时变函数讲义 第九部分

沈瑞鹏

天津大学数学学院

2023年3月

1 可测函数的收敛

定义 1 (几乎处处收敛)**.** 设$f(x), f_k(x)$, $k=1,2,\cdots$是可测集$E\subset\mathbb{R}^n$上的广义实值函数。若存在E中的点集Z, 使得$m(Z)=0$及$f_k(x)\to f(x)$, $x\in E\setminus Z$, 则称$\{f_k(x)\}$在E上几乎处处收敛于$f(x)$, 记为$f_k(x)\to f(x)$, $a.e.\, x\in E$.

定义 2 (依测度收敛)**.** 设$f(x), f_k(x)$, $k=1,2,\cdots$是可测集$E\subset\mathbb{R}^n$上几乎处处有限的可测函数。若对任意给定的$\varepsilon>0$, 有

$$\lim_{k\to\infty} m(\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0,$$

则称$\{f_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)$.

定义 3 (小测度外一致收敛)**.** 设$f(x), f_k(x)$, $k=1,2,\cdots$是可测集$E\subset\mathbb{R}^n$上几乎处处有限的可测函数。若对任意给定的$\delta>0$, 存在E的可测子集E_δ满足$m(E_\delta)<\delta$, 使得$\{f_k(x)\}$在$E\setminus E_\delta$上一致收敛于$f(x)$, 则称$\{f_k(x)\}$在E上小测度外一致收敛于$f(x)$.

注意: 改变$f(x)$, $f_k(x)$在零测集上的值，不影响收敛性。

定理 1 (小测度外一致收敛推导出另二类收敛)**.** 设$f(x), f_k(x)$, $k=1,2,\cdots$是可测集$E\subset\mathbb{R}^n$上几乎处处有限的可测函数。若$\{f_k(x)\}$在E上小测度外一致收敛于$f(x)$, 则$\{f_k(x)\}$在E上几乎处处且依测度收敛于$f(x)$,

证明: (几乎处处) 我们可以找到$E_{2^{-k}}$满足$m(E_{2^{-k}})<2^{-k}$, 使得$f_k(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in E\setminus E_{2^{-k}}$. 因此我们有

$$f_k(x)\to f(x), \quad x\in\bigcup_{k=1}^{\infty}(E\setminus E_{2^{-k}})=E\setminus\bigcap_{k=1}^{\infty}E_{2^{-k}}.$$

这里$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_{2^{-k}}\right)\le m(E_{2^{-k}})<2^{-k}$, 因此$\bigcap_{k=1}^{\infty}E_{2^{-k}}$是零测集。
(依测度) 给定$\varepsilon,\delta>0$, 我们可以找到E_δ满足$m(E_\delta)<\delta$, 使得$f_k(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in E\setminus E_\delta$. 因此存在N, 使得$k>N$时，我们有$|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon$, $x\in E\setminus E_\delta$. 于是$k>N$时，我们有

$$m(\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\})\le m(E_\delta)<\delta.$$

由δ的任意性，我们有

$$\lim_{k\to\infty} m(\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0, \quad \forall\varepsilon>0.$$

因此我们有依测度收敛。

定理 2 (叶戈罗夫定理)**.** 设$f(x), f_k(x),\ k=1,2,\cdots$是可测集$E\subset\mathbb{R}^n$上几乎处处有限的可测函数，且$m(E)<+\infty$. 若$\{f_k(x)\}$在$E$上几乎处处收敛于$f(x)$, 则对任意给定的$\delta>0$, 存在$E$的可测子集$E_\delta$满足$m(E_\delta)<\delta$, 使得$\{f_k(x)\}$在$E\setminus E_\delta$上一致收敛于$f(x)$.

证明：不妨假设所有函数都是实值函数。给定任何$\varepsilon>0$, 我们考虑集合

$$A_k(\varepsilon)=\{x\in E:|f(x)-f_j(x)|<\varepsilon,\ \forall j\geq k\}.$$

集合列$A_k(\varepsilon)$是递增集合列，且其极限集$\cup A_k(\varepsilon)\supset\{x\in E: f_k(x)\to f(x)\}$. 因此

$$m(\cup A_k(\varepsilon))=m(E)\quad\Rightarrow\quad\lim_{k\to\infty}m(A_k(\varepsilon))=m(E).$$

于是对于每个自然数n, 我们有自然数$k(n,\delta)$, 使得$m(A_{k(n,\delta)}(1/n))>m(E)-2^{-n}\delta$. 令$E_{\delta,n}=E\setminus A_{k(n,\delta)}(1/n)$, 则$m(E_{\delta,n})<2^{-n}\delta$, 且

$$|f_j(x)-f(x)|<1/n,\quad \text{只要 } j\geq k(n,\delta),\ x\in A_{k(n,\delta)}(1/n)=E\setminus E_{\delta,n}.$$

最后，令$E_\delta=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_{\delta,n}$. 我们有$m(E_\delta)\leq\sum_{n=1}^{\infty}m(E_{\delta,n})<\delta$. 并且我们有

$$|f_k(x)-f(x)|<1/n,\quad \text{只要 } k\geq k(n,\delta),\ x\in E\setminus E_\delta.$$

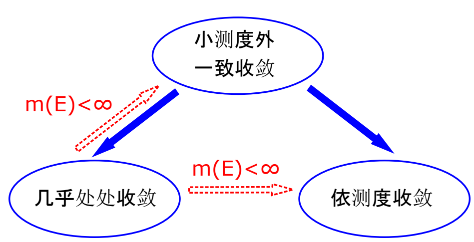
于是我们有$f_k(x)\rightrightarrows f(x),\ x\in E\setminus E_\delta$.

例子 1. 函数列$f_k(x)=x^k$在$E=(0,1)$上几乎处处收敛于$f(x)=0$, 但这一收敛并非一致收敛。

推论 1. 设$f(x), f_k(x),\ k=1,2,\cdots$是可测集$E\subset\mathbb{R}^n$上几乎处处有限的可测函数，且$m(E)<+\infty$. 若$\{f_k(x)\}$在$E$上几乎处处收敛于$f(x)$, 则$\{f_k(x)\}$在$E$上依测度收敛于$f(x)$.

例子 2. 令$f_k(x)=x/k,\ f(x)=0$, 定义域$E=[0,\infty)$, 则我们有处处收敛$f_k(x)\to f(x),\ x\in E$. 但是依测度收敛不成立，对于任何$\varepsilon>0$, 我们有

$$m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\})=m((k\varepsilon,+\infty))=+\infty.$$



1.1 极限函数的唯一性

定理 3. 设$f(x), g(x), f_k(x),\ k=1,2,\cdots$是可测集$E\subset\mathbb{R}^n$上几乎处处有限的可测函数。若$\{f_k(x)\}$在$E$上同时依测度收敛于$f(x)$和$g(x)$, 则$f(x)$和$g(x)$在$E$上几乎处处相等。

证明：我们不妨假设这些函数都取实数值。对于任何$\varepsilon>0$和自然数k, 有

$$\{x\in E:|f(x)-g(x)|>\varepsilon\}\subset\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon/2\}\cup\{x\in E:|f_k(x)-g(x)|>\varepsilon/2\}$$

因此

$$\begin{aligned}m(\{x\in E:&|f(x)-g(x)|>\varepsilon\})\\&\le\lim_{k\to\infty}\left(m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon/2\})+m(\{x\in E:|f_k(x)-g(x)|>\varepsilon/2\})\right)=0\end{aligned}$$

最后，$\{x\in E: f(x)\neq g(x)\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in E:|f(x)-g(x)|>1/n\}$是零测集。

引理 1. 若$\{f_k(x)\}$在可测集E上依测度收敛于$f(x)$，则对E的任何可测子集E_1，$\{f_k(x)\}$在E_1上依测度收敛于$f(x)$.

证明：对于任何$\varepsilon>0$,

$$\lim_{k\to\infty}m(\{x\in E_1:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\})\le\lim_{k\to\infty}m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0.$$

引理 2. 若$\{f_k(x)\}$在可测集E上几乎处处收敛于$f(x)$，则对E的任何可测子集E_1，$\{f_k(x)\}$在E_1上几乎处处收敛于$f(x)$.

证明：设$f_k(x)\to f(x)$，$x\in E\setminus Z$, $m(Z)=0$. 则$f_k(x)\to f(x)$，$x\in E_1\cap(E\setminus Z)=E_1\setminus(Z\cap E_1)$.

引理 3. 若$\{f_k(x)\}$在可测集E上除小测度集外一致收敛于$f(x)$，则对E的任何可测子集A，$\{f_k(x)\}$在E_1上除小测度集外一致收敛于$f(x)$.

证明：给定$\delta>0$, 我们有$E_\delta\subset E$满足$m(E_\delta)<\delta$, 使得$f_k(x)\rightrightarrows f(x)$，$x\in E\setminus E_\delta$. 则$f_k(x)\rightrightarrows f(x)$，$x\in A\cap(E\setminus E_\delta)=A\setminus(A\cap E_\delta)$. 这里$m(A\cap E_\delta)<\delta$.

定理 4. 设$f(x),g(x),f_k(x)$，$k=1,2,\cdots$是可测集$E\subset\mathbb{R}^n$上几乎处处有限的可测函数。若$f(x),g(x)$都是集合列$f_k(x)$在E上几乎处处/小测度外一致/依测度的极限(二者极限种类可能不同)，则$f(x)$和$g(x)$在 E上几乎处处相等。

证明：我们可以把E写成测度有限的子集之并集$E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$. 则$f(x),g(x)$都是集合列$f_k(x)$在$E_i$上的某类极限，因此都是依测度的极限，于是$f(x)=g(x)$，$a.e.\,x\in E_i$. 因此$f(x)$和$g(x)$在 E上几乎处处相等。

1.2 依测度收敛的性质

定义 4. 依测度Cauchy列 设$f_k(x)$，$k=1,2,\cdots$是可测集$E\subset\mathbb{R}^n$上几乎处处有限的可测函数。若对任给的$\varepsilon>0$, 有

$$\lim_{j,k\to+\infty}m(\{x\in E:|f_j(x)-f_k(x)|>\varepsilon\})=0,$$

则称$\{f_k(x)\}$为E上的依测度Cauchy列。

例子 3. 设$\{f_k(x)\}$在可测集$E\subset\mathbb{R}^n$上依测度收敛于$f(x)$. 则$\{f_k(x)\}$是E上的依测度Cauchy列。

证明：我们有

$$\{x\in E:|f_k(x)-f_j(x)|>\varepsilon\}\subset\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon/2\}\cup\{x\in E:|f_j(x)-f(x)|>\varepsilon/2\}.$$

因此，

$$\begin{aligned}m(\{x\in E:&|f_k(x)-f_j(x)|>\varepsilon\})\\&\le m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon/2\})+m(\{x\in E:|f_j(x)-f(x)|>\varepsilon/2\}).\end{aligned}$$

令$j,k\to\infty$, 我们即得到需要的极限。

引理 4. 依测度Cauchy列的收敛子列 若$\{f_k(x)\}$是可测集E上的依测度Cauchy列，则我们可以找到一个子列$\{f_{k_j}(x)\}_{j\in\mathbb{N}}$和一个几乎处处有限的可测函数$f(x)$, 使得$f_{k_j}(x)$在$E$上小测度外一致收敛于$f(x)$.

证明：根据依测度Cauchy列的定义，我们可以找到递增的数列k_j, 使得

$$m(\{x\in E:|f_n(x)-f_i(x)|>2^{-j}\})<2^{-j},\qquad n,i\geq k_j.$$

令$E_j=\{x\in E:|f_{k_j}(x)-f_{k_{j+1}}(x)|>2^{-j}\}$, 则$m(E_j)<2^{-j}$. 若$x\in E\setminus\bigcup_{j=j_0}^{\infty}E_j$, 且$n>i\geq j_0$

$$|f_{k_i}(x)-f_{k_n}(x)|\leq|f_{k_i}(x)-f_{k_{i+1}}(x)|+\cdots+|f_{k_{n-1}}(x)-f_{k_n}(x)|\leq 2^{1-i}.$$

因此对每个固定的$x\in E\setminus\bigcap_{j_0=1}^{\infty}\bigcup_{j=j_0}^{\infty}E_j$, 子列$f_{k_j}(x)$都是一个实数组成的Cauchy列。这里被排除的集合是$E_0=\overline{\lim_{j\to\infty}}E_j$, 是一个零测集。因此我们可以取$E$上几乎处处有限的函数$f(x)$，使得$f_{k_j}(x)\to f(x)$, $x\in E\setminus E_0$. 在上面的不等式中令$n\to\infty$, 我们有

$$|f_{k_i}(x)-f(x)|\leq 2^{1-i},\quad x\in E\setminus\bigcup_{j=j_0}^{\infty}E_j,\ i\geq j_0.$$

也就是$f_{k_i}(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in E\setminus\bigcup_{j=j_0}^{\infty}E_j$, 其中$m\left(\bigcup_{j=j_0}^{\infty}E_i\right)<2^{1-j_0}$.

推论 2. 若$\{f_k(x)\}$是可测集E上的依测度Cauchy列，则存在一个几乎处处有限的可测函数$f(x)$, 使得$f_k(x)$在E上依测度收敛于$f(x)$.

证明：由引理，我们有子列$f_{k_j}(x)$, 在E上小测度外一致收敛于一个几乎处处有限的可测函数$f(x)$. 因此$f_{k_j}(x)$依测度收敛于$f(x)$. 对于任何$\varepsilon,\delta>0$, 由$\{f_k(x)\}$是依测度Cauchy列，存在k_0, 使得

$$m(\{x\in E:|f_k(x)-f_{k_j}(x)|>\varepsilon/2\})<\delta/2,\quad k,k_j\geq k_0.$$

因此，如果$k,k_j\geq k_0$, 我们有

$$\begin{aligned}m(\{x\in E:&|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\})\\&\leq m(\{x\in E:|f_{k_j}(x)-f(x)|>\varepsilon/2\})+m(\{x\in E:|f_k(x)-f_{k_j}(x)|>\varepsilon/2\})\\&\leq m(\{x\in E:|f_{k_j}(x)-f(x)|>\varepsilon/2\})+\delta/2.\end{aligned}$$

令$j\to\infty$, 我们得到当$k\geq k_0$时

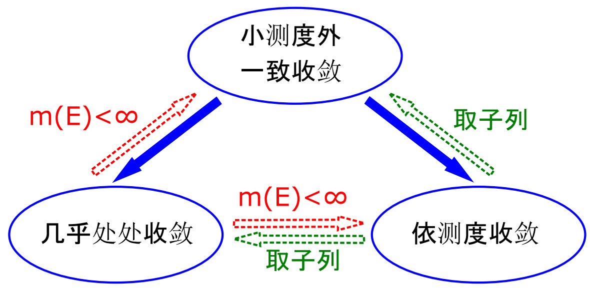
$$m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\})\leq\delta/2.$$

于是由极限的定义，我们有对任意给定的$\varepsilon>0$,

$$\lim_{k\to\infty}m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0.$$

定理 5 (Riesz定理)**.** 若$\{f_k(x)\}$在可测集E上依测度收敛于$f(x)$, 则存在子列$\{f_{k_i}(x)\}$, 使得

$$\lim_{i\to\infty}f_{k_i}(x)=f(x),\quad a.e.\ x\in E.$$



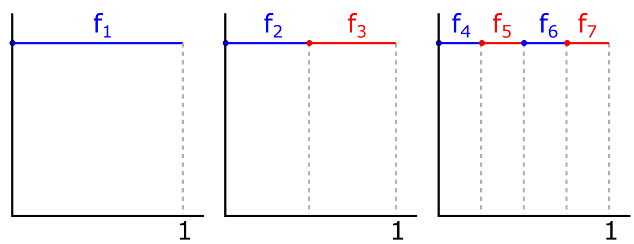
证明：由上面介绍的引理，存在子列$\{f_{k_i}(x)\}$, 在E上小测度外一致收敛于一个几乎处处有限的可测函数$g(x)$。我们同时又有$\{f_{k_i}(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)$, 因此$f(x) = g(x)$, *a.e.* $x \in E$. 于是我们有子列$\{f_{k_i}(x)\}$在E上小测度外一致收敛于$f(x)$, 这也就意味着几乎处处的收敛。

例子 4. 取$E = [0,1)$. 我们定义$f_{2^n+k}(x)$为区间$[k \cdot 2^{-n}, (k+1) \cdot 2^{-n})$的特征函数。其中$n = 0,1,2,\cdots$, $k = 0,1,\cdots,2^n - 1$. 验证$\{f_m(x)\}$在E上依测度收敛于0. 但是$f_m(x) \to 0$对任何$x \in E$都不成立。

证明：要验证依测度收敛，我们只需观察到$m = 2^n + k$趋于无穷时，n趋于无穷，且我们有

$$m(\{x \in [0,1) : |f_{2^n+k}(x) - 0| > \varepsilon\}) = m([k \cdot 2^{-n}, (k+1) \cdot 2^{-n})) = 2^{-n}.$$

对任何$x \in [0,1)$, 都存在无穷个m, 使得$f_m(x) = 1$, 因此$f_m(x) \to 0$不成立。



2 可测函数和连续函数的关系

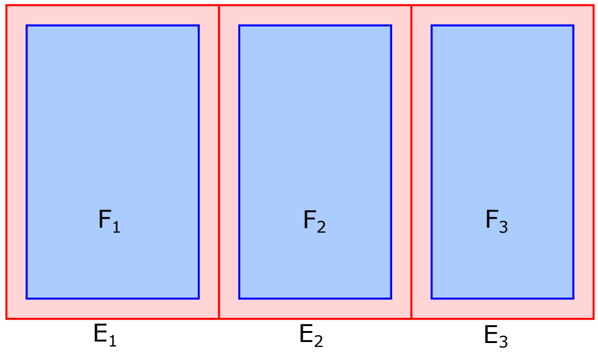
2.1 用连续函数逼近可测函数

定理 6 (卢津定理)**.** 若$f(x)$是可测集$E \subset \mathbb{R}^n$上的几乎处处有限的可测函数，则对任何$\delta > 0$, 存在闭集$F \subset E$, $m(E \setminus F) < \delta$, 使得$f(x)$是$F$上的连续函数。

证明：第一步 若$f(x) = \sum_{i=1}^{p} c_i \chi_{E_i}(x)$是一个简单函数。其中$E_i$互不相交，且$\bigcup_{i=1}^{p} E_i = E$. 我们可以选取闭集$F_i \subset E_i$, 使得$m(E_i \setminus F_i) < \delta/p$, 并令$F = \bigcup_{i=1}^{p} F_i$, $m(E \setminus F) = \sum_{i=1}^{p} m(E_i \setminus F_i) < \delta$. 下面我们验证$f(x)$在$F$上连续。不妨设$x \in F_1 \subset F$, 给定$\varepsilon > 0$, 由于$H = \bigcup_{i=2}^{p} F_i$是闭集，$x \in H^c$是开集，存在$\delta > 0$, 使得

$$B(x,\delta) \subset H^c \ \Rightarrow B(x,\delta) \cap F_i = \varnothing, \ i = 2,3,\cdots,p.$$

因此若$y \in F$满足$|y-x|<\delta$, 则$y \in F_1$, 于是$f(y)=c_1=f(x)$, $|f(y)-f(x)|=0<\varepsilon$. 因此我们有$f$在$x$点连续，这也就给出了$f$在$F$上的连续性。



第二步 若$f(x)$是一个有界可测函数。由简单函数逼近定理，存在E上简单函数列$\varphi_k(x)$，有一致收敛$\varphi_k(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in E$. 根据第一步的结果，我们可以找到闭集列$F_k \subset E$满足$m(E \setminus F_k) < \delta/2^k$, 使得$\varphi_k(x)$在$F_k$上连续。我们取闭集$F = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, 则每个函数$\varphi_k(x)$都在$F$上连续，且

$$m(E \setminus F) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(E \setminus F_k)\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E \setminus F_k) < \delta.$$

最后，我们有一致收敛$\varphi_k(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in F$, 由函数$\varphi_k(x)$在F上的连续性，我们得到$f(x)$在上的连续性。

第三步 若$f(x)$是几乎处处有限的可测函数，设$Z=\{x \in E : |f(x)|=+\infty\}$为零测集，我们有

$$g(x) = \arctan f(x) \in (-\pi/2, \pi/2), \qquad x \in E \setminus Z$$

是有界可测函数，因此存在闭集$F \subset E \setminus Z$满足$m((E \setminus Z) \setminus F) < \delta$, 使得$g(x)$是$F$上连续函数。因此$f(x) = \tan g(x)$是$F$上的连续函数，且我们有$m(E \setminus F) = m(Z) + m(E \setminus (Z \cup F)) < \delta$.

注意： 卢津定理的结论并不意味着，F中的点都是$f(x)$在原定义域E的连续点。我们可以考虑$\mathbb{Q}$的特征函数$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$.

例子 5. 令$G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$是$[0,1]$中稠密的开集，满足$m(G) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |I_k| \in (0,1)$。这里$\{I_k\}$是互不相交的开区间族。我们取$f(x) = \chi_G(x)$是定义在$[0,1]$上的可测函数。则不存在零测集$Z$, 使得$f(x)$在$[0,1] \setminus Z$ 上连续。这说明卢津定理的结论不能改为: 存在集合$F \subset E$, $m(E \setminus F) = 0$, 使得$f(x)$是F上的连续函数。

证明: 假设存在零测集Z, 使得$f(x)$在$[0,1] \setminus Z$ 上连续。因为$m(Z \cup G) < 1$, 存在点$x \in (0,1)$, 使得$x \notin G$, $x \notin Z$. 因此我们有$f(x) = 0$, 且f看作$[0,1] \setminus Z$上的函数在x点连续，也即存在$\delta > 0$, 使得$y \in [0,1] \setminus Z$满足$|y-x| < \delta$时，有$|f(y)-f(x)| < 1/2$即 $|f(y)| < 1/2$. 我们不妨假设$(x-\delta, x+\delta) \subset (0,1)$. 因为$G$在$[0,1]$中稠密，我们有$(x-\delta, x+\delta) \cap G$ 是一个非空开集。这意味存在一个小开区间$I \subset (x-\delta, x+\delta) \cap G$. 于是可以找到点$y \in I \setminus Z$, 这个点满足

$$\begin{aligned} &y \in [0,1] \setminus Z,\ |y-x| < \delta; && \Rightarrow && |f(y)| < 1/2; \\ &y \in G; && \Rightarrow && f(y) = 1. \end{aligned}$$

这就得到了矛盾。

推论 3. 若$f(x)$是可测集$E\subset\mathbb{R}^n$上的几乎处处有限的可测函数，则对任何$\delta>0$, 存在$\mathbb{R}^n$上的一个连续函数$g(x)$, 使得 $m(\{x\in E: f(x)\neq g(x)\})<\delta$. 若$E$还是有界集，则可使上述$g(x)$具有紧支集。

证明： 由卢津定理，可以找到闭集F满足$m(E\setminus F)<\delta$, 使得$f(x)$在F上连续。利用连续延拓定理，我们可以找到$\mathbb{R}^n$上的一个连续函数$g(x)$, 使得$f(x)=g(x)$, $x\in F$. 于是

$$\{x\in E: f(x)\neq g(x)\}\subset E\setminus F \ \Rightarrow\ m(\{x\in E: f(x)\neq g(x)\})<\delta.$$

若$E\subset B(0,k)$有界，我们可以取一个在$B(0,k)$上等于1得具有紧支集的连续函数$\rho(x)$, 然后将$g(x)$用$\rho(x)g(x)$代替即可。

推论 4. 若$f(x)$是可测集$E\subset\mathbb{R}^n$上的几乎处处有限的可测函数，则存在$\mathbb{R}^n$上的连续函数列$\{g_k(x)\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x)=f(x),\quad a.e.\, x\in E.$$

证明： 我们可以找到$\mathbb{R}^n$上的连续函数列$\{g_n(x)\}$, 使得$m(\{x\in E: f(x)\neq g_n(x)\})<2^{-n}$. 这意味着函数列$\{g_n(x)\}$在$E$上依测度收敛到$f(x)$.

$$m(\{x\in E: |f(x)-g_n(x)|>\varepsilon\})\le m(\{x\in E: f(x)\neq g_n(x)\})<2^{-n}.$$

由Riesz定理，其中存在子列$\{g_{n_k}(x)\}$, 在E上几乎处处收敛于$f(x)$.

2.2 复合函数的可测性

定理 7. 设$f(x)$是$\mathbb{R}$上的连续函数，$g(x)$是$\mathbb{R}$上的实值可测函数，则$f(g(x))$是$\mathbb{R}$上的可测函数。

证明： 我们考虑原像集

$$\{x: f(g(x))>t\}=g^{-1}(f^{-1}((t,\infty)))$$

其中$f^{-1}((t,\infty))$是一个开集，自然是Borel集，因此上述原像集是可测集。

例子 6. 存在$\mathbb{R}$上的可测函数$f(x)$和$\mathbb{R}$上的连续函数$g(x)$, 使得复合函数$f(g(x))$不是$\mathbb{R}$上的可测函数。

证明： 考虑Cantor函数$\Phi:[0,1]\to[0,1]$. 现在我们定义一个新函数$\Psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\Psi(x)=\begin{cases}\frac{\Phi(x)+x}{2}, & x\in[0,1];\\ x, & x\notin[0,1].\end{cases}$$

$\Psi(x)$是一个连续的严格递增函数，并且是从$\mathbb{R}$到$\mathbb{R}$的一一映射。我们证明过$m(\Psi(C))=1/2$. 在$\Psi(C)$中取不可测的子集W, 则$Z=\Psi^{-1}(W)\subset\Psi^{-1}(\Psi(C))=C$是零测集。取$f(x)=\chi_Z(x)$为可测函数，$g(x)=\Psi^{-1}(x)$为连续函数。则复合函数$f(g(x))$恰好是$W$的特征函数，不可测。

定理 8. 设$\mathbf{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是一个连续变换，且任何零测集$Z\subset\mathbb{R}^n$的原像集一定是可测集。若$f(x)$是$\mathbb{R}^n$上的可测函数，则$f(\mathbf{T}(x))$也是$\mathbb{R}^n$上的可测函数。

证明： 我们考虑原像集

$$\{x\in\mathbb{R}^n: f(\mathbf{T}(x))>t\}=\mathbf{T}^{-1}(\{y\in\mathbb{R}^n: f(y)>t\})$$

其中$\{y\in\mathbb{R}^n: f(y)>t\}$是一个可测集。由前面章节的定理，只要$\mathbf{T}$满足题设条件，可测集的原像集就是可测集，因此我们得到复合函数的可测性。

推论 5. 设$f(x)$是$\mathbb{R}^n$上的可测函数，$\mathbf{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是非奇异线性变换，则复合函数$f(\mathbf{T}(x))$也是$\mathbb{R}^n$上的可测函数。

证明：对任何零测集$Z\subset\mathbb{R}^n$, 我们有$\mathbf{T}^{-1}(Z)$也是可测集，由上述定理，即得到复合映射的可测性。

定理 9. 设$f(x)$是一个$\mathbb{R}^n$上的可测函数，则若把$f(x)$看作$(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$的函数，或等价地，定义 $F(x,y)=f(x)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$. 则得到的函数是$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$上的可测函数。

证明：对于任何实数t, 我们有

$$\{(x,y):F(x,y)=f(x)>t\}=\{x\in\mathbb{R}^n:f(x)>t\}\times\mathbb{R}^m$$

是可测集的直积，因此也是可测集。

例子 7. 设$f(x)$是一个$\mathbb{R}^n$上的可测函数，则$f(x-y)$是$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$上的可测函数。

证明：由上面定理，我们有$F(x,y)=f(x)$是$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$上的可测函数。我们定义一个非奇异线性变换$\mathbf{T}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, $\mathbf{T}(x,y)=(x-y,x+y)$. 由前面推论，复合函数

$$F(\mathbf{T}(x,y))=F(x-y,x+y)=f(x-y)$$

是$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$上的可测函数。

时变函数讲义 第十部分

沈瑞鹏

天津大学数学学院

2023年4月

1 非负可测函数的积分

1.1 非负可测简单函数的积分

定义 1 (非负可测简单函数的积分). 设$f(x)$是$\mathbb{R}^n$上的非负可测简单函数$f(x)=\sum_{i=1}^{p}c_i\chi_{E_i}(x)$, 其中$\{c_i\}_{i=1,2,\cdots,p}$互不相等，$E_i$为非空可测集，$\bigcup_{i=1}^{p}E_i=\mathbb{R}^n$, $E_i\cap E_j=\varnothing$, $i\neq j$. 若E是一个可测集，我们定义$f(x)$在E上的积分为

$$\int_E f(x)dx=\sum_{i=1}^{p}c_i m(E_i\cap E).$$

例子 1. 设$\chi_{\mathbb{Q}}(x)$是有理数集的特征函数，则$\int_E\chi_{\mathbb{Q}}(x)dx=1\cdot m(\mathbb{Q}\cap E)=0.$

例子 2. 设$f(x)$是$\mathbb{R}^n$上的非负可测简单函数$f(x)=\sum_{i=1}^{p}c_i\chi_{E_i}(x)$, E_i为互不相交的可测集. 则对可测集E有

$$\int_E f(x)dx=\sum_{i=1}^{p}c_i m(E_i\cap E).$$

证明：我们可以重新把这个函数写成标准形式$f(x)=\sum_{j=1}^{q}d_j\chi_{A_j}(x)$. 其中

$$A_j=\{x\in\mathbb{R}^n:f(x)=d_j\}=\begin{cases}\bigcup_{c_i=d_j}E_i, & d_j\neq 0;\\ \left(\bigcup_{c_i=0}E_i\right)\cup\left(\bigcup_{i=1}^{p}E_i\right)^c, & d_j=0.\end{cases}$$

因此

$$\int_E f(x)dx=\sum_{j=1}^{q}d_jm(A_j\cap E)=\sum_{d_j\neq 0}\left(d_j\sum_{c_i=d_j}m(E_i\cap E)\right)=\sum_{d_j\neq 0}\sum_{c_i=d_j}c_im(E_i\cap E)=\sum_{i=1}^{p}c_im(E_i\cap E).$$

定理 1 (积分的线性性质)**.** 设$f(x), g(x)$是$\mathbb{R}^n$上的非负可测简单函数，$E \subset \mathbb{R}^n$是一个可测集，则有

- 若C是非负常数，则$\int_E Cf(x)dx = C\int_E f(x)dx$;
- $\int_E (f(x)+g(x))dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx.$

证明：假设$f(x) = \sum_{i=1}^{p} a_i \chi_{A_i}(x)$，$g(x) = \sum_{j=1}^{q} b_j \chi_{B_j}(x)$. 则$Cf(x) = \sum_{i=1}^{p} Ca_i \chi_{A_i}(x)$, $f(x)+g(x) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(a_i+b_j)\chi_{A_i\cap B_j}(x)$. 因此$\int_E Cf(x)dx = \sum_{i=1}^{p} Ca_i m(A_i \cap E) = C\int_E f(x)dx$.

$$\begin{aligned}
\int_E (f(x)+g(x))dx &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(a_i+b_j)m(A_i\cap B_j\cap E)\\
&= \sum_{i=1}^{p} a_i \sum_{j=1}^{q} m(A_i\cap E\cap B_j) + \sum_{j=1}^{q} b_j \sum_{i=1}^{p} m(B_j\cap E\cap A_i)\\
&= \sum_{i=1}^{p} a_i m(A_i\cap E) + \sum_{j=1}^{q} b_j m(B_j\cap E) = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx.
\end{aligned}$$

定理 2 (积分的进一步性质)**.** (i) 若$f(x) \le g(x)$是$\mathbb{R}^n$上两个非负可测简单函数，则$\int_E f(x)dx \le \int_E g(x)dx$.

(ii) 若$f(x)$是$\mathbb{R}^n$上一个非负可测简单函数，若$A \subset E$是两个可测集，则

$$\int_A f(x)dx = \int_E f(x)\chi_A(x)dx$$

证明：(i) 令$h(x) = g(x) - f(x)$为一个非负可测简单函数，则$g(x) = f(x) + h(x)$. 因此

$$\int_E g(x)dx = \int_E f(x)dx + \int_E h(x)dx \ge \int_E f(x)dx.$$

(ii) 设$f(x) = \sum_{i=1}^{p} c_i \chi_{E_i}(x)$. 则$f(x)\chi_A(x) = \sum_{i=1}^{p} c_i \chi_{E_i\cap A}(x)$. 因此我们有

$$\int_E f(x)\chi_A(x)dx = \sum_{i=1}^{p} c_i m(E_i\cap A\cap E) = \sum_{i=1}^{p} c_i m(E_i \cap A) = \int_A f(x)dx.$$

定理 3. 设$f(x)$是$\mathbb{R}^n$上一个非负可测简单函数，$\{E_k\}$是一个渐升可测集列，则

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)dx = \int_E f(x)dx. \quad E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

证明：设$f(x)=\sum_{i=1}^{p} c_i\chi_{A_i}(x)$. 按照定义我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)dx &= \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{p} c_i m(A_i\cap E_k)\\
&= \sum_{i=1}^{p}\left(c_i\lim_{k\to\infty} m(A_i\cap E_k)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{p} c_i m(A_i\cap E)\\
&= \int_E f(x)dx.
\end{aligned}$$

1.2 一般非负可测函数的积分

定义 2. 设$f(x)$是$E\subset\mathbb{R}^n$上的非负可测函数，定义$f(x)$在E上的积分为

$$\int_E f(x)dx=\sup\left\{\int_E h(x)dx : h(x)\text{是}\mathbb{R}^n\text{上非负可测简单函数}; h(x)\le f(x), x\in E\right\}.$$

若$\int_E f(x)dx<+\infty$, 则称$f(x)$在E上可积，或称$f(x)$是E上的可积函数。

例子 3. 设$f(x)$是$\mathbb{R}^n$上的非负可测简单函数，E是一个可测集，则上述两种定义方式给出的积分值相等。

证明：我们需要证明上面定义中的上确界等于$f(x)$作为$\mathbb{R}^n$上的非负可测简单函数时的积分值(简称为原积分)。因为我们可以取$h(x)=f(x)$, 上确界不会小于$f(x)$的原积分。所有我们只用验证对于任何$\mathbb{R}^n$上满足条件$h(x)\le f(x)$, $x\in E$的非负可测简单函数$h(x)$, 总有$\int_E h(x)dx\le\int_E f(x)dx$. 这里和下面的积分都是原定义的积分。事实上，我们有

$$\int_E h(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\chi_E(x)dx\le\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_E(x)dx=\int_E f(x)dx.$$

定理 4 (非负可测函数积分的初步性质)**.** 关于非负可测函数的积分我们有

(i) 单调性: 若$f(x)\le g(x)$是E上两个非负可测函数，则$\int_E f(x)dx\le\int_E g(x)dx$.

(ii) 设$f(x)$是E上非负可测函数，则$\int_E f(x)dx=0$当且仅当$f(x)=0$, $a.e.\, x\in E$.

证明：(i) 按定义我们有

$$\begin{aligned}
\int_E f(x)dx &= \sup\left\{\int_E h(x)dx : h(x)\text{是}\mathbb{R}^n\text{上非负可测简单函数}; h(x)\le f(x), x\in E\right\}\\
&\le \sup\left\{\int_E h(x)dx : h(x)\text{是}\mathbb{R}^n\text{上非负可测简单函数}; h(x)\le g(x), x\in E\right\}=\int_E g(x)dx.
\end{aligned}$$

(ii) 若$\int_E f(x)dx = 0$, 令$E_k = \{x \in E : f(x) > 1/k\}$. 则$\int_E f(x)dx \geq \int_E \frac{1}{k}\chi_{E_k}(x)dx = \frac{1}{k}m(E_k)$. 因此，$m(E_k) = 0$. 于是$\{x \in E : f(x) > 0\} = \cup E_k$是零测集。反过来，若$f(x) = 0$, $a.e.\, x \in E$, 对任何非负可测简单函数$h(x) = \sum_{i=1}^{p} c_i\chi_{E_i}(x)$, $h(x) \leq f(x), x \in E$, 有

$$\int_E h(x)dx = \sum_{i=1}^{p} c_i m(E_i \cap E)$$

其中，若$c_i > 0$, 则$m(E_i \cap E) = 0$. 因此$\int_E h(x)dx = 0$. 取上确界，我们有$\int_E f(x)dx = 0$.

推论 1. 设$f(x) \leq F(x)$都是E上的非负可测函数。若$F(x)$在E上可积，则$f(x)$也在E上可积。

证明： 由单调性，我们有$\int_E f(x)dx \leq \int_E F(x)dx < +\infty$. 因此$f(x)$在$E$上可积。

推论 2. 设$f(x)$是E上的非负有界可测函数，且$m(E) < +\infty$, 则$f(x)$在E上可积。

证明： 设$f(x) \leq M$, $x \in E$. 由上述比较性质和$g(x) \equiv M$在E上的可积性，我们得到$f(x)$的可积性。

定理 5. 若$f(x)$是E上的非负可积函数，则$f(x)$在E上几乎处处有限。

证明： 令$A = \{x \in E : f(x) = +\infty\}$. 若$m(A) > 0$. 我们取$h_k(x) = k\chi_A(x)$为一个非负可测简单函数，则

$$\int_E f(x)dx \geq \int_E h_k(x)dx = km(A).$$

令$k \to \infty$, 我们得到$\int_E f(x)dx = +\infty$. 这与可积性的假设矛盾。

1.3 非负渐升函数列的积分

定理 6 (非负渐升列积分定理)**.** 设有定义在E上的非负可测函数渐升列$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_k(x) \leq \cdots$, 其逐点极限为 $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), x \in E$, 则我们有$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx = \int_E f(x)dx$.

证明： 由于$f_k(x)$是渐升列，我们有$f_k(x) \leq f(x)$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in E$. 由单调性

$$\int_E f_k(x)dx \leq \int_E f(x)dx, \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx \leq \int_E f(x)dx.$$

下面我们证明不等式的另一端，设$h(x) = \sum_{i=1}^{p} a_i\chi_{A_i}(x)$为一个非负简单可测函数，满足 $h(x) \leq f(x)$, $x \in E$. 设$c \in (0,1)$为一个常数。令$A_{i,k} = \{x \in A_i \cap E : f_k(x) \geq ca_i\}$. 利用函数列的渐升性和极限，我们有对固定的$i$, $\{A_{i,k}\}_k$是一个渐升可测集合列，且

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{i,k} = A_i \cap E \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} m(A_{i,k}) = m(A_i \cap E).$$

利用积分的单调性，我们有$\int_E f_k(x)dx \ \geq \ \int_E \left(\sum_{i=1}^{p} ca_i\chi_{A_{i,k}}(x)\right)dx \ = \ \sum_{i=1}^{p} ca_i m(A_{i,k})$. 因此$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx \geq \sum_{i=1}^{p} ca_i m(A_i\cap E) = c\int_E h(x)dx$. 令$c\to 1$, 有$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx \geq \int_E h(x)dx$. 对$h(x)$的积分取上确界，我们有$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx \geq \int_E f(x)dx$. 比较两个不等式，定理得证。

定理 7 (缩小定义域)**.** 设$f(x)$是E上的非负可测函数，$A\subset E$是可测集，则

$$\int_A f(x)dx = \int_E f(x)\chi_A(x)dx \leq \int_E f(x)dx.$$

证明：由简单函数逼近定理，我们有$\mathbb{R}^n$上渐升的非负简单函数列$\varphi_k(x)\to f(x)$, $x\in E$. 因此我们渐升的非负简单函数列$\varphi_k(x)\to f(x)$, $x\in A$和$\varphi_k(x)\chi_A(x)\to f(x)\chi_A(x)$, $x\in E$. 由简单函数的相关性质，并取极限得到

$$\int_A \varphi_k(x)dx = \int_E \varphi_k(x)\chi_A(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int_A f(x)dx = \int_E f(x)\chi_A(x)dx.$$

定理 8 (积分的线性性质)**.** 设$f(x)$和$g(x)$是E上的非负可测函数，$\alpha,\beta\geq 0$是常数，则

$$\int_E [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha\int_E f(x)dx + \beta\int_E g(x)dx.$$

证明：取$\mathbb{R}^n$上渐升的非负简单函数列$f_k(x)\to f(x)$, $g_k(x)\to g(x)$, $x\in E$. 则我们有渐升的非负简单函数列$\alpha f_k(x)+\beta g_k(x)\to \alpha f(x)+\beta g(x)$. 由非负简单函数的线性，并取极限得到

$$\int_E [\alpha f_k(x)+\beta g_k(x)]dx = \alpha\int_E f_k(x)dx + \beta\int_E g_k(x)dx.$$
$$\Rightarrow \int_E [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha\int_E f(x)dx + \beta\int_E g(x)dx.$$

1.4 几乎处处相等的函数的积分

推论 3. 若E_1,E_2是两个不相交的可测集，$E=E_1\cup E_2$, $f(x)$是E上的非负可测函数，则

$$\int_E f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx.$$

证明：由上面介绍的缩小定义域的性质和线性，我们有

$$\int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx = \int_E [f(x)\chi_{E_1}(x) + f(x)\chi_{E_2}(x)]dx = \int_E f(x)dx.$$

定理 9. 若$f(x)$和$g(x)$是E上的非负可测函数，且$f(x) = g(x)$, $a.e.\ x\in E$. 则$\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx$.

证明：令$Z=\{x\in E: f(x)\neq g(x)\}$为零测集，则$f(x)=g(x)$, $x\in E\setminus Z$, 利用上述推论和$f(x)$, $g(x)$在Z上几乎处处为零有

$$\int_E f(x)dx = \int_{E\setminus Z} f(x)dx + \int_Z f(x)dx = \int_{E\setminus Z} g(x)dx + \int_Z g(x)dx = \int_E g(x)dx.$$

定理 10 (非负渐升列积分定理)**.** 设E上的非负可测函数列$\{f_k(x)\}$几乎处处渐升$f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f_k(x) \le \cdots$, $a.e.\, x \in E$, 其几乎处处的逐点极限为 $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, $a.e.\, x \in E$, 则我们有$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E f(x)dx$.

证明：由假设条件，我们可以找到零测集Z, 使得在$E \setminus Z$上函数列$\{f_k(x)\}$渐升，且有逐点极限$f(x)$. 因此由逐点的非负渐升列积分定理有$\lim_{k\to\infty} \int_{E\setminus Z} f_k(x)dx = \int_{E\setminus Z} f(x)dx$. 最后我们有$\int_E f_k(x)dx = \int_{E\setminus Z} f_k(x)dx + \int_Z f_k(x)dx = \int_{E\setminus Z} f_k(x)dx$. 同理$\int_E f(x)dx = \int_{E\setminus Z} f(x)dx$. 结合上述积分的极限和这两个等式，即得到证明。

定理 11 (非负递降列积分定理)**.** 设$\{f_k(x)\}$是E上几乎处处递降的非负可积函数列$f_1(x) \ge f_2(x) \ge \cdots \ge f_k(x) \ge \cdots$, $a.e.\, x \in E$, 其几乎处处的逐点极限为$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, $a.e.\, x \in E$, 则我们有$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E f(x)dx$.

证明：考虑几乎处处渐升的函数列$f_1(x) - f_k(x)$, 其几乎处处的极限为$f_1(x) - f(x)$. 因此

$$\lim_{k\to\infty} \int_E [f_1(x) - f_k(x)]dx = \int_E [f_1(x) - f(x)]dx$$
$$\lim_{k\to\infty} \left(\int_E f_1(x)dx - \int_E f_k(x)dx \right) = \int_E f_1(x)dx - \int_E f(x)dx \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E f(x)dx$$

1.5 非负函数积分的进一步性质

定理 12 (逐项积分定理)**.** 设$\{f_k(x)\}$是E上的非负可测函数列，则$\int_E \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)dx$.

证明：由假设条件，函数列$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$是非负渐升可测函数列，因此

$$\begin{aligned} \int_E \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx &= \int_E \left(\lim_{n\to\infty} S_n(x) \right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_E S_n(x)dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_E f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)dx. \end{aligned}$$

例子 4. 设$\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$是一个互不相交的集合列，$f(x)$是$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$上的非负可测函数，则

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx.$$

证明：$\int_E f(x)dx = \int_E \left(\sum_{k=1}^{\infty} f(x)\chi_{E_k}(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f(x)\chi_{E_k}(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx.$

引理 1 (Fatou引理)**.** 若$\{f_k(x)\}$是E上的非负可测函数列，则$\int_E \left(\varliminf_{k\to\infty} f_k(x) \right) dx \le \varliminf_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx$.

证明：我们有 $\underline{\lim}_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \inf_{j\geq k} f_j(x)$. 记$g_k(x) = \inf_{j\geq k} f_j(x)$为非负递增函数列。

$$\begin{aligned}\int_E \left(\underline{\lim}_{k\to\infty} f_k(x)\right) dx &= \int_E \left(\lim_{k\to\infty} g_k(x)\right) dx \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_E g_k(x)dx \\ &\leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx.\end{aligned}$$

例子 5. 设$E = (0,1)$. 取$f_k(x) = k\chi_{(0,1/k)}(x)$. 则我们有$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$. 于是

$$\int_E \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx = 0 < 1 = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx.$$

定理 13 (勒贝格积分的等价定义)**.** 设$f(x)$是E上的几乎处处有限的非负可测函数，$m(E) < +\infty$. 在$[0,\infty)$上作如下划分 $0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_k < y_{k+1} < \cdots \to +\infty$, 其中$y_{k+1} - y_k < \delta$, $k = 0, 1, 2, \cdots$. 若令$E_k = \{x \in E : y_k \leq f(x) < y_{k+1}\}$, 则$f(x)$在$E$上是可积的当且仅当级数$\sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k) < +\infty$. 此时有$\lim_{\delta\to 0^+} \sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k) = \int_E f(x)dx$.

证明：令$E_\infty = \{x \in E : f(x) = +\infty\}$. 我们有$\int_E f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx + \int_{E_\infty} f(x)dx$. 其中$E_\infty$是零测集，因此最后一个积分是零。利用不等式$y_k \leq f(x) < y_{k+1} \leq y_k + \delta, x \in E_k$和积分的单调性我们有

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k) \leq \int_E f(x)dx \leq \sum_{k=0}^{\infty} (y_k + \delta) m(E_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k) + \delta m(E).$$

因此级数的收敛性和积分的有限性是等价的。若积分是可积的，上式意味着

$$0 \leq \int_E f(x)dx - \sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k) \leq \delta m(E).$$

令$\delta \to 0^+$, 我们得到所需的极限。

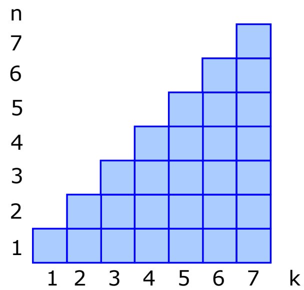
例子 6. 设$E \subset \mathbb{R}$, $m(E) < +\infty$. $f(x)$是E上的非负实值可测函数，则$f(x)$在E上可积的充分必要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(\{x \in E : f(x) \geq n\}) < +\infty.$$

证明：取划分$y_k = k$并令$E_k = \{x \in E : k \leq f(x) < k+1\}$. 我们有$f(x)$在$E$上可积的充分必要条件是$\sum_{k=1}^{\infty} k m(E_k) < +\infty$. 另一方面，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(\{x \in E : f(x) \geq n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} m(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} m(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} k m(E_k).$$

因此得证。



例子 7. 设$E_1, E_2, \cdots, E_n \subset [0,1]$为可测集，$[0,1]$中的每一点至少属于上述集合中的$k$个，则$E_1, E_2, \cdots, E_n$中至少有一个的测度大于等于$k/n$.

证明： $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \int_{[0,1]} \chi_{E_i}(x)dx = \int_{[0,1]} \left(\sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x) \right) dx \geq \int_{[0,1]} kdx \geq k.$

2 一般可测函数的积分

2.1 一般可测函数的积分和初步性质

定义 3. 设$f(x)$是E上的可测函数，若积分$\displaystyle\int_E f_+(x)dx$, $\displaystyle\int_E f_-(x)dx$中至少有一个是有限值，则称

$$\int_E f(x)dx = \int_E f_+(x)dx - \int_E f_-(x)dx$$

为$f(x)$在E上的积分；当上式右端的两个积分值皆为有限时，则称$f(x)$在E上是可积的，或称$f(x)$为E上的可积函数。在E上的可积函数的全体记为$L(E)$.

注意： 若$f(x)$是E上的非负可测函数，$f_+(x) = f(x)$, $f_-(x) = 0$. 因此上述定义和原先我们对非负可测函数的积分定义是一致的。可积性的定义也一样。
注意： 利用非负可积函数的线性，我们总有

$$\int_E |f(x)|dx = \int_E f_+(x)dx + \int_E f_-(x)dx.$$

因此$f(x)$在E上可积等价于$|f(x)|$在E上可积。换言之，勒贝格可积函数都是绝对可积函数。另外，只要$f(x)$在E上积分有意义，我们就有

$$\left| \int_E f(x)dx \right| \leq \int_E |f(x)|dx.$$

- 若E是可测集且可测函数f, g满足$f(x) = g(x)$, $a.e.\ x \in E$, 则$\displaystyle\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx.$

  证明： 我们有$f_+(x) = g_+(x)$, $f_-(x) = g_-(x)$, $a.e.\ x \in E$. 因此$\displaystyle\int_E f_+(x) = \int_E g_+(x)dx$, $\displaystyle\int_E f_-(x)dx = \int_E g_-(x)dx.$

- 若E是可测集且$f(x) = 0$, $a.e.\ x \in E$, 则$\displaystyle\int_E f(x)dx = 0.$

- (单调性)若$f(x) \le g(x)$是E上的两个可测函数，且二者在E上的积分都有意义，则$\int_E f(x)dx \le \int_E g(x)dx$.

  证明：$f_+(x) \le g_+(x)$, $f_-(x) \ge g_-(x)$. 有$\int_E f_+(x)dx \le \int_E g_+(x)dx$, $\int_E f_-(x)dx \ge \int_E g_-(x)dx$.

- 若$f \in L(E)$, 则$f(x)$在E上几乎处处有限。

- 若$f(x)$是E上的可测函数，$g \in L(E)$, 且$|f(x)| \le g(x)$, $x \in E$, 则$f \in L(E)$.

  证明：$\int_E |f(x)|dx \le \int_E g(x)dx < +\infty$. 这里的函数$g(x)$称为控制函数。

- 若$A \subset E$是两个可测集，$f(x)$是E上可测函数, 则$\int_A f(x)dx = \int_E f(x)\chi_A(x)dx$.

  证明：$\int_E (f\chi_A)_+ dx = \int_E f_+\chi_A dx = \int_A f_+ dx$. $\int_E (f\chi_A)_- dx = \int_E f_-\chi_A dx = \int_A f_- dx$.

- 若$A \subset E$是两个可测集，$f \in L(E)$, 则$f \in L(A)$. 因为$\int_A |f(x)|dx \le \int_E |f(x)|dx < +\infty$.

定理 14 (积分的线性)**.** 若$f, g \in L(E)$，$C \in \mathbb{R}$则有

- $Cf \in L(E)$且$\int_E Cf(x)dx = C\int_E f(x)dx$;

- $f + g \in L(E)$且$\int_E (f(x) + g(x))dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx$.

证明：(1)若$C > 0$, $(Cf)_+(x) = Cf_+(x)$, $(Cf)_-(x) = Cf_-(x)$. 因此

$$\int_E Cf(x)dx = \int_E (Cf)_+(x)dx - \int_E (Cf)_-(x)dx = C\int_E f_+(x)dx - C\int_E f_-(x)dx = C\int_E f(x)dx.$$

若$C < 0$, $(Cf)_+(x) = -Cf_-(x)$, $(Cf)_-(x) = -Cf_+(x)$. 我们可以模仿上面的等式得到所需结论。

(2) 由$(f+g)_+ - (f+g)_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-$有$(f+g)_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + (f+g)_-$

$$\int_E (f+g)_+(x)dx + \int_E f_-(x)dx + \int_E g_-(x)dx = \int_E f_+(x)dx + \int_E g_+(x)dx + \int_E (f+g)_-(x)dx.$$

$$\int_E (f+g)_+(x)dx - \int_E (f+g)_-(x)dx = \int_E f_+(x)dx - \int_E f_-(x)dx + \int_E g_+(x)dx - \int_E g_-(x)dx.$$

其中每个积分都是有限的，因为$f+g$是可积的：$\int_E |f+g|dx \le \int_E |f(x)|dx + \int_E |g(x)|dx < +\infty$.

例子 8. 设$f(x)$是$[0,1]$上的实值可测函数，且$\int_{[0,1]} |f(x)|\ln(1+|f(x)|)dx < +\infty$, 则$f \in L([0,1])$.

证明：$|f(x)| \le |f(x)|\ln(1+|f(x)|) + e - 1 \in L([0,1])$.

例子 9 (Jensen不等式)**.** 设$w(x)$是$E \subset \mathbb{R}^n$上正值可测函数，且$\int_E w(x)dx = 1$；$\varphi(x)$是区间$I = [a,b]$上的凸函数；$f : E \to I$是一个可测函数，则

$$\varphi\left(\int_E f(x)w(x)dx\right) \le \int_E \varphi(f(x))w(x)dx.$$

证明：令$y=\int_E f(x)w(x)dx\in[a,b]$. 若$y=a$, 则$\int_E(f(x)-a)w(x)dx=0$, 于是$f(x)=a$, $a.e. x\in E$, 这时上述不等式左右两边都等于$\varphi(a)$. 同理，若$y=b$, 上述不等式左右两边都等于$\varphi(b)$. 若$y\in(a,b)$, 则我们有

$$\varphi(z)\geq\varphi(y)+k(z-y),\ z\in I;\qquad \varphi(f(x))\geq\varphi(y)-ky+kf(x),\ x\in E.$$

因此

$$\int_E\varphi(f(x))w(x)dx\geq\int_E(\varphi(y)-ky+kf(x))w(x)dx=\varphi(y)-ky+k\int_E f(x)w(x)dx=\varphi(y)$$

时变函数讲义 第十一部分

沈瑞鹏

天津大学数学学院

2021年5月

1 一般可测函数的积分

1.1 一般可测函数积分的性质

定理 1 (积分对定义域的可数可加性)**.** 若$\{E_k\}$是互不相交的可测集，若$f(x)$在$E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$上可积, 则$\displaystyle\int_E f(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}f(x)dx.$

证明：$\displaystyle\int_E f_+(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}f_+(x)dx.$ $\displaystyle\int_E f_-(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}f_-(x)dx.$

例子 1. 设$f\in L([a,b])$, 且对任何区间$[c,d]\subset[a,b]$, 有$\int_{[c,d]}f(x)dx=0$, 则$f(x)=0$, $a.e.\ x\in[a,b]$.

证明：令$A_+=\{x\in(a,b):f(x)>0\}$. 我们证明$m(A_+)=0$. 否则可以找到闭集$F\subset A_+$, 满足$m(F)>0$. 集合$(a,b)\setminus F=(a,b)\cap F^c$是开集，因此可以表示为$(a,b)\setminus F=\bigcup\limits_{k\geq 1}(c_k,d_k)$. 其中$(c_k,d_k)$是互不相交的开区间。因此我们有$(a,b)=F\cup\bigcup\limits_{k\geq 1}(c_k,d_k)$. 于是

$$\int_{(a,b)}f(x)dx=\int_F f(x)dx+\sum_{k\geq 1}\int_{(c_k,d_k)}f(x)dx \quad\Rightarrow\quad \int_F f(x)dx=0.$$

因为$f(x)>0$, $x\in F$. 我们有$f(x)=0$, $a.e.\ x\in F$. 这就得到了矛盾。同理我们可证$A_-=\{x\in(a,b):f(x)<0\}$也是零测集。

定理 2 (积分的绝对连续性)**.** 若$f\in L(E)$, 则对任何$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$和$R>0$, 使得当E中子集e的测度$m(e)<\delta$时有

$$\left|\int_e f(x)dx\right|\leq\int_e|f(x)|dx<\varepsilon; \qquad \left|\int_{E_R}f(x)dx\right|\leq\int_{E_R}|f(x)|dx<\varepsilon.$$

其中$E_R=\{x\in E:|x|>R\}$.

证明：我们只需证明关于$|f(x)|$积分的不等式。由可测简单函数逼近定理，存在具有紧支集的非负可测简单函数渐升列$\varphi_k(x) \to |f(x)|$. 于是有$\int_E \varphi_k(x)dx \to \int_E |f(x)|dx < +\infty$. 因此存在$k$, 使得

$$\int_E \varphi_k(x)dx > \int_E |f(x)|dx - \varepsilon/2 \quad \Rightarrow \quad \int_E (|f(x)| - \varphi_k(x))dx < \varepsilon/2.$$

因为$\varphi_k(x)$是非负简单函数，因此有$0 \leq \varphi_k(x) \leq M$有界，当$e \subset E$且$m(e) < \varepsilon/2M$时，

$$\int_e |f(x)|dx = \int_e (|f(x)| - \varphi_k(x))dx + \int_e \varphi_k(x)dx \leq \int_E (|f(x)| - \varphi_k(x))dx + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon.$$

由于$\varphi_k(x)$具有紧支集，我们不妨设当$|x| > R$时$\varphi_k(x) = 0$, 则

$$\int_{E_R} |f(x)|dx = \int_{E_R} (|f(x)| - \varphi_k(x))dx \leq \int_E (|f(x)| - \varphi_k(x))dx < \varepsilon.$$

推论 1. 若$f \in L(E)$, 令$E_r = \{x \in E : |x| > r\}$, 则$\lim\limits_{r\to\infty} \int_{E_r} f(x)dx = 0$.

证明：给定$\varepsilon > 0$, 有$R > 0$, 使得$\int_{E_R} |f(x)|dx < \varepsilon$. 当$r > R$时有$\left|\int_{E_r} f(x)dx\right| \leq \int_{E_r} |f(x)|dx < \varepsilon$.

例子 2. 设$E \subset \mathbb{R}$为可测集，$f \in L(E)$, $\int_E f(x)dx = A > 0$. 证明存在可测集$e \subset E$, 使得$\int_e f(x)dx = \frac{A}{2}$.

证明：考虑函数$g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(r) = \int_{[-r,r]\cap E} f(x)dx$. 这个函数是一致连续的，对任何$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 当$e \subset E$满足$m(e) < \delta$时，有$\left|\int_e f(x)dx\right| < \varepsilon$. 于是$r_1 < r_2$且$r_2 - r_1 < \delta/2$时, 我们有

$$|g(r_2) - g(r_1)| = \left|\int_{([-r_2,-r_1)\cup(r_1,r_2])\cap E} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

因为其中积分区域测度不大于$m([-r_2, -r_1] \cup [r_1, r_2]) = 2(r_2 - r_1) < \delta$. 另外，我们有$g(0) = 0$和

$$\lim_{r\to+\infty} g(r) = \lim_{r\to\infty} \left(\int_E f(x)dx - \int_{E_r} f(x)dx\right) = \int_E f(x)dx = A.$$

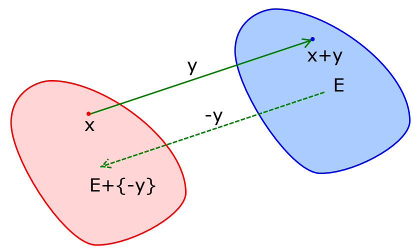
由连续函数的中值定理，存在$r \in (0, \infty)$, 使得$g(r) = \int_{[-r,r]\cap E} f(x)dx = A/2$.

1.2 平移和数乘变换下的积分

定理 3 (积分的平移变换定理)**.** 若$f \in L(\mathbb{R}^n)$, 则对任意的$y \in \mathbb{R}^n$, $f(x + y) \in L(\mathbb{R}^n)$, 且有$\int_{\mathbb{R}^n} f(x + y)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$.

证明：第一步 若$f(x) = \sum\limits_{i=1}^{p} c_i\chi_{E_i}(x)$是非负可测简单函数，则

$$f(x + y) = \sum_{i=1}^{p} c_i\chi_{E_i}(x + y) = \sum_{i=1}^{p} c_i\chi_{E_i+\{-y\}}(x)$$



也是，且$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)dx = \sum_{i=1}^{p} c_i m(E_i + \{-y\}) = \sum_{i=1}^{p} c_i m(E_i) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$.
第二步 若$f(x)$是非负的可测函数，则可以取非负可测的简单函数渐升列$\varphi_k(x) \to f(x)$. 显然$\varphi_k(x+y) \to f(x+y)$也是非负可测的简单函数渐升列。于是

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x+y)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)dx.$$

第三步 若$f(x)$是一般的可测函数，我们有$[f(x+y)]_+ = f_+(x+y)$, $[f(x+y)]_- = f_-(x+y)$. 因此

$$\int_{\mathbb{R}^n} [f(x+y)]_+ dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_+(x)dx; \qquad \int_{\mathbb{R}^n} [f(x+y)]_- dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_-(x)dx.$$

因此当f可积时，$f(x+y)$也可积，且二者积分的值总是相等。

推论 2. 若$f \in L(E)$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, 则$f(x+y) \in L(E+\{-y\})$, 且有$\int_{E+\{-y\}} f(x+y)dx = \int_E f(x)dx$.

证明： 定义$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E; \\ 0, & x \notin E; \end{cases}$ 则$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|dx = \int_E |f(x)|dx < +\infty$. 因此$g \in L(\mathbb{R}^n)$. 由上述定理结论，$g(x+y) \in L(\mathbb{R}^n)$, 于是在$E+\{-y\}$上$f(x+y) = g(x+y) \in L(E+\{-y\})$. 且

$$\int_{E+\{-y\}} f(x+y)dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x+y)dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

定理 4 (积分的数乘变换定理)**.** 若$f \in L(\mathbb{R}^n)$, 则对任意的$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 有$f(ax) \in L(\mathbb{R}^n)$, 且有$\int_{\mathbb{R}^n} f(ax)dx = \frac{1}{|a|^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$.

证明： 第一步 若$f(x) = \sum_{i=1}^{p} c_i \chi_{E_i}(x)$是可测简单函数，则

$$f(ax) = \sum_{i=1}^{p} c_i \chi_{E_i}(ax) = \sum_{i=1}^{p} c_i \chi_{a^{-1}E_i}(x)$$

也是，且$\int_{\mathbb{R}^n} f(ax)dx = \sum_{i=1}^{p} c_i m(a^{-1}E_i) = \frac{1}{|a|^n} \sum_{i=1}^{p} c_i m(E_i) = \frac{1}{|a|^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$.
第二步 若$f(x)$是非负的可测函数，则可以取非负可测的简单函数渐升列$\varphi_k(x) \to f(x)$. 显

然$\varphi_k(ax) \to f(ax)$也是非负可测的简单函数渐升列。于是

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(ax)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(ax)dx = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|a|^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)dx = \frac{1}{|a|^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

第三步 若$f(x)$是一般的可测函数，我们有$[f(ax)]_+ = f_+(ax)$, $[f(ax)]_- = f_-(ax)$. 因此

$$\int_{\mathbb{R}^n} [f(ax)]_+ dx = \frac{1}{|a|^n} \int_{\mathbb{R}^n} f_+(x)dx; \qquad \int_{\mathbb{R}^n} [f(ax)]_- dx = \frac{1}{|a|^n} \int_{\mathbb{R}^n} f_-(x)dx.$$

例子 3. 若$f \in L([0,\infty))$, 则级数$\sum_{k=0}^{\infty} f(x+k)$对几乎处处$x \in [0,\infty)$收敛。

证明：我们可以证明这个级数几乎处处绝对收敛。因为我们有

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f(x+n+k)| = \sum_{k=n}^{\infty} |f(x+k)| \le \sum_{k=0}^{\infty} |f(x+k)|,$$

所以若这个级数在x处绝对收敛，则其必然在$x+n$处绝对收敛($n \in \mathbb{N}$). 因此我们只需证明这个级数在$[0,1)$上几乎处处收敛。 事实上，我们有

$$\begin{aligned}\int_{[0,1)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |f(x+k)| \right) dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{[0,1)} |f(x+k)| dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{[k,k+1)} |f(x)| dx \\ &= \int_{[0,\infty)} |f(x)| dx < +\infty.\end{aligned}$$

因此级数和$\sum_{k=0}^{\infty} |f(x+k)| \in L([0,1))$, 所以在$[0,1)$上几乎处处有限，因此级数在$[0,1)$上几乎处处绝对收敛。

2 控制收敛定理

定理 5 (控制收敛定理)**.** 设可测函数列$f_k(x) \to f(x)$, $a.e.\, x \in E$. 且存在可积函数$F \in L(E)$, 使得$|f_k(x)| \le F(x)$, $a.e.\, x \in E$ 对每个自然数k成立，则我们有

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

证明：显然$f(x)$是E上的可测函数，且$|f(x)| \le F(x)$, $a.e.\, x \in E$. 因此$f, f_k \in L(E)$. 我们定义函数$g_k(x) = |f_k(x) - f(x)| \le 2F(x)$, $a.e.\, x \in E$. 显然$g_k \in L(E)$且$g_k(x) \to 0$, $a.e.\, x \in E$. 由Fatou引理，我们有

$$\int_E \lim_{k\to\infty} (2F(x) - g_k(x))dx \le \varliminf_{k\to\infty} \int_E (2F(x) - g_k(x))dx.$$

$$2\int_E F(x)dx \le 2\int_E F(x)dx - \varlimsup_{k\to\infty} \int_E g_k(x)dx \quad \Rightarrow \quad \varlimsup_{k\to\infty} \int_E g_k(x)dx = 0.$$

于是

$$\varlimsup_{k\to\infty} \left| \int_E f_k(x)dx - \int_E f(x)dx \right| \le \varlimsup_{k\to\infty} \int_E |f_k(x) - f(x)|dx = \varlimsup_{k\to\infty} \int_E g_k(x)dx = 0.$$

定义 1 (依L^1的意义收敛). 若$f_k, f \in L(E)$, 且$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|dx = 0$, 则称函数列$f_k$在$E$上依$L^1$的意义收敛于$f$.

注意：依L^1的意义收敛意味着相应的积分值收敛$\left|\int_E f_k(x)dx - \int_E f(x)dx\right| \leq \int_E |f_k(x) - f(x)|dx$.

定理 6 (控制收敛定理). 设可测函数列$f_k(x) \to f(x)$, $a.e. x \in E$. 且存在可积函数$F \in L(E)$, 使得$|f_k(x)| \leq F(x)$, $a.e. x \in E$ 对每个自然数k成立，则我们有f_k在E上依L^1的意义收敛于f.

定理 7. 若函数列f_k在E上依L^1的意义收敛于f, 则f_k在E上依测度收敛于f.

证明：令$E_k(\varepsilon) = \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}$为可测集，我们有

$$m(E_k(\varepsilon)) \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{E_k(\varepsilon)} |f_k(x) - f(x)|dx \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_E |f_k(x) - f(x)|dx \to 0.$$

因此我们有$\lim\limits_{k\to\infty} m(E_k(\varepsilon)) = 0$. 这就得到了依测度收敛。

例子 4. 证明$\int_{[0,1]} \frac{x\sin x}{1+(nx)^{3/2}}dx = o(1/n)$.

证明：我们需要证明$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{[0,1]} \frac{nx\sin x}{1+(nx)^{3/2}}dx = 0$. 固定$x \in (0,1]$, 我们有极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx\sin x}{1+(nx)^{3/2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t\sin x}{1+t^{3/2}} = 0.$$

因为$t \leq 1 + t^{3/2}$, $t > 0$. 我们有

$$\left|\frac{nx\sin x}{1+(nx)^{3/2}}\right| = \frac{t\sin x}{1+t^{3/2}} \leq \sin x \leq 1.$$

显然控制函数1在$[0,1]$上可积，我们可以利用控制收敛定理得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} \frac{nx\sin x}{1+(nx)^{3/2}}dx = \int_{[0,1]} 0dx = 0.$$

定理 8 (依测度收敛的控制收敛定理). 设可测函数列f_k在可测集E上依测度收敛于f. 且存在函数$F \in L(E)$, 使得$|f_k(x)| \leq F(x)$, $a.e. x \in E$ 对每个自然数k成立，则我们有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

证明：首先，$f(x)$是$f_k(x)$某个子列的几乎处处的极限，因此我们有$|f(x)| \leq F(x)$, $a.e. x \in E$. 这也就意味着$f \in L(E)$. 给定$\varepsilon > 0$, 由可积函数的绝对连续性，有$\delta > 0$和$R > 0$, 使得只要可测集$e \subset E$满足$m(e) < \delta$, 就有

$$\int_e |F(x)|dx < \varepsilon/6; \qquad \int_{\{x\in E:|x|>R\}} |F(x)|dx < \varepsilon/6.$$

令$A = m(\{x \in E : |x| \le R\}) < +\infty$. 因为$f_k$依测度收敛于$f$, 我们有

$$\lim_{k\to\infty} m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon/3A\}) = 0.$$

因此有N, 当$k \ge N$时，我们有$m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon/3A\}) < \delta$. 令$E_1 = \{x\in E : |x| > R\}$, $e = \{x \in E : |x| \le R, |f_k(x)-f(x)| > \varepsilon/3A\}$, $E_2 = \{x \in E : |x| \le R, |f_k(x)-f(x)| \le \varepsilon/3A\}$. 因此

$$\begin{aligned}\int_E |f_k(x) - f(x)|dx &= \int_{E_1} |f_k(x) - f(x)|dx + \int_e |f_k(x) - f(x)|dx + \int_{E_2} |f_k(x) - f(x)|dx \\ &\le \int_{E_1} 2F(x)dx + \int_e 2F(x)dx + \int_{E_2} |f_k(x) - f(x)|dx \\ &\le 2\cdot\frac{\varepsilon}{6} + 2\cdot\frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3A}\cdot m(E_2) < \varepsilon.\end{aligned}$$

其中，$m(e) \le m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon/3A\}) < \delta$. $m(E_2) \le m(\{x \in E : |x| \le R\}) = A$. 因此，我们有依$L^1$收敛

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(x) - f(x)|dx = 0.$$

这就意味着积分的收敛。

证明：第二种证明方法 若极限不成立，则存在f_k的子列(不妨仍记为f_k)和$\varepsilon > 0$, 使得$\left|\int_E f_k(x)dx - \int_E f(x)dx\right| > \varepsilon$. 我们不妨设$\int_E f_k(x)dx > \int_E f(x)dx + \varepsilon$. 由Riesz定理，存在一个子列$f_{k_n}(x)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} f_{k_n}(x) = f(x), \quad a.e.\, x \in E.$$

由几乎处处收敛的控制收敛定理，我们有下列极限，从而得到矛盾。

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_{k_n}(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

定理 9 (逐项积分定理)**.** 设$f_k \in L(E)$, 若有$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E |f_k(x)|dx < +\infty$, 则$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$在$E$上几乎处处收敛且可积，进一步有

$$\int_E \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)dx.$$

证明：令$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$. 由非负函数的逐项积分定理，我们有

$$\int_E F(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E |f_k(x)|dx < +\infty.$$

因此$F \in L(E)$, 对几乎处处的$x \in E$, 有$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < +\infty$. 于是$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$几乎处处绝对收敛，且$|S(x)| \le F(x)$, $a.e.\, x \in E$, 所以$S \in L(E)$. 令$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \to S(x)$, $a.e.\, x \in$

E, 则$F(x)$成为控制函数 $|S_n(x)| \le F(x)$, $a.e.\, x \in E$. 由控制收敛定理有

$$\int_E S(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_E S_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_E f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)dx.$$

定理 10 (积分下求导)**.** 若$f(x,y)$是定义在$E\times(a,b)$上的函数, 它作为x的函数在E上是可积的, 作为y的函数在(a,b)上是可微的。若存在$F\in L(E)$, 使得 $|f_y(x,y)|\le F(x), \quad (x,y)\in E\times(a,b)$. 则

$$\frac{d}{dy}\int_E f(x,y)dx = \int_E f_y(x,y)dx.$$

证明：我们需要证明对于任何序列$h_k\to 0$, 有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{h_k}\left(\int_E f(x,y+h_k)dx - \int_E f(x,y)dx\right) = \int_E f_y(x,y)dx.$$

这等价于对于任何序列$h_k\to 0$, 我们有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E \frac{f(x,y+h_k)-f(x,y)}{h_k}dx = \int_E f_y(x,y)dx.$$

令$g_k(x,y) = \dfrac{f(x,y+h_k)-f(x,y)}{h_k} \to f_y(x,y)$. 由中值定理$|g_k(x,y)| = |f_y(x,y+\xi h_k)| \le F(x)$, $\xi\in(0,1)$. 因此我们可以利用控制收敛定理得到

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{h_k}\left(\int_E f(x,y+h_k)dx - \int_E f(x,y)dx\right) = \lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x,y)dx = \int_E f_y(x,y)dx.$$

3 可积函数和连续函数的关系

3.1 用连续函数逼近可积函数

定理 11 (连续函数依L^1意义逼近可积函数)**.** 若$E\subset\mathbb{R}^n$是可测集，$f\in L(E)$, 则对任何$\varepsilon>0$, 存在$\mathbb{R}^n$上具有紧支集的连续函数$g(x)$，使得

$$\int_E |f(x)-g(x)|dx < \varepsilon.$$

证明：令$A_k=\{x\in E\cap B(0,k):|f(x)|<k\}$为递增可测集列，则$A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k=\{x\in E:|f(x)|<+\infty\}$. 于是$m(E\backslash A)=0$. 因此$f_k(x)=f(x)\chi_{A_k}(x)\to f(x)$, $a.e.$, 且$|f_k(x)|\le f(x)$. 由控制收敛定理有L^1收敛

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|dx = 0 \quad\Rightarrow\quad \text{存在}k\in\mathbb{N},\ \text{使得}\ \int_E |f_k(x)-f(x)|dx < \varepsilon/2.$$

由卢津定理及其推论，我们可以找到$\mathbb{R}^n$上的连续函数$g(x)$, 满足$|g(x)|\le k$和

$$m(\{x\in E: f_k(x)\ne g(x)\}) < \varepsilon/4k.$$

我们不妨设$g(x)$具有紧支集(否则取连续函数$\rho:\mathbb{R}^n\to[0,1]$, 当$|x|\le k$时$\rho(x)=1$, 当$|x|>k+1$时$\rho(x)=0$, 然后用$g(x)\rho(x)$代替$g(x)$) 我们有

$$\int_E |g(x)-f_k(x)|dx = \int_{\{x\in E: f_k(x)\ne g(x)\}} |g(x)-f_k(x)|dx \le 2k\cdot m(\{x\in E: f_k(x)\ne g(x)\}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\int_E |f(x)-g(x)|dx \le \int_E |f(x)-f_k(x)|dx + \int_E |f_k(x)-g(x)|dx < \varepsilon.$$

推论 3. 若$E\subset\mathbb{R}^m$是可测集，$f\in L(E)$, 则存在$\mathbb{R}^m$上具有紧支集的连续函数列$\{g_k(x)\}$, 使得

- $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E |f(x)-g_k(x)|dx = 0.$
- $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x) = f(x),\ a.e. x\in E.$

证明：由上面的定理，存在$\mathbb{R}^m$上具有紧支集的连续函数列$\{f_n(x)\}$, 使得

$$\int_E |f(x)-f_n(x)|dx < \frac{1}{n}, \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty}\int_E |f(x)-f_n(x)|dx = 0.$$

也即$f_n(x)$在E上依L^1收敛于$f(x)$，因此依测度收敛于$f(x)$, 这就意味着存在着$\{f_n\}$的子列$g_k(x)=f_{n_k}(x)$，在E上几乎处处收敛于$f(x)$. 这个子列即满足题设条件。

注意：若可积函数$f\in L(E)$一致有界$|f(x)|\le M$, 则在上述定理中我们可以额外要求$g(x), g_k(x)$满足$|g_k(x)|, |g(x)|\le M,\ x\in\mathbb{R}^n$.

例子 5. 设$f\in L(\mathbb{R}^n)$, 对$\mathbb{R}^n$上一切具有紧支集的连续函数$\varphi(x)$, 都有$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx = 0$. 则$f(x)=0,\ a.e. x\in\mathbb{R}^n$.

证明：令$E_+=\{x: f(x)>0\}$, $E_-=\{x: f(x)<0\}$. 我们可以证明$m(E_+)=m(E_-)=0$. 若不然，不妨设$m(E_+)>0$. 我们可以把E_+写作

$$E_+ = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{x\in B(0,k): f(x)>0\}.$$

因此可以找到有界的正测度集E, 使得$f(x)>0,\ x\in E$. 由有界性我们有$\chi_E(x)\in L(\mathbb{R}^n)$. 因此存在$\mathbb{R}^n$上具有紧支集的连续函数$\varphi_k(x)$, 满足$|\varphi_k(x)|\le 1$和$\varphi_k(x)\to\chi_E(x)$, $a.e. x\in\mathbb{R}^n$. 因此我们有

$$f(x)\varphi_k(x)\to f(x)\chi_E(x),\ a.e. x\in\mathbb{R}^n \qquad |f(x)\varphi_k(x)|\le|f(x)|\in L(\mathbb{R}^n).$$

由控制收敛定理

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_E(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_k(x)dx = 0.$$

因为$f(x)\chi_E(x)$是非负函数，所有我们有$f(x)\chi_E(x)=0,\ a.e. x\in\mathbb{R}^n$. 这与在$E$上$f(x)\chi_E(x)>0$相矛盾。

定理 12 (平均连续性)**.** 若$f\in L(\mathbb{R}^n)$, 则有$\lim\limits_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+h)-f(x)|dx = 0$.

证明：第一步 若$g(x)$是一个$\mathbb{R}^n$上具有紧支集的连续函数。我们不妨设Supp$(g)\subset B(0,R)$。给定$\varepsilon>0$, 由一致连续性，存在$\delta\in(0,1)$, 当$x,y\in\bar{B}(0,R+2)$且$|x-y|<\delta$时有

$$|g(x)-g(y)| < \frac{\varepsilon}{m(B(0,R+1))}.$$

于是当$|h|<\delta$时，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n}|g(x+h)-g(x)|dx=\int_{B(0,R+1)}|g(x+h)-g(x)|dx\le\frac{\varepsilon}{m(B(0,R+1))}\cdot m(B(0,R+1))=\varepsilon.$$

第二步 给定$\varepsilon>0$, 存在一个$\mathbb{R}^n$上具有紧支集的连续函数$g(x)$, 使得$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)-g(x)|dx<\frac{\varepsilon}{4}$. 由第一步，存在$\delta>0$, 使得$|h|<\delta$时，有$\int_{\mathbb{R}^n}|g(x+h)-g(x)|dx<\frac{\varepsilon}{2}$. 这意味着

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+h)-f(x)|dx&\le\int_{\mathbb{R}^n}\left(|f(x+h)-g(x+h)|+|g(x+h)-g(x)|+|g(x)-f(x)|\right)dx\\&\le\int_{\mathbb{R}^n}|g(x+h)-g(x)|dx+2\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)-g(x)|dx<\varepsilon.\end{aligned}$$

例子 6. 若E是有界可测集，则$\lim\limits_{h\to 0}m(E\cap(E+\{h\}))=m(E)$.

证明：我们有$\chi_E(x)\in L(\mathbb{R}^n)$. 由平均连续性我们有

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}|\chi_E(x-h)-\chi_E(x)|dx&=0\\ \lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}|\chi_{E+\{h\}}(x)-\chi_E(x)|dx&=0\\ \lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}(\chi_{(E+\{h\})\setminus E}(x)+\chi_{E\setminus(E+\{h\})}(x))dx&=0\\ \lim_{h\to 0}\left(m((E+\{h\})\setminus E)+m(E\setminus(E+\{h\}))\right)&=0\end{aligned}$$

因此$\lim\limits_{h\to 0}m(E\setminus(E+\{h\}))=0$. 于是

$$\lim_{h\to 0}m(E\cap(E+\{h\}))=\lim_{h\to 0}\left(m(E)-m(E\setminus(E+\{h\}))\right)=m(E).$$

3.2 用阶梯函数逼近可积函数

定理 13 (用阶梯函数逼近可积函数)**.** 若$E\subset\mathbb{R}^n$是可测集，$f\in L(E)$, 则存在$\mathbb{R}^n$上具有紧支集的阶梯函数列$\{g_k(x)\}$, 使得

- $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E|f(x)-g_k(x)|dx=0.$
- $\lim\limits_{k\to\infty}g_k(x)=f(x),\ a.e. x\in E.$

证明：与连续函数的情形类似，我们只需证明，对任何$\varepsilon>0$, 存在$\mathbb{R}^n$上具有紧支集的阶梯函数$g(x)$, 使得$\int_E|f(x)-g(x)|dx<\varepsilon$. 我们可以首先找到$\mathbb{R}^n$上具有紧支集的连续函数$h(x)$, 使得

$$\int_E|f(x)-h(x)|dx<\varepsilon/2.$$

我们不妨假设$\mathrm{Supp}\, h \subset I$, 这里的$I$是一个大矩体。由$h(x)$在这个矩体中的一致连续性，我们可以把矩体分成若干个小矩体$\{I_k\}_{k=1,2,\cdots,n}$，使得$x, y \in I_k$时有$|h(x)-h(y)| < \varepsilon/2|I|$. 我们在每个矩体内任选一点$x_k \in I_k$并定义$g(x) = \sum_{k=1}^{n} h(x_k)\chi_{I_k}(x)$为阶梯函数，则有

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)-h(x)|dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{I_k} |g(x)-h(x)|dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{I_k}|h(x_k)-h(x)|dx \le \sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon|I_k|}{2|I|} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\int_E |f(x)-g(x)|dx \le \int_E |f(x)-h(x)|dx + \int_E |h(x)-g(x)|dx < \varepsilon.$$

例子 7 (弱收敛)**.** 若$\{g_k(x)\}$是$[a,b]$上的可测函数列，且满足

- $|g_k(x)| \le M$对所有$x \in [a,b]$和$k \in \mathbb{N}$成立。
- 对任何$c \in [a,b]$, 有$\lim_{k\to\infty}\int_{[a,c]} g_k(x)dx = 0$.

则对任意的$f \in L([a,b])$, 有$\lim_{k\to\infty}\int_{[a,b]} f(x)g_k(x)dx = 0$.

证明： 第一步 $\forall c, d \in [a,b]$, $\lim_{k\to\infty}\int_{(c,d]} g_k(x)dx = \lim_{k\to\infty}\left(\int_{[a,d]} g_k(x)dx - \int_{[a,c]} g_k(x)dx\right) = 0$. 也即$\lim_{k\to\infty}\int_{[a,b]}\chi_{(c,d]}(x)g_k(x)dx = 0$. 所以结论对包含在$[a,b]$内的任意区间的特征函数成立。

第二步 若$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_i\chi_{I_j}(x)$为阶梯函数，其中$I_j \subset [a,b]$是互不相交的区间。由积分的线性有

$\lim_{k\to\infty}\int_{[a,b]} f(x)g_k(x)dx = \sum_{j=1}^{n} c_i \lim_{k\to\infty}\int_{[a,b]}\chi_{I_j}(x)g_k(x)dx = 0.$

第三步 设$f \in L([a,b])$，给定$\varepsilon > 0$, 首先取$\mathbb{R}$上具有紧支集的阶梯函数$h(x) = \sum_{j=1}^{n} c_i\chi_{I_j}(x)$, 使得

$$\int_{[a,b]} |f(x)-h(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

由第二步的结论，存在N, 当$k \ge N$时有

$$\left|\int_{[a,b]} h(x)g_k(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
\left|\int_{[a,b]} f(x)g_k(x)dx\right| &\le \left|\int_{[a,b]} h(x)g_k(x)dx\right| + \left|\int_{[a,b]}(f(x)-h(x))g_k(x)dx\right| \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + \int_{[a,b]}|f(x)-h(x)||g_k(x)|dx \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + M\int_{[a,b]}|f(x)-h(x)|dx \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

由极限的定义，我们得到

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[a,b]} f(x)g_k(x)dx = 0.$$

例子 8. 若数列$\{\lambda_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = +\infty$. 则集合$A=\{x\in\mathbb{R}:\sin\lambda_n x$在$n\to\infty$时收敛$\}$为零测集。

证明：首先，我们有$|\sin\lambda_n x|\le 1$且对任何$a<b$

$$\left|\int_a^b \sin\lambda_n x dx\right| = \frac{|\cos\lambda_n a - \cos\lambda b|}{\lambda_n} \le \frac{2}{\lambda_n} \to 0.$$

因此，给定任何实数$a<b$和$f\in L([a,b])$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} f(x)\sin\lambda_n x dx = 0.$$

令$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\sin\lambda_n x, & x\in A\\ 0, & x\notin A;\end{cases} = \lim\limits_{n\to\infty}\chi_A(x)\sin\lambda_n x\in L([-k,k])$. 我们有$f(x)\sin\lambda_n x\to f^2(x)$, 由控制收敛定理，有$\int_{[-k,k]} f^2(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\int_{[-k,k]} f(x)\sin\lambda_n x\,dx = 0$. 因此$f(x)$几乎处处为零。 这意味着

$$0=\lim_{n\to\infty}\int_{[-k,k]}\chi_A(x)\sin^2\lambda_n x\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{[-k,k]}\frac{\chi_A(x)(1-\cos 2\lambda_n x)}{2}dx = \frac{m(A\cap[-k,k])}{2}.$$

因此$m(A\cap[-k,k])=0$. A是递增集合列$A\cap[-k,k]$的极限，所以是零测集。

时变函数讲义 第十二部分

沈瑞鹏

天津大学数学学院

2023年5月

1 勒贝格积分和黎曼积分的关系

黎曼积分的复习 设$f(x)$是区间$[a,b]$上有界函数，我们取一族分划$a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < x_2^{(k)} < \cdots < x_{n_k-1}^{(k)} < x_{n_k}^{(k)} = b$. 每一个分划都相应地把整个区间分为了$n_k$个小区间，并定义

$$\Delta_j^{(k)} = x_j^{(k)} - x_{j-1}^{(k)},\ j = 1, 2, \cdots, n_k \qquad \Delta^{(k)} = \max\{\Delta_1^{(k)}, \Delta_2^{(k)}, \cdots, \Delta_{n_k}^{(k)}\}.$$

我们假设当k趋于无穷时$\Delta^{(k)}$趋于零。 我们还可以定义

$$M_j^{(k)} = \sup_{x_{j-1}^{(k)} \le x \le x_j^{(k)}} f(x), \qquad m_j^{(k)} = \inf_{x_{j-1}^{(k)} \le x \le x_j^{(k)}} f(x), \qquad j = 1, 2, \cdots, n_k.$$

并定义黎曼上下积分

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} M_j^{(k)} \Delta_j^{(k)}; \qquad \underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} m_j^{(k)} \Delta_j^{(k)}.$$

以上极限总是存在且与分划族的选取无关。若$f(x)$的上下积分相等，则称$f(x)$是$[a,b]$上的黎曼可积函数，并定义$f(x)$在$[a,b]$上的黎曼积分为

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} M_j^{(k)} \Delta_j^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} m_j^{(k)} \Delta_j^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} f(y_j^{(k)}) \Delta_j^{(k)}.$$

其中$y_j^{(k)}$为区间$[x_{j-1}^{(k)}, x_j^{(k)}]$上任选一点。

振幅的复习 设$f(x)$是定义在$E = [a,b]$上的实值函数，我们可以定义$f(x)$在集合A上的振幅为

$$\omega(f, A) = \sup_{x,y\in A\cap[a,b]} |f(x) - f(y)| = \sup_{x\in A\cap[a,b]} f(x) - \inf_{x\in A\cap[a,b]} f(x).$$

若$A_1 \subset A_2$, 不难验证$\omega(f, A_1) \le \omega(f, A_2)$. 函数$f(x)$在一点$x \in [a,b]$的振幅可以定义为

$$\omega_f(x) = \lim_{\delta\to 0^+} \omega(f, (x-\delta, x+\delta)) = \lim_{\delta\to 0^+} \sup_{y_1,y_2\in(x-\delta,x+\delta)\cap[a,b]} |f(y_1) - f(y_2)|.$$

不难验证若x是区间I的内点，则

$$\omega_f(x) \le \omega(f, I).$$

进一步，若x是区间$I_k(k=1,2,\cdots)$的内点，且$|I_k|\to 0^+$, 则我们有

$$\omega_f(x)=\lim_{k\to\infty}\omega(f,I_k).$$

事实上，给定$\varepsilon>0$, 取$\delta>0$, 使得$\omega(f,(x-\delta,x+\delta))<\omega_f(x)+\varepsilon$. 当$k$足够大时，我们总有$I_k\subset[x-|I_k|,x+|I_k|]\subset(x-\delta,x+\delta)$. 因此$\omega(f,I_k)\le\omega(f,(x-\delta,x+\delta))$. 于是

$$\omega_f(x)\le\omega(f,I_k)<\omega_f(x)+\varepsilon.$$

最后，我们有$\omega_f(x)=0$当且仅当f在x点连续。

引理 1 (振幅和黎曼上下积分之间的关系)**.** 设$f(x)$是定义在闭区间$I=[a,b]$上的有界函数，记$\omega_f(x)$为$f(x)$的振幅函数，则我们有

$$\int_I\omega_f(x)dx=\overline{\int_a^b}f(x)dx-\underline{\int_a^b}f(x)dx.$$

证明：我们取一族分划$a=x_0^{(k)}<x_1^{(k)}<x_2^{(k)}<\cdots<x_{n_k-1}^{(k)}<x_{n_k}^{(k)}=b$, 使得$\Delta^{(k)}\to 0^+$. 则函数

$$\omega_k(x)=\omega(f,[x_{j-1}^{(k)},x_j^{(k)}]),\quad 若x\in(x_{j-1}^{(k)},x_j^{(k)})$$

在I上几乎处处有定义，且$\omega_k(x)\le\omega(f,I)<+\infty$是一致有界函数。若$x$不是任何一个分划的分点，则$x$为每一个包含它的区间$[x_{j-1}^{(k)},x_j^{(k)}]$的内点，且当$k\to\infty$时，区间$[x_{j-1}^{(k)},x_j^{(k)}]$的长度趋于零，因此

$$\omega_k(x)\to\omega_f(x),\quad a.e.\,x\in[a,b].$$

由控制收敛定理，我们有($I_j^{(k)}=[x_{j-1}^{(k)},x_j^{(k)}]$)

$$\begin{aligned}\int_I\omega_f(x)dx=\lim_{k\to\infty}\int_I\omega_k(x)dx&=\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n_k}\int_{(x_{j-1}^{(k)},x_j^{(k)})}\left(\sup_{x\in I_j^{(k)}}f(x)-\inf_{x\in I_j^{(k)}}f(x)\right)dx\\&=\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n_k}\left[M_j^{(k)}-m_j^{(k)}\right]\Delta_j^{(k)}=\overline{\int_a^b}f(x)dx-\underline{\int_a^b}f(x)dx.\end{aligned}$$

定理 1 (黎曼可积的充分必要条件)**.** 设$f(x)$是定义在闭区间$I=[a,b]$上的有界函数，则$f(x)$在I上是黎曼可积函数的充分必要条件是$f(x)$在I上的不连续点是零测集。

证明：$f(x)$在I上是黎曼可积函数当且其上下积分相等，因此$f(x)$在I上是黎曼可积函数的充分必要条件是$\int_I\omega_f(x)dx=0$. 因为振幅函数是非负函数，积分为零等价于几乎处处为零，也即几乎处处为连续点。

引理 2. 设$E\subset\mathbb{R}^n$为可测集，若$f(x)$是定义在E上几乎处处连续的实值函数，则$f(x)$是E上的可测函数。

证明：设Z为$f(x)$在E上的不连续点组成的集合，由假设Z为零测集。若$x\in E\backslash Z$，则x是$f(x)$在E上的连续点，因此也是把$f(x)$看作定义在$E\setminus Z$上的函数的连续点。

如果$|y-x|<\delta,y\in E,$则$|f(x)-f(y)|<\varepsilon,\ \Rightarrow$ 如果$|y-x|<\delta,y\in E\setminus Z,$则$|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$

于是$f(x)$是定义在可测集$E\setminus Z$上的连续函数。因此$f(x)$是$E\setminus Z$上的可测函数。由定义$f(x)$一定是定义在零测集Z上的可测函数，于是我们可以把定义域合在一起，得到$f(x)$在E上的可测性。

定理 2 (黎曼积分和勒贝格积分的一致性)**.** 若$f(x)$是定义在闭区间$I=[a,b]$上的黎曼可积函数，则f也是I上的勒贝格可积函数, 且其勒贝格积分的值和黎曼积分相等。我们可以把勒贝格积分记为$\int_I f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$.

证明：若$f(x)$是闭区间$I=[a,b]$上的黎曼可积函数，则$f(x)$在I上几乎处处连续，因此为可测函数，由于$f(x)$还是定义在有限测度集上的有界函数，因此$f\in L(I)$. 我们取一族分划$a=x_0^{(k)}<x_1^{(k)}<x_2^{(k)}<\cdots<x_{n_k-1}^{(k)}<x_{n_k}^{(k)}=b$, 使得$\Delta^{(k)}\to 0^+$.

$$\int_I f(x)dx=\sum_{j=1}^{n_k}\int_{(x_{j-1}^{(k)},x_j^{(k)})} f(x)dx.$$

则由勒贝格积分的比较定理

$$\sum_{j=1}^{n_k} m_j^{(k)}\Delta_j^{(k)}\le\int_I f(x)dx\le\sum_{j=1}^{n_k} M_j^{(k)}\Delta_j^{(k)}.$$

令$k\to\infty$，我们有

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx\le\int_I f(x)dx\le\overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

由于$f(x)$是黎曼可积的，上下积分都等于黎曼积分的值，得到等式。

定理 3 (反常积分和勒贝格积分的关系)**.** 设定义在$[0,\infty)$上的函数$f(x)$在任何区间$[0,R]$上是黎曼可积的，且反常积分$\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$绝对收敛。则$f(x)$在$[0,\infty)$上是勒贝格可积的，且其勒贝格积分的值等于反常积分的值。

证明：由黎曼可积性我们得到$f(x)$在任何区间$[0,R]$上几乎处处连续，因此$f(x)$在整个定义域上几乎处处连续，从而是$[0,\infty)$上的可测函数。由单调渐升列积分定理

$$\int_{[0,\infty)}|f(x)|dx=\lim_{k\to\infty}\int_{[0,\infty)}|f(x)|\chi_{[0,k]}(x)dx=\lim_{k\to\infty}\int_0^k|f(x)|dx<+\infty.$$

因此$f(x)$在$[0,+\infty)$上是可积的。由控制收敛定理($|f(x)|$为控制函数)

$$\int_{[0,\infty)} f(x)dx=\lim_{k\to\infty}\int_{[0,\infty)} f(x)\chi_{[0,k]}(x)dx=\lim_{k\to\infty}\int_0^k f(x)dx=\int_0^\infty f(x)dx.$$

例子 1. 考虑反常积分$\displaystyle\int_1^\infty\frac{\sin x}{x}dx$. 这个积分是条件收敛的，但不是勒贝格可积的。

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx\ge\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}dx\ge\frac{2}{(k+1)\pi}$$
$$\int_1^R\frac{\sin x}{x}dx=cos1-\frac{\cos R}{R}-\int_1^R\frac{\cos x}{x^2}dx.$$

例子 2. 试证明$\displaystyle F(t)\doteq\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2tx\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-t^2}$.

证明：函数$f(x,t)=e^{-x^2}\cos 2tx$作为x的函数在$[0,\infty)$上是可积的，作为t的函数是可微的，且

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right|=\left|-2xe^{-x^2}sin2tx\right|\le 2xe^{-x^2}\in L([0,\infty)).$$

因此函数$F(t)=\int_0^\infty f(x,t)dx$是可微的，且

$$\begin{aligned}F'(t)&=\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx=\int_0^\infty\left(-2xe^{-x^2}sin2tx\right)dx=\int_0^\infty \sin 2tx\,d(e^{-x^2})\\&=-\int_0^\infty 2te^{-x^2}\cos 2tx\,dx=-2tF(t).\end{aligned}$$

且$F(0)=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 解微分方程即可

$$F'(t)+2tF(t)=0\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{t^2}F(t)\right)=e^{t^2}[F'(t)+2tF(t)]=0\Rightarrow F(t)=Ce^{-t^2}.$$

2 重积分和累次积分的关系

2.1 Tonelli和Fubini定理

定理 4 (Tonelli定理)**.** 设$f(x,y)$是$\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$上的非负可测函数，则有

(A) 对于几乎处处的$x\in\mathbb{R}^p$, $f(x,y)$作为y的函数是可测的;

(B) $\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)dy$作为$x$的函数是可测的;

(C) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)dy\right)dx=\int_{\mathbb{R}^{p+q}}f(x,y)dxdy.$

引理 3. 记满足上述定理的全体非负可测函数为$\mathcal{F}$. 则我们有

(i) 若$f,g\in\mathcal{F}$, $\alpha\in[0,\infty)$, 则$f+g,\alpha f\in\mathcal{F}$;

(ii) 若$f,g\in\mathcal{F}$, $f-g\ge 0$, $g\in L(\mathbb{R}^{p+q})$, 则$f-g\in\mathcal{F}$;

(iii) 若$f_k\in\mathcal{F}$为递增可测函数列，且$f(x,y)=\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x,y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^{p+g}$. 则$f\in\mathcal{F}$.

证明：(iii) 对几乎处处的x, $f_k(x,y)$看作y的函数都是可测函数，因此其逐点极限$f(x,y)$也是y的可测函数。我们还有几乎处处的收敛$\lim\limits_{k\to\infty}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^q}f_k(x,y)dy=\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)dy$. 于是$\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)dy$是$x$的可测函数。由非负渐升列的积分我们有

$$\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)dy\right)dx=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q}f_k(x,y)dy\right)dx=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{p+q}}f_k(x,y)dxdy=\int_{\mathbb{R}^{p+q}}f(x,y)dxdy.$$

证明：(ii) 由$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q}g(x,y)dy\right)dx=\int_{\mathbb{R}^{p+q}}g(x,y)dxdy<+\infty$, 对几乎处处的$x$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^q}g(x,y)dy<+\infty$, 也即$g(x,y)$作为$y$的函数是可积的，从而是几乎处处有限的。于是对几乎处处x, $f(x,y),g(x,y)$都

是y的可测函数，且后者还是y的可积函数(因此几乎处处有限)，于是$f(x,y)-g(x,y)$作为y的函数也是可测的，而且我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^q}[f(x,y)-g(x,y)]dy+\int_{\mathbb{R}^q}g(x,y)dy=\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)dy,\quad a.e.\, x\in\mathbb{R}^p\\ \Rightarrow&\int_{\mathbb{R}^q}[f(x,y)-g(x,y)]dy=\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)dy-\int_{\mathbb{R}^q}g(x,y)dy,\quad a.e.\, x\in\mathbb{R}^p.\end{aligned}$$

因此$\int_{\mathbb{R}^q}[f(x,y)-g(x,y)]dy$是$x$的可测函数。 对上面第一式积分

$$\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q}[f(x,y)-g(x,y)]dy\right)dx+\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q}g(x,y)dy\right)dx=\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)dy\right)dx.$$

我们还有

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}}[f(x,y)-g(x,y)]dxdy+\int_{\mathbb{R}^{p+q}}g(x,y)dxdy=\int_{\mathbb{R}^{p+q}}f(x,y)dxdy.$$

利用f,g的重积分和累次积分相等比较上述两式，并利用g的积分的有限性即可得到$f-g$的重积分和累次积分相等。

证明： Tonelli定理的总体证明思路: 由于非负可测函数总是可以写成非负可测简单函数渐升列的逐点极限，由引理，我们只需要证明非负可测简单函数属于$\mathcal{F}$. 因为非负可测简单函数是可测集的特征函数的线性组合，因此我们只需证明可测集的特征函数属于$\mathcal{F}$. 为表达的方便，我们记$\chi_E\in\mathcal{F}$为$E\in\mathcal{F}$.

第一步 钜体$I\times J\subset\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$总是满足$I\times J\subset\mathcal{F}$.

$$\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q}\chi_{I\times J}(x,y)dy\right)dx=\int_{\mathbb{R}^p}|J|\chi_I(x)dx=|I|\times|J|=\int_{\mathbb{R}^{p+q}}\chi_{I\times J}(x,y)dxdy.$$

第二步 任何开集$G\subset\mathcal{F}$. 事实上我们可以把开集G写成可列个互不相交的钜体的并集$G=\cup_k I_k$. 则

$$\chi_G(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{I_k}(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\chi_{I_k}(x)\in\mathcal{F}.$$

第三步 若E是一个测度有限的可测集，则我们可以找到一个G_δ集$H\subset\mathcal{F}$, 使得H是E的等测包。我们可以取开集列$G_k\supset E$, 使得$m(G_k\setminus E)<2^{-k}$. 不妨设这个开集列是递降的，令$H=\cap_k G_k$. 则$\chi_{G_1\setminus G_k}(x)=\chi_{G_1}(x)-\chi_{G_k}(x)\in\mathcal{F}$对每个正整数$k$成立。于是

$$\chi_{G_1\setminus H}(x)=\lim_{k\to\infty}\chi_{G_1\setminus G_k}(x)\in\mathcal{F}.$$

所以我们有$\chi_H(x)=\chi_{G_1}(x)-\chi_{G_1\setminus H}(x)\in\mathcal{F}$.

第四步 一切零测集$Z\in\mathcal{F}$. 事实上由第三步结论我们可以找到Z的等测包$H\in\mathcal{F}$. 从而我们有$\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q}\chi_H(x,y)dy\right)dx=0$. 这意味着$\int_{\mathbb{R}^q}\chi_H(x,y)dy=0$, $a.e.\, x\in\mathbb{R}^p$. 这也就说明对几乎处处的x, $\chi_H(x,y)$看作y的函数几乎处处为零。因为$E\subset H$, 所以$\chi_E(x,y)\le\chi_H(x,y)$满足相同的性质。这也就意味着对几乎处处的$x$, $\chi_E(x,y)$看作y的函数是可测的，且$\int_{\mathbb{R}^q}\chi_E(x,y)dy=0$. 因

此该积分看作x的函数也是可测的，且$\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q}\chi_E(x,y)dy\right)dx=0=\int_{\mathbb{R}^{p+q}}\chi_E(x,y)dxdy.$

第五步 任何测度有限的集合$E\subset\mathcal{F}$. 由第三步，我们可以找到一个G_δ集$H\subset\mathcal{F}$，使得H是E的等测包。因为$m(H\setminus E)=0$, 由第四步，我们有$H\setminus E\in\mathcal{F}$. 因此$E=H\setminus(H\setminus E)\in\mathcal{F}$.

第六步 对任何可测集$E\subset\mathbb{R}^n$, 我们定义一个递增的可测集合列

$$E_k=E\cap B(0,k)\in\mathcal{F}.$$

则我们有递增函数列$\chi_{E_k}(x)\to\chi_E(x)$，由引理，我们得到$\chi_E(x)\in\mathcal{F}$.

注意：Tonelli定理中，我们也可以先对x积分。

$$\int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p}f(x,y)dx\right)dy=\int_{\mathbb{R}^{p+q}}f(x,y)dxdy$$

定理 5 (Fubini定理)**.** 设$f(x,y)\in L(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q)$，则有

(A) 对于几乎处处的$x\in\mathbb{R}^p$, $f(x,y)$作为y的函数是可积的；对于几乎处处的$y\in\mathbb{R}^p$, $f(x,y)$作为x的函数是可积的；

(B) $\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)dy$作为$x$的函数是可积的；$\int_{\mathbb{R}^p}f(x,y)dx$作为$y$的函数是可积的；

(C) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{p+q}}f(x,y)dxdy=\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)dy\right)dx=\int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p}f(x,y)dx\right)dy.$

证明：由于$f_+(x,y),f_-(x,y)$为非负可测函数，由Tonelli定理，我们有对几乎处处的$x\in\mathbb{R}^p$, $f_+(x,y),f_-(x,y)$作为y的函数是可测的，积分$\int_{\mathbb{R}^q}f_+(x,y)dy$, $\int_{\mathbb{R}^q}f_-(x,y)dy$作为$x$的函数是可积的

$$\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q}f_+(x,y)dy\right)dx=\int_{\mathbb{R}^{p+q}}f_+(x,y)dxdy<+\infty.$$

这也就意味着对几乎处处的$x\in\mathbb{R}^p$，积分$\int_{\mathbb{R}^q}f_+(x,y)dy$, $\int_{\mathbb{R}^q}f_-(x,y)dy$是有限的，于是对几乎处处的$x\in\mathbb{R}^p$, $f_+(x,y),f_-(x,y)$作为y的函数是可积的，因此$f(x,y)$作为y的函数也是可积的。进一步我们有

$$\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)dy=\int_{\mathbb{R}^q}f_+(x,y)dy-\int_{\mathbb{R}^q}f_-(x,y)dy,\quad a.e.\,x\in\mathbb{R}^p.$$

于是$\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)dy$是$x$的可积函数，且

$$\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)dy\right)=\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q}f_+(x,y)dy\right)dx-\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q}f_-(x,y)dy\right)dx=\int_{\mathbb{R}^{p+q}}f(x,y)dxdy.$$

一般直积上的Tonelli定理和Fubini定理

定理 6 (Tonelli定理)**.** 设$f(x,y)$是$E_1\times E_2$上的非负可测函数，其中$E_1\subset\mathbb{R}^p$, $E_2\subset\mathbb{R}^q$都是可测集，则有

(A) 对于几乎处处的$x\in E_1$, $f(x,y)$作为y的函数在E_2上是可测的；对于几乎处处的$y\in E_2$, $f(x,y)$作为x的函数在E_1上是可测的；

(B) $\int_{E_2} f(x,y)dy$作为x的函数在E_1是可测的；$\int_{E_1} f(x,y)dx$作为y的函数在E_2上是可测的；

(C) $\displaystyle\int_{E_1\times E_2} f(x,y)dxdy = \int_{E_1}\left(\int_{E_2} f(x,y)dy\right)dx = \int_{E_2}\left(\int_{E_1} f(x,y)dx\right)dy.$

证明：令$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in E_1\times E_2; \\ 0, & (x,y)\notin E_1\times E_2. \end{cases}$ 然后对$f(x,y)$应用$\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$上的Tonelli定理即可。

定理 7 (Fubini定理)**.** 设$f(x,y)\in L(E_1\times E_2)$，其中$E_1\subset\mathbb{R}^p$, $E_2\subset\mathbb{R}^q$都是可测集，则有

(A) 对于几乎处处的$x\in E_1$, $f(x,y)$作为y的函数在E_2上是可积的；对于几乎处处的$y\in E_2$, $f(x,y)$作为x的函数E_1上是可积的；

(B) $\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)dy$作为$x$的函数$E_1$上是可积的；$\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)dx$作为$y$的函数在$E_2$上是可积的；

(C) $\displaystyle\int_{E_1\times E_2} f(x,y)dxdy = \int_{E_1}\left(\int_{E_2} f(x,y)dy\right)dx = \int_{E_2}\left(\int_{E_1} f(x,y)dx\right)dy.$

例子 3. 设$f\in L([0,\infty))$, $a>0$, 则函数$\int_0^\infty f(y)e^{-xy}dy$在区间$[0,\infty)$是$x$的连续函数，且我们有奇异积分

$$\int_0^\infty\left(\sin ax\int_0^\infty f(y)e^{-xy}dy\right)dx = \int_0^\infty \frac{af(y)}{a^2+y^2}dy.$$

证明：若$x_k\in[0,\infty)$且$x_k\to x_0$，由控制收敛定理，我们有$\int_0^\infty f(y)e^{-x_k y}dy\to\int_0^\infty f(y)e^{-x_0 y}dy$. 于是$\int_0^\infty f(y)e^{-xy}dy$是$x\in[0,\infty)$的连续函数。 不难验证$(\sin ax)f(y)e^{-xy}\in L([0,R]\times[0,\infty))$:

$$\int_{[0,R]\times[0,\infty)} \left|(\sin ax)f(y)e^{-xy}\right| dxdy \le \int_{[0,R]\times[0,\infty)} |f(y)|dxdy = R\int_0^\infty |f(y)|dy < +\infty.$$

于是由Fubini定理，我们有

$$\int_0^R\left(\int_0^\infty(\sin ax)f(y)e^{-xy}dy\right)dx = \int_0^\infty\left(\int_0^R(\sin ax)f(y)e^{-xy}dx\right)dy$$
$$\int_0^R\left(\sin ax\int_0^\infty f(y)e^{-xy}dy\right)dx = \int_0^\infty \frac{a-ae^{-Ry}\cos aR - ye^{-Ry}\sin aR}{a^2+y^2}f(y)dy$$

其中最后一个积分的被积函数$g_R(y)$满足$\displaystyle\lim_{R\to\infty} g_R(y) = \frac{a}{a^2+y^2}$, $y>0$. 且有不等式

$$|g_R(y)| \le \frac{a+|a\cos aR + y\sin aR|e^{-Ry}}{a^2+y^2} \le \frac{a+\sqrt{a^2+y^2}}{a^2+y^2} \le \frac{2}{a} \Rightarrow |g_R(y)f(y)| \le \frac{2}{a}|f(y)|.$$

由控制收敛定理就可得证。

2.2 积分的几何意义和分布函数

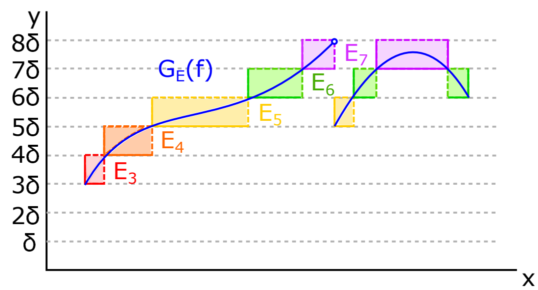
定理 8. 设$f(x)$是$E\subset\mathbb{R}^n$上的非负可测实值函数，则其图形$G_E(f) = \{(x,f(x))\in\mathbb{R}^{n+1} : x\in E\}$是$\mathbb{R}^{n+1}$上的零测集。

证明：若$m(E) < +\infty$, 任取$\delta > 0$并令$E_k = \{x \in E : k\delta \le f(x) < (k+1)\delta\}$, 我们有

$$G_E(f) \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k \times [k\delta, k\delta + \delta).$$

于是$m^*(G_E(f)) \le \sum_{k=0}^{\infty} m(E_k \times [k\delta, k\delta+\delta)) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta m(E_k) = \delta m(E)$. 令$\delta \to 0$, 我们有$m^*(G_E(f)) = 0$. 若$m(E) = +\infty$, 我们可以把$E$分解为测度有限集合之并集

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \qquad \Rightarrow \qquad G_E(f) = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_{E_k}(f). \qquad \Rightarrow \qquad m(G_E(f)) = 0.$$



定理 9 (积分的几何意义)**.** 设$f(x)$是定义在可测集$E \subset \mathbb{R}^n$上的非负实值函数，记

$$\underline{G}_E(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in E, 0 \le y \le f(x)\},$$

并称它为$y = f(x)$的下方图形。则$f(x)$是可测函数当且仅当$\underline{G}_E(f)$是$\mathbb{R}^{n+1}$中的可测集。且

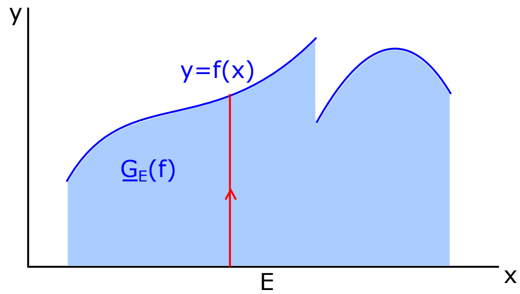
$$m(\underline{G}_E(f)) = \int_E f(x)dx.$$

证明：若$f(x)$是可测函数，则函数$g(x, y) = y - f(x)$是$(x, y) \in E \times [0, \infty)$上的可测函数。则$\underline{G}_E(f) = \{(x, y) \in E \times [0, \infty) : g(x, y) \le 0\}$是$\mathbb{R}^{n+1}$中的可测集。反过来，若$\underline{G}_E(f)$是$\mathbb{R}^{n+1}$中的可测集，令$\chi(x, y)$为$\underline{G}_E(f)$的特征函数，则$\chi(x, y)$可以看作定义在$E \times [0, \infty)$上的可测函数，我们可以应用Tonelli定理得到$f(x) = \int_0^{\infty} \chi(x, y)dy$是$E$上的可测函数。且

$$m(\underline{G}_E(f)) = \int_{E\times[0,\infty)} \chi(x, y)dxdy = \int_E \left(\int_0^{\infty} \chi(x, y)dy\right) dx = \int_E f(x)dx.$$

定义 1 (分布函数)**.** 设非负实值函数f在$E \subset \mathbb{R}^n$上可测，则称$f_*(\lambda) = m(\{x \in E : f(x) > \lambda\})$, $\lambda > 0$为$f(x)$在E上的分布函数。显然$f_*(\lambda)$是$(0, \infty)$上的非负递减函数。

定理 10. 设$F \in C^1([0, \infty))$, $F(0) = 0$, $F'(x) \ge 0$. 则定义在可测集$E \subset \mathbb{R}^n$上的非负实值可测函数$f(x)$和它对应的分布函数$f_*(\lambda)$满足$\int_E F(f(x))dx = \int_0^{\infty} F'(\lambda)f_*(\lambda)d\lambda$

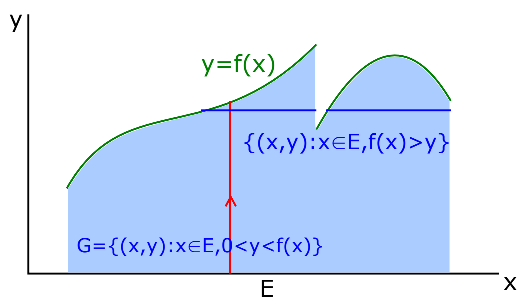


证明：取可测集$G=\{(x,y)\in E\times\mathbb{R}:0<y<f(x)\}$的特征函数$\chi_G(x,y)$，并考虑非负可测函数$F'(y)\chi_G(x,y)$在$E\times(0,\infty)$上的积分

$$\int_E\left(\int_0^\infty F'(y)\chi_G(x,y)dy\right)dx=\int_0^\infty\left(\int_E F'(y)\chi_G(x,y)dx\right)dy$$

$$\int_E\left(\int_0^{f(x)} F'(y)dy\right)dx=\int_0^\infty\left(F'(y)\int_E \chi_{\{x\in E:f(x)>y\}}(x)dx\right)dy$$

$$\int_E F(f(x))dx=\int_0^\infty F'(y)f_*(y)dy.$$



时变函数讲义 第十三部分

沈瑞鹏

天津大学数学学院

2023年5月

1 卷积和光滑逼近

定义 1. 设$f(x), g(x)$是$\mathbb{R}^n$上的可测函数，若积分$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$存在，则称此积分为$f$和$g$的卷积，记为$(f * g)(x)$.

定理 1 (卷积的对称性)**.** 卷积$f * g$对f, g是对称的，也即$(f * g)(x) = (g * f)(x)$.

证明： 由积分的平移不变性和数乘性质，我们有

$$\begin{aligned}(f * g)(x) =& \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \\ =& \int_{\mathbb{R}^n} f(x-(x+y))g(x+y)dy \\ =& \int_{\mathbb{R}^n} f(-y)g(x+y)dy \\ =& \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy \\ =& (g * f)(x).\end{aligned}$$

定理 2 (可积函数的卷积)**.** 若$f, g \in L(\mathbb{R}^n)$, 则$(f * g)(x)$对几乎处处的$x \in \mathbb{R}^n$存在，且是$\mathbb{R}^n$上的可积函数，进一步有

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x)dx = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx\right) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|dx\right)$$

证明： 我们先验证$f(x-y)g(y)$是$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$上的可积函数。

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dxdy &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}^n}\left(|g(y)|\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|dx\right)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(|g(y)|\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx\right)dy = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|dx\right) < +\infty\end{aligned}$$

因此由Fubini定理，$f(x-y)g(y)$对几乎处处的$x \in \mathbb{R}^n$都是y的可积函数($(f * g)(x)$对几乎处处

的$x\in\mathbb{R}^n$存在)，且$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)dy$是$x$的可积函数。进一步

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}(f*g)(x)dx&=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)dy\right)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)dx\right)dy\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\left(g(y)\int_{\mathbb{R}^n}f(x)dx\right)dy=\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(x)dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}g(x)dx\right)\\\int_{\mathbb{R}^n}|(f*g)(x)|dx&=\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)dy\right|dx\le\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)g(y)|dy\right)dx\\&=\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}|f(x-y)||g(y)|dxdy=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(x)|dx\right).\end{aligned}$$

定理 3 (可积函数和有界函数的卷积)**.** 设$f\in L(\mathbb{R}^n)$，$g(x)$是$\mathbb{R}^n$上有界可测函数，则$F(x)=(f*g)(x)$是$\mathbb{R}^n$上一致连续的有界函数。

证明： 首先，我们已经知道对任何$x\in\mathbb{R}^n$，$f(x-y)g(y)$是y的可测函数，我们可以验证它的可积性

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)g(y)|dy\le\int_{\mathbb{R}^n}M|f(x-y)|dy=M\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+y)|dy=M\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|dy<+\infty.$$

这里M是$|g(x)|$的上界。于是$(f*g)(x)$对任何$x\in\mathbb{R}^n$都有定义且$|(f*g)(x)|\le M\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|dy$. 进一步我们有

$$\begin{aligned}|F(x+h)-F(x)|&=\left|\int_{\mathbb{R}^n}(f(x+h-y)-f(x-y))g(y)dy\right|\\&\le\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+h-y)-f(x-y)||g(y)|dy\\&\le M\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+h-y)-f(x-y)|dy\\&\le M\int_{\mathbb{R}^n}|f(y+h)-f(y)|dy\to 0,\quad \text{当}h\to 0.\end{aligned}$$

这里我们用到了可积函数积分的平均连续性。

定理 4 (用卷积逼近可积函数)**.** 令$\varphi(x)$是一个非负可测函数，且$\mathrm{Supp}(\varphi)\subset B(0,\delta)$, $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx=1$. 则对任何$f\in L(\mathbb{R}^n)$有

$$\int_{\mathbb{R}^n}|(f*\varphi)(x)-f(x)|dx\le\sup_{|h|<\delta}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+h)-f(x)|dx.$$

证明：我们有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |(f*\varphi)(x)-f(x)|\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi(y)dy - f(x)\right| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y)-f(x)]\varphi(y)dy\right| dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{B(0,\delta)} |f(x-y)-f(x)|\varphi(y)dy\right) dx \\
&= \int_{B(0,\delta)}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)-f(x)|\varphi(y)dx\right) dy \\
&\le \int_{B(0,\delta)}\left[\varphi(y)\sup_{|h|<\delta}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h)-f(x)|dx\right] dy \\
&= \sup_{|h|<\delta}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h)-f(x)|dx.
\end{aligned}$$

推论 1 (卷积的光滑性)**.** 令$\varphi_k(x)$是非负可测函数，且$\mathrm{Supp}(\varphi_k)\subset B(0,1/k)$，$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_k(x)dx=1$. 则对任何$f\in L(\mathbb{R}^n)$有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|(f*\varphi_k)(x)-f(x)|dx=0.$$

证明：$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}|(f*\varphi_k)(x)-f(x)|dx\le\sup_{|h|<1/k}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+h)-f(x)|dx\to 0.$

定理 5. 设$\varphi(x)$是$\mathbb{R}^n$上一个光滑的，具有紧支集的函数，$f\in L(\mathbb{R}^n)$, 则$(\varphi*f)(x)$是一个光滑的函数。

证明：对每个$x\in\mathbb{R}^n$, 函数$\varphi(x-y)f(y)$是y的可积函数；对几乎处处的$y\in\mathbb{R}^n$, 函数$\varphi(x-y)f(y)$是x的可微函数，且我们有控制函数

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[\varphi(x-y)f(y)]=\varphi_i(x-y)f(y)\qquad |\varphi_i(x-y)f(y)|\le M|f(y)|\in L(\mathbb{R}^n).$$

使用控制收敛定理，我们可以证明$(\varphi*f)(x)$的偏导数存在

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi*f)(x)=\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-y)f(y)dy=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_i(x-y)f(y)dy=(\varphi_i*f)(x).$$

且是连续函数，类似的我们可以证明$(\varphi*f)(x)$的各个偏导数都连续，因此是光滑函数。

定理 6 (用光滑函数逼近可积函数)**.** 取一个非负的光滑函数$\varphi(x)$, 满足$\mathrm{Supp}(\varphi)\subset B(0,1)$, $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx=1$. 令$\varphi_k(x)=k^n\varphi(kx)$, 则对任意$f\in L(\mathbb{R}^n)$, 卷积$(f*\varphi_k)(x)$都是光滑函数，且满足依$L^1$的收敛

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|(f*\varphi_k)(x)-f(x)|\,dx=0.$$

证明：只要观察到$\mathrm{Supp}(\varphi_k)\subset B(0,1/k)$和$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_k(x)dx=1$.

例子 1. 证明不存在$u\in L(\mathbb{R}^n)$，使得对任意$f\in L(\mathbb{R}^n)$, 有$(u*f)(x)=f(x)$, $a.e.\,x\in\mathbb{R}^n$.

证明：若这样的可积函数u存在，我们取$f(x) = \chi_{B(0,\delta)}(x)$, 其中$\delta > 0$是一个小的正实数。则

$$(u * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(0,\delta)}(x-y)u(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(x,\delta)}(y)u(y)dy = \int_{B(x,\delta)} u(y)dy.$$

于是对于几乎处处的$x \in B(0,\delta)$, 我们有$\int_{B(x,\delta)} u(y)dy = 1$. 这与积分的绝对连续性相矛盾。

2 单调函数的可微性

2.1 Vitali覆盖定理

定义 2. 设$E \subset \mathbb{R}$, $\Gamma = \{I_\alpha\}$是一个区间族，若对任何$x \in E$和$\varepsilon > 0$, 存在$I_\alpha \in \Gamma$, 使得$x \in I_\alpha$, $|I_\alpha| < \varepsilon$, 则称Γ是E的一个Vitali覆盖。

定理 7 (Vitali覆盖定理)**.** 设$E \subset \mathbb{R}$且$m^*(E) < +\infty$. 若Γ是E的Vitali覆盖，则对任意的$\varepsilon > 0$, 存在有限个互不相交的区间 $I_j \in \Gamma (j = 1, 2, \cdots, n)$, 使得 $m^*\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) < \varepsilon$.

证明：第一步 我们不妨设Γ是一个闭区间族。我们还可以找到开集$G \supset E$, 使得$m(G) < +\infty$, 并令$\Gamma' = \{I_\alpha \in \Gamma : I_\alpha \subset G\}$. 下面我们验证$\Gamma'$也是$E$的Vitali覆盖。给定$x \in E \subset G$, $\varepsilon > 0$, 由于G是一个开集，我们可以找到$\delta > 0$, 使得$(x-\delta, x+\delta) \subset G$. 令$\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon, \delta\}$, 由$\Gamma$是$E$的Vitali覆盖，一定存在$I_\alpha \in \Gamma$, 使得$x \in I_\alpha$, 且$|I_\alpha| < \varepsilon_1 = \min\{\delta, \varepsilon\}$. 于是$I_\alpha \subset (x-\delta, x+\delta) \subset G$, 因此$I_\alpha \in \Gamma'$, 于是$\Gamma'$也是$E$的Vitali覆盖。因此我们不妨假设Vitali覆盖中的每个区间$I_\alpha \subset G$.

第二步 下面我们选取一个Γ中一个区间序列I_j, 使得I_j尽量完整地覆盖E. 假设前$j-1$个区间已经选好，我们令$\Gamma_j = \{I_\alpha \in \Gamma : I_\alpha \cap I_k = \varnothing, k = 1, 2, \cdots, j-1\}$, $\delta_j = \sup\{|I_\alpha| : I_\alpha \in \Gamma_j\}$. 我们选取$I_j \in \Gamma_j$, 使得$|I_j| > \delta_j/2$. 由测度的可数可加性我们有

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| = m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right) \leq m(G) < +\infty.$$

第二步的说明 若经有限步后，选取过程结束，即$\Gamma_n = \varnothing$. 则$E \subset I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_{n-1}$. 于是定理得证。事实上，如果$E$不能被前面$n-1$个区间覆盖，我们可以取$x \in E$, $x \notin I_j$, $j = 1, 2, \cdots, n-1$. 由于I_j都是闭区间，我们可以找到$\delta > 0$, 使得$(x-\delta, x+\delta) \cap I_j = \varnothing$, $j = 1, 2, \cdots, n-1$. 于是由Vitali覆盖的性质，存在$I_\alpha \in \Gamma$, 使得$x \in I_\alpha$, $|I_\alpha| < \delta$, 于是$I_\alpha \cap I_j = \varnothing$, $j = 1, 2, \cdots, n-1$, $I_\alpha \in \Gamma_n$, 得到矛盾。

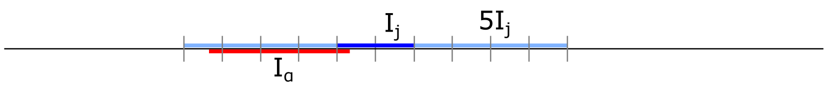
第三步 对任何给定的$\varepsilon > 0$, 我们选取n, 使得 $\sum_{j=n+1}^{\infty} |I_j| < \frac{\varepsilon}{5}$. 则前$n$个区间就满足定理结论的要求。事实上我们有($5I_j$是与区间$I_j$具有相同中点，长度为$5|I_j|$的区间)

$$E \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j \subset \bigcup_{j=n+1}^{\infty} 5I_j \quad \Rightarrow \quad m^*\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} m^*(5I_j) = 5\sum_{j=n+1}^{\infty} |I_j| < \varepsilon.$$

下面我们验证上述的包含关系成立。设$x \in E$, $x \notin I_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$, 按照上面介绍的方法，我们可以找到$I_\alpha \in \Gamma$, 使得$I_\alpha \cap I_j = \varnothing$, $j = 1, 2, \cdots, n$. 这个I_α一定和$I_{n+1}, I_{n+2}, \cdots$中的某一个区间相交，否则$I_\alpha \in \Gamma_j$. 我们可以找到一个j, 使得$|I_j| < |I_\alpha|/2$. 这与I_j的选取方法矛盾

$$|I_j| > \sup\{|I| : I \in \Gamma_j\}/2 \geq |I_\alpha|/2.$$

于是我们不妨假定I_j是与I_α相交的区间中指标最小的一个($j \geq n+1$). 则$I_\alpha \in \Gamma_j$, 于是$|I_j| > |I_\alpha|/2$. 这意味着$x \in I_\alpha \subset 5I_j$.



推论 2. 设$E \subset \mathbb{R}$且$m^*(E) < +\infty$. 若Γ是E的Vitali覆盖，则存在可数个互不相交的区间 $I_j \in \Gamma$, 使得 $m(E \setminus \cup I_j) = 0$.

证明：根据以上证明过程，我们得到下列二者至少有一个成立：一，E可以被有限个互不相交的区间$I_j \in \Gamma$覆盖. 二，存在一个互不相交的无穷序列$\{I_j\} \subset \Gamma$, 使得

$$m^*\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) \leq 5 \sum_{j=n+1}^{\infty} |I_j|, \qquad \Rightarrow \qquad m^*\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right) = 0.$$

2.2 勒贝格定理

定义 3 (Dini导数)**.** 设$f(x)$是定义在$\mathbb{R}$中点x_0的一个临域上的实值函数，我们定义

$$D^+f(x_0) = \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad D_+f(x_0) = \underline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$D^-f(x_0) = \overline{\lim_{h\to 0^-}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad D_-f(x_0) = \underline{\lim_{h\to 0^-}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

分别称它们为$f(x)$在x_0点的右上导数，右下导数，左上导数，左下导数，统称Dini导数。

例子 2. 设$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 则$D^+f(0) = D^-f(0) = 1$, $D_+f(0) = D_-f(0) = -1$.

证明：$\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \sin \dfrac{1}{h}$在区间$[-1, 1]$中震荡。

定理 8 (勒贝格定理)**.** 若$f(x)$是定义在$[a, b]$上的递增实值函数，则$f(x)$的不可微点组成的集合为零测集，且

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a).$$

证明：第一部分 首先证明广义导数几乎处处存在，即广义极限$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$对几乎处处的$x$存在。我们知道Dini导数满足$D^+f(x) \geq D_+f(x)$, $D^-f(x) \geq D_-f(x)$. 因此我们只需证明不等式$D_-f(x) \geq D^+f(x)$, $D_+f(x) \geq D^-f(x)$几乎处处成立。我们以$D_-f(x) \geq D^+f(x)$为例，令

$$\begin{aligned} E =& \{x \in (a, b) : D_-f(x) < D^+f(x)\} \\ =& \bigcup_{r,s\in\mathbb{Q}^+, r<s} E_{r,s} = \bigcup_{r,s\in\mathbb{Q}^+, r<s} \{x \in (a, b) : D_-f(x) < r < s < D^+f(x)\} \end{aligned}$$

因此我们只需证明每个$E_{r,s}$是零测集。

第一步 若存在正有理数$r < s$, 使得$m^*(E_{r,s}) > 0$. 对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 我们可以找到开集G, 满足$E_{r,s} \subset G \subset (a, b)$, $m(G) < m^*(E_{r,s}) + \varepsilon$. 下面我们构造一个$E_{r,s}$的Vitali覆盖

$$\Gamma = \{[x-h, x] \subset G : x \in E_{r,s}, h > 0, f(x) - f(x-h) \leq rh\}.$$

由Vitali覆盖定理，我么可找到有限个互不相交的区间$[x_i - h_i, x_i] \in \Gamma$, $i = 1, 2, \cdots, m$, 使得

$$m^*\left(E_{r,s} \setminus \bigcup_{i=1}^{m}[x_i - h_i, x_i]\right) < \varepsilon, \qquad m^*\left(E_{r,s} \cap \bigcup_{i=1}^{m}[x_i - h_i, x_i]\right) > m^*(E_{r,s}) - \varepsilon.$$

为简便我们记$G_1 = \bigcup_{i=1}^{m}(x_i - h_i, x_i)$和$B = E_{r,s} \cap G_1$, 则$m^*(B) > m^*(E_{r,s}) - \varepsilon$.

第二步 我们可以再构造一个B的Vitali覆盖

$$\Gamma' = \{[y, y+k] \subset G_1 : y \in B, k > 0, f(y+k) - f(y) \geq sk\}.$$

由Vitali覆盖定理，我么可找到有限个互不相交的区间$[y_j, y_j + k_j] \in \Gamma'$, $j = 1, 2, \cdots, n$, 使得

$$m^*\left(B \setminus \bigcup_{j=1}^{n}[y_j, y_j + k_j]\right) < \varepsilon, \qquad m^*\left(B \cap \bigcup_{j=1}^{n}[y_j, y_j + k_j]\right) > m^*(B) - \varepsilon.$$

因此$\sum_{j=1}^{n} k_j = m\left(\bigcup_{j=1}^{n}[y_j, y_j + k_j]\right) > m^*(B) - \varepsilon > m^*(E_{r,s}) - 2\varepsilon$.

第三步 每个区间$[y_j, y_j + k_j] \subset G_1 = \bigcup_{i=1}^{m}(x_i - h_i, x_i)$. 因此包含在某个区间$[x_i - h_i, x_i]$的内部。于是我们有

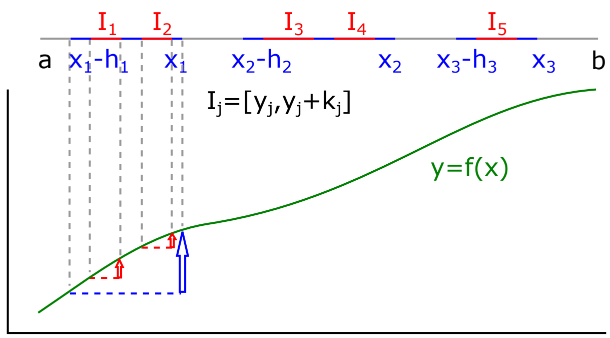
$$\sum_{j=1}^{n} sk_j \leq \sum_{j=1}^{n}[f(y_j + k_j) - f(y_j)] \leq \sum_{i=1}^{m}[f(x_i) - f(x_i - h_i)] \leq \sum_{i=1}^{m} rh_i.$$

于是$s(m^*(E_{r,s}) - 2\varepsilon) \leq \sum_{j=1}^{n} sk_j \leq \sum_{i=1}^{m} rh_i \leq rm(G) \leq r(m^*(E_{r,s}) + \varepsilon)$. 令$\varepsilon \to 0$我们得到矛盾。

第二部分 我们已经证明了广义导数$f'(x)$几乎处处存在。因此我们有几乎处处的极限

$$f'(x) = \lim_{k \to \infty} \frac{f(x + 1/k) - f(x)}{1/k}.$$

其中当$x + 1/k > b$时，我们定义$f(x + 1/k) = f(b)$. 因为$g_k = k[f(x + 1/k) - f(x)]$是非负可测函



数，我们得到$f'(x)$必然也是非负可测函数，且由Fatou引理我们有

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f'(x)dx \leq & \varliminf_{k\to\infty} \int_a^b k[f(x+1/k)-f(x)]dx \\
&= \varliminf_{k\to\infty} \left[k\int_{a+1/k}^{b+1/k} f(x)dx - k\int_a^b f(x)dx\right] \\
&= \varliminf_{k\to\infty} \left[k\int_{b}^{b+1/k} f(x)dx - k\int_a^{a+1/k} f(x)dx\right] \\
&\leq f(b)-f(a)
\end{aligned}
$$

这意味着$f'(x)\in L([a,b])$，广义导数$f'(x)$几乎处处有限，$f(x)$几乎处处可微。

例子 3. 设$E\subset(a,b)$是一个非空零测集，则存在定义在$[a,b]$上的连续且单调递增的函数$f(x)$，使得$f'(x)=+\infty$, $x\in E$. 因此$f(x)$在E中任一点不可微。

证明： 对每个$k\in\mathbb{N}$，取一个开集$G_k\supset E$，使得$m(G_k)<2^{-k}$. 我们定义

$$f_k(x)=m([a,x]\cap G_k),\quad x\in[a,b];$$

并令$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$. 下面我们验证$f(x)$满足题设条件。

- 若$x<y$, $x,y\in[a,b]$，则我们有

  $$f_k(y)-f_k(x)=m([a,y]\cap G_k)-m([a,x]\cap G_k)=m([x,y]\cap G_k)\leq y-x.$$

  于是$f_k(x)$是连续函数，我们还有$|f_k(x)|\leq m(G_k)<2^{-k}$. 因此定义$f(x)$的级数是一致收敛的，于是$f(x)$也是连续的。

- 由上面的等式，若$x<y$，则$f_k(y)\geq f_k(x)$，因此$f_k(x)$是递增的，于是$f(x)$也是递增的。

- 设$x\in E$，则$x\in G_k$，由于G_k是开集，存在$\delta_k>0$，使得$(x-\delta_k,x+\delta_k)\subset G_k$，则当$0<h<\min\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n\}$时，我们有

  $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k(x+h)-f_k(x)}{h}\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k(x+h)-f_k(x)}{h}=\sum_{k=1}^{n}\frac{m([x,x+h])}{h}=n.$$

  于是$f'(x)=+\infty$.

2.3 Fubini逐项微分定理

定理 9 (Fubini逐项微分定理)**.** 设$\{f_n(x)\}$是$[a,b]$上的递增函数列，且级数$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在$[a,b]$上收敛，则

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}f_n(x), \qquad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \qquad a.e.\, x \in [a,b] \qquad .$$

证明：令$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$为余项，容易看出$R_n(x)$也是递增函数，因此

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + R_n(x) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) + R_n'(x), \quad a.e.\, x \in [a,b]$$

因此我们只需证明$\lim_{n\to\infty} R_n'(x) = 0,\ a.e.\, x \in [a,b]$. 由等式$R_n(x) = f_{n+1}(x) + R_{n+1}(x)$我们有$R_n'(x) = f_{n+1}'(x) + R_{n+1}'(x),\ a.e.\, x \in [a,b]$. 因此$\{R_n'(x)\}$是一个几乎处处递降的非负函数列。因此我们总有几乎处处的极限

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} R_n'(x).$$

我们下面验证非负可测函数$r(x)$几乎处处为零。事实上我们有

$$\int_a^b r(x)dx \le \varliminf_{n\to\infty}\int_a^b R_n'(x)dx \le \varliminf_{n\to\infty}[R_n(b) - R_n(a)] = 0.$$

例子 4. 设$\mathbb{Q}\cap(0,1) = \{r_1, r_2, r_3, \cdots\}$, 并定义$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, r_n); \\ 2^{-n}, & x \in [r_n, 1]. \end{cases}$ 证明$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$是闭区间$[0,1]$上的严格递增函数，但$f'(x) = 0,\ a.e.\, x \in [0,1]$.

证明：显然我们有$f_n'(x) = 0,\ a.e.\, x \in [0,1]$, 由Fubini逐项微分定理可以得到$f'(x)$几乎处处为零。下面验证$f(x)$是严格递增的，若$x, y \in [0,1]$, $x < y$, 我们总可以找到$r_n \in \mathbb{Q}$, 使得$x < r_n < y$. 则我们有

$$f(y) - f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}[f_k(y) - f_k(x)] \ge f_n(y) - f_n(x) = 2^{-n} > 0.$$

因此$f(x)$是闭区间$[0,1]$上的严格递增函数。

例子 5. 试问是否有定义在$[0,1]$上的连续且严格单调递增的函数$f(x)$, 使得$f'(x) = 0,\ a.e.\, x \in [0,1]$.

证明：考虑定义在$[0,1]$上的Cantor函数$\Phi(x)$, 这个函数是连续的，单调递增的，现在我们验证$\Phi'(x)$几乎处处为零。事实上，令$\{I_k\}$为构造Cantor集时移除的那些开区间组成的集合列，我们已知Cantor函数$\Phi(x)$在每个I_k都是常数，因此

$$\Phi'(x) = 0,\ x \in I_k \quad \Rightarrow \quad \Phi'(x) = 0,\ x \in [0,1]\setminus C.$$

这个函数不是严格单调递增，但是我们还是有$\Phi(3^{-k}) = 2^{-k} > 0$, 因此$x > 0$时$\Phi(x) > 0$. 下面我们补充定义$\Phi(x) = 0,\ x < 0$然后构造满足题目要求的函数$f(x)$. 补充定义后的Cantor函数$\Phi(x)$仍

然是连续的，单调递增的，且导数$\Phi'(x)$几乎处处为零。我们假设$\mathbb{Q}\cap(0,1)=\{r_1,r_2,r_3,\cdots\}$，并定义

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\Phi(x-r_k),\qquad x\in[0,1].$$

这个连续函数组成的级数是一致收敛的，因此和函数$f(x)$是连续的，由Fubini逐项微分定理可以得到$f'(x)$几乎处处为零。下面我们验证$f(x)$是严格单调递增的。设$x,y\in[0,1]$且$x<y$，我们取$x<r_n<y$，$r_n\in\mathbb{Q}$，则

$$f(y)-f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}[\Phi(y-r_n)-\Phi(x-r_n)]\geq 2^{-n}\Phi(y-r_n)>0.$$

时变函数讲义 第十四部分

沈瑞鹏

天津大学数学学院

2023年6月

1 有界变差函数

定义 1. 设$f(x)$是定义在$[a,b]$上的实值函数，作分划$\Delta: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$和相应的和

$$v_\Delta=\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|,$$

称之为$f(x)$在$[a,b]$上的变差，作$\bigvee\limits_a^b(f)=\sup\{v_\Delta:\Delta\text{为}[a,b]\text{的任一分划}\}$, 并称它为$f(x)$在$[a,b]$上的全变差. 若$\bigvee\limits_a^b(f)<+\infty$, 则称$f(x)$是$[a,b]$上的有界变差函数，其全体记为$BV([a,b])$.

例子 1. 定义在$[a,b]$上的单调函数$f(x)$都是有界变差函数。

证明：不妨设$f(x)$是单调递增函数，则

$$v_\Delta=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]=f(x_n)-f(x_0)=f(b)-f(a).$$

例子 2. 定义在$[a,b]$上的李普西兹函数$f(x)$都是有界变差函数。

证明：设$|f(x)-f(y)|\le M|x-y|$, 则对任何分划$\Delta: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$

$$v_\Delta=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\le\sum_{i=1}^{n}M(x_i-x_{i-1})=M(b-a).$$

例子 3. 函数$f(x)=\begin{cases}x\cos\frac{\pi}{x}, & x>0;\\ 0, & x=0;\end{cases}$ 不是$[0,1]$上的有界变差函数。

证明：取分划$\Delta: 0<1/2n<1/(2n-1)<1/(2n-2)<\cdots<1/2<1$, 我们有

$$\begin{aligned}v_\Delta&=\left|f(0)-f(\frac{1}{2n})\right|+\left|f(\frac{1}{2n})-f(\frac{1}{2n-1})\right|+\left|f(\frac{1}{2n-1})-f(\frac{1}{2n-2})\right|+\cdots+\left|f(\frac{1}{2})-f(1)\right|\\&=\left|0-\frac{1}{2n}\right|+\left|\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-1}\right|+\left|-\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n-2}\right|+\cdots+\left|\frac{1}{2}+1\right|\\&\ge\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-2}+\cdots+1\end{aligned}$$

因此$\bigvee_{0}^{1}(f)=\sup v_\Delta=+\infty$

定理 1. 设$f(x)$和$g(x)$都是$[a,b]$上的实值函数，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 则$\bigvee_{a}^{b}(\alpha f+\beta g)\leq|\alpha|\bigvee_{a}^{b}(f)+|\beta|\bigvee_{a}^{b}(g)$.

证明： 对任何分划$\Delta: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$

$$\begin{aligned}v_\Delta(\alpha f+\beta g)=&\sum_{i=1}^{n}|(\alpha f(x_i)+\beta g(x_i))-(\alpha f(x_{i-1})+\beta g(x_{i-1}))|\\ \leq&\sum_{i=1}^{n}(|\alpha|\cdot|f(x_i)-f(x_{i-1})|+|\beta|\cdot|g(x_i)-g(x_{i-1})|)\\ \leq&|\alpha|\bigvee_{a}^{b}(f)+|\beta|\bigvee_{a}^{b}(g).\end{aligned}$$

由分划Δ的任意性就得到所需不等式。

推论 1. 若$f,g\in BV([a,b])$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 则$\alpha f+\beta g\in BV([a,b])$. 换言之，BV([a,b])是一个线性空间。

定理 2 (全变差的性质)**.** 若$f(x)$是$[a,b]$上的实值函数，$a<c<b$, 则$\bigvee_{a}^{b}(f)=\bigvee_{a}^{c}(f)+\bigvee_{c}^{b}(f)$.

证明： 第一步 设$\Delta_1: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_m=c$, $\Delta_2: c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=b$分别是$[a,c]$和$[c,b]$的任意分划，则我们可以把二者合并得到$[a,b]$的一个分划

$$\Delta: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_m=c=y_0<y_1<\cdots<y_n=b$$

我们有

$$v_\Delta=|f(x_0)-f(x_1)|+\cdots+|f(x_{m-1})-f(x_m)|+|f(y_0)-f(y_1)|+\cdots+|f(y_{n-1})-f(y_n)|=v_{\Delta_1}+v_{\Delta_2}$$

因此$\bigvee_{a}^{b}(f)\geq v_\Delta=v_{\Delta_1}+v_{\Delta_2}$. 由分划$\Delta_1$, Δ_2的任意性就有$\bigvee_{a}^{b}(f)\geq\bigvee_{a}^{c}(f)+\bigvee_{c}^{b}(f)$.

第二步 设Δ是$[a,b]$的任意分划，如果c不是Δ的一个分点，则令Δ'为Δ添加分点c得到的分划，否则令$\Delta'=\Delta$. 然后我们将分划Δ'拆分为$[a,c]$的分划Δ_1和$[c,b]$的分划Δ_2. 根据上面的讨论我们有

$$v_\Delta\leq v_{\Delta'}=v_{\Delta_1}+v_{\Delta_2}\leq\bigvee_{a}^{c}(f)+\bigvee_{c}^{b}(f).$$

由分划Δ的任意性就有$\bigvee_{a}^{b}(f)\leq\bigvee_{a}^{c}(f)+\bigvee_{c}^{b}(f)$. 将两个不等式结合就得到等式。

定理 3 (Jordan分解定理)**.** 定义在$[a,b]$上的实值函数$f(x)$是有界变差函数当且仅当$f(x)$可以写成两个单调递增函数之差。

证明：第一步 若$f(x)=g(x)-h(x)$, 其中$g(x),h(x)$是定义在$[a,b]$上的单调函数。由于单调函数是有界变差函数，由线性我们得到$f(x)\in BV([a,b])$.

第二步 设$f(x)\in BV([a,b])$. 我们可以把它写作$f(x)=\bigvee_a^x(f)-\left[\bigvee_a^x(f)-f(x)\right]$. 下面我们验证这两部分都是递增函数。给定$a\le x\le y\le b$, 我们有$\bigvee_a^y(f)=\bigvee_a^x(f)+\bigvee_x^y(f)\ge\bigvee_a^x(f)$. 在上式中令$y=b$, 我们同时得到$\bigvee_a^x(f)<+\infty$. 我们还有

$$\begin{aligned}\left[\bigvee_a^y(f)-f(y)\right]-\left[\bigvee_a^x(f)-f(x)\right]=&\bigvee_x^y(f)-[f(y)-f(x)]\\ \ge&|f(x)-f(y)|-[f(y)-f(x)]\ge 0.\end{aligned}$$

推论 2. 定义在$[a,b]$上的有界变差函数$f(x)$几乎处处可微。且其导数满足$f'(x)\in L([a,b])$.

例子 4. 设$f(x)$是定义在$[a,b]$上的有界变差函数，则$\frac{d}{dx}\left(\bigvee_a^x(f)\right)=|f'(x)|$, $a.e.\, x\in[a,b]$.

证明：由全变差定义的函数$F(x)=\bigvee_a^x(f)$是递增函数，因此是几乎处处可微的，若在x点，$\bigvee_a^x(f)$和$f(x)$都是可微的，则我们有

$$\frac{d}{dx}\left(\bigvee_a^x(f)\right)=\lim_{y\to x^+}\frac{\bigvee_a^y(f)-\bigvee_a^x(f)}{y-x}=\lim_{y\to x^+}\frac{\bigvee_x^y(f)}{y-x}\ge\lim_{y\to x^+}\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|=|f'(x)|.$$

因此$F'(x)=\frac{d}{dx}\left(\bigvee_a^x(f)\right)\ge|f'(x)|$, $a.e.\, x\in[a,b]$. 下面我们证明$\int_a^b(F'(x)-|f'(x)|)dx=0$. 给定任何$\varepsilon>0$, 我们可以找到分划$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 使得$v_\Delta>\bigvee_a^b(f)-\varepsilon$. 下面我们用归纳法定义辅助函数$g(x)$, 令$g(a)=f(a)$, 然后令$(i=1,2,\cdots,n)$

$$g(x)=\begin{cases}f(x)-f(x_{i-1})+g(x_{i-1}), & \text{如果}f(x_i)\ge f(x_{i-1})\\ -f(x)+f(x_{i-1})+g(x_{i-1}) & \text{如果}f(x_i)<f(x_{i-1})\end{cases}\qquad x\in[x_{i-1},x_i].$$

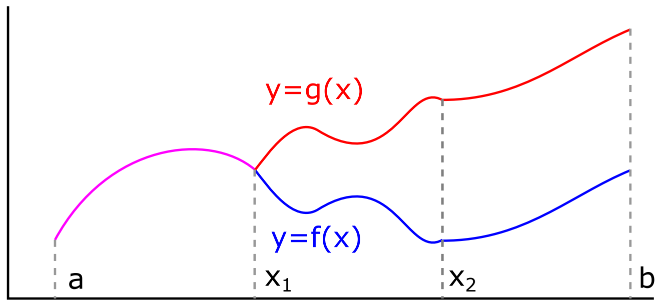
容易验证$g(x_i)-g(x_{i-1})=|f(x_i)-f(x_{i-1})|$, 这意味着$g(b)-g(a)=v_\Delta(f)>\bigvee_a^b(f)-\varepsilon$. 由$g$的定义，对几乎处处的$x\in[a,b]$, $g'(x)=\pm f'(x)\le|f'(x)|$. 我们进一步还可以验证$\bigvee_a^x(g)=\bigvee_a^x(f)$. 我们不妨设$x_{k-1}<x\le x_k$, 则

$$\bigvee_a^x(g)=\sum_{i=1}^{k-1}\bigvee_{x_{i-1}}^{x_i}(g)+\bigvee_{x_{k-1}}^{x}(g)=\sum_{i=1}^{k-1}\bigvee_{x_{i-1}}^{x_i}(f)+\bigvee_{x_{k-1}}^{x}(f)=\bigvee_a^x(f).$$

于是$\bigvee_a^x(f)-g(x)=\bigvee_a^x(g)-g(x)$是一个递增的函数，因此

$$\int_a^b[F'(x)-|f'(x)|]dx\le\int_a^b[F'(x)-g'(x)]dx\le\bigvee_a^b(f)-g(b)-\left[\bigvee_a^a(f)-g(a)\right]<\varepsilon.$$

于是非负函数$F'(x)-|f'(x)|$的积分为零，因此$F'(x)-|f'(x)|=0$, $a.e.\ x\in[a,b]$.



2　不定积分的微分

问题　若$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，并定义$F(x)=\int_a^x f(t)dt$, 则我们有

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x),\qquad x\in[a,b].$$

这一性质对于$f\in L([a,b])$还成立吗?

定理 4. 若$f\in L([a,b])$, 则$F(x)=\int_a^x f(t)dt$是$[a,b]$上的有界变差函数，因此是几乎处处可微的。

证明：$F(x)=\int_a^x f_+(t)dt-\int_a^x f_-(t)dt$是两个递增函数之差。

例子 5. 给定任意零测集$E\subset[a,b]$, 存在$f\in L([a,b])$, 使得$F(x)=\int_a^x f(t)dt$在E中每一点不可微。

证明：回忆我们前面举过的例子，令$G_k\supset E$为开集，且$m(G_k)<2^{-k}$, 则下列函数满足$F'(x)=+\infty$, $x\in E$

$$F(x)=\sum_{k=1}^\infty m([a,x]\cap G_k)=\sum_{k=1}^\infty\int_a^x\chi_{G_k}(t)dt=\int_a^x\sum_{k=1}^\infty\chi_{G_k}(t)dt.$$

引理 1 (平均连续性). 设$f\in L([a,b])$, 令$F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $F_h(x)=\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)dt$, 其中$x\ge a$, $h>0$;当$t\notin[a,b]$时，我们令$f(t)=0$. 则我们有依L^1收敛;

$$\lim_{h\to0^+}\int_a^b|F_h(x)-f(x)|dx=0.$$

证明：我们有

$$\begin{aligned}
\int_a^b |F_h(x)-f(x)|dx =& \int_a^b \left|\frac{1}{h}\int_0^h f(x+t)dt - f(x)\right| dx \\
=& \frac{1}{h}\int_a^b \left|\int_0^h f(x+t)dt - \int_0^h f(x)dt\right| dx \\
\le& \frac{1}{h}\int_a^b \left(\int_0^h |f(x+t)-f(x)|dt\right) dx \\
\le& \frac{1}{h}\int_0^h \left(\int_a^b |f(x+t)-f(x)|dx\right) dt \\
\le& \sup_{t\in(0,h)} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t)-f(x)|dx \to 0,\ \text{当} h\to 0.
\end{aligned}$$

这里我们需要可积函数积分的平均连续性。

定理 5 (不定积分的微分)**.** 若$f\in L([a,b])$, 则$F(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上几乎处处可微，且

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x), \qquad a.e.\, x\in[a,b].$$

证明：我们已经证明$F(x)$在$[a,b]$上几乎处处可微，因此按照上面引理定义的函数

$$F_h(x)=\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

当$h\to 0^+$时几乎处处收敛到$F'(x)$. 另一方面，引理说明$F_h(x)$依L^1收敛于$f(x)$, 因此存在序列$h_k\to 0^+$, 使得$F_{h_k}(x)$几乎处处收敛于$f(x)$. 由这两个几乎处处收敛，我们有$F'(x)=f(x)$, $a.e.\, x\in[a,b]$.

推论 3. 设$f\in L([a,b])$, $r\in\mathbb{R}$, 则$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-r|dt=|f(x)-r|$, $a.e.\, x\in[a,b]$.

证明：令$g(x)=|f(x)-r|\in L([a,b])$, $G(x)=\int_a^x g(t)dt$, 则我们有下列等式几乎处处成立

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-r|dt=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h}g(t)dt-\int_a^x g(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h}=g(x)=|f(x)-r|.$$

定理 6 (勒贝格点)**.** 设$f\in L([a,b])$, 则对$[a,b]$中几乎处处的点x, 都有

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|dt=0.$$

我们称满足上式的点x为函数$f(x)$的Lebesgue点。

证明：由上面的推论，我们得到对几乎处处的$x\in(a,b)$, 有

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-r|dt=|f(x)-r|, \quad \forall r\in\mathbb{Q}.$$

下面我们证明对于这样的x, 定理中要求的极限成立。固定这样的一个x, 对任意给定的$\varepsilon > 0$, 我们首先取一个$r \in \mathbb{Q}$, 使得$|f(x) - r| < \varepsilon/2$. 由上面的极限，我们有$\delta > 0$, 使得$|h| < \delta$时有

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - r|dt < \varepsilon/2.$$

于是我们有

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (|f(t) - r| + |f(x) - r|)dt \le \frac{\varepsilon}{2} + |f(x) - r| < \varepsilon.$$

这就给出了我们需要的极限。

例子 6. 设$f \in L(\mathbb{R})$, 则函数$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$在$[a, b]$上的全变差满足

$$\bigvee_a^b(F) = \int_a^b |f(x)|dx.$$

证明：首先对于任何分划$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, 我们有

$$v_\Delta(F) = \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt\right| \le \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|dt = \int_a^b |f(t)|dt.$$

因此$\displaystyle\bigvee_a^b(F) \le \int_a^b |f(x)|dx$. 为得到另一边不等式，我们需要用到前一讲的例子。$F(x)$的变差函数$\displaystyle\bigvee_a^x(F)$是$[a, b]$上的单调递增函数且满足

$$\frac{d}{dx}\left(\bigvee_a^x(F)\right) = |F'(x)| = |f(x)|, \quad a.e.\, x \in [a, b].$$

因此

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\bigvee_a^x(F)\right)dx \le \bigvee_a^b(F) - \bigvee_a^a(F) = \bigvee_a^b(F).$$

例子 7. 设$f \in L(\mathbb{R})$, 若对给定的闭区间$[a, b]$有$\displaystyle\int_a^b |f(x + h) - f(x)|dx = o(|h|)$, 则$f(x) = C$, $a.e.\, x \in [a, b]$.

证明：我们已知$F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上几乎处处可微，对两个任意的可微点$x,y\in(a,b)$

$$\begin{aligned}
|F'(y)-F'(x)| &= \lim_{h\to 0^+}\left|\frac{F(y+h)-F(y)}{h}-\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right| \\
&= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left|\int_{x+h}^{y+h} f(t)dt-\int_x^y f(t)dt\right| \\
&= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left|\int_x^y [f(t+h)-f(t)]dt\right| \\
&\le \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_x^y |f(t+h)-f(t)|dt \\
&\le \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_a^b |f(t+h)-f(t)|dt=0.
\end{aligned}$$

因此$F'(x)=C$, $a.e.\,x\in[a,b]$. 这就意味着$f(x)=C$, $a.e.\,x\in[a,b]$, 因为$F'(x)$和$f(x)$几乎处处相等。

3 绝对连续函数和微积分基本定理

基本问题：微积分基本定理成立的条件 **假**设$f(x)$是区间$[a,b]$上定义的实值函数，则在什么条件下有

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)dt.$$

- 导函数$f'(x)$需要几乎处处存在，且$f'(x)\in L([a,b])$. 于是$f(x)$可以表示一个可积函数的不定积分的形式
$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt.$$
- 因为不定积分是有界变差函数，函数$f(x)$是有界变差函数。
- 函数$f(x)$是一致连续函数，因为若$x<y$
$$|f(y)-f(x)|=\left|\int_a^y f'(t)dt-\int_a^x f'(t)dt\right|=\left|\int_x^y f'(t)dt\right|\le\int_x^y |f'(t)|dt$$
对任何$\varepsilon>0$, 由积分的绝对连续性，存在$\delta>0$, 当可测集e满足$m(e)<\delta$时，有$\int_e|f'(t)|dt<\varepsilon$. 于是$0<y-x<\delta$时，有$|f(y)-f(x)|\le\int_x^y|f'(t)|dt<\varepsilon$.
- 事实上，对于任何有限个互不相交的开区间(x_i,y_i), $i=1,2,\cdots,n$, 当$\displaystyle\sum_{i=1}^n(y_i-x_i)<\delta$时，我们可以令$e=\displaystyle\bigcup_{i=1}^n(x_i,y_i)$, $m(e)<\delta$. 则
$$\sum_{i=1}^n|f(y_i)-f(x_i)|\le\sum_{i=1}^n\int_{x_i}^{y_i}|f'(t)|dt=\int_e|f'(t)|dt<\varepsilon.$$

定义 2 (绝对连续函数)**.** 设$f(x)$是$[a,b]$上的实值函数，若对任何$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使得当$[a,b]$中任意有限个互不相交的开区间(x_i,y_i), $i=1,2,\cdots,n$满足$\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)<\delta$时，有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)|<\varepsilon,$$

则称$f(x)$是$[a,b]$上绝对连续函数, 其全体记为$AC([a,b])$.

定理 7. 若$f\in L([a,b])$, 则其不定积分$F(x)=\int_a^x f(t)dt$是$[a,b]$上的绝对连续函数。

例子 8. 区间$[a,b]$上的绝对连续函数一定是一致连续函数。

证明：给定任何$\varepsilon>0$，令$\delta>0$为上述定义中给定的常数。则对于任何$x,y\in[a,b]$, $0<y-x<\delta$, 我们取一个区间$(x_1,y_1)=(x,y)$, 由绝对连续性的定义有$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

定理 8. 若$f(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数，则$f(x)$是$[a,b]$上的有界变差函数。

证明：取$\varepsilon=1$, 则存在$\delta>0$, 使得当$[a,b]$中有限个互不相交的开区间(x_i,y_i), $i=1,2,\cdots,n$满足$\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)<\delta$时，有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)|<1.$$

令$[c,d]\subset[a,b]$是长度小于δ的区间，$\Delta: c=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=d$是它的一个分划。则开区间$(x_{i-1},x_i)$, $i=1,2,\cdots,n$ 是互不相交的，且其长度总和等于$d-c<\delta$, 因此有

$$v_\Delta=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|<1 \qquad\Rightarrow\qquad \bigvee_c^d(f)\le 1.$$

我们可以把区间$[a,b]$分为有限个长度小于δ的区间，其分点为$a=y_0<y_1<\cdots<y_m=b$. 于是

$$\bigvee_a^b(f)=\sum_{i=1}^{m}\bigvee_{y_{i-1}}^{y_i}(f)\le m<+\infty.$$

推论 4. 若$f(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数，则$f(x)$在$[a,b]$上几乎处处可微，且$f'(x)\in L([a,b])$.

定理 9. 若$f(x)$, $g(x)$都是$[a,b]$上的绝对连续函数，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 则$\alpha f(x)+\beta g(x)$也是$[a,b]$上的绝对连续函数。换言之，全体绝对连续函数组成的集合$AC([a,b])$是一个线性空间。

证明：不妨设$|\alpha|+|\beta|>0$. 对于任何$\varepsilon>0$, 取$\varepsilon_1=\varepsilon/(|\alpha|+|\beta|)$. 由于$f(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数，存在$\delta_1>0$, 使得当$[a,b]$中任意有限个互不相交的开区间$(x_i,y_i)$, $i=1,2,\cdots,n$满足$\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)<\delta_1$时，有$\sum_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)|<\varepsilon_1$. 同理，存在$\delta_2>0$, 使得当$[a,b]$中任意有限个互不相交的开区间$(x_i,y_i)$, $i=1,2,\cdots,n$满足$\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)<\delta_2$时，有$\sum_{i=1}^{n}|g(y_i)-g(x_i)|<\varepsilon_1$.

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 当$[a,b]$中任意有限个互不相交的开区间$(x_i,y_i)$, $i=1,2,\cdots,n$满足$\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-x_i)<\delta$时，有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|(\alpha f(x_i)+\beta g(x_i))-(\alpha f(x_{i-1})+\beta g(x_{i-1}))|=&\sum_{i=1}^{n}|\alpha(f(x_i)-f(x_{i-1}))+\beta(g(x_i)-g(x_{i-1}))|\\ \leq&|\alpha|\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+|\beta|\sum_{i=1}^{n}|g(x_i)-g(x_{i-1})|\\ <&(|\alpha|+|\beta|)\varepsilon_1=\varepsilon.\end{aligned}$$

定理 10 (微积分基本定理)**.** 若$f(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数，则

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)dt,\quad x\in[a,b].$$

证明： 第一步 令$g(x)=f(x)-\int_a^x f'(t)dt$. 其中$f'(t)\in L([a,b])$, 因此不定积分$\int_a^x f'(t)dt$也是绝对连续函数，于是由线性我们得到$g(x)$也是绝对连续函数。并且我们有$g'(x)=0$, $a.e.\ x\in[a,b]$.

第二步 我们证明导数几乎处处为零的绝对连续函数$g(x)$是常数。我们只需证明对于任何$c\in(a,b]$, 有$g(a)=g(c)$. 给定$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使得当$[a,b]$中任意有限个互不相交的开区间(x_i,y_i), $i=1,2,\cdots,n$满足$\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-x_i)<\delta$时，有$\sum\limits_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)|<\varepsilon$. 令$A=\{x\in(a,c):g'(x)=0\}$. 下面我们构造一个$A$的Vitali覆盖。

$$\Gamma=\{[x,x+h]:x\in A,h>0,[x,x+h]\subset(a,c),|g(x+h)-g(x)|<\varepsilon h\}$$

由Vitali覆盖定理，可以找到n个互不相交的区间$[x_i,x_i+h_i]\in\Gamma$，依次从左往右排开，使得

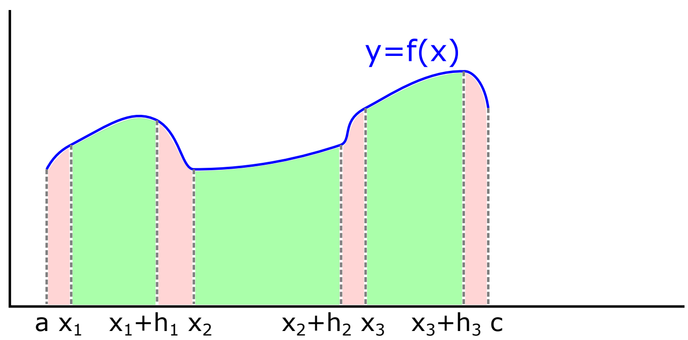
$$m^*\left(A\setminus\bigcup_{i=1}^{n}[x_i,x_i+h_i]\right)<\delta\quad\Rightarrow\quad\sum_{i=1}^{n}h_i>m^*(A)-\delta=c-a-\delta.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}|g(a)-g(c)|\leq&|g(a)-g(x_1)|+|g(x_1)-g(x_1+h_1)|+|g(x_1+h_1)-g(x_2)|+|g(x_2)-g(x_2+h_2)|\\&+\cdots+|g(x_n)-g(x_n+h_n)|+|g(x_n+h_n)-g(c)|\\ \leq&\sum_{i=1}^{n}\varepsilon h_i+\varepsilon=(c-a+1)\varepsilon.\end{aligned}$$

其中区间$(a,x_1),(x_1+h_1,x_2),(x_2+h_2,x_3),\cdots,(x_n+h_n,c)$是互不相交的开区间，总长度等于$c-a-\sum\limits_{i=1}^{n}h_i<\delta$, 于是这部分和小于$\varepsilon$. 最后令$\varepsilon\to0^+$, 我们得到$g(a)=g(c)$. 所以$g(x)$是一个常数。

第三步 于是$f(x)=C+\int_a^x f'(t)dt$. 令$x=a$我们有$C=f(a)$, 于是$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt$.


y=f(x)
a x1 x1+h1 x2 x2+h2 x3 x3+h3 c