8. 设 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}^1$ 上的实值函数. 如果对于任意的 $x_0\in \mathbf{R}^1$,必存在 $\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,有 $f(x)\geqslant f(x_0)$,试证明集合 $E=\{y: y=f(x)\}$是可数集.

$y \to x \longrightarrow \delta_x \longrightarrow (r_x, R_x) \in \mathbb{Q}^2$

$$x-\delta_x \le r_x < x < R_x \le x+\delta_x$$

$\Rightarrow y \longrightarrow \mathbb{Q}^2$ 单射 $\Rightarrow$ 可数

7. 设 $f(x)$是定义在$[0,1]$上的实值函数,且存在常数 M,使得对于$[0,1]$中任意有限个数: $x_1,x_2,\cdots,x_n$,均有

$$|f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)|\leqslant M,$$

试证明下述集合是可数集: $E=\{x\in[0,1]: f(x)\neq 0\}$.

$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E_n^+\cup E_n^-)$. $E_n^+=\{x: f(x)>\frac{1}{n}\}$. $E_n^-=\{x: f(x)<-\frac{1}{n}\}$

由于 $\forall$ p个数在E_n^+中,有 $\frac{p}{n}<f(x_1)+\cdots+f(x_p)\le M \Rightarrow p<nM$

$\Rightarrow E_n^+$元素个数有限. 同理E_n^-

从而E是可数个有限集之并 $\Rightarrow$ E可数

12. 设 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 若 $\overline{\overline{E}}=c$,试证明存在 n_0,使得 $\overline{\overline{A}}_{n_0}=c$.

无穷笛卡尔积会扩大基数 $\overline{\overline{N^{\infty}}}=c$

$\{0,1\}^{\infty}\sim$ 一个二进制小数 $\longrightarrow [0,1]$

$\Rightarrow$ 得到满射 $\Rightarrow \overline{\overline{N^n}}\ge c$

反证. 假设 $\forall n$. $\overline{\overline{A_n}}<c$. 由 $\overline{\overline{E}}=c \Rightarrow$

$E\sim\{x=(x_1,x_2,\cdots): x_n\in[0,1]\}\triangleq F$

$\forall n$. $A_n\sim f(A_n)\triangleq B_n$. $\overline{\overline{B_n}}<c$. P_n为B_n中元素第n个分量的投影映射

$\overline{\overline{P_n(B_n)}}\le\overline{\overline{B_n}}=\overline{\overline{A_n}}<c$. 由 $P_n(B_n)\subset[0,1]$. $\Rightarrow \exists\, \xi_n\notin P_n(B_n)$

$\Rightarrow (\xi_1,\xi_2,\cdots)\notin F$. 矛盾.

26. 试问由 $\mathbf{R}^1$ 中的一切开集构成的集族的基数是什么？

R中开集：至多可数个开区间的并　　　　　　　　↓ 是c

刻画R中开集 ☆☆

Lemma：① 设E为R中以有理数为端点的开区间全体，则E可数

② 记P(E)为E的幂集 (2^E)

则 $\overline{\overline{P(E)}} = c$

③ 每个开区间(a,b)都可表示为一列有理开区间之并

即：∃两个有理数列 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$，$a<\cdots<\alpha_n<\cdots<\alpha_1<\beta_1<\cdots<\beta_n<\cdots<b$

且 $\alpha_n \to a$, $\beta_n \to b$ as $n \to +\infty$

$\Leftrightarrow (a,b)=\bigcup_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n,\beta_n)$

记：R上所有开集构成的集族为 $\mathcal{G}$，下证 $\overline{\overline{\mathcal{G}}}=c$

∵ 任意开区间 $(0,x)$ $(0<x<+\infty)$ 为开集，且 $\{(0,x): 0<x<+\infty\} \subset \mathcal{G}$

∴ $c \le \overline{\overline{\mathcal{G}}}$

另一方面，∀开集 $G\in\mathcal{G}$，G可写成可数有理区间并 ⟹ G会对应到 $\{(a,b): a,b\in \mathbb{Q}\}$ 的幂集中元 ⟹ $\overline{\overline{\mathcal{G}}} \le c$

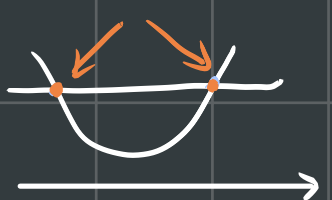
⟹ $\overline{\overline{\mathcal{G}}} = c$

31. 设 $f\in C(\mathbf{R}^1)$. 若存在 $a>0$，使得

$$|f(x)-f(y)|\geqslant a|x-y| \quad (x,y\in\mathbf{R}^1),$$

试证明 $R(f)=\mathbf{R}^1$.

值域 R(f)　D(f) 定义域



$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

证：取 $y=0$ ⟹ $|f(x)|\ge a|x|$ ⟹ $|x|\to+\infty$ 有 $|f(x)|\to+\infty$

下证：$x\to\pm\infty$ 时，$f(x)$ 不能同时趋于正无穷或负无穷

反证.假设同时正无穷，则考虑 $M>|f(0)|$，$\exists\, x_1<0<x_2$，使 $f(x_1)=f(x_2)=M$.矛盾.

32. 试证明 $\mathbf{R}^1$ 中可数稠密集不是 G_δ 集.

或与开区间对

① 不是 G_δ 集. $Q=\bigcap_{i=1}^{\infty}G_i$，$G_i$ 开集 $\Rightarrow Q^c=\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i^c$

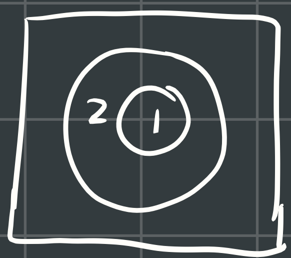
$$\mathbb{R}=\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}\underbrace{G_i^c}_{\text{闭}}\Big)\cup\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}\underbrace{\{r_i\}}_{\text{闭}}\Big)\Rightarrow \mathbb{R}\text{是可数闭集并}$$

G_i 开且 $\overline{G_i}=\mathbb{R}\Rightarrow G_i^c$ 无内点、$\Rightarrow\mathbb{R}$ 是无内点集并.

由 Baire 定理 $\mathbb{R}$ 无内点.∴矛盾

2. $A_1\subset A_2$，A_1 可测 $m(A_1)=m^*(A_2)<+\infty$，证：A_2 可测

可测 $\begin{cases}\text{定义}\\ \text{拆分}\end{cases}$



只用：$m^*(T)\geqslant m^*(T\cap A_2)+m^*(T\cap A_2^c)$

有：$m^*(T)=m^*(T\cap A_1)+m^*(T\cap A_1^c)$

取 $T=T\cap A_2$

$$m^*(T\cap A_2)=m^*(T\cap A_2\cap A_1)+m^*(T\cap A_2\cap A_1^c)$$
$$=m^*(T\cap A_1)+m^*(T\cap A_2\cap A_1^c)$$
$$\leqslant m^*(T\cap A_1)+m^*(A_2\cap A_1^c)$$

$$m^*(A_2)=m^*(A_2\cap A_1)+m^*(A_2\cap A_1^c)=m(A_1)+m^*(A_2\cap A_1^c)$$
$$\Rightarrow m^*(A_2\cap A_1^c)=0$$

$$\Rightarrow m^*(T\cap A_2)+m^*(T\cap A_2^c)\leqslant m^*(T\cap A_1)+m^*(T\cap A_1^c)=m^*(T)$$

即证

另: $A_1 \subset A_2$, $A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) = A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c)$

A_1可测, $m^*(A_1) = m(A_1) = m^*(A_2)$

$\Rightarrow m^*(A_2) = m^*(A_2 \cap A_1) + m^*(A_2 \cap A_1^c) \Rightarrow m^*(A_2 \cap A_1^c) = 0$

$\Rightarrow A_2 \cap A_1^c$可测 $\Rightarrow A_2$可测

5. 试在$\mathbb{R}$中作由某些无理数构成的闭集,使$m(F)>0$

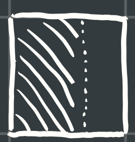
证: $\mathbb{R}$中有理数$\{r_k\}$. $(r_k - \frac{1}{2^{k+1}}, r_k + \frac{1}{2^{k+1}})$. 并起来,取补即符合

1° 是闭集　2° 只有无理数　3° $m(F) = +\infty$, 从而符合

6. $I^2 = [0,1] \times [0,1]$, $E = \{(x,y) \in I^2 : \underset{\Downarrow\ x \in [0, \frac{\pi}{6})}{\sin x < \frac{1}{2}},\ \cos(x+y)是无理数\}$.

试求$m(E)$

只用说明: $x \in [0, \frac{\pi}{6})$, $\cos(x+y) \in \mathbb{Q}$的I^2中点,测度为0



可数个零测集之并

$\cos(x+y) = q_k \Rightarrow x + y = s_k \to$ 线零测

可数个并起来,仍零测　$\Rightarrow$ 原题 $= \frac{\pi}{6}$

7. $\{E_n\}$是$\mathbb{R}^n$中可测集列,若$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_k) < +\infty$,试证明:

$$m(\overline{\lim_{k\to\infty}} E_k) \geq \overline{\lim_{k\to\infty}}\, m(E_k)$$

$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} E_k = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j\right)$

$$m(\overline{\lim_{k\to\infty}} E_k) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j\right) = m\left(\lim_{k\to\infty}\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} m\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j\right) \geq \overline{\lim_{k\to\infty}}\, m(E_k)$$

9. 设$E_1, E_2, \cdots E_k$是$[0,1]$可测集,且$\sum_{i=1}^{k} m(E_i) > k-1$,证: $m(\bigcap_{i=1}^{k} E_k) > 0$

$E = [0,1]$, $\bigcap_{i=1}^{k} E_i = E \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} E_i\right) = E \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i^c\right)$

$$m\left(\bigcap_{i=1}^{k} E_i\right) = m\left(E \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i^c\right)\right) = m(E) - m\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i^c\right)\right)$$

$$\geq m(E) - \sum_{i=1}^{k} m(E \cap E_i^c) > 0$$

13. 设$E\subset\mathbb{R}^n$，$H\supset E$且H是可测集.若$H\setminus E$的任一可测子集皆为零测集，试问：H是E的等测包吗？

令G是E等测包，则$G\supset E$且$m(G)=m^*(E)$，因而$H\setminus G\subset H\setminus E$

$\Rightarrow m(H\setminus G)=0$

$m(H)=m(H\setminus G)+m(H\cap G)=m(H\cap G)\leq m(G)=m^*(E)$

$\Rightarrow H$为E的等测包

14. 试证明点集E可测的充分必要条件是：对任给$\varepsilon>0$，存在开集G_1,G_2：$G_1\supset E$，$G_2\supset E^c$，使得$m(G_1\cap G_2)<\varepsilon$

"$\Rightarrow$" E可测，定理2.13 $\Rightarrow\exists$开集$G\supset E\supset F$，$m(G\setminus E)<\frac{\varepsilon}{2}$

$m(E\setminus F)<\frac{\varepsilon}{2}$ $\quad G\setminus F\subset(G\setminus E)\cup(E\setminus F)$

$\Rightarrow m(G\setminus F)<\varepsilon$，$G_1=G$，$G_2=F^c$

"$\Leftarrow$" $\forall\varepsilon>0$，存在开集G_1,G_2，$G_1\supset E$，$G_2\supset E^c$，使$m(G_1\cap G_2)<\varepsilon$

$\varepsilon_n=\frac{1}{n}$，开集$G_n$，闭集$F_n$，使$m(G_n\setminus F_n)<\varepsilon_n$

$G=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$，$F=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$，$G\supset E$，$F\subset E$为可测集

$m(G\setminus F)\leq m(G_n\setminus F_n)<\varepsilon_n$ $\Rightarrow G\setminus E$零测

$E=G\setminus(G\setminus E)$可测

16. 设W是$[0,1]$中的不可测集，试证明存在ε：$0<\varepsilon<1$，使得对于$[0,1]$中任一满足$m(E)\geq\varepsilon$的可测集E，$W\cap E$是不可测集

反证，$\forall\varepsilon$，$0<\varepsilon<1$，存在可测集$E\subset[0,1]$，$m(E)\geq\varepsilon$，使$W\cap E$可测

$\varepsilon_n=1-\frac{1}{n}$，$E_n$可测，$W\cap E_n$可测，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}W\cap E_n=W\cap\underbrace{(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n)}_{E\text{可测}}$可测

且$m(E)\geq m(E_n)\geq 1-\frac{1}{n}$，$n\to\infty\Rightarrow m(E)=1$

而$m([0,1]\setminus E)=0$，$m^*(W\cap([0,1]\setminus E))=0\Rightarrow W\cap([0,1]\cap E^c)$可测

$\Rightarrow W=(W\cap E)\cup(W\cap([0,1]\setminus E))$可测，矛盾

P89 6 一族可测集之交一定是可测集吗？

不必，可测集子集不一定可测

Thm (Steinhaus) E 可测，$m(E)>0$，作点集 $E-E \overset{def}{=} \{x-y: x,y\in E\}$

则存在 $\delta_0>0$，使 $E-E \supset B(0,\delta)$

3. 试在 $[0,1]$ 中作一不可数集 W，使 $W-W$ 无内点。

作 $[0,1]$ 上的等价关系：$x\sim y \Leftrightarrow x-y\in\mathbb{Q}$，$[x]=\{y: y\sim x\}$

商集 $[0,1]/\sim := \{[x], x\in[0,1]\}$ $\bigcup\limits_{x\in[0,1]}[x]=[0,1]$，由选择公理，在 $[0,1]/\sim$ 的每个等价类中只取一个点，构成集合 W，则 $W\subset[0,1]$ 为不可测集，从而 W 不可数

$\forall x,y\in W$，有：① $x=y \Rightarrow 0=x-y\in W-W$ ② $x\neq y \Leftrightarrow x-y\notin\mathbb{Q}$

$\Rightarrow W-W\subset\{0\}\cup\mathbb{Q}^c$，所以 $W-W$ 不含内点。

习题 3

1. 设有指标集 I，$\{f_\alpha(x): \alpha\in I\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上可测函数族，试问：函数

$S(x)=\sup\{f_\alpha(x): \alpha\in I\}$ 是否可测　　ess sup 本性上确界

$\{x: S(x)>t\}=\bigcup\limits_{\alpha\in I}\{x: f_\alpha(x)>t\}$

不一定可测　反例：I 为 $\mathbb{R}$ 中不可测集，$f_\alpha(x)=\begin{cases}1, & x=\alpha\\ 0, & x\neq\alpha\end{cases}$

$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 中可测，但 $\sup f$ 不可测（I 为不可测集）

2. 设 $z=f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数，$g_1(x), g_2(x)$ 是 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上的实值可测函数，证：$F(x)=f(g_1(x),g_2(x))$ 是 $[a,b]$ 上可测函数

习题3

9. $m(E)<+\infty$，$\{f_k(x)\}$几乎处处有限，试证：$\{f_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)$的充要条件是 $\lim\limits_{k\to\infty}\inf\limits_{\alpha>0}\{\alpha+m(\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|>\alpha\})\}=0$

$f_k(x)\Rightarrow f(x)$ 依测度收敛

"$\Rightarrow$" 法一：$\forall\varepsilon>0$，$\alpha<\frac{\varepsilon}{2}$，$\exists N>0$，$\forall k\geq N$，由 $m(\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|>\alpha\})<\frac{\varepsilon}{2}$

$\therefore \alpha+m(\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|>\alpha\})<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，加 inf，lim ✓

法二：$\lim\limits_{k\to\infty}\inf\limits_{\alpha>0}\{\alpha+m(\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|>\alpha\})\}$

$\leq \inf\limits_{\alpha>0}\lim\limits_{k\to\infty}$

$=\inf\limits_{\alpha>0}\alpha=0$

$\lim\limits_{k\to\infty}\inf\limits_{\alpha>0}f_k(\alpha)\leq\lim\limits_{k\to\infty}f_k(\alpha)$，$\forall\alpha$

$\Rightarrow\ \leq\inf\limits_{\alpha>0}\lim\limits_{k\to\infty}f_k(\alpha)$

"$\Leftarrow$" 记 $b_k=\inf\limits_{\alpha>0}\{\alpha+m(\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|>\alpha\})\}$

$\exists\alpha_k>0$，使 $b_k\leq\alpha_k+m(\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|>\alpha_k\})\leq b_k+\frac{1}{k}$

$\Rightarrow\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k=\lim\limits_{k\to\infty}m(\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|>\alpha_k\})=0$

$\exists K$，$k>K$，$\alpha_k<\varepsilon$ $\Rightarrow\lim\limits_{k\to\infty}m(\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0$

即依测度收敛

10. f_n $[0,1]$ $\nearrow$，$f_k(x)\Rightarrow f(x)$，在$f(x)$连续点，x_0上，$f_n(x_0)\to f(x_0)$

法一：反证：假设x_0不收敛，即$\exists\varepsilon_0$，$\forall N$，$\exists n>N$，$|f_n(x_0)-f(x_0)|>2\varepsilon_0$

$f(x)$在x_0连续，$\exists\delta$，$\forall x\in U(x_0,\delta)\subset[0,1]$，有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon_0$

分正负 $|f_n(x)-f(x)|\geq|f_n(x)-f(x_0)|-|f(x)-f(x_0)|>\varepsilon_0$

$\Rightarrow m(\{x\in[0,1]: |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon_0\})>\delta$，矛盾.

类似另一边

法二：x_0连续点，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，$\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$，$|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{18}$

$f_n\Rightarrow f$ $\quad m(\{x\in[0,1]: |f_n(x)-f(x)|>\frac{\varepsilon}{9}\})<\frac{\delta}{2}$

$x_1\in(x_0-\delta, x_0)$，$x_2\in(x_0, x_0+\delta)$

$|f_n(x_1)-f(x_1)|\leq\frac{\varepsilon}{9}$, $|f_n(x_2)-f(x_2)|\leq\frac{\varepsilon}{9}$

$\Rightarrow |f_n(x_1)-f(x_2)|\leq\frac{\varepsilon}{9}+\frac{\varepsilon}{9}+\frac{\varepsilon}{18}+\frac{\varepsilon}{18}=\frac{\varepsilon}{3}$

f 递增 $\Rightarrow |f_n(x_1)-f_n(x_0)|\leq|f_n(x_1)-f_n(x_2)|\leq\frac{\varepsilon}{3}$

$|f_n(x_0)-f(x_0)|\leq|f_n(x_0)-f_n(x_1)|+|f_n(x_1)-f(x_1)|+|f(x_1)-f(x_0)|<\varepsilon$

思考6.7 Page 109 不一定

11. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $\forall\varepsilon>0$, 存在开集$G\subset\mathbb{R}^n$, $m(G)<\varepsilon$, 使得 $f\in C(\mathbb{R}^n\setminus G)$, 试证明: f是$\mathbb{R}^n$上的可测函数

拆分: 由题意, 对任意 $n\in\mathbb{Z}_+$, $m(G_n)<\varepsilon$

且 $f(x)\in C(\mathbb{R}^n\setminus G_n)$, 令 $G=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$, G零测

对任意 $t\in\mathbb{R}$, $\{x\in\mathbb{R}^n, f(x)>t\}=\underbrace{\{x\in G, f(x)>t\}}_{\text{零测}}\cup\{x\in\mathbb{R}^n\setminus G, f(x)>t\}$

$\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}^n\setminus G_k, f(x)>t\}$

由 f 在 $\mathbb{R}^n\setminus G_k$ 连续 $\Rightarrow$ 可测

$\Rightarrow$ 可数可测集之并可测

14 类似, 交换并就行

13. 设$\{f_k(x)\}$在$[a,b]$上依测度收敛于$f(x)$, $g(x)$连续, 证: $g(f_k(x))$在$[a,b]$上依测度收敛于$g(f(x))$ $[a,b]$改为$[0,+\infty)$还对吗

连续映射定理 handwiki

continuous mapping theorem

反例 $\begin{cases}x & , x<n\\ x+\frac{1}{x} & , x\geq n\end{cases}$ x^2

12. $\{f_k\}\ \{g_k\} \xrightarrow{m} 0$，证：$\{f_k \cdot g_k\} \xrightarrow{m} 0$

$\{x : |f_k(x) g_k(x)| > \varepsilon\} \subset \{x : |f_k(x)| > \sqrt{\varepsilon}\} \cup \{x : |g_k(x)| > \sqrt{\varepsilon}\}$

$\Rightarrow\ m \le m + m \to 0$

15、$\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 可测，$f(x)$ 是实值函数，$\forall \varepsilon > 0$，都有

$$\lim_{n\to\infty} m^*(\{x\in[a,b] : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

问 $f(x)$ 可测？

f_n 是依测度 Cauchy 列，由 3.16 $\Rightarrow$ 收敛

习题 4

2. $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 非负可积，$f(0)=0$，$f'(0)$ 存在，证：$\int_{[0,+\infty)} \frac{f(x)}{x}$ 存在

证：$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ 0 < x < \delta,\ \left|\frac{f(x)}{x} - f'(0)\right| < \varepsilon$

即 $\left|\int_{[0,+\infty)} \frac{f(x)}{x} dx\right| \le \left|\int_{[0,\delta]} \frac{f(x)}{x} dx\right| + \left|\int_{[\delta,+\infty)} \frac{f(x)}{x} dx\right|$

再由 $f(x)$ 非负可积 $\Rightarrow\ \le (f'(0)+\varepsilon)\cdot\delta + \frac{1}{\delta}\int_{[\delta,+\infty)} f(x)dx < \infty$

所以积分存在

3. $f(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上非负可测函数，若存在 $E_k \subset E$，$m(E \setminus E_k) < \frac{1}{k}$，使极限 $\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)dx$ 存在，试证明 $f(x)$ 在 E 上可积

$\boxed{令\ F = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k}$，$f_k(x) = f(x)\chi_{E_k}(x)$

$\therefore\ \lim_{k\to\infty} m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$

$\Rightarrow f_k(x)$ 依测度收敛

由 Riesz 定理，存在子列 $\{f_{k_i}(x)\}$ $\lim_{k_i\to\infty} f_{k_i}(x) = f(x)$，a.e. $x \in E$

由 Fatou 引理，$\int_F \lim_{k\to\infty} f_{k_i}(x)dx \le \lim_{k_i\to\infty} \int_F f_{k_i}(x)dx$

$= \lim_{k_i\to\infty} \int_{E_{k_i}} f(x)dx$ 存在

$\Rightarrow \int_E f(x)dx$ 存在

4. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上非负可积函数，令 $F(x)=\int_{(-\infty,x]} f(t)\,dt$，$x\in\mathbb{R}$.

若 $F\in \underbrace{L(\mathbb{R})}_{\text{可积}}$，试证明：$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx=0$

$F(x)\in L(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ \int_{|x|>N} F(x)dx<\varepsilon$

又 $f\geqslant 0$，$\Rightarrow F$ 增

$\therefore \forall y\geqslant N$，$F(y)=\int_y^{y+1} F(y)dx \leqslant \int_y^{y+1} F(x)dx \leqslant \int_{|x|>N} F(x)dx<\varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{y\to\infty} F(y)=0$

5. 设 $f_k(x)\ (k=1,2,\cdots)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上非负可积函数，对任一可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$，

$\int_E f_k(x)dx \leqslant \int_E f_{k+1}(x)dx$

试证明：$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx=\int_E \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)dx$

令 $E_k=\{x\in\mathbb{R}^n: f_k(x)>f_{k+1}(x)\}$，则 E_k 可测

$0\leqslant \int_{E_k}(f_k(x)-f_{k+1}(x))dx\leqslant 0 \Rightarrow m(E_k)=0$

$F=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$，$m(F)=0$．$E\setminus F$ 上，$f_k(x)\leqslant f_{k+1}(x)$

由 Levi 定理，$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx=\lim\limits_{k\to\infty}\int_{E\setminus F} f_k(x)dx$

$$=\int_{E\setminus F}\lim_{k\to\infty} f_k(x)dx$$

$$=\int_E \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx$$

6. 设 $f(x)$、$g(x)$ 是 $E\subset\mathbb{R}$ 的非负可测函数，且 $m(E)=1$．若 $f(x)g(x)\geqslant 1$，$x\in E$

试证明：$\left(\int_E f(x)dx\right)\left(\int_E g(x)dx\right)\geqslant 1$

$\text{LHS}\geqslant\left(\int_E\sqrt{f(x)g(x)}\,dx\right)^2\geqslant\left(\int_E 1\,dx\right)^2=1$

7.

10. $f\in L(\mathbb{R}^n)$, $E\subset\mathbb{R}^n$ 紧, 证明: $\lim_{|y|\to\infty}\int_{E+\{y\}}|f(x)|dx=0$

$\exists M$. $\forall x\in E$, $|x|<M$.

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, $\int_{|x|>N}|f(x)|dx<\varepsilon$

$y>N+2M$ 即可

13. $f\in L(\mathbb{R})$, $p>0$, 证 $\lim_{n\to\infty}n^{-p}f(nx)=0$, a.e. $x\in\mathbb{R}$

考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(nx)}{n^p}$, f 可积 $\Rightarrow\frac{f(nx)}{n^p}$ 可积

? $\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{f(kx)}{k^p}\right|dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{f(kx)}{k^p}\right|dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+p}}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|dx<\infty$

$\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{f(kx)}{k^p}\right|dx$ 可积 $\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(kx)}{k^p}$ 可积 $\Rightarrow$ 几乎处处有限

即级数几乎处处收敛

14. $x^s f(x)$, $x^t f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可积, $s<t$, 证 $\int_{[0,+\infty)} x^u f(x)\,dx$ $u\in(s,t)$ 存在且是 $u\in(s,t)$ 的连续函数

$$\int_0^{+\infty} |x^u f(x)|\,dx \le \int_{[0,1]} |x^s f(x)|\,dx + \int_{[1,+\infty)} |x^t f(x)|\,dx$$

$\Rightarrow x^u f(x)$ 可积.

$u_n \to u$. $|x^u f(x)| \le |x^s f(x)| + |x^t f(x)|$

由控制收敛定理. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty)} x^{u_n} f(x)\,dx = \int_{[0,+\infty)} x^u f(x)\,dx$

由海涅定理, 知 $\lim\limits_{l\to u} \int_{[0,+\infty)} x^l f(x)\,dx = \int_{[0,+\infty)} x^u f(x)\,dx$

15. $f(x)$ 是 $(0,1)$ 正值可测, 若 $\exists c$, 使 $\int_{[0,1]} f^n(x)\,dx = c$, $n=1,2,\cdots$

证: 存在可测集 $E\subset[0,1]$, 使 $f(x)$ 几乎处处等于 $\chi_E(x)$ 若 f 不非负?

取 $E_1=\{x\in(0,1): f(x)>1\}$ 则 $m(E_1)=0$

否则若 $m(E_1)>0$, 则 $\int_{[0,1]} f^n(x)\,dx \ge \int_{E_1} f^n(x)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

$$\ge \int_{E_1} \lim_{n\to\infty} f(x)^n\,dx \quad (\text{Fatou})$$

$\therefore m(E_1)=0$ 即 $f(x)\le 1$, a.e. $x\in(0,1)$

记 $E_2=\{x\in(0,1): 0<f(x)<1\}$ 则 $m(E_2)=0$

$\int_{E_2} (f(x)^n)\,dx < \int_{E_2} f(x)^{n-1}\,dx$ 矛盾.

$\therefore f(x)$ 几乎处处是 0 或 1

不是非负仍成立. 则 $f^2(x)\ge 0 \Rightarrow f^2(x)=\chi_E(x)$

$\Rightarrow f(x)=0,\pm1$. $E_3=\{x: f(x)=-1\}$ $m(E_3)=0$, 否则矛盾

17. $E_1\supset E_2\supset\cdots$, $E=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k$. $f\in L(E_1)$ 证明:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$$

$f_k(x)=f(x)\chi_{E_k}(x)$ $\quad \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)$, $x\in E$

$|f_k(x)|\le|f_1(x)|$. 控制收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\int_{E_1} f_k(x)\,dx = \int_{E_1}\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)\,dx$

即 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{E_k} f_k(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$

20. $\{f_k(x)\}$ 是E非负可积，f_k 几乎处处收敛于 $f(x)=0$，若有

$$\int_E \max\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)\}\, dx \le M$$

证：$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\, dx = 0$

$g(x)=\sup\limits_{k\ge 1}\{f_k(x)\}$，$g_k(x)=\sup\limits_{1\le i\le k}\{f_i(x)\}$，$g_k$可积，$g_k, g$可测

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x)=g(x)$$

Fatou：$\int_E \lim\limits_{k\to\infty} g_k\, dx \le \lim\limits_{k\to\infty}\int_E g_k\, dx < M$

$\Rightarrow g$ 可积

控制收敛即证 (DCT)

21. $\{f_k\}$ 依测度 f，证：$\int_E f(x)\,dx \le \underline{\lim}_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\, dx$

依测度 ⇒ 子列点点，$\underline{\lim}_{k\to\infty} \le \underline{\lim}_{n_k\to\infty}$

24 f_k, g_k 可测，$|f_k|\le g_k$　$\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)$，$\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x)=g(x)$

$$\lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\,dx = \int_E g(x)\,dx < \infty$$

试证：$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$

$\because g\in L(E)$ $\therefore f\in L(E)$

(从某个k开始)

$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\,dx = \int_E g(x)\,dx < \infty \Rightarrow g_k$可积 $\Rightarrow f_k$可积

$\{g_k+f_k\}$ $\{g_k-f_k\}$ 非负可测

Fatou $\underline{\lim}_{k\to\infty}\int_E g_k+f_k\, dx \ge \int_E g+f\, dx$

$$\Rightarrow \int_E f\, dx \le \underline{\lim}_{k\to\infty}\int_E f_k\, dx$$

$\underline{\lim}_{k\to\infty}\int_E g_k-f_k\, dx \ge \int_E g-f\, dx$

$$\Rightarrow \int_E f\, dx \ge \overline{\lim}_{k\to\infty}\int_E f_k\, dx$$

$\Rightarrow$ 相等 $\Rightarrow \int_E f\, dx = \lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k\, dx$

25. 设f是[a.b]有界, 不连续点集记为D 若D只有可列个极限点, 试证明: $f(x)$是[a.b]上的 Riemann可积函数

P_{35} 思考题 2

设$E\subset\mathbb{R}^n$. 若E'可数集. 则E是可数集. 因为D只有可列个极限点, 所以D可数. 即不连续点可数 $m(D)=0$. 又f在[a.b]有界. 所以 Riemann可积

28. $f\in R([0,1]) \Rightarrow f(x^2)\in R([0,1])$

考虑$f(x^2)$的不连续点 x_0

则用定义 $\Rightarrow x_0^2$是f不连续点

$\Rightarrow f(x^2)$不连续点测度为0

29. $f.g$在$E\subset\mathbb{R}$可测, $m(E)<+\infty$ 若$f(x)+g(y)$在$E\times E$可积, 试证: $f(x), g(x)$可积

由Fubini. a.e. $y\in E$, $f(x)+g(y)$关于x可积. 选y_0 $g(y_0)<+\infty$

则 $f(x)+g(y_0)$ 关于x可积.

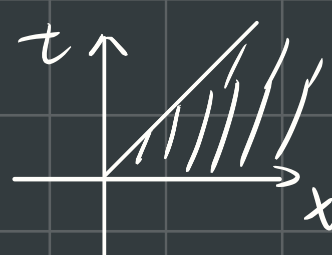
$$\int_E f(x)\,dx=\int_E(f(x)+g(y_0))dx-\int_E g(y_0)\,dx<+\infty \Rightarrow f(x)\text{可积}.$$

32. $f\in L(\mathbb{R})$. $xf(x)$可积. 令$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$

若$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=0$. 试证: $F\in L(\mathbb{R})$

$\int_{-\infty}^{+\infty}|xf(x)|dx<+\infty$, 由Tonelli

$$\infty>\int_0^{+\infty}|xf(x)|\,dx=\int_0^{+\infty}\int_0^{x}|f(x)|\,dt\,dx \Rightarrow |f(x)|\cdot\mathbb{1}_{[0,x]}(t)\in L([0,+\infty)^2)$$



由Fubini

$$\infty>\left|\int_0^{\infty}xf(x)\,dx\right|=\left|\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}f(x)\chi_{[0,x)}(t)\,dt\,dx\right|$$

$$=\left|\int_0^{\infty}\int_t^{\infty}f(x)\,dx\,dt\right|=\left|\int_0^{\infty}\left(-\int_{-\infty}^{t}f(x)\right)dx\,dt\right|=\left|\int_0^{\infty}F(t)\,dt\right|$$

$\Rightarrow F\in L([0,+\infty))$. 类似另一侧

34. $f \in L((0,a))$，$g(x) = \int_x^a \frac{f(t)}{t} dt \ (a > x > 0)$. 试证 $g \in L((0,a))$

且有 $\int_0^a g(x) dx = \int_0^a f(x) dx$

Tonelli： $\left|\int_0^a g(x) dx\right| \leqslant \int_0^a \int_x^a \frac{|f(t)|}{t} dt\, dx = \int_0^a \int_0^a \frac{|f(t)|}{t} \chi_{[x,a]}(t)\, dt\, dx$

$= \int_0^a \frac{|f(t)|}{t} dt \int_0^a \chi_{[x,a]}(t)\, dx = \int_0^a |f(t)| dt < \infty$

$\Rightarrow g$ 可积，且 $\frac{|f(t)|}{t} \chi_{[x,a]}(t) \in L((0,a))$

Fubini： $\int_0^a g(x) dx = \int_0^a f(x) dx$

第5章

1. 听不懂

习题5

4. $f(x)\in BV[0,a]$，$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$，$F(0)=0$ 是$[0,a]$上的有界变差函数

存在$[0,a]$上的单调递增函数，使 $f(x)=g(x)-h(x)$

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{x}\int_0^x (g(t)-h(t))dt$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt-\frac{1}{x}\int_0^x h(t)dt$$

$$=G(x)-H(x)$$

$F(0)=0$，补充定义 $G(0)=H(0)=0$

此时 $\forall x,y\in[0,a]$，有 $G(x)-G(y)=\frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt-\frac{1}{y}\int_0^y g(t)dt$

$$=\frac{1}{x}\left(\int_0^y+\int_y^x\right)-\frac{1}{y}\int_0^y$$

$$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\int_0^y g(t)dt+\frac{1}{x}\int_y^x g(t)dt$$

$$\geqslant\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\int_0^y g(t)dt+\frac{1}{x}g(y)(x-y)$$

$$=\frac{(x-y)}{xy}\left(y\,g(y)-\int_0^y g(t)dt\right)$$

$$=\frac{x-y}{xy}\int_0^y (g(y)-g(t))dt\geqslant 0$$

从而G递增

故 $G(x)$亦为递增函数

同理 $H(x)$递增

$\Longrightarrow$ F是有界变差函数

5. $f_k\in BV([a,b])$　$\bigvee_a^b f_k\leqslant M$，$\lim\limits_{k\to\infty}f_k=f$

试证明 $f\in BV([a,b])$，满足 $\bigvee_a^b f\leqslant M$

对任意分划 $a=x_0<\cdots<x_n=b$

$$\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\sum_{i=1}^n\left|\lim_{k\to\infty}(f_k(x_i)-f_k(x_{i-1}))\right|$$

$$=\sum_{i=1}^n\lim_{k\to\infty}|f_k(x_i)-f_k(x_{i-1})|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |f_k(x_i) - f_k(x_{i-1})|$$

$$\le M$$

即证

6. 设 $f \in BV([a,b])$，$x_0 \in [a,b]$ 是 $f(x)$ 连续点，证 $\bigvee_a^x f$ 在 x_0 处连续

$\forall |x - x_0| < \delta$，$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

(1) 先证右连续，只用 $\bigvee_{x_0}^{x_0+\delta} f < \varepsilon$

$\exists$ 分划 $x_0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = x_0 + \delta$

$$\bigvee_{x_0}^{x_0+\delta} f \le \sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(y_{i-1})| + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\bigvee_{x_0}^{y_1} f = \bigvee_{x_0}^{x_0+\delta} - \bigvee_{y_1}^{x_0+\delta}$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(y_{i-1})| + \frac{\varepsilon}{2} - \sum_{i=2}^{n} |f(y_i) - f(y_{i-1})|$$

$$= |f(y_1) - f(y_0)| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$\Rightarrow \forall x \in (x_0, y_1)$，有 $\bigvee_{x_0}^{x} \le \bigvee_{x_0}^{y_1} < \varepsilon$

(2) 再证左连续，类似

注意 δ 小一点

7.

对任意分划 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$

$I_i = [x_{i-1}, x_i]$

$f(I_i)$ 是区间

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \le \sum_{i=1}^{n} f(I_i) \text{ 的区间长}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_c^d \chi_{f(I_i)}(y)\, dy$$

$$= \int_c^d \sum_{i=1}^n \chi_{f(z_i)}(y)\,dy$$

$$\leq 10(d-c)$$

(至多10个值)

8

证：记任意 $[a,b]$ 为 $[x, x+\Delta x]$

则 $\left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right|^2 \leq (g(x+\Delta x)-g(x))\Delta x$

$$\Rightarrow \left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt / \Delta x\right|^2 \leq \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

由 $f\in L([0,1])$，$g(x)$ 是 $[0,1]$ 上单调上升函数

上式两边同时令 $\Delta x \to 0^+$，有

$$|f(x)|^2 \leq g'(x),\ a.e.\ x$$

$$\Rightarrow \int_0^1 |f(x)|^2 dx \leq \int_0^1 g'(x)\,dx \leq g(1)-g(0) < \infty$$

$\Rightarrow$ 可积