(B \setminus A) &= f(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow f(B \setminus A) \subset [f(A)]^c \\ &\Rightarrow f(B \setminus A) \subset f(B) \setminus f(A). \end{aligned}$$

另一方面, 由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} y \in f(B) \setminus f(A) &\Rightarrow \exists x \in B, \text{ s.t. } y = f(x); \forall x' \in A, y \neq f(x') \\ &\Rightarrow x \in B \setminus A \Rightarrow y = f(x) \in f(B \setminus A) \end{aligned}$$

知 $f(B) \setminus f(A) \subset f(B \setminus A)$.

(4) (4) $\Rightarrow$ (1): 由 f 是满射知仅需用反证法证明 f 是单射. 事实上, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} &\exists x_1 \neq x_2, f(x_1) = f(x_2) \\ &\Rightarrow A = \{x_1\}, B = \{x_1, x_2\}, f(B \setminus A) = f(\{x_2\}) \neq \emptyset = f(B) \setminus f(A) \\ &\Rightarrow \text{矛盾, 故有结论.} \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

1.3.5 P014思考题05

设 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$. 若对任意的 $x \in X$, 必有 $g(f(x)) = x$, 则 f 是单射, g 是满射.

张祖锦解. 由 @跟锦数学微信公众号

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) = x_2$$

知 f 是单射. 又由 @跟锦数学微信公众号

$$\forall x \in X, \exists y = f(x) \in Y, \text{ s.t. } x = g \circ f(x) = g(y)$$

知 g 是满射. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.3.6 P017思考题01

设 $A_1 \subset A_2, B_1 \subset B_2$. 若 $A_1 \sim B_1, A_2 \sim B_2$, 试问: 是否有 @跟锦数学微信公众号

$$(A_2 \setminus A_1) \sim (B_2 \setminus B_1)?$$

张祖锦解. 不一定. 比如 @跟锦数学微信公众号

$$A_1 = \{2, 3, 4, \dots\} \subset A_2 = \{1, 2, 3, \dots\}, B_1 = \{3, 4, 5, \dots\} \subset B_2 = \{1, 2, 3, \dots\}, \\ A_1 \sim B_1, A_2 \sim B_2, \text{ 但 } A_2 \setminus A_1 = \{2\} \not\sim \{1, 2\} = B_2 \setminus B_1.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.3.7 P017思考题02

若 $(A \setminus B) \sim (B \setminus A)$, 则 $A \sim B$, 对吗?

张祖锦解. 对. 设 $\phi: A \setminus B \rightarrow B \setminus A$ 是一一映射, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\psi(x) = \begin{cases} x, & x \in A \cap B, \\ \phi(x), & x \in A \setminus B \end{cases}$$

是 A 到 B 的一一映射, 而 $A \sim B$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.3.8 P017思考题03

若 $A \subset B$ 且 $A \sim (A \cup C)$, 试证明 $B \sim (B \cup C)$.

张祖锦解. 由 $A \subset A \cup (C \setminus B) \subset A \cup C, A \sim A \cup C$ 及 Cantor-Bernstein 定理知 $A \sim A \cup (C \setminus B)$. 设 $\phi: A \rightarrow A \cup (C \setminus B)$ 是一一映射, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\psi(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \in A, \\ x, & x \in B \setminus A \end{cases}$$

是 B 到 $B \cup C$ 的一一映射, 而 $B \sim B \cup C$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.3.9 P023思考题04

对于平面上的直线 $3y - 2x = 5$ 来说, 它具有下述性质: 若 $x \in \mathbb{Q}$, 则 $y \in \mathbb{Q}$. 试问: 具有这种性质的直线在平面上有多少?

张祖锦解. 设直线 $l: ax + by + c = 0$.

(1) 若 $b = 0$, 则 l 不具有题中性质.

(2) 若 $b \neq 0$, 则不妨设 $l: y = dx + e$, 而 @跟锦数学微信公众号

$$x = 0 \Rightarrow y = e \in \mathbb{Q}, x = 1 \Rightarrow y = d + e \in \mathbb{Q} \Rightarrow d \in \mathbb{Q}.$$

故所论集合 $\sim \mathbb{Q}^2$, 级数为 $\aleph_0$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.3.10 P023思考题05

试问: 由自然数组成且公差亦为自然数的等差数列之全体形成的集合的基数是什么?

张祖锦解. 设题中集合为 A , 则 @跟锦数学微信公众号

$$A \ni \{a_n = a_1 + (n-1)d\}_{n=1}^{\infty} \sim \{(a_1, d); a_1, d \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2.$$

故 $\overline{A} = \aleph_0$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.3.11 P023思考题06

设 $f(x)$ 在 (a, b) 上可微, 且除可数集外, 有 $f'(x) = 0$, 试证明 $f(x) = c$ (常数).

张祖锦解. 对 $\forall a < c < d < b$, 往证 $f(c) = f(d)$, 而结论得证. 设除可数集 $A = \{a_k\}$ 外, $f'(x) = 0$. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 对 $x \in [c, d] \setminus A$, 由 $f'(x) = 0$ 知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists \delta_x > 0, \text{ s.t. } \forall 0 < |x' - x| < \delta_x, |f(x') - f(x)| < \varepsilon |x' - x|.$$

又由 f 在 a_k 处可微知 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \exists \delta'_{a_k} > 0, \text{ s.t. } \forall 0 < |y - x| < \delta'_{a_k}, \left| \frac{f(y) - f(a_k)}{y - a_k} - f'(a_k) \right| < \varepsilon \\ \Rightarrow |f(y) - f(a_k)| < (|f'(a_k)| + \varepsilon) |y - a_k|. \end{aligned}$$

取 $\delta_{a_k} = \min \left\{ \delta'_{a_k}, \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} (|f'(a_k)| + 1) \right\} > 0$. 这就构造了 $[c, d]$ 一个开覆盖 @跟锦数学
微信公众号

$$\{(x - \delta_x, x + \delta_x)\}_{x \in [c, d]}.$$

由有限覆盖定理, $[c, d] \subset \bigcup_{i=1}^m (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i})$. 不妨设 @跟锦数学微信公众号

$$c = y_0 \leq x_1 < y_1 < x_2 < \cdots < y_{m-1} < x_m \leq y_m = d,$$

$$\{y_{i-1}, y_i\} \subset (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}).$$

我们分两种情况估计 $|f(y_{i-1}) - f(y_i)|$.

(1) $x_i = a_{k_i} \in A$ 时, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} |f(y_{i-1}) - f(y_i)| &\leq |f(y_{i-1}) - f(a_{k_i})| + |f(a_{k_i}) - f(y_i)| \\ &\leq [|f'(a_{k_i})| + \varepsilon] (a_{k_i} - y_{i-1}) + [|f'(a_{k_i})| + \varepsilon] (y_i - a_{k_i}) \\ &= [|f'(a_{k_i})| + \varepsilon] (y_i - y_{i-1}) < [|f'(a_{k_i})| + \varepsilon] \delta_{a_{k_i}} \\ &< [|f'(a_{k_i})| + \varepsilon] \frac{\varepsilon}{2^k [|f'(a_{k_i})| + \varepsilon]} = \frac{\varepsilon}{2^k}. \end{aligned}$$

(2) $x_i \notin A$ 时, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} |f(y_{i-1}) - f(y_i)| &\leq |f(y_{i-1}) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y_i)| \\ &< \varepsilon(x_i - y_{i-1}) + \varepsilon(y_i - x_i) = \varepsilon(y_i - y_{i-1}). \end{aligned}$$

故 @跟锦数学微信公众号

$$|f(c) - f(d)| \leq \sum_{i=1}^m |f(y_i) - f(y_{i-1})| \leq \sum_{x_i \in A} \frac{\varepsilon}{2^k} + \sum_{x_i \notin A} \varepsilon(y_i - y_{i-1}) < \varepsilon + \varepsilon(b - a).$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 即知 $f(c) = f(d)$. 以上是数学分析的证明, 等你学到第 5 章后会发现, 这其实是习题 5.20 的直接推论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.3.12 P023思考题07

试问: 是否存在满足 @跟锦数学微信公众号

$$f(x) = \begin{cases} \text{无理数}, & x \text{ 是有理数}, \\ \text{有理数}, & x \text{ 是无理数} \end{cases}$$

的函数 $f \in C(\mathbb{R})$?

张祖锦解. 不存在. 用反证法. 若存在满足题意的连续函数 f , 则 f 不是常数.

(1) 由连续函数介值定理知 $f(\mathbb{R})$ 是一个区间, 基数为 $\aleph$.

(2) 另一方面, $f(\mathbb{R}) = f(Q) \cup f(\mathbb{R} \setminus Q) \subset f(Q) \cup Q$, 作为可数集的像 $f(Q)$ 与可数集 Q 的并, 是可数的, 基数为 $\aleph_0$.

上述得到的两条结论矛盾, 故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.3.13 P023思考题08

设 $E \subset (0, 1)$ 是无限集. 若从 E 中共任意选取不同的数所组成的无穷正项级数总是收敛的, 试证明 E 是可数集.

张祖锦解.

(1) 设 $E_k = \left\{x \in E; x \geq \frac{1}{k}\right\}$, 往用反证法证明 E_k 有限. 事实上, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} E_k \text{ 无限} &\Rightarrow E_k \text{ 有一个可数子集 } \{x_1, x_2, \dots\} \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty, \text{ 与题设矛盾, 故有结论.} \end{aligned}$$

(2) 由 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 及第 1 步知 E 至多可数. 又由 E 无限知 E 可数.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.3.14 P024思考题09

试问: 直线上所有开区间的全体形成的集合的基数是什么?

张祖锦解. 所论集合为 @跟锦数学微信公众号

$$\mathcal{A} = \{(a, b); a, b \in \mathbb{R}, a < b\},$$

其与 @跟锦数学微信公众号

$$A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a < b\}$$

一一对应. 由 @跟锦数学微信公众号

$$\mathbb{R} \sim \{(a, a+1); a \in \mathbb{R}\} \subset A \subset \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$$

即知 $\mathcal{A}$ 的基数为 $\aleph$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.3.15 P024思考题10

设 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是不可数集, 试证明存在 $x_0 \in E$, 使得对于任意内含 x_0 的圆邻域 $B(x_0)$, 点集 $E \cap B(x_0)$ 为不可数集.

张祖锦解. 用反证法. 若不然, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} & \forall x \in E, \delta_x > 0, \text{ s.t. } E \cap B(x, \delta_x) \text{ 为可数集} \\ \Rightarrow E & \subset \bigcup_{x \in E} B(x, \delta_x) \xrightarrow{\text{Lindelöf}} E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, \delta_{x_i}) \\ \Rightarrow E & = \bigcup_{i=1}^{\infty} [E \cap B(x_i, \delta_{x_i})] \text{ 可数, 与题设矛盾, 故有结论.} \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.3.16 P024思考题11

设 $E \subset \mathbb{R}$, 且 $\overline{E} < c$, 试证明存在实数 a , 使得 @跟锦数学微信公众号

$$E + \{a\} = \{x + a; x \in E\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

张祖锦解. 由 @跟锦数学微信公众号

$$\mathbb{Q} - E = \{x - y; x \in \mathbb{Q}, y \in E\} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x - y; y \in E\}$$

及习题 1.12 的逆否命题知 $\mathbb{Q} - E$ 的基数 $< c$. 取 $a \notin \mathbb{Q} - E$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} & a \neq x - y, \forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in E \\ \Rightarrow & a + y \neq x, \forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in E \Rightarrow a + E \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.3.17 P024思考题12

试作由 0, 1 两个数组成的数列的全体 E 与 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 之间的一一映射.

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \rightarrow E \\ A & \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \text{ 其中 } x_n = \begin{cases} 1, & x_n \in A \\ 0, & x_n \notin A \end{cases}. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.3.18 P024思考题13

试问: 是否存在集合 E , 使得 $\mathcal{P}(E)$ 是可列集?

张祖锦解. 不存在. 事实上,

(1) 若 E 为有限集, 基数为 n , 则 $\mathcal{P}(E)$ 的基数为 2^n , $\mathcal{P}(E)$ 是有限集, 不是可列集.

(2) 若 E 为无限集, 则 E 有一个可列子集 S . 由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(S) \ni A &\mapsto (x_1, \dots, x_n, \dots), \text{ 其中 } x_n = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \\ &\mapsto 0.x_1 \cdots x_n \cdots \in \{[0, 1] \text{ 中的二进制小数} \}\end{aligned}$$

知 $\overline{\mathcal{P}(E)} \supseteq \overline{\mathcal{P}(S)} = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$, 而 $\mathcal{P}(E)$ 不是可数集.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

1.3.19 P024思考题14

试证明全体超越数 (即不是整系数方程 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ 的根) 的基数为 c . (你知道的超越数是什么?)

张祖锦解. 由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[x] &= \{0\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0; a_i \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0\} \\ &\sim \{0\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \times \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n \uparrow}\end{aligned}$$

知整系数多项式全体 $\mathbb{Z}[x]$ 是可列集. 设全体代数数为 A , 则 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}A &= \{z \in \mathbb{C}; \text{存在整系数多项式 } p(x), \text{ 以 } z \text{ 为根}\} \\ &= \bigcup_{p(x) \in \mathbb{Z}[x]} \{z \in \mathbb{C}; p(z) = 0\},\end{aligned}$$

作为可数个有限集的并, 是可数的. 又有理数 $r = \frac{m}{n} (m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0)$ 满足方程 $nx - m = 0$, 而 $A \supset \mathbb{Q}$, A 可列. 由 $\mathbb{R} = A \cup A^c$ 及习题 1.12 的逆否命题知超越数全体 A^c 的基数为 c . 超越数的例子为: π, e . 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

1.4 $\mathbb{R}^n$ 中点与点之间的距离 · 点集的极限点

1.4.1 P029思考题01

设 $E \subset \mathbb{R}$ 是不可数集, 则 $E' \neq \emptyset$.

张祖锦解. 用反证法. 若 $E' = \emptyset$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}x \in E \Rightarrow x \notin E' &\Rightarrow \exists \delta_x > 0, \text{ s.t. } B(x, \delta_x) \cap E \setminus \{x\} = \emptyset \\&\Rightarrow \exists \delta_x > 0, \text{ s.t. } E \cap B(x, \delta_x) = \{x\}.\end{aligned}$$

由 $E \subset \bigcup_{x \in E} B(x, \delta_x)$ 及 Lindeloff 定理知 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}E &\subset \bigcup_{i=1}^{m \leq \infty} B(x_i, \delta_{x_i}) \\&\Rightarrow E = \bigcup_{i=1}^{m \leq \infty} [E \cap B(x_i, \delta_{x_i})] = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x_i\} \text{ 是可数集, 与题设矛盾. 故有结论.}\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.4.2 P029思考题02

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 E' 是可数集, 则 E 是可数集.

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}x \in E \setminus E' &\Rightarrow x \in E, x \notin E' \Rightarrow x \in E, \exists \delta_x > 0, \text{ s.t. } B(x, \delta_x) \cap E \setminus \{x\} = \emptyset \\&\Rightarrow \exists \delta_x > 0, \text{ s.t. } E \cap B(x, \delta_x) = \{x\}.\end{aligned}$$

由 $E \setminus E' \subset \bigcup_{x \in E \setminus E'} B(x, \delta_x)$ 及 Lindeloff 定理知 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}E \setminus E' &\subset \bigcup_{i=1}^{m \leq \infty} B(x_i, \delta_{x_i}) \\&\Rightarrow E \setminus E' = \bigcup_{i=1}^{m \leq \infty} [(E \setminus E') \cap B(x_i, \delta_{x_i})] = \bigcup_{i=1}^{m \leq \infty} \{x_i\} \text{ 是可数集.}\end{aligned}$$

故 $E = (E \setminus E') \cup (E \cap E')$ 是可数集. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.4.3 P029思考题03

若 $E \subset (0, +\infty)$ 中的点不能以数值大小加以排列, 则 $E' \neq \emptyset$.

张祖锦解. 用反证法. 若 $E' = \emptyset$, 则由聚点定理及反证法知 $(n, n+1] \cap E$ 是有限集. 设为 $\{a_{n1}, \dots, a_{nt_n}\}$, 而 $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} ((n, n+1] \cap E)$ 可按数值大小加以排列为

④跟锦数学微信公众号

$$a_{01}, \dots, a_{0t_0}; a_{11}, \dots, a_{1t_1}; \dots; \{a_{n1}, \dots, a_{nt_n}\}; \dots.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.4.4 P029思考题04

设 $\{a_n\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的有界点列, 且有 ④跟锦数学微信公众号

$$|a_n - a_{n+1}| \geq 1 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

则 $\{a_n\}$ 也可能有无穷多个极限点.

张祖锦解. 设 $\{a_n\}$ 为 (从左往右, 从上往下) ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1} + \frac{1}{1}; \\ & \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + 3; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}; \\ & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 3; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 3, \frac{1}{4} + \frac{1}{4}; \dots; \\ & \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + 3, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 3, \frac{1}{4} + \frac{1}{3}; \dots; \\ & \frac{1}{i} + \frac{1}{n} + 3 \cdot (i \bmod 2) \quad (i = 1, 2, \dots, 2^n); \dots. \end{aligned}$$

则 $|a_n - a_{n+1}| \geq 3 - 1 - 1 \geq 1$. 由 ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{1} + \frac{1}{i} + 3 \right\}_{i=2}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} + 3, \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{i} \right\}_{i=2}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}, \\ & \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{i} + 3 \right\}_{i=3}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} + 3, \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{i} \right\}_{i=4}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4}, \dots \end{aligned}$$

知 $\{a_n\}$ 有无穷多个极限点. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.4.5 P029思考题05

若 $E \subset \mathbb{R}^2$ 中任意两点的距离均大于 1, 则 E 是可数集.

张祖锦解. 由题设, $\forall x \in E, E \cap B(x, 1) = \{x\}$. 而 ④跟锦数学微信公众号

$$E \subset \bigcup_{x \in E} B(x, 1) \xrightarrow{\text{Lindeloff}} E \subset \bigcup_{i=1}^{m \text{ 或 } \infty} B(x_i, 1) \Rightarrow E = \bigcup_{i=1}^{m \text{ 或 } \infty} [E \cap B(x_i, 1)] = \bigcup_{i=1}^{m \text{ 或 } \infty} \{x_i\}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.5 $\mathbb{R}^n$ 中的基本点集: 闭集 · 开集 · Borel 集 · Cantor 集

1.5.1 P032思考题01

设 $E \subset \mathbb{R}$ 是非空点集, 若 E 中任一子集皆为闭集, 试问 E 是有限集吗?

张祖锦解. 不一定. 比如 $E = \mathbb{N}$ 是孤立点集, $E' = \emptyset$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

1.5.2 P032思考题02

设 A, B 是 $\mathbb{R}$ 中共点集, 试问: 等式 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ 一定成立吗?

张祖锦解. 不一定. 比如 @跟锦数学微信公众号

$$A = (0, 1), B = (1, 2) \Rightarrow \overline{A \cap B} = \bar{\emptyset} = \emptyset \neq \{1\} = [0, 1] \cap [1, 2] = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

1.5.3 P032思考题03

设 $E_k \subset \mathbb{R}^n$ ($k = 1, 2, \dots$), 令 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. 若有 $x_0 \in E'$, 试问: 是否一定存在 E_{k_0} , 使得 $x_0 \in E'_{k_0}$?

张祖锦解. 不一定. 比如 $E_k = \left\{\frac{1}{k}\right\}$, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$, $0 \in E'$, 但 $\forall k \geq 1, 0 \notin E'_k$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

1.5.4 P032思考题04

设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 试证明 $\bar{E}$ 是包含 E 的一切闭集 F 之交: $\bar{E} = \bigcap_{F \supset E} F$.

张祖锦解. 对 $F \supset E$, $F = \bar{F} \supset \bar{E}$, 而 $\bar{E} \subset \bigcap_{F \supset E} F$. 又由闭 $\bar{E} \supset E$ 知 $\bigcap_{F \supset E} F \subset \bar{E}$.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

1.5.5 P032思考题05

设 $F \subset \mathbb{R}$ 是有界闭集, $f(x)$ 是定义在 F 上的 (实值) 函数. 若对任意的 $x_0 \in F'$, 具有 $f(x) \rightarrow +\infty$ ($x \in F$ 且 $x \rightarrow x_0$), 试证明 F 是可数集.

张祖锦解. 设 $F_n = \{x \in F; f(x) \leq n\}$, 则由 f 是实值函数知 $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. 往用反证法证明 F_n 是有限集, 而 F 是可数集. 事实上, 若 F_n 是无限集, 则由聚点定理,

张祖锦编著 微信公众账号: 跟锦数学/跟锦考研/小锦教学/数学考研锦囊/数学奥赛 微信: zhangzujin361

④跟锦数学微信公众号

$$\exists x_k \in F_n, x_0 \in F'_n \subset F', \text{ s.t. } \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$$
$$\stackrel{f(x_k) \leq n}{\Rightarrow} \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \leq n, \text{ 与题设矛盾, 故有结论.}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.5.6 P032思考题06

设 $f \in C(\mathbb{R})$, 试证明 $F = \{(x, y); f(x) \geq y\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集.

张祖锦解. 设 $F \ni (x_k, y_k) \rightarrow (x_0, y_0)$, 则 ④跟锦数学微信公众号

$$f(x_k) \geq y_k, x_k \rightarrow x_0, y_k \rightarrow y_0 \stackrel{k \rightarrow \infty}{\Rightarrow} f(x_0) \geq y_0 \Rightarrow (x_0, y_0) \in F.$$

故 F 是闭集. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.5.7 P032思考题07

试在 $\mathbb{R}$ 中作出可列个互不相交的稠密可列集.

张祖锦解. 设所有素数为 $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$, 作 $\mathbb{R}$ 的稠密可列集 ④跟锦数学微信公众号

$$D_k = \mathbb{Q} + \{\sqrt{p_k}\}, k = 1, 2, \dots,$$

则 $k \neq l \Rightarrow D_k \cap D_l = \emptyset$. 若不然, ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} D_k \cap D_l \neq \emptyset &\Rightarrow \exists r, s \in \mathbb{Q}, \text{ s.t. } r + \sqrt{p_k} = s + \sqrt{p_l} \Rightarrow r - s = \sqrt{p_l} - \sqrt{p_k} \\ &\Rightarrow (r - s)^2 = p_l + p_k - 2\sqrt{p_l p_k} \\ &\Rightarrow \mathbb{Q} \not\ni \sqrt{p_l p_k} = \frac{p_l + p_k - (r - s)^2}{2} \in \mathbb{Q}, \text{ 矛盾, 故有结论.} \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.5.8 P036思考题01

设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 试证明 $\bar{E} = (\overline{E^c})^c, \partial E = \bar{E} \setminus \mathring{E}$.

张祖锦解.

(1) 仅需证明 $E^{oc} = E^{c-}$. 事实上, ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x \in E^{oc} &\Leftrightarrow x \notin E^o \Leftrightarrow \forall \delta, B(x, \delta) \not\subset E \\ &\Leftrightarrow \forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap E^c \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in E^{c-}. \end{aligned}$$

(2) 由 $x \in E^- \Leftrightarrow \forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$ 知 ④跟锦数学微信公众号

$$x \in \partial E \Leftrightarrow \forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset, B(x, \delta) \cap E^c \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow x \in E^- \cap E^{c-} \stackrel{(1)}{=} E^- \cap E^{oc} = E^- \setminus E^{\circ}.$$

故 $\partial E = E^- \setminus E^{\circ}$.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.5.9 P036思考题02

试证明函数 ④跟锦数学微信公众号

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

的不连续点集不是闭集.

张祖锦解. 设 f 的不连续点集为 D , 则由 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y \neq 0}} x \sin \frac{1}{y} \stackrel{\text{无穷小} \cdot \text{有界}}{=} 0$ 知 $(0, 0) \notin D$.

对 $\forall x \neq 0$, 由 ④跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{\frac{1}{2n\pi}} = 0 \neq x = \lim_{n \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

知 $(x, 0) \in D$. 于是 $D \ni \left(\frac{1}{k}, 0\right) \rightarrow (0, 0) \notin D$, 而 D 不是闭集. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.5.10 P036思考题03

试证明 $G \subset \mathbb{R}^n$ 是开集当且仅当 $G \cap \partial G = \emptyset$; $F \subset \mathbb{R}^n$ 是闭集当且仅当 $\partial F \subset F$.

张祖锦解.

(1) 由 P36思考题 1 知 ④跟锦数学微信公众号

$$\partial E = \bar{E} \setminus \dot{E} = \bar{E} \cap E^{oc}$$

$$\Rightarrow G \cap \partial G = G \cap \bar{G} \cap G^{oc} = G \cap G^{oc}.$$

故 ④跟锦数学微信公众号

$$G \cap \partial G = \emptyset \Leftrightarrow G \cap G^{oc} = \emptyset \Leftrightarrow G \subset (G^{oc})^c = G^{\circ} \Leftrightarrow G \text{ 是开集.}$$

(2) ④跟锦数学微信公众号

$$F \text{ 是闭集} \Leftrightarrow F^c \text{ 是开集} \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} F^c \cap \partial F^c = \emptyset \stackrel{\partial F = \partial F^c}{\Leftrightarrow} F^c \cap \partial F = \emptyset \Leftrightarrow \partial F \subset F.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.5.11 P036思考题04

设 $G \subset \mathbb{R}^n$ 是非空开集, $r_0 > 0$. 若对任意的 $x \in G$, 作闭球 $\overline{B(x_0, r_0)}$, 试证明 $A = \bigcup_{x \in G} \overline{B(x, r)}$ 是开集.

张祖锦解. 只需证明 @跟锦数学微信公众号

$$a \in A \Leftrightarrow \exists x \in G, \text{ s.t. } a \in \overline{B(x, r_0)}$$

$$\stackrel{G \text{ 开}}{\Rightarrow} \exists \delta_x > 0, \text{ s.t. } B(x, \delta_x) \subset G, a \in \overline{B(x, r_0)} \Rightarrow B(a, \delta_x) \subset A.$$

最后一步是因为 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} a' \in B(a, \delta_x) &\Rightarrow |a' - a| < \delta_x \Rightarrow x' = a' + x - a \text{ 满足 } |x' - x| = |a' - a| < \delta \\ &\Rightarrow x' \in B(x, \delta_x) \subset G, |a' - x'| = |a - x| \leq r_0 \\ &\Rightarrow x' \in G, a' \in \overline{B(x', r_0)} \Rightarrow a' \in A. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.5.12 P036思考题05

设 $F \subset \mathbb{R}$ 是无限闭集, 试证明存在 F 中可数子集 E , 使得 $\bar{E} = F$.

张祖锦解. 设 $\mathcal{B} = \left\{ B\left(r, \frac{1}{k}\right); r \in \mathbb{Q}, k \geq 1 \right\}$, 若 $B\left(r, \frac{1}{k}\right) \cap F \neq \emptyset$, 则取 $x_{rk} \in B\left(r, \frac{1}{k}\right) \cap F$. 令 $E = \{x_{rk}; r \in \mathbb{Q}, k \geq 1\}$, 则 E 是 F 的可数子集, $\bar{E} \subset \bar{F} \subset F$. 又由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x \in F &\stackrel{\mathbb{Q}=\mathbb{R}}{\Rightarrow} \forall k \geq 1, B\left(x, \frac{1}{k}\right) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}, \text{ s.t. } r \in B\left(x, \frac{1}{k}\right) \cap \mathbb{Q} \\ &\stackrel{x_{rk} \in B\left(r, \frac{1}{k}\right) \cap F}{\Rightarrow} |x - x_{rk}| \leq |x - r| + |r - x_{rk}| < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k} \\ &\Rightarrow B\left(x, \frac{2}{k}\right) \cap E \neq \emptyset \end{aligned}$$

知 $F \subset \bar{E}$. 故 $F = \bar{E}$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.5.13 P036思考题06

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 中的每点都是 E 的孤立点, 试证明 E 是开集和闭集的交集.

张祖锦解. 由题设, @跟锦数学微信公众号

$$E = E \setminus E' = (E \cup E') \setminus E' = \bar{E} \setminus E' = \bar{E} \cap (E')^c.$$

故 E 是开集 $(E')^c$ 与闭集 $\bar{E}$ 的交集. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.5.14 P038思考题07

设在 $\mathbb{R}^n$ 中 $\{G_\alpha\}$ 是 E 的一个开覆盖, 试问 $\{\bar{G}_\alpha\}$ 能覆盖 $\bar{E}$ 吗?

张祖锦解. 不一定. 比如对 @跟锦数学微信公众号

$$E = \left\{ \frac{1}{k}; k = 1, 2, \dots \right\}, G_k = \left(\frac{1}{2k}, \frac{3}{2k} \right), k = 1, 2, \dots,$$

$$\bar{E} = \{0\} \cup E, \bar{G}_k = \left[\frac{1}{2k}, \frac{3}{2k} \right], k = 1, 2, \dots,$$

我们有 $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k, 0 \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{G}_k \Rightarrow \bar{E} \not\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{G}_k$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.5.15 P038思考题08

设 $\Gamma = \{[a_\alpha, b_\alpha]; \alpha \in [0, 1]\}$, 且 Γ 中的任意两个闭区间必相交, 试证明 @跟锦数学微信公众号

$$\bigcap_{\alpha \in [0, 1]} [a_\alpha, b_\alpha] \neq \emptyset.$$

张祖锦解. 固定 $\alpha_0 \in [0, 1]$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\alpha \in [0, 1] \Rightarrow [a_\alpha, b_\alpha] \cap [a_{\alpha_0}, b_{\alpha_0}] \neq \emptyset \xrightarrow{\text{且证}} a_\alpha \leq b_{\alpha_0}.$$

考虑 $A = \{a_\alpha; \alpha \in [0, 1]\}$, $\xi = \sup A$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\xi \in \bigcap_{\alpha \in [0, 1]} [a_\alpha, b_\alpha], \quad (*)$$

而结论得证. 往用反证法证明 (*). 若 $\xi \notin \bigcap_{\alpha \in [0, 1]} [a_\alpha, b_\alpha]$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\exists \beta \in [0, 1], \text{ s.t. } \xi \notin [a_\beta, b_\beta] \Rightarrow \xi < a_\beta \text{ 或 } \xi > b_\beta \xrightarrow{\xi = \sup A} \xi > b_\beta$$

$$\xrightarrow{\xi = \sup A} \exists \gamma \in [0, 1], \text{ s.t. } [a_\gamma, b_\gamma] \in \Gamma, \text{ s.t. } a_\gamma > \xi$$

$$\xrightarrow{a_\gamma > \xi > b_\beta} [a_\beta, b_\beta] \cap [a_\gamma, b_\gamma] = \emptyset, \text{ 与题设矛盾, 故有结论.}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.5.16 P038思考题09

设 $F \subset \mathbb{R}$ 是非空可数闭集, 试证明 F 必含有孤立点.

张祖锦解. 用反证法. 若 F 没有孤立点, 则 $F \setminus F' = \emptyset$ @跟锦数学微信公众号

$$\Rightarrow F = (F \cap F') \cup (F \setminus F') = F \cap F' \subset F' \xrightarrow{F \text{ 闭}} F' = F \Rightarrow F \text{ 是非空完全集.}$$

据书第 49 页注 1 知 F 的基数为 $\aleph$, 而与题设 F 可数矛盾. 故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.5.17 P038 思考题 10

设 $\{f_n(x)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的非负渐降连续函数列. 若有在闭集 F 上 $f_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 试证明 $f_n(x)$ 在 F 上一致收敛于零.

张祖锦解. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \forall x \in F$ 知对任意固定的 $\varepsilon > 0$, ①跟锦数学微信公众号

$$\forall x \in F, \exists n_x, \text{ s.t. } \forall n \geq n_x, 0 \leq f_n(x) < \varepsilon.$$

又由 $f_{n_x} \in C(F)$ 及局部保号性知 ②跟锦数学微信公众号

$$\exists \delta_x > 0, \text{ s.t. } \forall x' \in B(x, \delta_x), 0 \leq f_{n_x}(x') < \varepsilon.$$

由 $F \subset \bigcup_{x \in F} B(x, \delta_x)$ 及有限覆盖定理知 $F = \bigcup_{i=1}^m B(x_i, \delta_{x_i})$. 取 ③跟锦数学微信公众号

$$N = \max\{n_{x_1}, \dots, n_{x_m}\},$$

则 $\forall n \geq N, \forall x \in F$, ④跟锦数学微信公众号

$$\exists 1 \leq i \leq m, \text{ s.t. } x \in B(x_i, \delta_{x_i}) \Rightarrow 0 \leq f_n(x) \leq f_{n_{x_i}}(x) < \varepsilon.$$

这就证明了 $f_n \rightarrow 0$ 于 F . 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.5.18 P039 思考题 11

设 $F \subset \mathbb{R}$ 是闭集, 且 $f \in C(F)$, 则点集 $\{x \in F; f(x) = 0\}$ 是闭集.

张祖锦解. 设 $A = \{x \in F; f(x) = 0\}$, $A \ni x_n \rightarrow x_0$, 则 ⑤跟锦数学微信公众号

$$x_n \in F \xrightarrow{F \text{ 闭}} x_0 \in F, f(x_n) = 0 \xrightarrow{f \text{ 连续}} f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0.$$

故 $x_0 \in A$. 这就证明了 A 是闭集. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.5.19 P039 思考题 12

设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$, 且 $f \in C(E_1), f \in C(E_2)$.

(1) 若 E_1, E_2 皆是开集, 则 $f \in C(E_1 \cup E_2)$;

(2) 若 E_1, E_2 皆是闭集, 则 $f \in C(E_1 \cap E_2)$.

张祖锦解.

(1) 对 $f: E_1 \cup E_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x_0 \in E_1 \cup E_2$, 若 $x_0 \in E_1$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\exists \delta_1 > 0, \text{ s.t. } B(x_0, \delta_1) \subset E_1.$$

又由 $f: E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ 在 x_0 处连续知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists \delta \in (0, \delta_1), \text{ s.t. } \forall x \in B(x_0, \delta) \cap E_1, |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

于是 $B(x_0, \delta) \subset B(x_0, \delta_1) \subset E_1$, @跟锦数学微信公众号

$$\forall x \in (E_1 \cup E_2) \cap B(x_0, \delta) = (E_1 \cup E_2) \cap [B(x_0, \delta) \cap E_1] = B(x_0, \delta) \cap E_1,$$

$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. 这就证明了 $f: E_1 \cup E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ 在 x_0 处连续. 若 $x_0 \in E_2$, 则同理可证 $f: E_1 \cup E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ 在 x_0 处连续.

(2) 对 $f: E_1 \cap E_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in E_1 \cap E_2$. 由 $f: E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ 在 x_0 处连续知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists \delta_1 > 0, \text{ s.t. } \forall x \in B(x_0, \delta_1) \cap E_1, |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

又由 $f: E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ 在 x_0 处连续知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists \delta_2 > 0, \text{ s.t. } \forall x \in B(x_0, \delta_2) \cap E_2, |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\forall x \in (E_1 \cap E_2) \cap B(x_0, \delta) \subset [E_1 \cap B(x_0, \delta_1)] \cap [E_2 \cap B(x_0, \delta_2)],$$

$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. 这就证明了 $f: E_1 \cap E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ 在 x_0 处连续.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

1.5.20 P039思考题13

设 $E \subset \mathbb{R}$. 若每个 $f \in C(E)$ 都是有界函数, 则 E 是有界闭集; 若每个 $f \in C(E)$ 都在 E 上达到最大值, 则 E 是有界闭集.

张祖锦解.

(1) $f(x) = x, x \in E$ 是 E 上的连续函数, 而是有界函数. 故 @跟锦数学微信公众号

$$\exists M > 0, \text{ s.t. } \forall x \in E, |f(x)| = |x| \leq M.$$

这表明 E 有界. 往用反证法证明 E 是闭集. 事实上, ④跟锦数学微信公众号

$$E \text{ 不是闭集} \Rightarrow E' \not\subset E \Rightarrow \exists x_0 \in E', x_0 \notin E$$

$$\Rightarrow E \text{ 上的连续函数 } f(x) = \frac{1}{x - x_0}, x \in E \text{ 满足 } \lim_{E \ni x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \text{ 而无界.}$$

这与题设矛盾, 故有结论.

(2) $f(x) = x, x \in E$ 是 E 上的连续函数, 而达到最大值. 故 ④跟锦数学微信公众号

$$\exists x_0 \in E, \text{ s.t. } \forall x \in E, f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow x \leq x_0.$$

$f(x) = -x, x \in E$ 是 E 上的连续函数, 而达到最大值. 故 ④跟锦数学微信公众号

$$\exists x_1 \in E, \text{ s.t. } \forall x \in E, f(x) \leq f(x_1) \Rightarrow -x \leq -x_1 \Rightarrow x \geq x_1.$$

这表明 E 有界. 往用反证法证明 E 是闭集. 事实上, ④跟锦数学微信公众号

$$E \text{ 不是闭集} \Rightarrow E' \not\subset E \Rightarrow \exists x_0 \in E', x_0 \notin E$$

$$\Rightarrow E \text{ 上的连续函数 } f(x) = \frac{1}{x - x_0}, x \in E \text{ 满足 } \lim_{E \ni x \rightarrow x_0} f(x) = \infty,$$

而在 E 上没有最大值. 这与题设矛盾, 故有结论..

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.5.21 P039思考题14

设定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数 $f(x)$ 满足: 对 E 中的任一有界闭集 K , 均有 $f \in C(K)$, 则 $f \in C(E)$.

张祖锦解. 对 $\forall x_0 \in E$, 往用反证法证明 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 在 x_0 处连续. 若 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 在 x_0 处不连续, 则 ④跟锦数学微信公众号

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall k \geq 1, \exists x_k \in B\left(x_0, \frac{1}{k}\right) \cap E, |f(x_k) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0. \quad (*)$$

取 $K = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, 则 K 是 E 中的有界闭集. 由题设, $f \in C(K)$. 于是 ④跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \stackrel{f \in C(K)}{=} f(x_0), \text{ 与 } (*) \text{ 矛盾. 故有结论.}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.5.22 P039思考题15

设 $f \in C(\mathbb{R})$, 且当 $G \subset \mathbb{R}^1$ 是开集时, $f(G)$ 必是开集, 则 $f(x)$ 是严格单调函数. 张祖锦解.

- (1) $\forall a < b, f((a, b))$ 是开集, 而 f 在 $[a, b]$ 上的最值只能在端点处取得.
- (2) 不妨设 f 在 $[0, 1]$ 上的最大值在 $x = 1$ 处取得, 则最小值在 $x = 0$ 处取得, 且 $0 < x < 1 \Rightarrow f(0) < f(x) < f(1)$. 对 $0 < x < y < 1$, 在第 1 步中考虑 $a = x, b = 1$ 即知 $f(x) < f(y) < f(1)$. 故 f 在 $[0, 1]$ 上严 $\nearrow$.
- (3) $f(2) > f(1)$. 若不然 $(1, 2)$ 的值域不是开区间. 同第 2 步的论证知 f 在 $[1, 2]$ 上严 $\nearrow$.
- (4) $f(-1) < f(0)$. 若不然 $(-1, 1)$ 的值域不是开区间. 同理, f 在 $[-1, 0]$ 上严 $\nearrow$.
- (5) 如此一直做下去即知 f 在 $[n, n+1]$ 上严 $\nearrow$. 故 f 在 $\mathbb{R}$ 上严 $\nearrow$.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

1.5.23 P042思考题01

设 $f_n \in C([a, b])$ ($n = 1, 2, \dots$) 且存在极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), x \in [a, b]$, 则对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 点集 $\{x \in [a, b]; f(x) < t\}$ 是 F_σ 集.

张祖锦解.

- (1) 设 $E = \{x \in [a, b]; f(x) < t\}, E_{nk} = \left\{x \in [a, b]; f_n(x) \leq t - \frac{1}{k}\right\}$, 则 @跟锦数学
微信公众号

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} E_{nk}.$$

事实上, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x \in E &\Leftrightarrow f(x) < t \Leftrightarrow \exists k, \text{ s.t. } f(x) < t - \frac{1}{k} \Leftrightarrow \exists k, \text{ s.t. } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) < t - \frac{1}{k} \\ &\stackrel{\text{②144号}}{\Rightarrow} \exists k, \exists N, \text{ s.t. } \forall n \geq N, f_n(x) < t - \frac{1}{k} \left(\leq t - \frac{1}{k} \right) \Rightarrow x \in \text{右端}. \end{aligned}$$

另一方面, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x \in \text{右端} &\Rightarrow \exists k, \exists N, \forall n \geq N, f_n(x) \leq t - \frac{1}{k} \\ &\stackrel{n \rightarrow \infty}{\Rightarrow} \exists k, f(x) \leq t - \frac{1}{k} \Rightarrow f(x) < t \Rightarrow x \in E. \end{aligned}$$

(2) 由 $f_n \in C([a, b])$ 知 E_{nk} 是闭集, 而 $\bigcap_{n=N}^{\infty} E_{nk}$ 闭. 故 E 是可数个闭集之并, 为 F_{σ} 集.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.5.24 P042思考题02

设 $\{f_n(x)\}$ 是闭集 $F \subset \mathbb{R}$ 上的连续函数列, 则 $f_n(x)$ 在 F 上的收敛点集是 $F_{\sigma\delta}$ 集.

张祖锦解. 由 Cauchy 收敛准则知 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ 存在等价于 ④跟锦数学微信公众号

$$\forall k, \exists N, \forall m \geq N, \forall n \geq N, |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}.$$

故所论集合 ④跟锦数学微信公众号

$$D = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{m=N}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \left\{ x \in F; |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

由 f_n 连续知 $\left\{ x \in F; |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}$ 是闭集, 而 ④跟锦数学微信公众号

$$\bigcap_{m=N}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \left\{ x \in F; |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}$$

也是闭集. 进而 D 是 $F_{\sigma\delta}$ 集. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.5.25 P042思考题03

设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 则点集 $\left\{ x \in \mathbb{R}; \lim_{y \rightarrow x} f(y) \text{ 存在} \right\}$ 是 G_{δ} 集.

张祖锦解.

(1) 设 $\omega_{\delta}(x) = \sup_{0 < |y-x| < \delta} f(y) - \inf_{0 < |y-x| < \delta} f(y)$, 则 $\lim_{y \rightarrow x} f(y)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_{\delta}(x) = 0$.

(i) $\Rightarrow$: 若 $\lim_{y \rightarrow x} f(y)$ 存在, 则由 Cauchy 收敛准则, ④跟锦数学微信公众号

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t. } \forall y, y' \in B(x, \delta),$$

$$|f(y) - f(y')| < \varepsilon \Rightarrow f(y') - \varepsilon < f(y) < f(y') + \varepsilon.$$

关于 y' 取上确界, 关于 y 取下确界知 ④跟锦数学微信公众号

$$\sup_{0 < |y'-x| < \delta} f(y') - \varepsilon \leq \inf_{0 < |y-x| < \delta} f(y) \leq \sup_{0 < |y'-x| < \delta} f(y') + \varepsilon.$$

此即 $0 \leq \omega_{\delta}(x) \leq \varepsilon$. 这就证明了 $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_{\delta}(x) = 0$.

(ii) $\Leftarrow$: 若 $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_{\delta}(x) = 0$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t. } 0 \leq \omega_{\delta}(x) = \sup_{0 < |y-x| < \delta} f(y) - \inf_{0 < |y-x| < \delta} f(y) < \varepsilon.$$

故对 $\forall y, y' \in B(x, \delta), 0 \leq |f(y) - f(y')|$ @跟锦数学微信公众号

$$= \begin{cases} f(y) - f(y') \leq \sup_{0 < |y-x| < \delta} f(y) - \inf_{0 < |y-x| < \delta} f(y) < \varepsilon, & f(y) \geq f(y'), \\ f(y') - f(y) \leq \sup_{0 < |y-x| < \delta} f(y) - \inf_{0 < |y-x| < \delta} f(y) < \varepsilon, & f(y) < f(y'). \end{cases}$$

据 Cauchy 收敛准则即知 $\lim_{y \rightarrow x} f(y)$ 存在.

(2) 所论集合 @跟锦数学微信公众号

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}; \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_{\delta}(x) = 0 \right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k, G_k = \left\{ x \in \mathbb{R}; \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_{\delta}(x) < \frac{1}{k} \right\}.$$

往证 G_k 是开集, 而 C 是 G_{δ} 集. 事实上, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x \in G_k &\Rightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_{\delta}(x) < \frac{1}{k} \xRightarrow{\text{定义}} \exists \delta > 0, \text{ s.t. } 0 \leq \omega_{\delta}(x) < \frac{1}{k} \\ &\Rightarrow \forall y \in B(x, \delta), \lim_{\delta' \rightarrow 0} \omega_{\delta'}(y) = \inf_{\delta' > 0} \omega_{\delta'}(y) \leq \omega_{\min\{|x-y|, \delta-|x-y|\}}(y) \\ &\leq \omega_{\delta}(x) < \frac{1}{k} \quad \left(\min\{|x-y|, \delta-|x-y|\} \text{ 保证了 } \dot{B}(y) \subset \dot{B}(x) \right) \\ &\Rightarrow \forall y \in B(x, \delta), y \in G_k \Rightarrow B(x, \delta) \subset G_k. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.5.26 P045思考题04

(1) 定义在 $(0, 1)$ 上的函数 $\chi_Q(x)$ 不是连续函数列的极限;

(2) $[a, b]$ 上的导函数 $f'(x)$ 的连续点在 $[a, b]$ 中稠密.

张祖锦解.

(1) 用反证法. 若 $\chi_Q(x)$ 是连续函数列的极限, 则由书第 44 页例 15 知 $\chi_Q(x) =$

$$\begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

的不连续点集 D 为第一纲集. 这与 $D = \mathbb{R}$ 为第二纲集 (也用反证法, 若 $\mathbb{R}$ 为第一纲集, 则由 Baire 定理, $\mathbb{R}$ 无内点, 矛盾) 矛盾. 故有结论.

(2) 由 $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$ 知 $f'(x)$ 是连续函数列的极限, 而不连续点集 D 为第一纲集, 于是

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, E_k^c = \emptyset \\ \Rightarrow D^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k^c, E_k^c \text{ 是开集}, E_k^c = E_k^c \supset E^c = \emptyset^c = \mathbb{R}.$$

据书 44 页例 14 知 D^c 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 张祖锦数学).

1.8.27 TMA 思考题 03

设有 $\mathbb{R}$ 中的闭集 F 以及开集列 $\{G_k\}$, 若对每一个 k , $\overline{G_k \cap F} = F$, 则

$$\overline{G_0 \cap F} = F, G_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k.$$

张祖锦解: $F \cap \overline{G_0} \subset \overline{F \cap G_k} = F$. 另一方面, 由 $F = (F \cap G_0) \cup (F \setminus G_0)$ 知仅需验证 $F \setminus G_0 \subset \overline{F \cap G_0}$. 设 $t \in F \setminus G_0$, 对 $\forall \delta > 0$, 令 $I_\delta = (t - \delta, t + \delta)$, 只需验证 $F \cap G_0 \cap I_\delta \neq \emptyset$. 事实上,

$$\begin{aligned} & \exists x_1 \in F \cap G_1 \cap I_\delta \quad (\overline{F \cap G_1} = F) \\ & \Rightarrow \exists J_1 = [x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \subset G_1 \cap I_\delta \quad (0 < \delta_1 < 1, G_1 \cap I_\delta \text{ 是开集}) \\ & \Rightarrow \exists x_2 \in F \cap G_2, \text{ s.t. } x_2 \in F \cap G_2 \cap J_1 \quad (\overline{F \cap G_2} = F) \\ & \Rightarrow \exists J_2 = [x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2] \subset G_2 \cap J_1 \quad \left(0 < \delta_2 < \frac{1}{2}, G_2 \cap J_1 \text{ 是开集}\right) \\ & \Rightarrow \exists x_3 \in F \cap G_3, \text{ s.t. } x_3 \in F \cap G_3 \cap J_2 \quad (\overline{F \cap G_3} = F) \\ & \Rightarrow \dots, \end{aligned}$$

于是得到

$$x_n \in F \cap G_n \cap J_{n-1}, I_\delta \supset J_1 \supset J_2 \supset \dots, J_n \subset G_n, |J_n| = 2\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

由闭区间套定理, $\exists x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = G_0$. 再由 $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in F$ 知 $x_0 \in F \cap G_0 \cap I_\delta$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 张祖锦数学).

1.5.28 P045思考题06

设 $\{F_k\} \subset \mathbb{R}^n$ 是闭集列, 且 $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, 则 $\bigcup_{k=1}^{\infty} \overset{\circ}{F}_k$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密.

张祖锦解. 对 $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \delta > 0$, ④跟锦数学微信公众号

$$C_\delta := \overline{B(x_0, \delta)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (C_\delta \cap F_k).$$

由 $C_\delta \cap F_k$ 是闭集及 Baire 定理知 ④跟锦数学微信公众号

$\exists k_0$, s.t. $C_\delta \cap F_{k_0}$ 有内点 x_0

$$\Rightarrow x_0 \in (C_\delta \cap F_{k_0})^\circ \subset F_{k_0}^\circ \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \overset{\circ}{F}_k$$

$$\Rightarrow x_0 \in C_\delta \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} \overset{\circ}{F}_k.$$

证毕. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.5.29 P050思考题01

设 $E \subset \mathbb{R}$ 是非空完全集, 试证明对任意的 $x \in E$, 存在 $y \in E$, 使得 $x - y$ 为无理数.

张祖锦解. 由书第 49 页注 1 知 $\overline{E} = \mathbb{R}$. 用反证法证明题目. ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} & \exists x_0 \in E, \text{ s.t. } \forall y \in E, x_0 - y \in \mathbb{Q} \Rightarrow \forall y \in E, y - x_0 \in \mathbb{Q} \\ & \Rightarrow E \subset \{x_0\} + \mathbb{Q} \Rightarrow \overline{E} \leq \overline{\{x_0\} + \mathbb{Q}} = \mathbb{N}_0, \text{ 矛盾, 故有结论.} \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.5.30 P050思考题02

试证明 $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{13}$ 属于 Cantor 集.

张祖锦解. 由 $\frac{1}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2n}}, \frac{1}{13} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{3n}}$ 即知结论成立. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.5.31 P050思考题03

试作一个由无理数构成的完全集.

张祖锦解. 记 $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ 中的有理数为 $\{r_n\}$. 第一步, 舍去包含 r_1 的端点为无理数的中央开区间 (区间总长 $< \sqrt{3} - \sqrt{2}$). 第二步, 在余下的闭区间例以同样的步骤操作,

依次将 $\{r_n\}$ (如果在里面的话) 挖去. 记挖去的开区间的并为 G , 则 $[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \setminus G$ 即为所求. 事实上, G 包含了 $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ 中的所有有理数, 而 $[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \setminus G$ 中的元素都是无理数. 另一方面, $[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \setminus G$ 的构成区间没有公共的端点, 而 $[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \setminus G$ 是完全集. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.5.32 P050思考题04

试作一孤立点集 E , 使得 E' 是完全集.

张祖锦解. 设 E 为 Cantor 集的补集的全部构成区间的中点全体构成的集合, 则 E 是孤立点, 但 $E' = C$ 是完全集. 事实上, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x \in C &\Rightarrow \forall n, x \in F_n \Rightarrow \forall n, \exists 1 \leq k \leq 2^n, \text{ s.t. } x \in F_{nk} \\ &\Rightarrow \forall n, \exists 1 \leq k \leq 2^n, \text{ s.t. } F_{nk} \text{ 的中点 } x_{nk} \in E \\ &\Rightarrow \exists x_{nk} \in E, \text{ s.t. } |x_{nk} - x| \leq \frac{1}{3^n} \Rightarrow x \in E', \end{aligned}$$

@跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x \notin C &\Rightarrow x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \Rightarrow \exists k, \text{ s.t. } x \in I_k \\ &\Rightarrow \begin{cases} \text{若 } x \text{ 是 } I_k \text{ 的中点, 则 } I_k \cap E \setminus \{x\} = \emptyset \\ \text{若 } x \text{ 不是 } I_k \text{ 的中点, 则 } B(x, \min\{|x - c|, d(x, \partial I_k)\}) \cap E = \emptyset \end{cases} \\ &\Rightarrow x \notin E'. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.6 点集间的距离

1.6.1 P053思考题01

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个非空点集. 若对任意的 $x \notin E$, 存在 $y \in E$, 使得 $d(x, y) = d(x, E)$, 试证明 E 是闭集.

张祖锦解. 用反证法. 若 E 不是闭集, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \exists E \ni x_n \rightarrow x \notin E &\Rightarrow \begin{cases} d(x, E) = \inf_{n \geq 1} d(x, x_n) = 0 \\ \exists y \in E, \text{ s.t. } d(x, y) = d(x, E) \end{cases} \\ &\Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow E \ni y = x \notin E, \text{ 矛盾, 故有结论.} \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.6.2 P053思考题02

设 $G \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, F 是 G 内的有界闭集, 试证明存在 $r > 0$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\{x; d(x, F) \leq r\} \subset G.$$

张祖锦解. 由 @跟锦数学微信公众号

$$x \in F \Rightarrow x \in G \Rightarrow \exists \delta_x > 0, \text{ s.t. } B(x, \delta_x) \subset G$$

知 $F \subset \bigcup_{x \in F} B\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right)$. 由有限覆盖定理知 $F \subset \bigcup_{i=1}^m B\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right)$. 取 $r = \frac{1}{4} \min_{1 \leq i \leq m} \delta_{x_i} > 0$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\{x; d(x, F) \leq r\} \subset G.$$

事实上, @跟锦数学微信公众号

$$d(x, F) \leq r \Rightarrow d(x, F) < 2r \Rightarrow \exists y \in F, \text{ s.t. } d(x, y) < 2r$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \in F \subset \bigcup_{i=1}^m B\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right) \Rightarrow \exists 1 \leq i \leq m, \text{ s.t. } |y - x_i| < \frac{\delta_{x_i}}{2} \\ |x - x_i| \leq |x - y| + |y - x_i| < 2r + \frac{\delta_{x_i}}{2} < \delta_{x_i} \end{cases}$$
$$\Rightarrow x \in B(x_i, \delta_{x_i}) \subset G.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.6.3 P053思考题03

试问: 平面上的圆盘 $\{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$ 能表示为两个互不相交的非空闭集之并么?

张祖锦解. 不能. 若不然, 题中闭集 $F = F_1 \cup F_2$, 其中 F_i 是闭集, 且 $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. 由书第 51 页推论 1.26 知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists x_i \in F_i, \text{ s.t. } d(x_1, x_2) = d(F_1, F_2) > 0.$$

但连接 x_1, x_2 的线段 @跟锦数学微信公众号

$$[x_1, x_2] = \{(1-t)x_1 + tx_2; 0 \leq t \leq 1\} \subset F.$$

记 $t_0 = \sup \{t; (1-t)x_1 + tx_2 \in F_1\}$, 则由 F_1 闭知 @跟锦数学微信公众号

$$(1-t_0)x_1 + t_0x_2 \in F_1. \quad (*)$$

张祖锦编者 微信公众号: 跟锦数学/跟锦考研/小锦数学/数学考研锦囊/数学竞赛 微信: zhangzujin361

由 $x_2 \in F_2$ 知 $t_0 < 1$. 另一方面, 由 t_0 的定义, ①跟锦数学微信公众号

$$\forall t \in (t_0, 1], (1-t)x_1 + tx_2 \in F_2.$$

再由 F_2 闭知 $(1-t_0)x_1 + t_0x_2 \in F_2$, 这与 (*) 矛盾. 故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.6.4 P053 思考题04

试证明定义在区间 $(0, 1]$ 上的函数 $y = \sin \frac{1}{x}$ 不能延拓为 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数.

张祖锦解. 用反证法. 若 $y = \sin \frac{1}{x}$ 能延拓为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 g , 则 ①跟锦数学微信公众号

$$g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x}.$$

这与 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在矛盾, 故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7 P053 习题1

1.7.1 习题1.01

设 $\{f_j(x)\}$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数列, 试用点集 ①跟锦数学微信公众号

$$\left\{x; f_j(x) \geq \frac{1}{k}\right\} \quad (j, k = 1, 2, \dots)$$

表示点集 $\left\{x; \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} f_j(x) > 0\right\}$.

张祖锦解. ①跟锦数学微信公众号

$$\left\{x; \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} f_j(x) > 0\right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x; \inf_{l \geq 1} \sup_{j \geq l} f_j(x) > \frac{1}{k}\right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{j=l}^{\infty} \left\{x; f_j(x) > \frac{1}{k}\right\}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.2 习题1.02

设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $[a, b]$ 上的函数列, $E \subset [a, b]$, 且有 ①跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \chi_{[a, b] \setminus E}(x), x \in [a, b].$$

若令 ①跟锦数学微信公众号

$$E_n = \left\{x \in [a, b]; f_n(x) \geq \frac{1}{2}\right\},$$

试求集合 $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$.

张祖锦解. 由 跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \chi_{E^c}(x) = \begin{cases} 1, & x \in E^c, \\ 0, & x \in E \end{cases}$$

知 跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x \in E^c &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{ s.t. } \forall n \geq N, |f_n(x) - 1| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \exists N, \text{ s.t. } \forall n \geq N, f_n(x) > \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \exists N, \text{ s.t. } \forall n \geq N, x \in E_n \\ &\Rightarrow x \in \varliminf_{n \rightarrow \infty} E_n, \end{aligned}$$

跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x \in E &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists N, \text{ s.t. } \forall n \geq N, f_n(x) < \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \exists N, \text{ s.t. } \forall n \geq N, x \notin E_n \\ &\Rightarrow \exists N, \text{ s.t. } \forall n \geq N, x \in E_n^c \\ &\Rightarrow x \in \varliminf_{n \rightarrow \infty} E_n^c = \left(\overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} E_n} \right)^c. \end{aligned}$$

故 跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} E^c &\subset \varliminf_{n \rightarrow \infty} E_n, \\ E &\subset \left(\overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} E_n} \right)^c \Rightarrow \overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} E_n} \subset E^c. \end{aligned}$$

此即 跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} E^c &\subset \varliminf_{n \rightarrow \infty} E_n \subset \overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} E_n} \subset E^c \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} E_n = E^c = [a, b] \setminus E. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

张祖锦解. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.3 习题1.03

设有集合列 $\{A_n\}, \{B_n\}$, 试证明:

$$(1) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cup \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} B_n \right);$$

$$(2) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) = \left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cap \left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} B_n \right).$$

张祖锦解.

$$(1) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cup \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} B_n \right).$$

(i) 先证: $\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cup \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} B_n \right) \subset \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n)$. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} & A_k \subset A_k \cup B_k \quad (\forall k \geq n) \\ \Rightarrow & \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} (A_k \cup B_k) \\ \Rightarrow & \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} (A_k \cup B_k) \\ \Rightarrow & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n). \end{aligned}$$

同理, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} B_n \subset \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n)$. 故 @跟锦数学微信公众号

$$\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cup \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} B_n \right) \subset \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n).$$

(ii) 往证 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) \subset \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cup \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} B_n \right) \\ \Leftrightarrow & \left[\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cup \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} B_n \right) \right]^c \subset \left[\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) \right]^c \\ \Leftrightarrow & \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n^c \cap \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} B_n^c \subset \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n)^c \\ \Leftrightarrow & \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n^c \cap \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} B_n^c \subset \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (A_n^c \cap B_n^c). \end{aligned}$$

事实上, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} & x \in \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n^c \cap \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} B_n^c \\ \Rightarrow & \begin{cases} \exists N_1, \text{ s.t. } \forall n \geq N_1, x \in A_n^c \\ \exists N_2, \text{ s.t. } \forall n \geq N_2, x \in B_n^c \end{cases} \\ \Rightarrow & \exists N = \max \{N_1, N_2\}, \text{ s.t. } \forall n \geq N, x \in A_n^c \cap B_n^c \\ \Rightarrow & x \in \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (A_n^c \cap B_n^c). \end{aligned}$$

$$(2) \varliminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) = \left(\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cap \left(\varliminf_{n \rightarrow \infty} B_n \right). \quad \text{④跟锦数学微信公众号}$$

$$\begin{aligned} \varliminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) &= \left[\varlimsup_{n \rightarrow \infty} (A_n^c \cup B_n^c) \right]^c \\ &\stackrel{(1)}{=} \left[\varlimsup_{n \rightarrow \infty} A_n^c \cup \varlimsup_{n \rightarrow \infty} B_n^c \right]^c \\ &= \varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n \cap \varliminf_{n \rightarrow \infty} B_n. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

张祖锦解. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.4 习题1.04

设 $f: X \rightarrow Y, A \subset X, B \subset Y$, 试问: 下列等式成立吗?

$$(1) f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B);$$

$$(2) f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A).$$

张祖锦解.

(1) 成立. 事实上, ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(Y \setminus B) &\Leftrightarrow f(x) \in Y \setminus B \Leftrightarrow f(x) \notin B \\ &\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B). \end{aligned}$$

(2) 不成立. 比如对 ④跟锦数学微信公众号

$$X = Y = \{1, 2\}, A = \{1\}, f(1) = 1, f(2) = 1,$$

我们有 ④跟锦数学微信公众号

$$f(X \setminus A) = f(\{2\}) = \{1\} \neq \emptyset = \{1\} \setminus \{1\} = f(X) \setminus f(A).$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.5 习题1.05

试作开圆盘 $\{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}$ 与闭圆盘 $\{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$ 之间的一一对应.

张祖锦解. 设 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}, \\ E &= \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}, \\ C_k &= \left\{ (x, y); x^2 + y^2 = \frac{1}{k} \right\} \quad (k = 1, 2, \cdots). \end{aligned}$$

则 @跟锦数学微信公众号

$$C_k \sim C_{k+1} \quad (\forall k \geq 1).$$

而 @跟锦数学微信公众号

$$\{2, 3, \cdots\} \sim \{1, 2, \cdots\} \Rightarrow \bigcup_{k=2}^{\infty} C_k \sim \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k.$$

进而由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} D &= \bigcup_{k=2}^{\infty} C_k \cup \left(D \setminus \bigcup_{k=2}^{\infty} C_k \right) \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \parallel \\ E &= \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \cup \left(D \setminus \bigcup_{k=2}^{\infty} C_k \right) \end{aligned}$$

知 $D \sim E$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.6 习题1.06

设 $f(x)$ 在 (a, b) 上有界. 若 $f(x)$ 是保号的 (即当 $f(x_0) > (<) 0$ 时, 必有 $\delta_0 > 0$, 使得 $f(x) > (<) 0$ ($x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$)), 试证明 $f(x)$ 的不连续点集是可数的.

张祖锦解. 题目有误. 比如 $f(x) = D(x) + 1 = \chi_{\mathbb{Q}}(x) + 1, x \in \mathbb{R}$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.7 习题1.07

设 $f(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的实值函数, 且存在常数 M , 使得对于 $[0, 1]$ 中任意有限个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 均有 @跟锦数学微信公众号

$$|f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)| \leq M,$$

试证明集合 $E = \{x \in [0, 1]; f(x) \neq 0\}$ 是可数集.

张祖锦解. 设 @跟锦数学微信公众号

$$E_k = \left\{ x \in [0, 1]; f(x) > \frac{1}{k} \right\}, F_k = \left\{ x \in [0, 1]; f(x) < -\frac{1}{k} \right\}.$$

则 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. 为证题目, 仅需验证各 E_k, F_k 为有限集. 以 F_k 为有限集为例, 用反证法证之. @跟锦数学微信公众号

F_k 是无限集 $\Rightarrow F_k$ 有可数子集 $\{x_1, x_2, \dots\}$

$$\Rightarrow M \geq \left| \sum_{k=1}^n f(x_k) \right| = - \sum_{k=1}^n f(x_k) > n \cdot \frac{1}{k}$$

$\stackrel{n \rightarrow \infty}{\Rightarrow} M \geq +\infty$, 矛盾, 故有结论.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.8 习题1.08

设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值函数, 如果对于任意的 $x_0 \in \mathbb{R}$, 必存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) \geq f(x_0)$, 试证明集合 $E = \{y; y = f(x)\}$ 是可数集.

张祖锦解. 由 @跟锦数学微信公众号

$$y \in E \Rightarrow \exists x_y \in \mathbb{Q}, \text{ s.t. } y = f(x_y)$$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0, \text{ s.t. } \forall x_y - \delta < x' < x_y + \delta, f(x') \geq f(x)$$

$$\Rightarrow \exists r_y, s_y \in \mathbb{Q}, \text{ s.t. } x_y - \delta < r_y < x' < s_y < x_y + \delta, f(x') \geq f(x)$$

定义了 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \phi: E &\rightarrow \mathbb{Q}^2 \\ y &\mapsto (r_y, s_y). \end{aligned}$$

再由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} (r_y, s_y) = (r_z, s_z) &\Rightarrow \begin{cases} r_z = r_y < x_y < s_y = s_z \\ r_y = r_z < x_z < s_z = s_y \end{cases} \\ &\Rightarrow y = f(x_y) \geq f(x_z) = z, z = f(x_z) \geq f(x_y) = y \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

知 $\phi: E \rightarrow \mathbb{Q}^2$ 是单射, 而 $E \sim \phi(E) \subset \mathbb{Q}^2$. 这表明 E 可数. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.9 习题1.09

设 E 是三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的点集, 且 E 中任意两点的距离都是有理数, 试证明 E 是可数集.

张祖锦解. 设 $Q = \{r_n\}$. 取定 E 中三个点 x_0, y_0, z_0 , 则 ④跟锦数学微信公众号

$$B(x_0, r_k) \cap B(y_0, r_l) \cap B(z_0, r_m)$$

至多包含两个点, 是有限集, 记为 A_{klm} . 由 ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x \in E \setminus \{x_0, y_0, z_0\} &\Rightarrow |x - x_0|, |x - y_0|, |x - z_0| \in Q \\ &\Rightarrow \exists 0 < r_k, r_l, r_m \in Q, \text{ s.t. } x \in B(x_0, r_k), x \in B(y_0, r_l), x \in B(z_0, r_m) \\ &\Rightarrow \exists k, l, m \geq 1, \text{ s.t. } x \in A_{klm} \end{aligned}$$

知 $E \setminus \{x_0, y_0, z_0\} \in \bigcup_{k,l,m=1}^{\infty} A_{klm}$. 故 E 可数. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.10 习题1.10

设 E 是平面 $\mathbb{R}^2$ 中的可数集, 试证明存在互不相交的集合 A 与 B , 使得 $E = A \cup B$, 且任一平行于 x 轴的直线交 A 至多是有限个点, 任一平行于 y 轴的直线交 B 至多是有限个点.

张祖锦解. 设 $p_1(x, y) = x, p_2(x, y) = y$, 则 $p_1: E \rightarrow p_1(E)$ 是满射. 由 E 可数知 E 中点的横坐标全体 $p_1(E)$ 可数. 同理, E 中点的纵坐标全体 $p_2(E)$ 可数. 设 ④跟锦数学微信公众号

$$p_1(E) = \{x_1, x_2, \dots\}, p_2(E) = \{y_1, y_2, \dots\},$$

则 ④跟锦数学微信公众号

$$A = \{(x_i, y_j) \in E; i \leq j\}, B = \{(x_i, y_j); i > j\}$$

就符合题意. 事实上, ④跟锦数学微信公众号

$$\forall j, y_0 \neq y_j \Rightarrow \{(x, y); y = y_0\} \cap A = \emptyset,$$

$$\exists j, \text{ s.t. } y_0 = y_j \Rightarrow \{(x, y); y = y_j\} \cap A = \{(x_1, y_j), \dots, (x_j, y_j)\}.$$

这表明任一平行于 x 轴的直线交 A 至多是有限个点. 又由 ④跟锦数学微信公众号

$$\forall i, x_0 \neq x_i \Rightarrow \{(x, y); x = x_0\} \cap B = \emptyset,$$

$$\exists i, \text{ s.t. } x_0 = x_i \Rightarrow \{(x, y); x = x_i\} \cap B = \{(x_i, y_1), \dots, (x_i, y_{i-1})\}$$

知任一平行于 y 轴的直线交 B 至多是有限个点. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.13 习题1.13

设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的递增函数, 试证明点集 ④跟锦数学微信公众号

$$E = \{x; \text{对于任意的 } \varepsilon > 0, \text{ 有 } f(x + \varepsilon) - f(x - \varepsilon) > 0\}$$

是 $\mathbb{R}$ 中的闭集.

张祖锦解. 设 $x \in E'$, 则存在互异 $x_n \in E$, s.t. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. 对 $\forall \varepsilon > 0$, ④跟锦数学微信公众号

$$\exists N, \text{ s.t. } \forall n \geq N, |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又由 $x_N \in E$ 知 ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} f\left(x_N + \frac{\varepsilon}{2}\right) - f\left(x_N - \frac{\varepsilon}{2}\right) &> 0 \\ \Rightarrow f(x + \varepsilon) &\geq f\left(x_N + \frac{\varepsilon}{2}\right) > f\left(x_N - \frac{\varepsilon}{2}\right) \geq f(x - \varepsilon). \end{aligned}$$

故 $x \in E$. 这就证明了 $E' \subset E$, 而 E 是闭集. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.14 习题1.14

设 $F \subset \mathbb{R}^n$ 是有界集闭集, E 是 F 的一个无限子集, 试证明 $E' \cap F \neq \emptyset$. 反之, 若 $F \subset \mathbb{R}^n$, 且对于 F 的任一无限子集 E , 有 $E' \cap F \neq \emptyset$, 试证明 F 是有界闭集.

张祖锦解.

(1) 由聚点定理, $E' \neq \emptyset$, 再由 ④跟锦数学微信公众号

$$E' \cap F \supset E' \cap F' = E' \neq \emptyset$$

知 $E' \cap F \neq \emptyset$.

(2) (i) 先证 E 是闭集. 设 $x_0 \in F'$, 则存在互异 $F \ni x_n \rightarrow x_0$. 由 $E = \{x_1, x_2, \dots\}$ 是 F 的无限子集知 $E' \cap F \neq \emptyset$. 由 $E' = \{x_0\}$ 即知 $x_0 \in F$.

(ii) 再用反证法证明 F 有界. 若 F 无界, 则 F 无上界或无下界. 不妨设 F 无上界, 则 $\exists x_n \nearrow +\infty$. 于是 $E = \{x_1, x_2, \dots\}$ 是 F 的无限子集, 但 $E' = \emptyset$. 与题设矛盾. 故有结论.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.15 习题1.15

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是闭集, $r > 0$, 试证明点集 @跟锦数学微信公众号

$$E = \{t \in \mathbb{R}^n; \text{存在 } x \in F, \text{ 使得 } |t - x| = r\}$$

是闭集.

张祖锦解. 设 $t_0 \in E'$, 则存在互异 $E \ni t_n \rightarrow t_0$. 于是 @跟锦数学微信公众号

$$\exists M > 0, \text{ s.t. } \forall n \geq 1, |t_n| \leq M.$$

进而 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} t_n \in E &\Rightarrow \exists x_n \in F, \text{ s.t. } |t_n - x_n| = r \\ &\Rightarrow |x_n| \leq |x_n - t_n| + |t_n| \leq r + M \\ &\Rightarrow \{x_n\} \text{ 有界} \Rightarrow \exists n_k, x_0 \in F, \text{ s.t. } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \\ &\Rightarrow |x_0 - t_0| = \lim_{k \rightarrow \infty} |x_{n_k} - t_{n_k}| = r \Rightarrow t_0 \in E. \end{aligned}$$

这就证明了 $E' \subset E$. 而 E 是闭集. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.16 习题1.16

设 A, B 是 $\mathbb{R}$ 中的点集, 试证明 @跟锦数学微信公众号

$$(A \times B)' = (\bar{A} \times B') \cup (A' \times \bar{B}).$$

张祖锦解.

(1) 先证 @跟锦数学微信公众号

$$(A \times B) \setminus (C \times D) = [(A \setminus C) \times B] \cup [A \times (B \setminus D)].$$

事实上, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \times B) \setminus (C \times D) &\Leftrightarrow x \in A, y \in B; x \notin C \text{ 或 } y \notin D \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \setminus C) \times B \text{ 或 } (x, y) \in A \times (B \setminus D) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in [(A \setminus C) \times B] \cup [A \times (B \setminus D)]. \end{aligned}$$

(2) 再证题目. ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}
& (x, y) \in (A \times B)' \Leftrightarrow \forall \delta > 0, B((x, y), \delta) \cap (A \times B) \setminus \{(x, y)\} \neq \emptyset \\
& \Leftrightarrow \forall \delta > 0, [B(x, \delta) \times B(y, \delta)] \cap (A \times B) \setminus \{(x, y)\} \neq \emptyset \\
& \Leftrightarrow \forall \delta > 0, [B(x, \delta) \cap A] \times [B(y, \delta) \cap B] \setminus \{(x, y)\} \neq \emptyset \\
& \Leftrightarrow \forall \delta > 0, [B(x, \delta) \cap A \setminus \{x\}] \times [B(y, \delta) \cap B] \neq \emptyset \\
& \quad \text{或 } [B(x, \delta) \cap A] \times [B(y, \delta) \cap B \setminus \{y\}] \neq \emptyset \\
& \Leftrightarrow \forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset, B(y, \delta) \cap B \neq \emptyset \\
& \quad \text{或 } B(x, \delta) \cap A \neq \emptyset, B(y, \delta) \cap B \setminus \{y\} \neq \emptyset \\
& \Leftrightarrow x \in A', y \in \bar{B} \text{ 或 } x \in \bar{A}, y \in B' \Leftrightarrow (x, y) \in (\bar{A} \times B') \cup (A' \times \bar{B}).
\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.17 习题1.17

设 $E \subset \mathbb{R}^2$, 称 ④跟锦数学微信公众号

$$E_y = \{x \in \mathbb{R}; (x, y) \in E\}$$

为 E 在 $\mathbb{R}$ 上的投影 (集). 若 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是闭集, 试证明 E_y 也是闭集.

张祖锦解. 由 ④跟锦数学微信公众号

$$x \in E'_y \Rightarrow \exists \text{ 互异 } E_y \ni x_n \rightarrow x \Rightarrow E \ni (x_n, y) \rightarrow (x, y) \xrightarrow{E \text{ 闭}} (x, y) \in E \Rightarrow x \in E_y$$

知 $E'_y \subset E_y$, 而 E_y 是闭集. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.18 习题1.18

设 $f \in C(\mathbb{R})$, $\{F_k\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的递减紧集列, 试证明 ④跟锦数学微信公众号

$$f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f(F_k).$$

张祖锦解. 由 ④跟锦数学微信公众号

$$\forall l \geq 1, \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \subset F_l \Rightarrow f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right) \subset f(F_l)$$

知 $f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right) \subset \bigcap_{l=1}^{\infty} f(F_l)$. 另一方面, ④跟锦数学微信公众号

$$y_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} f(F_k) \Rightarrow \forall k, y_0 \in f(F_k) \Rightarrow \forall k, \exists x_k \in F_k, \text{ s.t. } y_0 = f(x_k)$$

$$\Rightarrow \exists k_j, x_0 \in F_1, \text{ s.t. } \lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j} = x_0$$

$$\Rightarrow x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k, y_0 = \lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{k_j}) = f(x_0)$$

$$(\forall J \geq 1, j \geq J \Rightarrow x_{k_j} \in F_{k_j} \Rightarrow x_0 \in F_{k_j})$$

$$\Rightarrow y_0 \in f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right).$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.19 习题1.19

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有介值性. 若对任意的 $r \in \mathbb{Q}$, 点集 $\{x \in \mathbb{R}; f(x) = r\}$ 必为闭集, 试证明 $f \in C(\mathbb{R})$.

张祖锦解.

(1) 由题设, $\forall r \in \mathbb{Q}$, ④跟锦数学微信公众号

$$G = G_1 \cup G_2 = \{x \in \mathbb{R}; f(x) > r\} \cup \{x \in \mathbb{R}; f(x) < r\}$$

是开集. 对 $\forall x \in G_1, x \in G$, 而 ④跟锦数学微信公众号

$$\exists \delta > 0, \text{ s.t. } B(x, \delta) \subset G.$$

往用反证法证明 $B(x, \delta) \subset G_1$. 若不然, ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} B(x, \delta) \not\subset G_1 &\Rightarrow \exists y \in B(x, \delta), \text{ s.t. } y \notin G_1 \Rightarrow y \in B(x, \delta), y \in G_2 \\ &\Rightarrow f(y) < r < f(x) \Rightarrow \exists \min\{x, y\} < z < \max\{x, y\}, \text{ s.t. } f(z) = r \\ &\Rightarrow z \in B(x, \delta), z \notin G, \text{ 矛盾, 故有结论.} \end{aligned}$$

这就证明了 G_1 是开集. 同理, G_2 也是开集.

(2) 对 $\forall c \in \mathbb{R}$, ④跟锦数学微信公众号

$$\{x \in \mathbb{R}; f(x) > c\} = \bigcup_{\mathbb{Q} \ni r > c} \{x \in \mathbb{R}; f(x) > r\},$$

$$\{x \in \mathbb{R}; f(x) < c\} = \bigcup_{\mathbb{Q} \ni r < c} \{x \in \mathbb{R}; f(x) < r\}$$

都是开集.

(3) 往证 $f \in C(\mathbb{R})$. 对 $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0$, 由第 2 步知 @跟锦数学微信公众号

$$O_+ = \{x \in \mathbb{R}; f(x) < f(x_0) + \varepsilon\}, O_- = \{x \in \mathbb{R}; f(x) > f(x_0) - \varepsilon\}$$

是开集, 而 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x \in O_+ &\Rightarrow x \in O_+ \cap O_- \Rightarrow \exists \delta > 0, \text{ s.t. } B(x, \delta) \subset O_+ \cap O_- \\ &\Rightarrow \forall x \in B(x_0, \delta), f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon. \end{aligned}$$

这就证明了 f 在 x_0 处连续.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.20 习题1.20

设 E_1, E_2 是 $\mathbb{R}$ 中的非空集, 且 $E'_2 \neq \emptyset$, 试证明 @跟锦数学微信公众号

$$\bar{E}_1 + E'_2 \subset (E_1 + E_2)'.$$

张祖锦解.

(1) 由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x \in E_1 + E'_2 &\Rightarrow \exists y \in E_1, z \in E'_2 \Rightarrow \text{存在互异 } E_2 \ni z_n \rightarrow z \\ &\Rightarrow \text{互异 } E_1 + E_2 \ni y + z_n \rightarrow y + z = x \Rightarrow x \in (E_1 + E_2)' \end{aligned}$$

知 $E_1 + E'_2 \subset (E_1 + E_2)'$.

(2) 对 $\forall y \in E'_2$, 由 $(E_1 + E_2)'$ 是闭集知 @跟锦数学微信公众号

$$E_1 + \{y\} \subset (E_1 + E_2)' \Rightarrow \bar{E}_1 + \{y\} = \overline{E_1 + \{y\}} \subset \overline{(E_1 + E_2)'} = (E_1 + E_2)'.$$

由 $y \in E'_2$ 的任意性即知 $\bar{E}_1 + E'_2 \subset (E_1 + E_2)'$.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.21 习题1.21

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 $E \neq \emptyset$, 且 $E \neq \mathbb{R}^n$, 试证明 E 的边界点集非空 (即 $\partial E \neq \emptyset$).

张祖锦解. 取 $x_0 \in E, x_1 \in E^c$. 令 @跟锦数学微信公众号

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{0 \leq t \leq 1; x(t) = (1-t)x_0 + tx_1 \in E\}, t_0 = \sup A.$$

则 $0 \in A, 1 \notin A$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} |x(s) - x(t)| &= |[x_0 + s(x_1 - x_0)] - [x_0 + t(x_1 - x_0)]| \\ &= |s - t| \cdot |x_1 - x_0|, \\ t \in A &\Leftrightarrow t \in [0, 1], x(t) \in E. \end{aligned}$$

往用反证法证明 $x(t_0) \in \partial E$. 设 $x(t_0) \notin \partial E$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x(t_0) \in E^\circ &\Rightarrow \begin{cases} x(t_0) \in E \Rightarrow t_0 < 1 \\ \exists \delta > 0, \text{ s.t. } U(x(t_0), \delta) \subset E \end{cases} \\ &\Rightarrow U\left(t_0; \frac{\delta}{|x_1 - x_0|}\right) \cap [0, 1] \subset A \\ &\quad \left(|t - t_0| < \frac{\delta}{|x_1 - x_0|} \Rightarrow |x(t) - x(t_0)| < \delta\right) \\ &\Rightarrow \text{矛盾}; \\ x(t_0) \in E^{\text{co}} &\Rightarrow \begin{cases} x(t_0) \in E^c \Rightarrow t_0 > 0 \\ \exists \delta > 0, \text{ s.t. } U(x(t_0), \delta) \subset E^c \end{cases} \\ &\Rightarrow U\left(t_0; \frac{\delta}{|x_1 - x_0|}\right) \cap [0, 1] \subset A^c \\ &\Rightarrow \text{矛盾}. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.22 习题1.22

设 G_1, G_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的互不相交的开集, 试证明 $G_1 \cap \bar{G}_2 = \emptyset$.

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$G_1 \cap G_2 = \emptyset \Rightarrow G_1 \subset G_2^c \Rightarrow G_1 = G_1^\circ \subset G_2^{\text{co}} = G_2^{-c} \Rightarrow G_1 \cap G_2^- = \emptyset.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.23 习题1.23

设 $G \subset \mathbb{R}^n$. 若对任意的 $E \subset \mathbb{R}^n$, 有 $G \cap \bar{E} \subset \overline{G \cap E}$, 试证明 G 是开集.

张祖锦解. 用反证法. 若 G 不是开集, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\exists x \in G, \forall \delta > 0, B(x, \delta) \not\subset G \Rightarrow \forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap G^c \neq \emptyset \Rightarrow \exists G^c \ni x_k \rightarrow x.$$

取 $E = \{x_1, x_2, \dots\}$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$G \cap \bar{E} = G \cap \{x_0, x_1, x_2, \dots\} = \{x\},$$

$$\overline{G \cap E} = \overline{G \cap \{x_1, x_2, \dots\}} = \bar{\emptyset} = \emptyset.$$

这与题设矛盾. 故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.24 习题1.24

设 a, b, c, d 是实数, 且 @跟锦数学微信公众号

$$P(x, y) = ax^2y^2 + bxy^2 + cxy + dy,$$

试问: 点集 $\{(x, y); P(x, y) = 0\}$ 有内点吗?

张祖锦解.

(1) 若 a, b, c, d 全为 0, 则所论集合 $E = \mathbb{R}^2$, 有内点.

(2) 若 a, b, c, d 不全为 0, 则用反证法证明 E 没有内点. 设 (x_0, y_0) 是 E 的内点
则 @跟锦数学微信公众号

$$\exists \delta > 0, \text{ s.t. } B(x_0, \delta) \times B(y_0, \delta) \subset E.$$

由 @跟锦数学微信公众号

$$ax^2 + b = 0 = cx + d \Leftrightarrow x \in \left\{0, -\frac{b}{a}\right\} \cap \left\{-\frac{d}{c}\right\}$$

知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists x_1 \in B(x_0, \delta), \text{ s.t. } ax_1^2 + bx_1, cx_1 + d \text{ 不全为 } 0.$$

于是 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \{x_1\} \times B(y_0, \delta) \subset E &\Rightarrow \forall y: |y - y_0| < \delta, (ax_1^2 + bx_1)y^2 + (cx_1 + d)y = 0 \\ &\Rightarrow \text{这与关于 } y \text{ 的次数 } \leq 2 \text{ 的多项式至多有 } 2 \text{ 个实根矛盾, 故有结论.} \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.25 习题1.25

设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 令 @跟锦数学微信公众号

$$G_1 = \{(x, y); y < f(x)\}, G_2 = \{(x, y); y > f(x)\},$$

试证明 $f \in C(\mathbb{R})$ 当且仅当 G_1 与 G_2 是开集.

张祖锦解.

(1) $\Rightarrow$: 仅需证明 $G_1^c = \{(x, y); y \geq f(x)\}$ 是闭集. 类似可证 G_2^c 是闭集. 事实上,

@跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} G_1^c \ni (x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0) &\Rightarrow y_n \geq f(x_n), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0 \\ \Rightarrow y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \stackrel{cn}{=} f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(x_0) \Rightarrow (x_0, y_0) \in G_1^c. \end{aligned}$$

(2) $\Leftarrow$: 由充分性假设, @跟锦数学微信公众号

$$G_1^c = \{(x, y); y \geq f(x)\}, G_2^c = \{(x, y); y \leq f(x)\}$$

都是闭集. 往用反证法证明 f 连续. 设 $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, @跟锦数学微信公众号

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \exists x_k \rightarrow x_0, \text{ s.t. } |f(x_k) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0.$$

由 @跟锦数学微信公众号

$$\mathbb{Z}_+ = \{k; f(x_k) \leq f(x_0) - \varepsilon_0\} \cup \{k; f(x_k) \geq f(x_0) + \varepsilon_0\}$$

知不妨设 $\{k; f(x_k) \leq f(x_0) - \varepsilon_0\}$ 是无限集 $\{x_{k_1}, x_{k_2}, \dots\}$. 于是 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} (x_{k_i}, f(x_0) - \varepsilon_0) \in G_1^c &\stackrel{G_1^c \text{ 闭}}{\Rightarrow} (x_0, f(x_0) - \varepsilon_0) \in G_1^c \\ \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon_0 &\geq f(x_0), \text{ 矛盾, 故有结论.} \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.26 习题1.26

试问: 由 $\mathbb{R}$ 中共的一切开集构成的集族的基数是什么?

张祖锦解. 设 $\mathbb{R}$ 中共一切开集构成的集族为 $\mathcal{O}$. 则由 @跟锦数学微信公众号

$$\mathcal{O} \supset \{(a, a+1); a \in \mathbb{R}\} \sim \mathbb{R}$$

知 $\overline{\mathcal{O}} \geq \aleph$. 另一方面, 由 $\mathbb{R}$ 中开集的构造知 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} O \in \mathcal{O} \Rightarrow O &= \bigcup_{i=1}^{m \text{ 或 } \infty} (a_i, b_i), \{(a_i, b_i)\}_{i=1}^m \text{ 或 } \infty \text{ 是互不相交的开区间} \\ \Rightarrow O &= \bigcup_{i=1}^{m \text{ 或 } \infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} (r_{ik}, s_{ik}) \quad (\mathbb{Q} \ni r_{ik} \searrow a_i, \mathbb{Q} \ni s_{ik} \nearrow b_i). \end{aligned}$$

于是有单射 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \ni O &\mapsto \left\{ (r_{ik}, s_{ik}) \in \mathbb{Q}^2; 1 \leq i, k < \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} r_{ik}, \lim_{k \rightarrow \infty} s_{ik} \text{ 存在} \right\} \\ &\in \mathcal{P}(\mathbb{Q}^2) \sim \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) \sim [0, 1]. \end{aligned}$$

故 $\overline{\mathcal{O}} \leq \aleph$. 综上即知 $\overline{\mathcal{O}} = \aleph$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.27 习题1.27

设 $\{F_\alpha\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一族有界闭集. 若任取其中有限个: $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \dots, F_{\alpha_n}$, 都有 $\bigcap_{i=1}^m F_{\alpha_i} \neq \emptyset$, 试证明: $\bigcap_{\alpha} F_{\alpha} \neq \emptyset$.

张祖锦解. 用反证法. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \bigcap_{\alpha} F_{\alpha} = \emptyset &\Rightarrow F_{\alpha_1} \subset \mathbb{R}^n = \bigcup_{\alpha} F_{\alpha}^c \Rightarrow F_{\alpha_1} \subset \bigcup_{i=2}^m F_{\alpha_i}^c = \left(\bigcap_{i=2}^m F_{\alpha_i} \right)^c \\ &\Rightarrow \bigcap_{i=1}^m F_{\alpha_i} = F_{\alpha_1} \cap \bigcap_{i=2}^m F_{\alpha_i} \subset \left(\bigcap_{i=2}^m F_{\alpha_i} \right)^c \cap \bigcap_{i=2}^m F_{\alpha_i} = \emptyset. \end{aligned}$$

这与题设矛盾. 故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

1.7.28 习题1.28

设 $\{F_\alpha\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, G 是开集, 且有 $\bigcap_{\alpha} F_{\alpha} \subset G$, 试证明 $\{F_\alpha\}$ 中存在有限个: $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \dots, F_{\alpha_n}$, 使得 $\bigcap_{i=1}^m F_{\alpha_i} \subset G$.

张祖锦解. 取定 α_1 , @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} F_{\alpha_1} \cap \bigcap_{\alpha \neq \alpha_1} F_{\alpha} &\subset G \\ \Rightarrow F_{\alpha_1} &= \left(F_{\alpha_1} \cap \bigcap_{\alpha \neq \alpha_1} F_{\alpha} \right) \cup \left(F_{\alpha_1} \setminus \bigcap_{\alpha \neq \alpha_1} F_{\alpha} \right) \subset G \cup \bigcup_{\alpha \neq \alpha_1} F_{\alpha}^c \\ \Rightarrow F_{\alpha_1} &\subset G \cup \bigcup_{i=2}^m F_{\alpha_i}^c = G \cup \left(\bigcap_{i=2}^m F_{\alpha_i} \right)^c \\ \Rightarrow \bigcap_{i=1}^m F_{\alpha_i} &= F_{\alpha_1} \cap \bigcap_{i=2}^m F_{\alpha_i} \subset \left[G \cup \left(\bigcap_{i=2}^m F_{\alpha_i} \right)^c \right] \cap \bigcap_{i=2}^m F_{\alpha_i} = G \cap \bigcap_{i=2}^m F_{\alpha_i} \subset G. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

1.7.29 习题1.29

设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是有界闭集, $\{B_k\}$ 是 K 的开球覆盖, 试证明存在 $\varepsilon > 0$, 使得以 K 中任一点为中心, ε 为半径的球必含于 $\{B_k\}$ 中的一个.

张祖锦解. 题中的数 ε 称为开覆盖 $\{B_k\}$ 的 Lebesgue 数. 用反证法. 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in K$, s.t. $\forall k, B(x_\varepsilon, \varepsilon) \not\subset B_k$. 则 @跟锦数学微信公众号

$$\exists x_i \in K, \forall k, B\left(x_i, \frac{1}{i}\right) \not\subset B_k. \quad (*)$$

由 K 是有界闭集及聚点定理, @跟锦数学微信公众号

$$\exists \{i_j\}, x_0 \in K, \text{ s.t. } \lim_{j \rightarrow \infty} x_{i_j} = x_0.$$

又由 $x_0 \in K \subset \bigcup_k B_k$ 知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists k_0, \text{ s.t. } x_0 \in B_{k_0} = B(z_0, \delta).$$

取 $j \gg 1$ 使得 $\frac{1}{i_j} + |x_{i_j} - x_0| < \delta - |x_0 - z_0|$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x \in B\left(x_{i_j}, \frac{1}{i_j}\right) &\Rightarrow |x - x_{i_j}| < \frac{1}{i_j} \\ \Rightarrow |x - z_0| &\leq |x - x_{i_j}| + |x_{i_j} - x_0| + |x_0 - z_0| < \frac{1}{i_j} + |x_{i_j} - x_0| + |x_0 - z_0| < \delta \\ \Rightarrow x &\in B(z_0, \delta) = B_{k_0}. \end{aligned}$$

此即 $B\left(x_{i_j}, \frac{1}{i_j}\right) \subset B_{k_0}$. 这与 (*) 矛盾. 故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

1.7.30 习题1.30

设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的可微函数, 且对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 点集 $\{x \in \mathbb{R}; f'(x) = t\}$ 是闭集, 试证明 $f'(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

张祖锦解. 注意到导函数 $f'(x)$ 具有介值性, 而由习题 19 知结论成立. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

1.7.31 习题1.31

设 $f \in C(\mathbb{R})$. 若存在 $a > 0$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$|f(x) - f(y)| \geq a|x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

试证明 $R(f) = \mathbb{R}$.

张祖锦解. 由题设知 $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. 而 f 是单射. 于是 f 严格 $\nearrow$ 或严格 $\searrow$. 不妨设 f 严格 $\nearrow$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$y > x \Rightarrow f(y) > f(x) \Rightarrow f(y) - f(x) \geq a(y - x).$$

令 $y \rightarrow +\infty$ 或 $x \rightarrow -\infty$ 得 $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. 再由连续函数介值定理即知 $R(f) = \mathbb{R}$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

1.7.32 习题1.32

试证明 $\mathbb{R}$ 中可数稠密集不是 G_δ 集.

张祖锦解. 用反证法. 设 E 是 $\mathbb{R}$ 的可数稠密子集 $\{x_k\}$, 且 $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} O_k$, 其中 O_k 是开集, 则 ④跟锦数学微信公众号

$$\mathbb{R} = E \cup E^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_k\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} O_k^c.$$

由 $\{x_k\}$ 无内点, $O_k^{c-c} = O_k^{cc} = O_k^{-c} \stackrel{E=\mathbb{R}}{=} \mathbb{R}^c = \emptyset$ 知 $\mathbb{R}$ 是第一纲集. 这与 $\mathbb{R}$ 是第二纲集矛盾. 故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.33 习题1.33

设 $f \in C([a, b])$, 且在 $[a, b]$ 内的任一子区间上皆非常数. 若 $f(x)$ 的极值点在 $[a, b]$ 中稠密, 试证明点集 ④跟锦数学微信公众号

$$\{x \in [a, b]; f'(x) \text{ 不存在或 } f'(x) \text{ 在 } x \text{ 处不连续}\}$$

在 $[a, b]$ 上稠密.

张祖锦解. 用反证法. 若题中所论集合 E 在 $[a, b]$ 上不稠密, 则 ④跟锦数学微信公众号

$$\exists x \in (a, b), \exists \delta > 0, \text{ s.t. } B(x, \delta_x) \cap E = \emptyset \Rightarrow B(x, \delta) \subset E^c.$$

于是 ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} y \in B(x, \delta) &\Rightarrow f'(y) \text{ 存在且连续} \\ \Rightarrow f'(y) &= \lim_{\{f \text{ 的极值点}\} \ni z_n \rightarrow y} f'(z_n) = \lim_{\{f \text{ 的极值点}\} \ni z_n \rightarrow y} 0 = 0. \end{aligned}$$

故 f 在 $B(x, \delta)$ 上恒为常数. 与题设矛盾. 故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.34 习题1.34

试证明在 $[0, 1]$ 上不能定义如下的函数 $f(x)$: 在有理数上连续, 在无理数处不连续.

张祖锦解. 用反证法. 若存在满足题意的 f , 则 f 的连续点集为 $\mathbb{Q}$. 据书第 40 页例 11 知 $\mathbb{Q}$ 为 G_δ 集. 这与书第 43 页例 13 矛盾. 故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.35 习题1.35

试证明不存在满足下列条件的函数 $f(x, y)$:

- (1) $f(x, y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数;
- (2) 偏导数 $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上处处存在;
- (3) $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的任一点都不可微.

张祖锦解. 用反证法. 若存在满足题意的 f , 则由书第 44 页例 15 知 @跟锦数学微信公众号

$$f_x(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + \frac{1}{n}, y) - f(x, y)}{\frac{1}{n}}$$

的不连续点集 D_1 为第一纲集. 同理, f_y 的不连续点集 D_2 也是第一纲集. 故 $D = D_1 \cup D_2$ 还是第一纲集, 即 @跟锦数学微信公众号

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, E_k^{-\circ} = \emptyset.$$

故 @跟锦数学微信公众号

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ (若不然, 由 Baire 定理, $\mathbb{R}^2$ 无内点, 矛盾)
 $\Rightarrow \exists (x_0, y_0) \in D^c \Rightarrow f_x, f_y$ 在 (x_0, y_0) 处连续
 $\Rightarrow f$ 在 (x_0, y_0) 处可微, 与题设矛盾. 故有结论.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.36 习题1.36

设 $E \subset \mathbb{R}$ 是非空可数集. 若 E 无孤立点, 试证明 $\bar{E} \setminus E$ 在 $\bar{E}$ 中稠密.

张祖锦解.

- (1) 由 E 没有孤立点知 $E \subset E'$, $\bar{E} = E \cup E' = E'$. 而仅需证明 $E' \setminus E$ 在 E' 中稠密.
- (2) 进步一步, $E \subset E' \Rightarrow E' \subset E''$. 另一方面, E' 是闭集 $\Rightarrow E'' \subset E'$. 故 $E'' = E'$, E' 是完全集. 由 $\emptyset \neq E \subset E'$ 及书第 49 页注 1 知 E' 的基数为 c .
- (3) 由 E' 是完全及知可设 @跟锦数学微信公众号

$$E'^c = \bigcup_{i=1}^{m \text{ 或 } \infty} (a_i, b_i),$$

且这些区间没有公共的端点. 对 $\forall x \in E', \forall \delta > 0$, 写出 @跟锦数学微信公众号

$$F' = ([x - \delta, x + \delta] \cap (E' \setminus E)) \cup ([x - \delta, x + \delta] \cap E). \quad (*)$$

分析 $[x - \delta, x + \delta] \cap E'$ 的补集知 $[x - \delta, x + \delta] \cap E'$ (减去 $\{x - \delta\}$, 如果 $x - \delta$ 等于某个 a_i ; 减去 $\{x + \delta\}$, 如果 $x + \delta$ 等于个某个 b_i) 是完全集, 具有基数 $\aleph$. 由 F' 可数及 (*) 知 @跟锦数学微信公众号

$$[x - \delta, x + \delta] \cap (E' \setminus E) \neq \emptyset.$$

这就证明了 $E' \setminus E$ 在 E' 中稠密.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.37 习题1.37

试证明 $\mathbb{R}^n$ 中任一闭集皆为 G_δ 集, 任一开集皆为 F_σ 集.

张祖锦解.

(1) 设 F 是闭集, 令 $G_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n; d(x, F) < \frac{1}{k} \right\}$, 则

(i) $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$. 事实上, 由 @跟锦数学微信公众号

$$x \in F \Rightarrow d(x, F) = 0 \Rightarrow x \in G_k \quad (\forall k \geq 1)$$

知 $F \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$. 又由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k &\Rightarrow \forall k, d(x, F) < \frac{1}{k} \Rightarrow \exists x_k \in F, \text{ s.t. } |x - x_k| < \frac{1}{k} \\ &\Rightarrow F \ni x_k \rightarrow x \Rightarrow x \in F \end{aligned}$$

知 $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \subset F$.

(ii) G_k 是开集. 事实上, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x \in G_k &\Rightarrow d(x, F) < \frac{1}{k} \Rightarrow \exists z \in F, \text{ s.t. } |x - z| < \frac{1}{k} \\ &\Rightarrow \exists \delta = \frac{1}{k} - |x - z| > 0, \text{ s.t. } \forall y \in B(x, \delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(y, F) &\leq |y - z| \leq |y - x| + |x - z| < \delta + |x - z| = \frac{1}{k} \\ &\Rightarrow B(x, \delta) \subset G_k. \end{aligned}$$

(2) 设 O 是开集, 则由第 1 步知 $O^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} O_k$, O_k 是开集, 而 @跟锦数学微信公众号

$$O = \bigcup_{k=1}^{\infty} O_k^c, O_k^c \text{ 是闭集} \Rightarrow O \text{ 是 } F_{\sigma} \text{ 集}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.38 习题1.38

设 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. 若点集 @跟锦数学微信公众号

$$G_f = \{(x, f(x)); x \in [0, 1]\}$$

是 $[0, 1] \times [0, 1]$ 中的闭集, 试证明 $f \in C([0, 1])$.

张祖锦解. 用反证法. 若 $f \notin C[0, 1]$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\exists x_0 \in [0, 1], \exists \varepsilon_0 > 0, \exists [0, 1] \ni x_k \rightarrow x_0, \text{ s.t. } |f(x_k) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0. \quad (*)$$

由 $f(x_k) \in [0, 1]$ 及聚点定理知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists k_j, l \in [0, 1], \text{ s.t. } \lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{k_j}) = l$$

$$\Rightarrow G_f \ni (x_{k_j}, f(x_{k_j})) \rightarrow (x_0, l) \xrightarrow{G_f \text{ 闭}} (x_0, l) \in G_f \Rightarrow l = f(x_0).$$

在 (*) 中取 $k = k_j$ 并令 $j \rightarrow \infty$ 得 @跟锦数学微信公众号

$$0 = |f(x_0) - f(x_0)| = \left| \lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{k_j}) - f(x_0) \right| = \lim_{j \rightarrow \infty} |f(x_{k_j}) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0.$$

这是一个矛盾. 故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.39 习题1.39

设 $F \subset \mathbb{R}$. 若对任意的 $f \in C(F)$, 必有在 $\mathbb{R}$ 上的连续延拓, 试证明 F 是闭集.

张祖锦解. 用反证法. 若 F 不是闭集, 则 $\exists F \ni x_n \rightarrow x_0 \notin F$. 由题设, F 上的连续函数 $f(x) = \frac{1}{|x - x_0|^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上有连续延拓 $g(x)$. 则 @跟锦数学微信公众号

$$g(x_0) \stackrel{\text{极限}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n - x_0|^2} = +\infty.$$

这是一个矛盾. 故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.40 习题1.40

设 $A, B \subset \mathbb{R}^n$, 且 $\bar{A} \cap B = \bar{B} \cap A = \emptyset$, 试证明存在开集 G_A, G_B : $G_A \cap G_B = \emptyset, G_A \supset A, G_B \supset B$.

张祖锦解.

(1) 先证 $d(x, E) = d(x, \bar{E})$. 事实上, 由下确界定义知 $d(x, E) \geq d(x, \bar{E})$. 另一方面, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists y \in \bar{E}, \text{ s.t. } |x - y| < d(x, \bar{E}) + \varepsilon \\ \Rightarrow E \ni y_n \rightarrow y \Rightarrow d(x, E) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |x - y_n| \leq |x - y| < d(x, \bar{E}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \searrow 0$ 即知 $d(x, E) \leq d(x, \bar{E})$.

(2) 设 @跟锦数学微信公众号

$$G_A = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, B) - d(x, A) > 0\}, G_B = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, A) - d(x, B) > 0\},$$

则由 $d(\cdot, A), d(\cdot, B)$ 一致连续知 G_A, G_B 都是开集, 且有定义知 $A \subset G_A, B \subset G_B$. 进一步, 由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x \in A \Rightarrow x \notin \bar{B} \Rightarrow d(x, \bar{B}) > 0 \\ \Rightarrow d(x, B) - d(x, A) = d(x, \bar{B}) - 0 > 0 \Rightarrow x \in G_A \end{aligned}$$

知 $A \subset G_A$. 同理, $B \subset G_B$.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

1.7.41 习题1.41

设 F_1, F_2, F_3 是 $\mathbb{R}^n$ 中三个互不相交的闭集, 试作 $f \in C(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$(1) 0 \leq f(x) \leq 1;$$

$$(2) f(x) = 0 \ (x \in F_1), f(x) = \frac{1}{2} \ (x \in F_2), f(x) = 1 \ (x \in F_3).$$

张祖锦解.

(1) 设 @跟锦数学微信公众号

$$f(x) = \frac{d(x, F_1 \cup F_2) + d(x, F_1 \cup F_3)}{d(x, F_1 \cup F_2) + 2d(x, F_1 \cup F_3) + d(x, F_2 \cup F_3)}, x \in \mathbb{R}^3.$$

则由 F_1, F_2, F_3 是互不相交的闭集知 f 的定义式中分母 > 0 . 事实上, 若 @跟锦数学微信公众号

$$d(x, F_1 \cup F_2) = d(x, F_1 \cup F_3) = d(x, F_2 \cup F_3) = 0,$$

则 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x \in (F_1 \cup F_2) \cap (F_1 \cup F_3) \cap (F_2 \cup F_3) &= [F_1 \cup (F_1 \cap F_3)] \cap (F_2 \cup F_3) \\ &= F_1 \cap (F_2 \cup F_3) = (F_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap F_3) = \emptyset, \text{ 矛盾, 故有结论.} \end{aligned}$$

(2) 由 $d(\cdot, E)$ 一致连续知 $f \in C(\mathbb{R}^n)$. 进一步, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x \in F_1 &\Rightarrow f(x) = 0; x \in F_2 \Rightarrow f(x) = \frac{d(x, F_1 \cup F_3)}{2d(x, F_1 \cup F_3)} = \frac{1}{2}, \\ x \in F_3 &\Rightarrow f(x) = \frac{d(x, F_1 \cup F_2)}{d(x, F_1 \cup F_3)} = 1. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2 Lebesgue 测度

2.1 点集的 Lebesgue 测度

2.1.1 P071思考题01

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 且 $m^*(A) = 0$, 试证明对任意的 $B \subset \mathbb{R}^n$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$m^*(A \cup B) = m^*(B) = m^*(B \setminus A).$$

张祖锦解. 由外测度的单调性知 @跟锦数学微信公众号

$$A \cup B \supset B \supset B \setminus A \Rightarrow m^*(A \cup B) \geq m^*(B) \geq m^*(B \setminus A).$$

又由外测度的次可数可加性知 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} m^*(A \cup B) &\leq m^*(A) + m^*(B) = m^*(B), \\ m^*(B) &= m^*((B \setminus A) \cup (B \cap A)) \leq m^*(B \setminus A) + m^*(B \cap A) \\ &\leq m^*(B \setminus A) + m^*(A) = m^*(B \setminus A). \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2.1.2 P071思考题02

设 $A, B \subset \mathbb{R}^n$, 且 $m^*(A), m^*(B) < +\infty$, 试证明 @跟锦数学微信公众号

$$|m^*(A) - m^*(B)| \leq m^*(A \Delta B).$$

张祖锦解. 由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} m^*A &\leq m^*(A \cup B) = m^*((A \cap B) \cup (A \Delta B)) \\ &\stackrel{\text{次可数可加}}{\leq} m^*(A \cap B) + m^*(A \Delta B) \leq m^*B + m^*(A \Delta B) \end{aligned}$$

知 $m^*A - m^*B \leq m^*(A \Delta B)$. 同理, $m^*B - m^*A \leq m^*(B \Delta A)$. 故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

2.1.3 P071思考题03

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若对任意的 $x \in E$, 存在开球 $B(x, \delta_x)$, 使得 $m^*(E \cap B(x, \delta_x)) = 0$, 试证明 $m^*(E) = 0$.

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} E &\subset \bigcup_{x \in E} B(x, \delta_x) \stackrel{\text{Lindeloff}}{\implies} E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, \delta_{x_i}) \\ \implies mE &= m\left(E \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, \delta_{x_i})\right) \stackrel{\text{次可数可加}}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} m(E \cap B(x_i, \delta_{x_i})) = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

2.2 可测集与测度

2.2.1 P078思考题01

设 $E \subset [0, 1]$. 若 $m(E) = 1$, 试证明 $\bar{E} = [0, 1]$; 若 $m(E) = 0$, 试证明 $\bar{E} = \emptyset$. 张祖锦解.

(1) 先证 $mE = 1 \Rightarrow \bar{E} = [0, 1]$. 首先, @跟锦数学微信公众号

$$E \subset [0, 1] \Rightarrow \bar{E} \subset [0, 1] \Rightarrow 1 = mE \leq m\bar{E} \leq 1 \Rightarrow m\bar{E} = 1.$$

往用反证法证明 $\bar{E} = [0, 1]$. 事实上, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \bar{E} \neq [0, 1] &\Rightarrow \bar{E} \subsetneq [0, 1] \Rightarrow \exists x \in [0, 1], \text{ s.t. } x \notin \bar{E} \Rightarrow x \in [0, 1] \cap \bar{E}^c \\ &\stackrel{E^c \text{ 是开集}}{\implies} \exists \delta \in (0, 1), \text{ s.t. } B(x, \delta) \subset \bar{E}^c. \end{aligned}$$

若 $x \in (0, 1)$, 则令 $\delta' = \min\{x, 1-x, \delta\} > 0$ 后有 ④跟锦数学微信公众号

$$B(x, \delta') \subset [0, 1] \cap \bar{E}^c \Rightarrow 2\delta' \leq m([0, 1] \cap \bar{E}^c) \xrightarrow{\text{Caratheodory}} 1 - m\bar{E} = 0, \text{ 矛盾.}$$

若 $x = 0$, 则 ④跟锦数学微信公众号

$$[0, 0 + \delta) \subset \bar{E}^c \Rightarrow \delta \leq m\bar{E}^c \xrightarrow{\text{Caratheodory}} 1 - m\bar{E} = 0, \text{ 矛盾.}$$

若 $x = 1$, 则 ④跟锦数学微信公众号

$$(1 - \delta, 1] \subset \bar{E}^c \Rightarrow \delta \leq m\bar{E}^c \xrightarrow{\text{Caratheodory}} 1 - m\bar{E} = 0, \text{ 矛盾.}$$

(2) 也用反证法证明 $mE = 0 \Rightarrow \dot{E} = \emptyset$. 事实上, ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \dot{E} \neq \emptyset &\Rightarrow \exists x \in \dot{E} \Rightarrow \exists \delta > 0, \text{ s.t. } B(x, \delta) \subset E \\ &\Rightarrow 2\delta \leq mE, \text{ 与 } mE = 0 \text{ 矛盾.} \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2.2.2 P078思考题02

设 $\{A_n\}$ 是互不相交的可测集列, $B_n \subset A_n (n = 1, 2, \dots)$, 试证明 $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(B_n)$.

张祖锦解.

(1) 先用数学归纳法证明 ④跟锦数学微信公众号

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n m^* B_k.$$

由 $B_1 \subset A_1, B_2 \subset A_2, A_1 \cap A_2 = \emptyset$ 知 ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} m(B_1 \cup B_2) &\xrightarrow{\text{Caratheodory}} m((B_1 \cup B_2) \cap A_1) + m((B_1 \cup B_2) \cap A_1^c) \\ &= mB_1 + mB_2. \end{aligned}$$

故当 $n = 2$ 时结论成立. 若当 $n = m$ 时结论成立, 则 ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_{i=1}^{m+1} B_i\right) &= m^*\left(\left(\bigcup_{i=1}^m B_i\right) \cap A_{m+1}\right) + m^*\left(\left(\bigcup_{i=1}^m B_i\right) \cap A_{m+1}^c\right) \\ &= m^* B_{m+1} + m^*\left(\bigcup_{i=1}^m B_i\right) \xrightarrow{\text{归纳}} m^* B_{m+1} + \sum_{i=1}^m m^* B_i = \sum_{i=1}^{m+1} m^* B_i. \end{aligned}$$

(2) 往证题目. @跟锦数学微信公众号

矛盾.

$$\begin{aligned} m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) &\geq m^* \left(\bigcup_{i=1}^k B_i \right) \stackrel{(1)}{=} \sum_{i=1}^k m^* B_i \quad (\forall k \geq 1) \\ \stackrel{k \rightarrow \infty}{\Rightarrow} m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} m^* B_i \stackrel{\text{次可数可加}}{\geq} m^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) \\ \Rightarrow m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} m^*(B_n). \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2.2.3 P078思考题03

设有点集 E_1, E_2 , 且 E_1 是可测集, 若 $m(E_1 \setminus E_2) = 0$, 试证明 E_2 是可测集, 且 $m(E_2) = m(E_1)$.

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} m(E_1 \Delta E_2) = 0 &\Rightarrow m(E_1 \setminus E_2) = 0 = m(E_2 \setminus E_1) \Rightarrow E_1 \setminus E_2 \in \mathcal{M}, E_2 \setminus E_1 \in \mathcal{M} \\ \Rightarrow E_1 \cap E_2 = E_1 \setminus (E_1 \setminus E_2) &\in \mathcal{M} \Rightarrow E_2 = (E_2 \cap E_1) \cup (E_2 \setminus E_1) \in \mathcal{M}. \end{aligned}$$

进一步, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} mE_2 &\stackrel{\text{可数可加}}{=} m(E_1 \cap E_2) + m(E_2 \setminus E_1) = m(E_1 \cap E_2) \\ &= m(E_1 \cap E_2) + m(E_1 \setminus E_2) \stackrel{\text{可数可加}}{=} mE_1. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2.2.4 P078思考题04

设点集 B 满足: 对于任给 $\varepsilon > 0$, 都存在可测集 A , 使得 $m^*(A \Delta B) < \varepsilon$, 试证明 B 是可测集.

张祖锦解.

(1) 由题设, 对 $\forall \varepsilon > 0$, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon, \exists A_i \in \mathcal{M}, \text{ s.t. } m^*(A_i \Delta B) &< \frac{\varepsilon}{2^i} \Rightarrow m^*(A_i \setminus B) < \frac{\varepsilon}{2^i}, m^*(B \setminus A_i) < \frac{\varepsilon}{2^i} \\ \Rightarrow \begin{cases} m^* \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \setminus B \right) \leq m^*(A_i \setminus B) < \frac{\varepsilon}{2^i} & (\forall i \geq 1) \\ m^* \left(B \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \right) = m^* \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (B \setminus A_j) \right) & \stackrel{\text{次可数可加}}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} m^*(B \setminus A_j) < \varepsilon \end{cases} \\ \Rightarrow m^* \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \setminus B \right) &= 0, m^* \left(B \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

令 $C_\varepsilon = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$, 则我们证明了 跟锦数学微信公众号

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon \in \mathcal{M}, \text{ s.t. } m^*(C_\varepsilon \setminus B) = 0, m^*(B \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon.$$

(2) 取 $\varepsilon = \frac{1}{k}$, 则 跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} & \exists C_k \in \mathcal{M}, \text{ s.t. } m^*(C_k \setminus B) = 0, m^*(B \setminus C_k) < \frac{1}{k} \\ \Rightarrow & \begin{cases} m^*\left(\bigcup_{l=1}^{\infty} C_l \setminus B\right) \stackrel{\text{次可数可加}}{\leq} \sum_{l=1}^{\infty} m^*(C_l \setminus B) = 0 \\ m^*\left(B \setminus \bigcup_{l=1}^{\infty} C_l\right) = m^*\left(\bigcap_{l=1}^{\infty} (B \setminus C_l)\right) \leq m^*(B \setminus C_k) < \frac{1}{k} \quad (\forall k \geq 1) \end{cases} \\ \Rightarrow & m^*\left(\bigcup_{l=1}^{\infty} C_l \setminus B\right) = 0 = m^*\left(B \setminus \bigcup_{l=1}^{\infty} C_l\right) \Rightarrow \bigcup_{l=1}^{\infty} C_l \setminus B \in \mathcal{M}, B \setminus \bigcup_{l=1}^{\infty} C_l \in \mathcal{M} \\ \Rightarrow & \bigcup_{l=1}^{\infty} C_l \cap B = \bigcup_{l=1}^{\infty} C_l \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{\infty} C_l \setminus B\right) \in \mathcal{M} \\ \Rightarrow & B = \left(\bigcup_{l=1}^{\infty} C_l \cap B\right) \cup \left(B \setminus \bigcup_{l=1}^{\infty} C_l\right) \in \mathcal{M}. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2.2.5 P078思考题05

设 $E \subset \mathbb{R}$, 且 $0 < \alpha < m(E)$, 试证明存在 E 中的有界闭集 F , 使得 $m(F) = \alpha$.

张祖锦解. 由习题 2.11 第 1 步测度的内正规性即知结论成立. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2.2.6 P078思考题06

设 $X = \{E_\alpha\}$ 是由 $\mathbb{R}$ 中某些互不相交的正测集形成的集族, 试证明 X 是可数的.
张祖锦解.

(1) 设 $X_{ki} = \left\{ E_\alpha \in X; m(E_\alpha \cap [-k, k]) \geq \frac{1}{i} \right\}$, 则 $\bigcup_{k,i=1}^{\infty} X_{ki} = X$. 事实上, 显然有

$\bigcup_{k,i=1}^{\infty} X_{ki} = X$. 反过来, ①跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} E_{\alpha} \in X &\Rightarrow mE_{\alpha} > 0 \\ &\Rightarrow 0 < mE_{\alpha} = m\left(\lim_{k \rightarrow \infty} (E_{\alpha} \cap [-k, k])\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_{\alpha} \cap [-k, k]) \\ &\xrightarrow{\text{保真性}} \exists k, \text{ s.t. } m(E_{\alpha} \cap [-k, k]) > 0 \\ &\Rightarrow \exists k, i, \text{ s.t. } m(E_{\alpha} \cap [-k, k]) > \frac{1}{i} \Rightarrow E_{\alpha} \in X_{ki}. \end{aligned}$$

(2) 断言: 每个 X_{ki} 有限. 用反证法. 若某个 X_{ki} 无限, 则有一个可数子集 $\{E_{\alpha_j}\}_{j=1}^{\infty}$, 由它们互不相交知 ①跟锦数学微信公众号

$$+\infty = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{i} \leq \sum_{j=1}^{\infty} mE_{\alpha_j} \xrightarrow{\text{可数可加}} m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{\alpha_j}\right) \leq m[-k, k] \leq 2k.$$

矛盾. 故有结论.

(3) 结合第 1,2 步即知 X 作为可数个有限集的并, 是可数的.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2.2.7 P078思考题07

设有 $\mathbb{R}$ 中共的可测集列 $\{E_k\}$, 且当 $k \geq k_0$ 时, $E_k \subset [a, b]$. 若存在 $\lim_{k \rightarrow \infty} E_k = E$, 试证明 $m(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k)$.

张祖锦解. 由书第 78 页第 2 行 (测度论中的 Fatou 引理) 及 $m\left(\bigcup_{k=k_0}^{\infty} E_k\right) \leq m[a, b] = b - a < \infty$ 知 ①跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} mE &= m\left(\lim_{k \rightarrow \infty} E_k\right) = m\left(\varliminf_{k \rightarrow \infty} E_k\right) \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} mE_k \\ &\leq \overline{\varliminf}_{k \rightarrow \infty} mE_k \leq m\left(\overline{\varliminf}_{k \rightarrow \infty} E_k\right) = m\left(\lim_{k \rightarrow \infty} E_k\right) = mE. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2.2.8 P078思考题08

设 $0 < \varepsilon_n < 1$ ($n = 1, 2, \dots$), 试证明 $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) 的充分必要条件是, 存在 $E_n \subset [0, 1]$, $m(E_n) = \varepsilon_n$ ($n = 1, 2, \dots$), 使得 ①跟锦数学微信公众号

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x) < +\infty, x \in [0, 1] \setminus Z, m(Z) = 0.$$

张祖锦解.

(1) $\Rightarrow$: 取 $E_n = (0, \varepsilon_n)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(0) = 0$, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} 0 < x < 1 \Rightarrow x > 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \Rightarrow \exists N, \text{ s.t. } \forall n \geq N, x > \varepsilon_n \\ &\Rightarrow \forall n \geq N, x \notin E_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x) = \sum_{n=1}^N \chi_{E_n}(x) \leq N < \infty. \end{aligned}$$

故 $\exists Z = \emptyset, mZ = 0$, s.t. $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x) < \infty, x \in [0, 1] \setminus Z$.

(2) $\Leftarrow$: 由 @跟锦数学微信公众号

$$x \in \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} E_n} \Rightarrow \text{存在无限多个 } n, \text{ 使得 } x \in E_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x) = +\infty \Rightarrow x \in Z$$

知 $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} E_n} \subset Z \Rightarrow m(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} E_n}) \leq mZ = 0$. 由书第 78 页第 2 行 (测度论中的 Fatou 引理) 及 $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq m[0, 1] = 1 < \infty$ 知 @跟锦数学微信公众号

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} mE_n} \leq m(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} E_n}) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

2.3 可测集与 Borel 集的关系

2.3.1 P084 思考题 01

设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 且 $m^*(E) < +\infty$. 若有 @跟锦数学微信公众号

$$m^*E = \sup \{m(F); F \subset E \text{ 是有界闭集}\},$$

试证明 E 是可测集.

张祖锦解.由题设, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}
 & \forall i \geq 1, \exists \text{ 有界闭集 } F_i \subset E, \text{ s.t. } m F_i > m^* E - \frac{1}{i} \\
 & \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \subset E, m \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \right) \geq m F_i > m^* E - \frac{1}{i}, \forall i \geq 1 \\
 & \xrightarrow{j \rightarrow \infty} m^* E \geq m \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \right) \geq m^* E \Rightarrow m^* E = m \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \right) \\
 & \Rightarrow m^* \left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \right) = 0 \quad \left(m^* E \xrightarrow{\text{Caratheodory}} m \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \right) + m^* \left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \right) \right) \\
 & \Rightarrow m^* \left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \right) = 0 \Rightarrow E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \in \mathcal{M} \Rightarrow E = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \cup \left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \right) \in \mathcal{M}.
 \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2.3.2 P084思考题02

设 $A \in \mathcal{M}, B \subset \mathbb{R}^n$, 试证明: @跟锦数学微信公众号

$$m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) = m^*(A) + m^*(B).$$

张祖锦解.张祖锦解.若 $m A = +\infty$, 则左端 $= +\infty =$ 右端. 若 $m A < +\infty$, 则
@跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}
 m^*(A \cup B) & \xrightarrow{\text{Caratheodory}} m^*((A \cup B) \cap A) + m^*((A \cup B) \cap A^c) \\
 & = m^* A + m(B \setminus A), \\
 m^* B & \xrightarrow{\text{Caratheodory}} m^*(B \cap A) + m^*(B \cap A^c) = m^*(A \cap B) + m^*(B \setminus A).
 \end{aligned}$$

移项即知 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}
 m^*(A \cup B) - m A & = m^* B - m^*(A \cap B) \\
 \Rightarrow m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) & = m^*(A) + m^*(B).
 \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2.3.3 P084思考题03

设 $f(x), g(x)$ 是 $[a, b]$ 上严格递减的连续函数, 且对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$m(\{x \in [a, b]; f(x) > t\}) = m(\{x \in [a, b]; g(x) > t\}),$$

试证明 $f(x) = g(x), x \in (a, b)$.

张祖锦解. 对 $\forall f(b) \leq t \leq f(a)$, 由 f 严格单调及连续函数介值定理, $f^{-1}(t)$ 就是一个点, 而 $@跟锦数学$ 微信公众号

$$\begin{aligned} m(\{x \in [a, b]; f(x) > t\}) &= m(\{x \in [a, b]; x < f^{-1}(t)\}) = f^{-1}(t) - a, \\ m(\{x \in [a, b]; g(x) > t\}) &= g^{-1}(t) - a \end{aligned}$$

及题设知 $f^{-1} = g^{-1} \Rightarrow f = (f^{-1})^{-1} = (g^{-1})^{-1} = g$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

2.4 正测度集与矩体的关系

2.4.1 P086思考题01

设 $E \subset \mathbb{R}$, 且 $m(E) > 0$, 试证明存在 $a > 0$, 使得 $(E + \{x\}) \cap E \neq \emptyset (|x| < a)$.

张祖锦解. 由 Steinhaus 定理, $@跟锦数学$ 微信公众号

$$\begin{aligned} \exists a > 0, \text{ s.t. } B(0, a) &\subset E - E \Rightarrow \forall x: |x| < a, \exists y, z \in E, \text{ s.t. } x = y - z \\ \Rightarrow \forall x: |x| < a, \exists y, z \in E, \text{ s.t. } x + z &= y = (E + \{x\}) \cap E \\ \Rightarrow \forall x: |x| < a, (E + \{x\}) \cap E &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

2.4.2 P086思考题02

设 $E \subset \mathbb{R}$ 是可测集, $a \in \mathbb{R}, \delta > 0$. 若对满足 $|x| < \delta$ 的一切 x , 均有 $a + x \in E$ 或 $a - x \in E$, 试证明 $m(E) \geq \delta$.

张祖锦解. 由题意, $@跟锦数学$ 微信公众号

$$\begin{aligned} \forall x: |x| < \delta, x \in E - \{a\} \text{ 或 } x \in \{a\} - E &\Rightarrow (-\delta, \delta) \subset (E - \{a\}) \cup (\{a\} - E) \\ \Rightarrow 2\delta &\stackrel{\text{次可数可加}}{\leq} m(E - \{a\}) + m(\{a\} - E) \stackrel{\text{平移不变}}{=} 2mE \Rightarrow mE \geq \delta. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

2.5 不可测集

2.5.1 P088思考题01

试问: 是否存在可测集 $E \subset [0, 1]$, 使得对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, 存在 $y \in E$, 有 $x - y \in \mathbb{Q}$?

张祖锦解.

(1) 先证明任一正测度集 E 都有不可测子集. 事实上, 由 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap [-n, n])$ 知不妨设 E 有界, 而 $\exists n_0$, s.t. $[-n_0, n_0]$, s.t. $E \subset [-n_0, n_0]$. 考虑 E 上的等价关系: 对 $x, y \in E$, $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$, 令等价类 $[x] = \{y \in E; y \sim x\}$, 商集 $E/\sim = \{[x]; x \in E\}$, 则 $\bigcup_{x \in E} [x] = E$. 由选择公理, 在 $E/\sim$ 的每个等价类中只取一个点构成集合 W , 则 $W \subset E$, 往用反证法证明 W 是不可测集. 由 $E - E \subset [-2n_0, 2n_0]$ 知设 $\mathbb{Q} \cap [-2n_0, 2n_0] = \{r_n\}$ 后, @跟锦数学微信公众号

$$k \neq l \Rightarrow (W + \{r_k\}) \cap (W + \{r_l\}) = \emptyset, \\ \bigcup_{n=1}^{\infty} (W + \{r_n\}) \subset [-3n_0, 3n_0], E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (W + \{r_n\}).$$

由 W 是可测集知 $W + \{r_n\}$ 均可测, @跟锦数学微信公众号

$$0 < mE \stackrel{\text{次可数可加}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} m(W + \{r_n\}) \\ \begin{cases} \stackrel{\text{可数可加}}{=} m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (W + \{r_n\})\right) \leq m[-3n_0, 3n_0] = 6n_0, \\ \stackrel{\text{平移不变}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} mW. \end{cases}$$

若 $mW > 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} mW \leq 6n_0$ 矛盾; 若 $mW = 0$, 则 $0 < mE \leq \sum_{n=1}^{\infty} mW = 0$, 又是矛盾. 故有结论.

(2) 取第 1 步中 $[0, 1]$ 的不可测集 W , 则 @跟锦数学微信公众号

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x - [x] \in [0, 1) \subset [0, 1] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (W + \{r_n\}) \quad ([x] \text{ 表示 Gauss 取整}) \\ \Rightarrow \exists y \in W, r_n \in \mathbb{Q}, \text{ s.t. } x - [x] = y + r_n \Rightarrow x - y = [x] + r_n \in \mathbb{Q}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2.5.2 P088思考题02

试作出互不相交的点集列 $\{E_k\}$, 使得 $m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) < \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$.

张祖锦解. 取 $(0, 1)$ 中的不可测集 W , $\mathbb{Q} \cap (0, 1) = \{r_n\}$, $E_n = W + \{r_n\}$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq m(0, 2) = 2, \sum_{k=1}^{\infty} m^*E_k \stackrel{\text{平移不变}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} m^*W = +\infty.$$

最后一个等号是因为 $m \cdot W > 0$ (若不然, $m \cdot W = 0 \Rightarrow W \in \mathcal{M}$). 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

2.5.3 P088思考题03

试在 $[0, 1]$ 中作一不可数集 W , 使得 $W - W$ 无内点.

张祖锦解. 考虑 $[0, 1]$ 上的等价关系: 对 $x, y \in [0, 1]$, $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$, 令等价类 $[x] = \{y \in [0, 1]; y \sim x\}$, 商集 $[0, 1]/\sim = \{[x]; x \in [0, 1]\}$, 则 $\bigcup_{x \in [0, 1]} [x] = [0, 1]$. 由选择公理, 在 $[0, 1]/\sim$ 的每个等价类中只取一个点构成集合 W , 则 $W \subset [0, 1]$ 不可测. 从而 W 不可数 (否则 W 可数, 是零测度集, 是可测集, 矛盾). 由 @跟锦数学微信公众账号

$$\begin{aligned} x, y \in W &\Rightarrow \begin{cases} x = y \Rightarrow 0 = x - y \in W - W \\ \text{或 } x \neq y \Leftrightarrow x - y \notin \mathbb{Q} \end{cases} \\ &\Rightarrow W - W \subset \mathbb{Q}^c \cup \{0\} \end{aligned}$$

即知 $W - W$ 无内点 (否则 $W - W$ 包含了区间, 而包含了有理数, 矛盾). 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

2.5.4 P088思考题04

设 W 是不可测集, E 是可测集, 试证明 $E \Delta W$ 是不可测集.

张祖锦解. 用反证法. @跟锦数学微信公众账号

$$\begin{aligned} E \Delta W \in \mathcal{M} &\Rightarrow E \cup W = E \cup (E \Delta W) \in \mathcal{M} \\ &\Rightarrow \begin{cases} E \cap W = (E \cup W) \setminus (E \Delta W) \in \mathcal{M} \\ W \setminus E = (E \cup W) \setminus E \in \mathcal{M} \end{cases} \\ &\Rightarrow W = (W \cap E) \cup (W \setminus E) \in \mathcal{M}, \text{ 矛盾.} \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

2.5.5 P088思考题05

设有点集 E , 若对任意的满足 $F \subset G \subset \mathbb{R}$ 的闭集和开集 G , 有 $\sup_F \{m(F)\} < \inf_G \{m(G)\}$, 试证明 E 不可测.

张祖锦解. 用反证法. 由习题 2.11 中第 1 步证明的测度的内外正规性知若 E 可测, 则 $\sup_F mF = mE = \inf_G mG$. 与题设矛盾. 故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

2.5.6 P088思考题06

试问: 一族可测集的交集必是可测集吗?

张祖锦解. 不是. 用反证法, 取 W 是不可测集, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\forall x \in W, \{x\}^c \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcap_{x \in W} \{x\}^c \in \mathcal{M} \xrightarrow{\text{De Morgan}} \bigcup_{x \in W} \{x\} = W \in \mathcal{M}, \text{ 矛盾.}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

2.6 连续变换与可测集

2.7 P094习题2

2.7.1 习题2.01

设 $E \subset \mathbb{R}$, 且存在 $q: 0 < q < 1$, 使得对任一区间 (a, b) , 都有开区间列 $\{I_n\}$:

@跟锦数学微信公众号

$$E \cap (a, b) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < (b-a)q,$$

试证明 $m(E) = 0$.

张祖锦解. 由题设, 对 $\forall a < b$, @跟锦数学微信公众号

$$m^*(E \cap (a, b)) \leq m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \stackrel{\text{次可数可加}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < (b-a)q.$$

这就证明了对所有开区间 I , @跟锦数学微信公众号

$$m^*(E \cap I) \leq q|I|.$$

对 E 的任一开覆盖 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} E &= E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap I_n) \\ \Rightarrow m^*E &\leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E \cap I_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} q|I_n|. \end{aligned}$$

对 E 的所有开覆盖 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ 对上式取下确界即得 $m^*E \leq q \cdot m^*E \Rightarrow m^*E = 0$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

2.7.2 习题2.02

设 $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n, A_1 \subset A_2, A_1$ 是可测集, 且 $m(A_1) = m^*(A_2) < +\infty$, 试证明 A_2 是可测集.

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} m^* A_2 &\stackrel{\text{Carathéodory}}{=} m A_1 + m^*(A_2 \cap A_1^c) \Rightarrow m^*(A_2 \cap A_1^c) = 0 \\ &\Rightarrow A_2 \cap A_1^c \in \mathcal{M} \Rightarrow A_2 = A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c) \in \mathcal{M}. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2.7.3 习题2.03

设 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ 都是可测集, 试证明 @跟锦数学微信公众号

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B).$$

张祖锦解. 若 $m A = +\infty$, 则左端 $= +\infty =$ 右端. 若 $m A < +\infty$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} m(A \cup B) &\stackrel{\text{Carathéodory}}{=} m((A \cup B) \cap A) + m((A \cup B) \cap A^c) = m A + m(B \setminus A), \\ m B &\stackrel{\text{Carathéodory}}{=} m(B \cap A) + m(B \cap A^c) = m(A \cap B) + m(B \setminus A). \end{aligned}$$

移项即知 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} m(A \cup B) - m A &= m B - m(A \cap B) \\ &\Rightarrow m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B). \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2.7.4 习题2.04

试问: 是否存在闭集 $F, F \subset [a, b]$ 且 $F \neq [a, b]$, 而 $m(F) = b - a$?

张祖锦解. 不存在. 用反证法证明. 若存在满足题意的闭集 F , 则 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} F \subsetneq [a, b] &\Rightarrow \exists x_0 \in [a, b], \text{ s.t. } x_0 \notin F \\ &\Rightarrow \exists x_0 \in [a, b], \exists \delta \in (0, b - a), \text{ s.t. } B(x_0, \delta) \subset F^c \\ &\Rightarrow [a, b] \cap B(x_0, \delta) \subset [a, b] \setminus F \\ &\Rightarrow 0 < m([a, b] \setminus F) = m([a, b]) - m F = b - a - m F = 0 \\ &\Rightarrow \text{矛盾, 故有结论.} \end{aligned}$$

最后一步的理由是: @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x_0 \in (a, b) &\Rightarrow B(x_0, \min\{x_0 - a, b - x_0, \delta\}) \subset B(x_0, \delta), \\ x_0 = a &\Rightarrow [x_0, x_0 + \delta) \subset B(x_0, \delta), \\ x_0 = b &\Rightarrow (x_0 - \delta, x_0] \subset B(x_0, \delta). \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2.7.5 习题2.05

试在 $\mathbb{R}$ 中作由某些无理数构造成的闭集 F , 使得 $m(F) > 0$.

张祖锦解. 设 $\mathbb{Q} = \{r_k\}_{k=1}^{\infty}$, $O = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(r_k - \frac{1}{2^k}, r_k + \frac{1}{2^k}\right)$, 则 O 是开集, $O \supset \mathbb{Q}$, 且 $mO \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{2^k} = 2$. 令 $F = O^c$, 则 F 是闭集, $F \subset \mathbb{Q}^c$, 且 $mF > 0$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2.7.6 习题2.06

设 $I = [0, 1] \times [0, 1]$, 令 @跟锦数学微信公众号

$$E = \left\{ (x, y) \in I; \sin x < \frac{1}{2}, \cos(x+y) \text{ 是无理数} \right\},$$

试求 $m(E)$.

张祖锦解. 设 $Q \cap [0, 1] = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} E_n &= \left\{ (x, y) \in I; \sin x < \frac{1}{2}, \cos(x+y) = r_n \right\} \\ &= \left\{ (x, y); 0 < x < \frac{\pi}{6}, y = x - \arccos r_n \right\}, \end{aligned}$$

则 $mE_n = 0 \Rightarrow m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$, 而 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} E &= \left\{ (x, y) \in I; \sin x < \frac{1}{2}, \cos(x+y) \text{ 是实数} \right\} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \\ &= \left(\left[0, \frac{\pi}{6}\right) \times (0, 1) \right) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n. \end{aligned}$$

于是 $mE = m\left(\left[0, \frac{\pi}{6}\right) \times (0, 1)\right) = \frac{\pi}{6}$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2.7.7 习题2.07

设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集列, 若 $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) < +\infty$, 试证明 @跟锦数学微信公众号

$$m\left(\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} E_k\right) \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} m(E_k).$$

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} m\left(\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} E_k\right) &= m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=k}^{\infty} E_l\right) \xrightarrow[F_k = \bigcup_{l=k}^{\infty} E_l \setminus E_k]{m F_1 \leq m\left(\bigcup_{l=1}^{\infty} E_l\right) < \infty} m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} m F_k \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} m E_k. \end{aligned}$$

最后一步是因为 $F_k \supset E_k \Rightarrow m F_k \geq m E_k \Rightarrow \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} m F_k \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} m E_k$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

2.7.8 习题2.08

设 $\{E_k\}$ 是 $[0, 1]$ 中的可测集列, $m(E_k) = 1$ ($k = 1, 2, \dots$), 试证明 $m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 1$.

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} m E_k = 1 &\Rightarrow 1 = m([0, 1]) \xrightarrow{\text{Caratheodory}} m E_k + m E_k^c = 1 + m E_k^c \Rightarrow m E_k^c = 0 \\ &\Rightarrow 0 = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^c\right) = m\left(\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right)^c\right) \\ &\Rightarrow m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) \xrightarrow{\text{Caratheodory}} m([0, 1]) - m\left(\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right)^c\right) = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

2.7.9 习题2.09

设 $E_1, E_2, \dots, E_k$ 是 $[0, 1]$ 中的可测集, 且有 $\sum_{i=1}^k m(E_i) > k - 1$, 试证明 $m\left(\bigcap_{i=1}^k E_i\right) > 0$.

张祖锦解. 由题设, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} 1 &> \sum_{i=1}^k (1 - m E_i) = \sum_{i=1}^k (m[0, 1] - m E_i) \xrightarrow{\text{Caratheodory}} \sum_{i=1}^k m E_i^c \\ &\stackrel{\text{次可数可加}}{\geq} m\left(\bigcup_{i=1}^k E_i^c\right) = m\left(\left(\bigcap_{i=1}^k E_i\right)^c\right) \xrightarrow{\text{Caratheodory}} 1 - m\left(\bigcap_{i=1}^k E_i\right). \end{aligned}$$

故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

2.7.10 习题2.10

设 A, B, C 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集, 若有 @跟锦数学微信公众号

$$m(A \Delta B) = 0, m(B \Delta C) = 0,$$

试证明 $m(A \Delta C) = 0$.

张祖锦解. 由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} A \setminus C &= A \cap C^c = (A \cap C^c) \cap (B \cup B^c) \\ &= (A \cap C^c \cap B) \cup (A \cap C^c \cap B^c) \subset (B \setminus C) \cup (A \setminus B), \\ C \setminus A &\subset (B \setminus A) \cup (C \setminus B) \end{aligned}$$

知 $A \Delta C \subset (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$ @跟锦数学微信公众号

$$\Rightarrow 0 \leq m(A \Delta C) \leq m(A \Delta B) + m(B \Delta C) = 0 \Rightarrow m(A \Delta C) = 0.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2.7.11 习题2.11

设 $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一族开球, 记 $G = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$. 若有 $0 < \lambda < m(G)$, 试证明存在有限个互不相交的开球 $B_{\alpha_1}, B_{\alpha_2}, \dots, B_{\alpha_m}$, 使得 $\sum_{k=1}^m m(B_{\alpha_k}) > \frac{\lambda}{3^n}$.

张祖锦解.

(1) 测度有内外正规性: @跟锦数学微信公众号

$$E \in \mathcal{M} \Rightarrow \begin{cases} \text{(外正规性): } mE = \inf \{mO; O \supset E\} \\ \text{(内正规性): } mE = \sup \{mK; K \subset E\} \end{cases}$$

(2) 先证明测度的外正规性. 若 $mE = \infty$, 则结论显然成立. 往设 $mE < \infty$. 由可测集的构造 (证明只用到外测度的定义) 知

$$\forall \varepsilon > 0, \exists O, \text{ s.t. } m(O \setminus E) < \varepsilon \Rightarrow mO < mE + \varepsilon.$$

(3) 再证明测度的内正规性.

(i) 若 E 有界, 则 $E \subset I \stackrel{\text{def}}{=} [-a, a]^n$. 由外正规性,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists O \supset I \setminus E, \text{ s.t. } m(I \setminus E) \leq m(O) < m(I \setminus E) + \varepsilon.$$

令 $K = O^c \cap I$, 则 K 是有界闭集, 而为紧集, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} K &= O^c \cap I \subset (I \setminus E)^c \cap I = (I \cap E^c)^c \cap I \\ &= (I^c \cup E) \cap I = E \cap I = E, \\ E \setminus K &= E \setminus (O^c \cap I) = E \cap (O^c \cap I)^c = E \cap (O \cup I^c) = E \cap O \\ &\subset O \cap E^{cc} \subset O \cap (I \setminus E)^c = O \setminus (I \setminus E), \\ m(E) - m(K) &= m(E \setminus K) \leq m(O \setminus (I \setminus E)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

(ii) 若 E 无界, 则 $E = \lim_{i \rightarrow \infty} E_i$, $E_i = E \cap [-i, i]^n$. 对每个 E_i , 由已证的有界情形的内正规性知

$$\exists K_i \subset E_i \subset E, \text{ s.t. } mE_i - \frac{1}{i} < mK_i \leq mE_i.$$

于是 $\lim_{i \rightarrow \infty} mK_i = \lim_{i \rightarrow \infty} mE_i = mE$.

(4) 由 $0 < \lambda < mG = \sup \{mK; \text{紧 } K \subset G\}$ 知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists \text{ 紧 } K \subset G, \text{ s.t. } mK > G.$$

由 $K \subset \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ 及 K 紧知 $K \subset \bigcup_{i=1}^p B_{\alpha_i}$. 取 B'_{α_1} 是 $\{B_{\alpha_i}\}_{i=1}^p$ 中直径最大的开球, 再取 B'_{α_2} 是 $\{B_{\alpha_i}\}_{i=1}^p \setminus \{B'_{\alpha_1}\}$ 中共直径最大的, 且与 B'_{α_1} 互不相交的开球. 如此一直做下去, 取 $B'_{\alpha_{k+1}}$ 是 $\{B_{\alpha_i}\}_{i=1}^p \setminus \{B'_{\alpha_1}\} \cup \dots \cup \{B'_{\alpha_k}\}$ 中直径最大的, 且与各 $B'_{\alpha_1}, \dots, B'_{\alpha_k}$ 互不相交的开球. 这个过程经过 $m \leq p$ 步结束. 于是 $\{B_{\alpha_k}\}_{k=1}^m$ 互不相交.

(5) 任一 B_{α_i} 都与某个 B'_{α_k} 相交 (否则可定义 $B'_{\alpha_{m+1}}$, 与 m 的定义矛盾). 由 B'_{α_k} 的选取 (与 $B'_{\alpha_1}, \dots, B'_{\alpha_{k-1}}$ 互不相交的, 且直径最大的开球) 即知 (画个图理解

下) $B_{\alpha_i} \subset 3B'_{\alpha_k}$. 这就证明了 $\bigcup_{i=1}^p B_{\alpha_i} \subset \bigcup_{k=1}^m 3B'_{\alpha_k}$. 进而 @跟锦数学微信公众号

$$\lambda < mK \leq m \left(\bigcup_{i=1}^p B_{\alpha_i} \right) \leq m \left(\bigcup_{k=1}^m 3B'_{\alpha_k} \right) \leq \sum_{i=1}^m 3^n m(B'_{\alpha_i}).$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2.7.12 习题2.12

设 $\{B_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中递减可测集列, $m^*(A) < +\infty$. 令 $E_k = A \cap B_k$ ($k = 1, 2, \dots$), $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$, 试证明 $\lim_{k \rightarrow \infty} m^*(E_k) = m^*(E)$.

张祖锦解. 微信公众号: 跟锦数学

$$\begin{aligned} m^*A &\stackrel{\text{Carathéodory}}{=} m^*(A \cap B_k) + m^*(A \cap B_k^c) = m^*E_k + m^*(A \cap B_k^c), \\ m^*A &\stackrel{\text{Carathéodory}}{=} m^*\left(A \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) + m^*\left(A \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right)^c\right) \\ &= m^*\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) + m^*\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^c\right) = m^*E + m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap B_k^c)\right). \quad (*) \end{aligned}$$

又由 $B_k \searrow \Rightarrow A \cap B_k^c \nearrow$ 及书第 82 页推论 2.17 知 微信公众号: 跟锦数学

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m^*(A \cap B_k^c) = m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap B_k^c)\right).$$

在 (*) 中令 $k \rightarrow \infty$ 即知 $\lim_{k \rightarrow \infty} m^*E_k = m^*E$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2.7.13 习题2.13

设 $E \subset \mathbb{R}^n$, $H \supset E$ 且 H 是可测集, 若 $H \setminus E$ 的任一可测子集皆为零测集, 试问: H 是 E 的等测包吗?

张祖锦解. 由书第 81 页定理 2.15 (外测度的正则性) 知存在 $G \in \mathcal{M}, G \supset E$, s.t. $mG = m^*E$. 于是 $H \setminus G$ 是 $H \setminus E$ 的可测子集. 由题设, $m(H \setminus G) = 0$. 进而 微信公众号: 跟锦数学

$$m^*E \leq mH \stackrel{\text{Carathéodory}}{=} m(H \cap G) + m(H \setminus G) = m(H \cap G) \leq mG = m^*E.$$

这就证明了 $mH = m^*E$, 而 H 是 E 的等测包. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2.7.14 习题2.14

试证明点集 E 可测的充分必要条件是: 对任给 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G_1, G_2: G_1 \supset E, G_2 \supset E^c$, 使得 $m(G_1 \cap G_2) < \varepsilon$.

张祖锦解.

(1) $\Leftarrow$: 由充分性假设, $\forall n, \exists$ 开 $G_n, G'_n: G_n \supset E, G'_n \supset E^c$, s.t. $m(G_n \cap G'_n) <$

$\frac{1}{n}$. 令 $F_n = G_n^c$, 则闭 $F_n \subset E \subset G_n, m(G_n \setminus F_n) < \frac{1}{n}$. 进而 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} m(G_n \setminus E) &\leq m(G_n \setminus F_n) < \frac{1}{n} \\ \Rightarrow m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus E\right) &\leq m(G_n \setminus E) < \frac{1}{n} \quad (\forall n \geq 1) \\ \Rightarrow m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus E\right) &= 0 \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus E \in \mathcal{M} \\ \Rightarrow E = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus E\right) &\in \mathcal{M}. \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$: 由书第 80 页定理 2.13 知 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \text{ 开 } G \supset E, \text{ s.t. } m(G \setminus E) &< \frac{\varepsilon}{2}, \\ \exists \text{ 闭 } F \subset E, \text{ s.t. } m(E \setminus F) &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

令 $G' = F^c$, 则开 $G' \supset E^c$, @跟锦数学微信公众号

$$\varepsilon > m(E \setminus F) = m(E \cap F^c) = m(E \cap G') = m(G' \setminus E^c).$$

$$\text{于是 } m(G \cap G') = m(G \setminus F) \leq m(G \setminus E) + m(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2.7.15 习题 2.15

设 $E \subset [0, 1]$ 是可测集, 且有 @跟锦数学微信公众号

$$m(E) \geq \varepsilon > 0, x_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, n,$$

其中 $n > \frac{2}{\varepsilon}$, 试证明 E 中存在两个点其距离等于 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 中某两个点之间的距离.

张祖锦解. 这里, 我们设 $x_1, \dots, x_n$ 互不相同. 令 $E_i = E + \{x_i\}, i = 1, \dots, n$, 往用反证法证明 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \exists i \neq j, \text{ s.t. } E_i \cap E_j \neq \emptyset &\Rightarrow \exists x, y \in E, \text{ s.t. } x + x_i + y + x_j \\ &\Rightarrow |x - y| = |x_i - x_j|. \end{aligned}$$

事实上, 若 $\forall i \neq j, E_i \cap E_j = \emptyset$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$2 = m[0, 2] \geq m\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \xrightarrow{\text{可数可加}} \sum_{i=1}^n mE_i \xrightarrow{\text{平移不变}} \sum_{i=1}^n mE = n\varepsilon.$$

这与题设 $n > \frac{2}{\varepsilon}$ 矛盾. 故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2.7.16 习题2.16

设 W 是 $[0, 1]$ 中的不可测集, 试证明存在 $\varepsilon: 0 < \varepsilon < 1$, 使得对于 $[0, 1]$ 中任一满足 $m(E) \geq \varepsilon$ 的可测集 E , $W \cap E$ 是不可测集.

张祖锦解. 用反证法. 设 @跟锦数学微信公众号

$$\forall 0 < \varepsilon < 1, \exists E \in \mathcal{M}, E \subset [0, 1], mE \geq \varepsilon, \text{ s.t. } W \cap E \in \mathcal{M},$$

则取 $\varepsilon = 1 - \frac{1}{i}$ 后, @跟锦数学微信公众号

$$\exists E_i \in \mathcal{M}, E_i \subset [0, 1], mE_i \geq 1 - \frac{1}{i}, \text{ s.t. } W \cap E_i \in \mathcal{M}.$$

令 $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{E}$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} mE \geq mE_i &\xrightarrow{i \rightarrow \infty} mE = 1 \Rightarrow mE^c = 0 \Rightarrow m(W \cap E^c) = 0 \Rightarrow W \cap E^c \in \mathcal{M} \\ &\Rightarrow W = (W \cap E) \cup (W \cap E^c) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (W \cap E_i) \cup (W \cap E^c) \in \mathcal{M}. \end{aligned}$$

这与 W 不可测矛盾, 故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3 可测函数

3.1 可测函数的定义及其性质

3.1.1 P107思考题01

设 $f(x)$ 定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上. 若 $f^2(x)$ 在 E 上可测, 且 $\{x \in E; f(x) > 0\}$ 是可测集, 则 $f(x)$ 在 E 上可测.

张祖锦解. 由 $E[|f| > c] = \begin{cases} E[f^2 > c^2], & c \geq 0, \\ E, & c < 0 \end{cases} \in \mathcal{M}$ 知 $|f|$ 在 E 上可测. 又

由 @跟锦数学微信公众号

$$f(x) = \begin{cases} |f(x)|, & f(x) > 0 \\ -|f(x)|, & f(x) \leq 0 \end{cases} = |f(x)| [\chi_{E[f>0]}(x) - \chi_{E[f \leq 0]}(x)]$$

知 f 在 E 上可测. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3.1.2 P107思考题02

记 $\mathcal{F}$ 为 $(0, 1)$ 上的一个连续函数族, 则函数 ④跟锦数学微信公众号

$$g(x) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \{f(x)\}, h(x) = \inf_{f \in \mathcal{F}} \{f(x)\}$$

是 $(0, 1)$ 上的可测函数.

张祖锦解. 由 ④跟锦数学微信公众号

$$g(x) > c \Leftrightarrow \sup_{f \in \mathcal{F}} f(x) > c \Leftrightarrow \exists f_c \in \mathcal{F}, \text{ s.t. } f_c(x) > c$$

知 $E[g > c] = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} E[f > c]$. 再由 f 连续知 $E[f > c]$ 是开集, 而 $E[g > c]$ 是一些

开集的并, 也是开集, 而是可测集. 故 g 可测. 同理, 由 $E[h < c] = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} E[f < c]$

知 h 可测. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3.1.3 P107思考题03

设 $\{f_k(x)\}$ 是 $E \subset \mathbb{R}$ 上的可测函数列, 则 $f_k(x)$ 在 E 上收敛的点集是可测集.

张祖锦解. 设 C 是 f_k 在 E 上收敛的点集, 则由 Cauchy 收敛准则知 ④跟锦数学微信公众号

$$C = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} \bigcap_{l=N}^{\infty} E \left[|f_k - f_l| < \frac{1}{i} \right].$$

由可测集的性质即知 $C \in \mathcal{M}$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3.1.4 P107思考题04

设 $f(x)$ 在 $E \subset \mathbb{R}$ 上可测, G 和 F 各为 $\mathbb{R}$ 中的开集和闭集, 则点集 ④跟锦数学微信公众号

$$E_1 = \{x \in E; f(x) \in G\}, E_2 = \{x \in E; f(x) \in F\}$$

是可测集.

张祖锦解. 由 $\mathbb{R}$ 中开集的构造知 ④跟锦数学微信公众号

$$G = \bigcup_{i=1}^{m \text{ 或 } \infty} (a_i, b_i), \text{ 其中 } \{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{m \text{ 或 } \infty} \text{ 互不相交.}$$

于是 ④跟锦数学微信公众号

$$E_1 = E[f \in G] = \bigcup_{i=1}^{m \text{ 或 } \infty} E[f \in (a_i, b_i)] = \bigcup_{i=1}^{m \text{ 或 } \infty} (E[f > a_i] \cap E[f < b_i]) \in \mathcal{M}.$$

进而 $E_2 = E[f \in F] = E[E[f \in F^c]] \in \mathcal{M}$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3.1.5 P107思考题05

设 $\{E_k\} \subset \mathbb{R}^n$ 是互不相交的可测集列. 若 $f(x)$ 在 E_k ($k = 1, 2, \dots$) 上是可测的, 则 $f(x)$ 在 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 上也是可测的.

张祖锦解. 设 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, 则 $E[f > c] = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k[f > c] \in \mathcal{M}$, 而 f 在 E 上可测. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3.1.6 P109思考题06

设 $f \in C([a, b])$, 若有定义在 $[a, b]$ 上的函数 $g(x) : g(x) = f(x)$, a.e. $x \in [a, b]$, 试问: $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上必是几乎处处连续的吗?

张祖锦解. 错误. 比如 $f(x) = 0, g(x) = D(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$ 则 @跟锦数学 微信公众号

$$\exists Z = \mathbb{Q}, mZ = 0, \text{ s.t. } f(x) = g(x), x \in [a, b] \setminus Z.$$

而 $f = g$, a.e. $x \in [a, b]$. 但 f 连续, g 处处不连续. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3.1.7 P109思考题07

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上几乎处处连续的函数, 试问是否存在 $g \in C(\mathbb{R})$, 使得 $g(x) = f(x)$, a.e. $x \in \mathbb{R}$?

张祖锦解. 错误. 比如 $f(x) = \chi_{(0, +\infty)}(x)$, 往用反证法证明结论. 设 @跟锦数学微信公众号

$$\exists g \in C(\mathbb{R}), \text{ s.t. } g(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in \mathbb{R},$$

则令 $Z = \{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq g(x)\}$, 则 $mZ = 0$. 于是对 $\forall x \neq 0$, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} & \forall i > \frac{1}{|x|}, B\left(x, \frac{1}{i}\right) \not\subset Z \quad \left(\text{否则 } B\left(x, \frac{1}{i}\right) \subset Z \Rightarrow 0 < \frac{2}{i} \leq mZ, \text{ 矛盾}\right) \\ & \Rightarrow \exists x_i \in B\left(x, \frac{1}{i}\right), \text{ s.t. } x_i \notin Z \\ & \Rightarrow f(x_i) = \begin{cases} 1, & x > 0 \left(x_i > x - \frac{1}{i} > 0\right), \\ 0, & x < 0 \left(\Rightarrow x_i < x + \frac{1}{i} < 0\right); \end{cases} \quad g(x_i) = f(x_i) \\ & \Rightarrow g(x) \stackrel{\text{原理}}{=} \lim_{i \rightarrow \infty} g(x_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \\ & \Rightarrow g \text{ 在 } x = 0 \text{ 处不连续, 与假设矛盾. 故有结论.} \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

3.2 可测函数列的收敛

3.2.1 P119思考题01

设在可测集 $E \subset \mathbb{R}$ 上, $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 几乎处处收敛于 $f(x)$, 且依测度收敛于 $g(x)$, 试问: 是否有关系式 @跟锦数学微信公众号

$$g(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in E?$$

张祖锦解. 由 $\{f_n\}$ 依测度收敛于 $g(x)$ 及 Riesz 定理知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists n_k, \text{ s.t. } \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = g(x), \text{ a.e. } x \in E.$$

此即 @跟锦数学微信公众号

$$\exists Z_1 : mZ_1 = 0, \text{ s.t. } \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = g(x), x \in E \setminus E_1.$$

又由 $f_n(x) \rightarrow f(x)$, a.e. $x \in E$ 知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists Z_2 : mZ_2 = 0, \text{ s.t. } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), x \in E \setminus E_2.$$

令 $Z = Z_1 \cup Z_2$, 则 $mZ = 0$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$g(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x), x \in (E \setminus E_1) \cap (E \setminus E_2) = E \setminus E.$$

这就证明了 $g(x) = f(x)$, a.e. $x \in E$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

3.2.2 P119思考题02

设 $f(x), f_k(x) (k = 1, 2, \dots)$ 是 E 上的实值可测函数. 若对任给 $\varepsilon > 0$ 以及 $\delta > 0$, 存在 E 中可测子集 e 以及 K , 使得 $m(E \setminus e) < \delta$, 且有

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (k > K, x \in e).$$

试问这是哪种意义下的收敛?

张祖锦解. 由题设, $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists E \supset e \in \mathcal{M} : m(E \setminus e) < \delta, \exists K, \text{ s.t. } \forall k \geq K$

$$\begin{aligned} e \subset \{x \in E; |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon\} &\Rightarrow E \setminus e \supset \{x \in E; |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \\ &\Rightarrow m\{x \in E; |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} < \delta. \end{aligned}$$

这就证明了 $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists K, \text{ s.t. }$

$$\forall k \geq K, m\{x \in E; |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} < \delta.$$

此即

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{k \rightarrow \infty} m\{x \in E; |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

于是 $\{f_k(x)\}$ 依测度收敛于 $f(x)$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3.2.3 P119思考题03

设 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于零, $g(x)$ 是 E 上实值可测函数. 若 $m(E) = +\infty$, 是说明 $\{g(x)f_k(x)\}$ 在 E 上不一定依测度收敛于零.

张祖锦解. 设 $E = \mathbb{R}, f_k(x) = \frac{1}{k}, g(x) = x$, 则对 $\forall \varepsilon > 0$, 当 $k \geq \frac{1}{\varepsilon}$ 时,

$$m\{x \in E; |f_k(x)| > \varepsilon\} = m\left\{x \in E; \frac{1}{k} > \varepsilon\right\} = m\left\{x \in E; k < \frac{1}{\varepsilon}\right\} = m\emptyset = 0.$$

故 $\lim_{k \rightarrow \infty} m\{x \in E; |f_k(x)| > \varepsilon\} = 0$. 而 $\{f_k(x)\}$ 依测度收敛于 0. 但由

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} m\{x \in E; |g(x)f_k(x)| > \varepsilon\} &= \lim_{k \rightarrow \infty} m\left\{x \in E; \left|\frac{x}{k}\right| > \varepsilon\right\} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} m\{(-\infty, -k\varepsilon) \cup (k\varepsilon, +\infty)\} = \lim_{k \rightarrow \infty} (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

知 $\{g(x)f_k(x)\}$ 不依测度收敛于 0. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3.2.4 P119思考题04

试问: $f_n(x) = \cos^n x$ ($n = 1, 2, \dots$) 是 $[0, \pi]$ 上依测度收敛列吗?

张祖锦解. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \pi, \\ 1, & x = 0, \\ -1, & x = \pi \end{cases}$ 知 $f_n \rightarrow 0$, a.e. $x \in [0, \pi]$. 由

Lebesgue 定理 (书第 116 页定理 3.14) 知 $\{f_n(x)\}$ 依测度收敛于 0. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

3.2.5 P119思考题05

若 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 在 $E \subset \mathbb{R}$ 上依测度收敛于 $f(x) = 0$, 试问: 是否有 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(\{x \in E; |f_n(x)| > 0\}) = 0?$$

张祖锦解. 不一定由. 比如设 $E = \mathbb{R}$, $f_k(x) = \frac{1}{k}$, $g(x) = x$, 则对 $\forall \varepsilon > 0$, 当 $k \geq \frac{1}{\varepsilon}$ 时, @跟锦数学微信公众号

$$m\{x \in E; |f_k(x)| > \varepsilon\} = m\left\{x \in E; \frac{1}{k} > \varepsilon\right\} = m\left\{x \in E; k < \frac{1}{\varepsilon}\right\} = m\emptyset = 0.$$

故 $\lim_{k \rightarrow \infty} m\{x \in E; |f_k(x)| > \varepsilon\} = 0$. 而 $\{f_k(x)\}$ 依测度收敛于 0. 但 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(\{x \in E; |f_n(x)| > 0\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} mE = +\infty \neq 0.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

3.2.6 P119思考题06

设 $E \subset \mathbb{R}$ 上的可测函数列 $\{f_k(x)\}$ 满足 @跟锦数学微信公众号

$$f_k(x) \geq f_{k+1}(x) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

若 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛到 0, 试问: $f_k(x)$ 在 E 上是否几乎处处收敛到 0?

张祖锦解. 由 $\{f_k\}$ 依测度收敛于 0 及 Riesz 定理知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists k_j, \text{ s.t. } \lim_{j \rightarrow \infty} f_{k_j}(x) = 0, \text{ a.e. } x \in E.$$

即 $\exists Z \in \mathcal{H} : mZ = 0$, 使得

$$\begin{aligned} x \in E \quad Z &\rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} f_{k_j}(x) = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_{k_j}(x) = 0 \\ &\quad \left(f_k \searrow \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \text{ 存在, 等于其任一子列的极限} \right). \end{aligned}$$

这就证明了 $f_k(x) \rightarrow 0$, a.e. $x \in E$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3.3 可测函数与连续函数的关系

3.3.1 P123思考题01

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值可测函数, 试问: 是否存在 $g \in C(\mathbb{R})$, 使得

$$m(\{x \in \mathbb{R}; |f(x) - g(x)| > 0\}) = 0?$$

张祖锦解. 不一定. 比如 $f(x) = \chi_{(0, +\infty)}(x)$, 往用反证法证明结论. 设 $\exists g \in C(\mathbb{R})$, s.t.

$$0 = m(\{x \in \mathbb{R}; |f(x) - g(x)| > 0\}) = m\{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq g(x)\}$$

$$\Rightarrow g(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in \mathbb{R},$$

则令 $Z = \{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq g(x)\}$, 则 $mZ = 0$. 于是对 $\forall x \neq 0$,

$$\forall i > \frac{1}{|x|}, B\left(x, \frac{1}{i}\right) \not\subset Z \quad \left(\text{否则 } B\left(x, \frac{1}{i}\right) \subset Z \Rightarrow 0 < \frac{2}{i} \leq mZ, \text{ 矛盾}\right)$$

$$\Rightarrow \exists x_i \in B\left(x, \frac{1}{i}\right), \text{ s.t. } x_i \notin Z$$

$$\Rightarrow f(x_i) = \begin{cases} 1, & x > 0 \left(x_i > x - \frac{1}{i} > 0 \right), \\ 0, & x < 0 \left(\Rightarrow x_i < x + \frac{1}{i} < 0 \right); \end{cases} \quad g(x_i) = f(x_i)$$

$$\Rightarrow g(x) \stackrel{\text{归结原理}}{=} \lim_{i \rightarrow \infty} g(x_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow g$ 在 $x = 0$ 处不连续, 与假设矛盾. 故有结论.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3.3.2 P123思考题02

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可测, 试证明存在多项式列 $\{P_n(x)\}$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in [a, b].$$

张祖锦解.

(1) 由 f 在 $[a, b]$ 上可测知 @跟锦数学微信公众号

$$\forall n, \exists \text{ 闭集 } F_n \nearrow, m([a, b] \setminus F_n) < \frac{1}{n}, \text{ s.t. } f \in C(F_n).$$

事实上, 由 Lusin 定理知 $n = 1$ 时结论成立. 又由 f 在 $[a, b]$ 上可测及 Lusin 定理知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists \text{ 闭集 } F'_2 \subset [a, b] \setminus F_1, m([a, b] \setminus F_1 \setminus F'_2) < \frac{1}{2}, \text{ s.t. } f \in C(F'_2).$$

令 $F_2 = F_1 \cup F'_2$, 则 f 在互不相交的闭集 F_2, F'_2 上连续, 而 f 在它们的并 F_2 上连续. 照此方法继续做下即知结论成立.

(2) 由连续延拓定理 (书第 52 页定理 1.27) 知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists g_n \in C(\mathbb{R}), \text{ s.t. } g_n(x) = f(x), x \in F_n.$$

又由 Weierstrass 第一逼近定理知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists P_n(x) \in \mathbb{P}[x], \text{ s.t. } \max_{[a, b]} |P_n - g_n| < \frac{1}{n}.$$

令 $Z = \bigcap_{n=1}^{\infty} ([a, b] \setminus F_n)$, 则 $mZ = 0$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$x \in [a, b] \setminus Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \Rightarrow \exists N, \text{ s.t. } x \in F_n \xrightarrow{F_n \nearrow} \exists N, \forall n \geq N, x \in F_n$$

$$\Rightarrow \exists N, \forall n \geq N, |P_n(x) - f(x)| = |P_n(x) - g_n(x)| < \frac{1}{n}.$$

令 $n \rightarrow \infty$ 即知 @跟锦数学微信公众号

$$x \in E \setminus Z \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |P_n(x) - f(x)| \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x).$$

这就证明了结论.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

3.3.3 P125思考题01

设 $f(x), g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数, 且 $f(x) > 0$ ($x \in \mathbb{R}$), 则 $f(x)^{g(x)}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数.

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} f(x) \text{ 可测} \xrightarrow{\ln t \text{ 可测}} \ln f(x) \text{ 可测} &\Rightarrow g(x) \cdot \ln f(x) \text{ 可测} \\ e^t \text{ 可测} \xrightarrow{\quad} f(x)^{g(x)} = \exp[g(x) \cdot \ln f(x)] &\text{ 可测.} \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

3.3.4 P125思考题02

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可测, 且 $m \leq f(x) \leq M$, $g(x)$ 在 $[m, M]$ 上单调, 则 $g(f(x))$ 在 $[a, b]$ 上可测.

张祖锦解.不妨设 $g \nearrow$. 对 $\forall c \in \mathbb{R}$, 由 g 单调知 @跟锦数学微信公众号

$$g^{-1}((c, +\infty)) = \{t \in [m, M]; g(t) > c\} \text{ 是 } \emptyset, \text{ 区间, 或单点集.}$$

故 @跟锦数学微信公众号

$$\{x \in [a, b]; g \circ f(x) > c\} = (g \circ f)^{-1}((c, +\infty)) = f^{-1}(g^{-1}((c, +\infty)))$$

是 $\emptyset$, 区间, 或单点集在 f 下的原像. 由 f 可测知上述集合是可测集. 这就证明了 $g \circ f$ 可测. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

3.4 P125习题3

3.4.1 习题3.01

设有指标集 I , $\{f_\alpha(x); \alpha \in I\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数族, 试问: 函数 $S(x) = \sup \{f_\alpha(x); \alpha \in I\}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上是可测的吗?

张祖锦解.设 I 是不可测集, 定义 $f_\alpha(x) = \chi_{\{\alpha\}}(x), x \in \mathbb{R}$, 则 f_α 可测. 但由 @跟锦数学微信公众号

$$\{x \in \mathbb{R}; \chi_I(x) \geq 1\} = I \notin \mathcal{M}$$

知 $S(x) = \sup_{\alpha \in I} f_\alpha(x) = \chi_I(x)$ 不是可测函数. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

3.4.2 习题3.02

设 $z = f(x, y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数, $g_1(x), g_2(x)$ 是 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ 上的实值可测函数, 试证明 $F(x) = f(g_1(x), g_2(x))$ 是 $[a, b]$ 上的可测函数.

张祖锦解.由 $g_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 可测知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists \text{ 简单 } \phi_{ik}(x), \text{ s.t. } \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{ik}(x) = g_i(x), x \in [a, b], i = 1, 2.$$

由 $f(\phi_{1k}(x), \phi_{2k}(x))$ 是可测简单函数及 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\phi_{1k}(x), \phi_{2k}(x)) \stackrel{\text{归结原理}}{=} f(g_1(x), g_2(x)), x \in [a, b]$$

即知 $f(g_1(x), g_2(x))$ 作为可测函数列的极限, 是可测的. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

3.4.3 习题3.03

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在右导数, 试证明右导函数 $f'_+(x)$ 是 $[a, b)$ 上的可测函数.

张祖锦解. 由书第 20 页例 12 (ii) 知 f 的不连续点集是可数集, 而是零测度集. 这表明 f a.e. 连续, 而可测. 进而

$$f'_+(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$

作为可测函数列的极限, 也是可测的. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3.4.4 习题3.04

设 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的几乎处处有限的可测函数, $m(E) < +\infty$, 试证明对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 E 上的有界可测函数 $g(x)$, 使得

$$m(\{x \in E; |f(x) - g(x)| > 0\}) < \varepsilon.$$

张祖锦解. 设 $E_n = E[|f| \leq n]$, 则

$$\mathcal{M} \ni E_n \nearrow \lim_{n \rightarrow \infty} mE_n = mE[|f| < +\infty] \xrightarrow{f \text{ a.e. 有限}} mE.$$

于是 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, s.t. $|mE_n - mE| < \varepsilon$. 取

$$g(x) = f(x) \cdot \chi_{E[|f| \leq n]}(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leq n, \\ 0, & |f(x)| > n. \end{cases}$$

则 g 有界可测, 且

$$mE[|f - g| > 0] = mE[|f| > n] = mE - mE_n < \varepsilon.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3.4.5 习题3.05

设 $f(x)$ 以及 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 都是 $A \subset \mathbb{R}$ 上几乎处处有限的可测函数. 若对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 A 的可测子集 $B: m(A \setminus B) < \varepsilon$, 使得 $f_n(x)$ 在 B 上一致收敛于 $f(x)$, 试证明 $f_n(x)$ 在 A 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

张祖锦解. 这是 Egrov 定理的逆命题 (不再需要 $mA < \infty$ 这一条件). 由题设,

$$\forall k, \exists \mathcal{M} \ni B_k \subset A: m(A \setminus B_k) < \frac{1}{k}, \text{ s.t. } f_n \rightrightarrows f, \text{ 于 } B_k.$$

特别地, $f_n \rightarrow f$, 于 B_k . 取 $Z = \bigcap_{k=1}^{\infty} (A \setminus B_k)$, 则 $mZ = 0$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$x \in A \setminus Z = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \Rightarrow \exists k \geq 1, x \in B_k \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

这就证明了 $f_n \rightarrow f$, a.e. $x \in A$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3.4.6 习题3.06

设 $\{f_k(x)\}$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值可测函数列, $m(E) < +\infty$, 试证明 $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0$ (a.e. $x \in E$) 的充分且必要条件是: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{j \rightarrow \infty} m \left(\left\{ x \in E; \sup_{k \geq j} |f_k(x)| \geq \varepsilon \right\} \right) = 0.$$

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0, \text{ a.e. } x \in E$$

$$\Leftrightarrow m \left\{ x \in E; \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \text{ 不存在或存在但不等于 } 0 \right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow m \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} E \left[|f_k| > \frac{1}{i} \right] \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i \geq 1, m \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} E \left[|f_k| > \frac{1}{i} \right] \right) = 0 \left(\begin{array}{l} m \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) = 0 \\ \Leftrightarrow \forall i \geq 1, mE_i = 0 \end{array} \right)$$

$$\stackrel{mE < \infty}{\Leftrightarrow} \forall i \geq 1, \lim_{j \rightarrow \infty} m \left(\bigcup_{k=j}^{\infty} E \left[|f_k| > \frac{1}{i} \right] \right) = 0 \left(F_j \equiv \bigcup_{k=j}^{\infty} E \left[|f_k| > \frac{1}{i} \right] \searrow \right)$$

$$\Leftrightarrow \forall i \geq 1, \lim_{j \rightarrow \infty} mE \left[\sup_{k \geq j} |f_k| > \frac{1}{i} \right] = 0 \left(\begin{array}{l} \sup_{k \geq j} f_k(x) > \frac{1}{i} \\ \Leftrightarrow \exists k \geq j, \text{ s.t. } f_k(x) > \frac{1}{i} \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \lim_{j \rightarrow \infty} mE \left[\sup_{k \geq j} |f_k| > \varepsilon \right] = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \lim_{j \rightarrow \infty} mE \left[\sup_{k \geq j} |f_k| \geq \varepsilon \right] = 0.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3.4.7 习题3.07

设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), \dots$ 是 $[a, b]$ 上几乎处处有限的可测函数, 且有 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x) \quad (\text{a.e. } x \in [a, b]),$$

试证明存在 $E_n \subset [a, b]$ ($n = 1, 2, \dots$) 使得 @跟锦数学微信公众号

$$m\left([a, b] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0,$$

而 $\{f_k(x)\}$ 在每个 E_n 上一致收敛于 $f(x)$.

张祖锦解. 由 Egrov 定理, @跟锦数学微信公众号

$$\forall n \geq 1, \exists \mathcal{M} \ni E_n \subset [a, b], \text{ s.t. } m([a, b] \setminus E_n) < \frac{1}{n}, f_n \rightrightarrows f, \text{ 于 } E_n.$$

于是 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} m\left([a, b] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} ([a, b] \setminus E_n)\right) \leq m([a, b] \setminus E_l) < \frac{1}{l} \quad (\forall l \geq 1) \\ \Rightarrow m\left([a, b] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= 0. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

3.4.8 习题3.08

设 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, $\{g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $g(x)$, 试证明 $\{f_k(x) + g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x) + g(x)$.

张祖锦解. 由 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, $\{g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $g(x)$ 知对 $\forall \varepsilon > 0$, @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} mE\left[|f_k - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right] = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} mE\left[|g_k - g| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right] = 0.$$

于是 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} mE[|(f_k + g_k) - (f + g)| \geq \varepsilon] &= mE[|(f_k - f) + (g_k - g)| \geq \varepsilon] \\ &\stackrel{\text{次可数可加}}{\leq} m\left(E\left[|f_k - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right] \cup E\left[|g_k - g| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) \\ &\leq mE\left[|f_k - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right] + mE\left[|g_k - g| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

故 $\{f_k(x) + g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x) + g(x)$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

3.4.9 习题3.09

设 $m(E) < +\infty$, $f(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), \dots$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数, 试证明 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是: @跟锦数学微信公

众号

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \inf_{\alpha > 0} \{\alpha + m(\{x \in E; |f_k(x) - f(x)| > \alpha\})\} = 0.$$

张祖锦解.

(1) $\Rightarrow$: 由 f_k 依测度收敛于 f 知对 $\forall \varepsilon > 0$, ④跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} mE[|f_k - f| > \varepsilon] = 0.$$

于是 ④跟锦数学微信公众号

$$\exists K > 0, \text{ s.t. } \forall k \geq K, mE[|f_k - f| > \varepsilon] < \varepsilon.$$

故当 $k \geq K$ 时, ④跟锦数学微信公众号

$$\inf_{\alpha > 0} \{\alpha + mE[|f_k - f| > \alpha]\} \leq \varepsilon + mE[|f_k - f| > \varepsilon] < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

这就证明了 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{\alpha > 0} \{\alpha + mE[|f_k - f| > \alpha]\} = 0$.(2) $\Leftarrow$: 由 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{\alpha > 0} \{\alpha + mE[|f_k - f| > \alpha]\} = 0$ 知 $\forall \varepsilon > 0, \exists K, \forall k \geq K$, ④跟锦数学微信公众号

$$\inf_{\alpha > 0} \{\alpha + mE[|f_k - f| > \alpha]\} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \exists \alpha_0 > 0, \text{ s.t. } \alpha_0 + mE[|f_k - f| > \alpha_0] < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \alpha_0 < \varepsilon, mE[|f_k - f| > \varepsilon] \leq mE[|f_k - f| > \alpha_0] < \varepsilon.$$

令 $k \rightarrow \infty$ 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} mE[|f_k - f| > \varepsilon] \leq \varepsilon$. 对 $\forall \delta > 0$, ④跟锦数学微信公众号

$$0 < \varepsilon < \delta \Rightarrow mE[|f_k - f| > \delta] \leq mE[|f_k - f| > \varepsilon] \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} mE[|f_k - f| > \delta] \leq \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} mE[|f_k - f| > \delta] = 0$. 这就证明了 f_k 依测度收敛于 f .

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3.4.10 习题3.10

设 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 是 $[0, 1]$ 上的递增函数, 且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上依测度收敛于 $f(x)$, 试证明在 $f(x)$ 的连续点 x_0 上, 有 ④跟锦数学微信公众号

$$f_n(x_0) \rightarrow f(x_0) \quad (n \rightarrow \infty).$$

张祖锦解. 由 f 在 x_0 处连续知对 $\forall \varepsilon > 0$, @跟锦数学微信公众号

$$\exists \delta > 0, \text{ s.t. } \forall x \in B(x_0, \delta), |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又由 f_n 依测度收敛于 f 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} mE \left[|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right] = 0$, 而 $\exists N$, s.t. $\forall n \geq N$,

@跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} & mE \left[|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right] < \delta \\ \Rightarrow & (x_0 - \delta, x_0) \not\subset E \left[|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right], (x_0, x_0 + \delta) \not\subset E \left[|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right] \\ \Rightarrow & \exists x_0 - \delta < x'_n < x_0 < x''_n < x_0 + \delta, \text{ s.t.} \\ & |f_n(x_n) - f(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2}, |f_n(x''_n) - f(x''_n)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow & f_n(x_0) \begin{cases} \overset{f'_n}{\leq} f_n(x'_n) < f(x_n) + \frac{\varepsilon}{2} < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \\ \overset{f'_n}{\geq} f_n(x'_n) > f(x_n) - \frac{\varepsilon}{2} > f(x_0) - \varepsilon \end{cases} \\ \Rightarrow & |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

这就证明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.4.11 习题3.11

设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 且对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G \subset \mathbb{R}^n$, $m(G) < \varepsilon$, 使得 $f \in C(\mathbb{R}^n \setminus G)$, 试证明 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

张祖锦解. 由题设, $\forall k, \exists$ 开 $O_k, mO_k < \frac{1}{k}$ s.t. $f \in C(\mathbb{R}^n \setminus O_k)$. 令 $G = \bigcap_{k=1}^{\infty} O_k$,

则 $mG = 0$. 于是对 $\forall c \in \mathbb{R}$, @跟锦数学微信公众号

$$\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) > c\} = \{x \in G; f(x) > c\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^n \setminus O_k; f(x) > c\},$$

作为可数个可测集的并, 是可测集. 故 f 是可测的. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.4.12 习题3.12

设 $\{f_k(x)\}$ 与 $\{g_k(x)\}$ 在 E 上都依测度收敛于零, 试证明 $\{f_k(x) \cdot g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于零.

张祖锦解. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由反证法易知 @跟锦数学微信公众号

$$E[|f_k g_k| > \varepsilon] \subset E[|f_k| > \sqrt{\varepsilon}] \cup E[|g_k| > \sqrt{\varepsilon}].$$

故 $mE\{|f_k g_k| > \varepsilon\} \leq mE\{|f_k| > \sqrt{\varepsilon}\} + mE\{|g_k| > \sqrt{\varepsilon}\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

这就证明了 $f_k g_k$ 依测度收敛于 0. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3.4.13 习题 3.13

设 $\{f_k(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上依测度收敛于 $f(x)$, $g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 试证明 $\{g(f_k(x))\}$ 在 $[a, b]$ 上依测度收敛于 $g(f(x))$. 若将 $[a, b]$ 改为 $[0, +\infty)$, 结论还成立吗?

张祖锦解.

(1) 先证一个结论. 若 $mE < \infty$, 则 f_k 依测度收敛于 f 当且仅当 $\{f_k\}$ 的任一子函数列 $\{f_{k_j}\}$ 都有一个子函数列 $\{f_{k_{j_i}}\}$, s.t. $\lim_{i \rightarrow \infty} f_{k_{j_i}}(x) = f(x)$, a.e. $x \in E$.

(i) $\Rightarrow$: 对 $\{f_k\}$ 的任一子函数列 $\{f_{k_j}\}$, 仍有 $\{f_{k_j}\}$ 依测度收敛于 f . 而由 Riesz 定理, ④跟锦数学微信公众号

$$\exists k_{j_i}, \text{ s.t. } \lim_{i \rightarrow \infty} f_{k_{j_i}}(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in E.$$

(ii) $\Leftarrow$: 用反证法. 若 f_k 不依测度收敛于 f , 则 ④跟锦数学微信公众号

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \exists \delta_0 > 0, \forall K, \exists k \geq K, mE\{|f_k - f| \geq \varepsilon_0\} \geq \delta_0.$$

于是 ④跟锦数学微信公众号

$$\exists k_j, \text{ s.t. } mE\{|f_{k_j} - f| \geq \varepsilon_0\} \geq \delta_0. \quad (*)$$

但由充分性假设, $\{f_{k_j}\}$ 有一子函数列 $\{f_{k_{j_i}}\}$, 使得 ④跟锦数学微信公众号

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_{k_{j_i}}(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in E.$$

由 Lebesgue 定理 (书第 116 页定理 3.14) 知 $f_{k_{j_i}}$ 依测度收敛于 f . 这与 (*) 中取 $j = j_i$ 得到的结果矛盾. 故有结论.

(2) 对 $g \circ f_k$ 的任一子函数列 $g \circ f_{k_j}$, 由 f_{k_j} 依测度收敛于 f 及 Riesz 定理知 ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \exists k_{j_i}, \text{ s.t. } \lim_{i \rightarrow \infty} f_{k_{j_i}}(x) &= f(x), \text{ a.e. } x \in E \\ \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} g \circ f_{k_{j_i}}(x) &= g \circ f(x), \text{ a.e. } x \in E. \end{aligned}$$

据第 1 步即知 $g \circ f_k$ 依测度收敛于 $g \circ f$.

(3) 若将 $[a, b]$ 改为 $[0, +\infty)$, 结论不再成立. 比如 @跟锦数学微信公众号

$$f_n(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, n), \\ x + \frac{1}{x}, & x \in [n, +\infty), \end{cases} \quad f(x) = x, \quad g(x) = x^2,$$

则 $\forall \varepsilon > 0$, 当 $n > \frac{1}{\varepsilon}$ 时, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} m\{x \in \mathbb{R}; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} &= m\left\{x \geq n; \frac{1}{x} > \varepsilon\right\} \\ &= m\left\{n \leq x < \frac{1}{\varepsilon}\right\} = m\emptyset = 0. \end{aligned}$$

而 f_n 依测度收敛于 f . 但对 $\varepsilon_0 = 2$, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} m\{x \in \mathbb{R}; |g \circ f_n - g \circ f| \geq 2\} &= m\left\{x \geq n; \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - x^2 \geq 2\right\} \\ &= m[n, +\infty) = +\infty. \end{aligned}$$

故 $g \circ f_n$ 不依测度收敛于 $g \circ f$.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3.4.14 习题3.14

设有定义可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数 $f(x)$, 且对任给的 $\delta > 0$, 存在 E 中的闭集 F , $m(E \setminus F) < \delta$, 使得 $f(x)$ 在 F 上连续, 试证明 $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

张祖锦解. 这就是 Lusin 定理的逆命题. 由题设, $\forall k$, 存在闭集 $F_k \subset E$: $m(E \setminus F_k) < \frac{1}{k}$, s.t. $f \in C(F_k)$. 于是 f 在 F_k 上可测. 令 $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$m(E \setminus F) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E \setminus F_k\right) = 0.$$

对 $\forall c \in \mathbb{R}$, @跟锦数学微信公众号

$$\{x \in E; f(x) > c\} = \{x \in E \setminus F; f(x) > c\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in F_k; f(x) > c\},$$

作为可数个可测集的并, 是可测集. 这就证明了 f 可测. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3.4.15 习题3.15

设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a, b]$ 上的可测函数列, $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的实值函数. 若对任给的 $\varepsilon > 0$, 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m^* (\{x \in [a, b]; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0,$$

试问 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的可测函数吗?

张祖锦解. 由题设, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m^* \{x \in [a, b]; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = 0.$$

于是

$$\begin{aligned} & \forall k, \exists N_k, \text{ s.t. } m^* \{x \in [a, b]; |f_{N_k}(x) - f(x)| > \varepsilon\} < \frac{1}{2^k} \\ \Rightarrow & \sum_{k=1}^{\infty} m^* \{x \in [a, b]; |f_{N_k}(x) - f(x)| > \varepsilon\} = 1 < \infty. \end{aligned}$$

令 $E = \overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} \{x \in [a, b]; |f_{N_k}(x) - f(x)| > \varepsilon\}$, 则

$$\begin{aligned} m^* E &= m^* \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} \{x \in [a, b]; |f_{N_k}(x) - f(x)| > \varepsilon\} \right) \\ &\leq m^* \bigcup_{k=j}^{\infty} \{x \in [a, b]; |f_{N_k}(x) - f(x)| > \varepsilon\} \\ &\leq \sum_{k=j}^{\infty} m^* \{x \in [a, b]; |f_{N_k}(x) - f(x)| > \varepsilon\} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

故 $m^* E = 0$. 对 $x \in [a, b] \setminus E$,

$$\begin{aligned} & x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} \{x \in [a, b]; |f_{N_k}(x) - f(x)| \leq \varepsilon\} \\ \Rightarrow & \exists j \geq 1, \forall k \geq j, |f_{N_k}(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性即知

$$x \in [a, b] \setminus E \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f_{N_k}(x) = f(x).$$

于是 $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{N_k}(x) = f(x)$, a.e. $x \in [a, b]$. 而 f 可测. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

3.4.16 习题3.16

设 $f(x), f_k(x) (k = 1, 2, \dots)$ 是 $E \subset \mathbb{R}$ 上实值可测函数. 若对任给 $\varepsilon > 0$, 必有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} m \left(\bigcup_{k=j}^{\infty} \{x: |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\} \right) = 0.$$

试证明对任给 $\delta > 0$, 存在 $e \subset E$ 且 $m(e) < \delta$, 使得 $f_k(x)$ 在 $E \setminus e$ 上一致收敛于 $f(x)$.

张祖锦解. 设 $E_k(\varepsilon) = E \{|f_k - f| > \varepsilon\}$, 则由题设, ④跟锦数学微信公众号

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{j \rightarrow \infty} m \left(\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\varepsilon) \right) = 0.$$

于是 ④跟锦数学微信公众号

$$\forall \delta > 0, \forall i \geq 1, \exists j_i \in \mathbb{N}, \text{ s.t. } m \left(\bigcup_{k=j_i}^{\infty} E_k \left(\frac{1}{i} \right) \right) < \frac{\delta}{2^i}.$$

令 $E_\delta = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=j_i}^{\infty} E_k \left(\frac{1}{i} \right)$, 则 ④跟锦数学微信公众号

$$mE_\delta \leq \sum_{i=1}^{\infty} m \left(\bigcup_{k=j_i}^{\infty} E_k \left(\frac{1}{i} \right) \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^i} = \delta,$$

且 $f_k = f$ 于 ④跟锦数学微信公众号

$$E \setminus E_\delta = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcap_{k=j_i}^{\infty} \left(x \in E; |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{i} \right).$$

事实上, $\forall \varepsilon > 0, \exists i, \text{ s.t. } \frac{1}{i} < \varepsilon$, 而对 $\forall x \in E \setminus E_\delta$, ④跟锦数学微信公众号

$$\forall k \geq j_i, |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{i} < \varepsilon.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4 Lebesgue 积分

4.1 非负可测函数的积分

4.1.1 P137思考题01

设 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ 是 E 上的非负可积函数, 则

$$(1) F(x) = \left[\sum_{k=1}^m (f_k(x))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ 在 } E \text{ 上可积};$$

$$(2) G(x) = \sum_{1 \leq i, k \leq m} (f_i(x) f_k(x))^{\frac{1}{2}} \text{ 在 } E \text{ 上可积}.$$

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} 0 \leq F(x) &= \left[\sum_{k=1}^m (f_k(x))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{k=1}^m f_k(x), \\ 0 \leq G(x) &= \sum_{1 \leq i, k \leq m} (f_i(x) f_k(x))^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{1 \leq i, k \leq m} \frac{f_i(x) + f_k(x)}{2}. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.1.2 P137思考题02

设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中递增可测集列, 且 $E_k \rightarrow E (k \rightarrow \infty)$. 若 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\int_E f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f(x) dx.$$

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f(x) \chi_{E_k}(x) dx \stackrel{\text{Levi}}{=} \int_E f(x) dx.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.1.3 P137思考题03

设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的非负可积函数列. 若 $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = 0$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E [1 - e^{-f_k(x)}] dx = 0.$$

张祖锦解. 由 $1 - e^{-t} \leq t, \forall t \geq 0$ 知 @跟锦数学微信公众号

$$0 \leq \int_E [1 - e^{-f_k(x)}] dx \leq \int_E f_k(x) dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.1.4 P137思考题04

设 $f(x)$ 是 E 上的非负可积函数, 则对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\int_E f(x) \chi_{\{x \in E; f(x) > N\}}(x) dx < \varepsilon.$$

张祖锦解. 由 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_E f(x) \chi_{E \setminus \{f \leq N\}}(x) dx \stackrel{\text{Levi}}{=} \int_E f(x) dx$$

知 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f(x) \chi_{E \setminus \{f > N\}}(x) dx &= 0 \\ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{ s.t. } \int_E f(x) \chi_{E \setminus \{f > N\}}(x) dx &< \varepsilon. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.1.5 P137思考题05

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0, n]} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{2x} dx = \int_{[0, +\infty)} e^{-x} dx.$$

张祖锦解. 设 $y = \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t$, 则 (注意到 $\ln(1+t) \geq \frac{t}{1+t}, t > -1$) @跟锦数学微信公众号

$$\ln y = t \ln \left(1 + \frac{x}{t}\right) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln \left(1 + \frac{x}{t}\right) + t \frac{1}{1 + \frac{x}{t}} \cdot \frac{-x}{t^2} = \ln \left(1 + \frac{x}{t}\right) - \frac{\frac{x}{t}}{1 + \frac{x}{t}} \geq 0.$$

故 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \chi_{[0, n]}(x) \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx \\ &\stackrel{\text{Levi}}{=} \int_0^\infty e^x e^{-2x} dx = \text{右端}. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.1.6 P137思考题06

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, 1]} x^n dx = 0.$$

张祖锦解. 由 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, 1]} (1 - x^n) dx \stackrel{\text{Levi}}{=} \int_{[0, 1]} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^n) dx = 1$$

即知结论成立. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.1.7 P143思考题07

设 $f^3(x)$ 是 E ($m(E) < +\infty$) 上的非负可积函数, 则 $f^2(x)$ 在 E 上可积.

张祖锦解. 由 Young 不等式 $p, q > 1, a, b > 0 \Rightarrow ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ 知 @跟锦数学微

信公众号

$$f^2(x) = 1 \cdot f^2(x) \leq \frac{1}{3} \cdot 1^3 + \frac{2}{3} [f^2(x)]^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} f^3(x).$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.1.8 P143思考题08

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上非负可测, 则 $f^3(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积当且仅当 @跟锦数学微信公

众号

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot m(\{x \in [a, b]; f(x) > n\}) < +\infty.$$

张祖锦解. 设 $E_n = \{x \in [a, b]; n \leq f(x) < n+1\}$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\int_E f^3(x) dx = \int_{\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n} f^3(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} f^3(x) dx \begin{cases} \geq \sum_{n=0}^{\infty} n^3 \cdot mE_n, \\ \leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^3 \cdot mE_n. \end{cases}$$

故 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} f^3 \text{ 可积} &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n^k \cdot mE_k < \infty, k = 0, 1, 2, 3 \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n^3 \cdot mE_k < \infty \quad (n^k \cdot mE_k \leq n^3 \cdot mE_k, k = 0, 1, 2). \end{aligned}$$

又由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot m(\{x \in [a, b]; f(x) > n\}) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sum_{k=n}^{\infty} mE_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^k n^2 \cdot mE_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^k k^2 \cdot mE_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \cdot mE_k, \end{aligned}$$

@跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot m(\{x \in [a, b]; f(x) > n\}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^k n^2 \cdot mE_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} mE_k \geq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \cdot mE_k \end{aligned}$$

即知结论成立. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.1.9 P143思考题09

由

设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数列. 若有 @跟锦数学微信公众号

公

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), f_k(x) \leq f(x) \quad (x \in E; k = 1, 2, \dots),$$

则对 E 的任一可测子集 e , 有 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_e f_k(x) dx = \int_e f(x) dx.$$

张

张祖锦解: 由 $f_k \leq f$ 知 @跟锦数学微信公众号

$$\int_e f_k(x) dx \leq \int_e f(x) dx \Rightarrow \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_e f_k(x) dx \leq \int_e f(x) dx.$$

另一方面, 由 Fatou 引理, @跟锦数学微信公众号

$$\int_e f(x) dx = \int_e \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx \leq \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_e f_k(x) dx.$$

结合上述两式即知结论成立. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.1.10 P143思考题10

设 $\{E_n\} \subset [0, 1]$ 是可测集列. 若 $m(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E_n) = 0$, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $[0, 1]$ 的可测子集 A , 使得 $m([0, 1] \setminus A) < \varepsilon$, 且有 @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(A \cap E_n) < +\infty.$$

张祖锦解: 由 @跟锦数学微信公众号

$$[0, 1] \setminus \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} ([0, 1] \setminus E_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} ([0, 1] \setminus E_k)$$

知 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x \in [0, 1] \setminus \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E_n &\Leftrightarrow \exists n, \forall k \geq n, x \notin E_k \Leftrightarrow \exists n, \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i}(x) \leq n \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i}(x) < \infty. \end{aligned}$$

这表明 $\sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i}(x)$ 是几乎处处有限的可测函数. 由 Lusin 定理, @跟锦数学微信公众号

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ 闭 } A \subset [0, 1], m([0, 1] \setminus A) < \varepsilon, \text{ s.t. } \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x) \in C(A).$$

张祖锦编著 微信公众账号: 跟锦数学/跟锦考研/小锦教学/数学考研锦囊/数学奥赛 微信: zhangzujin361

由 $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x)$ 是有界闭集 A 上的连续函数知它有界, 即 $\exists M > 0$, s.t. $\forall x \in A, \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x) \leq M$. 跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \forall x \in A, \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x) &\leq M \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} m(A \cap E_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_A \chi_{E_n}(x) dx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_A \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x) dx \leq M \cdot A < \infty. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.2 一般可测函数的积分

4.2.1 P149思考题01

若 $f \in L(\mathbb{R}^n), g \in L(\mathbb{R}^n)$, 则函数 跟锦数学微信公众号

$$m(x) = \min\{f(x), g(x)\}, M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

在 $\mathbb{R}^n$ 上可积.

张祖锦解. 跟锦数学微信公众号

$$m(x) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}, M(x) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.2.2 P149思考题02

设有定义在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的二元函数: 跟锦数学微信公众号

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & xy \text{ 为无理数}, \\ 2, & xy \text{ 为有理数}, \end{cases}$$

则 $\iint_{[0,1]^2} f(x, y) dx dy = 1.$

张祖锦解. 设 $[0, 1]$ 中的有理数全体为 $\{r_n\}$, 则 跟锦数学微信公众号

$$Z \equiv \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]; xy \text{ 为有理数}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(x, \frac{r_n}{x}\right); x \in [0, 1] \right\}.$$

由外测度的次可数可加性知 $m^*Z = 0$. 故 $f = 1$, a.e., $(x, y) \in [0, 1]^2$, 进而 跟锦数学微信公众号

$$\iint_{[0,1]^2} f(x, y) dx dy = \iint_{[0,1]^2} 1 dx dy = 1.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.2.3 P149思考题03

若 $f \in L(E)$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$m(\{x \in E; |f(x)| > k\}) = O\left(\frac{1}{k}\right) \quad (k \rightarrow \infty).$$

张祖锦解. 设 $E_k = E[|f| > k]$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$k \cdot mE_k = \int_{E_k} k \, dx \leq \int_{E_k} |f(x)| \, dx \leq \int_E |f(x)| \, dx.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.2.4 P149思考题04

设 $f \in L((0, +\infty))$, 令 @跟锦数学微信公众号

$$f_n(x) = f(x)\chi_{(0,n)}(x) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

则 $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上依测度收敛于 $f(x)$.

张祖锦解. 对 $\forall \varepsilon > 0$, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} m\{x \in (0, +\infty); |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} &= m\{x > n; |f(x)| > \varepsilon\} \\ &= \int_{\{x > n; |f(x)| > \varepsilon\}} \frac{|f(x)|}{\varepsilon} \, dx \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\{x > n\}} |f(x)| \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.2.5 P149思考题05

设 $f \in L([0, 1])$. 若 $\int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 e^{f(x)} \, dx$, 则 $f(x) = C$ (常数), a.e. $x \in [0, 1]$.

张祖锦解.

(1) 由 e^x 严格凸知 $e^x \geq e^a + e^a(x - a), \forall x \in \mathbb{R}$, 且等号成立当且仅当 $x = a$.

(2) 设 $C = \int_0^1 f(x) \, dx$, 则由题设, @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 [e^{f(x)} - e^C - e^C(f(x) - C)] \, dx = 0.$$

由非负可测函数的积分如果为零, 则被积函数几乎处处为零[书第 134 页 (iii)] 知

@跟锦数学微信公众号

$$e^{f(x)} - e^C - e^C[f(x) - C] = 0, \text{ a.e. } x \in [0, 1] \Leftrightarrow f(x) = C, \text{ a.e. } x \in [0, 1].$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.2.6 P149思考题06

设 $f \in L(\mathbb{R}^1)$, 且对任意的区间 I , 记 @跟锦数学微信公众号

$$f_I = \frac{1}{|I|} \int_I f(x) dx, E_I = \{x \in I; f(x) > f_I\}.$$

则 @跟锦数学微信公众号

$$\int_I |f(x) - f_I| dx = 2 \int_{E_I} [f(x) - f_I] dx.$$

张祖锦解. 由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \int_I |f(x) - f_I| dx &= \int_{E_I} [f(x) - f_I] dx + \int_{I \setminus E_I} [f_I - f(x)] dx, \\ \int_{I \setminus E_I} [f(x) - f_I] dx &= \int_I [f_I - f(x)] dx - \int_{E_I} [f_I - f(x)] dx \\ &= 0 + \int_{E_I} [f(x) - f_I] dx \end{aligned}$$

即知结论成立. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.2.7 P154思考题07

设 $f \in L(\mathbb{R}), g \in L(\mathbb{R})$, 且有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_{[a,x]} f(t) dt = \int_{[a,x]} g(t) dt, x \in \mathbb{R},$$

则 $f(x) = g(x)$, a.e. $x \in \mathbb{R}$.

张祖锦解.

(1) 由书第 150 页例 6 知 @跟锦数学微信公众号

$$f \in L([a, b]); \forall c \in [a, b], \int_{[a,c]} f(x) dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \text{ a.e. } x \in [a, b].$$

(2) 令 $F(x) = f(x) - g(x)$, 则由第 1 步知 @跟锦数学微信公众号

$$F(x) = 0, \text{ a.e. } x \in [a, b] \Rightarrow f(x) = g(x), \text{ a.e. } x \in [a, b].$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.2.8 P154思考题08

设 $f \in L(\mathbb{R})$. 若对 $\mathbb{R}$ 上任意的有界可测函数 $\varphi(x)$, 都有 $\textcircled{\text{跟锦数学微信公众号}}$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x) dx = 0,$$

则 $f(x) = 0$, a.e. $x \in \mathbb{R}$.

张祖锦解.取 $\textcircled{\text{跟锦数学微信公众号}}$

$$\phi_{nc}(x) = \chi_{[n, n+c]}(x), n \in \mathbb{Z}, 0 \leq c \leq 1.$$

则对 $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\textcircled{\text{跟锦数学微信公众号}}$

$$0 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi_{nc}(x) dx = \int_{[n, n+c]} \phi(x) dx, \forall 0 \leq c \leq 1.$$

由书第 150 页例 6 知 $\textcircled{\text{跟锦数学微信公众号}}$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f(x) = 0, \text{ a.e. } x \in [n, n+1]$$

$$\Rightarrow \exists \mathcal{M} \ni Z_n \subset [n, n+1] : mZ_n = 0, \text{ s.t. } f(x) = 0, x \in [n, n+1] \setminus Z_n$$

$$\Rightarrow \exists \mathcal{M} \ni Z = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} Z_n : mZ = 0, \text{ s.t. } f(x) = 0, x \in \mathbb{R} \setminus Z$$

$$\Rightarrow f(x) = 0, \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.2.9 P159思考题01

设 $f \in C([a, b])$, $\varphi \in C([a, b])$, $F \in L([a, b])$, 且对 $x \in [a, b]$, 有 $\textcircled{\text{跟锦数学微信}}$

公众号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x), \varphi_n \in C^{(1)}([a, b]) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\frac{d}{dx} \varphi_n(x) = f(x)\varphi_n(x), |f(x)\varphi_n(x)| \leq F(x),$$

试证明 $\varphi'(x) = f(x)\varphi(x), x \in [a, b]$.

张祖锦解. $\textcircled{\text{跟锦数学微信公众号}}$

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) - \varphi(a) &= \int_a^x \varphi'_n(t) dt = \int_a^x f(t)\varphi_n(t) dt \\ \xRightarrow{\text{点态控制收敛}} \varphi(x) - \varphi(a) &= \int_a^x f(t)\varphi(t) dt \xRightarrow{\text{右端可得, 而左端亦可得}} \varphi'(x) = f(x)\varphi(x). \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.2.10 P159思考题02

试证明函数列 $\{\cos nx\}$ 在 $[-\pi, \pi)$ 不是依测度收敛于 0 的.

张祖锦解. 用反证法. 若 $\{\cos nx\}$ 在 $[-\pi, \pi)$ 依测度收敛于 0, 则由 @跟锦数学微信公众号

$$\{x \in [-\pi, \pi); \cos^2 nx \geq \varepsilon\} = \{x \in [-\pi, \pi); |\cos nx - 0| \geq \sqrt{\varepsilon}\}$$

知 $\{\cos^2 nx\}$ 在 $[-\pi, \pi)$ 依测度收敛于 0. 据 Riesz 定理, @跟锦数学微信公众号

$$\exists n_k, \text{ s.t. } \lim_{k \rightarrow \infty} \cos^2 n_k x = 0, \text{ a.e. .}$$

再由控制收敛定理, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{[-\pi, \pi)} \lim_{k \rightarrow \infty} \cos^2 n_k x \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[-\pi, \pi)} \cos^2 n_k x \, dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2n_k x}{2} \, dx = \pi. \end{aligned}$$

这是一个矛盾. 故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.2.11 P159思考题03

设 $f \in L((0, +\infty))$, 试证明函数 @跟锦数学微信公众号

$$g(x) = \int_{[0, +\infty)} \frac{f(t)}{x+t} \, dt$$

在 $(0, +\infty)$ 上连续.

张祖锦解. 对 $\forall x_0 > 0, \forall x_n \rightarrow x_0$, 当 n 充分大时, $x_n > \frac{x_0}{2}$, 而 @跟锦数学微信公众号

$$\left| \frac{f(t)}{x_n + t} \right| \leq \frac{|f(t)|}{\frac{x_0}{2}} \in L((0, +\infty)).$$

据控制收敛定理知 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, +\infty)} \frac{f(t)}{x_n + t} \, dt = \int_{[0, +\infty)} \frac{f(t)}{x_0 + t} \, dt = g(x_0).$$

由归结原理即知 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$. 而 g 在 x_0 处连续. 由 $x_0 > 0$ 的任意性即知结论成立. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.2.12 P159思考题04

设 $f \in L(E)$, 记 $E_k = \left\{ x \in E; |f(x)| < \frac{1}{k} \right\}$, 试证明 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} |f(x)| dx = 0.$$

张祖锦解. 由 $E_k \searrow E_k^c \nearrow$ 及 Levi 定理知 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k^c} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f(x) \chi_{E_k^c}(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

两边减去 $\int_E f(x) dx$ 即知结论成立. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.2.13 P159思考题05

设 $f, g \in L(E)$, $f_k, g_k \in L(E)$, $|f_k(x)| \leq M$ ($k = 1, 2, \dots$), @跟锦数学微信公众号

$$\int_E |f_k(x) - f(x)| dx \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

$$\int_E |g_k(x) - g(x)| dx \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

试证明 @跟锦数学微信公众号

$$\int_E |f_k(x)g_k(x) - f(x)g(x)| dx \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

张祖锦解. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 设 $E_k(\varepsilon) = E[|f_k - f| \geq \varepsilon]$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\varepsilon \cdot mE[|f_k - f| \geq \varepsilon] \leq \int_{E_k(\varepsilon)} |f_k(x) - f(x)| dx \leq \int_E |f_k(x) - f(x)| dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

故 f_k 依测度收敛于 f . 又由 @跟锦数学微信公众号

$$|[f_k(x) - f(x)]g(x)| \leq 2M|g(x)| \in L(E)$$

及依测度控制收敛定理知 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E |[f_k(x) - f(x)]g(x)| dx = 0.$$

进而 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} & \int_E |f_k(x)g_k(x) - f(x)g(x)| dx \\ & \leq \int_E |f_k(x)[g_k(x) - g(x)]| dx + \int_E |[f_k(x) - f(x)]g(x)| dx \\ & \leq M \int_E |g_k(x) - g(x)| dx + \int_E |[f_k(x) - f(x)]g(x)| dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.2.14 P159思考题06

设 $f_k \in L(E)$ ($k = 1, 2, \dots$), 且 $f_k(x)$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$. 若 $m(E) < +\infty$, 试证明 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

张祖锦解. 由 $f_n \Rightarrow f$ 于 E 知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists N, \text{ s.t. } \forall n \geq N, \forall x \in E, |f_n(x) - f(x)| < 1.$$

特别地 $(\max_{1 \leq i \leq N} |f_i(x)|) \in L(E)$ 是 P149 思考题 1 的结论), @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} & |f_N(x) - f(x)| < 1 \\ \Rightarrow & |f(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| < 1 + |f_N(x)| \\ \Rightarrow & |f_n(x)| \leq \begin{cases} \max_{1 \leq i \leq N} |f_i(x)|, & 1 \leq n < N \\ |f(x)| + 1, & n \geq N \end{cases} < \max_{1 \leq i \leq N} |f_i(x)| + 2 \in L(E). \end{aligned}$$

据控制收敛定理即知结论成立. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.2.15 P162思考题07

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上非负可积, 且有 $E \subset (0, +\infty)$, @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 f(x) dx = 1,$$

则 $\int_E f(x) \cos x dx \neq 1$.

张祖锦解. 用反证法. 事实上, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} & \int_E f(x) \cos x dx = 1 \Rightarrow \int_E f(x)(1 - \cos x) dx = 0 \\ \Rightarrow & f(x)(1 - \cos x) = 0, \text{ a.e. } x \in E \\ \Rightarrow & \exists \mathcal{M} \ni Z_0 \subset E : mZ_0 = 0, \text{ s.t. } f(x)(1 - \cos x) = 0, x \in E \setminus Z_0 \\ \Rightarrow & \exists \mathcal{M} \ni Z = Z_0 \cup \{2k\pi \in E; k \geq 1\} \subset E : mZ = 0, \text{ s.t. } f(x) = 0, x \in E \setminus Z \\ \Rightarrow & f(x) = 0, \text{ a.e. } x \in E \Rightarrow \int_E f(x) dx = 0, \text{ 与题设矛盾. 故有结论.} \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.2.16 P162思考题08

设 $f \in L(\mathbb{R})$, $f_n \in L(\mathbb{R})$ ($n = 1, 2, \dots$), 且有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

则 $f_n(x) \rightarrow f(x)$, a.e. $x \in \mathbb{R}$.

张祖锦解. 由 @跟锦数学微信公众号

$$+\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| dx \stackrel{***}{=} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f(x)| dx$$

知 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f(x)|$ a.e. 有限, 而 a.e. 收敛. 由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 知

@跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.2.17 P162思考题09

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_n| < \ln n$ ($n = 2, 3, \dots$), 则 @跟锦数学微信公众号

$$\int_{[2, +\infty)} \sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-x} dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\ln n} n^{-2}.$$

张祖锦解. 由 @跟锦数学微信公众号

$$a_n n^{-x} = \frac{a_n}{e^{x \ln n}} < \frac{a_n}{\left(\frac{x \ln n}{2}\right)^2} = \frac{a_n}{\ln^2 n} \cdot \frac{1}{x^2} \in L((0, +\infty)),$$

@跟锦数学微信公众号

$$\sum_{n=2}^{\infty} \int_{[2, +\infty)} |a_n n^{-x}| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \ln n \cdot \int_2^{+\infty} n^{-x} dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

及逐项积分定理知 @跟锦数学微信公众号

$$\text{左端} = \sum_{n=2}^{\infty} \int_{[2, +\infty)} a_n n^{-x} dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\ln n} n^{-2}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.2.18 P162思考题10

设定义在 $E \times \mathbb{R}^n$ 上的函数 $f(x, y)$ 满足

- (1) 对每一个 $y \in \mathbb{R}^n$, $f(x, y)$ 是 E 上的可测函数;
- (2) 对每一个 $x \in E$, $f(x, y)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数.

若存在 $g \in L(E)$, 使得 $|f(x, y)| \leq g(x)$, a.e. $x \in E$, 则函数 $\textcircled{\text{跟锦数学微信公众号}}$

$$F(y) = \int_E f(x, y) dx$$

是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数.

张祖锦解. 对 $\forall y_0 \in \mathbb{R}^n, \forall y_n \rightarrow y_0$, $\textcircled{\text{跟锦数学微信公众号}}$

$$(2) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x, y_n) - f(x, y_0)] = 0, \forall x \in E,$$

$$\text{题设} \Rightarrow |f(x, y_n) - f(x, y_0)| \leq 2g(x) \in L(E), \text{ a.e. } x \in E.$$

据控制收敛定理即知 $\textcircled{\text{跟锦数学微信公众号}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E [f(x, y_n) - f(x, y_0)] dx = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) = F(y_0).$$

由归结原理即知 $\lim_{y \rightarrow y_0} F(y) = F(y_0)$. 这就证明了 F 在 y_0 处连续. 由 y_0 的任意性知 F 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.3 可积函数与连续函数的关系

4.4 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系

4.4.1 P173思考题01

设 $F \subset [0, 1]$ 是闭集, 且 $m(F) = 0$, 则 $\chi_F \in R([0, 1])$.

张祖锦解. 由 F 闭知 F^c 开. 对 $\forall x_0 \in [0, 1] \cap F^c, \forall \varepsilon > 0$, $\textcircled{\text{跟锦数学微信公众号}}$

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0, \text{ s.t. } B(x_0, \delta) \subset F^c &\Rightarrow B(x_0, \delta) \cap [0, 1] \subset F^c \\ &\Rightarrow \forall x \in B(x_0, \delta) \cap [0, 1], \chi_F(x) = 0 \\ &\Rightarrow \forall x \in B(x_0, \delta) \cap [0, 1], |\chi_F(x) - \chi_F(x_0)| = 0 < \varepsilon. \end{aligned}$$

这就证明了 $\chi_F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $x_0 \in [0, 1] \cap F^c$ 处连续. 于是 χ_F 的不连续点集 $D \subset F \Rightarrow mD \leq mF = 0$. 而 $\chi_F \in R([0, 1])$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.4.2 P173思考题02

设 $f: [0, 1] \rightarrow [a, b]$ 是 Riemann 可积函数, $g \in C([a, b])$, 则 $g(f(x))$ 在 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积.

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} f \in R([0, 1]) &\Rightarrow f \text{ a.e. 连续} \\ \Rightarrow \exists \mathcal{M} \ni Z \subset [0, 1] : mZ = 0, \text{ s.t. } \forall x_0 \in [0, 1] \setminus Z, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= f(x_0) \\ \Rightarrow \forall x_0 \in [0, 1] \setminus Z, \lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) &= g \circ f(x_0) \\ \Rightarrow g \circ f \text{ a.e. 连续} &\Rightarrow g \circ f \in R([a, b]). \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

4.4.3 P173思考题03

设 $f(x), g(x)$ 都是 $[a, b]$ 上的 Riemann 可积函数, $E \subset [a, b]$, 且 $\bar{E} = [a, b]$, 若有 $f(x) = g(x), x \in E$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} f, g \in R([a, b]) &\Rightarrow \begin{cases} \exists Z_1 \subset [0, 1] : mZ_1 = 0, \text{ s.t. } f \text{ 在 } [0, 1] \setminus Z_1 \text{ 上连续} \\ \exists Z_2 \subset [0, 1] : mZ_2 = 0, \text{ s.t. } g \text{ 在 } [0, 1] \setminus Z_2 \text{ 上连续} \end{cases} \\ &\Rightarrow \exists Z = Z_1 \cup Z_2 : mZ = 0, \text{ s.t. } f, g \text{ 在 } [0, 1] \setminus Z \text{ 上都连续.} \end{aligned}$$

对 $\forall x_0 \in [0, 1] \setminus Z$, 由 $\bar{E} = [0, 1]$ 知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists E \ni x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_0) \xrightarrow[\text{原理}]{\text{f.t.d.}} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \xrightarrow[\text{原理}]{\text{f.t.d.}} g(x_0).$$

故 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \left(\int_Z + \int_{[a, b] \setminus Z} \right) f(x) dx = \int_{[a, b] \setminus Z} f(x) dx \\ &= \int_{[a, b] \setminus Z} g(x) dx = \left(\int_Z + \int_{[a, b] \setminus Z} \right) g(x) dx = \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

4.4.4 P177思考题04

函数 $f(x) = \sin x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上不可积.

张祖锦解. 由 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^x |\sin x^2| dx \stackrel{x^2=t}{=} \frac{1}{2} \int_0^x \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}} dt \geq \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\sin^2 t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{4} \int_0^x \frac{1 - \cos 2t}{\sqrt{t}} dt = +\infty$$

即知函数 $f(x) = \sin x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上不是 Lebesgue 可积的. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.5 重积分与累次积分的关系

4.5.1 P184思考题01

设 $f(x, y)$ 在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上可积, 试证明 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_y^1 f(x, y) dx \right) dy.$$

张祖锦解. 设 $E = \{(x, y) \in [0, 1]^2; 0 \leq y \leq x\}$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\text{左端} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \chi_E(x, y) dy dx$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.5.2 P184思考题02

设 A, B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集, 试证明 @跟锦数学微信公众号

$$\int_{\mathbb{R}^n} m((A - \{x\}) \cap B) dx = m(A) \cdot m(B).$$

张祖锦解. 由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} y \in (A - \{x\}) \cap B &\Leftrightarrow y \in A - \{x\}, y \in B \Leftrightarrow y + x \in B, y + B \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; x + y \in A, y \in B\} := E \\ &\Leftrightarrow x \in A - \{y\}, y \in B \end{aligned}$$

知 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x, y) dy dx \stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x, y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A-\{y\}}(x) \chi_B(y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A-\{y\}}(x) dx \right] dy \\ &= \int_B mA dy = mA \cdot mB. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6 P189习题4

4.6.1 习题4.01

设 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处大于零的可测函数, 且满足 $\int_E f(x) dx = 0$, 试证明 $m(E) = 0$.

张祖锦解. 设 $E_k = E \left[f > \frac{1}{k} \right]$, 则 $E_k \nearrow E_0 = E[f > 0]$. 由 $f > 0$, a.e. $x \in E$ 知 $mE_0^c = 0$. 于是 ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} mE &= mE_0 = m \left(\lim_{k \rightarrow \infty} E_k \right) \stackrel{E_k \nearrow E_0}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} mE_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} 1 dx \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} kf(x) dx = 0. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.2 习题4.02

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上非负可积, $f(0) = 0$, 且 $f'(0)$ 存在, 试证明存在积分 ④跟锦数学微信公众号

$$\int_{[0, +\infty)} \frac{f(x)}{x} dx.$$

张祖锦解. 由 $f'(0)$ 存在知 ④跟锦数学微信公众号

$$\exists \delta > 0, \text{ s.t. } \forall x \in (0, \delta), \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0) \right| < 1 \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{x} \right| < |f'(0)| + 1.$$

于是 ④跟锦数学微信公众号

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq [|f'(0)| + 1] \cdot \chi_{(0, \delta)}(x) + \frac{|f(x)|}{\delta} \cdot \chi_{(\delta, +\infty)}(x) \in L((0, +\infty)).$$

进而 $\frac{f(x)}{x} \in L((0, +\infty))$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.3 习题4.03

设 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数. 若存在 $E_k \subset E, m(E \setminus E_k) < \frac{1}{k}$ ($k = 1, 2, \dots$), 使得极限 $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f(x) dx$ 存在, 试证明 $f(x)$ 在 E 上可积.

张祖锦解. 设 $f_k(x) = f(x)\chi_{E_k}(x)$, 则 ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, mE[|f_k - f| > \varepsilon] &\leq m(E \setminus E_k) < \frac{1}{k} \\ \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} mE[|f_k - f| > \varepsilon] &= 0. \end{aligned}$$

故 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \{f_k\} \text{ 依测度收敛于 } f &\stackrel{\text{a.e.}}{\implies} \exists k_j, \text{ s.t. } \lim_{j \rightarrow \infty} f_{k_j}(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in E \\ \Rightarrow \int_E f(x) dx &= \int_E \lim_{j \rightarrow \infty} f_{k_j}(x) dx \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int_E f_{k_j}(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx < \infty. \end{aligned}$$

故 $f \in L(E)$, 张祖锦 (微信: zhangzujin301, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.4 习题4.04

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上非负可积函数, 令 @跟锦数学微信公众号

$$F(x) = \int_{(-\infty, x]} f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

若 $F \in L(\mathbb{R})$, 试证明 $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0$.

张祖锦解. 由 f 非负知 $0 \leq F \nearrow$. 而 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}} F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) dt$$

存在. 又由 $F \in L(\mathbb{R})$ 及反证法知上述极限 $= 0$, 而结论得证. 事实上, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \neq 0 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = c > 0 \Rightarrow \exists X > 0, \text{ s.t. } \forall x \geq X, F(x) > \frac{c}{2} \\ &\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} F(x) dx \geq \int_{[X, +\infty)} F(x) dx \geq \int_{[X, +\infty)} \frac{c}{2} dx = +\infty \\ &\Rightarrow \text{与 } F \in L(\mathbb{R}) \text{ 矛盾. 故有结论.} \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin301, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.5 习题4.05

设 $f_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) 是 $\mathbb{R}^n$ 上非负可积函数列. 若对任意可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$, 都有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_E f_k(x) dx \leq \int_E f_{k+1}(x) dx,$$

试证明 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx.$$

张祖锦解.

(1) 由 跟锦数学微信公众号

$$\int_E [f_{k+1}(x) - f_k(x)] dx \geq 0, \forall \mathcal{M} \ni E \subset \mathbb{R}^n \quad (*)$$

知 跟锦数学微信公众号

$$f_{k+1}(x) - f_k(x) \geq 0, f_{k+1}(x) \geq f_k(x), \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^n.$$

事实上, 若不然, 跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} 0 < c := mE[f_{k+1} < f_k] &= mE[f_{k+1} - f_k < 0] \\ &= m \left(\bigcup_{l=1}^{\infty} E \left[f_{k+1} - f_k < -\frac{1}{l} \right] \right) = \lim_{l \rightarrow \infty} mE \left[f_{k+1} - f_k < -\frac{1}{l} \right]. \end{aligned}$$

而 $\exists L$, s.t. $\forall l \geq L, mE \left[f_{k+1} - f_k < -\frac{1}{l} \right] > \frac{c}{2}$. 于是 跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \int_{E[f_{k+1}-f_k < -\frac{1}{l}]} [f_{k+1}(x) - f_k(x)] dx &< -\frac{1}{n} \cdot mE \left[f_{k+1} - f_k < -\frac{1}{l} \right] \\ &< -\frac{1}{n} \cdot \frac{c}{2} < 0. \end{aligned}$$

这与 (*) 矛盾. 故有结论.

(2) 由第 1 步知 跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx \stackrel{\text{Levi}}{=} \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.6 习题4.06

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}$ 上的非负可测函数, 且 $m(E) = 1$. 若有 $f(x)g(x) \geq 1, x \in E$, 试证明 跟锦数学微信公众号

$$\left(\int_E f(x) dx \right) \left(\int_E g(x) dx \right) \geq 1.$$

张祖锦解. 由题设, 跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \left(\int_E f(x) dx \right) \left(\int_E g(x) dx \right) &= \int_E [\sqrt{f(x)}]^2 dx \cdot \int_E [\sqrt{g(x)}]^2 dx \\ &\stackrel{\text{Schwarz}}{\geq} \left[\int_E \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)} dx \right]^2 \geq \left(\int_E \sqrt{1} dx \right)^2 \geq 1. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.7 习题4.07

假设有定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $f(x)$. 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $g, h \in L(\mathbb{R}^n)$, 满足 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$), 并且使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x) - g(x)| dx < \varepsilon,$$

试证明 $f \in L(\mathbb{R}^n)$.

张祖锦解. 由题设, ④跟锦数学微信公众号

$$\forall k \geq 1, \exists g_k, h_k \in L(\mathbb{R}^n), g_k(x) \leq f(x) \leq h_k(x), \text{ s.t. } \int_{\mathbb{R}^n} |h_k(x) - g_k(x)| dx < \frac{1}{k}.$$

于是 ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |h_k(x) - g_k(x)| dx &\Rightarrow h_k(x) - g_k(x) \text{ 依测度收敛于 } 0 \\ \Rightarrow \exists k_j, \text{ s.t. } \lim_{j \rightarrow \infty} [h_{k_j}(x) - g_{k_j}(x)] &= 0, \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^n \\ \Rightarrow 0 \leq h_{k_j}(x) - f(x) \leq h_{k_j}(x) - g_{k_j}(x) &\xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \\ \Rightarrow f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} h_{k_j}(x), \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^n &\Rightarrow f \text{ 可测.} \end{aligned}$$

又由 ④跟锦数学微信公众号

$$g_1 \leq f \leq h_1 \Rightarrow 0 \leq f^+ \leq h_1^+ \leq |h_1|, 0 \leq f^- \leq g_1^- \leq |g_1|$$

知 ④跟锦数学微信公众号

$$\int_E |f(x)| dx = \int_E f^+(x) dx + \int_E f^-(x) dx \leq \int_E |h_1(x)| dx + \int_E |g_1(x)| dx < +\infty.$$

故 $f \in L(E)$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.8 习题4.08

设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中测度有限的可测集列, 且有 ④跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{E_k}(x) - f(x)| dx = 0,$$

试证明存在可测集 E , 使得 $f(x) = \chi_E(x)$, a.e. $x \in \mathbb{R}^n$.

张祖锦解.

(1) 先证明一个结论. 若 $\lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{E_k}(x)$ 存在, 则 $E = \lim_{k \rightarrow \infty} E_k$ 存在, 且 ④跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{E_k}(x) = \chi_E(x).$$

事实上, 由 $\chi_{E_k}(x) = \begin{cases} 1, & x \in E_k, \\ 0, & x \notin E_k \end{cases}$ 知 $\forall x \in \mathbb{R}^n, \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{E_k}(x)$ 要么取值为 1, 要么取值为 0. 若 $\lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{E_k}(x) = 0$, 则

$$\exists K, \text{ s.t. } \forall k \geq K, \chi_{E_k}(x) < \frac{1}{2} \Rightarrow \chi_{E_k}(x) = 0 \Rightarrow x \in E_k^c.$$

于是 $x \in \varliminf_{k \rightarrow \infty} E_k^c$. 若 $\lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{E_k}(x) = 1$, 则

$$\exists K, \text{ s.t. } \forall k \geq K, \chi_{E_k}(x) > \frac{1}{2} \Rightarrow \chi_{E_k}(x) = 1 \Rightarrow x \in E_k.$$

于是 $x \in \varliminf_{k \rightarrow \infty} E_k$. 这就证明了

$$\begin{aligned} \left\{ x \in \mathbb{R}^n; \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{E_k}(x) = 0 \right\} &\subset \varliminf_{k \rightarrow \infty} E_k^c, \\ \left\{ x \in \mathbb{R}^n; \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{E_k}(x) = 1 \right\} &\subset \varliminf_{k \rightarrow \infty} E_k. \end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned} \overline{\varliminf_{k \rightarrow \infty} E_k} &\subset \left\{ x \in \mathbb{R}^n; \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{E_k}(x) = 0 \right\}^c \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n; \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{E_k}(x) = 1 \right\} \subset \varliminf_{k \rightarrow \infty} E_k. \end{aligned}$$

这表明 $\lim_{k \rightarrow \infty} E_k$ 存在, 且

$$\begin{aligned} E &= \lim_{k \rightarrow \infty} E_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n; \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{E_k}(x) = 1 \right\} \\ &\Rightarrow \left(x \in E \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{E_k}(x) = 1 \right) \\ &\Rightarrow \chi_E(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{E_k}(x). \end{aligned}$$

(2) 往证题目.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{E_k}(x) - f(x)| dx = 0 \Rightarrow \chi_{E_k}(x) \text{ 依测度收敛于 } f(x)$$

$$\stackrel{\text{Riesz}}{\Rightarrow} \exists k_j, \text{ s.t. } \lim_{j \rightarrow \infty} \chi_{E_{k_j}}(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^n$$

$$\stackrel{\text{Riesz}}{\Rightarrow} \exists E = \lim_{j \rightarrow \infty} E_{k_j}, \text{ s.t. } \chi_E(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^n.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.9 习题4.9

设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的递增函数, 试证明对 $E \subset [0, 1], m(E) = t$, 有 ①跟锦数学微信公众号

$$\int_{[0,t]} f(x) dx \leq \int_E f(x) dx.$$

张祖锦解. 设 $E_1 = E \cap [0, t], E_2 = [0, t] \setminus E, E_3 = E \cap (t, 1]$, 则 $E_1 \cup E_2 = [0, t], E_1 \cup E_3 = E$, 且 $mE = t \Rightarrow mE_2 = mE_3$. 于是 ①跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \int_{[0,t]} f(x) dx &= \int_{E_1} f(x) dx + \int_{E_2} f(x) dx \geq \int_{E_1} f(x) dx + f(t) \cdot mE_2 \\ &= \int_{E_1} f(x) dx + f(t) \cdot mE_3 \geq \int_{E_1} f(x) dx + \int_{E_3} f(x) dx = \int_E f(x) dx. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.10 习题4.10

设 $f \in L(\mathbb{R}^n), E \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集, 试证明 ①跟锦数学微信公众号

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \int_{E+y} |f(x)| dx = 0.$$

张祖锦解. 由 $f \in L(\mathbb{R}^n)$ 知 ①跟锦数学微信公众号

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K, \text{ s.t. } \int_{|x| > K} |f(x)| dx < \varepsilon.$$

又由 E 是紧集知 E 是有界闭集, 而 ①跟锦数学微信公众号

$$\exists R > 0, \text{ s.t. } E \subset B(0, R).$$

当 $|y| > K + R$ 时, 由 ①跟锦数学微信公众号

$$z \in B(y, R) \Rightarrow |z - y| < R \Rightarrow |z| \geq |y| - |z - y| > (K + R) - R = K$$

知 $B(y, R) \subset \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \geq K\}$, 而 ①跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \int_{E+y} |f(x)| dx &\leq \int_{B(0,R)+\{y\}} |f(x)| dx = \int_{B(y,R)} |f(x)| dx \\ &\leq \int_{|x| > K} |f(x)| dx < \varepsilon. \end{aligned}$$

这就证明了 $\lim_{|y| \rightarrow \infty} \int_{E+y} |f(x)| dx = 0$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.11 习题4.11

证明下列等式:

$$(1) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{(0,+\infty)} \frac{x^\alpha - 1}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \quad (\alpha > 1);$$

$$(2) \int_{(0,+\infty)} \frac{\sin ax}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2 + a^2} \quad (a > 0).$$

张祖锦解.

(1) ①跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \int_{(0,+\infty)} \frac{x^\alpha - 1}{e^x - 1} dx &= \int_{(0,+\infty)} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \int_{(0,+\infty)} x^{\alpha-1} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} dx \\ &\stackrel{\text{逐项积分}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,+\infty)} x^{\alpha-1} e^{-nx} dx \stackrel{nx=t}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \int_{(0,+\infty)} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}. \end{aligned}$$

(2) 由 $\frac{\sin ax}{e^x - 1} \sim a \quad (x \rightarrow 0)$, $\left| \frac{\sin ax}{e^x - 1} \right| \leq \frac{1}{e^x - 1}$ 知 ①跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(0,+\infty)} |e^{-x} \sin ax \cdot e^{-nx}| dx &\stackrel{\text{逐项积分}}{=} \int_{(0,+\infty)} \sum_{n=0}^{\infty} |e^{-x} \sin ax \cdot e^{-nx}| dx \\ &= \int_{(0,+\infty)} \frac{|\sin ax|}{e^x - 1} dx < +\infty. \end{aligned}$$

再由逐项积分定理知 ①跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \int_{(0,+\infty)} \frac{\sin ax}{e^x - 1} dx &= \int_{(0,+\infty)} \frac{e^{-x} \sin ax}{1 - e^{-x}} dx = \int_{(0,+\infty)} e^{-ax} \sin ax \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} dx \\ &\stackrel{\text{逐项积分}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(0,+\infty)} e^{-(n+1)x} \sin ax dx \stackrel{ax=t}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a} \int_{(0,+\infty)} e^{-\frac{n+1}{a}t} \sin t dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{n+1}{a}\right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.12 习题4.12

设 $f \in L(\mathbb{R})$, $a > 0$, 试证明级数 ①跟锦数学微信公众号

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{a} + n\right)$$

在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处绝对收敛, 且其和函数 $S(x)$ 以 a 为周期, 且 $S \in L([0, a])$.

张祖锦解. 设题中函数项级数为 $S(x)$, 则 ④跟锦数学微信公众号

$$S(x+a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x+a}{a} + n\right) \stackrel{n+1-k}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{a} + k\right) = S(x).$$

故 $S(x)$ 以 a 为周期. 由 ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \int_0^a \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| f\left(\frac{x}{a} + n\right) \right| dx &\stackrel{x=at}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^a \left| f\left(\frac{x}{a} + n\right) \right| dx \\ &\stackrel{\frac{x}{a}+n=t}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} |f(t)| \cdot a dt = a \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < +\infty \end{aligned}$$

知被积函数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| f\left(\frac{x}{a} + n\right) \right|$ a.e. 有限, $x \in [0, a]$. 由 $\mathbb{R} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} [na, (n+1)a]$ 及 ④跟锦数学微信公众号

$$m^*\left(\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} E_k\right) = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, m^*E_k = 0$$

即知 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| f\left(\frac{x}{a} + n\right) \right|$ a.e. 有限, $x \in \mathbb{R}$. 从而 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| f\left(\frac{x}{a} + n\right) \right|$ a.e. 绝对收敛, $x \in \mathbb{R}$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.13 习题4.13

设 $f \in L(\mathbb{R})$, $p > 0$, 试证明 ④跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-p} f(nx) = 0, \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}.$$

张祖锦解. 由 ④跟锦数学微信公众号

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} |n^{-p} f(x)| dx \stackrel{\text{重排积分}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \int_{\mathbb{R}} |f(nx)| dx \stackrel{nx=t}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+p}} \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < +\infty$$

知被积函数 $\sum_{n=1}^{\infty} |n^{-p} f(x)|$ a.e. 有限, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} |n^{-p} f(x)| = 0$, a.e. $x \in \mathbb{R}$. 故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.14 习题4.14

设 $x^s f(x)$, $x^t f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可积, 其中 $s < t$, 试证明积分 ④跟锦数学微信公众号

$$\int_{[0, +\infty)} x^u f(x) dx, \quad u \in (s, t)$$

存在且是 $u \in (s, t)$ 的连续函数.

张祖锦解. 对 $\forall u \in (s, t), \forall (s, t) \ni u_n \rightarrow u$, 由 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{u_n} f(x) = x^u f(x), x \in (0, +\infty),$$

$$|x^{u_n} f(x)| \leq \max \{|x^s f(x)|, |x^t f(x)|\} \in L([0, +\infty))$$

及控制收敛定理知 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, +\infty)} x^{u_n} f(x) dx = \int_{[0, +\infty)} x^u f(x) dx.$$

由归结原理即知 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{u' \rightarrow u} \int_{[0, +\infty)} x^{u'} f(x) dx = \int_{[0, +\infty)} x^u f(x) dx.$$

故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.15 习题4.15

设 $f(x)$ 是 $(0, 1)$ 上的正值可测函数. 若存在常数 c , 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\int_{[0, 1]} [f(x)]^n dx = c \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

试证明存在可测集 $E \subset (0, 1)$, 使得 $f(x)$ 几乎处处等于 $\chi_E(x)$. 再问: 若 $f(x)$ 不是非负的又如何?

张祖锦解.

(1) 设 $E = (0, 1)$, $E_{1k} = E \left[f > 1 + \frac{1}{k} \right]$, 则 $E_{1k} \nearrow E_1 = E[f > 1]$. 由 @跟锦数学
微信公众号

$$c = \int_{[0, 1]} [f(x)]^n dx \geq \int_{E_{1k}} [f(x)]^n dx \geq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n \cdot mE_{1k}$$

知 @跟锦数学微信公众号

$$\forall n \geq 1, mE_{1k} \leq \frac{c}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} mE_{1k} = 0 \Rightarrow mE_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} mE_{1k} = 0.$$

(2) 设 $E_2 = E[0 < f < 1]$, 则由 f 取正值知 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} c &= \int_{[0, 1]} [f(x)]^n dx = \int_{E_1^c} [f(x)]^n dx = \int_{E[0 < f \leq 1]} [f(x)]^n dx \\ &= \int_{E_2} [f(x)]^n dx + \int_{E[f=1]} [f(x)]^n dx = \int_{E_2} [f(x)]^n dx + mE[f=1]. \end{aligned}$$

于是 @张祖锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \int_{E_2} [f(x)]^n dx &= c - mE[f=1] \\ \Rightarrow \int_{E_2} [f(x)]^n dx &= \int_{E_2} [f(x)]^{n+1} dx \\ \Rightarrow \int_{E_2} f^n(x)[1-f(x)] dx &= 0 \Rightarrow f^n(x)[1-f(x)] = 0, \text{ a.e. } x \in E_2 \\ \Rightarrow mE_2 &= mE[f^n(1-f) > 0] = 0. \end{aligned}$$

(3) 由第 1,2 步知 @张祖锦数学微信公众号

$$\exists \mathcal{M} = E_0 = E_1 \cup E_2 \subset (0, 1): mE_0 = 0, \text{ s.t. } f(x) = 1, x \in E \setminus E_0.$$

故 $f(x) = \chi_{E \setminus E_0}(x)$, a.e. $x \in (0, 1)$.

(4) 若 f 不是非负的, 则结论依然成立. 事实上, @张祖锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \int_{[0,1]} f^n(x) dx &= c \Rightarrow \forall n \geq 1, \int_{[0,1]} [f^2(x)]^n dx = c \\ \Rightarrow \forall n \geq 1, c &= \int_{\{x \in (0,1): f(x) \neq 0\}} [f^2(x)]^n dx = \int_{\{x \in (0,1): f^2(x) > 0\}} [f^2(x)]^n dx. \end{aligned}$$

于是对 $E_+ = \{x \in (0, 1); f^2(x) > 0\}$ 上的正值函数 $g(x) = f^2(x)$, 有 @张祖锦数学
微信公众号

$$\forall n \geq 1, c = \int_{E_+} g^n(x) dx.$$

据已证结论知 @张祖锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \exists \mathcal{M} \ni E \subset E_+, \text{ s.t. } g(x) &= \chi_E(x), \text{ a.e. } x \in E_+ \\ \Rightarrow f(x) &= \chi_E(x), \text{ a.e. } x \in E_+ \\ \Rightarrow f(x) &= \chi_E(x), \text{ a.e. } x \in (0, 1) \quad (f(x) = \chi_E(x), \forall x \in (0, 1) \setminus E_+). \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 张祖锦数学).

4.6.16 习题4.16

设 $f \in L([0, 1])$, 试证明 @张祖锦数学微信公众号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} n \ln \left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \right) dx = 0.$$

张祖锦解.

(1) 设 $g(t) = \ln(1+t^2) - t, t \geq 0$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$g'(t) = \frac{2t}{1+t^2} - 1 = -\frac{(t-1)^2}{1+t^2} \leq 0.$$

故 $\forall t \geq 0, g(t) \leq g(0) = 0$.

(2) 由 @跟锦数学微信公众号

$$0 \leq n \ln \left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \right) \leq n \cdot \sqrt{\frac{f^2(x)}{n^2}} = |f(x)| \in L([0, 1]),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \right) \stackrel{we}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{f^2(x)}{n^2} = 0$$

及控制收敛定理即知结论成立.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.17 习题4.17

设 $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_k \supset \cdots, E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k, f \in L(E_k) (k = 1, 2, \cdots)$, 试证明

@跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

张祖锦解. 由 $M \ni E_k \searrow E$ 知 $M \ni E_1 \setminus E_k \nearrow E_1 \setminus E$. 于是 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_1 \setminus E_k} f(x) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_1} \chi_{E_1 \setminus E_k}(x) f(x) dx \\ &\stackrel{Levi}{=} \int_{E_1} \int_{E_1 \setminus E} f(x) dx = \int_{E_1 \setminus E} f(x) dx. \end{aligned}$$

两边减去 $\int_{E_1} f(x) dx$ 即知结论成立. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.18 习题4.18

设 $f \in L(E)$, 且 $f(x) > 0 (x \in E)$, 试证明 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E [f(x)]^{\frac{1}{k}} dx = m(E).$$

张祖锦解. 由 $f \in L(E)$ 知 $mE_{\infty} = 0$, 其中 $E_{\infty} = E[|f| = +\infty]$. 再由 @跟锦数学微信公众号

$$[f(x)]^{\frac{1}{k}} \leq 1 \cdot \chi_{0 < f \leq 1}(x) + f(x) \cdot \chi_{f > 1} \in L(E);$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [f(x)]^{\frac{1}{k}} = 1, x \in E \setminus E_{\infty} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} [f(x)]^{\frac{1}{k}} = 1, \text{ a.e. } x \in E$$

及控制收敛定理即知 ④跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E [f(x)]^k dx = \int_E 1 dx = m(E).$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.19 习题4.19

设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[0, 1]$ 上的非负可测函数列, 且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上依测度收敛于 $f(x)$. 若有 ④跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_n(x) dx = \int_{[0,1]} f(x) dx, \quad (*)$$

试证明对 $[0, 1]$ 的任一可测子集 E , 有 ④跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

张祖锦解. 由习题 21 知 ④跟锦数学微信公众号

$$\int_E f(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx,$$

及 (要求 $(*)$ 中等式两端有限) ④跟锦数学微信公众号

$$\int_{[0,1] \setminus E} f(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1] \setminus E} f_n(x) dx \xrightarrow{**} \int_E f(x) dx \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx.$$

故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.20 习题4.20

设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的非负可积函数列, 且 $f_k(x)$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x) \equiv 0$. 若有 ④跟锦数学微信公众号

$$\int_E \max \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\} dx \leq M \quad (k = 1, 2, \dots),$$

试证明: $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = 0$.

张祖锦解. 设 $g_k(x) = \max_{1 \leq i \leq k} f_i(x)$, $g(x) = \sup_{i \geq 1} f_i(x)$, 则 ④跟锦数学微信公众号

$$\int_E g(x) dx \stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k(x) dx \leq M.$$

由 ④跟锦数学微信公众号

$$|f_k(x)| \leq g(x) \in L(E), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0, \text{ a.e. } x \in E$$

及控制收敛定理知 $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = 0$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.21 习题4.21

4.6.23

(依测度收敛型的 Fatou 引理) 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上依测度收敛于 $f(x)$ 的非负可测函数列, 试证明 ④跟锦数学微信公众号

$$\int_E f(x) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx.$$

张祖锦解. 由下极限定义, ④跟锦数学微信公众号

$$\exists k_j, \text{ s.t. } \lim_{j \rightarrow \infty} \int_E f_{k_j}(x) dx = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx.$$

而 ④跟锦数学微信公众号

f_k 依测度收敛于 $f \Rightarrow f_{k_j}$ 依测度收敛于 f

$$\Rightarrow \exists k_{j_i}, \text{ s.t. } \lim_{i \rightarrow \infty} f_{k_{j_i}}(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in E$$

$$\Rightarrow \int_E f(x) dx \stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_E f_{k_{j_i}}(x) dx \stackrel{**}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_E f_{k_j}(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.22 习题4.22

试证明: $\int_{[0, +\infty)} e^{-x^2} \cos 2xt dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-t^2}, t \in \mathbb{R}.$

张祖锦解. 设 $I(t) = \int_{(0, +\infty)} e^{-x^2} \cos 2xt dx$, 则由 ④跟锦数学微信公众号

$$\left| \frac{d}{dt}(e^{-x^2} \cos 2xt) \right| = |e^{-x^2}(-\sin 2xt) \cdot 2x| \leq 2xe^{-x^2} \in L((0, +\infty))$$

及积分号下求导定理 (书第 161 页定理 4.17) 知 ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} I'(t) &= \int_{(0, +\infty)} e^{-x^2} (-\sin 2xt) \cdot 2x dx = \int_{(0, +\infty)} \sin 2xt de^{-x^2} \\ &\stackrel{**}{=} - \int_{(0, +\infty)} \cos 2xt \cdot 2t \cdot e^{-x^2} dx = -2tI(t). \end{aligned}$$

于是 ④跟锦数学微信公众号

$$[e^{-t^2} I(t)]' = 0 \Rightarrow e^{t^2} I(t) = I(0) = \int_{(0, +\infty)} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow I(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-t^2}.$$

这里, 我们利用了书第 183 页例 2 的结果. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.23 习题4.23

设 $f \in L(\mathbb{R}^n)$, $f_k \in L(\mathbb{R}^n)$ ($k = 1, 2, \dots$), 且对于任一可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$, 有

$$\int_E f_k(x) dx \leq \int_E f_{k+1}(x) dx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

试证明 $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$, a.e. $x \in \mathbb{R}^n$.

张祖锦解.

(1) 同习题5的证明第1步知

$$f_k(x) \leq f_{k+1}(x), \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^n.$$

故

$$g(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x), \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^n.$$

由 $0 \leq f_k(x) - f_1(x) \nearrow g(x) - f_1(x)$, a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ 知对 $\forall A \ni E \subset \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E [f_k(x) - f_1(x)] dx &= \int_E [g(x) - f_1(x)] dx \\ \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx &= \int_E g(x) dx. \end{aligned}$$

由题设即知

$$\forall A \ni E \subset \mathbb{R}^n, \int_E f(x) dx = \int_E g(x) dx. \quad (*)$$

这表明

$$f(x) = g(x), \text{ a.e. } x \in E \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^n.$$

事实上, 若不然, 我们有

$$\begin{aligned} 0 < c &:= m\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq g(x)\} = m\{x \in \mathbb{R}^n; |f(x) - g(x)| > 0\} \\ &= m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R}^n; |f(x) - g(x)| > \frac{1}{i}\right\}\right) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} m\left\{x \in \mathbb{R}^n; |f(x) - g(x)| > \frac{1}{i}\right\}. \end{aligned}$$

而 $\exists i$, s.t. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \frac{c}{2} &< m \left\{ x \in \mathbb{R}^n; |f(x) - g(x)| > \frac{1}{i} \right\} \\ &= m \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n; f(x) - g(x) > \frac{1}{i} \right\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^n; f(x) - g(x) < -\frac{1}{i} \right\} \right) \\ &\leq m \left\{ x \in \mathbb{R}^n; f(x) - g(x) > \frac{1}{i} \right\} + m \left\{ x \in \mathbb{R}^n; f(x) - g(x) < -\frac{1}{i} \right\}. \end{aligned}$$

于是 @跟锦数学微信公众号

$$m \left\{ x \in \mathbb{R}^n; f(x) - g(x) > \frac{1}{i} \right\} > \frac{c}{4} \text{ 或 } m \left\{ x \in \mathbb{R}^n; f(x) - g(x) < -\frac{1}{i} \right\} > \frac{c}{4}.$$

不妨设前一情形成立, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) - g(x) > \frac{1}{i}\}} [f(t) - g(t)] dt &\geq \frac{1}{i} m \left\{ x \in \mathbb{R}^n; f(x) - g(x) > \frac{1}{i} \right\} \\ &\geq \frac{1}{i} \cdot \frac{c}{4} > 0. \end{aligned}$$

这与 (*) 矛盾. 故有结论.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.24 习题4.24

设 $\{f_k(x)\}, \{g_k(x)\}$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的两个可测函数列, 且有 $|f_k(x)| \leq g_k(x), x \in E$. 若 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = g(x), \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k(x) dx = \int_E g(x) dx < +\infty,$$

试证明 $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx$.

张祖锦解. 由 @跟锦数学微信公众号

$$|f_k(x)| \leq g_k(x) \Rightarrow g_k(x) - f_k(x) \geq 0, f_k(x) + g_k(x) \geq 0,$$

Fatou 引理及 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_k = a \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (a_k + a) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k + \lim_{k \rightarrow \infty} a$$

知 @跟锦数学微信公众号

$$\int_E [g(x) - f(x)] dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E [g_k(x) - f_k(x)] dx \Rightarrow \int_E f(x) dx \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx,$$

@跟锦数学微信公众号

$$\int_E [f(x) + g(x)] dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E [f_k(x) + g_k(x)] dx \Rightarrow \int_E f(x) dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx.$$

故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.25 习题4.25

设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的有界函数, 其不连续点集记为 D . 若 D 只有可列个极限点, 试证明 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的 Riemann 可积函数.

张祖锦解. 由书第 20 页思考题 2 知 D' 可数 $\Rightarrow D$ 可数 $\Rightarrow mD = 0 \Rightarrow f \in R([a, b])$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

4.6.26 习题4.26

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界函数. 若对于每一点 $x \in \mathbb{R}$, 存在极限 $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h)$, 试证明 $f(x)$ 在任一区间 $[a, b]$ 上是 Riemann 可积的.

张祖锦解. 由书第 20 页例 12 (ii) 知 @跟锦数学微信公众号

$$D = \{x; f \text{ 在 } x \text{ 处不连续}\} = \{x; f \text{ 在 } x \text{ 处不连续, } f(x+0) \text{ 存在}\}$$

可数. 而 $mD = 0 \Rightarrow m([a, b] \cap D) = 0 \Rightarrow f \in R([a, b])$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

4.6.27 习题4.27

设 $E \subset [0, 1]$, 试证明 $\chi_E(x)$ 在 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积的充分必要条件是 $m(\bar{E} \setminus \dot{E}) = 0$.

张祖锦解. 由 @跟锦数学微信公众号

$$x \in E^{-c} \Rightarrow x \in E^{co} \Rightarrow \exists \delta > 0, \text{ s.t. } B(x, \delta) \subset E^c \Rightarrow \forall y \in B(x, \delta), \chi_E(y) = 0$$

知 $\chi_E(x)$ 在 $\forall x \in E^{-c}$ 处连续. 由 @跟锦数学微信公众号

$$x \in \dot{E} \Rightarrow \exists \delta > 0, \text{ s.t. } B(x, \delta) \subset E \Rightarrow \forall y \in B(x, \delta), \chi_E(y) = 1$$

知 $\chi_E(x)$ 在 $\dot{E}$ 上连续. 又由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x \in \bar{E} \setminus \dot{E} &\Rightarrow x \in \bar{E} \cap E^{co} = \bar{E} \cap E^{c-} = \partial E \Rightarrow \exists E \ni x_n \rightarrow x, E^c \ni y_n \rightarrow x \\ &\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_E(x_k) = 1 \neq 0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_E(y_k) \Rightarrow \chi_E(x) \text{ 在 } x \text{ 处不连续} \end{aligned}$$

知 @跟锦数学微信公众号

$$\{x \in [0, 1]; \chi_E(x) \text{ 不连续}\} = \bar{E} \setminus \dot{E}.$$

而结论成立. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

4.6.28 习题4.28

设 $f \in R([0, 1])$, 试证明 $f(x^2) \in R([0, 1])$.

张祖锦解.

(1) 由书第 230 页例 9 知: 设 $g \in AC[a, b]$, 则对 $[a, b]$ 的任一零测集 Z , 必有 $m(g(Z)) = 0$.

这表

(2) 由 $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{x}$ 及 Lebesgue 积分是非负反常黎曼积分的推广 (书第 174 页定理 4.26) 知 $g(x) = \sqrt{x} \in AC[0, 1]$.

4.6.30

(3) 设 $f(x^2)$ 在 x_0 处连续, 则 ④跟锦数学微信公众号

(1)

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x_\delta \in B(x_0, \delta) \cap [0, 1], \text{ s.t. } |f(x_\delta^2) - f(x_0^2)| \geq \varepsilon_0.$$

(2)

故 f 在 x_0^2 处连续.

(4) 设 $f(x^2)$ 在 x_0 处连续, 则 ④跟锦数学微信公众号

(1)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in B(x_0, \delta) \cap [0, 1], |f(x^2) - f(x_0^2)| < \varepsilon.$$

故 f 在 x_0^2 处连续.

(5) 由第 3.4 步知 ④跟锦数学微信公众号

$$g^{-1}(\{x_0; f(x^2) \text{ 在 } x_0 \text{ 处不连续}\}) = \{x_0^2; f(x) \text{ 在 } x_0^2 \text{ 处不连续}\}$$

$$\Rightarrow m\{x_0; f(x^2) \text{ 在 } x_0 \text{ 处不连续}\} = mg(\{x_0^2; f(x) \text{ 在 } x_0^2 \text{ 处不连续}\}) \stackrel{1.1.2}{=} 0.$$

而 $f(x^2) \in R[0, 1]$.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.29 习题4.29

假设 $f(x), g(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}$ 上的可测函数并且 $m(E) < +\infty$, 若 $f(x) + g(y)$ 在 $E \times E$ 上可积, 试证明 $f(x), g(x)$ 都是 E 上的可积函数.

张祖锦解. 若 $mE = 0$, 则结论自明. 若 $mE > 0$, 则 ④跟锦数学微信公众号

$$f(x) + g(y) \in L(E \times E) \stackrel{\text{Fubini}}{\Rightarrow} f(\cdot) + g(y) \in L(E), \text{ a.e. } y \in E$$

$$\stackrel{mE > 0}{\Rightarrow} \exists y_0 \in E, \text{ s.t. } f(\cdot) + g(y_0) \in L(E).$$

于是 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)| dx &= \int_E [|f(x) + g(y_0)| + |g(y_0)|] dx \\ &\leq \int_E |f(x) + g(y_0)| dx + g(y_0) \cdot mE < \varepsilon.\end{aligned}$$

这表明 $f \in L(E)$. 同理, $g \in L(E)$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.30 习题4.30

计算下列积分:

$$(1) \int_{x>0} \int_{y>0} \frac{dx dy}{(1+y)(1+x^2y)};$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1} dx.$$

张祖锦解.

(1) @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}\text{原式} &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{y>0} dy \int_{x>0} \frac{dx}{(1+y)(1+x^2y)} \stackrel{x\sqrt{y}=t}{=} \int_{y>0} \frac{dy}{\sqrt{y}(1+y)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\ &\stackrel{\sqrt{y}=s}{=} \frac{\pi}{2} \int_{s>0} \frac{2s ds}{s(1+s^2)} = \frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

(2) @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \left(\int_0^1 + \int_1^{\infty} \right) \frac{\ln x}{x^2-1} dx \stackrel{\frac{1}{x}=t}{=} \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx + \int_1^{\infty} \frac{\ln \frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2}-1} \cdot \left(-\frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= 2 \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx = 2 \int_0^1 \left(-\ln x \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \right) dx \\ &\stackrel{\text{逐项积分}}{=} 2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-x^{2n} \ln x) dx \stackrel{\text{分部积分}}{=} 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \\ &= 2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} \right] = 2 \left(1 - \frac{1}{4} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.31 习题4.31

设 $E \subset \mathbb{R}$, 且 $m(E) > 0$, $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的非负可测函数, 若函数 $F(x) = \int_E f(x-t) dt$ 在 $\mathbb{R}$ 上可积, 试证明 $f \in L(\mathbb{R})$.

张祖锦解. 由 f 在 $\mathbb{R}$ 上非负可测及书第 124 页例 4 知 $f(x-t)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上非负可测. 由题意, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} +\infty &> \int_{\mathbb{R}} F(x) dx = \int_{\mathbb{R}} dx \int_E f(x-t) dt \stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_E dt \int_{\mathbb{R}} f(x-t) dx \\ &= \int_E dt \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = mE \cdot \int_{\mathbb{R}} f(x) dx. \end{aligned}$$

这表明 @跟锦数学微信公众号

$$0 \leq \int_E f(x) dx \leq \frac{1}{mE} \int_{\mathbb{R}} F(x) dx < +\infty,$$

而 $f \in L(\mathbb{R})$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.32 习题4.32

设 $f \in L(\mathbb{R})$, 且 $xf(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可积, 令 @跟锦数学微信公众号

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

若有 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$, 试证明 $F \in L(\mathbb{R})$.

张祖锦解. 由 $xf(x) \in L(\mathbb{R})$ 知 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \infty &> \int_{\mathbb{R}} |xf(x)| dx \geq \int_0^{\infty} x|f(x)| dx = \int_0^{\infty} |f(x)| dx \int_0^{\infty} \chi_{\{(x,t); x>t\}}(x,t) dt \\ &\stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} |f(x)| \chi_{\{(x,t); x>t\}}(x,t) dx = \int_0^{\infty} dt \int_t^{\infty} |f(x)| dx \\ &\geq \int_0^{\infty} \left| \int_t^{\infty} f(x) dx \right| dt = \int_0^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \int_{-\infty}^t f(x) dx \right| dt \\ &= \int_0^{\infty} \left| \int_{-\infty}^t f(x) dx \right| dt = \int_0^{\infty} |F(t)| dt. \end{aligned}$$

另一方面, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} +\infty &> \int_{\mathbb{R}} |xf(x)| dx \geq \int_{-\infty}^0 -x|f(x)| dx = \int_{-\infty}^0 |f(x)| dx \int_{-\infty}^0 \chi_{\{(x,t); x<t<0\}}(x,t) dt \\ &\stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_{-\infty}^0 dt \int_{-\infty}^0 |f(x)| \chi_{\{(x,t); x<t<0\}}(x,t) dx = \int_{-\infty}^0 dt \int_{-\infty}^t |f(x)| dx \\ &\geq \int_{-\infty}^0 \left| \int_{-\infty}^t f(x) dx \right| dt = \int_{-\infty}^0 |F(t)| dt. \end{aligned}$$

综上即知 $F \in L(\mathbb{R})$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.33 习题4.33

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \arctan(nx) dx$ 的值.

张祖锦解. 由 @跟锦数学微信公众号

$$|\cos x \arctan(nx)| \leq \frac{\pi}{2} \in L\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos x \arctan(nx) = \frac{\pi}{2} \cos x, 0 < x \leq \frac{\pi}{2}$$

及控制收敛定理知 原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \cos x dx = \frac{\pi}{2}$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.6.34 习题4.34

设 $f \in L((0, a))$, $g(x) = \int_x^a \frac{f(t)}{t} dt$ ($a > x > 0$), 试证明 $g \in L((0, a))$, 且有

@跟锦数学微信公众号

$$\int_0^a g(x) dx = \int_0^a f(x) dx.$$

张祖锦解. 由 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^a |g(x)| dx \leq \int_0^a \int_x^a \frac{|f(t)|}{t} dt dx \stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_0^a \frac{|f(t)|}{t} \int_0^t dx dt = \int_0^a |f(t)| dt < +\infty$$

知 $g \in L((0, a))$. 进一步, @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^a g(x) dx = \int_0^a \int_x^a \frac{f(t)}{t} dt dx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^a \frac{f(t)}{t} \int_0^t dx dt = \int_0^a f(x) dx.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5 微分与不定积分

5.1 单调函数的可微性

5.1.1 P211思考题01

设 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的非负函数. 若 $f \notin L([a, b])$, 试问: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有原函数吗?

张祖锦解. 一定没有. 用反证法. @跟锦数学微信公众号

f 在 $[a, b]$ 上有原函数 $\Rightarrow \exists F(x)$, s.t. $F'(x) = f(x) \geq 0 \Rightarrow F \nearrow$

$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^b F'(x) dx \leq F(b) - F(a)$, 与 $f \notin L([a, b])$ 矛盾, 故有结论.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.1.2 P211思考题02

设 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上有原函数 $G(x)$, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 且 $F'(x) \geq 0$ ($a \leq x \leq b$), 试证明 $h(x) = F(x)g(x)$ 在 $[a, b]$ 上有原函数.

张祖锦解. 设 @跟锦数学微信公众号

$$H(x) = F(x)G(x) - \int_a^x G(t)F'(t) dt,$$

则 @跟锦数学微信公众号

$$H'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) - G(x)F'(x) = F(x)g(x) = h(x).$$

而 $h(x)$ 在 $[a, b]$ 上有原函数 $H(x)$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.1.3 P211思考题03

Vitali 覆盖定理的结论可改为: 存在可数个互不相交的 $\{I_j\}$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$m^* \left(E \setminus \bigcup_{j \geq 1} I_j \right) = 0.$$

张祖锦解. 由书第 202 页定理 5.1 知存在互不相交的 @跟锦数学微信公众号

$$\{I_1, \dots, I_{n_1}\} \subset \Gamma, \text{ s.t. } m^* \left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{n_1} I_j \right) < 1.$$

若 $E \setminus \bigcup_{j=1}^{n_1} I_j = \emptyset$, 则结论自明. 若 $\bigcup_{j=1}^{n_1} I_j \neq 0$, 则由 $\Gamma \setminus \{I_1, \dots, I_{n_1}\}$ 是 $E \setminus \bigcup_{j=1}^{n_1} I_j$ 的 Vitali 覆盖知存在互不相交的 @跟锦数学微信公众号

$$\{I_{n_1+1}, \dots, I_{n_2}\} \subset \Gamma \setminus \{I_1, \dots, I_{n_1}\}, \text{ s.t. } m^* \left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{n_1} I_j \setminus \bigcup_{j=n_1+1}^{n_2} I_j \right) < \frac{1}{2}.$$

如此这般, 要么有限步终止, 结论得证; 要么可以一直做下去, 得到互不相交的 $\{I_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Gamma$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$m \left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{n_k} I_j \right) < \frac{1}{2^k} \Rightarrow m \left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right) = 0.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.2 有界变差函数

5.2.1 P218思考题01

计算 $\bigvee_{-1}^1 (x - x^3)$.
张祖锦解.

(1) 设 f 递增, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\bigvee_a^b(f) = \sup_T \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sup_T \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] = f(b) - f(a).$$

(2) 若 f 递减, 则 $\bigvee_a^b(f) = f(a) - f(b)$.

(3) 综合第 1, 2 步知若 f 单调, 则 $\bigvee_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$.

(4) 回到题目. 设 $f(x) = x - x^3$, 则 $f'(x) = 1 - 3x^2$, 而 f 的单调区间为 @跟锦数学
微信公众号

$$[-1, -x_0], [-x_0, x_0], [x_0, 1],$$

其中 $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 于是 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \bigvee_{-1}^{-x_0}(f) + \bigvee_{-x_0}^{x_0}(f) + \bigvee_{x_0}^1(f) \\ &= |f(-x_0) - f(-1)| + |f(x_0) - f(-x_0)| + |f(1) - f(x_0)| \\ &\stackrel{f \text{ 是奇函数}}{=} 2|f(1) - f(x_0)| + 2|f(x_0)| = \frac{8\sqrt{3}}{9}. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.2.2 P218思考题02

试证明 $\bigvee_a^b(f) = 0$ 当且仅当 $f(x) = C$ (常数).
张祖锦解.

(1) $\Rightarrow$: 显然.

(2) $\Rightarrow: \forall x \in (a, b], @跟锦数学微信公众号$

$$|f(x) - f(a)| \leq \bigvee_a^x(f) \leq \bigvee_a^b(f) = f(x) - f(a).$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.2.3 P218思考题03

设 $f \in BV([a, b]), g \in BV([a, b])$, 试证明 @跟锦数学微信公众号

$$M(x) = \max \{f(x), g(x)\}$$

是 $[a, b]$ 上的有界变差函数.

张祖锦解.

(1) 由 $|[f(x) \pm g(x)] - [f(y) \pm g(y)]| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$ 知 @跟锦数学微信公众号

$$f, g \in BV([a, b]) \Rightarrow f \pm g \in BV([a, b]).$$

(2) 由 $\|f(x)\| - \|f(y)\| \leq |f(x) - f(y)|$ 知 @跟锦数学微信公众号

$$f \in BV([a, b]) \Rightarrow |f| \in BV([a, b]).$$

(3) 由第 1,2 步及 @跟锦数学微信公众号

$$M(x) = \max \{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$$

知 $M \in BV([a, b])$.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.2.4 P218思考题04

设 $f \in BV([a, b])$, 试证明 $|f| \in BV([a, b])$, 但反之不然.

张祖锦解.

(1) 由 $\|f(x)\| - \|f(y)\| \leq |f(x) - f(y)|$ 知 @跟锦数学微信公众号

$$f \in BV([a, b]) \Rightarrow |f| \in BV([a, b]).$$

(2) 若 $|f| \in BV([a, b])$, 则 f 未必 $\in BV([a, b])$. 比如对 @跟锦数学微信公众号

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

我们有 $\bigvee_0^1(|f|) = \bigvee_0^1(1) = 0$. 但对任意 $n \in \mathbb{Z}_+$, 取一串有理数与无理数相间隔的分划 (当然, 端点处为有理数) T , 则由 f 的定义知 @跟锦数学微信公众号

$$\bigvee_0^1(f) \geq \sup_T \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = n \Rightarrow \bigvee_0^1(f) = +\infty.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.2.5 P218思考题05

设 $f, g \in BV([a, b])$, 试证明 @跟锦数学微信公众号

$$\bigvee_a^b(fg) \leq \sup_{[a,b]} \{|f(x)|\} \bigvee_a^b(g) + \sup_{[a,b]} \{|g(x)|\} \bigvee_a^b(f).$$

张祖锦解. 对 $[a, b]$ 的任一分划 T , @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \\ & \leq \sum_{k=1}^n [|f(x_k)g(x_k) - f(x_k)g(x_{k-1})| + |f(x_k)g(x_{k-1}) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})|] \\ & \leq \sum_{k=1}^n [|f(x_k)| \cdot |g(x_k) - g(x_{k-1})| + |f(x_k) - f(x_{k-1})| \cdot |g(x_{k-1})|] \\ & \leq \sup_{[a,b]} \{|f(x)|\} \bigvee_a^b(g) + \sup_{[a,b]} \{|g(x)|\} \bigvee_a^b(f). \end{aligned}$$

故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.2.6 P218思考题06

设 $f \in BV([a, b])$, $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上属于 $Lip1$, 试证明 $\varphi(f) \in BV([a, b])$.

张祖锦解. 由 $\varphi \in Lip1$ 知 @跟锦数学微信公众号

$$|\varphi(y) - \varphi(y')| \leq |y - y'|, \forall y, y' \in \mathbb{R}.$$

于是对 $[a, b]$ 的任一分划, @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{k=1}^n |\varphi(f(x_k)) - \varphi(f(x_{k-1}))| \leq \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \bigvee_a^b(f).$$

故 $\bigvee_a^b(\varphi \circ f) \leq \bigvee_a^b(f)$. 而 $\varphi \circ f \in BV([a, b])$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.2.7 P218思考题07

设 $f \in Lip1([a, b])$, 试证明 $\bigvee_a^x(f)$ 也是.

张祖锦解. 对 $a \leq x < y \leq b$, $\bigvee_a^y(f) = \bigvee_a^x(f) + \bigvee_x^y(f)$. 而 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \left| \bigvee_a^y(f) - \bigvee_a^x(f) \right| &= \bigvee_x^y(f) = \sup_T \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\ &\leq \sup_T \sum_{k=1}^n |x_k - x_{k-1}| = |y - x|. \end{aligned}$$

故 $\bigvee_a^x(f) \in Lip1([a, b])$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.2.8 P218思考题08

试证明 $f \in BV([a, b])$ 当且仅当存在 $[a, b]$ 上的递增函数 $F(x)$, 使得 @跟锦数学
微信公众号

$$|f(x') - f(x'')| \leq F(x'') - F(x') \quad (a \leq x' \leq x'' \leq b).$$

张祖锦解.

(1) $\Leftarrow$: 对 $[a, b]$ 的任一分划 T , @跟锦数学微信公众号

$$\sup_T \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \sup_T \sum_{k=1}^n [F(x_k) - F(x_{k-1})] = F(b) - F(a).$$

故 $\bigvee_a^b(f) \leq F(b) - F(a)$, 而 $f \in BV([a, b])$.

(2) $\Rightarrow$: 取 $F(x) = \bigvee_a^x(f)$, 则对 $\forall a \leq x' < x'' \leq b$, @跟锦数学微信公众号

$$F(x'') - F(x') = \bigvee_{x'}^{x''}(f) \geq |f(x') - f(x'')| \geq 0.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.2.9 P218思考题09

设 $f \in BV([a, b])$. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有原函数, 试问: $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数吗?

张祖锦解. 由 $f \in BV([a, b])$ 及 Jordan 定理知 $\textcircled{\ast}$ 跟锦数学微信公众号

$$\exists g \nearrow, h \nearrow, \text{ s.t. } f = g - h.$$

于是 $f(x \pm 0) = g(x \pm 0) - h(x \pm 0)$ 存在. 往用反证法证明 f 连续. 若 f 在 $x_0 \in (a, b)$ 处不连续 (端点处可类似讨论), 则 $f(x_0 - 0) \neq f(x_0)$ 或 $f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$. 不妨设前一情形成立. 进一步也不妨设 $f(x_0 - 0) > f(x_0)$, 则 $\textcircled{\ast}$ 跟锦数学微信公众号

$$A = f(x_0 - 0) - f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)]$$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0, f(x) - f(x_0) > \frac{A}{2}. \quad (*)$$

取 $B := f(x_0) + \frac{A}{2} \in \left(f(x_0), f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)\right)$, 则由 f 有原函数知 f 是导函数, 而由导数介值定理, $\textcircled{\ast}$ 跟锦数学微信公众号

$$\exists x_B \in \left(x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0\right), \text{ s.t. } f(x_B) = f(x_0) + \frac{A}{2}.$$

这与 (*) 矛盾. 故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.2.10 P218思考题10

设 $f \in BV([a, b])$. 若有 $\bigvee_a^b(f) = f(b) - f(a)$, 试证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上递增.

张祖锦解. 设 $F(x) = \bigvee_a^x(f) - [f(x) - f(a)]$, 则 $\textcircled{\ast}$ 跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x < y \Rightarrow F(y) - F(x) &= \bigvee_x^y(f) - [f(y) - f(x)] \\ &\geq |f(y) - f(x)| - [f(y) - f(x)] \geq 0. \end{aligned}$$

故 $F \nearrow$. 又由题设知 $F(a) = F(b) = 0$ 知 $\textcircled{\ast}$ 跟锦数学微信公众号

$$a \leq x \leq b \Rightarrow 0 = F(a) \leq F(x) \leq F(b) = 0 \Rightarrow F(x) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \bigvee_a^x(f) + f(a) \nearrow.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.2.11 P218思考题11

设 $f_n \in BV([a, b])$ ($n \in \mathbb{N}$). 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \bigvee_a^x(f_n)$ 在 $[a, b]$ 上收敛, 试证明 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上是有界变差函数.

张祖锦解. 对 $[a, b]$ 的任一分划 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, 我们有 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_k) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_{k-1}) \right| &\leq \sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x_k) - f_n(x_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} \bigvee_{x_{k-1}}^{x_k}(f_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \bigvee_{x_{k-1}}^{x_k}(f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \bigvee_a^b(f_n) < \infty. \end{aligned}$$

故 $\bigvee_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \bigvee_a^b(f_n) < +\infty$. 而 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上是有界变差函数. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.3 不定积分的微分

5.3.1 P222思考题01

设 $E \subset [0, 1]$. 若存在 $l: 0 < l < 1$, 使得对 $[0, 1]$ 中任意的子区间 $[a, b]$, 均有 @跟锦数学微信公众号

$$m(E \cap [a, b]) \geq l(b - a),$$

试证明: $m(E) = 1$.

张祖锦解. 由 $\chi_E(x) \in L([0, 1])$ 及书第 221 页推论 5.8 知 $\exists Z \subset [0, 1]: mZ = 0$, s.t. @跟锦数学微信公众号

$$\left| \frac{1}{h} \int_0^h \chi_E(x+t) dt - \chi_E(x) \right| \leq \frac{1}{h} \int_0^h |\chi_E(x+t) - \chi_E(x)| dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \forall x \in [0, 1] \setminus Z.$$

故当 $x \in [0, 1] \setminus Z$ 时, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \chi_E(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \chi_E(x+t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \chi_E(s) ds \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{E \cap [x, x+h]} dx = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} m(E \cap [x, x+h]) \geq \lim_{h \rightarrow 0} l = l > 0. \end{aligned}$$

故 $x \in E$. 这就证明了 @跟锦数学微信公众号

$$[0, 1] \setminus Z \subset E \subset [0, 1] \Rightarrow mE = 1.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.3.2 P222思考题02

对于 $[0, 1]$ 上的 Dirichlet 函数 $\chi_Q(x)$, 试问: $[0, 1]$ 中的 Lebesgue 点是什么?

张祖锦解. 由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |\chi_Q(x+h) - \chi_Q(x)| dt \stackrel{x=t-s}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |\chi_Q(s) - \chi_Q(x)| ds \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{[\min\{x, x+h\}, \max\{x, x+h\}] \setminus Q} \chi_Q(x) ds \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} m([\min\{x, x+h\}, \max\{x, x+h\}] \setminus Q) \cdot \chi_Q(x) = \chi_Q(x). \end{aligned}$$

故 $\chi_Q(x)$ 在 $[0, 1]$ 中的 Lebesgue 点是无理数. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.4 绝对连续函数与微积分基本定理

5.4.1 P231思考题01

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上绝对连续, 且有 @跟锦数学微信公众号

$$|f'(x)| \leq M, \text{ a.e. } x \in [a, b],$$

则 @跟锦数学微信公众号

$$|f(y) - f(x)| \leq M|x - y|, x, y \in [a, b].$$

张祖锦解. 不妨设 $a \leq x < y \leq b$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$|f(y) - f(x)| = \left| \int_x^y f'(t) dt \right| \leq \int_x^y |f'(t)| dt \leq M|x - y|.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.4.2 P231思考题02

设 $f(x)$ 定义在 $[a, b]$ 上. 若有 @跟锦数学微信公众号

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|, x, y \in [a, b],$$

则 @跟锦数学微信公众号

$$|f'(x)| \leq M, \text{ a.e. } x \in [a, b].$$

张祖锦解. 由题设, $f \in \text{Lip}([a, b]) \Rightarrow f \in AC([a, b]) \Rightarrow f$ a.e. 可导. 在可导的点 (其补集为零测集) 处, @跟锦数学微信公众号

$$|f'(x)| = \left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq M.$$

这就证明了 $|f'(x)| \leq M, \text{ a.e. } x \in [a, b]$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.4.3 P231思考题03

设 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 是 $[a, b]$ 上递增的绝对连续函数列. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上收敛, 则其和函数在 $[a, b]$ 上绝对连续.

张祖锦解. 由题设, $f'_n(x) \geq 0$, a.e. $x \in [a, b]$. 设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, 则 ④跟锦数学
微信公众号

$$\begin{aligned} f_n \in AC([a, b]) &\Rightarrow f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f'_n(t) dt \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f'_n(t) dt \stackrel{\text{逐项积分}}{=} \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(t) dt \\ \Rightarrow \begin{cases} \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) dx = S(b) - S(a) < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \in L([a, b]), \\ S(x) - S(a) = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(t) dt. \end{cases} \end{aligned}$$

故 $S \in AC([a, b])$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.4.4 P231思考题04

设 $f \in BV([0, 1])$. 若对任给 $\varepsilon > 0$, $f(x)$ 在 $[\varepsilon, 1]$ 上绝对连续, 且 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上绝对连续.

张祖锦解. 由 $f \in BV([a, b])$ 知 f a.e. 可导, 且 $f' \nabla L([0, 1])$. 于是 ④跟锦数学微
信公众号

$$\int_0^x f'(t) dt \stackrel{L \text{ 积分的绝对连续性}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^x f'(t) dt \stackrel{f \in AC[\varepsilon, 1]}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(x) - f(\varepsilon)] = f(x) - f(0).$$

故 $f \in AC([0, 1])$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.4.5 P231思考题05

存在 $[0, 1]$ 上严格递增的绝对连续函数 $f(x)$ 以及 $[0, 1]$ 中正测集 E , 使得 ④跟锦
数学微信公众号

$$f'(x) = 0 \quad (x \in E).$$

张祖锦解. 作类 Cantor 集 (书第 47 页) $C_\alpha : mC_\alpha = 1 - \alpha > 0$, 并令 ④跟锦数学
微信公众号

$$f(x) = \int_0^x \chi_{[0, 1] \setminus C_\alpha}(t) dt, \quad x \in [0, 1],$$

则 $f \in AC([0, 1])$. 由 $[0, 1] \setminus C_\alpha$ 是稠密的知 @跟锦数学微信公众号

$$\forall x \in [0, 1], \forall \delta > 0, \exists y \in ([0, 1] \setminus G_\alpha) \cap B(x, \delta) \Rightarrow f'(y) = \chi_{[0, 1] \setminus C_\alpha}(y) = 1.$$

故 f' 在任一子区间上都不恒为 0, 而 f 严格递增. 进一步, @跟锦数学微信公众号

$$f'(x) = \chi_{[0, 1] \setminus C_\alpha}(x) = 0, x \in E.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.5 分部积分公式与积分中值公式

5.5.1 P235思考题01

设 $f \in L([a, b])$, 令 $g(x) = f(x) \int_a^x f(t) dt$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^b g(x) dx = \frac{1}{2} \left[\int_a^b f(x) dx \right]^2.$$

张祖锦解. 设 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, 则由分部积分公式知 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x)f(x) dx + \int_a^b f(x)F(x) dx &= F(b)F(b) - F(a)F(a) \\ \Rightarrow 2 \int_a^b f(x)F(x) dx &= F^2(b) \Rightarrow \text{结论得证}. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.5.2 P235思考题02

设 $f(x), g(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的可测函数, 且有 @跟锦数学微信公众号

$$|f(x)| \leq M, |xg(x)| \leq M, 1 \leq x < +\infty,$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t)g(t) dt = 0.$$

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\left| \frac{1}{x} \int_1^x f(t)g(t) dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_1^x M \cdot \frac{M}{t} dt = \frac{M^2 \ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.5.3 P235思考题03

设 $g \in L^1(\mathbb{R})$, 则存在 C , 使得对 $C^{(2)}(\mathbb{R})$ 中满足 $f(x) = 0$ ($x \notin (a, b)$) 的任意 $f(x)$, 均有 ④跟锦数学微信公众号

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g(x) f^2(x) dx \right| \leq C \int_{\mathbb{R}} \{f^2(x) + [f'(x)]^2\} dx.$$

张祖锦解. 由 $f(x) = 0, \forall x \notin (a, b)$ 知 $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0, k = 0, 1, 2$. 设 $G(x) = \int_{-x}^x g(t) dt$, 则 ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} g(x) f^2(x) dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f^2(x) dG(x) \right| \stackrel{**}{=} \left| f^2(x) G(x) \Big|_a^b - 2 \int_{\mathbb{R}} f(x) f'(x) G(x) dx \right| \\ &\leq 2 \sup_{\mathbb{R}} |G| \cdot \int_{\mathbb{R}} |f(x) f'(x)| dx \stackrel{***}{\leq} \int_{\mathbb{R}} |g(t)| dt \cdot \int_{\mathbb{R}} \{f^2(x) + [f'(x)]^2\} dx. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.5.4 P235思考题04

设 $f \in L([a, b])$, $F(x) = \int_a^x f(t)(x-t)^n dt$ ($x \in [a, b]$), 则 $F(x)$ n 次可导, 且有 ④跟锦数学微信公众号

$$F^{(n)} \in AC([a, b]), F^{(n+1)}(x) = n! f(x), \text{ a.e. } x \in [a, b].$$

张祖锦解. 由 ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^k}{dx^k} [f(t)(x-t)^n] \right| &\leq |f(t)| n(n-1) \cdots (n-k+1) (x-t)^{n-k} \\ &\leq \frac{n!}{(n-k)!} |f(t)| \in L([a, b]) \end{aligned}$$

及积分号下求导 (书第 161 页定理 4.17) 知 ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} F^{(k)}(x) &= \int_a^x \frac{d^k}{dx^k} [f(t)(x-t)^n] dt \\ &= \int_a^x \frac{n!}{(n-k)!} f(t)(x-t)^{n-k} dt, k = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

故 ④跟锦数学微信公众号

$$F^{(n)}(x) = n! \int_a^x f(t) dt \in AC([a, b]), F^{(n+1)}(x) = n! f(x), \text{ a.e. } x \in [a, b].$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.6 $\mathbb{R}$ 上的积分换元公式

5.7 P241 习题5

5.7.1 习题5.01

设 E 是 $\mathbb{R}$ 中一族 (开、闭与半开闭) 区间的并集, 试证明 E 是可测集.

张祖锦解. 设 $E_k = E \cap [-k, k]$, 则 $E_k \nearrow E$, 而仅需验证 E_k 可测. 由 E_k 是一些区间的并知 @跟锦数学微信公众号

$$\forall x \in E, \exists x \in J_i^* \subset E_k, \text{ s.t. } |J_i^*| > 0.$$

考虑 $E_k \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i^*$, 则由书第 211 页思考题 3 知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists \{J_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \{J_i^*\}, \text{ s.t. } m^* \left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} J_j \right) = 0.$$

注意到 J_j 是某个 $J_i^* \subset E_k$, 我们有 @跟锦数学微信公众号

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} J_j \cup \left(E_k \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} J_j \right) \in \mathcal{M}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.7.2 习题5.02

设 $\{x_n\} \subset [a, b]$, 试作 $[a, b]$ 上的递增函数, 其不连续点恰为 $\{x_n\}$.

张祖锦解.

(1) 定义 $f(x) = \sum_{x_n < x} \frac{1}{2^n}$, 其中 $\sum_{x_n < x}$ 表示对 $x_n < x$ 的那些指标求和.

(2) 当 $x' < x''$ 时, 由 $\{n; x_n < x'\} \subset \{n; x_n < x''\}$ 知 @跟锦数学微信公众号

$$f(x') = \sum_{x_n < x'} \frac{1}{2^n} \leq \sum_{x_n < x''} \frac{1}{2^n} = f(x'').$$

故 $f \nearrow$, 而对 $\forall x \in [a, b]$, $f(x-0) \leq f(x) \leq f(x+0)$ 存在.

(3) f 在 x_k 处间断. 事实上, 对 $x' < x_k < x''$, @跟锦数学微信公众号

$$f(x') = \sum_{x_n < x'} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^k} + \sum_{x_k < x_n < x''} \frac{1}{2^n} \geq \sum_{x_n < x'} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^k} = f(x') + \frac{1}{2^k}.$$

故 $f(x_k+0) \geq f(x_k-0) + \frac{1}{2^k}$, f 在 x_k 处不连续.

(4) f 在 $[a, b] \setminus \{x_k\}$ 上连续. 事实上, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty$ 知

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{ s.t. } 0 < \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n < \varepsilon.$$

由 $\{x_1, \dots, x_N\}$ 只有有限多项知当 $x_0 \in [a, b] \setminus \{x_k; k \geq 1\}$ 时,

$$\exists \delta > 0, \text{ s.t. } \forall 1 \leq n \leq N, |x_n - x_0| \geq \delta.$$

而当 $|x - x_0| < \delta$ 时,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left| \sum_{x_n < x} \frac{1}{2^n} - \sum_{x_n < x_0} \frac{1}{2^n} \right| = \left| \sum_{x_n \text{ 介于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}} \frac{1}{2^n} \right| \\ &\leq \sum_{|x_n - x_0| < \delta} \frac{1}{2^n} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n < \varepsilon. \end{aligned}$$

故 f 在 x_0 处连续.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

5.7.3 习题5.03

设 $f(x)$ 是 (a, b) 上的递增函数, $E \subset (a, b)$. 若对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $(a_i, b_i) \subset (a, b)$ ($i = 1, 2, \dots$), 使得

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \supset E, \sum_{i=1}^{\infty} [f(b_i) - f(a_i)] < \varepsilon,$$

试证明 $f'(x) = 0$, a.e. $x \in E$.

张祖锦解. 对 $\forall \varepsilon > 0$,

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \Rightarrow E = \bigcup_{i=1}^{\infty} [E \cap (a_i, b_i)] \xrightarrow{E_i = E \cap (a_i, b_i)} \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

跟锦数学微信公众账号

$$F_1 = E_1, \quad F_i = E_i \setminus (E_1 \cup \dots \cup E_{i-1}) \quad (i \geq 2),$$

$\{F_i\}$ 互不相交, 且 $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. 注意到 $F_i \subset E_i \subset (a_i, b_i)$, 我们有

跟锦数学微信公众账号

$$\begin{aligned} \int_E f'(x) dx &= \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} f'(x) dx = \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i} f'(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{F_i} f'(x) dx \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{a_i}^{b_i} f'(x) dx \leq \sum_{i=1}^{\infty} [f(b_i) - f(a_i)] < \varepsilon. \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \searrow 0$ 即知 @跟锦数学微信公众号

$$\int_E f'(x) dx = 0 \Rightarrow f'(x) = 0, \text{ a.e. } x \in E.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.7.4 习题5.04

设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上是有界变差函数, 试证明函数 @跟锦数学微信公众号

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, \quad F(0) = 0$$

是 $[0, a]$ 上的有界变差函数.

张祖锦解. 由 $f \in BV([a, b])$ 知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists g \nearrow, h \nearrow, \text{ s.t. } f(x) = g(x) - h(x).$$

设 @跟锦数学微信公众号

$$G(x) = \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt, 0 < x \leq a; H(x) = \frac{1}{x} \int_0^x h(t) dt, 0 < x \leq a.$$

由 $g \nearrow$ 知当 $0 < x < x'$ 时, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} G(x') - G(x) &= \frac{1}{x'} \int_0^{x'} g(t) dt - \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt = \frac{1}{x'x} \left[x \int_0^{x'} g(t) dt - x' \int_0^x g(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{x'x} \left\{ x \left[\int_0^x g(t) dt + \int_x^{x'} g(t) dt \right] - [x + (x' - x)] \int_0^x g(t) dt \right\} \\ &= \frac{1}{x'x} \left[x \int_x^{x'} g(t) dt - (x' - x) \int_0^x g(t) dt \right] \\ &\geq \frac{1}{x'x} [x \cdot g(x)(x' - x) - (x' - x) \cdot g(x)x] \geq 0. \end{aligned}$$

故 G 在 $(0, a]$ 上递增. 同理, H 在 $(0, a]$ 上递增. 进而 $G(0+0), H(0+0)$ 存在. 令

@跟锦数学微信公众号

$$G(0) = H(0) = \min \{G(0+0), H(0+0)\},$$

则 $G \nearrow, H \nearrow$, 且 $G - H = F$, 而 $F \in BV([a, b])$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.7.5 习题5.05

设 $\{f_k(x)\}$ 是 $[a, b]$ 上的有界变差函数列, 且有 ④跟锦数学微信公众号

$$\bigvee_a^b(f_k) \leq M \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), x \in [a, b],$$

试证明 $f \in BV([a, b])$, 且满足 $\bigvee_a^b(f) \leq M$.

张祖锦解. 对 $[a, b]$ 的任一分划 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, ④跟锦数学微信公众号

$$\sum_{k=1}^m |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^m \left| \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_k) - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_{k-1}) \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m |f_n(x_k) - f_n(x_{k-1})| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \bigvee_a^b(f_n) \leq M.$$

故 $f \in BV([a, b])$, 且满足 $\bigvee_a^b(f) \leq M$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.7.6 习题5.06

设 $f \in BV([a, b])$, 且点 $x_0 \in [a, b]$ 是 $f(x)$ 的连续点, 试证明 $\bigvee_a^x(f)$ 在点 x_0 处连续.

张祖锦解. 设 f 在 $x_0 \in [a, b]$ 处连续, 则 ④跟锦数学微信公众号

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t. } \forall x \in [x_0, x_0 + \delta] \subset [a, b], |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由变差的定义知存在 $[x_0, x_0 + \delta]$ 的分划 $T: x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x_0 + \delta$, 使得 ④跟锦数学微信公众号

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| > \bigvee_{x_0}^{x_0+\delta}(f) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

由 ④跟锦数学微信公众号

$$\sum_{i=2}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \bigvee_{x_1}^{x_0+\delta}(f), \bigvee_{x_0}^{x_0+\delta}(f) = \bigvee_a^{x_1}(f) + \bigvee_{x_1}^{x_0+\delta}(f)$$

知 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} V_{x_0}^{x_1}(f) &= V_{x_0}^{x_0+\delta}(f) - V_{x_1}^{x_0+\delta}(f) \\ &\leq \left[\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \frac{\varepsilon}{2} \right] - \sum_{i=2}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &= |f(x_1) - f(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

于是 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} x_0 < x < x_1 &\Rightarrow V_a^x(f) \leq V_a^x(f) \leq V_a^{x_1}(f) = V_a^{x_0}(f) + V_{x_0}^{x_1}(f) < V_a^{x_0}(f) + \varepsilon \\ &\Rightarrow \left| V_a^x(f) - V_a^{x_0}(f) \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

这就证明了 $V_a^x(f)$ 在 x_0 处右连续. 同理, $V_a^x(f)$ 在 $(a, b]$ 左连续. 结论得证. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.7.7 习题5.07

设函数 $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ 是连续函数, 且对任意的 $y \in [c, d]$, 点集 $f^{-1}(\{y\})$ 至多有 10 个点, 试证明 @跟锦数学微信公众号

$$V_a^b(f) \leq 10(d - c).$$

张祖锦解. 对 $[a, b]$ 的任一分划 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 记 $I_i = (x_{i-1}, x_i)$, J_i 是以 $f(x_{i-1}), f(x_i)$ 为端点的开区间 (因为 $f(x_{i-1}), f(x_i)$ 的大小关系未定). 由连续函数介值定理知 $f(I_i)$ 也是区间, 且 $\supset J_i$ (因为最大值可能在内部取得). 我们有 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |f(x_{i-1}) - f(x_i)| &= \sum_{i=1}^n \left| \int_{f(x_{i-1})}^{f(x_i)} 1 \, dy \right| = \sum_{i=1}^n \int_c^d \chi_{J_i}(y) \, dy \leq \sum_{i=1}^n \int_c^d \chi_{f(I_i)}(y) \, dy \\ &= \int_c^d \sum_{i=1}^n \chi_{f(I_i)}(y) \, dy \leq \int_c^d 10 \, dy = 10(d - c). \end{aligned}$$

这里, 我们利用了 $\sum_{i=1}^n \chi_{f(I_i)}(y) \leq 10$. 这可由反证法及题设得到. 事实上, 若 @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{i=1}^n \chi_{f(I_i)}(y) > 10,$$

则 y 属于 $f(I_i), i = 1, \dots, n$ 中的至少 11 个, 而

$$\exists 1 \leq j \leq 11, \text{ s.t. } x_j \in I_i, \text{ s.t. } f(x_i) = y.$$

由于 $I_i, i = 1, \dots, n$ 互不相交, 我们知 x_i 互异, 而 $f^{-1}(\{y\})$ 至少有 11 个点, 矛盾. 故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.7.8 习题5.08

设 $f \in L([0, 1])$, $g(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的递增函数. 若对任意的 $[a, b] \subset [0, 1]$, 有

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right|^2 \leq [g(b) - g(a)](b - a),$$

试证明 $f^2(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的可积函数.

张祖锦解. 由 $f \in L([0, 1])$ 及书第 221 页推论 5.8 知

$$\exists Z_1 \subset [0, 1] : mZ_1 = 0, \text{ s.t. } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(x), x \in [0, 1] \setminus Z_1.$$

又由 $g \nearrow$ 知 g a.e. 可导, 且 $g' \in L([0, 1])$. 而

$$\exists Z_2 \subset [0, 1] : mZ_2 = 0, \text{ s.t. } g \text{ 在 } x \text{ 处可导}, x \in [0, 1] \setminus Z_2.$$

令 $Z = Z_1 \cup Z_2$, 则 $mZ = 0$, 且当 $x \in [0, 1] \setminus Z$ 时, 由题设,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \right|^2 &\leq \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} |f(x)|^2 &\leq g'(x) \in L([0, 1]) \Rightarrow f^2 \in L([0, 1]). \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.7.9 习题5.09

设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的非负绝对连续函数, 试证明 $f^p(x) (p > 1)$ 是 $[a, b]$ 上的绝对连续函数.

张祖锦解. 由 $0 \leq f \in AC([a, b])$ 知 $0 \leq f \in C[a, b]$, 而

$$\exists M > 0, \text{ s.t. } \forall x \in [a, b], |f(x)| \leq M.$$

再由 $f \in AC([a, b])$ 知 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t. }$

$$\forall \{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n \text{ 互不相交} : \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta, \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \frac{\varepsilon}{pM^{p-1}}.$$

于是 ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |f^p(b_i) - f^p(a_i)| &= \sum_{i=1}^n p \xi_i^{p-1} |f(b_i) - f(a_i)| \quad (\xi_i \text{ 介于 } f(a_i), f(b_i) \text{ 之间}) \\ &\leq p M^{p-1} \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

这就说明了 $f^p \in AC([a, b])$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.7.10 习题5.10

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上递增, 且有 ④跟锦数学微信公众号

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a),$$

试证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上绝对连续.

张祖锦解. 由 $f' \geq 0$ 知 ④跟锦数学微信公众号

$$\int_a^x f'(t) dt \leq f(x) \leq f(a),$$

且 ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \int_x^b f'(t) dt &\leq f(b) - f(x) \Rightarrow \int_a^b f'(t) dt - \int_a^x f'(t) dt \leq f(b) - f(x) \\ \Rightarrow \int_a^x f'(t) dt &\geq \int_a^b f'(t) dt - f(b) + f(x) \\ &= [f(b) - f(a)] - f(b) + f(x) = f(x) - f(a). \end{aligned}$$

故 ④跟锦数学微信公众号

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt \in AC([a, b]).$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.7.11 习题5.11

设 $f \in BV([a, b])$. 若有 ④跟锦数学微信公众号

$$\int_a^b |f'(x)| dx = V_a^b(f),$$

试证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上绝对连续.

张祖锦解. 设 $F(x) = \bigvee_a^x(f) \nearrow$, 则由书第 215 页例 4 知 @跟锦数学微信公众号

$$F'(x) = |f'(x)|, \text{ a.e. } x \in [a, b].$$

由题设, @跟锦数学微信公众号

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a).$$

据习题 10 知 $F \in AC([a, b])$. 再由 @跟锦数学微信公众号

$$|f(x) - f(y)| \leq \bigvee_x^y(f) = |F(x) - F(y)|$$

及绝对连续函数的定义即知 $f \in AC([a, b])$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.7.12 习题 5.12

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上有界的递增函数, 且 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可微, 记 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = B,$$

试证明 $\int_{\mathbb{R}} f'(x) dx = B - A$.

张祖锦解.

(1) Rudin (Real and complex analysis) 第 149 页定理 7.21 (<https://mianbaoduo.com/o/bread/YZmb1pZq>) 有如下结论. 设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 可微, 且 $f' \in L([a, b])$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt, \quad a \leq x \leq b.$$

(2) 由 f 递增知 f' a.e. 可导, $f' \in L([a, b])$. 于是 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f'(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f'(x) \chi_{[-n, n]}(x) dx \stackrel{\text{Levi}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f'(x) \chi_{[-n, n]}(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f'(x) dx \stackrel{\text{Newton}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} [f(n) - f(-n)] \\ &\stackrel{\text{Fatou}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B - A. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.7.13 习题5.13

设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的可微函数, 且 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 都是 $\mathbb{R}$ 上的可积函数, 试证明 $\int_{\mathbb{R}} f'(x) dx = 0$.
张祖锦解.

(1) 先证 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x \pm n) = 0, \text{ a.e. } x \in [0, 1].$$

事实上, 由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^1 |f(x+n)| dx + \int_0^1 |f(x-n)| dx \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_n^{n+1} |f(t)| dt + \int_{-n}^{-n+1} |f(t)| dt \right] = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt - \int_0^1 |f(t)| dt < +\infty \end{aligned}$$

知 @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x \pm n)| < \infty, \text{ a.e. } x \in [0, 1] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x \pm n) = 0, \text{ a.e. } x \in [0, 1].$$

(2) 由第 1 步知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists x_0 \in [0, 1], \text{ s.t. } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0 \pm n) = 0.$$

于是 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f'(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} f'(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{x_0-n, x_0+n}(x) dx \\ &\stackrel{\text{Lebesgue 控制收敛}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f'(x) \chi_{[x_0-n, x_0+n]}(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0-n}^{x_0+n} f'(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_0+n) - f(x_0-n)] \quad (\text{习题 12 第 1 步}) \\ &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.7.14 习题5.14

假设 $f(x, y)$ 是定义在 $[a, b] \times [c, d]$ 上的二元函数, 且存在 $y_0 \in (c, d)$, 使得 $f(x, y_0)$ 在 $[a, b]$ 上是可积的, 又对于每一个 $x \in [a, b]$, $f(x, y)$ 是关于 y 在 $[c, d]$

上的绝对连续函数, $f'_y(x, y)$ 在 $[a, b] \times [c, d]$ 上是可积的, 试证明函数 ④跟锦数学微信公众号

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

是定义在 $[c, d]$ 上的绝对连续函数, 且对几乎处处的 $y \in [c, d]$, 有 ④跟锦数学微信公众号

$$F'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx.$$

张祖锦解. 由对于每一个 $x \in [a, b]$, $f(x, \cdot)$ 是 $[c, d]$ 上的绝对连续函数知 ④跟锦数学微信公众号

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \int_{y_0}^y f'_t(x, t) dt, \quad a \leq x \leq b. \quad (*)$$

由 $f(\cdot, y_0) \in L([a, b])$, $f'_y(\cdot, \cdot) \in L([a, b] \times [c, d])$ 知对 $(*)$ 关于 x 在 $[a, b]$ 上取 Lebesgue 积分, 得 ④跟锦数学微信公众号

$$F(y) - F(y_0) = \int_a^b \left[\int_{y_0}^y f'_t(x, t) dt \right] dx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{y_0}^y \left[\int_a^b f'_t(x, y) dx \right] dt.$$

故 $F \in AC([c, d])$, 且 $F'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.7.15 习题5.15

设 $f(x)$ 在任一区间 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ 上都绝对连续, 试证明对每个 $y \in \mathbb{R}$, 有 ④跟锦数学微信公众号

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x+y) dx = \int_a^b \frac{d}{dy} f(x+y) dx.$$

张祖锦解. ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \int_a^b f(x+y) dx &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \int_a^b [f(x+y+\Delta y) - f(x+y)] dx \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \int_a^b \frac{1}{\Delta y} \int_{x+y}^{x+y+\Delta y} f'(t) dt dx \\ &= \int_a^b f'(x+y) dx = \int_a^b \frac{d}{dy} f(x+y) dx \quad (\text{书的第 219 页引理 5.6}). \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.7.16 习题5.16

试举例说明绝对连续函数是几乎处处可微的这个结论一般是不能改进的.

张祖锦解. 设 $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$ 则 $f \in L([-1, 1])$, @跟锦数学微信公众号

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = |x| \in AC([a, b]).$$

但 F 在 $x = 0$ 处不可导. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.7.17 习题5.17

设 $\{g_k(x)\}$ 是在 $[a, b]$ 上的绝对连续函数列, 又有 @跟锦数学微信公众号

$$|g'_k(x)| \leq F(x) \text{ a.e. } (k = 1, 2, \dots)$$

且 $F \in L([a, b])$. 若 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g'_k(x) = g(x) \quad (a \leq x \leq b), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in [a, b],$$

试证明 @跟锦数学微信公众号

$$g'(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in [a, b].$$

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} g_k \in AC([a, b]) &\Rightarrow g_k(x) - g_k(a) = \int_a^x g'_k(t) dt \\ &\xrightarrow{\text{点态控制收敛}} g(x) - g(a) = \int_a^x f(t) dt \\ &\Rightarrow g'(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in [a, b] \text{ (书第 220 页定理 5.17)}. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.7.18 习题5.18

设 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的绝对连续严格增函数, $g(y)$ 在 $[f(a), f(b)]$ 上绝对连续, 试证明 $g(f(x))$ 在 $[a, b]$ 上绝对连续.

张祖锦解. 由 $g \in AC([f(a), f(b)])$ 知 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \text{ s.t. } \forall n, \forall \{(u_i, v_i)\}_{i=1}^n \text{ 互不相交,} \\ &\sum_{i=1}^n (v_i - u_i) < \delta_1, \sum_{i=1}^n |g(v_i) - g(u_i)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

对上述 $\delta_1 > 0$, 由 $f \in AC([a, b])$ 知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists \delta > 0, \text{ s.t. } \forall n, \forall \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n \text{ 互不相交}, \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) < \delta,$$

$$\delta_1 > \sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| = \sum_{i=1}^n [f(y_i) - f(x_i)].$$

由 f 严格递增及 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ 互不相交知 $\{(f(x_i), f(y_i))\}_{i=1}^n$ 互不相交, 而 @跟锦数学微信公众号

$$\sum_{i=1}^n |g(f(y_i)) - g(f(x_i))| < \varepsilon.$$

这就证明了 $g \circ f \in AC([a, b])$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.7.19 习题5.19

设 $g(x)$ 是 $[a, b]$ 上的绝对连续函数, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上满足 Lipschitz 条件, 试证明 $f(g(x))$ 是 $[a, b]$ 上的绝对连续函数.

张祖锦解. 由 $f \in Lip(\mathbb{R})$ 知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists M > 0, \text{ s.t. } \forall u, v \in \mathbb{R}, |f(u) - f(v)| \leq M|u - v|.$$

又由 $g \in AC([a, b])$ 知 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t. } @跟锦数学微信公众号$

$$\begin{aligned} \forall n, \forall \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n \text{ 互不相交}, \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) < \delta, \sum_{i=1}^n |g(y_i) - g(x_i)| < \frac{\varepsilon}{M} \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n |f \circ g(y_i) - f \circ g(x_i)| \leq \sum_{i=1}^n M|g(y_i) - g(x_i)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

故 $g \circ f \in AC([a, b])$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5.7.20 习题5.20

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微. 若 $f'(x) = 0$, a.e. $x \in [a, b]$, 试证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是一个常数函数.

张祖锦解.

(1) Rudin (Real and complex analysis) 第 149 页定理 7.21 (<https://mianbaoduo.com/o/bread/YZmb1pZq>) 有如下结论. 设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 可微, 且 $f' \in L([a, b])$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt, \quad a \leq x \leq b.$$

(2) 由 f 可微, $f'(x) = 0$, a.e. $x \in [a, b] \Rightarrow f' \in L([a, b])$, 及第 1 步知 ④跟锦数学微信公众账号

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt = 0, \quad a \leq x \leq b.$$

故有结论.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

6 L^p 空间

6.1 L^p 空间的定义与不等式

6.1.1 P250思考题01

设 $0 < m(E) < +\infty$, 且有数列 $\{p_k\}$: ④跟锦数学微信公众账号

$$1 < p_1 < p_2 < \cdots < p_k < \cdots \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty).$$

若 $f \in L^{p_k}(E)$ ($k = 1, 2, \cdots$), 且 $\sup_{k \geq 1} \{\|f\|_{p_k}\} < +\infty$, 则 $f \in L^\infty(E)$.

张祖锦解. 由书第 251 页例 2 知 ④跟锦数学微信公众账号

$$1 < p \Rightarrow p < \lim_{k \rightarrow \infty} p_k \Rightarrow \exists k, \text{ s.t. } p < p_k \Rightarrow f \in L^p(E).$$

再由书第 249 页知 ④跟锦数学微信公众账号

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p \xrightarrow[\text{原理}]{\text{归结}} \lim_{k \rightarrow \infty} \|f\|_{p_k}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

6.1.2 P250思考题02

设 $0 < p < q$. 若 $f \in L^\infty(E) \cap L^p(E)$, 则 $f \in L^q(E)$.

张祖锦解. 由 $f \in L^\infty(E)$ 知 $\forall \varepsilon > 0$, ④跟锦数学微信公众账号

$$\begin{aligned} & \inf \{M; \exists Z \subset E: mZ = 0, \text{ s.t. } |f(x)| \leq M, \text{ a.e. } x \in E \setminus Z\} < \|f\|_\infty + \varepsilon \\ \Rightarrow & \exists Z \subset E: mZ = 0, \text{ s.t. } |f(x)| \leq M, \text{ a.e. } x \in E \setminus Z, M < \|f\|_\infty + \varepsilon \\ \Rightarrow & |f(x)| < \|f\|_\infty + \varepsilon, \text{ a.e. } x \in E. \end{aligned}$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{k}$, 则 ④跟锦数学微信公众账号

$$\exists Z_k \subset E: mZ_k = 0, \text{ s.t. } |f(x)| < \|f\|_\infty + \frac{1}{k}, \forall x \in E \setminus Z_k.$$

令 $Z = \bigcup_{k=1}^r Z_k$, 则 $mZ = 0$, ④跟锦数学微信公众号

$$|f(x)| \leq \|f\|_r, x \in E \setminus Z.$$

于是 ④跟锦数学微信公众号

$$\int_E |f(x)|^q dx = \int_{E \setminus Z} |f(x)|^q dx \leq \|f\|_r^{q-p} \int_{E \setminus Z} |f(x)|^p dx = \|f\|_r^{q-p} \|f\|_p^p < \infty.$$

故 $f \in L^q(E)$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.1.3 P250思考题03

设 $m(E) < +\infty$, $f(x)$ 是可测函数, $0 < p_0 < +\infty$, $f \in L^{p_0}(E)$, 则 ④跟锦数学微信公众号

$$\lim_{p \nearrow p_0} \int_E |f(x)|^p dx = \int_E |f(x)|^{p_0} dx.$$

张祖锦解. 由 $mE < \infty$ 及书第 251 页例 2 知 $f \in L^p(E), \forall 0 < p < p_0$. 由 $|f| \geq 1 \Rightarrow |f|^p \nearrow |f|^{p_0} (p \nearrow p_0)$ 知 ④跟锦数学微信公众号

$$\lim_{p \nearrow p_0} \int_{E[|f| \geq 1]} |f(x)|^p dx \stackrel{\text{Levi}}{=} \int_{E[|f| \geq 1]} |f(x)|^{p_0} dx.$$

再由 $|f(x)| < 1, \frac{p_0}{2} < p < p_0 \Rightarrow |f(x)|^p \leq |f(x)|^{\frac{p_0}{2}}$ 知 ④跟锦数学微信公众号

$$\lim_{p \nearrow p_0} \int_{E[|f| < 1]} |f(x)|^p dx \stackrel{\text{点态控制收敛}}{=} \int_{E[|f| < 1]} |f(x)|^{p_0} dx.$$

相加即得结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.1.4 P250思考题04

设 $f \in L^1(E) \cap L^2(E)$, 则 ④跟锦数学微信公众号

$$\lim_{p \searrow 1} \int_E |f(x)|^p dx = \int_E |f(x)| dx.$$

张祖锦解. 由 $|f(x)| \geq 1, 1 < p < 2 \Rightarrow |f(x)|^p \leq |f(x)|^2$ 知 ④跟锦数学微信公众号

$$\lim_{p \searrow 1} \int_{E[|f| \geq 1]} |f(x)|^p dx \stackrel{\text{点态控制收敛}}{=} \int_{E[|f| \geq 1]} |f(x)| dx.$$

再由 $|f(x)| < 1 \Rightarrow |f(x)|^p \nearrow |f(x)| (p \searrow 1)$ 知 ④跟锦数学微信公众号

$$\lim_{p \searrow 1} \int_{E[|f| < 1]} |f(x)|^p dx \stackrel{\text{Levi}}{=} \int_{E[|f| < 1]} |f(x)| dx.$$

相加即得结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.1.5 P253思考题05

设 $f(x), g(x)$ 是 E 上的可测函数, 且有 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}, 1 \leq p < +\infty,$$

试证明 $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

张祖锦解.

(1) 若 $\|f\|_p = 0$, 则 $|f(x)|^p = 0$, a.e. $x \in E$. 结论自明.

(2) 若 $\|g\|_q = 0$, 则 $|g(x)|^q = 0$, a.e. $x \in E$. 结论自明.

(3) 故不妨设 $\|f\|_p > 0, \|g\|_q > 0$.

(4) 若 $\|f\|_p = +\infty$, 则右端 $= +\infty$. 结论自明.

(5) 若 $\|g\|_q = +\infty$, 则右端 $= +\infty$. 结论自明.

(6) 故不妨设 $0 < \|f\|_p, \|g\|_q < +\infty$. 此时, @跟锦数学微信公众号

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1 \Rightarrow \frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r} = 1.$$

而 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \|fg\|_r^r &= \int_E |f(x)|^r \cdot |g(x)|^r dx \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left\{ \int_E [|f(x)|^r]^{\frac{r}{p}} dx \right\}^{\frac{r}{p}} \left\{ \int_E [|g(x)|^r]^{\frac{r}{q}} dx \right\}^{\frac{r}{q}} \\ &= \|f\|_p^r \|g\|_q^r. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

6.1.6 P253思考题06

设 $f \in L^2((0, +\infty))$ 且 $f(x) \geq 0$ ($x \in (0, +\infty)$), 令 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 试证明

@跟锦数学微信公众号

$$F(x) = o(\sqrt{x}) \quad (x \rightarrow 0).$$

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$0 \leq \frac{1}{x} \left[\int_0^x f(t) dt \right]^2 \stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \frac{1}{x} \int_0^1 1^2 dt \cdot \int_0^x f^2(t) dt = \int_0^x f^2(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

最后一步我们利用了 Lebesgue 积分的绝对连续性, 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

6.1.7 P253思考题07

设 $f \in L^2([0, 1])$, 试证明存在 $[0, 1]$ 上的递增函数 $g(x)$, 使得对于任意的 $[a, b] \subset [0, 1]$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right|^2 \leq [g(b) - g(a)](b - a).$$

张祖锦解. 设 $g(x) = \int_0^x f^2(t) dt$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right|^2 \stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \int_a^b 1^2 dx \cdot \int_a^b f^2(x) dx = (b - a)[g(b) - g(a)].$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.1.8 P253思考题08

设 $f \in L^2([0, 1])$, 且 $\|f\|_2 \neq 0$, 令 @跟锦数学微信公众号

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad x \in [0, 1],$$

试证明 $\|F\|_2 < \|f\|_2$.

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \|F\|_2^2 &= \int_0^1 \left[\int_0^x f(t) dt \right]^2 dx \stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \int_0^1 \left[\int_0^x 1^2 dx \cdot \int_0^x f^2(t) dt \right] dx \\ &\leq \int_0^1 \left[x \int_0^1 f^2(t) dt \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f^2(t) dt < \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.1.9 P256思考题09

设 $1 \leq p \leq +\infty$. 若 $f_k \in L^p(E)$ ($k = 1, 2, \dots$), 且基数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 E 上几乎处处收敛, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p.$$

张祖锦解. 若 $p = \infty$, 则结论自明. 若 $1 \leq p < \infty$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_p &= \left[\int_E \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_E \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n f_k(x) \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \left| \sum_{k=1}^n f_k(x) \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_E \left| \sum_{k=1}^n f_k(x) \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p \stackrel{\text{Minkowski}}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \|f_k\|_p = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.1.10 P256思考题10

设 $f \in L^p(E)$ ($p \geq 1$), $e \subset E$ 是可测集, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\left[\int_E |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_e |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{E \setminus e} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \left[\int_E |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} &= \left[\int_E |f(x)\chi_e(x) + f(x)\chi_{E \setminus e}(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} = \|f\chi_e + f\chi_{E \setminus e}\|_p \\ &\stackrel{\text{Minkowski}}{\leq} \|f\chi_e\|_p + \|f\chi_{E \setminus e}\|_p = \left(\int_e |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{E \setminus e} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.2 L^p 空间的结构

6.2.1 P259思考题01

若 $f_k \in L^p(E)$ ($k = 1, 2, \dots$), $p \geq 1$, 且满足 @跟锦数学微信公众号

$$\|f_{k+1} - f_k\|_p \leq \frac{1}{2^k} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

试证明存在 $f \in L^p(E)$, 且有 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in E.$$

张祖锦解. 由书第 256 页思考题 9 知 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_{k+1}(x) - f_k(x) \right\|_p &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{k+1} - f_k\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < \infty \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| &< \infty, \text{ a.e. } x \in E \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} [f_{k+1}(x) - f_k(x)] \text{ a.e. 收敛} \\ \Rightarrow \exists Z \subset E : mZ = 0, \text{ s.t. } \sum_{k=1}^{\infty} [f_{k+1}(x) - f_k(x)] &\text{ 收敛, } \forall x \in E \setminus Z. \end{aligned}$$

设 $f(x) = \begin{cases} f_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [f_{k+1}(x) - f_k(x)], & x \in E \setminus Z, \\ 0, & x \in Z. \end{cases}$ 则 $\forall x \in E \setminus Z$, @跟锦数学微
信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ f_1(x) + \sum_{i=1}^{k-1} [f_{i+1}(x) - f_i(x)] \right\} = f(x).$$

结论得证. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.2.2 P259思考题02

设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上可测函数列, $F \in L^p(E)$ ($p \geq 1$). 若有 @跟锦数学微信公众号

$$|f_k(x)| \leq F(x) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in E,$$

试证明 $\|f_k - f\|_p \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).

张祖锦解. 由 @跟锦数学微信公众号

$$|f_k(x) - f(x)|^p \leq [2F(x)]^p \in L(E), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |f_k(x) - f(x)|^p = 0, \text{ a.e. } x \in E$$

知 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_p^p &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_E |f_k(x) - f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k(x) - f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \stackrel{\text{点态收敛}}{=} 0. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.2.3 P259思考题03

设 $f_n \in L^2(E)$ ($n = 1, 2, \dots$), 且有 $\|f_n\|_2 \leq M$ ($n = 1, 2, \dots$). 若 $f_n(x)$ 在 E 上几乎处处收敛到 $f(x)$, 试问: 有 $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) 吗?

张祖锦解. 不一定. 比如对 $f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$ 我们有 跟锦数学微信公众号

解

$$\forall 0 < x \leq 1 \Rightarrow \forall n > \frac{1}{x}, f_n(x) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0,$$

$$\|f_n\|_2 = \|f_n - 0\|_2 = \left[\int_0^1 f_n^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}} = 1 \not\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.2.4 P259思考题04

试证明在 $L^p([0, 1])$ 的各等价类中,

- (1) 每个类中至多含有一个连续函数;
- (2) 存在不含有连续函数的类.

张祖锦解.

(1) 用反证法. 若 $L^p([0, 1])$ 中有一个类含有两个连续函数, 则 跟锦数学微信公众号

$$\exists f, g \in C[0, 1], \text{ s.t. } f \neq g, f = g, \text{ a.e. } x \in [0, 1] \quad (*)$$

$$\Rightarrow \exists Z \subset [0, 1] : mZ = 0, \text{ s.t. } f(x) = g(x), \forall x \in [0, 1] \setminus Z$$

$$\Rightarrow \forall x \in (0, 1), \text{ 由 } B\left(x, \frac{1}{n}\right) \not\subset Z \text{ 知 } \exists x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right), \text{ s.t. } x_n \notin Z$$

$$\Rightarrow \forall x \in (0, 1), \exists (0, 1) \ni x_n \rightarrow x, \text{ s.t. } f(x_n) = g(x_n)$$

$$\Rightarrow \forall x \in (0, 1), f(x) \stackrel{\text{等}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x)$$

$$\Rightarrow f \equiv g, \text{ 与 } (*) \text{ 矛盾. 故有结论.}$$

(2) 由 $\int_0^1 \left(\frac{1}{x^{2p}}\right)^p dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \infty$ 知 $\frac{1}{x^{2p}} \in L^p([0, 1])$. 但其等价类中没有连

续函数. 也用反证法证明如下. ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} & \exists f \in C[0, 1], \text{ s.t. } f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2p}}}, \text{ a.e. } x \in [0, 1] \\ \Rightarrow & \exists Z \subset [0, 1]: mZ = 0, \text{ s.t. } f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2p}}}, \forall x \in [0, 1] \setminus Z \\ \Rightarrow & \forall n \geq 1, \text{ 由 } \left(0, \frac{1}{n}\right) \not\subset Z \text{ 知 } \exists x_n \searrow 0, \text{ s.t. } x_n \notin Z \\ \Rightarrow & \exists x_n \searrow 0, \text{ s.t. } f(x_n) = \frac{1}{x_n^{\frac{1}{2p}}} \\ \Rightarrow & f(0) \stackrel{\text{极限}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n^{\frac{1}{2p}}} = +\infty, \text{ 这是一个矛盾. 故有结论.} \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.2.5 P259思考题05

设 $1 \leq q < p < +\infty, m(E) < +\infty$. 若有 ④跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k(x) - f(x)|^p dx = 0,$$

试证明 $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k(x) - f(x)|^q dx = 0$.

张祖锦解. ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \int_E |f_k(x) - f(x)|^q dx & \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left[\int_E 1^{\frac{p}{p-q}} dx \right]^{\frac{p-q}{p}} \cdot \left\{ \int_E [|f_k(x) - f(x)|^q]^{\frac{p}{q}} dx \right\}^{\frac{q}{p}} \\ & = (mE)^{\frac{p-q}{p}} \left[\int_E |f_k(x) - f(x)|^p dx \right]^{\frac{q}{p}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.2.6 P259思考题06

设 $f \in L^p([a, b]), f_k \in L^p([a, b]) (k \in \mathbb{N}, p \geq 1)$. 若有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_p = 0$, 试

证明 ④跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^x f_k(t) dt = \int_a^x f(t) dt, a \leq x \leq b.$$

张祖锦解. ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^x f_k(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| = \left| \int_a^x [f_k(t) - f(t)] dt \right| \leq \int_a^x |f_k(t) - f(t)| dt \\ & \leq \int_a^b |f_k(t) - f(t)| dt \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_a^b 1^{\frac{p}{p-1}} dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \left[\int_a^b |f_k(t) - f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \\ & = (b-a)^{\frac{p-1}{p}} \|f_k - f\|_p \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.2.7 P259思考题07

设 $f \in L^p(E)$, $f_k \in L^p(E)$ ($k = 1, 2, \dots$); $g \in L^q(E)$, $g_k \in L^q(E)$ ($k = 1, 2, \dots$), 且 $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 若有 @跟锦数学微信公众号

$$\|f_k - f\|_p \rightarrow 0, \quad \|g_k - g\|_q \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

试证明 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k(x)g_k(x) - f(x)g(x)| dx = 0.$$

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \int_E |f_k g_k - f g| &= \int_E |(f_k - f)(g_k - g) + (f_k - f)g + (g_k - g)f| \\ &\leq \int_E |f_k - f| \cdot |g_k - g| + \int_E |f_k - f| \cdot |g| + \int_E |g_k - g| \cdot |f| \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f_k - f\|_p \|g_k - g\|_q + \|f_k - f\|_p \|g\|_q + \|g_k - g\|_q \|f\|_p \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.2.8 P263思考题01

设 $1 < p < +\infty$, $f_n \in L^p(\mathbb{R})$, $\|f_n\|_p \leq M$ ($n = 1, 2, \dots$), $f \in L^p(\mathbb{R})$, 且有 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x f_n(t) dt = \int_0^x f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

则对任意的 $g \in L^q(\mathbb{R})$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) dx.$$

张祖锦解. 由 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x f_n(t) dt = \int_0^x f(t) dt, \quad \forall x$$

知 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_x^y f_n(t) dt = \int_x^y f(t) dt, \quad \forall x < y.$$

故对任一具有紧支集的可测简单函数 ϕ , @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \phi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \phi(t) dt. \quad (*)$$

对 $\forall g \in L^q(\mathbb{R})$, $\forall \varepsilon > 0$, 由书第 260 页引理 6.6 知存在具有紧支集的可测简单函数 ϕ , 使得 @跟锦数学微信公众号

$$\|g - \phi\|_q < \frac{\varepsilon}{2(M + \|f\|_p + 1)}.$$

由 (*) 知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists N, \text{ s.t. } \forall n \geq N, \left| \int_{\mathbb{R}} f_n \phi - \int_{\mathbb{R}} f \phi \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $n \geq N$ 时, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} f_n g - \int_{\mathbb{R}} f g \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}} (f_n - f) g \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} (f_n - f)(g - \phi) + \int_{\mathbb{R}} (f_n - f) \phi \right| \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f_n - f\|_p \|g - \phi\|_q + \left| \int_{\mathbb{R}} f_n \phi - \int_{\mathbb{R}} f \phi \right| \\ &\stackrel{\text{Minkowski}}{\leq} (\|f_n\|_p + \|f\|_p) \cdot \frac{\varepsilon}{2(M + \|f\|_p + 1)} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

6.2.9 P263思考题02

$L^\infty([0, 1])$ 不是可分的.

张祖锦解.

(1) 用反证法. 若 $L^\infty([0, 1])$ 是可分的, 则 @跟锦数学微信公众号

$\exists f_n \in L^\infty([0, 1])$, s.t. $\{f_1, f_2, \dots\}$ 在 $L^\infty([0, 1])$ 中稠密.

考虑 $\mathcal{A} = \{\chi_{(0,t)}; t \in (0, 1)\}$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$0 < t < 1 \Rightarrow \chi_t \in L^\infty([0, 1]) \Rightarrow \exists f_{n_t} \in B\left(\chi_{(0,t)}, \frac{1}{3}\right).$$

(2) 往用反证法证明 $(0, 1) \ni t \mapsto n_t \in \mathbb{Z}_+$ 是单射. 若 $\exists s < t$, s.t. $n_s = n_t \equiv n$, 则

@跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} f_n &\in B\left(\chi_{(0,s)}, \frac{1}{3}\right), f_n \in B\left(\chi_{(0,t)}, \frac{1}{3}\right) \\ \Rightarrow 1 &= \|\chi_{[s,t]}\|_\infty = \|\chi_{(0,s)} - \chi_{(0,t)}\|_\infty \leq \|\chi_{(0,s)} - f_n\|_\infty + \|f_n - \chi_{(0,t)}\|_\infty \\ &< \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

这是一个矛盾. 故有结论.

(3) 由第 2 步知 $(0, 1) \ni t \mapsto n_t \in \mathbb{Z}$, 是单射, 而 @跟锦数学微信公众号

$$N = \overline{(0, 1)} \subseteq \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{N}_0.$$

这是一个矛盾, 故有结论.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.3 L^2 内积空间

6.3.1 P267思考题01

设 $f, g \in L^2(E)$, 则有 (平行四边形公式) @跟锦数学微信公众号

$$\|f + g\|_2^2 + \|f - g\|_2^2 = 2(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2).$$

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}\|f + g\|^2 &= \langle f + g, f + g \rangle = \langle f, f \rangle + 2\langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle, \\ \|f - g\|^2 &= \langle f - g, f - g \rangle = \langle f, f \rangle - 2\langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle.\end{aligned}$$

相加即得结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.3.2 P267思考题02

设 $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0, \|g_n - g\|_2 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$|\langle f_n, g_n \rangle - \langle f, g \rangle| \rightarrow 0.$$

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}|\langle f_n, g_n \rangle - \langle f, g \rangle| &= |\langle f_n - f, g_n - g \rangle + \langle f_n - f, g \rangle + \langle f, g_n - g \rangle| \\ &\stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \|f_n - f\|_2 \|g_n - g\|_2 + \|f_n - f\|_2 \|g\|_2 + \|f\|_2 \|g_n - g\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.3.3 P267思考题03

设 $\|f\|_2 = \|g\|_2$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\langle f + g, f - g \rangle = 0.$$

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\langle f + g, f - g \rangle = \langle f, f \rangle - \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle - \langle g, g \rangle = \|f\|_2^2 - \|g\|_2^2 = 0.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.3.4 P267思考题04

设 $\|f_n\|_2 \rightarrow \|f\|_2, \langle f_n, f \rangle \rightarrow \|f\|_2^2 (n \rightarrow \infty)$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|^2 &= \langle f_n - f, f_n - f \rangle = \langle f_n, f_n \rangle - 2 \langle f_n, f \rangle + \langle f, f \rangle \\ &= \|f_n\|_2^2 - 2 \langle f_n, f \rangle + \|f\|_2^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|f\|_2^2 - 2 \|f\|_2^2 + \|f\|_2^2 = 0.\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.3.5 P273思考题01

$\{\sin nx\}$ 是 $L^2([0, \pi])$ 中的完全正交系.

张祖锦解. 由 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^\pi \sin^2 nx \, dx = \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2nx}{2} \, dx = \frac{\pi}{2},$$

@跟锦数学微信公众号

$$m \neq n \Rightarrow \int_0^\pi \sin mx \cdot \sin nx \, dx = - \int_0^\pi \frac{\cos(m+n)x - \cos(m-n)x}{2} \, dx = 0$$

知 $\{\sin nx\}$ 是 $L^2([0, \pi])$ 中的正交系. 对 $\forall f \in L^2([0, \pi])$, 若 @跟锦数学微信公众号

$$\int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx = 0, \forall n \geq 1,$$

往证 $f = 0$, a.e., 则由书第 270 页定义 6.8 知 $\{\sin nx\}$ 是 $L^2([0, \pi])$ 中的完全正交系. 事实上, 作 f 的奇延拓 @跟锦数学微信公众号

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leq \pi \\ -f(-x), & -\pi \leq x < 0 \end{cases} \quad (\text{函数在一点的值不影响 Lebesgue 积分}),$$

则 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^\pi F(x) \cos nx \, dx &\stackrel{\text{对称性}}{=} 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ \int_{-\pi}^\pi F(x) \sin nx \, dx &\stackrel{\text{对称性}}{=} 2 \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).\end{aligned}$$

由书第 270 页例 6 三角函数系的完全性质 @跟锦数学微信公众号

$$F(x) = 0, \text{ a.e. } x \in [-\pi, \pi] \Rightarrow f(x) = 0, \text{ a.e. } x \in [0, \pi].$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.3.6 P273思考题02

设 $f \in L^1([-\pi, \pi])$, $\{\varphi_n(x)\}$ 是 $(-\pi, \pi]$ 上的三角函数系. 若有 ④跟锦数学微信公众号

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi_n(x) dx = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

则 $f(x) = 0$, a.e. $x \in [-\pi, \pi]$.

张祖锦解. 由题设, ④跟锦数学微信公众号

$$\forall \text{ 三角多项式 } Q(x), \langle f, Q \rangle = 0.$$

又由 Weierstrass 第二逼近定理, ④跟锦数学微信公众号

$$\forall g \in C[-\pi, \pi], \exists \text{ 三角多项式列 } \{Q_n(x)\}, \text{ s.t. } Q_n \rightrightarrows g, \text{ 于 } [-\pi, \pi].$$

于是 ④跟锦数学微信公众号

$$\forall g \in C[-\pi, \pi], \langle f, g \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, Q_n \rangle = 0.$$

再由书第 163 页 (Lebesgue 可积函数由连续函数在 L^1 意义下逼近) 知 $\forall \mathcal{M} \ni E \subset [-\pi, \pi]$, ④跟锦数学微信公众号

$$\forall n \geq 1, \exists g_k \in C[0, 1], \text{ s.t. } \int_{-\pi}^{\pi} |\chi_E(x) - g_k(x)| dx < \frac{1}{k}.$$

于是 ④跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |g_k(x) - \chi_E(x)| dx = 0 &\Rightarrow g_k \text{ 依测度收敛于 } \chi_E(x) \\ \Rightarrow \int_E f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \chi_E(x) dx \stackrel{\text{依测度收敛}}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g_k(x) dx = 0. \end{aligned}$$

利用习题 4 题 23 中 (*) 即知 $f(x) = 0$, a.e. $x \in [-\pi, \pi]$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.3.7 P273思考题03

设 $\{\varphi_i(x)\}$ 是 $L^2(A)$ 中的完全标准正交系, $\{\psi_k(x)\}$ 是 $L^2(B)$ 中的完全标准正交系, 则 ④跟锦数学微信公众号

$$\{f_{ik}(x, y)\} = \{\varphi_i(x) \psi_k(y)\}$$

是 $L^2(A \times B)$ 中的完全正交系.

张祖锦解. 集 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ 则由题设, @跟锦数学微信公众号

$$\int_A \varphi_i \varphi_j = \delta_{ij}, \quad \int_B \psi_k \psi_l = \delta_{kl}.$$

于是 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \int_{A \times B} |f_{ik} f_{jl}| &= \int_{A \times B} |\varphi_i(x) \psi_k(y) \cdot \varphi_j(x) \psi_l(y)| \, dx \, dy \\ &\stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_A |\varphi_i(x) \varphi_j(x)| \, dx \int_B |\psi_k(y) \psi_l(y)| \, dy \\ &\stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \|\varphi_i\|_{L^2(A)} \|\varphi_j\|_{L^2(A)} \|\psi_k\|_{L^2(B)} \|\psi_l\|_{L^2(B)} < \infty. \end{aligned}$$

故 $f_{ik} f_{jl} \in L(A \times B)$, 进而 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \int_{A \times B} f_{ik} f_{jl} &= \int_{A \times B} \varphi_i(x) \psi_k(y) \cdot \varphi_j(x) \psi_l(y) \, dx \, dy \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_A \varphi_i(x) \varphi_j(x) \, dx \int_B \psi_k(y) \psi_l(y) \, dy = \delta_{ij} \cdot \delta_{kl} = \delta_{ik, jl}. \end{aligned}$$

这表明 $\{f_{ik}\}$ 是 $L^2(A \times B)$ 中的正交系. 设 $f \in L^2(A \times B)$. 若 $\langle f, f_{ik} \rangle = 0, \forall i, k$, 往证 $f = 0, \text{ a.e.}$, 而证得 $\{f_{ik}\}$ 是 $L^2(A \times B)$ 中的完全系. 事实上, 由 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \int_{A \times B} |f f_{ik}| \, dx \, dy &= \int_{A \times B} |f(x) \varphi_i(x) \psi_k(y)| \, dx \, dy \stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \|f\|_{L^2(A \times B)} \|\varphi_i \psi_k\|_{L^2(A \times B)} \\ &\stackrel{\text{Tonelli}}{=} \|f\|_{L^2(A \times B)} \left[\int_A \varphi_i^2(x) \, dx \int_B \psi_k^2(y) \, dy \right]^{\frac{1}{2}} < \infty \end{aligned}$$

知 $f f_{ik} \in L(A \times B)$, 进而 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \int_{A \times B} f f_{ik} \, dx \, dy &= \int_{A \times B} f(x) \varphi_i(x) \psi_k(y) \, dx \, dy \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_A \varphi_i(x) \left[\int_B f(x, y) \psi_k(y) \, dy \right] \, dx. \end{aligned}$$

由 $\{\varphi_i\}$ 是 $L^2(A)$ 中的完全系知 @跟锦数学微信公众号

$$\int_B f(x, y) \psi_k(y) \, dy = 0, \text{ a.e. } x \in A.$$

又由 $\{\psi_k\}$ 是 $L^2(B)$ 中的完全系知 @跟锦数学微信公众号

$$f(x, y) = 0, \text{ a.e. } y \in B, \text{ a.e. } x \in A \Rightarrow f(x, y) = 0, \text{ a.e. } (x, y) \in A \times B.$$

@跟锦数学微信公众号

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.3.8 P273思考题04

设 $\{\varphi_k(x)\}$ 是 $L^2(E)$ 中的标准正交系. 若 $f \in L^2(E)$, 则由 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f(x) \varphi_k(x) dx = 0.$$

张祖锦解. 由书第 269 页定理 6.13 (Bessel 不等式) 知 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 &\leq \|f\|_2^2, c_k = \int_E f(x) \varphi_k(x) dx \\ \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f(x) \varphi_k(x) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

6.3.9 P273思考题05

设 $\{\varphi_k\} \subset L^2([a, b])$ 是完全标准正交系, $f \in L^2([a, b])$, $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$, 其中 $c_k = \langle f, \varphi_k \rangle$, 则对 $[a, b]$ 中的可测集 E , 有 @跟锦数学微信公众号

$$\int_E f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_E \varphi_k(x) dx.$$

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \int_E f(x) dx &= \int_a^b f(x) \chi_E(x) dx = \langle f, \chi_E \rangle \\ &\stackrel{\text{习题 6.15}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \langle \chi_E, \varphi_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_E \varphi_k(x) dx. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

6.4 L^p 空间的范数公式

6.5 卷积

6.6 弱收敛

6.7 P289习题6

6.7.1 习题6.01

设 $f \in L^\infty(E)$, $w(x) > 0$, 且 $\int_E w(x) dx = 1$, 试证明 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left[\int_E |f(x)|^p w(x) dx \right]^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty.$$

张祖锦解.由书第 250 页思考题 2 的证明过程知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists Z \subset E: mZ = 0, \text{ s.t. } |f(x)| \leq \|f\|_{\infty}, \forall x \in E \setminus Z.$$

于是 @跟锦数学微信公众号

$$\left[\int_E |f(x)|^p w(x) dx \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_{E \setminus Z} |f(x)|^p w(x) dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{\infty} \left[\int_{E \setminus Z} w(x) dx \right]^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{\infty}.$$

故 @跟锦数学微信公众号

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \left[\int_E |f(x)|^p w(x) dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{\infty}.$$

另一方面, 对 $\forall \epsilon > 0, mE[|f| > \|f\|_{\infty} - \epsilon] > 0$, 而 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \left[\int_E |f(x)|^p w(x) dx \right]^{\frac{1}{p}} &\geq \left\{ \int_{E[|f| > \|f\|_{\infty} - \epsilon]} |f(x)|^p w(x) dx \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\geq (\|f\|_{\infty} - \epsilon) \left\{ \int_{E[|f| > \|f\|_{\infty} - \epsilon]} w(x) dx \right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

令 $p \rightarrow \infty$ 即得 ($g > 0$ 于 $E, mE > 0 \Rightarrow \int_E f > 0$. 若不然, $\int_E f = 0 \Rightarrow f = 0$, a.e. $x \in E$, 矛盾) @跟锦数学微信公众号

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \left[\int_E |f(x)|^p w(x) dx \right]^{\frac{1}{p}} \geq \|f\|_{\infty} - \epsilon \stackrel{\epsilon \searrow 0}{\Rightarrow} \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \left[\int_E |f(x)|^p w(x) dx \right]^{\frac{1}{p}} \geq \|f\|_{\infty}.$$

故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.7.2 习题6.02

设 $g(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的可测函数. 若对任意的 $f \in L^2(E)$, 有 $\|gf\|_2 \leq M\|f\|_2$, 试证明 @跟锦数学微信公众号

$$|g(x)| \leq M, \text{ a.e. } x \in E.$$

张祖锦解.往用反证法证明 $mE[|g| > M] = 0$, 而 $|g| \leq M$, a.e.. 若不然, $mE[|g| > M] > 0$, 则取 $f = \chi_{E[|g| > M]}$ 后, @跟锦数学微信公众号

$$M^2 \cdot mE[|g| > M] < \int_{E[|g| > M]} g^2 dx = \|gf\|_2^2 \leq M^2 \|f\|_2^2 = M^2 \cdot mE[|g| > M].$$

这是一个矛盾. 故有结论. 这里, 第一个小于号的理由如下. 设 $f(x) > g(x), x \in E, mE > 0$, 则 $\int_E f > \int_E g$. 若不然, $\int_E (f - g) = 0 \Rightarrow f - g = 0$, a.e., 矛盾. 故有结论. @跟锦数学微信公众号

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.7.3 习题6.03

设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上正值可积, $1 < r < +\infty$, $E \subset (0, +\infty)$, 且 $m(E) > 0$, 试证明 @跟锦数学微信公众号

$$\left[\frac{1}{m(E)} \int_E f(x) dx \right]^{-1} \leq \left[\frac{1}{m(E)} \int_E \frac{1}{f^r(x)} dx \right]^{\frac{1}{r}}.$$

张祖锦解. 在书第 253 页例 5 反向 Hölder 不等式中取 $p = \frac{r}{1+r}$, $q = -r$, 则

@跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \int_E f(x) dx &= \int_E 1 \cdot f(x) dx \geq \left(\int_E 1^{\frac{r}{1+r}} dx \right)^{\frac{1+r}{r}} \left\{ \int_E [f(x)]^{-r} dx \right\}^{-\frac{1}{r}} \\ &= (mE)^{\frac{1+r}{r}} \left[\int_E \frac{1}{f^r(x)} dx \right]^{-\frac{1}{r}} = mE \cdot \left[\frac{1}{mE} \int_E \frac{1}{f^r(x)} dx \right]^{-\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

整理即得结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.7.4 习题6.04

设 $f \in L^2([0, 1])$, 令 @跟锦数学微信公众号

$$g(x) = \int_0^1 \frac{f(t)}{|t-x|^{\frac{1}{2}}} dt, \quad 0 < x < 1,$$

试证明 @跟锦数学微信公众号

$$\left[\int_0^1 g^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq 2\sqrt{2} \left[\int_0^1 f^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$|g(x)| = \left| \int_0^1 \frac{1}{|x-t|^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{f(t)}{|x-t|^{\frac{1}{4}}} dt \right| \stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \left[\int_0^1 \frac{1}{|x-t|^{\frac{1}{2}}} dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 \frac{f^2(t)}{|x-t|^{\frac{1}{2}}} dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

注意到 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x-t|}} dt &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{x-t}} + \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t-x}} = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} \\ &\stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} 2\sqrt{(1^2+1^2)[(\sqrt{x})^2+(\sqrt{1-x})^2]} = 2\sqrt{2}, \end{aligned}$$

我们有 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \int_0^1 g^2(x) dx &\leq 2\sqrt{2} \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{f^2(t)}{|x-t|^{\frac{1}{2}}} dt \\ &\stackrel{\text{Tonelli}}{=} 2\sqrt{2} \int_0^1 f^2(t) dt \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x-t|}} dx = 8 \int_0^1 f^2(t) dt. \end{aligned}$$

故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.7.5 习题6.05

试证明下列两个不等式是不能同时成立的:

$$(1) \int_0^{\pi} [f(x) - \sin x]^2 dx \leq \frac{4}{9};$$

$$(2) \int_0^{\pi} [f(x) - \cos x]^2 dx \leq \frac{1}{9}.$$

张祖锦解. 用反证法. 若题中两个等式都成立, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \geq \|f(x) - \sin x\|_2 + \|f(x) - \cos x\|_2 \\ &\stackrel{\text{Minkowski}}{\geq} \|[f(x) - \sin x] - [f(x) - \cos x]\|_2 = \|\sin x - \cos x\|_2 \\ &= \left[\int_0^{\pi} (\sin x - \cos x)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_0^{\pi} (1 - \sin 2x) dx \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

这是一个矛盾. 故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.7.6 习题6.06

设 $f \in L^p(\mathbb{R})$ ($p > 1$), $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, 令 @跟锦数学微信公众号

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

试证明 @跟锦数学微信公众号

$$|F(x+h) - F(x)| = (|h|^{\frac{1}{p'}}), \quad h \rightarrow 0.$$

张祖锦解. 由 L 积分的绝对连续性知 @跟锦数学微信公众号

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t. } \forall \mathcal{M} \ni E \subset \mathbb{R}: mE < \delta, \int_E |f(x)|^p dx < \varepsilon.$$

于是当 $0 < |h| < \delta$ 时, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x)| &= \left| \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \\ &\stackrel{\text{Holder}}{\leq} \left(\int_x^{x+h} 1^{\frac{p}{p-1}} dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \left[\int_x^{x+h} |f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} < |h|^{\frac{p-1}{p}} \varepsilon. \end{aligned}$$

故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.7.7 习题6.07

设 $m(E_k) > 0$ ($k = 1, 2, \dots$), 且 $m(E_k) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), 又 @跟锦数学微信公众号

$$g_k(x) = \frac{\chi_{E_k}(x)}{m(E_k)^{\frac{1}{q}}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 1,$$

试证明对 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 有 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k(x) f(x) dx = 0.$$

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} g_k(x) f(x) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |g_k(x) f(x)| dx = \frac{1}{(m E_k)^{\frac{1}{q}}} \int_{E_k} |f(x)| dx \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left[\int_{E_k} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

最后一个极限是因为 L 积分的绝对连续性. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.7.8 习题6.08

设 $f, g \in L^3(E)$, 且有 @跟锦数学微信公众号

$$\|f\|_3 = \|g\|_3 = \int_E f^2(x)g(x) dx = 1,$$

试证明 $g(x) = |f(x)|$, a.e. $x \in E$.

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$1 = \int_E f^2(x)g(x) dx \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left[\int_E |f^2(x)|^{\frac{3}{2}} dx \right]^{\frac{2}{3}} \left[\int_E |g(x)|^3 dx \right]^{\frac{1}{3}} = \|f\|_3^2 \|g\|_3 = 1.$$

由 Hölder 不等式成立的条件知 @跟锦数学微信公众号

$$\frac{f^2(x)}{\|f^2\|_{\frac{3}{2}}} = \frac{|g(x)|}{\|g\|_3}, \quad \text{a.e. } x \in E \Rightarrow |f(x)| = |g(x)|, \quad \text{a.e. } x \in E.$$

为证 $g(x) = |f(x)|$, a.e. $x \in E$, 仅需验证 $|g(x)| = g(x)$, $x \in E$. 事实上, 由 @跟锦数学微信公众号

$$\int_E g^2(x) [|g(x)| - g(x)] dx = \|g\|_3^3 - \int_E f^2(x)g(x) dx = 1^3 - 1 = 0$$

知 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} g^2(x) [|g(x)| - g(x)] &= 0, \text{ a.e. } x \in E \\ \Rightarrow \exists Z \subset E : mZ &= 0, \text{ s.t. } g^2(x) [|g(x)| - g(x)] = 0, \forall x \in E \setminus Z \\ \Rightarrow E[|g| \neq g] &= E[|g| < g] = E[g < 0] \subset Z \Rightarrow |g| \geq g, \text{ a.e. 于 } E. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.7.9 习题6.09

设 $f_1(y, z), f_2(x, z), f_3(x, y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的非负可测函数, 记 @跟锦数学微信公众号

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^2} f_1^2(y, z) dy dz, I_2 = \int_{\mathbb{R}^2} f_2^2(x, z) dx dz, I_3 = \int_{\mathbb{R}^2} f_3^2(x, y) dx dy,$$

令 $F(x, y, z) = f_1(y, z)f_2(x, z)f_3(x, y)$, 试证明 @跟锦数学微信公众号

$$\int_{\mathbb{R}^3} F(x, y, z) dx dy dz \leq (I_1 I_2 I_3)^{\frac{1}{2}}.$$

张祖锦解. @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} F(x, y, z) dx dy dz &\stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} f_1(y, z) dy dz \int_{\mathbb{R}} f_2(x, z) f_3(x, y) dx \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ f_1(y, z) \left[\int_{\mathbb{R}} f_2^2(x, z) dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}} f_3^2(x, y) dx \right]^{\frac{1}{2}} \right\} dy dz \\ &\stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f_3^2(x, y) dx \right]^{\frac{1}{2}} dy \int_{\mathbb{R}} f_1(y, z) \left[\int_{\mathbb{R}} f_2^2(x, z) dx \right]^{\frac{1}{2}} dz \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f_3^2(x, y) dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}} f_1^2(y, z) dz \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}^2} f_2^2(x, z) dx dz \right]^{\frac{1}{2}} dy \\ &= I_2^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f_3^2(x, y) dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}} f_1^2(y, z) dz \right]^{\frac{1}{2}} dy \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} I_2^{\frac{1}{2}} I_3^{\frac{1}{2}} I_1^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.7.10 习题6.10

设 $f \in L^p(\mathbb{R})$ ($1 \leq p < +\infty$), 令 $f_h(x) = f(x+h)$. 若 $r > 0, s > 0$, 且 $r+s=p$, 试证明 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{|h| \rightarrow \infty} \|f_h^r f^s\|_1 = 0.$$

张祖锦解. 由 $f \in L^p(\mathbb{R})$ 知 @跟锦数学微信公众号

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{ s.t. } \int_{|x| > N} |f|^p dx < \varepsilon.$$

再由 @跟锦数学微信公众号

$$r + s = p \Rightarrow 1 = \frac{r}{p} + \frac{s}{p} = \frac{1}{p/r} + \frac{1}{p/s}$$

知当 $|h| > 2N$ 时, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \|f_h^r f^s\|_1 &= \int_{|x| < N} |f_h|^r |f|^s dx + \int_{|x| \geq N} |f_h|^r |f|^s dx \\ &\stackrel{\text{Holder}}{\leq} \left[\int_{|x| < N} |f(x+h)|^p dx \right]^{\frac{r}{p}} \left[\int_{|x| < N} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{s}{p}} \\ &\quad + \left[\int_{|x| \geq N} |f(x+h)|^p dx \right]^{\frac{r}{p}} \left[\int_{|x| \geq N} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{s}{p}} \\ &\leq \left[\int_{|y| > N} |f(y)|^p dy \right]^{\frac{r}{p}} \|f\|_p^s + \|f\|_p^r \left[\int_{|x| \geq N} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{s}{p}} \\ &\quad (|x| < N \Rightarrow |y| := |x+h| \geq |h| - |x| \geq 2N - N = N) \\ &< \varepsilon^{\frac{r}{p}} \|f\|_p^s + \|f\|_p^r \varepsilon^{\frac{s}{p}}. \end{aligned}$$

故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

6.7.11 习题6.11

设 $f_n \in AC([a, b])$, 且 $f_n(0) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$). 若 $\{f'_n\}$ 是 $L^1([0, 1])$ 中的 Cauchy 列, 试证明存在 $f \in AC([0, 1])$, 使得 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

张祖锦解. 由 $f_n \in AC([0, 1])$, $f_n(0) = 0$ 知 @跟锦数学微信公众号

$$f_n(x) = \int_0^x f'_n(t) dt, \forall x \in [0, 1].$$

又由 $\{f'_n\}$ 在 $L^1([0, 1])$ 中是 Cauchy 列知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists g \in L^1([0, 1]), \text{ s.t. } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f'_n(x) - g(x)| dx = 0.$$

设 $f(x) = \int_0^x g(t) dt$, 则 $f \in AC([0, 1])$, 且 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x \in [0, 1]} \left| \int_0^x f'_n(t) dt - \int_0^x g(t) dt \right| \leq \sup_{x \in [0, 1]} \int_0^x |f'_n(t) - g(t)| dt \\ &= \int_0^1 |f'_n(t) - g(t)| dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

这就证明了 $f_n \Rightarrow f$, 于 $[0, 1]$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

6.7.12 习题6.12

设在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上有 @跟锦数学微信公众号

$$\|f_k - f\|_1 \rightarrow 0, \|g_k - g\|_1 \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

若 $f_k \in L^\infty(E)$, $\|f_k\|_\infty \leq M$ ($k = 1, 2, \dots$), 试证明 @跟锦数学微信公众号

$$\|f_k g_k - f g\|_1 \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

张祖锦解. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\|g_k - g\|_1 \rightarrow 0$ 知 @跟锦数学微信公众号

$$\exists K_1, \text{ s.t. } \forall k \geq K_1, \|g_k - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3(M+1)}.$$

又由 $g \in L^1(E)$ 及 Lebesgue 积分的绝对连续性知 @跟锦数学微信公众号

$$\forall \mathcal{M} \ni E_\delta \subset E: mE_\delta < \delta, \int_{E_\delta} |g| < \frac{\varepsilon}{6(M+1)}.$$

再由 $\|f_k - f\|_1 \rightarrow 0$ 知 f_n 依测度收敛于 f , 而 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \exists K_2, \text{ s.t. } \forall k \geq K_2, mE \left[|f_k - f| \geq \frac{\varepsilon}{3(\|g\|_1 + 1)} \right] &< \delta \\ \Rightarrow \int_{E \left[|f_k - f| \geq \frac{\varepsilon}{3(\|g\|_1 + 1)} \right]} |g| dx &< \frac{\varepsilon}{6(M+1)}. \end{aligned}$$

于是当 $k \geq K := \max\{K_1, K_2\}$ 时, @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \|f_k g_k - f g\|_1 &\leq \|f_k(g_k - g)\|_1 + \|(f_k - f)g\|_1 \\ &\leq M \|g_k - g\|_1 + \int_{E \left[|f_k - f| < \frac{\varepsilon}{3(\|g\|_1 + 1)} \right]} |f_k - f| \cdot |g| dx \\ &\quad + \int_{E \left[|f_k - f| \geq \frac{\varepsilon}{3(\|g\|_1 + 1)} \right]} |f_k - f| \cdot |g| dx \\ &\leq M \cdot \frac{\varepsilon}{3(M+1)} + \frac{\varepsilon}{3(\|g\|_1 + 1)} \cdot \|g\|_1 + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{6(M+1)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

证毕. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.7.13 习题6.13

设 $f_k \in L^p([a, b])$ ($1 \leq p \leq +\infty$), 且 $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < +\infty$, 试证明存在 $f \in L^p([a, b])$, 使得

- (1) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f(x)$, a.e. $x \in [a, b]$;
 (2) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 依 $L^p([a, b])$ 意义收敛于 $f(x)$.

张祖锦解.

(1) 由书第 256 页思考题 9 知 @跟锦数学微信公众号

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p = M < \infty \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right|^p < \infty, \text{ a.e. } x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow \exists Z \subset [a, b] : mZ = 0, \text{ s.t. } \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ 收敛}, \forall x \in [a, b] \setminus Z.$$

令 $f(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), & x \in [a, b] \setminus Z, \\ 0, & x \in Z. \end{cases}$ 则由上式知 $f \in L^p([a, b])$, 且 @跟锦数学

微信公众号

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in E.$$

(2) 由书第 256 页思考题 9 知 @跟锦数学微信公众号

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \right\|_p \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

故 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 依 $L^p([a, b])$ 意义收敛于 $f(x)$.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.7.14 习题6.14

设 $f \in L^p(E)$, $f_k \in L^p(E)$ ($k = 1, 2, \dots$). 若 @跟锦数学微信公众号

$$\|f_k - f\|_p < 4^{-\frac{k}{p}} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

试证明对任给 $\delta > 0$, 存在 $E_\delta \subset E$, $m(E_\delta) < \delta$, 使得 $f_k(x)$ 在 $E \setminus E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$.

张祖锦解. 设 $E_k = E \left[|f_k - f| > \frac{1}{2^k} \right]$, 则 @跟锦数学微信公众号

$$4^{-k} > \|f_k - f\|_p^p \geq \int_{E_k} |f_k - f|^p dx \geq \frac{1}{2^k} \cdot mE_k.$$

故 $mE_k < \frac{1}{2^k}$. 对 $\forall \delta > 0$, 取 $j \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $\frac{1}{2^j} < \delta$, 令 $E_\delta = \bigcup_{k=j+1}^{\infty} E_k$, 则 跟锦数学微信公众号

$$mE_\delta \stackrel{\text{次可数可加}}{\leq} \sum_{k=j+1}^{\infty} mE_k \leq \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^j} < \delta,$$

且 跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \forall k \geq j+1, \forall x \in E \setminus E_\delta &= \bigcap_{k=j+1}^{\infty} E_k, |f_k(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^k} \\ \Rightarrow \forall k \geq j+1, \sup_{x \in E \setminus E_\delta} |f_k(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2^k} \\ \Rightarrow [f_k \rightrightarrows f \text{ 于 } E \setminus E_\delta]. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

6.7.15 习题6.15

设 $\{\varphi_k\} \subset L^2(E)$ 是完全标准正交系, 试证明对 $f, g \in L^2(E)$, 有 跟锦数学微信公众号

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \langle g, \varphi_k \rangle.$$

张祖锦解. 设 $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$, 则 跟锦数学微信公众号

$$\langle f, g \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k, g \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \langle \varphi_k, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \langle g, \varphi_k \rangle.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众账号: 跟锦数学).

6.7.16 习题6.16

设 $\{\varphi_n\}$ 是 $L^2([a, b])$ 中的完全标准正交系. 若 $\{\psi_k\}$ 是 $L^2([a, b])$ 中满足 跟锦数学微信公众号

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b [\varphi_n(x) - \psi_n(x)]^2 dx < 1$$

的正交系, 试证明 $\{\psi_n\}$ 是 $L^2([a, b])$ 中的完全正交系.

张祖锦解. 设 $f \in L^2([a, b])$ 满足 $\langle f, \varphi_n \rangle = 0, \forall n \geq 1$, 往证 $f = 0$, a.e., 而 $\{\psi_n\}$ 是 $L^2([a, b])$ 中的完全正交系. 事实上, 由 跟锦数学微信公众号

$$\langle f, \varphi_n \rangle = \langle f, \psi_n \rangle + \langle f, \varphi_n - \psi_n \rangle = \langle f, \varphi_n - \psi_n \rangle$$

及题 15 知 @跟锦数学微信公众号

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n - \psi_n \rangle|^2 \stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \|f\|_2^2 \|\varphi_n - \psi_n\|^2.$$

故 @跟锦数学微信公众号

$$\|f\|^2 \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n - \psi_n\|^2 \right] \leq 0 \Rightarrow \|f\|_2^2 \leq 0 \Rightarrow f = 0, \text{ a.e. } x \in E.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6.7.17 习题6.17

设 $\{\varphi_k\} \subset L^2(E)$ 是标准正交系, 且有 $\Phi \in L^2(E)$, 使得 @跟锦数学微信公众号

$$|\varphi_k(x)| \leq \Phi(x), \text{ a.e. } x \in E.$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ 是几乎处处收敛的, 试证明 $a_k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$.

张祖锦解. 反证法. 若 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ 不成立, 则 @跟锦数学微信公众号

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall K, \exists k \geq K, \text{ s.t. } |a_k| \geq \varepsilon_0$$

$$\Rightarrow \exists k_j \nearrow +\infty, \text{ s.t. } |a_{k_j}| \geq \varepsilon_0.$$

再由假设知 @跟锦数学微信公众号

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \text{ a.e. 收敛} &\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \varphi_k(x) = 0, \text{ a.e. } x \in E \\ \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{k_j}(x) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left[(a_{k_j} \varphi_{k_j}(x)) \cdot \frac{1}{a_{k_j}} \right] \stackrel{\substack{\text{有界} \\ \text{无界小}}}{=} 0. \end{aligned}$$

结合题设 $|\varphi_k|^2 \leq \Phi^2 \in L(E)$ 知 @跟锦数学微信公众号

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_{k_j}\|_2^2 = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_E |\varphi_{k_j}(x)|^2 dx \stackrel{\text{点态控制收敛}}{=} \int_E 0 dx = 0.$$

这与 $\|\varphi_{k_j}\|_2 = 1$ 矛盾. 故有结论. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).