目 录

第六 章 函数的定积分及其应用 5

6.1 定积分的定义 . . . 5
6.1.1 积分的定义的引进 . . . 5
6.1.2 习题6.1 . . . 9
6.2 可积性理论 . . . 10
6.2.1 记号 . . . 10
6.2.2 定积分存在的条件 . . . 10
6.2.3 可积函数类 . . . 14
6.2.4 习题6.2 . . . 16
6.3 定积分的性质 . . . 16
6.3.1 定积分的性质 . . . 16
6.3.2 习题6.3 . . . 20
6.4 定积分的计算 . . . 21
6.4.1 定积分计算的基本公式 . . . 21
6.4.2 定积分的换元公式 . . . 23
6.4.3 定积分的分部积分公式 . . . 24
6.4.4 杂例 . . . 26
6.4.5 习题6.4 . . . 27
6.5 定积分在几何上的应用 . . . 28
6.5.1 平面图形的面积 . . . 28
6.5.2 立体的体积 . . . 32
6.5.3 平面曲线的弧长 . . . 36
6.5.4 旋转体的侧面积 . . . 38
6.5.5 习题6.5 . . . 40
6.6 定积分在物理上的应用 . . . 41
6.6.1 密度, 质量和质心 . . . 42
6.6.2 变力所作的功 . . . 44
6.6.3 引力问题 . . . 45
6.6.4 液体的侧压力 . . . 46
6.6.5 函数的平均值 . . . 47
6.6.6 习题6.6 . . . 49
6.7 第六章典型例题 . . . 49
6.7.1 典型例题 . . . 49
6.7.2 第六章复习题 . . . 64

第七 章 数项级数 1

7.1 数项级数的基本概念和性质 . . . 1
7.1.1 数项级数的基本概念 . . . 1
7.1.2 数项级数的基本性质 . . . 2
7.1.3 柯西收敛准则 . . . 4
7.1.4 习题7.1 . . . 6
7.2 正项级数 . . . 7
7.2.1 正项级数 . . . 7
7.2.2 习题7.2 . . . 15
7.3 第七章典型例题选讲一 . . . 16
7.3.1 例题选讲 . . . 16
7.3.2 第七章复习题一 . . . 20

7.4 任意项级数 . . . 21
7.4.1 绝对收敛级数 . . . 21
7.4.2 交错级数 . . . 22
7.4.3 Abel判别法与Dirichlet判别法 . . . 24
7.4.4 绝对收敛级数和条件收敛级数的性质 . . . 26
7.4.5 级数的乘法 . . . 28
7.4.6 习题7.3 . . . 30
7.5 第七章典型例题选讲二 . . . 32
7.5.1 例题选讲 . . . 32
7.5.2 第七章复习题二 . . . 34

第八章 广义积分 37
8.1 无穷限的广义积分 . . . 37
8.1.1 无穷限广义积分的概念 . . . 37
8.1.2 无穷限广义积分和数项级数的关系 . . . 39
8.1.3 无穷限广义积分敛散性的判别法 . . . 39
8.1.4 阿贝尔(Abel)判别法与狄里克莱(Dirichlet)判别法 . . . 41
8.1.5 习题8.1 . . . 44
8.2 无界函数的广义积分 . . . 44
8.2.1 无界函数广义积分的概念 . . . 44
8.2.2 无界函数广义积分敛散性的判别法 . . . 45
8.2.3 习题8.2 . . . 47
8.3 第八章典型例题选讲 . . . 47
8.3.1 例题选讲 . . . 47
8.4 第八章复习题 . . . 53

第九章 函数项级数与幂级数 55
9.1 一致收敛 . . . 55
9.1.1 函数项级数的定义 . . . 55
9.1.2 问题的提出 . . . 55
9.1.3 一致收敛的定义 . . . 56
9.1.4 习题9.1 . . . 57
9.2 一致收敛级数的判别法 . . . 58
9.2.1 一致收敛级数的判别法 . . . 58
9.2.2 习题9.2 . . . 60
9.3 一致收敛级数的和函数性质 . . . 61
9.3.1 一致收敛级数的和函数性质 . . . 61
9.3.2 习题9.3 . . . 66
9.4 第九章典型例题选讲一 . . . 66
9.4.1 例题选讲 . . . 66
9.4.2 第九章复习题一 . . . 69
9.5 幂级数 . . . 70
9.5.1 幂级数的收敛半径 . . . 70
9.5.2 幂级数的性质 . . . 73
9.5.3 函数的幂级数展开 . . . 74
9.5.4 几个基本初等函数的幂级数展开 . . . 76
9.5.5 幂级数的应用 . . . 78
9.5.6 逼近定理 . . . 80
9.5.7 习题9.4 . . . 80
9.6 第九章典型例题选讲二 . . . 81
9.6.1 例题选讲 . . . 81
9.6.2 第九章复习题二 . . . 85

第十 章 Fourier级数与Fourier变换 89
10.1 周期函数的Fourier级数 . . . 89
10.1.1 三角函数系的正交性 . . . 89
10.1.2 Fourier级数的定义 . . . 90
10.1.3 习题10.1 . . . 92
10.2 函数的Fourier级数展开 . . . 92
10.2.1 周期为2π的函数 . . . 92
10.2.2 正弦级数和余弦级数 . . . 93
10.2.3 周期为T的函数 . . . 94
10.2.4 Fourier级数的复数形式 . . . 95
10.2.5 习题10.2 . . . 95
10.3 Fourier级数的敛散性判别法 . . . 96
10.3.1 狄立克莱(Dirichlet)积分 . . . 96
10.3.2 黎曼(Riemann)引理 . . . 97
10.3.3 狄尼(Dini)判别法及其推论 . . . 98
10.3.4 Dirchlet-Jordan定理 . . . 99
10.3.5 Fourier级数的一些性质 . . . 101
10.3.6 习题10.3 . . . 103
10.4 Fourier变换 . . . 104
10.4.1 Fourier变换的定义 . . . 104
10.4.2 Fourier变换的性质 . . . 105
10.4.3 习题10.4 . . . 106
Index 106

第 六 章　函数的定积分及其应用

6.1　定积分的定义

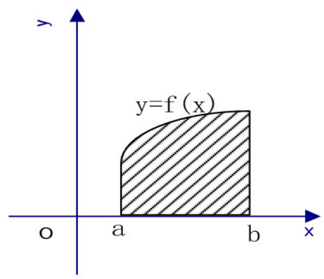
6.1.1　积分的定义的引进

1. **曲边梯形的面积S**

   在初等数学中,已经会求三角形、矩形、多边形等平面直边图形的面积. 对于平面上曲边图形的面积, 除了圆和圆扇形的面积之外, 现在还不会计算.

   平面曲边图形中,最基本的就是曲边梯形,下面来讨论曲边梯形面积的求法.

   在平面直角坐标系xoy中,通常把由三条直线: $x=a$, $x=b$, Ox轴,及一条连续的曲线$y=f(x)(f(x)\geq 0)$所围成的图形称为曲边梯形. 把Ox轴上的区间$[a,b]$称为曲边梯形的底, 而曲线段$y=f(x)(a\leq x\leq b)$称为曲边梯形的曲边.(图1)



   由于曲边梯形在底边上各点处的高$f(x)$在区间$[a,b]$上是变化的,不便于直接求它的面积. 注意到$f(x)$是连续的,当x变化不大时,$f(x)$的变化也不大.

   当用一组垂直于Ox轴的直线,把曲边梯形分成很多窄条形的小曲边梯形时,在这些小曲边梯形内,高度的差别不大, 就可以用一点处的高度, 近似代替小曲边梯形内各点处的高度,从而用一个小矩形的面积,近似地代替小曲边梯形的面积. 只要曲边梯形分割得足够细,且所有的小曲边梯形的底部宽度都很小,这时,小矩形的面积与相应的小曲边梯形的面积就越接近,所有的小矩形面积之和,就越逼近原来的大曲边梯形的面积S。现详述如下:

   (1) 分割
   把区间$[a,b]$任意分割为n个子区间,其分点为

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b.$$

   每一个子区间$[x_{i-1},x_i]$的长度记为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ $(i=1,2,\cdots,n)$.
   过各分点作垂直于Ox轴的直线,把原来的大曲边梯形分成n个小曲边梯形,分别把这些小曲边梯形的面积记为ΔS_i, $(i=1,2,\cdots,n)$. 则

$$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i.$$

   (2) 以常代变(近似代替)
   在每一个小曲边梯形中,以底边长为Δx_i, 底边$[x_{i-1},x_i]$ 上任意一点ξ_i 处的高度$f(\xi_i)$ $(\xi_i\in[x_{i-1},x_i])$ 为高的小矩形的面积$f(\xi_i)\Delta x_i$ 近似代替小曲边梯形的面积ΔS_i, 即

$$\Delta S_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i,\ (i=1,2,\cdots,n).$$

(3) 求和

把n个小矩形的面积加起来,就得到大曲边梯形面积S的近似值：

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

(4) 取极限

一般地说,无论n多么大,各子区间的宽度Δx_i多么小,和式$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$仍然不等于曲边梯形的面积$S$,它只是$n$个小矩形组成的台阶形的面积.

若把区间$[a,b]$的分割无限地变细,使每一个子区间的长度Δx_i皆趋于零,则台阶形的面积$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$,与曲边梯形的面积$S$的差别就越来越小.

为了求出S 的精确值,令$\|T\| = \max\limits_{1\leq i\leq n} \Delta x_i$, 如果无论对区间$[a,b]$ 采取何种分割,也不论点ξ_i 在子区间$[x_{i-1},x_i]$ 中如何取法,只要分割无限地变细,当$\|T\| \to 0$ 时,和式$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 均存在唯一的极限, 则这个极限值就是曲边梯形的面积S. 即

$$S = \lim_{\|T\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

2. **变速直线运动的路程**

设物体作直线运动,速度为v,求从时刻$t=a$到$t=b$时物体所走过的路程s. 如果速度v不变,物体作匀速直线运动,路程s等于速度乘以所用的时间：$s = v(b-a)$.

现在考虑物体作变速直线运动,其速度v随时间t而改变,即$v = v(t)$ $(a \leq t \leq b)$是t的连续函数,要求物体在时间间隔$[a,b]$上所走过的路程s. 解决这个问题的办法与上面求曲边梯形的面积相似.

(1) 分割

把区间$[a,b]$任意分割为n个子区间,其分点为

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b.$$

每一个子区间$[t_{i-1},t_i]$的长度记为$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ $(i = 1,2,\cdots,n)$. 物体在时间间隔$[a,b]$上所走过的路程s,等于它在各子区间时间间隔$[t_{i-1},t_i]$上所走过的路程之和.

(2) 以常代变(近似代替)

在每一小段时间$[t_{i-1},t_i]$上,以任意一时刻ξ_i处的速度$v(\xi_i)$代替这一小段时间上各点处的速度,得到物体在这一小段时间上路程Δs_i的近似值：

$$\Delta s_i \approx v(\xi_i)\Delta t_i, (i = 1,2,\cdots,n).$$

(3) 求和

把上面的n个Δs_i的近似值加起来,就得到路程s的近似值：

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i.$$

(4) 取极限

很明显,分割越细,总的误差就越小,把区间$[a,b]$无限地细分下去. 如果无论对$[a,b]$采取何种分割,也不论ξ在$[t_{i-1},t_i]$中如何取法,记$\max\limits_{1\leq i\leq n} \Delta t_i = \|T\|$, 当$\|T\| \to 0$时,和式$\sum\limits_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$均存在唯一的极限, 则这个极限值就是路程$s$ 的精确值. 即

$$s = \lim_{\|T\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i.$$

定义 6.1.1 函数f在区间$[a,b]$上有定义,如果存在实数I使得对于任意给定的$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 只要$[a,b]$的分割$T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$适合$\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i-x_{i-1}|<\delta$, 而不管$\xi_i\in[x_{i-1},x_i](1\le i\le n)$如何选择,都有

$$\left|I-\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right|<\varepsilon$$

成立时,称f在$[a,b]$上可积,称I是f在$[a,b]$上的$Riemann$定积分. 函数的积分通常用符号$\int_a^b f(x)dx$来表记,其中a与b分别称为积分的下限和上限,f称为被积函数,x称为积分变量,$f(x)dx$叫做被积表达式.

定理 6.1.2 函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积的必要条件是$f(x)$在$[a,b]$上有界.

证明. 因为$f(x)$在$[a,b]$上可积,故存在实数I,使对$\varepsilon_0=1$,存在$\delta>0$, 只要$\|T\|<\delta$,无论怎样选取$\xi_k\in[x_{k-1},x_k], k=1,\cdots,n$, 都有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k-I\right|<1.$$

取n足够大,使$\dfrac{b-a}{n}<\delta$. 将区间$[a,b]$均分成n等分并记相应的分割为$T=\{x_k\}$. 对任意$j, 1\le j\le n$, 取$\xi_k=x_k, k\ne j$. 于是任意$x\in[a,b]$, 存在$1\le j\le n$, 使$x\in[x_{j-1},j]$.

$$\left|\sum_{k\ne j}^{n}f(x_k)\Delta x_k+f(\xi_j)\Delta x_j-I\right|<1,$$

$$|f(\xi_j)\Delta x_j|<|I|+1+\sum_{k\ne j}^{n}|f(x_k)\Delta x_k|,$$

$$|f(\xi_j)|<\frac{n(|I|+1)}{b-a}+\sum_{k\ne j}^{n}|f(x_k)|<\frac{n(|I|+1)}{b-a}+\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)|.$$

由于上式右端为常数, 取$\xi_j=x$, 再由x的任意性知$f(x)$在$[a,b]$上有界. ■

此外,从定积分的定义可以看出,定积分的值与积分变量无关,即有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt.$$

因此,在进行运算或论证时,可随时根据需要而改换积分变量.

在定义中我们总假定$a<b$,即下限小于上限. 但在以后运算中,也会遇到下限不小于上限的情形. 但由定义可直接看出:

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx, \int_a^a f(x)dx=0.$$

定积分的这种概念是由黎曼首先引入,所以当有必要与其他方法所定义的积分相区别时,我们将把这种积分称之为黎曼积分.

注 定积分的几何意义:$\int_a^b f(x)dx$表示$y=f(x), x=a, x=b$与x轴所围若干曲边梯形的面积的代数和.

例 6.1.3 证明$\int_a^b 1dx=b-a$.

证明. 设$f(x)=1$, $\forall\varepsilon>0, \forall$ 分割$T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, $\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, 因为

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}1\Delta x_i=b-a,$$

所以

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - (b-a)\right| = 0 < \varepsilon,$$

$$\int_a^b 1dx = b-a.$$

■

例 6.1.4 计算$\int_a^b xdx$.

解. 设$f(x)=x$, $\forall\varepsilon>0, \exists\delta<\varepsilon, \forall$ 分割$T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 任取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$. 记$\eta_i=\frac{x_i+x_{i-1}}{2}$,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\eta_i\Delta x_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-x_{i-1}^2) = \frac{1}{2}(b^2-a^2).$$

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n}\eta_i\Delta x_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)\Delta x_i\right| \\ &\le \sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|\Delta x_i \le \|T\|\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i \\ &= \|T\|(b-a) < (b-a)\delta < (b-a)\varepsilon,\end{aligned}$$

所以

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Delta x_i - \frac{1}{2}(b^2-a^2)\right| < \varepsilon,$$

$$\int_a^b xdx = \frac{1}{2}(b^2-a^2).$$

■

定理 6.1.5 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,且在$[a,b]$上有原函数$F(x)$,则有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = F(x)\mid_a^b = F(b)-F(a).$$

证明. $f(x)$在$[a,b]$上连续, 进而一致连续, 由此$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当$x^{(1)}, x^{(2)}\in[a,b]$, $|x^{(1)}-x^{(2)}|<\delta$时

$$|f(x^{(1)})-f(x^{(2)})|<\varepsilon.$$

对任意分割$T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 将$F(x)$在$[x_{i-1},x_i]$上用拉格朗日中值定理, 存在$\eta_i\in[x_{i-1},x_i]$使得$F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\eta_i)\Delta x_i=f(\eta_i)\Delta x_i$, 而

$$F(b)-F(a) = \sum_{i=1}^{n}\left(F(x_i)-F(x_{i-1})\right) = \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i.$$

当$\|T\|<\delta, \forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$时

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - (F(b)-F(a))\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i)-f(\eta_i))\Delta x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)-f(\eta_i)|\,\Delta x_i \\ &< \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = (b-a)\varepsilon,\end{aligned}$$

从而
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$
■

例 6.1.6 计算 *(1)* $\int_0^1 x^2dx$; *(2)* $\int_0^\pi \sin xdx$.

解. (1) 因为x^2在$[0,1]$上连续, $\left[\frac{1}{3}x^3\right]' = x^2$, 所以
$$\int_0^1 x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}.$$
(2) 因为$\sin x$在$[0,\pi]$上连续, $[-\cos x]' = \sin x$, 所以
$$\int_0^\pi \sin xdx = [-\cos x]_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = 2.$$
■

例 6.1.7 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$.

解. $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\left(\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})\right)}$.
令$f(x)=\ln(1+x)$, 则$f(x)$在$[0,1]$上连续且
$$\int f(x)dx = x\ln(1+x) + \ln(1+x) - x + C,$$
所以$F(x) = x\ln(1+x)+\ln(1+x)-x$是$f(x)$的一个原函数, 由定理6.1.2 知
$$\int_0^1 \ln(1+x)dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = 2\ln 2.$$
一方面, 取$T: 0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < 1$, $\|T\| = \frac{1}{n}$, $x_i = \frac{i}{n}, \Delta x_i = \frac{1}{n}$. 由定积分的定义知
$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1+x)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right),\end{aligned}$$
故
$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\int_0^1\ln(1+x)dx} = e^{2\ln 2 - 1} = \frac{4}{e}.$$
■

6.1.2 习题6.1

1. 利用定积分的定义计算：

(1) $\int_0^1 (ax+b)dx$; (2) $\int_{-2}^2 x^2dx$;
(3) $\int_0^3 x^3dx$; (4) $\int_0^1 a^xdx$.

2. 求极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n \sin(\frac{k\pi}{n})$;
(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2})$.
(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}$.

3. 求极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+\sqrt{x}}dx$.

6.2 可积性理论

6.2.1 记号

由于可积函数必是有界的,在讨论可积性的时候,我们总假设函数f 在$[a,b]$ 上有界,用M 与m 分别记f 在$[a,b]$ 上的上确界与下确界,令$\omega = M-m$, 称ω 为f 在$[a,b]$ 上的振幅.

对于$[a,b]$ 的任何分割$T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 在$T$ 的第i个子区间$[x_{i-1},x_i]$ 上f 的上确界与下确界分别记为M_i 与m_i,并令$\omega_i=M_i-m_i$ 称之为f 在$[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅,这里$i=1,2,\cdots,n$. 定义

$$\overline{S}(T)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i, \underline{S}(T)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i,$$

并称它们是f 关于分割T 的达布上和与达布下和. 显然

$$\underline{S}(T)\le\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\le\overline{S}(T).$$

6.2.2 定积分存在的条件

定理 6.2.1 如果在原有的分点中加入新的分点，则上和不增，下和不减，也就是说，分割T加入新分点后对应的分割T' 的上和及下和分别记为$\overline{S}(T)$及$\underline{S}(T')$，则$\overline{S}(T')\le\overline{S}(T), \underline{S}(T')\ge\underline{S}(T)$.

证明. 设原有分点为$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 不失一般性，不妨假定只在$[x_{i-1},x_i]$中插入一个新分点$x': x_{i-1}<x'<x_i$. 记

$$M_{i1}=\sup\{f(x)|x\in[x_{i-1},x']\}, M_{i2}=\sup\{f(x)|x\in[x',x_i]\}.$$

显然$M_{i1}\le M_i, M_{i2}\le M_i$, 所以

$$M_{i1}(x'-x_{i-1})+M_{i2}(x_i-x')\le M_i(x_i-x_{i-1}).$$

而在$\overline{S}(T)$及$\overline{S}(T')$中其它各项并无变动，因此$\overline{S}(T')\le\overline{S}(T)$. 同理可证

$$\underline{S}(T')\ge\underline{S}(T).$$

■

定理 6.2.2 设$f(x)$在$[a,b]$上有界, 则有对于一切分割T，有

$$m(b-a)\le\underline{S}(T)\le\overline{S}(T)\le M(b-a),$$

这里分别用M及m记$f(x)$在$[a,b]$的上确界及下确界.

证明. 沿用以上记号，显然有$m\le m_i\le M_i\ge M$，于是有

$$\underline{S}(T)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i\ge m(b-a);$$

$$\overline{S}(T)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}M\Delta x_i=M(b-a).$$

故

$$m(b-a)\le\underline{S}(T)\le\overline{S}(T)\le M(b-a).$$

■

定理 6.2.3 对任何两个分割T_1,T_2，都有$(\underline{S}(T_1)\le\overline{S}(T_2))$.

证明. 对于$[a,b]$设有两个独立的分割T_1,T_2，对应的达布和分别记为$\underline{S}(T_1),\overline{S}(T_1)$ 及$\underline{S}(T_2),\overline{S}(T_2)$，我们来证明$\underline{S}(T_1)\ \le\ \overline{S}(T_2)$. 把两种分割的分点合在一起，也是一种分割$T_1\cup T_2$，对应的达布和分别记为$\underline{S}(T_1\cup T_2)$，及$\overline{S}(T_1\cup T_2)$.于是由定理6.2.1可知

$$\underline{S}(T_1)\le \underline{S}(T_1\cup T_2)\le \overline{S}(T_1\cup T_2)\le \overline{S}(T_2).$$

根据定理6.2.2，下和的集合$\{\underline{S}\}$有上界，从而必有上确界，记为l，即$l=\sup\limits_{T}\underline{S}(T)$，再由定理6.2.3可知$l\le\overline{S}(T)$. 同理记上和集合$\{\overline{S}\}$的下确界为$L$，就有$\underline{S}(T)\le L$，而显然$l\le L$，综合这些事实，有

$$\underline{S}(T)\le l\le L\le \overline{S}(T).$$

■

现在我们进一步证明，上述达布上和集合$\{\overline{S}(T)\}$ 的下确界L 及达布下和集合$\{\underline{S}(T)\}$ 的上确界l, 正好就是这些和的极限，这就下述的定理.

定理 6.2.4 (达布定理) 对任何有界函数$f(x)$，必有$\lim\limits_{\|T\|\to 0}\overline{S}(T)=L$, $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\underline{S}(T)=l$.

证明. 我们仅对上和的情形加以证明. 由于L是$\{\overline{S}(T)\}$的下确界，所以对于任意$\varepsilon>0$，可以对$[a,b]$作一分割

$$T':a=x'_0<x'_1<\cdots<x'_{p-1}<x'_p=b$$

使得对应于这一分割的上和$\overline{S}(T')$满足$L\le\overline{S}(T')\le L+\frac{\varepsilon}{2}$,，即

$$0\le\overline{S}(T')-L<\frac{\varepsilon}{2}.$$

固定了p及$\{x'_i\}$以后，可取

$$\delta=\min\{x'_1-x'_0,x'_2-x'_1,\cdots,x'_p-x'_{p-1},\frac{\varepsilon}{2(p-1)(M-m)}\}$$

其中M,m分别为$f(x)$ 在$[a,b]$的上、下确界.

于是，为了得到所需的结论，只要证明，对任意的分割$T:a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 只要$\|T\|<\delta$时，就成立

$$|\overline{S}(T)-L|=\overline{S}(T)-L<\varepsilon$$

（其中$\overline{S}(T)$为与此任意分割T对应的上和）即可.

事实上，合并以上两个分割的分点，作为新分割的分点，这样得到一个新的分割，设其对应的上和为$\overline{S}(T\cup T')$，那么，由于任一长度x_i-x_{i-1}都小于任一长度$x'_j-x'_{j-1}$，所以在每一部分区间(x_{i-1},x_i)内至多只有$\{x'_j\}$中的一个点，又因x'_0,x'_p分别与x_0,x_p重合，因而它们不在(x_0,x_1)及(x_{n-1},x_n)内，因此,含有$\{x'_j\}$的部分区间(x_{i-1},x_i)最多只有$p-1$个. 另一方面, 若(x_{i-1},x_i)中不含有x'_j的点, 则在$S(T)$及$S(T\cup T')$中都含有项$M_i(x_i-x_{i-1})$, 从而在差$S(T)-S(T\cup T')$中只剩下(x_{i-1},x_i)中含有x'_j点的那些项的差. 设(x_{i-1},x_i)中含有点x'_j, 而M_{i1},M_{i2}分别为$f(x)$在$[x_{i-1},x'_j]$及$[x'_j,x_i]$的上确界,那么对于含有x'_j的这种部分区间(x_{i-1},x_i)作和, 得

$$\begin{aligned}0\le\overline{S}(T)-\overline{S}(T\cup T')&=\sum M_i(x_i-x_{i-1})-\sum[M_{i1}(x'_j-x_{i-1})+M_{i2}(x_i-x'_j)]\\&=\sum(M_i-M_{i1})(x'_j-x_{i-1})+\sum(M_i-M_{i2})(x_i-x'_j)\\&\le(M-m)[\sum(x'_j-x_{i-1})+\sum(x_i-x'_j]\\&=(M-m)\sum(x_i-x_{i-1})\le(M-m)(p-1)\|T\|\\&<(M-m)(p-1)\cdot\frac{\varepsilon}{2(p-1)(M-m)}=\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

另一方面, 由定理6.2.1有

$$\overline{S}(T\cup T')-L\le\overline{S}(T')-L<\frac{\varepsilon}{2}$$

于是, 将上面的两个不等式相加,得$0\le\overline{S}(T)-L<\varepsilon$. 定理得证. ■

定理 6.2.5 (定积分存在的第一充要条件) 有界函数$f(x)$在$[a,b]$上可积的充要条件是$L=l$, 即$\lim\limits_{\|T\|\to 0}\overline{S}(T)=\lim\limits_{\|T\|\to 0}\underline{S}(T)$.

证明. 必要条件. 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积, 其定积分为I. 于是按定义知, 对任何$\varepsilon>0$,都存在$\delta>0$, 使对$[a,b]$上的任何分割$T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 只要$\|T\|<\delta$, 对$\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, 就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

设M_i为$f(x)$在$[x_{i-1},x_i]$上的上确界,由上确界定义,可得$\eta_i\in[x_{i-1},x_i]$, 使

$$0\le M_i-f(\eta_i)<\frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

于是

$$\left|\overline{S}(T)-\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i)\Delta x_i\right|=\sum_{i=1}^{n}(M_i-f(\eta_i))\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\frac{\varepsilon}{2}.$$

同时, 因为$\eta_i\in[x_{i-1},x_i]$, 故

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i)\Delta x_i-I\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是有

$$|\overline{S}(T)-I|\le\left|\overline{S}(T)-\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i)\Delta x_i\right|+\left|\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i)\Delta x_i-I\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即

$$\lim_{\|T\|\to 0}\overline{S}(T)=I.$$

同理可证

$$\lim_{\|T\|\to 0}\underline{S}(T)=I.$$

由此可见,当$f(x)$可积时, L与l相等, 而且就是$f(x)$在$[a,b]$上的积分值.

充分性. 设$\lim\limits_{\|T\|\to 0}\overline{S}(T)=\lim\limits_{\|T\|\to 0}\underline{S}(T)=I$. 对于$[a,b]$上的任何分割

$$T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

以及$\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,有

$$\underline{S}(T)\le\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\le\overline{S}(T).$$

由夹逼原理得

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=I,$$

从而$f(x)$在$[a,b]$上可积. ■

推论 6.2.6 有界函数$f(x)$在$[a,b]$上可积的充要条件是

$$\lim_{\|T\|\to 0}(\overline{S}(T)-\underline{S}(T))=0,$$

推论 6.2.7 有界函数$f(x)$在$[a,b]$上可积的充要条件是

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0,$$

即$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 对任意的分割$T:a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 只要$\|T\|<\delta$时，$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$.

注意定理6.2.4（达布定理）的证明,实际上证明了: $\forall\varepsilon>0$, 若存在一个分割T'使得$0\le l-\underline{S}(T')<\frac{\varepsilon}{2}$ (或$0\le\overline{S}(T')-L<\frac{\varepsilon}{2}$), 那么就一定存在某个$\delta>0$,对满足$\|T\|<\delta$的任意一种分割$T$, 必有

$$0\le l-\underline{S}(T)<\frac{\varepsilon}{2}(\text{或}0\le\overline{S}(T)-L<\frac{\varepsilon}{2}).$$

利用这一思想, 结合定理6.2.4的证明即可推出如下推论.

推论 6.2.8 有界函数$f(x)$在$[a,b]$上可积的充要条件是$\forall\varepsilon>0$, 存在分割$T:a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$满足$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$.

证明. 由推论6.2.7, 必要条件显然,下证充分性. 由条件$\forall\varepsilon>0,\exists$分割$T'$满足

$$\overline{S}(T')-\underline{S}(T')=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{3}.$$

同定理**??**, $\exists\delta>0$, $\forall$分割T, 当$\|T\|<\delta$时

$$\underline{S}(T\cup T')-\underline{S}(T)<\frac{\varepsilon}{3},\overline{S}(T)-\overline{S}(T\cup T')<\frac{\varepsilon}{3}.$$

再由定理6.2.8得

$$\begin{aligned}\overline{S}(T)-\underline{S}(T)&=\overline{S}(T)-\overline{S}(T\cup T')+\overline{S}(T\cup T')-\underline{S}(T\cup T')+\underline{S}(T\cup T')-\underline{S}(T)\\&\le\big(\overline{S}(T)-\overline{S}(T\cup T')\big)+\big(\overline{S}(T')-\underline{S}(T')\big)+\big(\underline{S}(T\cup T')-\underline{S}(T)\big)\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

由推论6.2.7知$f(x)$在$[a,b]$上可积. ∎

定理 6.2.9 (定积分存在的第二充要条件) 有界函数$f(x)$在$[a,b]$上可积的充要条件是：对任意给定的两个正数$\eta>0$ 及$\sigma>0$，可找到$\delta>0$，使当任一分割满足$\|T\|<\delta$时，对应于幅度$\omega_{i'}\ge\eta$的那些区间$\Delta x_{i'}$的长度之和$\sum\limits_{i'}\Delta x_{i'}<\sigma$.

证明. 必要性. 对于任给的$\eta>0$ 及$\sigma>0$, 令$\varepsilon=\eta\sigma$. 由于$f(x)$在a,b上可积, 故有$\delta>0$, 使当$\|T\|<\delta$时, 就有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon=\eta\sigma.$$

于是有

$$\eta\sigma>\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\ge\sum_{i'}^{n}\omega_{i'}\Delta x_{i'}>\eta\sum_{i'}^{n}\Delta x_{i'},$$

所以

$$\sum_{i'}^{n}\Delta x_{i'}<\sigma,$$

其中$\omega_{i'} > \eta$，而$\sum\limits_{i'}^{n}$表示对振幅$\omega_{i'} > \eta$的那些项求和.

充分性. 对于任给的$\varepsilon > 0$, 取$\eta = \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}, \sigma = \dfrac{\varepsilon}{2(M-m)+1}$. 设$\omega_{i''} \leq \eta$，而$\sum\limits_{i''}$表示对振幅$\omega_{i''} \leq \eta$的那些项求和. 按充分性条件有$\delta > 0$, 使当$\|T\| < \delta$时, 就有

$$\sum_{i'} \Delta x_{i'} < \sigma.$$

从而有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i &= \sum_{i'}^{n} \omega_{i'} \Delta x_{i'} + \sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} \\ &< (M-m) \sum_{i'} \Delta x_{i'} + \eta \sum_{i''} \Delta x_{i''} \\ &< (M-m)\sigma + \eta(b-a) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

从而由推论6.2.7知$f(x)$在$[a,b]$上可积. ∎

推论 6.2.10 有界函数$f(x)$在$[a,b]$上可积的充要条件是：对任意给定的两个正数$\eta > 0$ 及$\sigma > 0$，均存在一分割T，使得对应于幅度$\omega_{i'} \geq \eta$的那些区间$\Delta x_{i'}$的长度之和$\sum\limits_{i'} \Delta x_{i'} < \sigma$.

6.2.3 可积函数类

利用定理6.2.5和定理6.2.9, 可以证明如下的结果.

定理 6.2.11 下列三类函数是可积的:

(i) $[a,b]$上的连续函数.

(ii) 在$[a,b]$上仅有有限个间断点*(*即分段连续函数*)*的有界函数.

(iii) $[a,b]$上的单调函数.

证明.

(i) 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续, 则$f(x)$在$[a,b]$上一致连续.由此对于任给的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使当$x^{(1)}, x^{(2)} \in [a,b]$ 且$|x^{(1)} - x^{(2)}| < \delta$时, 就有

$$|f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

对于满足$\|T\| < \delta$的任意分割$T: a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 有

$$\omega_i = M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}, i = 1, 2, \cdots, n,$$

其中M_i, m_i分别为$f(x)$在$[x_{i-1}, x_i]$上的上确界和下确界. 因而

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon,$$

$f(x)$在$[a,b]$上可积.

(ii) 设函数$f(x)$在$[a,b]$上共有p个间断点记为$x_1'<x_2'\cdots<x_{p-1}'<x_p'$, 不妨设$x_0'=a<x_1',x_p'<x_{p+1}'=b$. 对于任给$\forall\varepsilon>0$, 取

$$\delta=\min\{\frac{x_1'-a}{2},\frac{b-x_p'}{2},\frac{x_2'-x_1'}{3},\cdots,\frac{x_p'-x_{p-1}'}{3},\frac{\varepsilon}{4p(M-m)}\}.$$

先以x_j'的δ邻域的两个端点$x_{j-1}'-\delta,x_j'+\delta$为分点, 将$[a,b]$分成$2p+1$个子区间:

$$\begin{aligned}&[a,x_1'-\delta],[x_1'-\delta,x_1'+\delta],[x_1'+\delta,x_2'-\delta],\\&[x_2'-\delta,x_2'+\delta],\cdots,[x_{p-1}'+\delta,x_p'-\delta],[x_p'-\delta,x_p'+\delta],[x_p'+\delta,b].\end{aligned}$$

于是$f(x)$在子区间

$$D^{(1)}=[a,x_1'-\delta],D^{(j)}=[x_{j-1}'+\delta,x_j'-\delta],(j=2,\cdots,p),D^{(p+1)}=[x_p'+\delta,b]$$

上连续,由(i), $f(x)$在这些子区间上都可积, 所以在每个$D^{(j)}$上分别存在分点

$$x_0^{(j)}<x_1^{(j)}<\cdots<x_{l_j}^{(j)}(j=1,\cdots,p+1)$$

使得

$$\sum_{i=1}^{l_j}\omega_i^{(j)}\Delta x_i^{(j)}<\frac{\varepsilon}{2(p+1)}.$$

将所有分点合为一组,看成是的一个分割,记ω_j'为$f(x)$在$[x_j'-\delta,x_j'+\delta]$的振幅,即有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i&\le\sum_{i=1}^{p+1}\sum_{i=1}^{l_j}\omega_i^{(j)}\Delta x_i^{(j)}+\sum_{j=1}^{p}\omega_j'[(x_j'+\delta)-(x_j'-\delta)]\\&<(p+1)\cdot\frac{\varepsilon}{2(p+1)}+\frac{2\varepsilon}{4p(M-m)}\cdot p(M-m)=\varepsilon.\end{aligned}$$

由推论6.2.8知$f(x)$在$[a,b]$可积. 当x_1'和x_p'为$[a,b]$的端点时可类似证得.

(iii) 不妨设$f(x)$在$[a,b]$上递增. 若$f(a)=f(b)$,则$f(x)$在$[a,b]$上恒为常数,当然可积,故不妨设$f(a)<f(b)$. 由于$f(x)$递增, 所以对于$[a,b]$上的任何分割$T:a=x_0<x_1<x_2\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 都有$\omega_i=M_i-m_i=f(x_i)-f(x_{i-1})$. 对于任给的$\varepsilon>0$, 取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$,于是当$\|T\|<\delta$时, 就有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\delta\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}[f(b)-f(a)]=\varepsilon.$$

由定理6.2.9知$f(x)$在$[a,b]$上可积.

■

推论 6.2.12 用类似的方法可以证明在$[a,b]$上的两个函数，如果只在有限个点处具有不同的函数值，而其中的一个函数可积，那么另一个函数也可积，且积分之值相同. 因而，对于一个可积函数变动它的有限个点的值，可积性不变，积分之值也不变.

例 6.2.13 已知黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{p}, & x=\dfrac{q}{p},q\in\mathbf{Z},p\in\mathbf{N},(p,q)=1,\\0, & x\notin\mathbf{Q}.\end{cases}$$

证明$R(x)$在$[0,1]$上的无理点连续,在有理点间断, 但$R(x)$在$[0,1]$上可积且$\int_0^1R(x)dx=0$.

证明. 设x_0是$[0,1]$中任一点, 先证明$\lim\limits_{x\to x_0} R(x)=0$. 即对任意$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时, $|R(x)-0|<\varepsilon$. 事实上, 若x为无理数时, $R(x)=0$, 显然有$|R(x)-0|<\varepsilon$. 若x为无理数时, 设$x=\dfrac{q}{p}$, $p,q\in\mathbf{N}, 0\le q\le p, (p,q)=1$. 对于任意的$\varepsilon>0$, 使$|R(x)|\ge\varepsilon$即$\frac{1}{p}\ge\varepsilon$的值$p$只可能是有限个, 而$0\le q\le p, q\in\mathbf{N}$从而对应的$x$也只可能是有限个,设为$x_1,\cdots,x_n$. 于是在$[0,1]$中除了这有限个点之外,都使$D(x)<\frac{1}{p}<\varepsilon$. 因此对于$[0,1]$中的任一点$x_0\ne x_i$,可取$\delta=\{|x_1-x_0|,|x_2-x_0|,\cdots,|x_n-x_0|\}$; 但若$x_0$是$x_1,\cdots,x_n$中某一个点$x_i$时, 应取$\delta=\{|x_1-x_0|,|x_2-x_0|,\cdots,|x_{i-1}-x_0|,|x_{i+1}-x_0|,\cdots,|x_n-x_0|\}$. 那么从上面的讨论可知,对任意的$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时, $|R(x)|=|R(x)-0|<\varepsilon$, 所以$\lim\limits_{x\to x_0} R(x)=0$. 由此可见, $R(x)$在$[0,1]$上的无理点连续,在有理点间断(可去间断点).

虽然这个函数具有无穷多个不连续点, 但在$[0,1]$仍然是可积的.

对$\forall\eta>0$和$\sigma>0$, 由刚才的讨论知道,$R(\frac{q}{p})=\frac{1}{p}\ge\eta$当且仅当$p<\frac{1}{\eta}$, 由于这样的自然数$p$只有有限多个,且由$\frac{q}{p}\in[0,1]$又知$0\le q\le p$, 所以使$R(x)\ge\eta$的点$x$只有有限多个,设共有$h$个: $x_1',\cdots,x_h'$.

取$\delta=\frac{\sigma}{2h}$,于是当$\|T\|<\delta$时, 使$\omega_{k'}\ge\eta$的区间不超过$2h$个,这些区间长度之和

$$\sum_{k'}\Delta x_{k'}<2h\delta=\sigma.$$

由定理6.2.9知$R(x)$ 在$[0,1]$ 上可积且$\int_0^1 R(x)dx=\underline{S}(T)=0$. ■

6.2.4 习题6.2

1. 若$f(x),g(x)$ 在$[a,b]$ 上可积，证明$\max\{f(x),g(x)\}$ 及$\min\{f(x),g(x)\}$ 在$[a,b]$ 上也可积.

2. 若$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积，证明：若对于$[a,b]$ 上任一可积函数$g(x)$，恒有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=0,$$

   则函数$f(x)$ 在连续点上恒为零.

3. 讨论函数$f,f^2,|f|$三者间可积性的关系.

4. 证明下列函数在$[0,1]$ 上可积.

   (1) $f(x)=sgn(\sin\frac{\pi}{x})$;

   (2) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-[\frac{1}{x}], & x\ne 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$

5. 设函数$f(x)$ 在区间$[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在$[c,d]$ 上可积，当$x\in[c,d]$ 时，$g(x)\in[a,b]$, 证明$f[g(x)]$在$[c,d]$上可积.

6.3 定积分的性质

6.3.1 定积分的性质

性质 6.3.1 若$f(x)$在$[a,b]$上可积，k为一实数，则$kf(x)$在$[a,b]$上也可积，且有

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx.$$

证明. 对任何$\varepsilon>0$,由$f(x)$在$[a,b]$上可积知存在$\delta>0$,使对$[a,b]$上的任何分割$T:a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 只要$\|T\|<\delta$, 对$\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, 就有

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon.$$

从而

$$\left|\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i - kI\right| = k\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < k\varepsilon.$$

故$kf(x)$在$[a,b]$上也可积，且有

$$\int_a^b kf(x)dx = kI = k\int_a^b f(x)dx.$$

■

性质 6.3.2 若$f(x),g(x)$在$[a,b]$上可积，则$f(x)\pm g(x)$在$[a,b]$上也可积，且

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

证明. $f(x),g(x)$在$[a,b]$上可积, 设$\int_a^b f(x)dx = A, \int_a^b g(x)dx = B$, 由定积分定义, 对任何$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$,使对$[a,b]$上的任何分割$T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 只要$\|T\| < \delta$, 对$\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i - B\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

所以

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i)\pm g(\xi_i))\Delta x_i - (A\pm B)\right| \\
&\le \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - A\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - B\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

■

性质 6.3.3 若$f(x),g(x)$在$[a,b]$可积，则$f(x)g(x)$在$[a,b]$也可积.

证明. 因为$f(x)$ 和$g(x)$ 都在$[a,b]$ 上可积, 故都在$[a,b]$ 上有界, 即有常数$M > 0$, 使得$|f(x)| \le M, |g(x)| \le M$. 任取两点$x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$, 于是有

$$\begin{aligned}
&|f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| \\
&= |f(x')g(x') - f(x')g(x'') + f(x')g(x'') - f(x'')g(x'')| \\
&\le M|g(x') - g(x'')| + M|f(x') - f(x'')|.
\end{aligned}$$

用$\omega_i(f), \omega_i(g), \omega_i(fg)$分别表示$f, g, fg$在$[x_{i-1}, x_i]$上的振幅,于是

$$\omega_i(fg) \le M[\omega_i(f) + \omega_i(g)].$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 对于$[a,b]$上的任何分割

$$T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

由$f(x)$和$g(x)$都在$[a,b]$上可积, 当$\|T\| < \delta$时

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2M}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \omega_i(g)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

故
$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(fg)\Delta x_i < M(\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2M})=\varepsilon,$$
从而$f(x)g(x)$在$[a,b]$上可积. ■

性质 6.3.4 设$a<c<b$.

(i) 若$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积，则$f(x)$ 在$[a,c]$ 与$[c,b]$ 上也同时可积, 并成立
$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx;$$

(ii) 反之若$f(x)$ 在$[a,c],[c,b]$ 上可积，则$f(x)$在$[a,b]$上也可积，并成立上面的等式(a,b,c可为任何顺序).

证明.

(i) 对于$\forall\varepsilon>0$,由$f(x)$在$[a,b]$上可积, 对$[a,b]$上的任一分割
$$T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$
当$\|T\|<\delta$时
$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$
对于$[a,c]$上的任一分割T_1和$[c,b]$的任一分割T_2, $T=T_1\cup T_2$ 便是$[a,b]$上的一个分割,当$\|T_1\|<\delta,\|T_2\|<\delta$时,有$\|T\|<\delta$. 设$c$为分割$T$的$n+1$个分点中的第$h$个分点, 于是
$$\sum_{i=1}^{h}\omega_i\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon;\ \sum_{i=h+1}^{n}\omega_i\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$
由此$f(x)$在$[a,c]$和$[c,b]$上都可积.

对于区间$[a,b]$上的任一分割T,令$T'=T\cup\{c\},T_1=T'\cap[a,c],T_2=T'\cap[c,b]$,于是$T_1$和$T_2$分别是$[a,c]$和$[c,b]$上的一个分割. 因为$f(x)$在$[a,c]$和$[c,b]$上都可积, 若记
$$I_1=\int_a^c f(x)dx, I_2=\int_c^b f(x)dx,$$
则有
$$\underline{S}(T)\le\underline{S}(T')=\underline{S}(T_1)+\underline{S}(T_2)\le I_1+I_2\le\overline{S}(T_1)+\overline{S}(T_2)=\overline{S}(T')\le\overline{S}(T).$$
又因$f(x)$在$[a,b]$上可积, 故有
$$\lim_{\|T\|\to 0}\underline{S}(T)=\lim_{\|T\|\to 0}\overline{S}(T).$$
从而
$$\int_a^b f(x)dx=I_1+I_2=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

(ii) (ii) 对于任给的$\eta>0$ 和$\sigma>0$, 因为$f(x)$ 在$[a,c]$ 和$[c,b]$ 上都可积, 故有$\delta_1>0$ 和$\delta_2>0$, 使对$[a,c]$ 上的任意分割$T_1=\{x'_k\}$ 和$[c,b]$ 上的任意分割$T_2=\{x''_k\}$, 只要$\|T_1\|<\delta_1,\|T_2\|<\delta_2$, 其中振幅大于$\eta$ 的分割区间的长度之和
$$(T_1)\sum_{k'}\Delta x'_{k'}<\frac{\sigma}{3},(T_2)\sum_{k'}\Delta x''_{k'}<\frac{\sigma}{3}.$$

令$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\dfrac{\sigma}{3}\}$. 对于区间$[a,b]$上的任一分割$T$,令$T'=T\cup\{c\},T_1=T'\cap[a,c],T_2=T'\cap[c,b]$,于是$T_1$和$T_2$分别是$[a,c]$和$[c,b]$上的一个分割. 当$\|T\|<\delta$时,$\|T_1\|<\delta\le\delta_1,\|T_2\|<\delta\le\delta_2$. 分割$T$的分割区间中, 除了含点$c$的一个外, 其他分割区间或为$T_1$的分割区间,或为$T_2$的分割区间. 所以,分割$T$的振幅大于$\eta$的分割区间的长度之和满足估计式

$$(T)\sum_{k'}\Delta x_{k'}\le(T_1)\sum_{k'}\Delta x'_{k'}+(T_2)\sum_{k'}\Delta x''_{k'}+\delta<\sigma.$$

由此$f(x)$于$[a,b]$上可积, 同(i), 等式成立. 此外,我们指出,当等式中的三个积分都存在时,对任意的a,b,c, 等式都有成立,即不必要求$a<c<b$.

■

性质 6.3.5 若函数$f(x),g(x)$在$[a,b]$上可积，且$f(x)\ge g(x)$, 则$\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$; 特别地，若$f(x)\ge 0$, 则$\int_a^b f(x)dx\ge 0$.

证明. 由性质6.3.2，只需证明若$f(x)\ge 0$, 则$\int_a^b f(x)dx\ge 0$. 事实上, 由$f(x)$在$[a,b]$上可积及$f(x)\ge 0$,则对$[a,b]$上的任一分割$T:a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$,$\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\ge 0.$$

■

性质 6.3.6 若$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积，则$|f(x)|$ 在$[a,b]$ 上也可积, 且

$$\left|\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b|f(x)|\right|.$$

反之未必，如:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ -1, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

证明. 由$f(x)$在$[a,b]$上可积知$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 对于$[a,b]$上的任何分割

$$T:a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

当$\|T\|<\delta$时

$$\sum_{i=1}^n\omega_i(f)\Delta x_i<\varepsilon.$$

其中$\omega_i(f)$为$f(x)$在区间$[x_{i-1},x_i]$上的振幅. 对任意的$x',x''\in[x_{i-1},x_i]$,

$$\big||f(x')|-|f(x'')|\big|\le\big|f(x')-f(x'')\big|,$$

由此$\omega_i^*(|f|)\le\omega_i(f)$. 进而

$$\sum_{i=1}^n\omega_i^*(|f|)\Delta x_i\le\sum_{i=1}^n\omega_i(f)\Delta x_i<\varepsilon,$$

从而$|f(x)|$在$[a,b]$上可积.

而$-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|$,由性质6.3.5知

$$-\int_a^b|f(x)|dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b|f(x)|dx$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b|f(x)|\right|.$$

反过来，所给例子中，$|f(x)|\equiv 1$在$[a,b]$上可积, 但$\omega_i(f)=2$, $\sum\limits_{i=1}^n\omega_i(f)\Delta x_i=2(b-a)$, 此时$f(x)$在$[a,b]$上不可积. ■

性质 6.3.7 (积分第一中值定理) 若$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在$[a,b]$ 上不变号，且在$[a,b]$ 上可积，则在$[a,b]$ 中存在一点ξ，使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

特别地, 取$g(x)=1$, 则$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$, 称$\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ 为$f(x)$ 在$[a,b]$ 上的积分平均值.

证明. 不妨设$g(x)\geq 0$. 由$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续知$f(x)$存在最小值m与最大值M, 即

$$m\leq f(x)\leq M, \forall x\in[a,b],$$

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

若$\int_a^b g(x)dx=0$, 由$g(x)$ 在$[a,b]$ 上不变号知$g(x)\equiv 0$, 进而$\int_a^b f(x)g(x)dx=0$. 显然任取$\xi\in[a,b]$, $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0 = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

若$\int_a^b g(x)dx\neq 0$ 则$\int_a^b g(x)dx>0$, 从而

$$m\leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\leq M,$$

将$f(x)$在$[a,b]$利用介值定理, 在$[a,b]$ 中存在一点ξ，使

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = f(\xi),$$

即

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

■

性质 6.3.8 设$f(x)$在$[a,b]$上可积，令$F(x)=\int_a^x f(t)dt$，则$F(x)$是$[a,b]$上的连续函数.

证明. 因为$f(x)$在$[a,b]$上可积, 所以$f(x)$在$[a,b]$上有界,即存在常数$M>0$使得$|f(x)|\leq M$. $\forall\in[a,b]$,

$$\begin{aligned}F(x+\Delta x)-F(x) &= \left|\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(x)dx\right| \\ &= \left|\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx\right| \leq \int_x^{x+\Delta x}|f(x)|dx \\ &\leq M\Delta x\to 0.\end{aligned}$$

故$F(x)$是$[a,b]$上的连续函数. ■

6.3.2 习题6.3

1. 比较下列各积分的大小：

(1) $\int_0^1 xdx$, $\int_0^1 x^2dx$;	(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$;
(3) $\int_{-2}^{-1}(\frac{1}{3})^x dx$, $\int_3^1 3^x dx$;	(4) $\int_0^1 e^{-x}dx$, $\int_0^1 e^{-x^2}dx$;
(5) $\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x}dx$, $\int_0^1\frac{\sin x}{1+x^2}dx$;	
(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$.	

2. 设$f(x)$在$[a,b]$连续，$\int_a^b f^2(x)dx=0$证明：$f(x)$在$[a,b]$上恒为零.

3. 设$y=\varphi(x)(x\geq 0)$是严格单调增加的连续函数，$\varphi(0)=0, x=\psi(y)$是它的反函数，证明：$\int_0^a \varphi(x)dx+\int_0^b \psi(y)dy \geq ab(a\geq 0, b\geq 0)$.
4. 设$f(x)$在$[0,1]$连续,且$f(x)>0$,证明不等式：$\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \geq 1$.
5. 设$f(x)g(x)$在$[a,b]$连续,证明$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$.
6. 设$f(x)$在$[0,1]$连续可导，且$f(0)=0$，求证：$\int_0^1 |f(x)|^2dx \leq \int_0^1 |f'(x)|^2dx$.

6.4 定积分的计算

6.4.1 定积分计算的基本公式

定理 6.4.1 若$f(x)$在$[a,b]$连续，则函数$G(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$可导，且

$$G'(x)=f(x).$$

证明. $\forall x\in[a,b]$,

$$G(x+\Delta x)-G(x)=\int_a^{x+\Delta z} f(x)dx-\int_a^x f(x)dx=\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx.$$

$f(x)$ 在$[a,b]$ 连续, 将$f(x)$ 在$[x,x+\Delta x]$ 上用积分中值定理, $\exists\xi[x,x+\Delta x]$ 使得

$$\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx=f(\xi)\Delta x,$$

显然当$\Delta x\to 0$ 时$\xi\to x$. 由此

$$\frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x}=f(\xi)\to f(x),$$

函数$G(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在$[a,b]$ 可导，且$G'(x)=f(x)$. ■

定理 6.4.2 (基本公式) 设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是$f(x)$ 的任意一个原函数，即$F'(x)=f(x)$, 那么

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=\left.F(x)\right|_a^b.$$

这个公式也叫牛顿–莱布尼兹公式.

证明. 由定理6.4.1, $G(x)=\int_a^x f(x)dx$是$f(x)$的一个原函数, 再由$F(x)$是$f(x)$的一个原函数知

$$[F(x)-G(x)]'=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0,$$

$$F(x)-G(x)=const, F(b)-G(b)=F(a)-G(a),$$

$$F(b)-F(a)=G(b)-G(a)=\int_a^b f(x)dx-0==\int_a^b f(x)dx,$$

即

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=\left.F(x)\right|_a^b.$$

■

例 6.4.3 求$\int_0^1 2xe^{x^2}dx$.

解. 因为$[e^{x^2}]' = 2xe^{x^2}$, 所以e^{x^2}是$2xe^{x^2}$的一个原函数,

$$\int_0^1 2xe^{x^2}dx = [e^{x^2}]\Big|_0^1 = e - 1.$$

■

例 6.4.4 求$\int_0^2 \dfrac{x}{1+x^2}dx$.

解. 因为

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}d(1+x^2) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C,$$

所以$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ 是$\dfrac{x}{1+x^2}$ 的一个原函数.

$$\int_0^2 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\ln 5.$$

■

例 6.4.5 设$F(x) = \int_0^x e^{-t}\sin 2tdt$,求$F'(0)$与$F'(\dfrac{\pi}{4})$.

解. 因为$e^{-t}\sin 2t$在$[-\pi,\pi]$上连续, 由定理6.4.1, $F'(x) = e^{-x}\sin 2x, x \in [-\pi,\pi]$. 从而

$$F'(0) = 0, \qquad F'(\frac{\pi}{4}) = e^{-\frac{\pi}{5}}\sin 2\cdot\frac{\pi}{4} = e^{-\frac{\pi}{4}}.$$

■

例 6.4.6 设$F(x) = \int_{x^2}^0 \sqrt{1+t^2}dt$, 求$F'(x)$.

解. $F(x) = \int_{x^2}^0 \sqrt{1+t^2}dt = -\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt$, $F(x)$可以看成$-\int_0^u \sqrt{1+t^2}dt$与$u = x^2$复合而成, 从而

$$F'(x) = -\sqrt{1+x^4}(x^2)' = -2x\sqrt{1+x^4}.$$

■

例 6.4.7 求极限

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}dt}{x^3}.$$

解. 由L'Hospital法则得

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}dt}{x^3} = \lim_{x\to 0+}\frac{(\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t})'dt}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0+}\frac{2x\sin x}{3x^2} = \frac{2}{3}.$$

■

6.4.2 定积分的换元公式

定理 6.4.8 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，作代换$x=\phi(t)$，其中$\phi(t)$在闭区间$[\alpha,\beta]$ 上有连续导数$\phi'(t)$，当$\alpha\le t\le\beta$时，$a\le\phi(t)\le b$,且$\phi(\alpha)=a,\phi(\beta)=b$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)dt.$$

证明. 由$f(x)$在$[a,b]$上连续知它的原函数存在, 设$F(x)$为$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数. 由复合函数求导法则知$F(\phi(t))$为$f(\phi(t))\phi'(t)$在$[\alpha,\beta]$上的一个原函数,故

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)dt=F(\phi(\beta))-F(\phi(\alpha))=F(b)-F(a),$$

从而

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)dt.$$

■

注 该定理也可反用, 即$\int_a^b f[\phi(x)]\phi'(x)dx=\int_a^b f[\phi(x)]d(\phi(x))=F(\phi(x))\big|_a^b$. 方法完全同不定积分的凑微分法与变量代换法.

例 6.4.9 求

$$\int_a^{2a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx\quad(a>0).$$

解. 令$x=a\sec t$, 则$dx=a\sec t\cdot\tan tdt$, 且当t 从0 变到$\frac{\pi}{3}$ 时, x 从a 变到$2a$, 这时$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t$, 从而

$$\begin{aligned}&\int_a^{2a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{a^2\tan^2 t\sec t}{a^4\sec^4 t}dt=\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 t\cos tdt\\&=\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 t\cos tdt=\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 td(\sin t)\\&=\frac{1}{3a^2}\sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{8a^2}.\end{aligned}$$

■

例 6.4.10 求

$$\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

解. $I=\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$

令$x=\pi-t$, 则

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt\\&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt.\end{aligned}$$

所以
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt,$$
从而
$$I = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt = -\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos^2 t}d(\cos t) = -\pi\ \arctan(\cos t)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}.$$
■

例 6.4.11 求
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx.$$

解. 令$x=\tan t$, 则
$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+\tan t)}{1+\tan^2 t}\sec^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)dt\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{(\cos t+\sin t)}{\cos t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-t)}{\cos t}dt\\ &= \frac{\pi}{8}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos(\frac{\pi}{4}-t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt.\end{aligned}$$
令$u=\frac{\pi}{4}-t$,得$t=\frac{\pi}{4}-u$. 从而
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos(\frac{\pi}{4}-t)dt = -\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\cos u du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos u du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt,$$
故
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$
■

6.4.3 定积分的分部积分公式

定理 6.4.12 若$u'(x), v'(x)$在$[a,b]$上连续，则
$$\int_a^b uv'dx = [uv]|_a^b - \int_a^b u'vdx.$$

证明. 由$[uv]' = uv' + vu'$知$uv' = [uv]' - vu'$, 两边在$[a,b]$上取定积分得
$$\int_a^b uv'dx = \int_a^b [uv]'dx - \int_a^b u'vdx = [uv]|_a^b - \int_a^b u'vdx.$$
■

例 6.4.13 求$\int_0^\pi x\cos x dx$.

解. $\int_1^\pi x\cos x dx = \int_0^\pi x d(\sin x) = [x\sin x]|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = -2.$ ■

例 6.4.14 求$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

解. 当$n=1$时, 有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = (-\cos x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = -(0-1) = 1.$$

当$n>1$时, 令$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, 则

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx \\
&== \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(-\cos x) \\
&= (-\cos x \sin^{n-1} x)|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x d(\sin^{n-1} x \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x) dx \\
&= (n-1)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx\right] \\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,
\end{aligned}$$

即

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

这个等式就是关于I_n的递推公式, 他将I_n的计算化为I_{n-2}的计算,依次下去, 既可求得结果.

当n为奇数时,

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx \\
&= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2} I_{n-4} \\
&= \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3} I_1 \\
&= \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots 2}{n(n-2)(n-4)\cdots 3\cdot 1} \\
&= \frac{(n-1)!!}{n!!}.
\end{aligned}$$

当n为偶数时,

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx \\
&= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \\
&= \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots 2}{n(n-2)(n-4)\cdots 4\cdot 2}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

综上所述,有如下结果:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & (\text{当}n\text{为奇数时}), \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & (\text{当}n\text{为奇数时}). \end{cases}$$

■

6.4.4 杂例

例 6.4.15 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$

解. 改写

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n}.$$

易见, 这是连续函数$f(x)=\frac{1}{1+x}$在区间$[0,1]$均分成n等分的分割上的一个积分和, 所以有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$
$$\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)|_0^1=\ln 2.$$

■

例 6.4.16 设$f(x)$在$[-a,a]$上连续，那么

(1) 当$f(x)$为奇函数时，$\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$;

(2) 当$f(x)$为偶函数时，$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx.$

证明.

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}f(x)dx&=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=-\int_a^0 f(-x)dx+\int_0^a f(x)dx\\&=\int_0^a f(-x)dx+\int_0^a f(x)dx=\int_0^a[f(-x)+f(x)]dx.\end{aligned}$$

(1) 若$f(x)$在$[-a,a]$上为奇函数, 则有$f(-x)=-f(x)$, 即$f(-x)+f(x)=0$, 此时

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=0.$$

(2) 若$f(x)$在$[-a,a]$上为偶函数, 则有$f(-x)=f(x)$, 即$f(-x)+f(x)=2f(x)$, 此时

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx.$$

■

例 6.4.17 设$f(x)$在$[0,1]$上连续, 证明:

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$$

并利用此式计算定积分$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

证明. 令代换$x=\pi-t$,则有

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx&=\int_{-\pi}^{0}(\pi-t)f[\sin(\pi-t)]d(\pi-t)\\&=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt\\&=\int_0^{\pi}\pi f(\sin t)dt-\int_0^{\pi}tf(\sin t)dt\\&=\int_0^{\pi}\pi f(\sin x)dx-\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx.\end{aligned}$$

移项有

$$2\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx,$$

即

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

对定积分$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$, 被积函数可以看成$xf(\sin x)$, 这里

$$f(\sin x) = \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} = \frac{x\sin x}{2-\sin^2 x}.$$

由上面证得的等式可得

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}d(\cos x)$$
$$= -\frac{\pi}{2}\left[\arctan(\cos x)\right]\Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}\left[-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi^2}{4}.$$

■

例 6.4.18 若$f(x)$是周期为T的连续函数，则$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

证明. 因为

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{T+a} f(x)dx.$$

若令$x = T+t$, 则$\int_T^{T+a} f(x)dx = \int_0^a f(T+t)d(T+t) = \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(x)dx$, 所以

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

■

例 6.4.19 设$f(x)$是连续函数，求导数$\frac{d}{dx}\int_{x^3}^{x^2} f(t)dt$.

解. 因为$f(x)$是连续函数, 故$F(x) = \int_a^x f(t)dt$是$f(x)$的一个原函数, 即有$F'(x) = f(x)$. 从而有

$$\frac{d}{dx}\int_{x^3}^{x^2} f(t)dt = \frac{d}{dx}[F(x^2) - F(x^3)] = 2xf(x^2) - 3x^2 f(x^3).$$

■

6.4.5 习题6.4

1. (1) 求$\int_{e^{-1}}^{e} |\ln x|dx$.   (2) 求$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{dx}{\cos x}$.

2. 设$f(x)$在$[0,+\infty)$连续, 且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$, 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = a$.

3. 设I是一个开区间，$I\subset[A,B]$, 函数f在$[A,B]$内连续. 设$a<b$ 且$a,b\in I$，求证：

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^b (f(x+h)-f(x))dx = f(b)-f(a).$$

4. 设f 在$[0,+\infty)$ 上连续并恒取正值，证明：$\phi(x) = \dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ 是$[0,+\infty)$ 上的严格递增函数.

5. 设$[0,+\infty)$ 上的连续函数f 满足关系$\int_0^x f(t)dt=\dfrac{1}{2}xf(x), x>0$, 求证：$f(x)=cx$, 这里$x$是常数.

6. 设$(0,+\infty)$ 上的连续函数f 使得积分值$\int_a^{ab} f(x)dx$ 与a 无关，其中$a,b>0$, 求证：$f(x)=\dfrac{c}{x}$, 其中c为常数.

7. 设$b>a>0$，证明不等式$\ln\dfrac{b}{a}>\dfrac{2(b-a)}{a+b}$.

8. 设f为连续函数，求证：

$$(1)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx;\qquad (2)\quad \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

9. 证明：$\int_0^{2\pi}\left(\int_x^{2\pi}\dfrac{\sin t}{t}dt\right)dx=0$.

10. 设f在$[0,+\infty)$上连续，对任何$a>0$，求证:

$$\int_0^a\left(\int_0^x f(t)dt\right)dx=\int_0^a f(x)(a-x)dx.$$

6.5 定积分在几何上的应用

定积分的应用很广泛，本节仅介绍它在几何上的应用，并结合具体问题，说明用定积分求某些量的方法.

我们已经知道，曲边梯形的面积、变速直线运动的路程都可以用定积分表示，那么一个能用定积分表示的量应当具备什么性质呢？从前面的讨论可以看出：它应当是与某一个变量x的变化区间$[a,b]$相联系的整体量，并且这个整体量，当区间分割成若干个小区间后，就相应地分成了若干个部分量ΔI之和，即量I对于区间$[a,b]$具有可加性.

当所求量I 可以表示为定积分$\int_a^b f(x)dx$ 时，根据本章定理6.4.1可知：$I(x)=\int_a^x f(x)dx$ 就是$f(x)$ 的一个原函数，从而被积式$f(x)dx$ 就是$I(x)$ 的微分，即$f(x)dx$ 是增量ΔI 的线性主部，而增量ΔI 则是所求量I 的部分量. 因此，用定积分求整体量I 的一个常用方法是，任取所求量I 的一个微小的部分量ΔI，写出它的线性主部$dI=f(x)dx$，再在$[a,b]$ 上积分就得到所求量I. 这种通过取出所求量的微小部分量ΔI的线性主部dI，再积分求出I的方法，通常称为“微元法”或“元素法”.

运用“微元法”的关键，在于对问题作符合实际情况的正确分析，用“以常代变”的方法求出ΔI的近似值$dI=f(x)dx$ (这里，ΔI与$dI=f(x)dx$之差是一个比dx更高阶的无穷小)进行积分，下面，通过实例来说明.

6.5.1 平面图形的面积

1. **直角坐标系中的计算方法**

   众所周知，定积分的两个来源之一就是计算曲边梯形的面积，因此，计算平面图形的面积应该说是定积分的本职工作. 设$f(x)$在$[a,b]$上非负连续，则由曲线$y=f(x)$和直线$x=a,x=b,y=0$所围成的曲边梯形的面积就是定积分$\int_a^b f(x)dx$, 而被积式$f(x)dx$正是在子区间$[x,x+dx]$上，以点x处的高近似代替了子区间$[x,x+dx]$上各点处的高之后，用小矩形的面积$f(x)dx$作为在子区间$[x,x+dx]$上的小曲边梯形的面积ΔS 的近似值，如图6.1中的阴影部分所示，也就是说$ds=f(x)dx$, 在$[a,b]$上积分，就得到曲边梯形的面积$S=\int_a^b f(x)dx$. 如果在$[a,b]$上总有$f(x)\le 0$，则所论曲边梯形的面积就是

$$S=-\int_a^b f(x)dx.$$

   一般地，如果$f(x)$是$[a,b]$上的变号连续函数，则$S=\int_a^b |f(x)|dx$所表示的就是图6.1中阴影所示图形的面积.

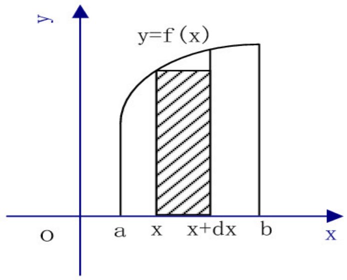


图 6.1.

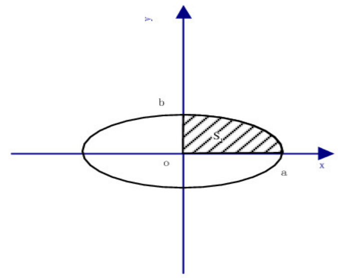


图 6.2.

例 6.5.1 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b}=1$的面积$S$.

解. 由对称性, 可先计算出椭圆在第一象限内的面积S_1(图6.2)，则整个椭圆的面积$S=4S_1$.

椭圆在第一象限的方程是：

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\quad (0\le x\le a).$$

故

$$\begin{aligned}S=4S_1&=4\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx\\&=\frac{4b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\Big|_0^1\\&=\pi ab.\end{aligned}$$

当$a=b$时，椭圆变成半径为a的圆，于是得圆面积公式：$S=\pi a^2$. ■

如果曲线$y=f(x)$位于曲线$y=g(x)$的上方，即当$a\le x\le b$时，$f(x)\ge g(x)$, 那么由$y=f(x)$及$y=g(x)$这两条曲线和直线$x=a,x=b$所围的平面图形的面积为

$$S=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx.$$

这是因为S的微元dS，等于高为$[f(x)-g(x)]$，宽为dx的矩形面积，即$dS=[f(x)-g(x)]$(图6.3)的缘故.

类似地，如果曲线$x=f(y)$位于曲线$x=g(y)$的右方，即当$c\le y\le d$时，$f(y)\ge g(y)$, 那么由这两条曲线和直线$y=c,y=d$所围的平面图形(图6.4)的面积为

$$S=\int_c^d[f(y)-g(y)]dy.$$

对于更一般的平面图形，只要能把它分成有限多块，使得每块都是上述的图形，于是可按公式求得其面积，相加即得所论的平面图形的面积.

例 6.5.2 计算由曲线$y=4-x^2$及$y=3x$所围形的面积S.

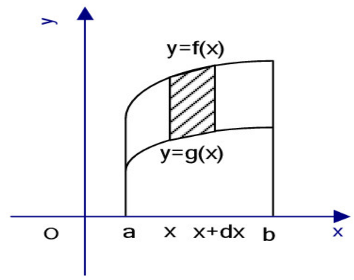


图 6.3.

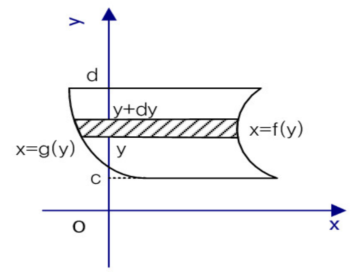


图 6.4.

解. 先画出曲线$y = 4 - x^2$ 及$y = 3x$ 的图形，解出这两条曲线的交点坐标$A(-4, -12)$，$B(1, 3)$ (图6.5). 以x 为积分变量，有

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-4}^{1} [(4 - x^2) - 3x] dx \\
&= \left(4x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right) \Big|_{-4}^{1} \\
&= \frac{125}{6}.
\end{aligned}
$$

■

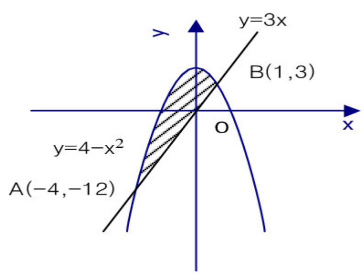


图 6.5.

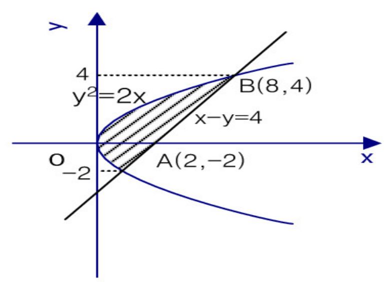


图 6.6.

例 6.5.3 计算由曲线$y^2 = 2x$及$x - y = 4$所围图形的面积S.

解. 画出曲线$y^2 = 2x$及$x - y = 4$的图形，解出交点坐标$A(2, -2)$、$B(8, 4)$(图6.6), 本例题若以x作积分变量，计算就比较麻烦，但是，若以y作积分变量，计算就比较方便，以y作积分变量时，曲线的方程为：$x = \frac{1}{2}y^2$及$x = y + 4$，积分区间为$[-2, 4]$，则有

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-2}^{4} [(y + 4) - \frac{1}{2}y^2] dy \\
&= \left(\frac{1}{2}y^2 + 4y - \frac{1}{6}y^3 \right) \Big|_{-2}^{4} \\
&= 18.
\end{aligned}
$$

■

用定积分解实际问题时，对同一个问题有时可以选取不同的积分变量，积分变量选取的不同，积分计算的难易也不同，应当注意选取的积分变量，要使所求的积分比较容易计算.

若曲边梯形的曲边方程为参数形式：$x = x(t), y = y(t)$, 其中$\alpha \le t \le \beta$, 设$x(t)$ 随t 的增加而增加，且$x(\alpha) = a, x(\beta) = b$, $x(t), y(t)$ 及$x'(t)$ 在$[\alpha, \beta]$ 连续，那么由曲线$x = x(t), y = y(t)$，x轴以及直线$x = a, x = b$ 所围成的图形面积的公式为:

$$S = \int_a^b |y|dx = \int_\alpha^\beta |y(t)||x'(t)dt.$$

例 6.5.4 求摆线

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

的一拱与Ox轴所围图形的面积(图6.7).

解. 所围图形的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi a} ydx = \int_0^{2\pi a} a(1 - \cos t)a(1 - \cos t)dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt \\ &= a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} \\ &= 3\pi a^2. \end{aligned}$$

■

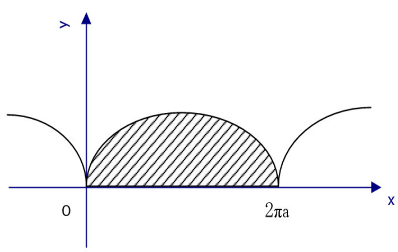


图 6.7.

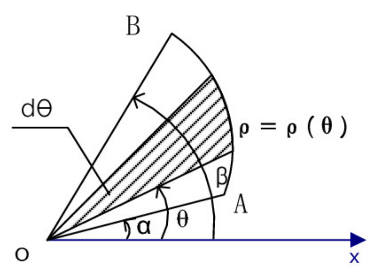


图 6.8.

2. **极坐标系中的计算方法**

有些平面图形的边界曲线的方程，在极坐标系中表示比较方便，因此，还需要研究平面图形的面积在极坐标系中的计算方法.

在极坐标系中，由两条极径$\theta = \alpha, \theta = \beta(\alpha < \beta)$及曲线$\rho = \rho(\theta)$(假定$\rho(\theta) \ge 0$)所围成的平面图形$OAB$(图6.8)称为曲边扇形. 现在用定积分计算曲边扇形的面积S.

取θ为积分变量，则积分区间为$[\alpha, \beta]$, 考虑在$[\theta, \theta + \Delta\theta]$上的小曲边扇形的面积$\Delta S$，以$\theta$处的极径$\rho(\theta)$代替$[\theta, \theta + \Delta\theta]$上各点处的极径后，小曲边扇形的面积$\Delta S$就近似于一个圆心角为$d\theta$，半径为$\rho(\theta)$的圆扇形（图6.8中的阴影部分）的面积，按圆扇形的面积计算出小曲边扇形的面积ΔS的近似值，就得到所求的曲边扇形面积S的微分dS，即

$$dS = \frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2 d\theta.$$

积分,得

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2 d\theta.$$

这就是在极坐标系中, 曲边扇形面积的计算公式.

例 6.5.5 求心形线$\rho = a(1+\cos\theta)$, $(a>0)$所围图形的面积S(图*6.9*).

解. 由于所求的心形线的图形是对称于极轴的，设位于极轴上半部的面积为S_1，则有

$$\begin{aligned} S = 2S_1 &= 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\rho(\theta)]^2 d\theta \\ &= \int_0^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta \\ &= a^2\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta \\ &= a^2\left(\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{3}{2}\pi a^2. \end{aligned}$$

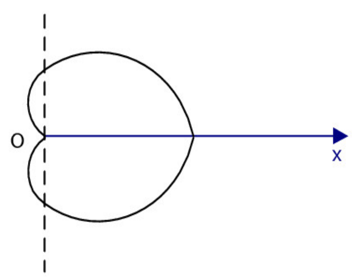


图 6.9.

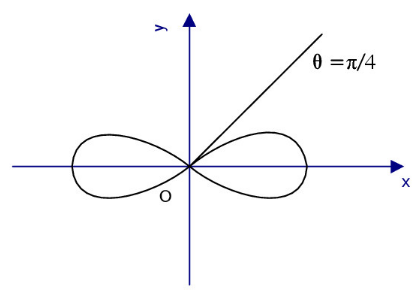


图 6.10.

■

例 6.5.6 求双纽线$\rho^2 = a^2\cos 2\theta (a>0)$所围图形的面积，如图*6.10*.

解. 由图形的对称性，双纽线所围的面积S等于它在第一象限内的面积S_1的4倍，故

$$\begin{aligned} S = 4S_1 &= 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta d\theta \\ &= 2a^2\left(\frac{1}{2}\sin 2\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2. \end{aligned}$$

■

6.5.2 立体的体积

1 **平行截面面积为已知的立体体积**

当一个立体被垂直于坐标轴的平面所截，其截面和面积可以用已知的连续函数来表示时，此立体的体积V可以用定积分来计算.

设有一个由曲面和垂直于Ox轴的两个平面$x = a, x = b \ \ (a < b)$围成的立体(图6.11)，若已知过点x且垂直于Ox轴的平面截立体所得的截面面积为$A(x) \ \ (a \le x \le b)$，用"微元法", 取x为积分变量，在立体中的一个微小的区间$[x, x + dx]$上，立体的体积$\Delta V \approx dV = A(x)dx$, 在$[a, b]$上积分，就得到立体的体积公式：

$$V = \int_a^b A(x)dx.$$

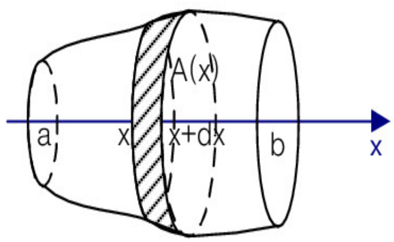


图 6.11.

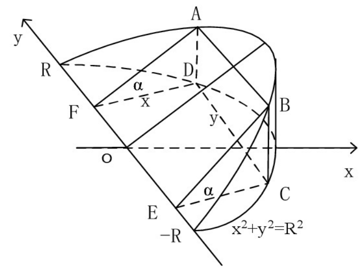


图 6.12.

例 6.5.7 一平面经过半径为R 的圆柱体的底圆中心，并与底面构成的二面角为α *(*图*6.12)*，计算这个平面截圆柱体所得的立体的体积V.

解. 立体垂直于Ox轴的截面为矩形，在任意的点$x(0 \le x \le R)$处，截面的面积为：

$$A(x) = AD \cdot CD = x \tan\alpha \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2}.$$

故立体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^R A(x)dx = \int_0^R 2\tan\alpha \cdot x\sqrt{R^2 - x^2}dx \\ &= -\tan\alpha \int_0^R 2\sqrt{R^2 - x^2}d(R^2 - x^2) \\ &= \frac{2}{3}R^3 \tan\alpha. \end{aligned}$$

另一方面，这个立体垂直于y轴的截面是直角三角形，在任意一点$y \ (-R \le y \le R)$处，截面的面积为：

$$A(y) = \frac{1}{2}FD \cdot AD = \frac{1}{2}\tan\alpha \cdot FD^2 = \frac{1}{2}\tan\alpha(R^2 - y^2).$$

取y为积分变量，积分得:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^R A(y)dy = \int_{-R}^R \frac{1}{2}\tan\alpha(R^2 - y^2)dy \\ &= \frac{1}{2}\tan\alpha(R^2 y - \frac{1}{3}y^3)\Big|_{-R}^R \\ &= \frac{2}{3}R^2 \tan\alpha. \end{aligned}$$

■

2 **旋转体的体积**

一个平面图形绕着此平面上的一条直线旋转而成的立体，叫做旋转体，这一条直线称为旋转轴.

考虑由连续曲线$y = f(x)$,直线$x = a$, $x = b$ 及Ox 轴所围成的曲边梯形，绕Ox轴旋转而成的旋转体(图6.13). 显然，此旋转体的任何一个垂直于Ox轴的截面都是圆，且在任意一点x处的截面的面积为：

$$A(x) = \pi[f(x)]^2dx.$$

由平行截面面积为已知的立体体积公式，不难得出旋转体的体积公式：

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2dx.$$

类似地，由连续曲线$x = \phi(y)$,直线$y = c$, $y = d$ $(c < d)$ 及Oy 轴所围成的曲边梯形，绕Oy轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V = \pi\int_a^b [\phi(y)]^2dy.$$

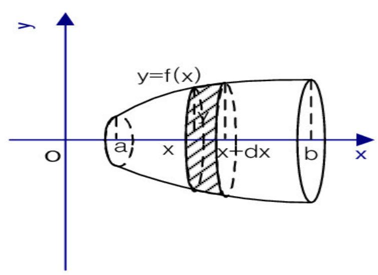


图 6.13.

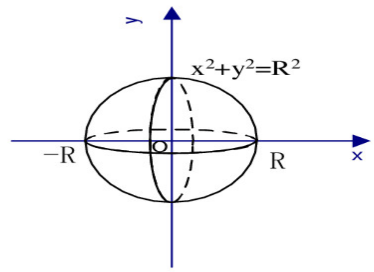


图 6.14.

例 6.5.8 求半径为R的球的体积.

解. 如图6.14所示，球体可以看作上半圆周与Ox轴所围成的平面图形绕Ox轴旋转而成，因为上半圆周的方程为

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad (-R \le x \le R),$$

所以球体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^{R} \pi(\sqrt{R^2 - x^2})^2dx = 2\int_0^R \pi(R^2 - x^2)dx \\ &= 2\pi\left(R^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^R \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

■

例 6.5.9 求由抛物线$y = \sqrt{2px}$，直线$x = a(p, a > 0)$及)x轴所围成的曲边梯形绕Ox轴旋转而成的旋转体的体积*(图6.15)*.

解. $V = \int_0^a \pi(\sqrt{2px})^2dx = \int_0^a 2\pi pxdx = \pi pa^2$. ■

例 6.5.10 求圆$x^2 + (y - b)^2 = R^2(b > R > 0)$ 绕Ox 轴旋转所成的环体的体积V *(图6.16)*.

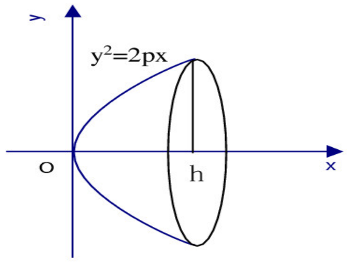


图 6.15.

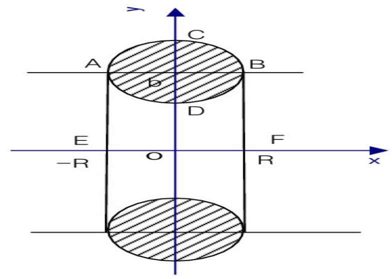


图 6.16.

解. 所求环体的体积是由曲边梯形$EACBF$ 绕Ox 轴旋转所成的立体与由曲边梯形$EADBF$ 绕Ox 轴旋转所成的立体的体积之差.

因为曲线$\widehat{ACB}$ 的方程为$y = b + \sqrt{R^2 - x^2}$, 曲线$\widehat{ADB}$ 的方程为$y = b - \sqrt{R^2 - x^2}$. 故所求的环体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^{R} \pi(b + \sqrt{R^2 - x^2})^2 dx - \int_{-R}^{R} \pi(b - \sqrt{R^2 - x^2})^2 dx \\ &= 2\pi \left(R^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \bigg|_0^R \\ &= 4\pi b \int_{-R}^{R} \pi\sqrt{R^2 - x^2} dx = 4\pi b \cdot \frac{1}{2}\pi R^2 = 2\pi^2 b R^2. \end{aligned}$$

■

例 6.5.11 求椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$分别绕$Ox$轴及$Oy$ 轴旋转所成的旋转体的体积V_x, V_y.

解. 上半个椭圆与Ox轴所围成的平面图形绕Ox轴旋转所成的旋转体的体积即是V_x. 由于上半椭圆弧的方程是：$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, 故有

$$\begin{aligned} V_x &= \int_{-a}^{a} \pi \left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 dx \\ &= \pi \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{1}{3}x^3 \right) \bigg|_{-a}^{a} \\ &= \frac{4}{3}\pi a b^2. \end{aligned}$$

同理，有

$$\begin{aligned} V_y &= \int_{-a}^{a} \pi \left(\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \right)^2 dy \\ &= \pi \frac{a^2}{b^2} \left(b^2 y - \frac{1}{3}y^3 \right) \bigg|_{-a}^{a} \\ &= \frac{4}{3}\pi b a^2. \end{aligned}$$

当$a = b$时，就得到了半径为a的球的体积: $V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi a^3$. ■

例 6.5.12 计算由摆线$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$的一拱，与$y = 0$所围成的平面图形分别绕Ox轴，Oy轴旋转而成的旋转体的体积V_x, V_y.

解. 如图6.17所示.

$$
\begin{aligned}
V_x &= \int_0^{2\pi a} \pi y^2(x)dx \\
&= \pi \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 d[a(t-\sin t)] \\
&= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt \\
&= 5\pi^2 a^3.
\end{aligned}
$$

而摆线的一拱与Ox轴所围成的平面图形，绕Oy轴旋转而成的旋转体的体积V_y，可以看作平面图形$OAB2aO$与分别绕Oy轴旋转而成的旋转体的体积之差，故

$$
\begin{aligned}
V_y &= \int_0^{2a} \pi x_2^2 y dy - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y)dy \\
&= \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2(t-\sin t)^2 a \sin t dt - \pi \int_0^{\pi} a^2(t-\sin t)^2 a \sin t dt \\
&= -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t-\sin t)^2 \sin t dt = 6\pi^3 a^3.
\end{aligned}
$$

■

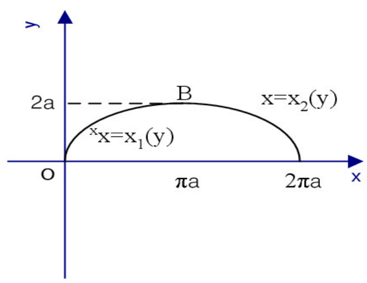


图 6.17.

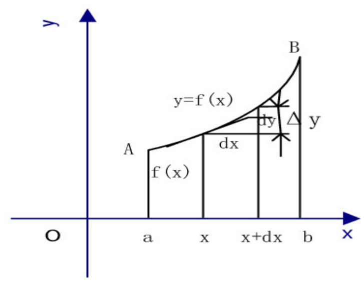


图 6.18.

6.5.3 平面曲线的弧长

设连续曲线$\widehat{AB}$的方程为$y=f(x) \quad (a \le x \le b)$，其中$f(x)$在$[a,b]$上具有一阶连续的导数，求曲线$\widehat{AB}$的弧长$s$(图6.18).

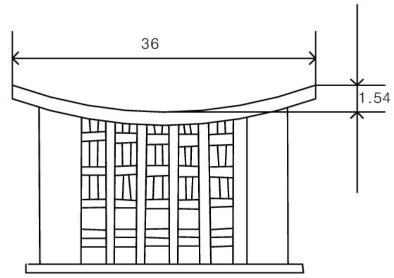
在直角坐标系下，对于曲线: $y=f(x) \quad (a \le x \le b)$，在$[a,b]$的任意一个子区间$[x,x+dx]$上，曲线弧$\widehat{AB}$的小弧段$\Delta s$的弧长的近似值$ds$为：

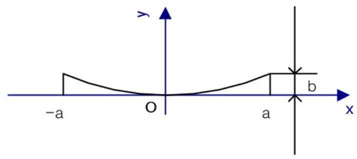
$$
ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{1+y'^2}dx,
$$

由此得曲线$\widehat{AB}$的弧长s为

$$
s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx.
$$

例 6.5.13 某建筑物的层顶采用悬索结构，已知主索为一条抛物线$y=kx^2$(图*6.5.3*)，其跨度为$36m$，中心下降$1.54m$，求主索道的长度s.





解. 由图6.5.3知，主索道的方程为: $y = \frac{b}{a^2}x^2$，其中$a = 18$, $b = 1.54$, 故有

$$\begin{aligned}
s &= \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + [y'^2} dx \\
&= 2\int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{2b}{a^2}x\right)^2} dx \\
&= \frac{a^2}{b}\int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{2b}{a^2}x\right)^2} d\left(\frac{2b}{a^2}x\right) \\
&= \frac{a^2}{b}\int_0^{\frac{2b}{a}} \sqrt{1 + u^2} du \\
&= \frac{a^2}{b}[\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln(u + \sqrt{1+u^2})]\Big|_0^{\frac{2b}{a}} \\
&= a\sqrt{1 + \left(\frac{2b}{a}\right)^2} + \frac{a^2}{2b}\ln\left[\frac{2b}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{a^2}{2b}\right)^2}\right].
\end{aligned}$$

把$a = 18, b = 1.54$代入上式有$s \approx 36.17(m)$. ■

当曲线弧由参量方程$x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$给出时，其中$\phi(t)$, $\psi(t)$在$[\alpha, \beta]$上有连续的导数. 由于$f(x)$在$[\alpha, \beta]$上的任意一个子区间$[t, t + dt]$上，小弧段Δs的近似值ds为

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\phi'^2(t)(dt)^2 + \psi'^2(t)(dt)^2} = \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt.$$

于是所求的弧长为$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt$.

例 6.5.14 求摆线$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$的一拱的弧长s.

解.

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[a(1 - \cos t)]^2 + (a\sin t)^2}dt \\
&= 2a\int 2\pi_0\sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}dt = 2a\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}dt \\
&= 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = 2a\ x\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{\pi} \\
&= 8a.
\end{aligned}$$

■

如果曲线弧$\widehat{AB}$的方程由极坐标$\rho=\rho(\theta)(\alpha\le\theta\le\beta)$给出时，由公式

$$\begin{cases}\rho(\theta)\cos\theta,\\ \rho(\theta)\sin\theta.\end{cases}$$

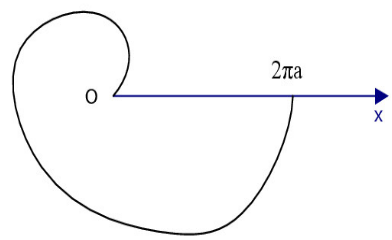
可得

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{[\rho'^2+[\rho^2(t)]^2}d\theta.$$

于是曲线弧$\widehat{AB}$的弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\rho'^2+[\rho^2(t)]^2}d\theta.$$

例 6.5.15 求阿基米德螺线$\rho=a\theta(0\le\theta\le2\pi)$的长度$s$，其中$a>0$为常数*(图6.5.3)*.



解.

$$\begin{aligned}s&=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+a^2\theta^2}d\theta=\int_0^{2\pi}a\sqrt{1+\theta^2}d\theta\\&=a\left[\frac{\theta}{2}\sqrt{1+\theta^2}+\frac{1}{2}\ln(\theta+\sqrt{1+\theta^2})\right]_0^{2\pi}\\&=\frac{a}{2}[2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})].\end{aligned}$$

■

6.5.4 旋转体的侧面积

考虑一个旋转体，如图6.19所示，它的侧面是由区间$a\le x\le b$所对应的连续曲线:$y=f(x)$ $(f(x)\ge 0)$绕Ox轴旋转而成的曲面，求此旋转曲面的侧面积S.

取x为积分变量，积分区间为$[a,b]$，考虑位于$[a,b]$上的任意一个子区间$[x,x+dx]$上的小窄带状侧面ΔS,由于此小窄带状侧面是由$y=f(x)$的一小段弧ds旋转而成的，故小窄带状侧面的面积ΔS可以近似看成长为$2\pi y$, 宽为ds的矩形面积，即ΔS的近似值dS为

$$dS=2\pi y ds=2\pi f(x)\sqrt{1+|f'(x)|^2}dx,$$

故

$$S=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+|f'(x)|^2}dx.$$

这就是旋转体的侧面积S的计算公式.

例 6.5.16 在半径为R的球面上*(图6.20)*，求横坐标由a至$b(-R\le a<b\le R)$的球带面的面积S.

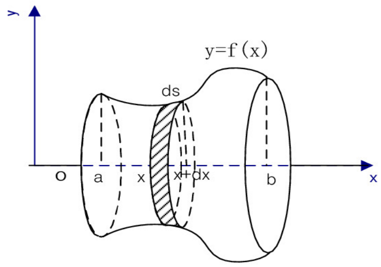


图 6.19.

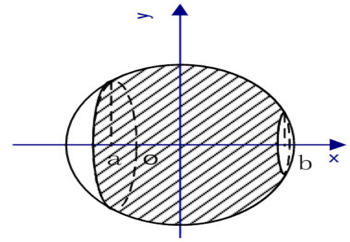


图 6.20.

解. 此球带是由圆弧$y=\sqrt{R^2-x^2}\quad(a\le x\le b)$, 绕$Ox$轴旋转而成，故有

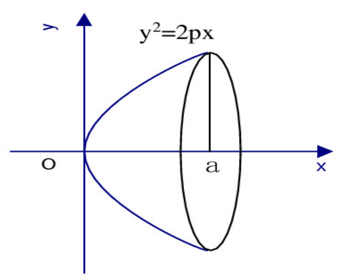
$$\begin{aligned}S&=\int_a^b 2\pi\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}dx\\&=2\pi\int_a^b Rdx=2\pi R(b-a).\end{aligned}$$

当$a=-R,b=R$时，就得到半径为R的球的表面积

$$S_{\text{球}}=2\pi R[R-(-R)]=4\pi R^2.$$

■

例 6.5.17 探照灯的反光镜由一条抛物线$y^2=2px\quad(p>0,0\le x\le h)$，绕$Ox$轴旋转而成，求反光镜的面积$S$(图6.5.4).



解. 因为$y=\sqrt{2px}\quad(p>0,0\le x\le h)$, 所以

$$\begin{aligned}S&=\int_0^h 2\pi\sqrt{2px}\sqrt{1+\left(\sqrt{\frac{p}{2x}}\right)^2}dx\\&=2\pi\sqrt{p}\int_0^h\sqrt{2x+p}dx\\&=\pi\sqrt{p}\int_0^h\sqrt{2x+p}d(2x+p)\\&=\pi\sqrt{p}\cdot\frac{2}{3}(2x+p)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^h\\&=\frac{2\pi p^2}{3}\left[\left(\frac{2h}{p}+1\right)^{\frac{3}{2}}-1\right].\end{aligned}$$

■

6.5.5 习题6.5

1. 求下列平面图形的面积：

   (1) 由曲线$y=\sin x$在$[0,2\pi]$一段和x轴所围成的平面图形的面积；
   (2) 由曲线$y=\ln x$和直线$y=\ln a, y=\ln b, x=0\ \ (b>a>0)$ 所围平面图形的面积；
   (3) 由$y=e^x, y=e^{-x}$和直线$x=1$所围成的平面图形的面积；
   (4) 由曲线$x=5y^2$和$x=1+y^2$所围成的平面图形的面积；
   (5) 由曲线$y=2-x^2$和$y^3=x^2$所围成的平面图形的面积；
   (6) 由曲线$y^2=4(x+1)$和$y^2=4(1-x)$所围成的平面图形的面积；
   (7) 由曲线$y^2=2px$和$x^2=2py$所围成的平面图形的面积；
   (8) 曲线$x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{3}{2}}$所围成图形的面积；
   (9) 曲线$y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x$与直线$y=0$及$x=-1$所围成图形的面积；
   (10) 由三条圆曲线$x^2+y^2, (x-2)^2+y^2, (x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$所围成的圆内公共部分图形的面积；
   (11) 设曲线$x^2-4y-4=0$与直线$x+y-2=0$所围成的图形为D，试求一条垂直于x轴的直线，它将D分成面积相等的两部分；
   (12) 由星形线$\left\{\begin{array}{l} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t \end{array}\right.$ 所围成的平面图形的面积；
   (13) 圆$\rho=1$被心形线$\rho=1+\cos\theta$分割成两部分，求这两部分的面积；
   (14) 求曲线$r=3\cos\theta, r=1+\cos\theta$所围的图形的面积.
   (15) 求曲线$y=\ln x(2\le x\le 6)$的一条切线，使该切线与直线$x=2, x=6$及曲线$y=\ln x$所围成的图形的面积为最小.

2. 求下列各立体的体积：

   (1) 以抛物线$y^2=2x$与直线$x=2$所围成的图形为底，而垂直于抛物线轴的截面都是等边三角形的立体的体积；
   (2) 以长半轴$a=10$，短半轴$b=5$的椭圆为底，而垂直于长轴的截面是等边三角形的立体的体积；
   (3) 两柱面$x^2+y^2=a^2$及$x^2+z^2=a^2$所围之体积; ($V=8\int_0^a(a^2-x^2)dx$.)
   (4) 曲面$x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2=ax$所围立体的体积;
   (5) 由半立方抛物线$y^2=x^3$, x 轴和直线$x=1$所围图形，分别绕x轴和y轴旋转而成的旋转体的体积；
   (6) $y=x^2, y^2=x$所围图形绕x轴旋转而成的旋转体的体积；
   (7) 求抛物线$y^2=2x$与直线$x=\frac{1}{2}$所围成的图形绕直线$y=-1$旋转而成的旋转体的体积；
   (8) 由星形线$\left\{\begin{array}{l} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t \end{array}\right.$ 绕x轴旋转而成的旋转体的体积；
   (9) 由曲线$y=x^2+7$和$y=3x^2+5$所围图形绕x轴旋转而成的旋转体的体积；
   (10) 由圆$(x-2)^2+y^2=1$绕y轴旋转而成的环体的体积；
   (11) 由心形线$\rho=4(1+\cos\theta)$和直线$\theta=0$及$\theta=\frac{\pi}{2}$所围图形绕极轴旋转而成的旋转体的体积；
   (12) 由曲线$y=\sin x(x\in[0,\pi])$与x轴所围图形绕y轴和直线$l: y=1$旋转而成的旋转体的体积.

3. 求平面曲线的弧长：

   (1) 悬链线$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$在$x=-1$到$x=1$之间一段的弧长;

(2) 曲线$y=x^{\frac{3}{2}}\quad(0\le x\le 4)$的弧长;

(3) 曲线$x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y\quad(1\le y\le e)$的弧长;

(4) 计算曲线$y=\ln(1-x^2)$上相应于$0\le x\le\frac{1}{2}$的一段弧的长度;

(5) 椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}(a>b)$的弧长;

(6) 曲线$(\frac{x}{a})^{\frac{2}{3}}+(\frac{y}{b})^{\frac{2}{3}}=1\quad(a>0,b>0)$的全长.

(7) 曲线$x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{3}{2}}$的弧长;

(8) 曲线$x=a(\cos t+t\sin t),y=a(\sin t-t\cos t)\quad(0\le\theta\le 2\pi)$的弧长;

(9) 星形线$\left\{\begin{array}{l}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t\end{array}\right.$ $(0\le t\le 2\pi)$的全长; $(6a)$

(10) 心形线$\rho=a(1+\cos\theta)$的全长;

(11) 对数螺线$\rho=ke^{a\theta}$在$\theta=\alpha$到$\theta=\beta$之间的弧长;

4. 证明曲线$y=\sin x$上相应于x从0变到2π的一段弧长等于椭圆$2x^2+y^2=2$的周长;

5. 求下列各曲面的面积:

(1) $x^2=2py+a\quad(0\le x\le a,a>1)$分别绕x，y轴;

(2) $y=\sin x(0\le\theta\le 2\pi)$, 绕x轴;

(3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.绕y轴;

(4) 星形线$\left\{\begin{array}{l}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t\end{array}\right.$ 绕x轴旋转而成的曲面面积;

(5) 双纽线$\rho^2=a^2\cos 2\theta$绕极轴旋转而成的曲面面积;

(6) 曲线$x^2+(y-b)^2=a^2(a<b)$绕x轴旋转而成的圆环面和面积;

(7) 摆线$x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$ 绕直线$x=\pi a$旋转而成的旋转体的侧面积.

6. 已知抛物线$x^2=(p-4)y+a^2(p\ne 4,a>0)$，求$p$和$a$的值，使满足下面两个条件：

(1) 抛物线与$y=x+1$相切;

(2) 抛物线与x轴围成的图形绕x轴旋转有最大的体积.

7. 某反光镜可近似地看做介于$x=0$与$x=\dfrac{1}{4}$米之间的抛物线$y^2=8x$绕x轴旋转所成的旋转抛物面. 求此反光镜面的面积.

8. 求由曲线$y=\cos x(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2})$与直线$y=0$围成的图形绕x轴旋转一周所得旋转体的侧面积,设其为S，求证: $4\pi<S<\frac{14\pi}{3}$.

6.6 定积分在物理上的应用

定积分在物理上有十分广泛的应用，本节仅简要介绍应用定积分解决物体的质心、变力作功、引力、液体的侧压力等方面的问题.

6.6.1 密度, 质量和质心

设由以弧长为参数的方程$x = x(s), y = y(s), 0 \leq s \leq l$. 给出的光滑曲线上分布有质量, 其中$s$表示从曲线一个端点$A_0$算起的弧长, 并把曲线上对应于$s$的点记为$A_s$. 设已知曲线从$A_0$到$A_s$的弧段的质量为$m(s)$, 于是称比值

$$\frac{m(s+\Delta s)-m(s)}{\Delta s}$$

为曲线上从As到$A_{s+\Delta s}$的弧段的平均密度. 如果极限

$$\rho(s) = \frac{dm}{ds} = \lim_{Deltas\to 0} \frac{m(s+\Delta s)-m(s)}{\Delta s}$$

存在, 则称之为曲线在A_s点的密度(线密度). 按定义知, 密度就是质量关于弧长的导数. 反之, 质量函数就是密度$\rho(s)$的一个原函数. 由此

$$m(s) = \int_0^s \rho(t)dt.$$

中学物理中讲过有限多个质点的质心的求法. 设在平面上有n个质点, 质量分别为$m_1, m_2, \cdots, m_n$, 坐标依次为$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$. 则这$n$个质点系的质心坐标为

$$\overline{x} = \frac{\sum\limits_{k=1}^n m_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^n m_k}, \quad \overline{y} = \frac{\sum\limits_{k=1}^n m_k y_k}{\sum\limits_{k=1}^n m_k}.$$

现在将这个问题加以推广, 利用定积分代替上式中的求和来求一条光滑曲线l的质心. 当密度$\rho(x)$为常数时, 质心的位置只与l的形状有关, 这时称质心为形心.

设平面上有一条长为l的光滑曲线,其以弧长s为参数的方程为

$$x = x(s), y = y(s), 0 \leq s \leq l.$$

曲线上分布有质量, 其密度函数为$\rho(s)$. 为求这条曲线的质心,在$[0, l]$上取分割$T: 0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n = l$. 取$\xi_k \in [s_{k-1}, s_k]$, 并记曲线上对应于$s_k$的点为$A_k$, 则从$A_{k-1}$到$A_k$的弧段的质量近似等于$\rho(\xi_k)\Delta s_k, k = 1, 2, \cdots, n$. 将整条曲线近似地视为由$n$个质点组成的质点系，$n$个质点的质量和位置分别为

$$\rho(\xi_k)\Delta s_k, \quad (x(\xi_k), y(\xi_k)), k = 1, 2, \cdots, n.$$

于是按质点系的质心坐标公式知

$$x(T) = \frac{\sum\limits_{k=1}^n \rho(\xi_k)x(\xi_k)\Delta s_k}{\sum\limits_{k=1}^n \rho(\xi_k)\Delta s_k}, \quad y(T) = \frac{\sum\limits_{k=1}^n \rho(\xi_k)y(\xi_k)\Delta s_k}{\sum\limits_{k=1}^n \rho(\xi_k)\Delta s_k}$$

就是曲线质心坐标的近似值. 不难看出，只要假设$\rho(s)$连续，则当$\|T\| \to 0$ 时，近似程度越来越好. 按定积分定义可知，质心的坐标为

$$\overline{x} = \frac{\int_0^l \rho(s)x(s)ds}{\int_0^l \rho(s)ds}, \quad \overline{y} = \frac{\int_0^l \rho(s)y(s)ds}{\int_0^l \rho(s)ds}.$$

当密度$\rho(s)$为常数时, 上式化为

$$\overline{x} = \frac{1}{l}\int_0^l \rho(s)x(s)ds, \quad \overline{y} = \frac{1}{l}\int_0^l \rho(s)y(s)ds.$$

这是形心的坐标公式. 注意，曲线绕x轴旋转所得的旋转体的侧面积为

$$S = 2\pi \int_0^l y(s)ds = 2\pi \overline{y} l.$$

这表明曲线绕x轴旋转所得的旋转体的侧面积等于半径为形心的纵坐标$\overline{y}$，高为弧长l的圆柱面的面积.

如果光滑曲线的参数方程是一般的参数方程

$$x = x(t), y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

而对应于参数t的点的密度是$\rho(t)$时，由弧微分公式有

$$\overline{x} = \frac{\int_\alpha^\beta \rho(t)x(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt}{\int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt},$$

$$\overline{y} = \frac{\int_\alpha^\beta \rho(t)y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt}{\int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt}.$$

显然，当光滑曲线是由直角坐标或极坐标函数给出时，也可以导出类似的公式，这里不再列举.

例 6.6.1 求圆弧$x = r\cos t, y = r\sin t, |t| \leq \alpha \leq \pi$的形心.

解. 由对称性知形心位于x轴上，故有$\overline{y} = 0$. 只须再求$\overline{x}$，按公式有

$$\overline{x} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} r\cos t\sqrt{[-r\sin t]^2 + [r\cos t]^2}dt}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{[-r\sin t]^2 + [r\cos t]^2}dt} = \frac{2r^2\sin\alpha}{2r\alpha} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}.$$

■

例 6.6.2 求心脏线$r = a(1 + \cos\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$的形心.

解. 由对称性知，形心位于极轴的正向上，于是$\overline{y} = 0$. 由上节例6.5.14知，心脏线的周长为$8a$. 从而由公式知形心的横坐标为.

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{8a}\int_0^{8a} x(s)ds = \frac{1}{8a}\int_0^{2\pi} r\cos\theta\sqrt{r^2 + (r'^2}d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)\cos\theta\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2(-\sin\theta)^2}d\theta \\
&= \frac{a}{8}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)\cos\theta\sqrt{2(1+\cos\theta)}d\theta \\
&= \frac{a}{4}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)\cos\theta\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta \\
&= a\int_0^{\pi}(2 - 2\sin^2\frac{\theta}{2})(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2})d(\sin\frac{\theta}{2}) \\
&= 2a\int_0^1 (1-t^2)(1-2t^2)dt = \frac{4}{5}a.
\end{aligned}$$

■

6.6.2 变力所作的功

设力的大小为f，其方向与Ox轴平行，某物体受力f的作用，由点$x = a$沿Ox轴移动到点$x = b$ $(a < b)$，求力f所作的功W.

如果f是常力，那么它所作的功W等于f乘以物体移动的路程: $W = (b-a)f$.

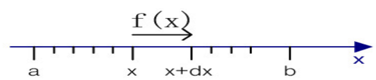
如果f是变力，即在Ox轴上的不同点处，f的大小也不同，这时$f = f(x)$是一个随x而变的函数. 采用微元法: 先把$[a, b]$分成n个子区间，在子区间$[x, x+dx]$上变力所作的功为ΔW，它可以用功的微元dW来近似代替(图6.6.2)，即

$$dW = f(x)dx,$$

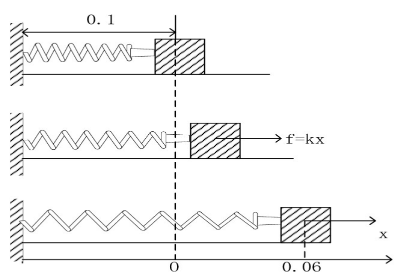
于是

$$W = \int_a^b dW = \int_a^b f(x)dx.$$

这就是说，变力$f(x)$所作的功，等于它在区间$[a, b]$上的定积分.



例 6.6.3 一个弹簧原长为$0.1m$，一个力$f(N)$把它由原长拉长了$0.06m$(图6.6.2). 求力f所作的功W.



解. 由物理学知道，拉力$f(N)$与弹簧的伸长量$s(m)$成正比，即$f = ks$（k为比例常数）. 按图6.6.2选取坐标系，伸长量为x, 拉力为$f = kx$，以m为单位，积分区间是$[0, 0.06]$，于是力f所作的功W为:

$$W = \int_0^{0.06} f dx = \int_0^{0.06} kx dx = k \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_0^{0.06} = 0.0018k(J).$$

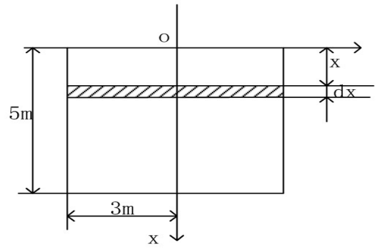
另外，本例若把坐标原点选在弹簧的固定端，则伸长量$s = (x-0.1)$，拉力为$f = k(x-0.1)^2$，而积分区间为$[0.1, 0.16]$（长度以m为单位）有

$$W = \int_{0.1}^{0.16} k(x-1)dx = \frac{k}{2}(x-0.1)^2\bigg|_{0.1}^{0.16} = 0.0018k(J).$$

■

例 6.6.4 一个圆柱形的储水罐，高$5m$, 底圆半径$3m$，罐内盛满了水，求把罐内的水全部抽出所作的功W.

解. 如图6.6.2所示，选取Ox轴, 以水的深度$x(m)$为积分变量, 积分区间为$[0, 5]$. 设想把罐内的水分成许多水平的薄层，则在任意的一个小区间$[x, x+dx]$上的一薄层水的厚度为$dx(m)$. 因此，这一薄层水的



重量为$9.8(\pi 3^2)10^3 dx(N)$). 若把这一薄层水抽出所走过的路程用x近似代替，则抽出这一薄层水所作的功Δw可近似用$dW = 9.8(\pi 3^2)x10^3 dx$表示. 在$[0,5]$上积分，有

$$W = \int_0^5 dW = \int_0^5 9.8(\pi 3^2)x10^3 dx$$
$$= (88.2\pi \times 10^3)\int_0^5 xdx \approx 3.46 \times 10^6 (J).$$

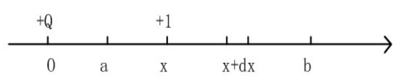
■

例 6.6.5 把电量$Q(C)$的点电荷放在x轴的原点，它产生一个电场，由库伦定律，把一个单位正电荷放在场中Ox轴上距离原点O为$x(m)$的地方, 电场对它的作用力大小为$F = k\frac{Q}{x^2}$ (k为常数). 求：

(1) 场力把单位正电荷沿Ox轴由$x = a(m)$处移至$x = b(m)$处所作的功W_1；

(2) 场力把单位正电荷沿Ox轴由$= a(m)$移至无穷远点所作的功W_2.

证明. 这是变力作功的问题图6.6.2.



(1) 由于$dW_1 = k\frac{Q}{x^2}dx$, 故

$$W_1 = \int_a^b k\frac{Q}{x^2}dx = kQ\left[-\frac{1}{x}\right]\Big|_a^b$$
$$= kQ\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \quad (J);$$

(2) $W_2 = \int_a^{+\infty} k\frac{Q}{x^2}dx = \frac{kQ}{a} \quad (J)$.

■

6.6.3 引力问题

万有引力定律告诉我们，质量为m_1, m_2，相距为r的两个质点是相互吸引的，引力的方向沿着两个质点的联线，引力的大小为

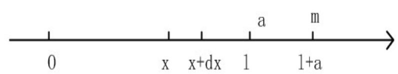
$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

这里, k为引力系数.

对于一个物体和一个质点（或两个物体），如果它们的距离非常遥远，那么都可以把它们近似地看成质点，直接用上面的公式来计算引力即可. 但是如果它们之间的距离不大，则在某些特殊的情况下可以用定积分的方法来解决，下面通过一个例子来说明引力问题的计算方法.

例 6.6.6 设有一长为l, 质量为M的均匀细棒，在棒所在的直线上距棒的近端距离为a处有一个质量为m的质点，求棒对质点的引力F.

解. 在本例中，由于细棒与质点在同一条直线上，当分割细棒为n个小段时，将每个小段与质点之间的引力大小直接相加就可以得到细棒与质点之间的引力（即满足可加性）. 因此，这个问题可以用定积分来解决. 如图6.6.3 选取坐标系，使棒的一端位于坐标原点O，质点位于$l+a$处. 把细棒上相应于$[x, x+dx]$的一段近似地看成质点,其质量为$\frac{M}{l}dx$，这一小段棒与质点和距离是$l+a-x$，则有



$$dF = -k\frac{m\frac{M}{l}dx}{(l+a-x)^2} = -\frac{kMm}{l(l+a-x)^2}dx,$$

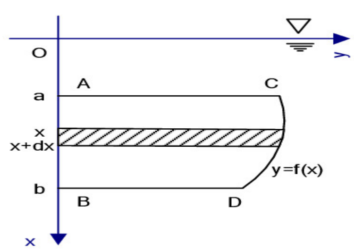
$$\begin{aligned} F &= \int_0^l dF = -\int_0^l \frac{kMm}{l(l+a-x)^2}dx \\ &= -\frac{kMm}{l}\int_0^l \frac{d[x-(l+a)]}{[x-(l+a)]^2} \\ &= -\frac{kMm}{a(l+a)}. \end{aligned}$$

■

6.6.4 液体的侧压力

在水坝和闸门的工程设计中，需要计算水坝和闸门所受的水的压力，这就是液体的侧压力问题.

设有一曲边梯形平板$ABDC$铅直地浸入液体之中，如图6.6.4. 坐标系的选取使Ox轴向下, Oy 轴与液面相齐，曲边CD的方程为$y=f(x)$, 现在来求此曲边梯形平板的一侧所受的液体的侧压力P.



从物理学知道，在液体中的每一点处，在各个方向上都承受着压力，并且各方向上的压力大小都相同. 也就是说，在液体中的同一深度处的各点所承受压力的大小都相同，若以h表示这一点的深度，p表示这一点处的压强，γ表示液体的比重，则有：

$$p = \gamma h.$$

由于压强是随着深度而变化的，我们取x为积分变量，考虑位于$[x, x+dx]$处的小横条，在此小横条内压强的变化不大，用深度为x的压强$p=\gamma x$代替横条上各点处的压强，同时把小横条的面积近似看成长为$f(x)$，宽为dx的矩形面积，则小横条所受的液体压力ΔP的近似值dP为

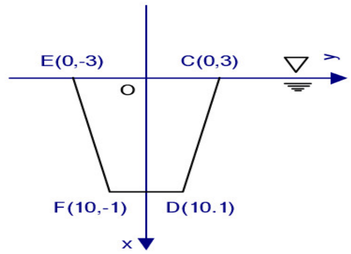
$$dP = pf(x)dx = \gamma xf(x)dx.$$

把dP在$[a,b]$上积分，则得液体侧压力公式：

$$P=\int_a^b \gamma x f(x)dx.$$

例 6.6.7 设某水渠的闸门与水面垂直，水渠的横截面是等腰梯形，下底$2m$，上底为$6m$，高为$10m$，当水渠灌满时，求闸门所受的水压力.

解. 如图6.6.4选取坐标系，CD的方程为: $y-3=\frac{1-3}{10-0}x$，即$y=-\frac{1}{5}x+3$.



由于闸门以Ox轴为对称轴，故只需计算它的一半的压力再乘以2.

$$P=2\int_0^{10}\gamma x\left(-\frac{1}{5}x+3\right)dx=\frac{500}{3}\gamma\approx 1.63\times 10^6(N).$$

■

6.6.5 函数的平均值

- **连续函数的平均值**

平均值问题是实际问题中常见的问题. n 个离散量$y_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$的算术平均值$\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$是大家所熟知的.

若$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，由定积分的中值定理可知，$f(x)$在$[a,b]$上的平均值为：

$$\overline{y}=f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

例 6.6.8 设纯电阻电路中的正弦交流电的电流$i=I_m\sin\omega t$，其中常数I_m为电流最大值，ω为角频率. 求：

（1） 电流i在半周期区间$[0,\frac{\pi}{\omega}]$上的平均值；

（2） 电路中的电阻为R时，在一个周期上交流电的平均功率$\overline{p}$.

证明. (1)

$$\overline{i}=\frac{1}{\frac{\pi}{\omega}}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} I_m\sin\omega t dt=\frac{\omega I_m}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin\omega t dt=\frac{2}{\pi}I_m.$$

（2） 因为电路中的电压$U=iR=I_mR\sin\omega t$，所以功率$p=Ui=I_m^2R\sin^2\omega t$, 在一个周期区间$[0,\frac{2\pi}{\omega}]$上的平均功率为：

$$\begin{aligned}\overline{p}&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I_m^2R\sin^2\omega t dt=\frac{I_m^2R}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin^2\omega t d(\omega t)\\&=\frac{I_m^2R}{4\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}(1-\cos 2\omega t d(\omega t)\\&=\frac{1}{2}I_m^2R.\end{aligned}$$

■

若取$U_m = I_m R$，则上面的结果可以记成: $\overline{p} = \frac{1}{2} I_m U_m$. 这就是说在纯电阻电路中，正弦交流电的平均功率等于电流与电压的最大值的乘积的一半. 日常生活中所用的交流电器上标明的功率，就是指的平均功率$\overline{p}$.

- **均方根值**

交流电的电流$i = i(t)$的大小和方向是随着时间的变化而变的. 但是，在一般的电器上却标明有确定的电流值，这实际上是指交流电的有效值.

若交流电流$i = i(t)$在一个周期内，消耗在同一电阻R上的平均功率等于某直流电流I消耗在同一电阻R上的功率时，这称该直流电流I的数值为交流电流$i(t)$的有效值.

例 6.6.9 在纯电阻电路中，若电阻为R，交流电流$i = i(t)$，求电流$i(t)$的有效值I.

解. 电流$i(t)$在R上消耗的功率为$i^2(t)R$，它在一个周期区间$[0, T]$上的平均值为

$$\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)Rdt.$$

设直流稳恒电流I在R上消耗的功率为I^2R，则有

$$I^2R = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)Rdt = \frac{R}{T}\int_0^T i^2(t)dt,$$

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt,$$

即$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}$. 可知有效电流$I$的值与$R$无关.

同理，还可以推出交流电压$u = u(t)$的有效值U的公式

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}.$$

■

例 6.6.10 在纯电阻电路中的正弦交交流电，其电流强度为$i = I_m \sin\omega t$, 其中I_m为电流的最大值, ω 是角频率. 求电流的有效值I及电压的有效值U.

证明. $I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T}\int_0^T \sin^2 tdt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0.707 I_m$.

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (I_m R)^2 \sin^2\omega t dt} \\ &= \sqrt{\frac{U_m^2}{T}\int_0^T \sin^2\omega t dt} \\ &= \frac{U_m}{\sqrt{2}} \approx 0.707 U_m. \end{aligned}$$

■

例题**??**说明，正弦交流电电流的有效值为其峰值的$\frac{1}{\sqrt{2}}$倍，而电压的有效值也为其峰值的$\frac{1}{\sqrt{2}}$倍. 对平常的照明用电，其电压为$u(t) = 311\sin 100\pi t$，其电压峰值为$311V$，因而电压的有效值为：$U = \frac{311}{\sqrt{2}} \approx 219.9 \approx 220V$,

在数学领域内的统计学上，称$\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx}$为函数$f(x)$在$[a, b]$上的均方根. 因此，在交流电流电路中，电流、电压的有效值就是它们在一个周期上的均方根值.

6.6.6 习题6.6

1. 一细轴,长为$10m$, 它的线密度$\mu = 6 + 0.3x(kg/m)$, 其中x为距轴的一个端点的距离, 试求细轴的质量.

2. 求下列曲线段的质心坐标：

   (1) 半径为a，弧长为$\frac{1}{2}\pi a(a \le \pi)$的均匀圆弧;

   (2) $f = ae^{k\theta}(a > 0, k > 0)$上由点(0,a)到点$(\theta, r)$的均匀弧段.

3. 求半圆$0 \le y \le \sqrt{R^2 - x^2}$的重心.

4. 求半球$0 \le z \le \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$的重心.

5. 求抛物体的$x^2 + y^2 \le z \le h$重心和饶z轴的转动惯量(已知抛物体的密度为1).

6. 已知抛物线段$y = x^2(-1 \le x \le 1)$，曲线段上任一点处的密度与该点到y轴的距离成正比，$x = 1$处密度为5，求此曲线段的质量.

7. 一质点运动的速度$v = 0.1t^3(m/s)$, 试求运动开始后$t = 10s$的时间内, 质点所经过的路程s, 并求在此时间内质点运动的平均速度.

8. 物体按规律$x = ct^3(c > 0)$作直线运动，x表示在时间t内物体移动的距离，设介质的阻力与速度的平方成正比，求物体从$x = 0$到$x = a$时阻力所作的功.

9. 半径为r的球沉入水中，它与水面相接，球的比重为1，现将球从水中取出，要做多少功？

10. 求解下列变力做功问题:

    (1) 弹簧原长为$1m$, 每压$1cm$缩需力$5g$, 若自$80cm$压缩至$60cm$, 求所作的功;

    (2) 设有一半径为R, 高为h的金属正圆柱体(比重为2.5), 沉入水中, 上底与水面重合, 现将圆柱铅直地打捞出水面, 试求所做的功;

    (3) 有截面面积$20m^2$, 深为$5m$的水池, 用水泵把水池中的水全部抽到$10m$高的水塔顶上去, 问要作多少功? 若要$10min$(分钟)把水池中的水全部抽空, 则水泵功率应是多少?

    (4) 用铁锤将一铁钉击入木板, 设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的浓度成正比, 在铁钉击第一次时能将铁击入板内$1cm$, 如果铁锤每次打击铁钉所作的功相等, 问铁锤击第二次时, 能把铁钉又击入多少cm?

    (5) 人造地球卫星质量为$173kg$, 按下述两种情况, 计算发射卫星克服地球引力所作的功: (i) 把卫星送到离地面$630km$处, 使卫星进入轨道; (ii) 把卫星发射到无穷远处使之脱离地球.

    (提示:地球和卫星间引力)

6.7 第六章典型例题

6.7.1 典型例题

例 6.7.1 设$f(x)$在$[0,1]$上连续,试证:

$$\lim_{h\to 0^+}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx = \frac{\pi}{2}f(0).$$

证明. **证I**

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx &= \int_0^{h^{\frac{1}{4}}} \frac{hf(x)}{h^2+x^2}dx + \int_{h^{\frac{1}{4}}}^1 \frac{hf(x)}{h^2+x^2}dx \\ &= I_1 + I_2\end{aligned}$$

其中

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{h^{\frac14}} \frac{hf(x)}{h^2+x^2}dx = f(\xi)\int_0^{h^{\frac14}} \frac{h}{h^2+x^2}dx \\
&= f(\xi) arc\tan\frac{x}{h}\Big|_0^{h^{\frac14}} \\
&= f(\xi) arc\tan\frac{1}{h^{\frac34}} \quad (0\le\xi\le h^{\frac14}) \\
&\to f(0)\frac{\pi}{2} \quad (\text{当}h\to 0^+\text{时}). \\
|I_2| &= \Big|\int_{h^{\frac14}}^1 \frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx\Big| \le M\int_{h^{\frac14}}^1 \frac{h}{h^2+x^2}dx \quad (|f(x)|\le M) \\
&= \Big(arc\tan\frac{1}{h} - arc\tan\frac{1}{h^{\frac34}}\Big) \to 0 \quad (\text{当}h\to 0^+\text{时}).
\end{aligned}
$$

证II (拟合法)因 $\lim\limits_{h\to 0^+}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$, 故极限值可改写为

$$
\frac{\pi}{2}f(0) = \lim_{h\to 0^+}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}f(0)dx.
$$

问题归结为证明:

$$
\lim_{h\to 0^+}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]dx = 0.
$$

但

$$
\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]dx = \Big(\int_0^\delta + \int_\delta^1\Big)\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]dx,
$$

因$f(x)$在$x=0$处连续.所以$\forall\varepsilon>0$,当$\delta>0$充分小时,在$[0,\delta]$ 上,$|f(x)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{\pi}$.从而

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int_0^\delta \frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]dx\Big| \\
&\le \int_0^\delta \frac{h|f(x)-f(0)|}{h^2+x^2}dx \le \frac{\varepsilon}{\pi}\cdot\int_0^\delta \frac{h}{h^2+x^2}dx \\
&= \frac{\varepsilon}{\pi} arc\tan\frac{\delta}{h} \le \frac{\varepsilon}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

再将δ固定, 这时第二个积分

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int_\delta^1 \frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]dx \\
&\le h\int_\delta^1 \frac{1}{x^2}[f(x)-f(0)]dx \equiv h\cdot M_0.
\end{aligned}
$$

于是当$0<h<\frac{\varepsilon}{2M_0}$时

$$
\Big|\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
$$

证毕.

证III

$$
\int_0^1 \frac{hf(x)}{h^2+x^2}dx = \int_0^1 \frac{h(f(x)-f(0))}{h^2+x^2}dx + f(0)\int_0^1 \frac{hdx}{h^2+x^2} = I_1 + I_2.
$$

然后证明$I_1\to 0, I_2\to\frac{\pi}{2}f(0)$. ■

例 6.7.2 试证:

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx \geq \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

证明. 分析 令 $\quad t = arc\sin x$

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin t)dt.$$

令 $\quad t = arc\cos x$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos t)dt.$$

欲证的不等式化为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin t)dt \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos t)dt.$$

为此只要证明

$$\cos(\sin t) \geq \sin(\cos t) \quad \Big[\text{当}t \in (0, \tfrac{\pi}{2})\text{时}\Big].$$

注意到

$$\cos(\sin t) = \cos(|\sin t|) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - |\sin t|\right),$$

所以

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - |\sin t|\right) \geq \sin(\cos t).$$

因在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内$\sin x$递增, 只要证明

$$-\frac{\pi}{2} \leq \cos t \leq \frac{\pi}{2} - |\sin t| \leq \frac{\pi}{2}.$$

但因

$$\cos t \pm \sin t = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm t\right) \leq \sqrt{2} < \frac{\pi}{2},$$

故

$$-\frac{\pi}{2} < -1 \leq \cos t < \frac{\pi}{2} \pm \sin t \leq \frac{\pi}{2} - |\sin t| \leq \frac{\pi}{2}.$$

原题获证. ∎

例 6.7.3 证明:$x > 0$时,

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

证明. 已知$\cos x \leq 1$ ($x > 0$只有$x = 2n\pi$时等号才成立). 在此式两端同时取$[0,x]$上的积分, 得

$$\sin x < x \quad (x > 0).$$

再次取$[0,x]$上的积分, 得

$$1 - \cos x < \frac{x^2}{2} \quad (x > 0).$$

第三次取$[0,x]$上的积分, 得

$$x - \sin x < \frac{x^3}{6} \quad (x > 0).$$

即

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x \quad (x > 0).$$

继续在$[0,x]$上积分两次,可得

$$\sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

证毕. ∎

例 6.7.4 设$f(x)$在$[a,b]$上非负、连续, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)dx}=\max_{a\le x\le b}f(x).$$

证明. 证明 设$M=\max\limits_{a\le x\le b}f(x)$. 若$M=0$, 则$f(x)\equiv 0$, 结论显然成立, 不妨设$M>0$. $\forall\varepsilon>0(\varepsilon<M)$,由保号性,$\exists[\alpha,\beta]\subset[a,b]$,使得

$$0<M-\varepsilon\le f(x)\le M,\quad x\in[\alpha,\beta].$$

于是有

$$(M-\varepsilon)^n\le f^n(x)\le M^n,\quad x\in[\alpha,\beta],$$

$$(M-\varepsilon)^n(\beta-\alpha)=\int_\alpha^\beta(M-\varepsilon)^ndx\le\int_\alpha^\beta f^n(x)dx$$

$$\le\int_a^b f^n(x)dx\le\int_a^b M^ndx=M^n(b-a),$$

$$(M-\varepsilon)\sqrt[n]{\beta-\alpha}\le\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)dx}\le M\sqrt[n]{b-a}.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\beta-\alpha}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b-a}=1$,因此

$$M-\varepsilon\le\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)dx}\le M.$$

由ε的任意性,命题成立. ■

例 6.7.5 证明*:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos^n xdx=0.$$

证明. 设$f(x)=e^x\cos^n x$, 则

$$f'^x\cos^{n-1}x(\cos x-n\sin x).$$

令$f'(x)=0$, 当$n\ge 2$时求得驻点$x=\frac{\pi}{2},\arctan\frac{1}{n}\in[0,\frac{\pi}{2}]$, 记$x_n=\arctan\frac{1}{n}$. 当$x\in[0,x_n]$时$f'(x)>0$, 函数$f(x)$单调递增,当$x\in[x_n,\frac{\pi}{2}]$时$f'(x)<0$, 函数$f(x)$单调递减, 所以

$$\max_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}f(x)=e^{\arctan\frac{1}{n}}(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}})^n\to 1\quad(n\to\infty).$$

$\forall\varepsilon>0$, 取$\delta=\frac{\varepsilon}{4}$. 因

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\arctan\frac{1}{n}=0,$$

故$\exists N_1>0$,当$n>N_1$时,$0<x_n<\delta$，这时,在$[0,\delta]$上有

$$f(x)=e^x\cos^n x\le e^{x_n}\cos^n x_n=M_n.$$

又因$\lim\limits_{n\to\infty}M_n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\arctan\frac{1}{n}}(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}})^n=1$, 故$\exists N_2>0$, 当$n>N_2$时有$0<M_n<2$. 于是当$n>\max\{N_1,N_2\}$时,有

$$0<\int_0^\delta f(x)dx\le\int_0^\delta M_ndx=M_n\cdot\frac{\varepsilon}{4}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

再有, 当$n>N_1$时$f(x)$在$[\delta,\frac{\pi}{2}]\subset[x_n,\frac{\pi}{2}]$上单调递减, 因此要使

$$0<\int_\delta^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx<e^\delta\cos^n\delta\cdot(\frac{\pi}{2}-\delta)=\frac{1}{4}e^{\frac{\varepsilon}{4}}(\cos\frac{\varepsilon}{4})^n(2\pi-\varepsilon)<\frac{\varepsilon}{2},$$

或者

$$(\cos\frac{\varepsilon}{4})^n < \frac{2\varepsilon}{2\pi-\varepsilon}e^{\varepsilon/4},$$

只须$n > N_3 = \ln(\frac{2\varepsilon}{2\pi-\varepsilon}e^{-\frac{\pi}{4}})/\ln\cos\frac{\varepsilon}{4}$ 即可.

所以当$n > N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$时有, 就有

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\delta} f(x)dx + \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx < \varepsilon,$$

从而原命题成立.

注： 该题可直接放大为$e^{\pi/2}\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx = 0$. ■

例 6.7.6 证明*:* 若$f(x)$为$[0,1]$上的递减函数,则对任给的$a\in(0,1)$恒有

$$a\int_0^1 f(x)dx \le \int_0^a f(x)dx.$$

- 把上面的不等式稍作变形:

$$a\int_0^1 f(x)dx = a\int_0^a f(x)dx + a\int_a^1 f(a)dx \le \int_0^a f(x)dx,$$

即得便于证明的形式(两个积分区间不再叠合)

$$\frac{1}{1-a}\int_a^1 f(x)dx \le \frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx.$$

由积分中值定理及$f(x)$的递减性此不等式显然成立.

证明. 证法一 由于$f(x)$为递减函数, 因此有

$$\frac{1}{1-a}\int_a^1 f(x)dx \le \frac{1}{1-a}\int_a^1 f(a)dx = f(a),$$

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx \ge \frac{1}{a}\int_0^a f(a)dx = f(a),$$

从而分析中的式子成立, 从而原命题成立. ■

证明. 证法二 (用定积分定义) $f(x)$在$[0,1]$递减, $\int_0^1 f(x)dx$存在, 将$[0,1]$ 分成n等份,

$$a\int_0^1 f(x)dx = a\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{n}f(\frac{k}{n}) \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{a}{n}f(\frac{ka}{n}) = \int_0^a f(x)dx.$$

■

证明. 证法三 若$f(x)$在$[0,1]$上连续. 将$f(x)$在$[0,1]$及$[a,1]$分别用积分中值定理得

$$\int_0^a f(x)dx = af(\xi_1);\quad \int_a^1 f(x)dx = (1-a)f(\xi_2).$$

注意到$\xi_1 < \xi_2$及$f(x)$的递减性, 有

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^a f(x)dx + \int_a^1 f(x)dx \\ &= af(\xi_1) + (1-a)f(\xi_2) \\ &\ge af(\xi_1) + (1-a)f(\xi_1) \\ &= f(\xi_1) = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx.\end{aligned}$$

■

例 6.7.7 设$\varphi(t)$在$[a,b]$上连续,$E=\varphi([a,b])$, $f(x)$在E上为可微上凸函数.证明:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(\varphi(t))dt \le f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)dt\right).$$

- **分析** 设$c=\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)dt$, 问题转而证明

$$\int_a^b f(\varphi(t))dt \le (b-a)f(c).$$

由$f(x)$为E上的可微上凸函数, $\forall x\in E$,有

$$f(x)\le f(c)+f'(c)(x-c).$$

以$x=\varphi(t)$代入, 并在$[a,b]$上求积分, 便可证得结论.

证明. 由以上分析,则有

$$f(\varphi(t))\le f(c)+f'(c)[\varphi(t)-c],$$

$$\int_a^b f(\varphi(t))dt \le (b-a)f(c)+f'(c)\int_a^b \varphi(t)dt$$

$$-f'(c)c(b-a)=(b-a)f(c).$$

从而原命题成立. ■

注 若$f(x)$该改为可微凹函数，则所证不等号应反号.

例 6.7.8 求定积分

$$I=\int_0^2 \frac{x}{e^x+e^{2-x}}dx.$$

解. 在无法直接求出原函数的情形下,常采用分段积分,而后消去难以求得的积分. 为此设

$$I=\int_0^1 \frac{x}{e^x+e^{2-x}}dx+\int_1^2 \frac{x}{e^x+e^{2-x}}dx=I_1+I_2.$$

令$2-x=t$, 即$x=2-t$, 则

$$\begin{aligned} I_2 &= -\int_1^0 \frac{2-t}{e^{2-t}+e^t}dt=\int_0^1 \frac{2-t}{e^{2-t}+e^t}dt \\ &= 2\int_0^1 \frac{e^t}{e^{2t}+e^2}dt-\int_0^1 \frac{t}{e^{2-t}+e^t}dt \\ &= \frac{2}{e}\left[\arctan\frac{e^x}{e}\right]_0^1-I_1 \\ &= \frac{2}{e}\left(-\arctan\frac{1}{e}+\frac{\pi}{4}\right)-I_1. \end{aligned}$$

因此通过消去I_1而求得

$$I=\frac{2}{e}\left(-\arctan\frac{1}{e}+\frac{\pi}{4}\right).$$

■

例 6.7.9 设$f(x)$在$[0,1]$上连续可微, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx=f(1).$$

证明. 由于$f'(x)$在$[0,1]$上连续, 因此存在$M=\max\limits_{0\le x\le 1}|f'(x)|$, 且可通过分部积分得到

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n f(x)dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1}f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx\\ &=\frac{1}{n+1}f(1)-\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx.\end{aligned}$$

又因

$$\left|\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx\right|\le M\int_0^1 x^{n+1}dx=\frac{M}{n+2}\to 0\quad (n\to\infty),$$

所以就能证得

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left[f(1)-\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx\right]=f(1).$$

■

例 6.7.10 设$g(x)$是在$[0,1]$上的连续函数, 而$f(x)$是周期为1的连续周期函数. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g(x)f(nx)dx=\int_0^1 g(x)dx\int_0^1 f(x)dx.$$

性和周期函数$f(x)$的积分性质.

证明. 记$A=\int_0^1|f(x)|dx$. 由$g(x)$在$[0,1]$上连续进而一致连续，所以$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$, 当$n>N$ 且$|x'-x''|<\frac{1}{n}$， x'、$x''\in[0,1]$时, 恒有

$$|g(x')-g(x'')|<\frac{\varepsilon}{A}.$$

显然当$x\in[k-1,k]$ 时, $|\frac{x}{n}-\frac{k}{n}|\le\frac{1}{n}$, 从而对上述$n$, $\left|g(\frac{x}{n})-g(\frac{k}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{A}$. 因此原式左边的定积分

$$\int_0^1 g(x)f(nx)dx=\frac{1}{n}\int_0^n g(\frac{x}{n})f(x)dx=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\int_{k-1}^k g(\frac{x}{n})f(x)dx.$$

而$f(x)$以1为周期，所以

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\int_{k-1}^k g(\frac{k}{n})f(x)dx=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g(\frac{k}{n})\int_{k-1}^k f(x)dx=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g(\frac{k}{n})\int_0^1 f(x)dx.$$

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^1 g(x)f(nx)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\int_{k-1}^k g\left(\frac{k}{n}\right)f(x)dx\right|=\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\int_{k-1}^k\left(g(\frac{x}{n})-g(\frac{k}{n})\right)f(x)dx\right|\\ &\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\int_{k-1}^k\left|g(\frac{x}{n})-g(\frac{k}{n})\right||f(x)|dx\\ &\le\frac{\varepsilon}{A}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\int_{k-1}^k|f(x)|dx\\ &=\frac{\varepsilon}{A}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\int_0^1|f(x)|dx=\varepsilon.\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g(x)f(nx)dx=\int_0^1 g(x)dx\int_0^1 f(x)dx.$$

■

例 6.7.11 设$f(x)$在$(0,+\infty)$上为递减的可微函数, 且满足$0 < f(x) < |f'(x)|$, 证明:

$$xf(x) > \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in (0,1).$$

证明. 由$f(x)$递减可知$f'(x) < 0$, 且由$0 < f(x) < -f'(x)$ 知$-\frac{f'(x)}{f(x)} > 1$. 在$[x, \frac{1}{x}]$上作积分, 得到

$$\ln \frac{f(x)}{f(\frac{1}{x})} = -\int_x^{\frac{1}{x}} \frac{f'(t)}{f(t)} dt > \int_x^{\frac{1}{x}} dt = \frac{1}{x} - x, x \in (0,1),$$

此即

$$\frac{f(x)}{f(\frac{1}{x})} > e^{\frac{1}{x}-x}, x \in (0,1).$$

由于所要证的不等式即为$\frac{f(x)}{f(\frac{1}{x})} > \frac{1}{x^2}$, 因此只需证明$e^{\frac{1}{x}-x} > \frac{1}{x^2}$即可. 为此考察$\varphi(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}-x}$的单调性: 由于

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= e^{\frac{1}{x}-x}(2x - x^2 - 1) \\ &= -(x-1)^2 e^{\frac{1}{x}-x} < 0, \ x \in (0,1),\end{aligned}$$

因此$\varphi(x)$在$(0,1)$上严格递减,又$\varphi(x)$在$x = 1$处连续, 从而$\varphi(x) > \varphi(1) = 1$, 故$x^2 e^{\frac{1}{x}-x} > \varphi(1) = 1, \quad x \in (0,1)$. ■

例 6.7.12 设$f(x)$在$[0,1]$上可微, 且当$x \in (0,1)$时,$0 < f'(x) < 1, f(0) = 0$. 试证:

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 > \int_0^1 f^3(x)dx.$$

证明. **证法一** 问题在于证明

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 - \int_0^1 f^3(x)dx > 0.$$

作辅助函数

$$F(x) = \left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 - \int_0^x f^3(t)dt.$$

因 $F(0) = 0$, 故只要证明在$(0,1)$内有$F'(x) > 0$. 事实上,

$$F_0'^x f(t)dt - f^3(x) = f(x)\Big[2\int_0^x f(t)dt - f^2(x)\Big].$$

已知$f(0) = 0$, 当$x \in (0,1)$时, $0 < f'(x) < 1$, 故$f(x) > 0$. 记

$$g(x) = 2\int_0^x f(t)dt - f^2(x),$$

则$g(0) = 0$,

$$g'(x) = 2f(x) - 2f(x) \cdot f'(x) = 2f(x)[1 - f'(x)] > 0,$$

于是

$$g(x) = 2\int_0^x f(t)dt - f^2(x) > 0 \quad (x \in (0,1)),$$

从而$F'(x) > 0$获证. ■

证明. **证法二** 问题在于证明

$$\frac{\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2}{\int_0^1 f^3(x)dx} > 1.$$

令$F(x)=\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2,\quad G(x)=\int_0^x f^3(t)dt$, 则利用Cauchy中值定理得

$$\begin{aligned}\frac{\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2}{\int_0^1 f^3(x)dx}&=\frac{F(1)-F(0)}{G(1)-G(0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}\\&=\frac{2f(\xi)\int_0^\xi f(t)dt}{f^3(\xi)}=\frac{2\int_0^\xi f(t)dt}{f^2(\xi)}\quad(0<\xi<1)\\&=\frac{2\int_0^\xi f(t)dt-2\int_0^0 f(t)dt}{f^2(\xi)-f^2(0)}=\frac{2f(\eta)}{2f(\eta)f'(\eta)}=\frac{1}{f'(\eta)}>1.\quad(0<\eta<\xi<1).\end{aligned}$$

■

例 6.7.13 设$f(x)$在任意$[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$上$Riemann$可积且满足$f(x+y)=f(x)+f(y)$, 试求$f(x)$.

解. 一方面, 由条件可得

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t+y)dt&=\int_0^x[f(t)+f(y)]dt\\&=\int_0^x f(t)dt+xf(y);\end{aligned}$$

另一方面,由换元积分,又得

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t+y)dt&=\int_y^{x+y} f(u)du\\&=\int_0^{x+y} f(u)du-\int_0^y f(u)du.\end{aligned}$$

所以有

$$xf(y)=\int_0^{x+y} f(t)dt-\int_0^x f(t)dt-\int_0^y f(t)dt.$$

同理又有

$$yf(x)=\int_0^{y+x} f(t)dt-\int_0^y f(t)dt-\int_0^x f(t)dt.$$

由此可见,对不等于零的任意两数x和y,恒有

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(y)}{y}\equiv\text{常数},$$

即$f(x)=ax,x\neq0$.再由题设条件,知道

$$f(1)=f(1+0)=f(1)+f(0)\Rightarrow f(0)=0.$$

所以对$x=0, f(x)=ax$同样成立; $x=1$时, $f(1)=a$, 所以$f(x)=f(1)x$. ■

例 6.7.14 求满足下列条件的所有函数$f(x)$:

(i) 在$[0,+\infty))$上有定义,且非负、连续;

(ii) 任给$x\in(0,+\infty)$, $f(x)$在$[0,x]$上的积分平均等于$f(0)$于$f(x)$的几何平均.

解. 条件(ii)即为

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\sqrt{f(0)f(x)}.$$

若记$F(x)=\int_0^x f(t)dt, a=f(0)$, 则由$f(x)$连续可知$F'(x)=f(x)$; 且条件$(ii)$亦即

$$\left[\frac{1}{x}F(x)\right]^2=af(x)=aF'(x).$$

这样, 问题化为关于$F(x)$的微分方程求解.

把上式改写成
$$a\cdot\frac{F'(x)}{[F(x)]^2}=\frac{1}{x^2},$$
两边积分后得到
$$\frac{a}{F(x)}=\frac{1}{x}-C$$
即
$$F(x)=\frac{ax}{1-Cx},$$
其中C为任意常数. 从而求得
$$f(x)=F'(x)=\frac{a}{(1-Cx)^2},\quad x>0.$$
考虑到当$C>0$时,上述$f(x)$在$[0,+\infty)$上已不可积($x=\frac{1}{C}$不连续，舍去). 所以
$$f(x)=\frac{a}{(1-Cx)^2}\begin{cases}\text{当}C>0\text{时}, & x\in[0,\frac{1}{C});\\ \text{当}C\le 0\text{时}, & x\in[0,+\infty)\end{cases}$$
就是所求的函数. ■

例 6.7.15 设$f(x)$是$[0,+\infty)$上的下凸函数, 证明:
$$H(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$
也是$(0,+\infty)$上的下凸函数.

证明. 首先,由$f(x)$为下凸函数,$f(t)$在任意开区间$(0,x)$内连续,故$f(t)\in\mathbb{R}[0,x]$. 由下凸函数的定义,$\forall\lambda\in(0,1),\forall x_1,x_2>0$,恒有
$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$
由此便可证得
$$\begin{aligned}H(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)&=\tfrac{1}{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}\int_0^{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}f(t)dt\\&=\int_0^1 f(x(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2))dx\\&\le\int_0^1[\lambda f(x_1x)+(1-\lambda)f(x_2x)]dx\\&=\tfrac{\lambda}{x_1}\int_0^{x_1}f(t)dt+\tfrac{1-\lambda}{x_2}\int_0^{x_2}f(t)dt\\&=\lambda H(x_1)+(1-\lambda)H(x_2),\end{aligned}$$
所以$H(x)$是$(0,+\infty)$上的下凸函数. ■

例 6.7.16 设在$[a,b]$上$g(x)$为连续函数,$f(x)$为单调的连续可微函数.证明: 存在$\xi\in[a,b]$,使得
$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^\xi g(x)dx+f(b)\int_\xi^b g(x)dx.$$

证明. 这是加强条件的积分第二中值定理,可望有一个不难的证明.

设$G(x)=\int_a^x g(t)dt, x\in[a,b]$, 则有
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx&=\int_a^b f(x)dG(x)\\&=f(x)G(x)|_a^b-\int_a^b f'(x)G(x)dx\\&=f(b)G(b)-\int_a^b f'(x)G(x)dx.\end{aligned}$$
由假设$f(x)$为单调函数, 故$f'(x)$不变号, 从而$\exists\xi\in[a,b]$, 使得
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx&=f(b)G(b)-G(\xi)\int_a^b f'(x)dx\\&=f(b)\int_a^b g(x)dx-[f(b)-f(a)]\int_a^\xi g(x)dx\\&=f(a)\int_a^\xi g(x)dx+f(b)\int_\xi^b g(x)dx.\end{aligned}$$

■

例 6.7.17 设$f(x)$严格递减,在$[0,1]$上连续, $f(0)=1, f(1)=0$. 试证明:$\forall\delta\in(0,1)$有

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\int_\delta^1(f(x))^n dx}{\int_0^\delta(f(x))^n dx}=0$; *(2)* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\int_0^\delta(f(x))^{n+1} dx}{\int_0^1(f(x))^n dx}=1$.

证明. (1) (利用两边夹法则) 因$f(x)\searrow, 0<f(\delta)<f(\frac{\delta}{2}), \left(\frac{f(\delta)}{f(\frac{\delta}{2})}\right)^n\to 0$(当$n\to\infty$时), 故对任意固定的$\delta\in(0,1)$有:

$$\begin{aligned}0\le\frac{\int_\delta^1(f(x))^n dx}{\int_0^\delta(f(x))^n dx}&\le\frac{\int_\delta^1(f(x))^n dx}{\int_0^{\frac{\delta}{2}}(f(x))^n dx}\le\frac{\int_\delta^1(f(\delta))^n dx}{\int_0^{\frac{\delta}{2}}(f(\frac{\delta}{2}))^n dx}\\&\le\left(\frac{f(\delta)}{f(\frac{\delta}{2})}\right)^n\cdot\frac{(1-\delta)}{\frac{\delta}{2}}\to 0\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

(2) (利用两边夹法则的推广形式) 因$f(x)$ 严格递减, $f(0)=1, f(1)=0$, 知$0<f(x)<1$ 当$x\in(0,1)$ 时. 据连续性, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_1: 0<\delta_1<\delta$ 使得

$$f(x)>1-\varepsilon\quad(\forall x\in[0,\delta_1]).$$

于是由(1)知

$$\begin{aligned}1=\frac{\int_0^1(f(x))^n dx}{\int_0^1(f(x))^n dx}&\ge\frac{\int_0^1(f(x))^{n+1} dx}{\int_0^1(f(x))^n dx}\ge\frac{\int_0^\delta(f(x))^{n+1} dx}{\int_0^1(f(x))^n dx}\\&\ge\frac{\int_0^{\delta_1}(f(x))^{n+1} dx}{\int_0^1(f(x))^n dx}\ge(1-\varepsilon)\frac{\int_0^{\delta_1}(f(x))^n dx}{\int_0^{\delta_1}(f(x))^n dx+\int_{\delta_1}^1(f(x))^n dx}\\&=(1-\varepsilon)\frac{1}{1+\frac{\int_{\delta_1}^1(f(x))^n dx}{\int_0^{\delta_1}(f(x))^n dx}}\to(1-\varepsilon)\quad(\text{当}n\to\infty\text{时})\end{aligned}$$

由$\varepsilon>0$的任意性知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^\delta(f(x))^{n+1} dx}{\int_0^1(f(x))^n dx}=1.$$

■

例 6.7.18 设$f(x)$在$[A,B]$上连续,$A<a<b<B$,试证:

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx=f(b)-f(a).$$

证明.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[\int_a^b f(x+h)dx-\int_a^b f(x)dx\Big]\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[\int_{a+h}^{b+h}f(t)dt-\int_a^b f(x)dx\Big].\end{aligned}$$

应用$\frac{0}{0}$型L'Hospital法则

$$\text{上式}=\lim_{h\to 0}[f(b+h)-f(a+h)]=f(b)-f(a).$$

■

例 6.7.19 设$f(x)$在$[0,1]$上二阶连续可导，$f(0)=f(1)=0$, 且当$x\in(0,1)$时$f(x)\ne 0$. 求证：$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx\ge 4$. *(精解P195 15, 典型例题例4.3.5)*

证明. 因$(0,1)$ 内$f(x)\neq 0$, 故$f(x)$ 在$(0,1)$ 内恒正或恒负[否则由介值性,必有零点在$(0,1)$ 内,与$f(x)\neq 0$ 矛盾]. 不妨设$f(x)>0(<0$ 的情况类似可证). 因$f(x)$ 在$[0,1]$ 上连续, 故存在$c\in[0,1]$, 使得$f(c)=\max\limits_{0\le x\le 1}f(x)$. 注意到$f(0)=f(1)=0$, 应用Lagrange中值定理,

$$\exists\xi\in(0,c),\text{使得}f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(c)}{c},$$

$$\exists\eta\in(c,1),\text{使得}f'(\eta)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{f(c)}{c-1}.$$

令$a=\xi,b=\eta$, 则$0<a<b<1$, 注意到

$$\sqrt{c(1-c)}\le\frac{c+(1-c)}{2}=\frac{1}{2},$$

此时

$$\begin{aligned}\int_0^1\Big|\frac{f''(x)}{f(x)}\Big|dx&\ge\int_0^1\Big|\frac{f''(x)}{f(c)}\Big|dx=\frac{1}{f(c)}\int_0^1|f''(x)|dx\\&\ge\frac{1}{f(c)}\int_a^b|f''(x)|dx\ge\frac{1}{f(c)}\Big|\int_a^b f''(x)dx\Big|\\&=\frac{1}{f(c)}|f'(b)-f'(a)|=\frac{1}{f(c)}|f'(\eta)-f'(\xi)|\frac{1}{c(1-c)}\ge 4.\end{aligned}$$

命题获证. ■

例 6.7.20 设$f(x)$在$[a,b]$上二次连续可微,$f(\frac{a+b}{2})=0$,试证:

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big|\le M(b-a)^3/24,$$

其中$M=\sup\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$.

证明. 将$f(x)$在$x=\frac{a+b}{2}$处用Tayor公式展开,注意到$f(\frac{a+b}{2})=0$,有

$$f(x)=f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{1}{2!}f''(\xi)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2.$$

右端第一项在$[a,b]$上的积分为零.故

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f(x)dx\Big|&\le\frac{1}{2!}\int_a^b|f''(\xi)|\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2dx\\&\le\frac{1}{6}M\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^3\Big|_a^b=\frac{M}{24}(b-a)^3.\end{aligned}$$

■

例 6.7.21 设$f(x)$在$[a,b]$上有连续的导函数,$f(a)=0$,试证:

$$\int_a^b|f(x)f'(x)|dx\le\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)^2\,dx.$$

证明. 令 $g(x)=\int_a^x|f'(t)|dt\quad(a\le x\le b)$, 则$g'(x)=|f'(x)|$. 由$f(a)=0$知

$$|f(x)|=|f(x)-f(a)|=\Big|\int_a^x f'(t)dt\Big|\le\int_a^x|f'(t)|dt=g(x).$$

因此

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)f_a'^b g(x)g_a'^b g(x)dg(x) &= \frac{1}{2}g^2(x)\Big|_a^b \\ &= \frac{1}{2}\Big(\int_a^b |f'(t)dt\Big)^2 \\ &= \frac{1}{2}\Big(\int_a^b 1\cdot|f'(t)dt|\Big)^2 \quad (\text{应用Schwarz不等式}) \\ &\le \frac{1}{2}\int_a^b 1^2dx\cdot\int_a^b f'(x)^2\,dt \le \frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)^2\,dt.\end{aligned}$$

■

例 6.7.22 设函数$f(x)$二次可微,证明在(a,b)内存在一点ξ,使得

$$f''(\xi) = \frac{24}{(b-a)^3}\int_a^b \Big(f(x) - f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big)dx.$$

证明. 记$x_0 = \frac{a+b}{2}$, 将被积函数在$x = x_0$处按Taylor公式展开,

$$f(x) - f(x_0) = (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}f''(\eta),$$

其中η在x_0与x之间. 在区间$[a,b]$上取积分, 注意上式右边第一项的积分为零, 因此

$$\int_a^b (f(x) - f(x_0))dx = \frac{1}{2}\int_a^b (x-x_0)^2 f''(\eta)dx,$$

此式右端$f''(\eta)$虽然不一定连续, 但导数具有介值性质, 因而积分第一中值定理仍然成立. 故$\exists\xi(a,b)$, 使得

$$\int_a^b (x-x_0)^2 f''(\eta)dx = f_a''^b(x-x_0)^2dx = \frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi).$$

从而结合以上两式命题得证. ■

例 6.7.23 设$f(x)$在$[a,b]$上连续可微,且$f(a) = f(b) = 0$,则

$$\max_{a\le x\le b}|f'(x)| \ge \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|dx.$$

证明.

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|dx \\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x) - f(a)|dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x) - f(b)|dx \\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(\xi)|(x-a)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(\eta)|(b-x)dx. \\ &\le M\frac{(b-a)^2}{8} + M\frac{(b-a)^2}{8} = M\frac{(b-a)^2}{4},\end{aligned}$$

这里$M = \max_{a\le x\le b}|f'(x)|$, 且右端两项分别在$a,b$点应用了微分中值定理. 由此

$$\max_{a\le x\le b}|f'(x)| \ge \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|dx,$$

命题得证. ■

例 6.7.24 在$[0,2]$上是否存在这样的函数,连续可微,并且

$$f(0)=f(2)=1,|f'(x)|\leq 1,\left|\int_0^2 f(x)dx\right|\leq 1?$$

证明. (据已知条件重新对积分$\int_0^2 f(x)dx$进行分段)

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$

右端第一项, 按$x=0$处展开, 注意$f(0)=1$及$|f'(x)|\leq 1$条件,

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+f'(\xi)x \quad (0<\xi<x)\\ &=1+f'(\xi)x\geq 1-x \quad (\forall x\in[0,1]).\end{aligned}$$

从而

$$\int_0^1 f(x)dx\geq\int_0^1(1-x)dx=\frac{1}{2}.$$

类似,当$x\in[1,2]$时,

$$f(x)=f(2)+f'(\eta)(x-2)\geq x-1.$$

所以$\int_1^2 f(x)dx\geq\int_1^2(x-1)dx=\frac{1}{2}$.

(现证这种f不存在)假设这种f存在, 则由$\left|\int_0^2 f(x)dx\right|\leq 1$, 及$\int_0^2 f(x)dx\geq 1$知

$$\int_0^2 f(x)dx=1=\int_0^1(1-x)dx+\int_1^2(x-1)dx.$$

记

$$g(x)\equiv\begin{cases}1-x, & \text{当}0\leq x\leq 1\text{时},\\ x-1, & \text{当}1<x\leq 2\text{时}.\end{cases}$$

由此表明二连续函数$f(x)\geq g(x)$, 且积分值相等，从而$f(x)\equiv g(x)$ 在$[0,2]$上, 但此与f的可微性矛盾, 所以f不存在. ■

例 6.7.25 函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上有连续的一阶导数, 证明:

$$\int_0^1|f(x)|dx\leq\max\left\{\int_0^1|f'(x)|dx,\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\right\}.$$

证明. (1) 若$\left|\int_0^1 f(x)dx\right|=\int_0^1|f(x)|dx$, 问题自明.

(2) 若$\left|\int_0^1 f(x)dx\right|<\int_0^1|f(x)|dx$, 则$f(x)$在$[0,1]$上变号, 由$f$的连续性知$\exists x_0\in(0,1)$使得$f(x_0)=0$, 于是

$$|f(x)|=|f(x)-f(x_0)|=\left|\int_{x_0}^x f'(x)dx\right|\leq\int_{x_0}^x|f'(x)|dx.$$

取积分知$\int_0^1|f(x)|dx\leq\int_0^1|f'(x)|dx$. 原不等式获证. ■

例 6.7.26 设$f(x)$为n次多项式, 且$\int_0^1 x^k f(x)dx=0 \quad (k=1,2,\cdots,n)$ 试证:

(i) $f(0)=(n+1)^2\int_0^1 f(x)dx;$

(ii) $\int_0^1 f^2(x)dx=\Big((n+1)\int_0^1 f(x)dx\Big)^2.$

证明. 既然$f(x)$为n次多项式, 不妨设$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, 于是$f(0)=a_0$. 利用已知条件

$$\int_0^1 f^2(x)dx=\int_0^1(a_0+a_1+\cdots+a_nx^n)f(x)dx=a_0\int_0^1 f(x)dx$$

可见, 只要证明了

$$a_0=(n+1)^2\int_0^1 f(x)dx$$

将其代入即得结论(i)与(ii).下面我们来证明此式. 事实上

$$\int_0^1 x^kf(x)dx=\frac{a_0}{k+1}+\frac{a_1}{k+2}+\cdots+\frac{a_n}{n+k+1}=\frac{Q(k)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n+1)}, \qquad *$$

其中$Q(k)$是关于k的n次多项式. 根据已知条件知$Q(k)=0\quad(k=1,2,\cdots,n)$ 即Q以$1,2,\cdots,n$为根, 因此

$$Q(k)=c(k-1)(k-2)\cdots(k-n)$$

(其中c为某一常数), 将其代入(*)的后一等式, 同乘以$k+1$, 并令$k=-1$, 则得

$$a_0=(-1)^n(n+1)c,$$

在将其代入(*), 并令$k=0$,可得

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{(-1)^n}{n+1}c.$$

消去c, 即得$a_0=(n+1)^2\int_0^1 f(x)dx$, 证毕. ■

例 6.7.27 设$f(x)$在$[0,1]$上连续,

$$\int_0^1 x^kf(x)dx=1\ \ (k=0,1,\cdots,n-1),\int_0^1 x^nf(x)dx=0.$$

求证:在$[0,1]$的某一部分上$|f(x)|\geq 2^n(n+1)$.

证明. 由已知条件, 对任意α, 恒有

$$\int_0^1(x-\alpha)^nf(x)dx=1.$$

(用反证法)假设$[0,1]$处处都有$|f(x)|<2^n(n+1)$. 若能选取恰当的α, 由此得出估计$\left|\int_0^1(x-\alpha)^nf(x)dx\right|<1$, 便找到了矛盾. 事实上, 取$\alpha=\frac{1}{2}$, 这时有

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^1(x-\alpha)^nf(x)dx\Big|&<2^n(n+1)\int_0^1|x-\alpha|^ndx=2^n(n+1)\int_0^1\Big|x-\frac{1}{2}\Big|^ndx\\&=2^n(n+1)\Big[\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}-x\Big)^ndx+\int_{\frac{1}{2}}^1\Big(x-\frac{1}{2}\Big)^ndx\Big]=1.\end{aligned}$$

证毕. ■

例 6.7.28 设$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上连续,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos xdx=0.$$

试证: $f(x)$ 在$(0,\frac{\pi}{2})$ 内至少有两个零(值)点.

证明. (1) 若$f(x)$ 在$(0,\frac{\pi}{2})$ 无零点, 因$f(x)$ 连续, $f(x)$ 在$(0,\frac{\pi}{2})$ 恒保持同号, 例如$f(x)>0($ 或$<0)$ 则得估计

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx > 0(\text{或}< 0),$$

与已知条件矛盾.可见$(0,\frac{\pi}{2})$中至少有一个零点$x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$.

(2) 若$f(x)$ 除x_0 外在$(0,\frac{\pi}{2})$ 内再无零点,则$f(x)$ 在$(0,x_0)$ 与$(x_0,\frac{\pi}{2})$ 内分别保持不变号.若f 在此二区间符号相异, 则$f(x)\sin(x-x_0)$ 恒正(或恒负),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(x-x_0)dx > 0(\text{或}< 0).$$

但由已知条件

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(x-x_0)dx = \cos x_0\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin xdx$$

$$-\sin x_0\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos xdx = 0,$$

矛盾.若f在二区间上符号相同,则$f(x)\cos(x-x_0)$恒正(或恒负), 同样可推出矛盾. ■

6.7.2 第六章复习题

1. 求下列定积分

(1) $\int_0^1 \frac{x}{(1+x)^a}dx$;	(2) $\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})dx$;
(3) $\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$;	(4) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$;
(5) $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$;	(6) $\int_0^1 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$;
(7) $\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{\sqrt{2x-1}}dx$;	(8) $\int_0^{ln2}\sqrt{1-e^{-2x}}dx$;
(9) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x}dx$;	(10) $\int_0^1 \frac{ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$;
(11) $\int_0^1 \frac{x}{e^x+e^{(1-x)}}dx$;	(12) $\int_0^\pi \frac{dx}{2\cos^2 x+\sin^2 x}$;
(13) $\int_0^{n\pi} x\|\sin x\|dx$;	(14) $\int_0^\pi e^x\cos^2 xdx$.

2. (1) 设$x\geq -1$. 求$\int_{-1}^x(1-|t|)dt$; (2) 求$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}dx$.

3. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+2} t(\sin\frac{3}{t})f(t)dt$，其中$f(t)$可微, 且已知$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=1$.

4. 设$f\in C[-1,1]$并满足条件：对$[-1,1]$的任何偶函数g, 积分$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx=0$, 证明：f是$[-1,1]$上的奇函数.

5. 设$f(x)=f(x-\pi)+\sin x$, 且当$x\in[0,\pi]$时，$f(x)=x$, 求$\int_\pi^{3\pi} f(x)dx$.

6. 设$f(x)$可积，求证：$e^{f(x)}$也可积.

7. 设$f(x)$在$[a,b]$上可积且$f(x)\geq C>0$. 求证：$\frac{1}{f(x)}$ $\ln f(x)$都在$[a,b]$上可积.

8. 设$f(x)$在$[0,1]$上可积且$f(x)\geq a>0$. 求证：

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \geq \frac{1}{\int_0^1 f(x)dx}.$$

9. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(x)>0$,证明：$\ln\int_0^1 f(x)dx\geq\int_0^1 \ln f(x)dx$.

10. 求证：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x)dx\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\cos x)dx$.

11. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{x^n}dx=1$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1(1-x^2)^n dx=0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^4}}dx=0$.

12. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，则$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)dx$.

13. 对任意自然数n, 求证：$\int_0^n\frac{1-(1-\frac{t}{n})^n}{t}dt=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

14. 设$S(x)=\int_0^x|\cos t|dt$,

(1) 当n 为整数, 且$n\pi\le x<(n+1)\pi$ 时, 证明: $2n\le S(x)<2(n+1)$;

(2) 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}$.

15. 设$f(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\quad(x\ne0); f(0)=0$.

(1) 问$f(x)$是否在$[-1,1]$上可积？

(2) 问变上限积分$\int_{-1}^x f(t)dt$在点$x=0$处是否可导？

16. 设f为连续函数，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}f(x)dx=f(0)$.

17. 设$f(x)\in C[01]$，且在$(0,1)$上可微，若有$8\int_{\frac{7}{8}}^1 f(x)dx=f(0)$，证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$.

18. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，求证：$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$. 并由此计算

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}dx.$$

19. 设$f(x)\in R[0,1]$,且$a\le f(x)\le b$,又$\varphi(x)$是$[a,b]$上可导的凹函数. 求证：

(1) $\varphi(f(x))\ge\varphi(t)+\varphi'(t)(f(x)-t)\quad(\forall t\in(a,b))$;

(2) $\int_0^1\varphi(f(x))dx\ge\varphi\left(\int_0^1 f(x)dx\right)$;

(3) $\int_0^1 e^{f(x)}dx\ge e^{\int_0^1 f(x)dx}$.

20. 设$0<a<b$, $f(x)$在$[a,b]$ 上连续，并满足$f(\frac{ab}{x})=f(x)(\forall x\in[a,b])$, 求证：

$$\int_a^b f(x)\frac{\ln x}{x}dx=\frac{\ln(ab)}{2}\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx.$$

21. 设$a>0$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上连续，并满足$f\left(\frac{a^2}{x}\right)=f(x)\quad(\forall x>0)$. 求证：

(1) $\int_a^{a^2}\frac{f(x)}{x}dx=\int_1^a\frac{f(x)}{x}dx$;

(2) $\int_1^a\frac{f(x^2)}{x}dx=\int_1^a\frac{f(x)}{x}dx$;

(3) 如果$g(x)$在$(0,+\infty)$上连续，则$\int_1^a g\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{dx}{x}=\int_1^a g\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{dx}{x}$.

22. 设$f\in C^1[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$, 证明

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\le\frac{1}{2}\int_0^1|f'(x)|dx.$$

23. 设$f(x)$ 的一阶导数在$[0,1]$ 上连续，且$f(0)=f(1)=0$，求证；

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \leq \frac{1}{4}\max_{0\leq x\leq 1}|f'(x)|.$$

24. 设$f(x)$在$(0,+\infty)$上连续可微，且$f(0)=1, x\geq 0$时，$f(x)>|f'(x)|$证明：$x>0$时，$e^x>f(x)$.

25. 设$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 有连续导数, 求 $\lim\limits_{a\to 0+}\frac{1}{a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]dt$.

26. 设$f\in C[0,+\infty)$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, 求证：$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f(nx)dx=A$.

27. 设$f(x)\geq 0, g(x)>0$,二函数在$[a,b]$上连续,求证:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b (f(x))^n g(x)dx\right)^{\frac{1}{n}}=\max_{a\leq x\leq b} f(x).$$

28. 设$f\in C[a,b]$, 且$\exists m\in N$, 使得$\int_a^b x^n f(x)dx=0 \quad (n=0,1,2\cdots,m)$, 求证：$f(x)$ 在(a,b) 内至少有$m+1$个零点, 且$f(x)$在零点的两端异号. (归纳法)

29. 设函数$f(x)$二阶可微，求证；存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\left|\int_a^b f(x)dx-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\leq\frac{M}{24}(b-a)^3,$$

其中$M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$.

30. 设$f(x)$在$[0,2\pi]$上单调，求证：$\lim\limits_{\|T\|\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\sin\|T\|xdx=0$.

31. 设$f'(x)\in C[0,1]$，求证：$\int_0^1 x^n f(x)dx=\frac{f(1)}{n}+o(\frac{1}{n}) \quad (n\to\infty)$.

32. 若$f(x)$ 是连续的以T为周期的函数，求证:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$$

33. 设$f(x)\in C[0,+\infty)$, $\int_0^\infty|f(t)|dt$ 收敛, 并且$|f(x)|\leq\int_0^x|f(t)|dt(x\geq 0)$, 求证: $f(x)=0$.

34. 设$f(x)\in C[01]$, 且对一切$x\in[0,1]$ 有$\int_0^x f(u)du\geq f(x)\geq 0$，则$f(x)=0$.

35. 设$f(x)\geq 0$ 在$[0,1]$ 上连续，$f(1)=0$, 求证：存在$\xi\in(0,1)$, 使得$f(\xi)=\int_0^\xi f(x)dx$.

36. 设函数$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，且$\int_0^\pi f(x)dx=0, \int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$. 求证；在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2$，使得$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

37. 函数f 在$[0,2]$ 上连续、可导，且$f(0)=f(2)=1$，如果$|f'(x)|\leq 1$, 求证：

$$\left|\int_0^2 f(x)dx\right|\geq 1.$$

38. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续, 证明$2\int_a^b f(x)[\int_x^b f(t)dt]dx=[\int_a^b f(x)dx]^2$.

39. 设$f(x)\geq 0, f''(x)\leq 0(\forall x\in[a,b])$.求证：

$$\max_{a\leq x\leq b} f(x)\leq\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

40. 设f在$[a,b]$上连续可导，求证：

$$\max_{z\in[a,b]}|f(x)|\le\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b|f'(x)|dx.$$

提示 $\exists\xi,x_0\in[a,b]$使得

$$|f(\xi)|=\frac{1}{b-a}\Big|\int_a^b f(x)dx\Big|,$$

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|=|f(x_0)|=\Big|\int_\xi^{x_0}f'(t)dt+f(\xi)\Big|.$$

41. 设$f(x)$在$[a,b]$上二阶连续可微，求证：

$$f(x)-f(a)-f_a'^x f''(t)(x-t)dt,\quad(\forall x\in[a,b]).$$

42. 设$a,b>0,f(x)\ge0$, 且$f(x)$在$[a,b]$上可积, $\int_{-a}^b xf(x)dx=0$. 试证:

$$\int_a^b x^2f(x)dx\le ab\int_{-a}^b f(x)dx.$$

提示

$$\int_{-a}^b[(x+a)(b-x)]f(x)dx\ge0.$$

43. 设$f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上可积，且$f(x)$与$g(x)$为<u>似序</u>, 即:$\forall x_1,x_2$ 有

$$(f(x_1)-f(x_2))(g(x_1)-g(x_2))\ge0.$$

试证

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx\le(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

提示 在条件式里先对x_1于$[a,b]$上取积分,然后对x_2在$[a,b]$上取积分.

44. 设f在$[a,b]$上连续可导，$f(a)=0$. 证明:

(1) $\max\limits_{z\in[a,b]}f^2(x)\le(b-a)\int_a^b(f'(x))^2dx$;

(2) $\int_a^b f^2(x)dx\le\dfrac{(b-a)^2}{2}\displaystyle\int_a^b(f'(x))^2dx$.

45. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续且单调递增，求证：

$$\int_a^b xf(x)dx\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

46. 若函数f在$[0,1]$上连续可导，且$f(0)=0,f(1)=1$, 求证:

$$\int_0^1|f(x)-f'(x)|dx\ge\frac{1}{e}.$$

47. 设函数f 连续可导，$f(1)=1$, 且当$x\ge1$ 时有

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)}.$$

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，且

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)\le1+\frac{\pi}{4}.$$

48. 设函数f在$[0,1]$上二阶连续可导，并且$f(0)=f(1)=f'(0)=0,f'(1)=1$，求证：$\int_0^1(f''(x))^2dx\le 4$.指出式中等号成立的条件.

49. 设函数f 在区间$[0,+\infty)$ 上递增，定义函数$\phi(x)=\int_0^x f(t)dt, x\ge 0$, 求证：$\phi$ 是$[0,+\infty)$ 上的凸函数.

50. 设函数f在$[-1,1]$上可导，$M=\sup|f'|$. 若存在$a\in(0,1)$, 使得$\int_{-a}^a f(x)dx=0$，求证：

$$\left|\int_{-1}^1 f(x)dx\right|\le M(1-a^2).$$

51. 设f是$[a,b]$上连续的凸函数，试证:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

52. 设f 二阶连续可导，且$f\ge 0, f''\le 0$. 求证：对任何$c\in[a,b]$, 有$f(c)\le\dfrac{2}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

53. 设函数f在$[0,1]$上可积，且有正数m和M，使得$m\le f(x)\le M$对$x\in[0,1]$成立.求证：

$$\int_0^1 f(x)dx\int_0^1\frac{dx}{f(x)}\le\frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

54. 设f在$[a,b]$上可积，则在开区间(a,b)内至少有f的一个连续点.

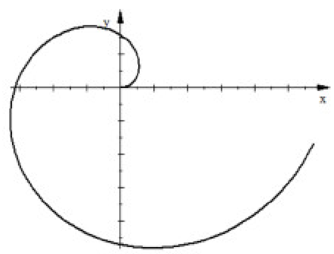
55. 设$f\ge 0$在$[a,b]$上可积，求证：等式$\int_a^b f(x)dx=0$成立的必要充分条件是f在连续点处必取零值.

56. 设$x(t)$在$[0,a]$上连续并且满足$|x(t)|\le M+k\int_0^t|x(t)|dt$,这里$M$与$k$为正常数，求证：$|x(t)|\le Me^{kt}, t\in[0,a]$.

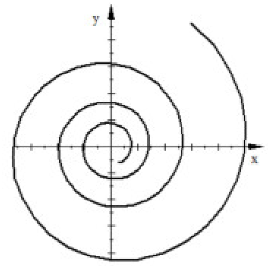
57. 设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可微，证明$f'(x)$ 在$[a,b]$ 上可积的充要条件是：存在可积函数$g(x)$ 使得$f(x)=f(a)+\int_a^x g(t)dt$.

附录：常见几何曲线

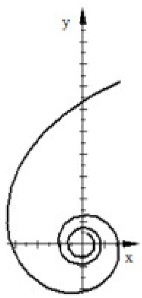
(1)阿基米德螺线$r = a\theta$;



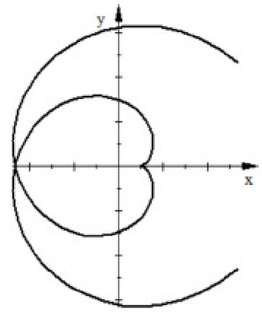
(2)对数螺线$r = ae^{\theta}$;
(又称等角螺线)



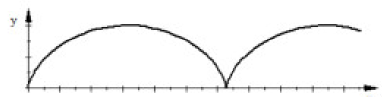
(3)双曲螺线$r\theta = a$;



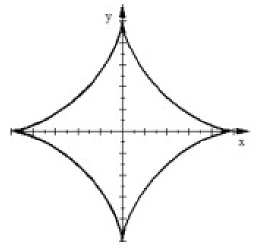
(4)圆的渐开线$\begin{cases} x = a\left(\cos t + t\sin t\right), \\ y = a\left(\sin t - t\cos t\right); \end{cases}$



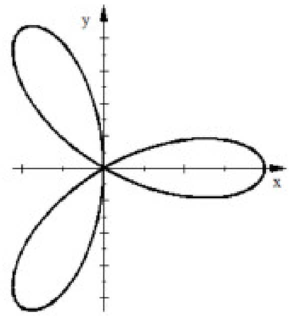
(5)摆线$\begin{cases} x = a\left(t - \sin t\right), \\ y = a\left(1 - \cos t\right); \end{cases}$
(又称旋轮线)



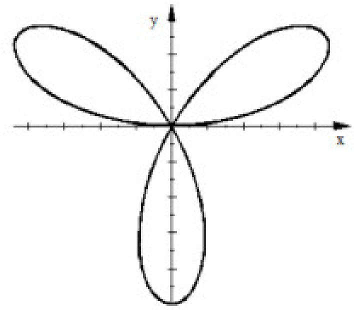
(6)星形线$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ 或$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;



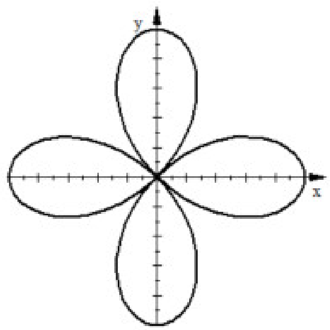
(7)三叶玫瑰线$r = a\cos 3\theta$;



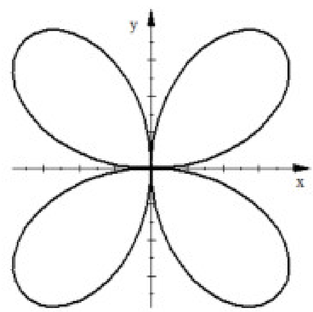
(8)三叶玫瑰线$r = a\sin 3\theta$;



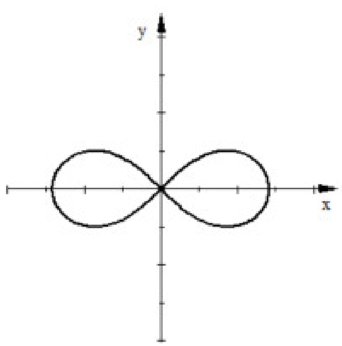
(9)四叶玫瑰线$r = a\cos 2\theta$;



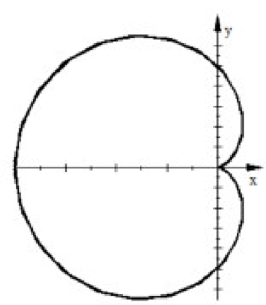
(10)四叶玫瑰线$r = a\sin 2\theta$;



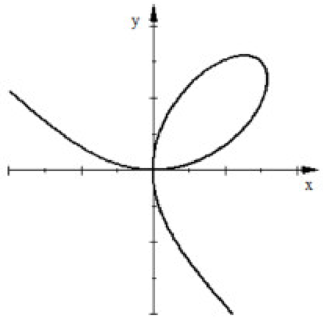
(11)双纽线$r^2 = 2a^2\cos 2\theta$;



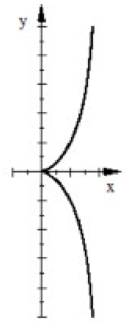
(12)心脏线$r = a\left(1-\cos\theta\right)$;



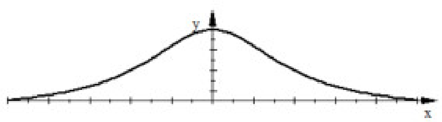
(13)笛卡尔叶形线$x^3+y^3=3axy$;



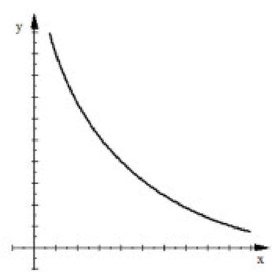
(14)蔓叶线$y^2(2a-x)=x^3$;



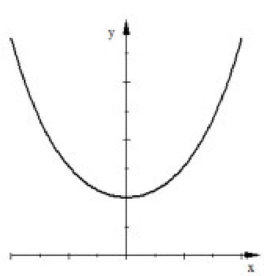
(15)箕舌线$y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$;



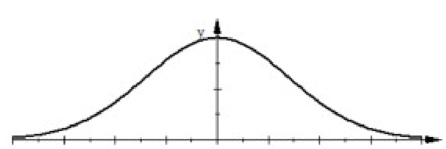
(16)斜抛物线$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$;



(17)悬链线$y=a\mathrm{ch}\frac{x}{a}$;



(18)概率曲线$y=e^{-x^2}$.



第 七 章　数项级数

7.1　数项级数的基本概念和性质

7.1.1　数项级数的基本概念

定义 7.1.1 设$\{u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots\}$ 是无穷个实数构成的数列，称它们构成的和式

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

为数项级数, 简称级数, 记为$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$, 称$u_n$ 为级数的通项.

级数形式上是由无穷多个数构成的"和". 以下将考虑这个"和"的计算方法. 为此我们给出关于数项级数部分和的定义.

定义 7.1.2 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$中，称

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

为级数的前n 项部分和，并且称$\{S_n\}$ 为级数的部分和数列.

定义 7.1.3 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的部分和数列$\{S_n\}$ 收敛于一个有限数S, 即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = S,$$

则称级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 记为$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = S$. 如果部分和数列 $\{S_n\}$ 发散, 则称级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散. 级数收敛或发散的性质统称为级数的敛散性.

从上面的定义可知, 只有在级数收敛时, 前面提到的关于无穷多个数的"和"才是有意义的, 并且等于部分和数列的极限. 当级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛时, 称

$$r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

为级数的余和.

例 7.1.4 试证明级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}$ 发散.

证明. 级数的部分和

$$S_n = \begin{cases} 0, & n\text{为偶数}, \\ 1, & n\text{为奇数}. \end{cases}$$

所以数列$\{S_n\}$ 发散，从而级数是发散的. ∎

例 7.1.5 设$a \neq 0$, 研究几何级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1}$ 的敛散性, 并求出收敛时的和.

解. 若$q=1$, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$的部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a=an.$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}an=\infty$, 故相应级数发散.

若$q\neq 1$, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$ 的部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}aq^{k-1}=a\frac{1-q^n}{1-q}.$$

由此得到, 当$|q|<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a}{1-q}$, 级数收敛, 和为$\dfrac{a}{1-q}$; 当$|q|>1$和$q=-1$ 时, 数列$\{S_n\}$极限不存在, 级数发散.

综上, 对于几何级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}aq^{n-1}$, 当$|q|<1$时收敛, 其和为$\dfrac{a}{1-q}$; 当$|q|\geq 1$时发散. ■

例 7.1.6 求证级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散.

证明. 级数的部分和

$$\begin{aligned}S_n&=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\\&\geq\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\\&=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n},\end{aligned}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$, 从而级数发散. ■

7.1.2 数项级数的基本性质

由级数敛散性的定义可知, 其与部分和数列S_n 的敛散性是一致的, 所以关于数列敛散的性质可以移植到级数的敛散性上来. 以下将逐一介绍有关的性质.

性质 7.1.7 设a 为一个常数, 若级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}au_n$ 也收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{+\infty}au_n=a\sum_{n=1}^{+\infty}u_n.$$

证明. 设S_n 为级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 的部分和. 由级数收敛知存在一有限数S使得$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$. 而

$$\sum_{k=1}^{n}au_k=a\sum_{k=1}^{n}u_k=aS_n,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}au_k=aS=a\sum_{n=1}^{+\infty}u_n.$$

■

利用性质7.1.7的方法与数列的相应性质容易证明：

性质 7.1.8 若级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 都收敛, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{+\infty} v_n.$$

性质 7.1.9 不改变收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 各项的顺序, 而对其项任意加括号后形成新的级数

$$\begin{gathered}(u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + u_{i_1+2} + \cdots + u_{i_2}) + \\ \cdots + (u_{i_n+1} + u_{i_n+2} + \cdots + u_{i_{n+1}}) + \cdots\end{gathered}$$

也收敛, 并且其和不变.

证明. 设加括号前和加括号后级数部分和分别为S_n 和S_n^*. 那末就有

$$S_1^* = u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1} = S_{i_1},$$

$$S_2^* = (u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + u_{i_1+2} + \cdots + u_{i_2}) = S_{i_2},$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$S_n^* = (u_1 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + \cdots + u_{i_2}) + \cdots + (u_{i_n+1} + \cdots + u_{i_{n+1}}) = S_{i_{n+1}}.$$

即数列$\{S_n^*\}$ 是数列$\{S_n\}$ 的一个子数列, 故由$\{S_n\}$ 收敛可知$\{S_n^*\}$ 收敛并且

$$\lim_{n\to\infty} S_n^* = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

■

需注意的是：该性质逆命题不一定成立，即若一个级数加括号后所得的新级数收敛, 不能由此得出原来级数亦收敛. 例如级数

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots$$

收敛, 但级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

发散.

性质 7.1.10 *(收敛的必要条件)* 若级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 则

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

证明. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的部分和数列为$\{S_n\}$, 那么就有

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

■

由这个性质, 若级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的通项u_n 不趋于零, 则此级数一定发散. 这是判定级数发散的常用办法. 例如级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^n$, 当$q \geq 1$ 时一定是发散的. 另外级数的通项趋于零是级数收敛的必要条件, 而不是充分条件. 也就是说, 级数的通项趋于零并不能保证级数是收敛的. 例如例7.1.6中的级数, 其通项以零为极限, 但该级数却发散.

例 7.1.11 考察调和级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ 与$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\sin\dfrac{1}{n}$ 的敛散性.

解. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$不存在, $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$, 所以由级数收敛的必要条件知$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ 与$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\sin\frac{1}{n}$均发散. ■

例 7.1.12 求$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n+2^n}{3^{n+2}}$的和.

解.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n+2^n}{3^{n+2}} &= \frac{1}{9}\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]\\ &= \frac{1}{9}\left[\frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}+\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}\right]\\ &= \frac{1}{9}(-\frac{1}{4}+2) = \frac{7}{36}.\end{aligned}$$

■

7.1.3 柯西收敛准则

利用数列的柯西收敛准则, 容易得到下述级数收敛的柯西(Cauchy)收敛准则.

定理 7.1.13 ***(Cauchy 收敛准则)*** 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是对任意给定的$\varepsilon>0$, 都存在自然数N, 使得当$n>N$ 时, 对任何自然数p, 都有

$$|S_{n+p}-S_n| = |u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}| < \varepsilon.$$

其中S_n 为$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的部分和.

利用Cauchy收敛准则可知, 在级数中添加或者减少有限多项不会影响级数的敛散性.

例 7.1.14 考察调和级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 的敛散性.

解. 由

$$\begin{aligned}|S_{n+p}-S_n| &= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\\ &> \frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+p}+\cdots+\frac{1}{n+p} \quad (p\text{项})\\ &= \frac{p}{n+p}.\end{aligned}$$

p 取一特殊值$p=n$, 就可以得到

$$|S_{2n}-S_n| > \frac{1}{2}.$$

由Cauchy收敛准则, 取其中的$\varepsilon=\frac{1}{2}$, 则不论n 取得多大, 都不会使得$|S_{2n}-S_n|<\frac{1}{2}$. 故级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散. ■

例 7.1.15 研究级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 的敛散性.

解. 对任意的自然数p, 有

$$\begin{aligned}|S_{n+p}-S_n| &= \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\\ &< \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\\ &< \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\\ &\quad\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)\\ &= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

那么对于任意给定的$\varepsilon>0$, 总是存在$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 使得当$n>N$ 时, 对任意的自然数p 都有

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon.$$

根据Cauchy收敛准则, 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛. ■

例 7.1.16 证明$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛.

证明. 设$u_n=\frac{(-1)^n}{n}$, 则

$$\begin{aligned}|S_{n+p}-S_n| &= |u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|\\ &= \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}+\frac{(-1)^{n+2}}{n+2}+\cdots+\frac{(-1)^{n+p}}{n+p}\right|\\ &= \left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}\right|.\end{aligned}$$

若p为偶数,

$$\begin{aligned}|S_{n+p}-S_n| &= \frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots\\ &\quad-\left(\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p-1}\right)-\frac{1}{n+p}\\ &< \frac{1}{n+1};\end{aligned}$$

若p为奇数,

$$\begin{aligned}|S_{n+p}-S_n| &= \frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)\\ &< \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

因此对任意自然数n及任意非负整数p, 都有

$$|S_{n+p}-S_n|<\frac{1}{n}.$$

对$\forall\varepsilon>0$, 若$\frac{1}{n}<\varepsilon$, 即$n>\frac{1}{\varepsilon}-1$, 取$N=[\frac{1}{\varepsilon}-1]+1$, 当$n>N$时,对任意非负整数$p$有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon,$$

根据Cauchy收敛准则, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛. ■

例 7.1.17 设$\{u_n\}$为单调递减的正数列, 若$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$收敛, 则

$$\lim_{n\to\infty}nu_n=0.$$

证明. 由$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$收敛, 则$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$, 当$n>N$时, $\forall P\in\mathbb{N}$有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon,$$

而$\{u_n\}$为单调递减的正数列，所以

$$pu_{n+p}=u_{n+p}+u_{n+p}+\cdots+u_{n+p}\leq u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}<\varepsilon.$$

取$p=n$, 则$nu_{2n}<\varepsilon,2nu_{2n}<2\varepsilon$, 因此

$$\lim_{n\to\infty}2nu_{2n}=0,$$

但$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0,(2n+1)u_{2n+1}\leq(2n+1)u_{2n}=2nu_{2n}+u_n$, 所以又有

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)u_{2n+1}=0,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}nu_n=0.$$

■

7.1.4 习题7.1

1. 证明下列级数收敛并求其和.

   (1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n-1}+4^{n+1}}{3^{2n}}$;

   (3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

2. 证明级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$发散，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^2}$收敛,

3. 讨论下列级数的敛散性.

   (1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n^2+n-1}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2\sin\frac{\pi}{n}}{\sqrt[4]{n^3+2n+1}}$.

4. 确定x的范围,使下列级数收敛.

   (1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^n}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{nx}$;

   (3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^n(1-x)$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\ln x)^n$.

5. 给出Cauchy收敛准则的否定定义.

6. 用Cauchy收敛准则讨论下列级数的敛散性.

   (1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n q^n$, $(|q|<1, |a_n|\le M, n=0,1,2,\cdots)$;

   (2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cos nx$;

   (3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cos\frac{x}{n}$.

7. 设有正项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ (即每一项$a_n>0$), 试证明若对其项加括号后所组成的级数收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$亦收敛.

7.2 正项级数

7.2.1 正项级数

定义 7.2.1 若$u_n\ge 0$ $(n=1,2,3,\cdots)$, 则称级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 为正项级数.

下面我们介绍几种正项级数收敛的判别方法.

定理 7.2.2 *(基本定理)* 正项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛的充要条件是其部分和S_n 有上界, 即存在常数$M>0$, 使得$S_n\le M$ 对一切$n=1,2,3,\cdots$ 成立.

证明. 由$u_n\ge 0$ 可知级数的部分和数列S_n 是单调递增的, 即

$$S_1\le S_2\le\cdots\le S_n\le\cdots.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在的充要条件为S_n 有上界, 故命题成立. ■

以基本定理为基础, 下面建立一些在具体判定中实用的判别法.

定理 7.2.3 *(比较判别法)* 对于正项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 与$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$, 存在常数$C>0$, 使得

$$u_n\le Cv_n,\quad n=1,2,3,\cdots$$

(1) 若$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛.

(2) 若$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散，则$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 发散.

证明. 设S_n 和S'_n 分别为级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 与级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 的部分和. 那么由定理的条件显然有

$$S_n\le CS'_n,\quad n=1,2,3,\cdots$$

则如果S'_n 有上界那么S_n 亦有上界. 而如果S_n 无界则S'_n 也无界, 由基本定理, 定理得证. ■

注 7.2.4 由于去掉或者添加有限项不改变级数的敛散性, 所以将定理*7.2.3*中的条件改为: 存在正整数N, 使得当$n>N$ 时有$u_n\le Cv_n$, 则定理中的结论仍然成立.

推论 7.2.5 对于正项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$,

(1) 若存在自然数N, 使得当$n \geq N$ 时, 有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

则可由级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛断定级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛.

(2) 若存在自然数N, 使得当$n \geq N$ 时, 有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

则可从级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 发散断定级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散.

证明. 由条件(1) 知

$$\frac{u_{n+1}}{u_N} = \frac{u_{n+1}}{u_N} = \frac{u_{n+1}}{u_n}\frac{u_n}{u_{n-1}}\cdots\frac{u_{N+1}}{u_N} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}\frac{v_n}{v_{n-1}}\cdots\frac{v_{N+1}}{v_N} = \frac{v_{n+1}}{v_N},$$

从而

$$u_{n+1} \leq \frac{u_N}{v_N} v_{n+1}.$$

再由定理7.2.3，若级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛. 同理可证明(2). ■

在实际使用中, 比较判别法的极限形式更为方便.

定理 7.2.6 ***(比较判别法的极限形式)*** 给定两个正项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$. 若有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = l,$$

那么,

(1) 若$0 < l < +\infty$, 则两个级数同时发散或者同时收敛.

(2) 若$l = 0$, 则从级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛可以断定$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 也收敛.

(3) 若$l = +\infty$, 则从级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 发散可以断定$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 也发散.

证明. 我们仅证明(1). 根据极限的定义, 取$\varepsilon = l/2$, 则显然存在一个自然数N, 使当$n > N$ 时有

$$(l - l/2)v_n < u_n < (l + l/2)v_n.$$

再利用级数比较判别法, 可知结论(1)成立. ■

例 7.2.7 判别级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n}$ 敛散性.

解. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 由比较判别法的极限形式, 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n}$ 发散. ■

例 7.2.8 判别级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n+1}{\sqrt{n^3+2n-1}}$的敛散性,

解. 因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{\sqrt{n^3+2n-1}}}{\frac{1}{n}} = +\infty,$$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的, 所以由比较判别法的极限形式, 级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+2n-1}}$$

是发散的. ■

例 7.2.9 判别级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$的敛散性,

证明. 因为

$$1-\cos\frac{1}{n} = 2\sin^2\frac{1}{2n},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sin^2\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ 是收敛的, 所以由比较判别法的极限形式, 级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$$

是收敛的. ■

同样可证明下面两个定理，其证明留给读者.

定理 7.2.10 *(柯西(Cauchy)根式判别法)* 设$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$为正项级数, 若从某一项起（即存在$N$，当$n > N$时）成立着 $\sqrt[n]{u_n} \le q < 1$（q为某确定的常数），则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$收敛, 若从某一项起成立着 $\sqrt[n]{u_n} \ge 1$, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$发散,

定理 7.2.11 *(柯西(Cauchy)根式判别法的极限形式)* 对于正项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$，设$r = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{u_n}$, 那么，当$r < 1$时此级数收敛，当$r > 1$时级数发散，而当$r = 1$时此级数的敛散性须进一步判定,

例 7.2.12 考察级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ 的敛散性.

解. 因为

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{e}{2} > 1,$$

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ 发散. ■

定理 7.2.13 *(柯西(Cauchy)积分判别法)* 若$f(x)$ 是$[1,+\infty)$ 上正的递减函数, 设$u_n = f(n)$, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是极限

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^n f(x)dx$$

存在.

证明. 由

$$u_{k+1} = f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(x)dx \le f(k) = u_k, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

所以有

$$\sum_{k=1}^n u_{k+1} \le \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x)dx \le \sum_{k=1}^n u_k,$$

由此得定理的证明. ■

例 7.2.14 证明p-级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ 在$p>1$ 时收敛, 而在$0\le p\le 1$ 时发散.

证明. 当$p=1$ 时, 前面已经证明此级数是发散的. 现在考虑$p\neq 1$ 时的情况. 取$f(x)=\frac{1}{x^p}$, 显然满足定理7.2.10的条件, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x^p} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-p}(n^{1-p}-1) = \begin{cases} 0, & p>1; \\ +\infty, & 0\le p<1. \end{cases}$$

所以由定理7.2.13, p-级数当$0<p\le 1$ 时发散, 在$p>1$ 时收敛. ■

例 7.2.15 证明级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ 在$\alpha>1$ 时收敛, 在$0\le\alpha\le 1$ 时发散.

证明. 取函数$f(x)=\frac{1}{x\ln^\alpha x}$, 那在$[2,+\infty)$ 上, 当$\alpha\ge 0$ 时, $f(x)$ 显然满足定理7.2.13的条件. 那么,

$$\int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}[(\ln n)^{1-\alpha}-(\ln 2)^{1-\alpha}], & \alpha\neq 1, \\ \ln\ln n - \ln\ln 2, & \alpha = 1. \end{cases}$$

再对n 取极限, 可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}dx = \begin{cases} 0, & \alpha>1, \\ +\infty, & \alpha\le 1. \end{cases}$$

所以根据定理7.2.13, 所给的级数在$\alpha>1$ 时收敛, 在$0\le\alpha\le 1$ 时发散. ■

注 7.2.16 利用定理*7.2.3*及其推论, 利用收敛得越慢的级数来判定级数的收敛性, 就越容易得到更精确的结果. 对于发散的情形也可以得到完全类似的结论.

前面其敛散性已经明确了的级数就可以用来作为判定敛散性的标准. 以级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^n$ $(q<1)$ 和$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ $(p>1)$ 为例. 显然有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{q^{n+1}}{q^n} = q, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = 1.$$

那么级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ 要比级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^n$ 收敛得慢一些. 利用级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^n$ 作为判定标准就可以得到下面的判定定理.

定理 7.2.17 *(达朗贝尔(D' Alembert)-比值判别法)* 设$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$为正项级数，若从某一项起成立着$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le q < 1$ (q 为确定的数, $n > N$)，则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$收敛. 若从某一项起$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1 (n > N)$, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$发散.

定理 7.2.18 *(达朗贝尔(D' Alembert)-比值判别法的极限形式)* 设$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 是正项级数, 则

(1) 当$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q < 1$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛.

(2) 当$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q > 1$ 时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散.

定理的证明容易从定理7.2.6得到, 这里把它的证明留给读者.

例 7.2.19 设$x \in [0, +\infty)$, 讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n!x^n$的敛散性,

解. $x = 0$时级数显然收敛. 若$x \ne 0$, 设$u_n = n!x^n$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)x = +\infty,$$

此时级数发散. ∎

例 7.2.20 设$x \in [0, +\infty)$, 讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n!}{n^n} x^n$的敛散性,

解. $x = 0$时级数显然收敛. 若$x \ne 0$, 设$u_n = \dfrac{n!}{n^n} x^n$, 则

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} x^{n+1}}{\frac{n!}{n^n} x^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} x,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{e}.$$

由比值判别法知，当$\frac{x}{e} < 1$即$x < e$时级数收敛; 当$\frac{x}{e} > 1$即$x > e$时级数发散.

当$x = e$时,$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \ge 1$,级数发散. ∎

例 7.2.21 考察级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha^n}{n^s}$ $(\alpha > 0, s > 0)$的敛散性,

证明. 设$u_n = \frac{\alpha^n}{n^s}$, 则

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^s}}{\frac{\alpha^n}{n^s}} = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^s}.$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha$, 由比值判别法知，当$\alpha < 1$时级数收敛; 当$\alpha > 1$时级数发散.

当$\alpha = 1$时级数为$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^s}$, 若$s > 1$,级数收敛;若$s \le 1$,级数发散. ∎

比值判别法在$q = 1$ 时是失效的, 其中的原因是由于我们选择的作为判定标准的级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^n$ 收敛得还不够慢. 针对这种情况, 我们可以选择收敛更慢一点的级数作为判定标准, 进而得到下面的判定准则.

定理 7.2.22 ***(拉贝(Raabe) 判别法)*** 设$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 为正项级数,

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1)=\alpha.$$

那么

(1) 若$\alpha>1$, 级数收敛;
(2) 若$\alpha<1$, 级数发散;
(3) 若$\alpha=1$, 敛散性待定.

证明. (1) 因为$\alpha>1$, 取α_0 满足$\alpha>\alpha_0>s>1$. 由

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\alpha>\alpha_0$$

可知存在N_1, 使$n\geq N_1$ 时有

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}>1+\frac{\alpha_0}{n}.$$

由Taylor公式,

$$1+\frac{\alpha_0}{n}-(1+\frac{1}{n})^s=\frac{\alpha_0-s}{n}+o(\frac{1}{n})$$

$$n\left[1+\frac{\alpha_0}{n}-(1+\frac{1}{n})^s\right]=\alpha_0-s+\frac{o(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\to\alpha_0-s>0,$$

所以存在N_2, 当$n\geq N_2$ 时有

$$n\left[1+\frac{\alpha_0}{n}-(1+\frac{1}{n})^s\right]>0\Rightarrow 1+\frac{\alpha_0}{n}>(1+\frac{1}{n})^s.$$

设$v_n=\frac{1}{n^s}$, 所以当$n\geq N=\max\{N_1,N_2\}$ 时,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}>1+\frac{\alpha_0}{n}>(1+\frac{1}{n})^s=\frac{v_n}{v_{n+1}}.$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$ 收敛, 利用定理7.2.3的推论可知$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛.

(2) 因为$\alpha<1$, 由

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\alpha<1,$$

那么存在$N>0$ 满足当$n\geq N$ 时,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}<1+\frac{1}{n}.$$

那么

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\geq\frac{n}{n+1}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}.$$

利用定理7.2.3的推论可知$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散. ■

例 7.2.23 考察级数$1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}$的敛散性,

解. 设$u_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = 1,$$

此时比值判别法失效,但可用Raabe 判别法.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right] &= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2} - 1\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n(6n+5)}{(2n+1)^2} = \frac{3}{2} > 1,\end{aligned}$$

所以$1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}$收敛. ■

Raabe 判别法的证明实际上是选择级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$ 作为判定级数收敛的判定标准. 实际上我们可以选择收敛更慢一些的级数作为判定标准, 进而得到更精细的结果.

定理 7.2.24 *(高斯(Gauss) 判别法)* 设$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 为正项级数. 若

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right) \quad (n\to\infty),$$

则当$\alpha > 1$ 或者$\alpha = 1, \beta > 1$或者$\alpha = 1, \beta = 1, \gamma > 1$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$收敛. 当$\alpha < 1$ 或者$\alpha = 1, \beta < 1$或者$\alpha = 1, \beta = 1, \gamma < 1$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$发散.

证明. 由比值判别法知于$\alpha > 1$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$收敛, 而于$\alpha < 1$时级数发散. 由拉贝判别法又知级数于$\alpha = 1, \beta > 1$时收敛, 而于$\alpha = 1, \beta < 1$时发散. 当$\alpha = \beta = 1, \gamma > 1$时，取$p$, 使得$1 < p < \gamma$. 级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$$

收敛. 由于

$$\begin{aligned}\frac{v_n}{v_{n+1}} &= \frac{(n+1)(\ln(n+1))^p}{n(\ln n)^p}\\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)^p\\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)^p\\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)^p\\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{p}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).\end{aligned}$$

与已知条件比较可知，存在N, 使当$n > N$时有

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq \frac{v_n}{v_{n+1}}.$$

由比较判别法知级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$收敛.

当$\alpha=\beta=1,\gamma<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} w_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$发散. 同前面一样,若令$p=1$，得到

$$\frac{w_n}{w_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

再与已知条件比较可知，存在N, 使当$n>N$时有

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}\leq\frac{w_n}{w_{n+1}}.$$

由比较判别法知级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$发散. ■

推论 7.2.25 设$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 为正项级数其满足

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\alpha+\frac{\beta}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

则当$\alpha>1$ 或者$\alpha=1,\beta>1$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$收敛. 当$\alpha<1$ 或者$\alpha=1,\beta\leq 1$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$发散.

显然，$O\left(\frac{1}{n^2}\right)=o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$这相当于定理7.2.24的条件中$\gamma=0$的情形，这个判别法也称为高斯判别法.

例 7.2.26 设$x>0$, 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})(2-x^{\frac{1}{3}})\cdots(2-x^{\frac{1}{n}})$$

的敛散性.

证明. 因为

$$\begin{aligned}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)&=n\left(\frac{1}{2-x^{\frac{1}{n+1}}}-1\right)\\&=\frac{n}{2-x^{\frac{1}{n+1}}}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}\ln x}-1\right)\\&=\frac{\ln x}{2-x^{\frac{1}{n+1}}}\frac{n}{n+1}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}\ln x}-1}{\frac{1}{n+1}\ln x}\to\ln x\quad(n\to\infty),\end{aligned}$$

故由拉贝判别法知所论级数于$x>e$时收敛, 而于$x<e$时发散.

当$x=e$时，我们有

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{u_{n+1}}&=\frac{1}{2-\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}}}=\left(1-\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}}-1\right)\right)^{-1}\\&=1+\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}}-1\right)+O\left(\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}}-1\right)^2\right)\\&=1+\frac{1}{n+1}+O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)=1+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

由高斯判别法知所论级数发散.

综上可知，所论级数于$x>e$时收敛, 而于$x\leq e$时发散. ■

若级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$的所有项都是非正的，则乘一个负号后就化为正项级数，若级数中除有限多项外全是非负的或是非正的，则它的敛散性可作为正项级数来处理. 这些情形不再特别加以讨论.

7.2.2 习题7.2

1. 讨论下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$;　(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n})$;　(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2\,\mathrm{e}^{-n}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{2^{2n+1}}$;　(8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+a^n}$,　$(a>1)$

(9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$;

(10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(2n-\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n-1})$;

(11) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{n!}$;　(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$;

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$;　(14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n$.

2. 讨论下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(\ln n)^p}$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(\ln n)^{1+\sigma}\cdot\ln\ln n}$　$(\sigma>0)$;　(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(\ln n)^p\cdot(\ln\ln n)^q}$.

3. 利用级数收敛的必要条件证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}=0$,　$(a>1)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{2^{n(n+1)}}=0$.

4. 利用Raabe判别法讨论下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}(a>0)$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

5. 设$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^2$收敛，证明：$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}\ln n}$收敛.

6. 设$u_n>0,\frac{u_{n+1}}{u_n}>1-\frac{1}{n}$　$(n=1,2,\cdots)$, 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$发散.

7. 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$收敛，证明$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n^2$ 也收敛，但反之不然，举例说明之,

8. 设$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$为正项级数,若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$或$+\infty$, 试讨论这两个级数的敛散性关系.

9. 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$收敛, 则当$p>\frac{1}{2}$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{u_n}}{n^p}$收敛;又问当$0<p\le\frac{1}{2}$时, 结论是否仍然成立?

10. 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$发散, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\max\{u_n,v_n\}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\min\{u_n,v_n\}$两级数敛散性如何?

7.3 第七章典型例题选讲一

7.3.1 例题选讲

例 7.3.1 设$\alpha > 0$, 证明级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |C_n^\alpha|$收敛，其中

$$C_0^\alpha = 1, C_n^\alpha = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

证明. 由于$\frac{|C_n^\alpha|}{|C_{n+1}^\alpha|} = \frac{n+1}{n-\alpha}$ $(n > \alpha)$, 所以

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{n+1}{n-\alpha} - 1\right) = \frac{n}{n-\alpha}(1+\alpha) \to 1+\alpha > 1,$$

由Raabe判别法知$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |C_n^\alpha|$收敛. ∎

例 7.3.2 设$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛, $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$. 证明$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

证明. 记级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(a_n - a_{n+1})$的前$n$项和为$S_n$, 则

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + \cdots + n(a_n - a_{n+1}) \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n - na_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k - na_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - (n+1)a_{n+1}. \end{aligned}$$

对上式两边取极限得

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} S_n &= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k - (n+1)a_{n+1}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \lim_{n\to+\infty}(n+1)a_{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \end{aligned}$$

即$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(a_n - a_{n-1}) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. ∎

例 7.3.3 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛．证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}+\sqrt{r_n}}$仍收敛，其中$r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$.

证明. 令$b_n = \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}+\sqrt{r_n}}$，则

$$b_n = a_n\frac{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}}{r_{n-1} - r_n} = \sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{r_{k-1}} - \sqrt{r_k}) = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_n},$$

对上式两边取极限得

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(\sqrt{r_0} - \sqrt{r_n}) = \sqrt{r_0}.$$

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{r_{n-1}}+\sqrt{r_n}}$收敛到$\sqrt{r_0}$. ∎

例 7.3.4 证明级数

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$$
$$+\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}+\cdots$$

发散到$+\infty$.

证明. 令$a_n=\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}$. 则

$$a_n>\frac{1}{\sqrt{4n}}+\frac{1}{\sqrt{4n}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}=(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\frac{1}{\sqrt{n}}>0.$$

易知

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\frac{1}{\sqrt{n}}$$

发散到$+\infty$. 所以$\lim\limits_{n\to+\infty}S_{3n}=+\infty$.又

$$S_{3n+2}>S_{3n+1}>S_{3n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}S_{3n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}S_{3n+2}=+\infty,$$

从而原级数发散到$+\infty$. ■

例 7.3.5 设$0<P_1<P_2<\cdots<P_n<\cdots$, 求证$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{P_n}$收敛的充要条件是

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{P_1+P_2+\cdots+P_n}$$

收敛.

证明. 若$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{P_1+P_2+\cdots+P_n}$收敛, 由$0<P_1<P_2<\cdots<P_n<\cdots$,则

$$\frac{n}{P_1+P_2+\cdots+P_n}>\frac{n}{P_n+P_n+\cdots+P_n}=\frac{1}{P_n},$$

由比较判别法知$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{P_n}$收敛. 反过来, 设$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{P_n}$收敛,

$$\begin{aligned}\frac{2n}{P_1+P_2+\cdots+P_n+\cdots+P_{2n}}&<\frac{2n}{P_{n+1}+P_{n+1}+\cdots+P_{2n}}\\&<\frac{2n}{nP_n}=\frac{2}{P_n},\end{aligned}$$

由比较判别法知$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n}{P_1+P_2+\cdots+P_n+\cdots+P_{2n}}$收敛. 又

$$\begin{aligned}\frac{2n+1}{P_1+P_2+\cdots+P_n+\cdots+P_{2n+1}}&<\frac{2n}{P_1+P_2+\cdots+P_n+\cdots+P_{2n}}+\frac{1}{P_n}\\&<\frac{2}{P_n}+\frac{1}{P_n}=\frac{3}{P_n}.\end{aligned}$$

再由比较判别法知$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+1}{P_1+P_2+\cdots+P_n+\cdots+P_{2n+1}}$也收敛, 故$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{P_1+P_2+\cdots+P_n}$收敛. ■

例 7.3.6 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛的充要条件是：对任意的正整数序列

$$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots,$$

都有

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+r_n})=0.$$

证明. 必要性 因为$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛，所以对$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$, 当$n>N$及$\forall p\in\mathbf{N}$, 有

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon,$$

特别地$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+r_n}|<\varepsilon$. 所以$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+r_n})=0$.

充分性 用反证法. 若$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$发散，则$\exists\varepsilon_0>0,\forall N>0,\exists n>N$及自然数$p$, 使

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|\geq\varepsilon_0.$$

特别$N_1=1,\exists n_1>1$及自然数r_1使

$$|a_{n_1+1}+a_{n_1+2}+\cdots+a_{n_1+r_1}|\geq\varepsilon_0.$$

$N_2=\max\{n_1,2\},\exists n_2>N_2$及自然数$r_2$，使

$$|a_{n_2+1}+a_{n_2+2}+\cdots+a_{n_2+r_2}|\geq\varepsilon_0.$$

$$\cdots\cdots$$

这与$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+r_n})=0$的假设矛盾. ■

例 7.3.7 设$a_n>0$, $\{a_n-a_{n+1}\}$为严格递减的数列. 若$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛，证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=\infty.$$

证明. $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_na_{n+1}}$，下证它的倒数趋于零.

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛, 显然$a_n\to0\quad(n\to\infty)$. 由$\{a_n-a_{n+1}\}$严格递减, 知

$$a_n-a_{n+1}>a_{n+1}-a_{n+2}>a_{n+p}-a_{n+p+1},$$

令$p\to\infty$, 则

$$a_n-a_{n+1}>a_{n+1}-a_{n+2}\geq0,\quad a_n>a_{n+1}.$$

$$\begin{aligned}\frac{a_na_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}&<\frac{a_n^2}{a_n-a_{n+1}}=\frac{\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k^2-\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_{k+1}^2}{a_n-a_{n+1}}\\&=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(a_k+a_{k+1})(a_k-a_{k+1})}{a_n-a_{n+1}}\\&\leq\sum_{k=n}^{\infty}(a_k+a_{k+1})=r_n+r_{n+1},\end{aligned}$$

其中$r_n=\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k$. 由$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛知

$$r_n=\sum_{k=n}^{\infty}a_k\to 0\quad (n\to\infty),$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=\infty$. ■

例 7.3.8 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}-\ln(\ln n)\right)$存在*(有限)*.

证明. $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$在$(1,+\infty)$上非负单调递减. 所以

$$\int_2^n\frac{1}{x\ln x}dx<\int_2^{n+1}\frac{1}{x\ln x}dx<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k},$$

即

$$\ln(\ln n)-\ln(\ln 2)<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k},$$

亦即

$$a_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}-\ln(\ln n)>-\ln(\ln 2).$$

又

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-[\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln n)]\\&=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x\ln x}dx\\&\le\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\int_n^{n+1}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}dx=0.\end{aligned}$$

由上可知$\{a_n\}$单调递减且有下界. 故$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}-\ln(\ln n)\right)$存在(有限). ■

例 7.3.9 设$a_n>0,S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，证明：

(1) 当$\alpha>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$收敛;

(2) 当$\alpha\le 1$且$S_n\to\infty$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$发散,

证明. 令$f(x)=x^{1-\alpha}$, $x\in[S_{n-1},S_n]$. 将$f(x)$在区间$[S_{n-1},S_n]$上用柯西中值定理, 存在$\xi\in(S_{n-1},S_n)$

$$f(S_n)-f(S_{n-1})=f'(\xi)(S_n-S_{n-1}),$$

即

$$S_n^{1-\alpha}-S_{n-1}^{1-\alpha}=(1-\alpha)\xi^{-\alpha}a_n.$$

(1) 当$\alpha>1$时, $\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}=(\alpha-1)\frac{a_n}{\xi^{\alpha}}\ge(\alpha-1)\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$. 显然

$\{\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\}$的前$n$项和有界，从而收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$收敛.

(2) 当$\alpha=1$时, 因$a_n>0$, S_n单调递增, 所以

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_k}\geq\frac{\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}a_k}{S_{n+p}}=\frac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}}=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}.$$

因为$S_n\to+\infty$, 故$\forall n$, 当$p\in\mathbf{N}$充分大时, $\frac{S_n}{S_{n+p}}<\frac{1}{2}$, 从而

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_k}\geq1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

所以$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$发散.

当$\alpha<1$时, $\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}\geq\dfrac{a_n}{S_n}$, 由$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$发散及比较判别法知级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$发散. ■

7.3.2 第七章复习题一

1. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{3^n}$收敛, 并求其和.

2. 判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln\cos\frac{\pi}{n}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{n}}$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n^2\,\mathrm{e}^{-n\alpha},\alpha>0$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}\quad(x\geq0)$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n}}$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^{\ln n}}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^5}{3^n}(\sqrt{3}+(-1)^n)^n$; (8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$, 其中$a_n\to a, a_n, b, a$皆为正数.

3. 如果

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}a_{n+1}&=0,\\ \lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}+a_{n+2})&=0,\\ &\vdots,\\ \lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})&=0,\\ &\vdots\end{aligned}$$

试问级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$是否一定收敛？（是或不一定，要说明理由）

4. 证明下列级数收敛.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right]$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[e-(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!})\right]$.

5. 证明$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^{-\frac{n+1}{n}}$发散.

6. 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$发散, $a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n$. 试证级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n}$也是发散的; 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{S_n^2}$收敛. (提示:利用不等式$\frac{u_n}{S_n^2}\le\frac{S_n-S_{n-1}}{S_nS_{n-1}}$.)

7. 设$p>0,q>0$. p,q取何值时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+1+n)}{n!}\frac{1}{n^q}$收敛.

8. 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$的通项$a_n$单调递减且$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{2n}$收敛, 证明$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛.

9. 设$\{a_n\}$是递减的正数列，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$与级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2^na_{2^n}$同敛散, 利用这一结果证明；

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}$当$\alpha>0$时收敛，$\alpha\le 0$时发散；

(2) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$发散.

10. 对函数$f(s)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}\quad(s>1)$, 证明: $f(s)=s\lim\limits_{m\to\infty}\int_1^m\frac{[x]}{x^{s+1}}dx$, 其中$[x]$为$x$的整数部分.

11. 证明: $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2\ln k}=\frac{1}{n\ln n}+O\left(\frac{1}{n(\ln n)^2}\right)$.

7.4 任意项级数

前面一节讨论了级数的项不变号时级数的敛散性, 这一节研究级数项是可以变号的情形. 如果级数中只有有限个负项其它都是正项, 或者仅有有限项正项其它都是负项, 那么就可以利用上节讲过的判别方法来判定级数的敛散性. 既有无穷多个正项又有无穷多个负项的级数就不能上述方法来进行判定. 任意项级数就是正项和负项可以任意出现的级数.

7.4.1 绝对收敛级数

为了得到任意项级数收敛性, 首先利用已有的正项级数的有关结果, 得到下面的绝对收敛定理.

定理 7.4.1 若级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ 收敛, 那么级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 必收敛.

证明. 由级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ 收敛, 利用级数收敛的Cauchy定理, 对任意给定的$\varepsilon>0$, 存在$N>0$, 使得当$n>N$时, 对任意正整数$p>0$, 有

$$|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\cdots+|u_{n+p}|<\varepsilon.$$

另外

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|\le|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\cdots+|u_{n+p}|.$$

所以就有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon.$$

再利用Cauchy收敛准则, 就得到级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 是收敛的. ■

显然定理的逆命题是不成立的, 即由级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的收敛性, 不能推出级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 的收敛性.

定义 7.4.2 若级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 收敛, 则称级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 绝对收敛. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 但级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 发散, 则称级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 是条件收敛的.

所以利用定理7.4.1, 可得下面的定理:

定理 7.4.3 若级数绝对收敛,则级数一定收敛, 但反之不然.

例如: 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ 就是一个条件收敛级数.

例 7.4.4 讨论$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(1+\frac{1}{n})^n}$的敛散性.

解. 设$u_n = \frac{x^n}{(1+\frac{1}{n})^n}$, 则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|u_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|x|}{1+\frac{1}{n}} = |x|,$$

故当$|x| < 1$时级数绝对收敛；当$|x| > 1$时级数发散. 当$|x| = 1$时，通项

$$|u_n| = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e}$$

不等于零，故级数也发散. ■

例 7.4.5 讨论$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+(-1)^n)}{n} \ln^n x$的敛散性.

解. 设$u_n = \frac{(1+(-1)^n)}{n} \ln^n x$, 则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|u_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{(1+(-1)^n)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}} |\ln x| = \ln x.$$

故当$|\ln x| < 1$, 即当$\frac{1}{e} < x < e$时，级数绝对收敛；当$|\ln x| > 1$, 即当$x > e$ 或$0 < x < \frac{1}{e}$时，级数发散.

当$|\ln x| = 1$ 即当$x = e$或$\frac{1}{e}$时，级数变成$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+(-1)^n)}{n}$. 由于$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$发散，从而其和级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+(-1)^n)}{n}$发散. ■

7.4.2 交错级数

条件收敛级数中, 一类最常见的级数就是交错级数.

定义 7.4.6 所谓交错级数就是正负项交错出现的级数. 也就是

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{(n-1)} u_n + \cdots$$

型的级数(其中$u_n \geq 0, n = 1, 2, \cdots$). 下面给出判定交错级数收敛的判定定理.

定理 7.4.7 *(Leibniz定理)* 设交错级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 满足:

(1) $u_n \le u_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

则交错级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛.

注 7.4.8 满足上述条件定理条件的交错级数也称为*Leibniz*级数, 所以定理*7.4.7*也可以叙述为, *Leibniz*级数必收敛.

定理7.4.7的证明. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的部分和为S_n. 那么对于由偶数项构成的部分和就有

$$S_{2m} = (u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2m-1}-u_{2m}).$$

由定理条件(1), $\{S_{2m}\}$ 为单调递增的数列, 并且S_{2m} 也可以写成

$$S_{2m} = u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2m-2}-u_{2m-1})-u_{2m} \le u_1.$$

这样,

$$0 \le S_{2m} \le S_{2m+2} \le u_1 \quad (m=1,2,3,\cdots).$$

所以偶数项部分和序列$\{S_{2m}\}$ 为单调递增的有界数列. 因此数列$\{S_{2m}\}$ 存在极限, 设$\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$, 又因为

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1},$$

且

$$\lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$$

故

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = S.$$

由于序列$\{S_n\}$ 的奇数项序列$\{S_{2m+1}\}$ 和偶数项序列$\{S_{2m}\}$ 都趋向于同一个极限S, 所以$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. ■

注 7.4.9 设$R_n = \sum\limits_{m=n+1}^{\infty}(-1)^{m-1}u_m$ 为级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的余和. 对于满足定理*7.4.7*条件*(1)*, *(2)*的交错级数来说, 可以很容易的得到余项R_n 的估计. 实际上,

$$\begin{aligned} R_n &= (-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1}u_{n+2} + \cdots \\ &= (-1)^n(u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-u_{n+4}+\cdots). \end{aligned}$$

那么由定理*7.4.7*的证明, 就可知R_n 的符号与级数的第$n+1$ 项$(-1)^n u_{n+1}$ 的符号相同. 并且$|R_n| \le u_{n+1}$. 容易验证级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(\ln n)^p}$ 和$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ 都是*Leibniz*级数, 所以根据定理*7.4.7*可知上述级数都是收敛的.

例 7.4.10 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)$ 收敛.

证明.

$$\sin(\sqrt{n^2+1}\pi) = (-1)^n\sin(\sqrt{n^2+1}-n)\pi = (-)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}.$$

显然$\{\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\}$是单调递减数列, 且

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0,$$

所以$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)$ 是Leibniz级数, 由定理7.3.2可知, 其是收敛的.

■

7.4.3 Abel判别法与Dirichlet判别法

下面给出两个判定较Leibniz级数更一般的级数收敛性的判别法, 也就是Abel 判别法与Dirichlet判别法. 为了证明这两个判别法, 首先介绍Abel变换. 对于数列$\{a_n\}$ 与$\{b_n\}$, 记$B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. 下面计算和$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \\
&= a_1 B_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) \\
&= a_1 B_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k B_k - \sum_{k=2}^{n} a_k B_{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=2}^{n-1} a_{k+1} B_k + a_n B_n \\
&= a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k.
\end{aligned}$$

引理 7.4.11 *(Abel)* 设$\{a_n\}$ 为单调数列, 记$B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, L是一个给定的正常数, 如果$|B_i| \le L(i = 1, 2, \cdots, n)$. 则

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \le L(|a_1| + 2|a_n|).$$

证明. 因为数列$\{a_n\}$ 单调, 不失一般性, 设$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_n$. 由前面的讨论可得

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| &= \left| a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k \right| \\
&\le L|a_n| + L \left(\sum_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| \right) \\
&\le L(|a_1| + 2|a_n|).
\end{aligned}$$

■

定理 7.4.12 *(Abel判别法)若*

(1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛*;*

(2) 数列$\{a_n\}$ 单调且有界*;*

则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明. 设$|a_n| \le K$, 由于级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛, 所以对任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$N > 0$, 使得对任意的正整数p, 当$n > N$ 时,

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p}| < \varepsilon.$$

由于数列$\{a_n\}$ 满足引理7.4.3中的条件, 所以由引理7.4.3可得

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \le \varepsilon(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) \le 3K\varepsilon.$$

利用Cauchy定理, 可得级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛. ∎

定理 7.4.13 *(Dirichlet判别法)* 若
(1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 的部分和数列$\{B_n\}$ 有界;
(2) 数列$\{a_n\}$ 单调趋于零.
则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明. 由数列$\{B_n\}$ 有界, 设$|B_n| \le K$. 对任意正整数p, 显然有

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p}| = |B_{n+p} - B_n| \le 2K.$$

又数列$\{a_n\}$ 趋于零, 所以对任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$N > 0$, 使得当$n > N$ 时, $|a_n| < \varepsilon$. 利用引理可得

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \le 2K(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) \le 6K\varepsilon.$$

再利用Cauchy收敛准则, 可得级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛. ∎

例 7.4.14 设$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$收敛，则由*Abel*判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n \ln \frac{3n+1}{2n}$ 都收敛.

例 7.4.15 设数列$\{a_n\}$单调且趋于零, 证明级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx \quad (-\infty < x < +\infty)$$

收敛.

证明. 若$x = 2k\pi$, k 为任意的整数. 则级数的每一项都为零, 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx$ 显然收敛. 下面设$x \ne 2k\pi$. 部分和

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{m=1}^{n} \sin mx\right| &= \left|\frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \sum_{m=1}^{n} \sin mx \sin \frac{x}{2}\right| \\
&= \left|\frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}\right| \\
&\le \frac{2}{2|\sin \frac{x}{2}|} = \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}.
\end{aligned}$$

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin nx$ 的部分和有界,而$\{a_n\}$单调且趋于零,根据Dirichlet判别法可知, 对任意的$(-\infty < x < +\infty)$, 级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx$$

收敛. ∎

例 7.4.16 考察级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^p}$的敛散性,

解. 设$u_n = \frac{x^n}{n^p}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n^p}} = |x|$. 由根式判别法知: 当$|x|<1, p$为任意实数时，级数绝对收敛；$|x|>1, p$为任意实数时,级数发散.

当$x=1$时级数为$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^p}$, 若$p>1$,级数绝对收敛;若$p\le 1$,级数发散.

当$x=-1$时级数为$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^p}$, 若$p>1$,级数绝对收敛; 若$0<p\le 1$,级数条件收敛；若$p\le 0$, 级数发散.

■

7.4.4 绝对收敛级数和条件收敛级数的性质

定理 7.4.17 对于级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$，将它的所有正项保留而将负项换为零，组成的级数记为$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$, 将它的所有负项变号而将正项换为零，所组成的正项级数记为$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}w_n$, 亦即：$v_n=\dfrac{|u_n|+u_n}{2}$, $w_n=\dfrac{|u_n|-u_n}{2}$. 那么:

（*1*）若级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$绝对收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$ 和$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}w_n$都收敛,

（*2*）若级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 条件收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$和$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}w_n$都发散,

证明. (1) 显然$v_n\le|u_n|, w_n\le|u_n|$. 由$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$绝对收敛(即$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|u_n|$收敛)以及比较判别法知$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$和$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}w_n$都收敛.

此外易知$v_n+w_n=|u_n|, v_n-w_n=u_n$,从而

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{+\infty}v_n + \sum_{n=1}^{+\infty}w_n,$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n = \sum_{n=1}^{+\infty}v_n - \sum_{n=1}^{+\infty}w_n.$$

(2) 设$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$条件收敛，即$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|u_n|$发散，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$收敛.

（反证法）假设$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$ 收敛，由$v_n=\frac{1}{2}(|u_n|+u_n)$ 得$|u_n|=2v_n-u_n$, 再由$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$ 与$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 均收敛，知$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ 也收敛，矛盾, 故$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$ 发散. 同理可证$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}w_n$ 也发散. ■

众所周知，在有限个数的加法里，结合律与交换律是成立的，但在无限个数的加法中即无穷级数中，结合律与交换律是否也成立呢？在性质7.1.9中已经证明，结合律对收敛的级数是成立的，即不改变收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 各项的顺序, 而对其项任意加括号后形成新的级数

$$\begin{aligned}&(u_1+u_2+\cdots+u_{i_1})+(u_{i_1+1}+u_{i_1+2}+\cdots+u_{i_2})+\cdots\\&\quad+(u_{i_n+1}+u_{i_n+2}+\cdots+u_{i_{n+1}})+\cdots\end{aligned}$$

也收敛, 并且其和不变. 那末对收敛的级数是否也成立交换律呢？也就是说，若收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n=S$，将其项任意重排得到新级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n'$(称为$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$的**更序级数**) 是否仍收敛并且有$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n'=S$呢？一般说来来，是不一定成立的.

例 7.4.18 试研究*Leibniz*级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

解. 这是一个条件收敛级数，设

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=S.$$

显然$S>0$. 现按下述规律构造$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$的更序级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n'$：顺次地在每一个正项后面接两个负项, 即

$$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n'=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\cdots.$$

设$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$的部分和数列为$\{S_n\}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n'$的部分和数列为$\{S_n'\}$, 则

$$\begin{aligned}S_{3n}'&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}S_{2n},\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}S_{3n}'=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\frac{1}{2}S.$$

由于

$$S_{3n+1}'=S_{3n}'+\frac{1}{2n+1},\quad S_{3n+2}'=S_{3n}'+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+1},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}S_{3n+1}'=\lim_{n\to\infty}S_{3n}'=\lim_{n\to\infty}S_{3n+2}'=\frac{1}{2}S,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}S_n'=\frac{1}{2}S.$$

这就是说，尽管$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$是收敛的, 但交换律不成立. ■

这个例子说明, 要使一个数项级数成立加法交换律，仅有收敛性是不够的. 事实上，能否满足加法交换律，是绝对收敛级数与条件收敛级数的一个本质区别. 我们有以下定理.

定理 7.4.19 绝对收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 的更序级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n'$ 仍绝对收敛，且$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n'$.

证明. (1) 先讨论$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$为正项级数的情形. 记$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n=S$. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n'$的部分和

$$S_n'=u_1'+u_2'+\cdots+u_n',$$

记$u_i'=u_{k_i}, k=\max\{k_1,k_2,\cdots,k_n\}$, 则

$$S_n'=u_{k_1}+u_{k_2}+\cdots+u_{k_n}\le u_1+u_2+\cdots+u_k=S_k.$$

由$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n=S$收敛知$S_k$有上界，从而$S_n'$也有上界，故$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n'$收敛于$S'$, 且$S'=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n'\le S=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$.

同样$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$也可看成$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n'$的更序级数，则$S\le\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n'=S'$. 由此$S'=S$, 即$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n'$.

(2) 在讨论$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$为一般级数的情形. 若$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$绝对收敛，则

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} v_n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$$

都收敛，由(1)的结果知$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n'|$收敛，从而$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n'$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} w_n'$收敛. 此外

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n - \sum_{n=1}^{+\infty} w_n, \sum_{n=1}^{+\infty} u_n' = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n' - \sum_{n=1}^{+\infty} w_n'.$$

再利用(1)的结果

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n', \sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n',$$

故

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'.$$

■

7.4.5 级数的乘法

有限和式$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$和$\sum\limits_{k=1}^{m} b_k$的乘积是所有诸如$a_i b_j (i = 1, 2\cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m)$项的和. 显然,其最终结果与它们相加的次序与方式无关.

类似地, 对于两个收敛的级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, 可以同样写出所有诸如$a_i b_j (i = 1, 2\cdots; j = 1, 2, \cdots)$的项,将它们排列成下面无穷矩阵的形式:

$$\begin{array}{ccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \cdots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \cdots \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \cdots \\
a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

然后,将所有这些项相加的结果定义为$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$的乘积.

由于级数运算一般不满足交换律和结合律, 这就有一个排列的次序与方式的问题,尽管排列的次序与方式多种多样,但常用的,也是最具应用价值的方式是下面所示的"对角线"排列与"正方形"排列.

对角线排列:

$$\begin{array}{cccccccccc}
a_1b_1 & & a_1b_2 & & a_1b_3 & & a_1b_4 & & \cdots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \cdots \\
a_2b_1 & & a_2b_2 & & a_2b_3 & & a_2b_4 & & \cdots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \cdots \\
a_3b_1 & & a_3b_2 & & a_3b_3 & & a_3b_4 & & \cdots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \cdots \\
a_4b_1 & & a_4b_2 & & a_4b_3 & & a_4b_4 & & \cdots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & & & & \cdots \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots
\end{array}$$

令

$$\begin{aligned}
&c_1 = a_1b_1, \\
&c_2 = a_1b_2 + a_2b_1, \\
&\cdots \\
&c_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1, \\
&\cdots
\end{aligned}$$

则我们$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$称为级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$的**Cauchy乘积**.

正方形排列:

$$\begin{array}{cccccc}
a_1b_1 & & a_1b_2 & & a_1b_3 & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & \cdots \\
a_2b_1 & \leftarrow & a_2b_2 & & a_2b_3 & \cdots \\
 & & & & \downarrow & \cdots \\
a_3b_1 & \leftarrow & a_3b_2 & \leftarrow & a_3b_3 & \cdots \\
\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \quad \cdots
\end{array}$$

令

$$\begin{aligned}
&d_1 = a_1b_1, \\
&d_2 = a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1, \\
&\cdots \\
&d_n = a_1b_n + a_2b_n + \cdots + a_nb_n + a_nb_1 + \cdots + a_nb_{n-1}, \\
&\cdots
\end{aligned}$$

则$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d_n$就是级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$的按正方形排列所得的乘积.

对于按正方形排列所得的乘积,只要$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$收敛, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d_n$总是收敛的,并成立

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right).$$

理由请读者自行思考.

但是,仅有$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$的收敛性不足以保证Cauchy乘积的收敛性, 下面就是一个例子.

例 7.4.20 设$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, 这两个级数都是收敛的(显然是条件收敛),它们的*Cauchy*乘积和一般项为

$$c_n = (-1)^{n+1} \sum_{i+j=n+1} \frac{1}{\sqrt{ij}},$$

注意上面c_n的表达式中共有n项, 在每一项中, $i+j=n+1$, 因而$\sqrt{ij} \le \frac{i+j}{2} = \frac{n+1}{2}$, 于是得到

$$|c_n| \ge n \cdot \frac{2}{n+1},$$

因此$\{c_n\}$不是无穷小量, 所以, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$的*Cauchy*乘积$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$发散.

定理 7.4.21 *(柯西(Cauchy)定理)* 若级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$都绝对收敛，其和分别为$A$和$B$，则它们各项之积$a_ib_j(i,j=1,2,3,\cdots)$，按照任何方法排列所构成的级数也绝对收敛，且其和为AB,

证明. 设所排级数为

$$a_{n_1}b_{m_1} + a_{n_2}b_{m_2} + \cdots + a_{n_k}b_{m_k} + \cdots.$$

考虑

$$|a_{n_1}||b_{m_1}| + |a_{n_2}||b_{m_2}| + \cdots + |a_{n_k}||b_{m_k}| + \cdots$$

的敛散性.

记该级数前k项的和为S_k^*,则

$$S_k^* = \sum_{i=1}^{k} |a_{n_i}||b_{m_i}| \leq (\sum_{i=1}^{k} |a_{n_i}|)(\sum_{i=1}^{k} |b_{m_i}|).$$

记$r = \max\{n_1, n_2, \cdots, n_k, m_1, m_2, \cdots, m_k\}$, 则

$$S_k^* \leq (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_r|)(|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_r|) = S_r^{(1)} S_r^{(2)},$$

其中$S_r^{(1)} = \sum\limits_{i=1}^{r} |a_i|, S_r^{(2)} = \sum\limits_{i=1}^{r} |b_i|$. 由$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$与$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n|$收敛知$S_r^{(1)}, S_r^{(2)}$均有上界，从而$S_k^*$有上界，故级数

$$|a_{n_1}||b_{m_1}| + |a_{n_2}||b_{m_2}| + \cdots + |a_{n_k}||b_{m_k}| + \cdots$$

收敛，也即用任何方法排列所成的级数绝对收敛,由定理7.3.2,$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k} b_{m_k}$的任意更序级也绝对收敛,且和不变.

设$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d_n$是级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 按正方形排列所得的乘积,则$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d_n$是$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k} b_{m_k}$更序后再添加括弧所成的级数,于是得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} b_{m_k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right) = AB.$$

■

下面我们举一例子,它反映了Cauchy乘积的应用价值.

例 7.4.22 利用*D'Alembert*判别法,可知对一切$x \in \mathbb{R}$, 级数$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$是绝对收敛的. 现考虑两个绝对收敛级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$与$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ 的*Cauchy*乘积, 由定理*7.4.21*

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k x^k y^{n-k}}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}, \end{aligned}$$

也就是成立$f(x+y) = f(x)f(y)$.

在第下一章, 我们将知道函数$f(x)$就是指数函数e^x, 因而上式就是熟知的指数函数的加法定理.

7.4.6 习题7.3

1. 讨论下列级数的敛散性(包括条件收敛与绝对收敛):

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$;　(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$;　(4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{n(\ln n)^2}$;

(5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\pi^n}\sin\frac{\pi}{n}$;　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n[n]}}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}\quad(x\neq -n)$;　(8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$;

(10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\sin\frac{x}{n}\arctan n\quad(x\neq 0)$;

(11) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$;　(12) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$;

(13) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$;　(14) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^2}{2^n}$;

(15) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$;　(16) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}$.

2. 讨论下列级数的敛散性(包括条件收敛与绝对收敛):

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^p}$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2nx}{n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$;　(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^n}x^n$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}\quad(p>0)$;　(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin nx}{n^p}$, $(p>0)$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^p\ln^q n}$;　(8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$;　(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 x}{n}$;

(11) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4^n+(-3)^n}{n+1}x^n$;　(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n}\ln^n x$;

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$;　(14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$.

3. 若数列$\{a_n\}$单调趋于零，那么级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\sin nx$和$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx$前者对任何$x$都收敛，后者对任何$x\neq 2k\pi$都收敛，而当$x=2k\pi$时，需根据的性质进一步判别.

4. 考虑级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n}$的敛散性,

5. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha_0}}$收敛, 则当$\alpha>\alpha_0$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha}}$也收敛.

6. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$收敛, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=1$, 问级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}y_n$是否收敛?

7. 设$x_n\geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 问交错级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x_n$是否收敛?

8. 级数$(|q|<1)$ $1+q+q^2+\cdots+q^n+\cdots=\dfrac{1}{1-q}$绝对收敛, 将此级数自乘可得$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nq^n=\dfrac{1}{(1-q)^2}$.

9. 利用级数的Cauchy乘积证明

(1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1;$

(2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}q^n\cdot\sum\limits_{n=0}^{+\infty}q^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)q^n=\frac{1}{(1-q)^2}\quad(|q|<1).$

7.5 第七章典型例题选讲二

7.5.1 例题选讲

例 7.5.1 已知对一切自然数n 有$\mu_n>0$ 且$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^p\mu_n}{1-\cos\frac{\pi}{n}}=1$, 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mu_n$ 的敛散性.

解. $1-\cos\frac{\pi}{n}=2\sin^2\frac{\pi}{2n}$, 又$\sin^2\frac{\pi}{2n}\sim\frac{\pi^2}{4n^2}$, $(n\to+\infty)$. 故

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^p\mu_n}{1-\cos\frac{\pi}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^p\mu_n}{2\times\frac{\pi^2}{4n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\mu_n}{n^{-p-2}}\times\frac{2}{\pi^2}=1.$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\mu_n}{n^{-p-2}}=\frac{\pi^2}{2},$$

由比较判别法的极限形式知$p+2>1$即$p>-1$时$\sum\limits_{n\to+\infty}\mu_n$收敛. 当$p+2\le 1$即$p\ge -1$时, $\sum\limits_{n\to+\infty}\mu_n$发散. ■

例 7.5.2 说明级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2+3n-2)^x}$, $(x>0)$是条件收敛或绝对收敛.

解. 数列$\left\{\frac{1}{(n^2+3n-2)^x}\right\}$是$n$的单调递减函数, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n^2+3n-2)^x}=0.$$

由莱布尼兹判别法知$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2+3n-2)^x}$收敛.

$$\left|\frac{(-1)^n}{(n^2+3n-2)^x}\right|=\frac{1}{(n^2+3n-2)^x},$$

由$n^2\le n^2+3n-2\le 4n^2$知

$$\frac{1}{4^xn^{2x}}\le\frac{(1}{(n^2+3n-2)^x}\le\frac{1}{n^{2x}}.$$

故当$2x>1$ 即$x>\frac{1}{2}$ 时$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(n^2+3n-2)^x}\right|$收敛，即$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2+3n-2)^x}$绝对收敛；

当$2x\le 1$即$x\le\frac{1}{2}$时$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(n^2+3n-2)^x}\right|$发散，从而$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2+3n-2)^x}$条件收敛. ■

例 7.5.3 设$f(x)$ 在$[-1,1]$ 上二次连续可微，且有$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明: 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(\frac{1}{n})$绝对收敛.

证明. 由$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$ 知$f(0)=0$,所以

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0,$$

从而
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\frac{1}{2}f''(0).$$

由$f''(x)$在$[-1,1]$ 上连续知$f''(x)$在$[-1,1]$ 上有界，故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\frac{1}{2}f''(0)\neq\infty,$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|f(\frac{1}{n})\right|}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}|f''(0)|\neq+\infty,$$

又$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$收敛, 所以由比较判别法知级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(\frac{1}{n})$绝对收敛. ■

例 7.5.4 设$f(x)$ 是在$(-\infty,+\infty)$ 内的可微函数，且满足：

(1) $f(x)>0$;

(2) $|f'(x)|\leq mf(x)$, 其中$0<m<1$.

任取a_0 定义$a_n=\ln f(a_{n-1}), n=1,2,\cdots$. 证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n-1})$绝对收敛.

证明. 由微分中值定理
$$a_n-a_{n-1}=\ln f(a_{n-1})-\ln f(a_{n-2})=\frac{f'(\xi_{n-1})}{f(\xi_{n-1})}(a_{n-1}-a_{n-2}),$$

其中ξ_{n-1} 在a_{n-1} 与a_n 之间.

于是
$$|a_n-a_{n-1}|\leq\left|\frac{f'(\xi_{n-1})}{f(\xi_{n-1})}\right||a_{n-1}-a_{n-2}|\leq m\left|a_{n-1}-a_{n-2}\right|,$$

由归纳法知
$$|a_{n-1}-a_{n-2}|\leq m^{n-1}\left|a_1-a_0\right|,\quad |a_n-a_{n-1}|\leq m^n\left|a_1-a_0\right|.$$
$$\sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k-a_{k-1}|\leq(m^{n+p-1}+\cdots+m^n)\left|a_1-a_0\right|,$$

由于$m<1$, 故$\forall\varepsilon>0,\exists N$, 当$n>N$ 时，
$$\sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k-a_{k-1}|<\varepsilon,$$

由Cauchy准则知$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n-1})$绝对收敛. ■

例 7.5.5 已知$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}na_n$收敛, $t_n=a_{n+1}+2a_{n+2}+\cdots+ka_{n+k}+\cdots$, 证明$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=0$.

证明. 记$b_n=na_n$, 则$a_n=\frac{1}{n}b_n$, 从而
$$t_n=\frac{1}{n+1}b_{n+1}+\cdots+\frac{2}{n+2}b_{n+2}+\cdots+\frac{k}{n+k}b_{n+k}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n+k}b_{n+k}.$$

对固定的n, 数列$\{\frac{k}{n+k}\}$ 关于k 单调有界, 而由条件$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n$收敛，知

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{n+k} = \sum_{k=1}^{\infty}(n+k)a_{n+k} = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k - \sum_{k=1}^{n} ka_k$$

也收敛, 再由Abel判别法知, 对固定的n, 级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n+k}b_{n+k}$收敛，从而$t_n$有意义.

由Abel不等式，有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{n+1}b_{n+1} + \cdots + \frac{2}{n+2}b_{n+2} + \cdots + \frac{k}{n+k}b_{n+k}\right| \\ &\le \left(\frac{1}{n+1} + \frac{k}{n+k}\right) \max_{n+1\le l\le m\le n+k} |b_l + b_{l+1} + \cdots + b_m|,\end{aligned}$$

其中$\frac{1}{n+1} + \frac{k}{n+k} \le 2$. 又$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$, 当$n \ge N$时, 对一切自然数$k$, 有

$$\max_{n+1\le l\le m\le n+k} |b_l + b_{l+1} + \cdots + b_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此, 当$n \ge N$时,

$$|t_n| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{n+1}b_{n+1} + \cdots + \frac{2}{n+2}b_{n+2} + \cdots + \frac{k}{n+k}b_{n+k}\right| \le 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

故$\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$. ■

7.5.2 第七章复习题二

1. 若对任意$\varepsilon > 0$和任意正整数p,存在$N(\varepsilon, p)$,使得

   $$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}| < \varepsilon$$

   对一切$n > N$成立, 问级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$是否收敛?

2. 设数列$\{nx_n\}$ 与级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(x_n - x_{n+1})$ 都收敛，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 也收敛,

3. 若$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(x_n - x_{n-1})$绝对收敛, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} y_n$收敛, 则级数$\sum\limits_{n=2}^{+\infty} x_ny_n$收敛.

4. 设$\{a_n\}$ 为一个递增正数列, 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$当$\{a_n\}$有界时收敛，而当$\{a_n\}$无界时发散.

5. 设$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0$.

   提示：用Abel求和公式.

6. 设$\{b_n\}$递减趋于0，且$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_nb_n$收敛，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)b_n = 0$.

   提示：利用Cauchy收敛原理和Abel引理,

7. 如果$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n^\alpha}(\alpha > 0)$收敛，试证：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n^\alpha} = 0$.

8. 设$\{b_n\}$ 是正的递增趋于$+\infty$ 的数列，如果$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，试证：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{b_n} = 0.$$

9. 如果$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛，命$b_n = \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)}$，那么$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$也收敛，且$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

   提示：记$c_n = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$, 证明$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k - \dfrac{c_n}{n+1}$.

第 八 章　广义积分

8.1　无穷限的广义积分

8.1.1　无穷限广义积分的概念

定义 8.1.1 设函数$f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 有定义，若对于任意的$A(A>a)$, $f(x)$在区间$[a,A]$ 上可积，且极限$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$ 存在, 则称该极限值I 为$f(x)$ 在区间$[a,+\infty)$ 上（或是从a 到$+\infty$) 的广义积分，记作

$$I=\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$$

这时也称积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，用记号$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 来表示它的值；如果上述的极限不存在，则称积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 是发散的，此时虽仍用同样的记号，但已不表示数值了. 类似地可定义广义积分$\int_{-\infty}^b f(x)dx$.

定义 8.1.2 设函数$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 有定义, 若对于任意的$a\in(-\infty,+\infty)$,

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx \text{ 与 } \int_{-\infty}^a f(x)dx$$

都收敛，则称$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{\infty}^a f(x)dx+\int_a^{+\infty}f(x)dx$$

这时有$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{A\to+\infty,A'\to-\infty}\int_{A'}^A f(x)dx$.

若$F(x)$是$f(x)$的原函数, 记$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$, 则有

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=F(+\infty)-F(a).$$

例 8.1.3 计算无穷限积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx.$$

解.

$$\begin{aligned}I&=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{1}{1+x^2}dx\\&=\arctan x|_0^{+\infty}\\&=\frac{\pi}{2}-0\\&=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

■

例 8.1.4 设$a>0$, 讨论积分$I=\int_a^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p}$　$(p>0)$的敛散性.

解. 当$p \neq 1$时,

$$I = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_a^{+\infty} = \begin{cases} -\frac{a^{1-p}}{1-p}, & p > 1, \\ +\infty, & p < 1; \end{cases}$$

$p = 1$时,

$$I = \ln x|_a^{+\infty} = +\infty.$$

因此,当$p > 1$时I收敛于$-\frac{a^{1-p}}{1-p}$, 当$p \leq 1$时发散. ■

无穷限广义积分的性质、分部积分法及换元法则同定积分.

例 8.1.5 计算无穷限积分$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \cos x dx$.

解.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} d\sin x = \mathrm{e}^{-x} \sin x\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin x dx \\ &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} d(-\cos x) = -\mathrm{e}^{-x} \cos x\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \cos x dx \\ &= 1 - I. \end{aligned}$$

所以$I = \frac{1}{2}$. ■

例 8.1.6 计算无穷限积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

解. 令$x = a\tan t \ \ (a > 0)$, 当$x = +\infty$时, $t = \frac{\pi}{2}$; 当$x = 0$时, $t = 0$. 故

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\sec^2 t dt}{a^3 \sec^3 t} = \frac{1}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \frac{1}{a^2}.$$

■

例 8.1.7 求$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

解.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2} \\ &= \pi - \frac{1}{\sqrt{2}}\pi = \pi(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}). \end{aligned}$$

■

例 8.1.8 设$s > 0$, 证明: $I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-sx} x^n dx = n!/s^{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$.

证明. 因为$s > 0$时$\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-sx} x^n = 0$, 所以当$s > 0$时,

$$\begin{aligned} I_n &= -\frac{1}{s} \int_0^{+\infty} x^n d\,\mathrm{e}^{-sx} \\ &= -\frac{1}{s} \left[x^n \mathrm{e}^{-sx}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-sx} dx^n \right] = \frac{n}{s} I_{n-1}. \end{aligned}$$

由此可得$I_n = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} I_{n-1} = \cdots = \frac{n!}{s^n} I_0 = \frac{n!}{s^{n+1}}$, 这里用到了$I_0 = 1/s$. ■

由于$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛(即$\lim\limits_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx$存在)，故

$$\lim_{A \to +\infty} \int_A^{+\infty} f(x)dx = 0.$$

因此，对其收敛的最本质的刻画就是极限论中的Cauchy收敛原理，它可以表述为如下形式：

定理 8.1.9 ***(柯西(Cauchy)收敛原理)*** $\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛的充要条件是：对任意给定$\varepsilon > 0$，存在$A > 0$，当$A_1, A_2 > A$时，总有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

和无穷级数相仿，在广义积分中也有绝对收敛和条件收敛的概念：

定义 8.1.10 设函数$f(x)$ 在$[a, +\infty)$ 有定义，对任何$A > a$, $f(x)$ 在$[a, A]$ 可积，且$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛，则称$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛. 称收敛但不绝对收敛的广义积分为条件收敛.

定理 8.1.11 绝对收敛的广义积分必收敛, 但反之未必.

证明. 由于$\forall A_1, A_2 > A$, 都有$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| \le \int_{A_1}^{A_2} |f(x)|dx$, 由Cauchy收敛原理知绝对收敛的广义积分必收敛.

但反之未必. 如

$$f(x) = (-1)^{[x]}\frac{1}{[x]+1}.$$

显然$\int_0^{+\infty} |f(x)|dx$不收敛，但$\int_0^{+\infty} f(x)dx$收敛. ■

8.1.2 无穷限广义积分和数项级数的关系

设$I(A) = \int_a^A f(x)dx$, 由函数极限和数列极限的关系知道：$\lim\limits_{A\to+\infty} I(A)$ 存在的充分必要条件是对任何以正无穷为极限的数列$\{A_n\}$, 数列$\{I(A_n)\}$收敛，并且有同一极限值.

任意取一个数列$\{A_n\}, A_n \to +\infty$, 并设$A_0 = a, u_k = \int_{A_{k-1}}^{A_k} f(x)dx$, 则

$$I(A_n) = \int_a^{A_n} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{A_{k-1}}^{A_k} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

因此，如果积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛于L, 那么每一个这样的级数$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$也收敛于$L$. 由此得到以下推论：如果找到一个数列$\{A_n\}$, 使所作出的级数$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$不收敛，或是找到两个数列，使所作出的两个级数不收敛于同一值，就能断定$\int_a^{+\infty} f(x)dx$不收敛.

另一方面，每一无穷级数$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$, 可以看作一个阶梯函数的无穷积分(只要置$f(x) = u_k, k \le x < k+1$，则有$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k = \int_1^{+\infty} f(x)dx$). 这样一来，通过已经熟悉了数项级数的知识，可以考察广义积分的相关问题.

8.1.3 无穷限广义积分敛散性的判别法

用Cauchy收敛原理易证下面的比较判别法，很直观，却很实用.

定理 8.1.12 *(比较判别法)* 设从某一值$a_0 \ge a$起，$|f(x)| \le C\phi(x)$, C是任意常数, 则当积分$\int_a^{+\infty} \phi(x)dx$收敛时积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$绝对收敛；如果$|f(x)| \ge \phi(x) \ge 0$, 而积分$\int_a^{+\infty} \phi(x)dx$发散，那么积分$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$发散.

例 8.1.13 判定$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{1+x^2}}dx$的敛散性.

解. 因为

$$\left|\frac{\sin x}{x\sqrt{1+x^2}}\right| \le \frac{1}{x^2},$$

而$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}$收敛，由比较判别法知$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{1+x^2}}dx$绝对收敛. ■

推论 8.1.14 *(比较判别法的极限形式)* 如果

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|f(x)|}{\phi(x)}=l,\quad 0\le l<+\infty,$$

且$\int_a^{+\infty}\phi(x)dx$ 收敛，那么积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 绝对收敛; 如果

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|f(x)|}{\phi(x)}=l,\quad 0<l\le+\infty,$$

且$\int_a^{+\infty}\phi(x)dx$ 发散，那么积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$发散.

定理 8.1.15 判定$\int_1^{+\infty}\dfrac{x^2+x+1}{(2x^3-x+3)\sqrt[3]{4x^2+x-1}}dx$的敛散性.

解. 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^5}\cdot\frac{x^2+x+1}{(2x^3-x+3)\sqrt[3]{4x^2+x-1}}=\frac{1}{2\sqrt[3]{4}},$$

而$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$收敛，由比较判别法的极限形式知原广义积分绝对收敛. ■

在定理8.1.12及其推论中取$\phi(x)=\dfrac{c}{x^p}(c>0)$, 就得到柯西(Cauchy)判别法：

定理 8.1.16 *(Cauchy判别法)* 如果$|f(x)|\le\dfrac{c}{x^p},p>1$, 那么$\int_a^{+\infty}f(x)dx$绝对收敛; 如果$|f(x)|\ge\dfrac{c}{x^p},p\le 1$, $f(x)$自某一值起保持定号，那么积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散.

推论 8.1.17 *(Cauchy判别法的极限形式)* 如果

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|f(x)|}{\frac{1}{x^p}}=\lim_{x\to+\infty}x^p|f(x)|=l(0\le l<+\infty,p>1),$$

那么积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$绝对收敛; 如果

$$\lim_{x\to+\infty}x^p|f(x)|=l(0<l\le+\infty,p\le 1),$$

则积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$发散.

例 8.1.18 试证明对于任何α, $\int_1^{+\infty}x^\alpha\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$收敛.

证明. 因为对任意常数α, 有

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot x^\alpha\,\mathrm{e}^{-x}=0,$$

由Cauchy判别法的极限形式(即$p=2$), 知$\int_1^{+\infty}x^\alpha\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$收敛. ■

例 8.1.19 讨论积分$\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x^\lambda\ln x}$的敛散性，其中$\lambda$是实数.

解. 当$\lambda>1$时，

$$\lim_{x\to+\infty}x^\lambda\frac{1}{x^\lambda\ln x}=0,$$

原广义积分绝对收敛;

当$\lambda=1$时，

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}=\ln\ln x|_2^{+\infty}=+\infty,$$

原广义积分发散;

当$\lambda<1$时，

$$\lim_{x\to+\infty}x\frac{1}{x^\lambda\ln x}=+\infty,$$

原广义积分发散. ■

8.1.4 阿贝尔(Abel)判别法与狄里克莱(Dirichlet)判别法

为了对一般函数的广义积分讨论敛散性，我们先给出下面的重要结果：

定理 8.1.20 *(第二中值定理)* 设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积，而$g(x)$ 在$[a,b]$上单调，那么在$[a,b]$上存在ξ, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx;$$

特别，如果$g(x)$ 单调上升且$g(a) \geq 0$, 那么有ξ, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_\xi^b f(x)dx;$$

如果$g(x)$ 单调下降且$g(b) \geq 0$，那么有ξ，使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx.$$

证明. 先在$g(x)$单调上升且$g(a) \geq 0$的的假定下证明，然后再推出一般情形的公式.

由假定$f(x)$在区间$[a,b]$上可积知存在常数$L > 0$使得$|f(x)| \leq L$, 且$f(t)$在$[x,b]$上可积. 记$F(x) = \int_x^b f(t)dt$ 则$F(x)$在$[a,b]$上连续，存在最小值m与最大值M.

由$g(x)$单调上升知$g(x)$在$[a,b]$上可积，从而$f(x)g(x)$在$[a,b]$上可积.

在$[a,b]$上取一列分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b,$$

记$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, ω_i是$g(x)$在$[x_{i-1},x_i]$上的幅度，即

$$\omega_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]}\{g(x)\} - \inf_{[x_{i-1},x_i]}\{g(x)\},$$

把所讨论的积分作如下改变

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx\\ &= \sum_{i=1}^n g(x_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)[g(x)-g(x_i)]dx\\ &= \sigma + \rho\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\rho| &= \left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)[g(x)-g(x_i)]dx\right|\\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)||g(x)-g(x_i)|dx\\ &\leq L\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega_i dx = L\sum_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i.\end{aligned}$$

由于$g(x)$可积，所以当$\lambda = \max\Delta x_i \to 0$时，$\sum\limits_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i \to 0$; 因此，$\lim\limits_{\lambda\to 0}\rho = 0$, 从而$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^n g(x_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$. 显然有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = [-F(x)]|_{x_{i-1}}^{x_i} = F(x_{i-1}) - F(x_i), F(x_n) = F(b) = 0,$$

从而

$$\begin{aligned}\sigma &= \sum_{i=1}^{n} g(x_i)[F(x_{i-1}) - F(x_i)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} g(x_i)F(x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} g(x_i)F(x_i) \\ &= g(x_1)F(x_0) + \sum_{i=2}^{n} g(x_i)F(x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)F(x_i) \\ &= g(x_1)F(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1}[g(x_{i+1}) - g(x_i)]F(x_i).\end{aligned}$$

因为$g(x_1) \geq g(x_0) = g(a) \geq 0, g(x_{i+1}) - g(x_i) \geq 0$, 所以

$$m\left(g(x_1) + \sum_{i=1}^{n-1}(g(x_{i+1}) - g(x_i))\right) \leq \sigma \leq M\left(g(x_1) + \sum_{i=1}^{n-1}(g(x_{i+1}) - g(x_i))\right),$$

$$mg(b) \leq \sigma \leq Mg(b).$$

因此可设$\sigma = \mu g(b)$, 其中μ在m, M之间. 因为$F(x)$连续，有$[a,b]$之间的ξ存在，使$\mu = F(\xi) = \int_\xi^b f(x)dx$，从而公式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

得到证明.

对$g(x)$单调下降且$g(b) \geq 0$情形的证明相仿.

在$g(x)$是一般的单调上升情形，作$\psi(x) = g(x) - g(a), \psi$为单调上升且$\psi(a) \geq 0$, 利用公式对$\psi$成立，即有$\xi$使下式成立：

$$\int_a^b f(x)[g(x) - g(a)]dx = [g(b) - g(a)]\int_\xi^b f(x)dx$$

这就是公式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

当$g(x)$是一般的单调下降情形，由

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx,$$

同样可得公式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

■

下面给出阿贝尔(Abel)判别法与狄里克莱(Dirichlet)判别法，有时统称为**A-D判别法**.

定理 8.1.21 *(阿贝尔(Abel)判别法)若$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛, $g(x)$在$[a,+\infty)$上单调且有界，则积分$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛.*

证明. 由条件可设$|g(x)| \leq L$, L为一正常数. 任意给定$\varepsilon > 0$，由$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，存在$A > 0$，当$A_2 > A_1 > A$时，总有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}.$$

由积分第二中值定理, 存在$\xi \in [A_1, A_2]$使得

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx = g(A_1)\int_{A_1}^{\xi} f(x)dx + g(A_2)\int_{\xi}^{A_2} f(x)dx.$$

所以

$$\begin{aligned}\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx\right| &\le |g(A_1)|\left|\int_{A_1}^{\xi} f(x)dx\right| + |g(A_2)|\left|\int_{\xi}^{A_2} f(x)dx\right| \\ &\le L\frac{\varepsilon}{2L} + L\frac{\varepsilon}{2L} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

由Cauchy收敛准则知积分$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛. ■

定理 8.1.22 *(狄里克莱(Dirichlet)判别法)* 若$F(x) = \int_a^x f(t)dt$在$[a, +\infty)$上有界, $g(x)$在$[a, +\infty)$上单调且$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, 则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

收敛.

证明. 由条件可设$|F(x)| \le M$, M为一正常数, 此时对任意$A_2 > A_1 \ge a$显然有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| \le 2M.$$

任意给定$\varepsilon > 0$，由$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$，存在$A > 0$，当$x > A$时，总有$|g(x)| < \frac{\varepsilon}{4M}$. 由积分第二中值定理, 存在$\xi \in [A_1, A_2]$使得

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx = g(A_1)\int_{A_1}^{\xi} f(x)dx + g(A_2)\int_{\xi}^{A_2} f(x)dx.$$

所以

$$\begin{aligned}\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx\right| &\le |g(A_1)|\left|\int_{A_1}^{\xi} f(x)dx\right| + |g(A_2)|\left|\int_{\xi}^{A_2} f(x)dx\right| \\ &\le \frac{\varepsilon}{4M}2M + \frac{\varepsilon}{4M}2M = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

由Cauchy收敛准则知积分$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛. ■

例 8.1.23 讨论$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$的敛散性.

解. $\int_1^A \sin t dt$ 显然在$[1, +\infty)$ 上有界, $\frac{1}{x}$ 单调且$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, 由Dirichlet判别法知

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$$

收敛.

但在$[1, +\infty)$上, 有

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \ge \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x},$$

仿照$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$的讨论可知$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}dx$ 收敛, 而$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}$发散, 所以$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$发散.

再由比较判别法，知$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$发散, 从而$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$条件收敛. ■

同例8.1.23可证$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda}dx$ 与$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\lambda}dx$, 当$0 < \lambda \le 1$时条件收敛，当$\lambda > 1$时绝对收敛性. 其讨论留作习题.

8.1.5 习题8.1

1. 讨论下列广义积分的敛散性.

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$; (2) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}dx$;

(3) $\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}dx$; (4) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x|\sin x|}dx$;

(5) $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}dx$; (6) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}dx$;

(7) $\int_2^{+\infty}\frac{\cos x}{\ln x}dx$; (8) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^3-3x+2}}dx$;

(9) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2(x-1)(x-2)}}dx$.

2. 设广义积分$\int_1^{+\infty}f^2(x)dx$收敛. 证明广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$绝对收敛.

3. 证明$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\lambda}dx$ 与$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\lambda}dx$ $(0<\lambda\le 1)$收敛.

4. 讨论下列广义积分的绝对收敛性与条件收敛性.

$$(1)\ \int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx;\qquad (2)\ \int_2^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}dx.$$

8.2 无界函数的广义积分

8.2.1 无界函数广义积分的概念

定义 8.2.1 设函数$f(x)$在$x=b$点附近无界（我们称b点为$f(x)$的奇点），但对于任意充分小的正数η, $f(x)$在$[a,b-\eta]$上可积，即$\phi(\eta)=\int_a^{b-\eta}f(x)dx$存在. 如果$\lim\limits_{\eta\to 0}\phi(\eta)$存在，那么称此极限值是无界函数$f(x)$从$a$到$b$的广义积分，记为$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\eta\to 0}\int_a^{b-\eta}f(x)dx$；并称无界函数$f(x)$在$[a,b]$上可积，或称广义积分$\int_a^b f(x)dx$收敛. 如果上述的极限不存在，就说积分$\int_a^b f(x)dx$发散.

如果$x=a$是$f(x)$的奇点，可以相仿地给出定义. 另外，如果$f(x)$在$[a,b]$内部有一个奇点c,我们就分别考察$\int_a^c f(x)dx$和$\int_c^b f(x)dx$，如果后两者都收敛，就称$\int_a^b f(x)dx$收敛，并且$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$. 否则称此积分发散.

例 8.2.2 讨论积分$\int_a^b\dfrac{dx}{(x-a)^p}dx$的收敛性.

解. 若$p\le 0$, 原积分为定积分；若$p>0$, 原积分为广义积分，$x=a$为奇点.

当$p=1$时，$\forall\eta>0$,

$$\int_{a+\eta}^b\frac{dx}{(x-a)^p}dx=\int_{a+\eta}^b\frac{dx}{x-a}dx=\ln(b-a)-\ln(\eta)\to+\infty.$$

原积分发散.

当$p\ne 1$时，$\forall\eta>0$,

$$\begin{aligned}\int_{a+\eta}^b\frac{dx}{(x-a)^p}dx&=\frac{1}{1-p}\left((b-a)^{1-p}-\eta^{1-p}\right)\\&\to\begin{cases}\frac{1}{1-p}(b-a)^{1-p}, & p<1\\ +\infty, & p>1.\end{cases}\end{aligned}$$

所以当$p<1$时$\int_a^b\dfrac{dx}{(x-a)^p}dx$ 收敛；当$p\ge 1$时$\int_a^b\dfrac{dx}{(x-a)^p}dx$发散. ■

例 8.2.3 计算$\int_0^1 \ln x dx$.

解. 当$\eta \to 0+$时，

$$\begin{aligned}\int_\eta^1 \ln x dx &= [x \ln x]|_\eta^1 - \int_\eta^1 x\frac{1}{x}dx\\ &= -\eta\ln\eta - (1-\eta) \to -1.\end{aligned}$$

所以$\int_0^1 \ln x dx = -1$. ■

例 8.2.4 讨论积分$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$的收敛性.

解. 当$\eta \to 0+$时，

$$\int_0^{1-\eta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]|_0^{1-\eta} = \arcsin(1-\eta) \to \frac{\pi}{2}$$

所以$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$. ■

注 8.2.5 定积分的一些性质包括分部积分法和换元法对无界函数的广义积分也成立，若$x=a$为$f(x)$的奇点，计算广义积分时完全同定积分，只需把$x=a$处的取值理解为$x\to a+$时的极限即可.

8.2.2 无界函数广义积分敛散性的判别法

和无穷限广义积分相仿，无界函数广义积分的敛散性有以下相应判别法, 证明方法同无穷限广义积分.

定理 8.2.6 ***(Cauchy收敛原理)*** 若$f(x)$在$x=a$有奇点，$\int_a^b f(x)dx$收敛的充分必要条件是：对任意给定$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 当$0<\eta,\eta'<\delta$时总有$\left|\int_{a+\eta}^{a+\eta'} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

同样可以引进绝对收敛和条件收敛的概念，并有：绝对收敛必收敛，但反之不然.

定理 8.2.7 ***(柯西判别法)*** 设$x=a$是$f(x)$的奇点，如果

$$|f(x)| \le \frac{c}{(x-a)^p}(c>0), p<1,$$

那么$\int_a^{+\infty} f(x)dx$绝对收敛; 如果

$$|f(x)| \ge \frac{c}{(x-a)^p}(c>0), p\ge 1,$$

那么积分$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$发散.

推论 8.2.8 ***(柯西判别法的极限形式)*** 设$\lim\limits_{x\to a}(x-a)^p|f(x)| = k$. 如果$0\le k<+\infty, p<1$, 那么积分$\int_a^b f(x)dx$绝对收敛; 如果$0<k\le+\infty, p\ge 1)$,$f(x)$有定号, 那么积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散.

定理 8.2.9 ***(Abel判别法)***设$x=a$是$f(x)$的奇点, $\int_a^b f(x)dx$收敛, $g(x)$在$(a,b]$上单调且有界，则积分$\int_a^b f(x)g(x)dx$收敛.

定理 8.2.10 ***(Dirichlet判别法)***设$x=b$是$f(x)$的奇点, 若$F(\eta)=\int_a^{b-\eta} f(t)dt$在$[a,b)$上有界, $g(x)$在$[a,b)$上单调且$\lim\limits_{x\to b-} g(x)=0$, 则积分$\int_a^b f(x)g(x)dx$收敛.

例 8.2.11 讨论积分$\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$的收敛性.

解. 因为

$$\lim_{x\to 0+} x^{\frac{3}{4}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+} x^{\frac{1}{4}} \ln x = 0,$$

所以$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$收敛. ∎

两种广义积分之间有着密切的联系: 设$\int_a^b f(x)dx$中的$f(x)$有奇点a，作变换$y = \dfrac{1}{x-a}$，就有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{f(a+\frac{1}{y})}{y^2} dy$$

而后者无穷限广义积分.

例 8.2.12 讨论积分$\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^r} dx$的收敛性*(含绝对收敛与条件收敛)*.

解. 令$t = \frac{1}{x}$, 则

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^r} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-r}} dt.$$

由Dirichlet判别法知当$2-r>0$, 即$r<2$时广义积分收敛; 当$2-r\le 0$, 即$r\ge 2$时广义积分发散.

由于$\left|\frac{\sin t}{t^{2-r}}\right| \le \frac{1}{t^{2-r}}$, 所以由比较判别法知当$2-r>1$, 即$r<1$时广义积分绝对收敛. 而当$2-r\le 1$，即$r\ge 1$时广义积分$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t^{2-r}}\right|dt$发散，但当$r<2$时广义积分收敛，从而当$1\le r<2$时广义积分条件收敛. ∎

定义 8.2.13 *(Cauchy积分主值)* 设$f(x)$ 在$[a,b]$ 内无界，c 是唯一奇点，如果

$$\lim_{\eta\to 0}\left[\int_a^{c-\eta} f(x)dx + \int_{c+\eta}^b f(x)dx\right]$$

存在（注意，$c-\eta$与$c+\eta$ 中的η是同一个正数），我们就称此极限是广义积分$\int_a^b f(x)dx$ 的柯西主值. 记为

$$P.V.\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to 0}\left[\int_a^{c-\eta} f(x)dx + \int_{c+\eta}^b f(x)dx\right].$$

同样的，对于无穷限的广义积分，柯西主值为

$$P.V.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx.$$

例 8.2.14 设$a<c<b$, 求$\int_a^b \dfrac{dx}{x-c}$的主值.

解. 显然$x=c$为奇点，该广义积分发散, 但

$$\begin{aligned} P.V.\int_a^b \frac{dx}{x-c} &= \lim_{\eta\to 0}\left[\int_a^{c-\eta}\frac{dx}{x-c} + \int_{c+\eta}^b \frac{dx}{x-c}\right] \\ &= \lim_{\eta\to 0}\left(\ln(c-x)|_a^{c-\eta} + \ln(x-c)|_{c+\eta}^b\right) \\ &= \ln\frac{b-c}{c-a}. \end{aligned}$$

∎

8.2.3 习题8.2

1. 讨论下列广义积分的敛散性.

(1) $\int_0^2 \frac{1}{(\ln x)^3}dx$; (2) $\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}dx$;

(3) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$; (4) $\int_0^1 \ln x dx$;

(5) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$; (6) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$;

(7) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}}dx$; (8) $\int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x)^2}dx$.

2. 计算广义积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$; (2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$;

(3) $\int_0^a \frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$; (4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}dx$;

(5) $\int \frac{\pi}{2} 0 \frac{1}{x+\cos^2 x}dx$.

8.3 第八章典型例题选讲

8.3.1 例题选讲

例 8.3.1 讨论广义积分$\int_1^{+\infty}(\frac{x}{x^2+m}-\frac{m}{x+1})dx \ (m\neq 0)$的敛散性.

解. 注意这里$\int_1^{+\infty}\frac{x}{x^2+m}dx$和$\int_1^{+\infty}\frac{m}{x+1}dx$都是发散的无穷限广义积分,由线性性质不能得出两者之差为收敛或发散的肯定结论. 为此,需要先把被积函数合成一个分式:

$$f(x)=\frac{x}{x^2+m}-\frac{m}{x+1}=\frac{(1-m)x^2+x-m^2}{(x^2+m)(x+1)}.$$

对于充分大的x, $f(x)$保持与$(1-m)$相同的正、负号,因此$\int_1^{+\infty}f(x)dx$收敛与绝对收敛是一回事.

当$m=1$时, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2|f(x)|=1$,故$\int_1^{+\infty}f(x)dx$为收敛;

当$m\neq 1$时, $\lim\limits_{x\to+\infty}x|f(x)|=|1-m|\neq 0$, 故$\int_1^{+\infty}|f(x)|dx$与$\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 同为发散. ■

例 8.3.2 讨论广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^m}dx$的敛散性.

解. 这里$g(x)=\frac{ln(1+x)}{x^m}>0, x\in(0,+\infty)$, 且当$m>1$时, $x=0$为奇点, 故需要把该广义积分分成两部分来讨论:

$$I=\int_0^1 g(x)dx+\int_1^{+\infty}g(x)dx=I_1+I_2.$$

对于I_1, 当$m\leq 1$时为定积分; 当$m>1$时,

$$g(x)=\frac{1}{x^{m-1}}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\sim\frac{1}{x^{m-1}} \ \ (x\to 0^+),$$

故当$m<2$ 时收敛, $m\geq 2$时发散.

对于I_2, 当$m>1$时, 取$\delta>0$使得$m=1+\delta>1$. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}x^{1+\frac{\delta}{2}}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{\delta/2}}=0,$$

因此I_2收敛;而当$m\leq 1$时,则因

$$\lim_{x\to+\infty}xg(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{m-1}}=+\infty,$$

所以,I_2发散.

综合对I_2与I_2的讨论, 当且仅当$1<m<2$时两者都收敛, 即此时原广义积分收敛. ■

例 8.3.3 讨论广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^m}dx$的敛散性.

解. 这里$h(x)=\frac{\sin^2 x}{x^m}>0, x\in(0,+\infty)$,且$m>2$时$x=0$为奇点. 故设

$$J=\int_0^1 h(x)dx+\int_0^{+\infty} h(x)dx=J_1+J_2.$$

对于J_1, 当$m\leq 2$时为定积分; 当$2<m<3$时, 由于$m-2<1$, 且

$$\lim_{x\to 0^+} x^{m-2}h(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x^2}=1,$$

故J_1收敛; 又当$m\geq 3$时, 由于

$$\lim_{x\to 0^+} xh(x)=\begin{cases} 1, & m=3,\\ +\infty, & m>3.\end{cases}$$

故J_1发散; 总之, J_1 仅当$m<3$ 时收敛.

对于J_2, 当$m>1$时, 由于

$$\frac{\sin^2 x}{x^m}<\frac{1}{x^m},$$

因此J_2收敛; 而当$0<m\leq 1$时, 由于

$$\int_1^{+\infty} h(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{x^m}dx,$$

以及$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^m}dx$发散, $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^m}dx$收敛, 可知此时$J_2$发散; 又当$m\leq 0$时, 由于

$$\frac{\sin^2 x}{x^m}\geq \sin^2 x, \int_1^{+\infty}\sin^2 x dx\text{发散},$$

从而J_2亦发散. 总之, J_2仅当$m>1$时收敛.

综合对J_1与J_2的讨论, 当且仅当$1<m<3$时J为收敛. ■

例 8.3.4 讨论

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^\lambda}dx\quad(\lambda>0)$$

的绝对收敛性与条件收敛性.

解. 首先由$\int_1^A \sin x dx$ 显然在$[1,+\infty)$ 上有界, $\frac{1}{x^\lambda}$ $(\lambda>0)$ 单调且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\lambda}=0,$$

由Dirichlet判别法知$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\lambda}dx$ 收敛.

又$\arctan x$ 在$[1,+\infty)$ 上单调且有界, 由Abel判别法知

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^\lambda}dx$$

收敛.

但在$[1,+\infty)$上, $\left|\frac{\sin x\arctan x}{x^\lambda}\right|\leq\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^\lambda}$, 由比较判别法知当$\lambda>1$时

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x\lambda}dx$$

绝对收敛; 而当$0<\lambda\le 1$时, 若$x\in\left[\sqrt{3},+\infty\right)$时，

$$\arctan x\ge\frac{\pi}{3}>1.$$

由此

$$\left|\frac{\sin x\arctan x}{x^\lambda}\right|\ge\left|\frac{\sin x}{x^\lambda}\right|\ge\frac{\sin^2 x}{x^\lambda}=\frac{1}{2x^\lambda}-\frac{\cos 2x}{2x^\lambda},$$

仿照前面的讨论可知$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^\lambda}dx$ 收敛, 而$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^\lambda}$发散, 所以

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^\lambda}dx$$

发散. 再由比较判别法，知$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x\arctan x}{x}\right|dx$发散, 从而

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^\lambda}dx$$

条件收敛. ■

例 8.3.5 讨论积分$\int_0^{\frac{1}{e}}\dfrac{1}{x^p\ln x}dx$的敛散性.

解. 当$p\le 0$时该积分为定积分，收敛. 当$p>0$时, 该积分为无界恒负函数的广义积分, $x=0$为其唯一奇点.

若$0<p<1$, 取$q=\frac{1+p}{2}$, $0<p<q<1$,

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^q}{x^p|\ln x|}=0,$$

由Cauchy判别法的极限形式，知$\int_0^{\frac{1}{e}}\dfrac{1}{x^p\ln x}dx$收敛.

若$p>1$, 取$q=\frac{1+p}{2}$, $p>q>1$,

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^q}{x^p|\ln x|}=+\infty,$$

由Cauchy判别法的极限形式，知$\int_0^{\frac{1}{e}}\dfrac{1}{x^p\ln x}dx$发散.

若$p=1$, $\int_0^{\frac{1}{e}}\dfrac{1}{x\ln x}dx=\lim\limits_{\eta\to 0+}\ln|\ln x|\Big|_0^{\frac{1}{e}}=-\infty$发散.

故$\int_0^{\frac{1}{e}}\dfrac{1}{x^p\ln x}dx$当$p<1$时收敛, $p\ge 1$时发散. ■

例 8.3.6 讨论积分$\int_0^1\dfrac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}dx$ $(p<2)$的敛散性.

解. $\int_0^1\dfrac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}dx=\int_0^1 x^{2-p}\dfrac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx.$

令$f(x)=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$, $g(x)=x^{2-p}$.

$\forall\eta\in(0,1)$, 有

$$\int_\eta^1 f(x)dx=\int_\eta^1\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx=-\int_\eta^1\sin\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right)=\cos\frac{1}{x}\Big|_\eta^1=\cos 1-\cos\frac{1}{\eta},$$

所以$\left|\int_\eta^1 f(x)dx\right|\le 2$; 而$g(x)=x^{2-p}$显然单调，且当$p<2$时,

$$\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0+}x^{2-p}=0.$$

由无界函数的Dirichlet判别法, $\int_0^1 \dfrac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}dx$收敛.

当$p<1$时, $\left|\dfrac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\right| \le \frac{1}{x^p}$, $\int_0^1 \frac{1}{x^p}$收敛，由比较判别法知$\int_0^1 \dfrac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}dx$绝对收敛.

当$1\le p<2$时,

$$\left|\frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\right| \ge \frac{1}{x^p}\sin^2\frac{1}{x} = \frac{1}{2x^p} - \frac{1}{2x^p}\cos\frac{2}{x},$$

同前面讨论,由无界函数的Dirichlet判别法知$\int_0^1 \frac{1}{2x^p}\cos\frac{2}{x}dx$收敛，当此时$\int_0^1 \frac{1}{2x^p}$发散，由比较判别法$\int_0^1 \dfrac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}dx$发散，从而$\int_0^1 \dfrac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}dx$条件收敛. ■

注 8.3.7 若对$\int_0^1 \dfrac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}dx$作变量$x=\frac{1}{t}$代换, 可将其化为

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-p}}dt,$$

利用无穷区间广义积分敛散性判别法同样可得到结论. 见例*8.2.12.*

对两种广义积分并存（或多个奇点）的情形，应先将积分区间适当拆分成若干子区间.

例 8.3.8 讨论$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p(b-x)^q}dx\ \ (p>0,q>0)$ 的敛散性.

解. 若$p\le 0, q\le 0$, 该积分为定积分, 积分存在.

其它情形, 取$c\in(a,b)$.

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p(b-x)^q}dx &= \int_a^c \frac{1}{(x-a)^p(b-x)^q}dx + \int_c^b \frac{1}{(x-a)^p(b-x)^q}dx \\ &\equiv I_1 + I_2.\end{aligned}$$

因为

$$\lim_{x\to a+}(x-a)^p\cdot\frac{1}{(x-a)^p(b-x)^q} = \frac{1}{(b-a)^q},$$

所以当$p<1$时I_1收敛，$p\ge 1$时I_1发散;

又

$$\lim_{x\to b-}(b-x)^q\cdot\frac{1}{(x-a)^p(b-x)^q} = \frac{1}{(b-a)^p},$$

所以当$q<1$时I_2收敛，$q\ge 1$时I_2发散.

由此当$p<1$且$q<1$时原积分收敛，其它均发散. ■

例 8.3.9 讨论

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}dx$$

的敛散性$(a_1<a_2<\cdots<a_n)$.

解. 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$互不相同，若有相同者可去掉，形式仍相同. 不妨设$a_1<a_2<\cdots<a_n$, 则

$$\lim_{x\to a_i}|x-a_i|^{p_i}\frac{1}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}} = C_i$$

其中$0 < C_i < +\infty$, 故当$p_i < 1 (i = 1, 2 \cdots, n)$时, 无界函数广义积分收敛. 而

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}dx \\
&= \left(\int_{-\infty}^{a} + \int_{a}^{a_1} + \int_{a_1}^{b_1} + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} + \int_{b_{n-1}}^{a_n} + \int_{a_n}^{b_n} + \int_{b_n}^{+\infty}\right) \\
&\frac{dx}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}.
\end{aligned}$$

而对$\int_{-\infty}^{a}$及$\int_{b_n}^{+\infty}$:

由

$$\lim_{x\to\pm\infty} |x|^{p_1+\cdots+p_n} \frac{1}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}} = 1$$

故当$\sum\limits_{i=1}^{n} p_i > 1$时,

$$\int_{-\infty}^{a} \frac{1}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}dx$$

及

$$\int_{b_n}^{+\infty} \frac{1}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}dx$$

收敛.

综上所述, 当$p_i < 1 \ \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 且$\sum\limits_{i=1}^{n} p_i > 1$时, 原积分收敛. ■

例 8.3.10 设$f(x)$ 是$[a, +\infty)$ 上的一致连续函数，并且广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; 如果仅广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，以及$f(x)$ 在$[a, +\infty)$ 连续, $f(x) \geq 0$, 是否仍旧成立$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

证法一. 由$f(x)$在$[a, +\infty)$上一致连续, $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ (不妨设$\delta \leq \varepsilon$), 当$x_1, x_2 \in [a, +\infty)$, 且$|x_1 - x_2| \leq \delta$时, $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

又因$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛, 故对上述δ, $\exists G > a$, 当$x', x'' > G$时, 有$|\int_{x'}^{x''} f(x)dx| < \frac{\delta^2}{2}$.

现对任何$x > G$, 取$x', x'' > G$, 使$x' < x < x''$, 且$x'' - x' = \delta$. 此时由

$$\begin{aligned}
|f(x)\delta| \quad &= |\int_{x_1}^{x_2} f(x)dt| = \left|\int_{x'}^{x''} f(x)dt - \int_{x'}^{x''} f(t)dt + \int_{x'}^{x''} f(t)dt\right| \\
&\leq \int_{x'}^{x''} |f(x) - f(t)|dt + |\int_{x'}^{x''} f(t)dt| \\
&< \tfrac{\varepsilon}{2} \cdot \delta + \tfrac{\delta^2}{2},
\end{aligned}$$

使得

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\delta}{2} \leq \varepsilon, \ \ x > G.$$

这就证得$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. ■

证法二. (用反证法) 若$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$, 则由极限的定义有：对$\exists\varepsilon_0 > 0, \forall X, \exists x_0 > X$使$|f(x_0)| \geq \varepsilon_0$成立, 不妨设$f(x_0) > 0$.

又由于$f(x)$在$[a, +\infty)$一致连续，对$\frac{\varepsilon_0}{2}, \exists\delta \in (0, \frac{1}{2})$, 对$\forall x_1, x_2 \in [a, +\infty)$只要$|x_1 - x_2| < \delta$时，就有$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$.

对$\forall M > 0$, 取$X = M + 1, \exists x_0 > X, f(x_0) \geq \varepsilon_0$. 于是$\forall x \in (x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}), |x - x_0| < \delta, f(x) > f(x_0) - \frac{\varepsilon_0}{2} > \frac{\varepsilon_0}{2}$.

取$A_1 = x_0 - \frac{\varepsilon_0}{2}, A_2 = x_0 + \frac{\varepsilon_0}{2}$, 则$A_2 > A_1 > M$且

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx > \frac{\varepsilon_0}{2}(A_2 - A_1) = \frac{\varepsilon_0}{2}\delta,$$

由Cauchy收敛原理$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 不收敛，这与题设矛盾．故有$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. ■

若仅$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛及$f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 连续, $f(x)\geq 0$, 不一定成立$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

例如:

$$f(x)=\begin{cases} 1-n^2(x-n), & n-\frac{1}{n^2}\leq x <\in n+\frac{1}{n^2}, \\ 0, & n+\frac{1}{n^2}\leq x<n+1-\frac{1}{(n+1)^2}. \end{cases}$$

这里$f(x)\geq 0$ 且$\int_a^{+\infty} f(x)dx=0$, 但$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$.

例 8.3.11 证明*:* 若$f(x)$是$[a,+\infty)$上的单调函数,且$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛,则

$$f(x)=o(\frac{1}{x}),\quad x\to+\infty.$$

证明. 显然有$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. 现在要进一步证明

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0.$$

(说明:下面的证明并不以$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$作为准备知识.) 若$f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上单调递增, 由$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛知

$$\forall\varepsilon>0,\exists G>0,\forall A_1,A_2>G,\left|\int_{A_1}^{A_2} f(t)dt\right|<\varepsilon,$$

即

$$-\varepsilon<\int_{A_1}^{A_2} f(t)dt<\varepsilon.$$

若$x>2G$, 则$\frac{x}{2}>G$, 从而

$$xf(x)\leq\int_x^{2x} f(t)dt<\varepsilon$$

且

$$-\varepsilon<\int_{x/2}^{x} f(t)d\leq\frac{x}{2}f(x),$$

所以

$$-2\varepsilon\leq xf(x)\leq 2\varepsilon\quad \lim_{x\to+\infty} xf(x)=0.$$

若$f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上单调递增减, 则$-f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上单调递增, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛知$\int_a^{+\infty} -f(x)dx$收敛，从而$\lim\limits_{x\to+\infty} -xf(x)dx=0$.

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0.$$

这就证得结论成立. ■

例 8.3.12 设$f(x)$为$[a,+\infty)$上的连续可微函数,且当$x\to+\infty$时$f(x)$递减趋于零. 试证*:*$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛的充要条件为$\int_a^{+\infty} xf'(x)dx$收敛*.*

证明. (必要性)上例知$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$. 于是,$\forall\varepsilon>0,\exists G>a$, 当$u_1,u_2>G$时,

$$|u_1f(u_1)|<\frac{\varepsilon}{3},\quad |u_2f(u_2)|<\frac{\varepsilon}{3},\quad \left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

$$\begin{aligned} |\textstyle\int_{u_1}^{u_2} xf'(x)dx| &= |[xf(x)]_{u_1}^{u_2}-\textstyle\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx| \\ &\leq |u_2f(u_2)|+|u_1f(u_1)|+|\textstyle\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx| \\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon. \end{aligned}$$

由柯西准则可得$\int_a^{+\infty} xf'(x)dx$收敛.

[充分性] 由于

$$\int_a^A xf'(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^A xdf(x) = Af(A) - af(a) - \int_a^A f(x)dx.$$

且$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^A xf'(x)dx$ 存在, 因此问题归为证明极限$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$ 存在. 又因$x\to+\infty$时, $f(x)$ 递减趋于零, 故首先可知$f'(x)\le 0,\quad x\in[a,+\infty)$. $\forall x\in[a,+\infty)$, 当$u\ge x$时，$f(x)\ge f(u)$, 令$u\to+\infty$, 则$f(x)\ge 0$.

再由$\int_a^{+\infty} xf'(x)dx$ 收敛,又知:$\forall\varepsilon>0,\exists G>a$,当$u>G$时,有

$$\begin{aligned}0\le uf(u) = u|0-f(u)| &= \left|u\int_u^{+\infty} f'(x)dx\right| \\ &\le \left|\int_u^{+\infty} xf'(x)dx\right| < \varepsilon.\end{aligned}$$

此即为$\lim\limits_{u\to+\infty} uf(u)=0$, 问题得证. ■

8.4 第八章复习题

1. 判定下列无穷限广义积分的敛散性，如果收敛，计算广义积分值：

(1) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-5x}\sin 2xdx$; (2) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}\cos 3xdx$;
(3) $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}dx$; (4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}dx$;
(5) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$; (6) $\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{ax^2}\,dx\quad(a\in\mathbb{R})$;
(7) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}dx$; (8) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$;
(9) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+9}{x^2+16}dx$; (10) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}dx$;
(11) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}dx$; (12) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$.

2. 判定下列无界函数的广义积分的敛散性，如果收敛，计算广义积分值：

(1) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; (2) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$;
(3) $\int_0^1 \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx$; (4) $\int_0^1 \frac{1}{\sin^2(1-x)}dx$;
(5) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx$; (6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos xdx$;
(7) $\int_0^{\pi} x\ln\sin xdx$.

3. 求下列广义积分的$Cauchy$主值:

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}dx$; (2) $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x\ln x}dx$.

4. 利用递推公式计算广义积分$I_n=\int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$.

5. 当k为何值时，广义积分$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$收敛? 当$k$为何值时，该广义积分发散?又当$k$为何值时，该广义积分取得最小值.

6. 证明: 当$a>0$时, 只要下式两边的广义积分有意义, 就有

$$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x}{x}dx = \ln a\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{1}{x}dx.$$

第 九 章　函数项级数与幂级数

9.1　一致收敛

9.1.1　函数项级数的定义

定义 9.1.1 设$u_n(x)\quad (n=1,2,3\ldots)$ 是定义在实数集X上的函数，称$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$ 是X上的一个函数项级数，并称$S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$是这一级数的前$n$项部分和.

注 9.1.2 给定一个函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$, 可以得到其部分和序列$\{S_n(x)\}$. 相应的, 对于一个函数列$f_n(x)$, 若取$u_1(x)=f_1(x),u_n(x)=f_n(x)-f_{n-1}(x)\quad(n=2,3,\cdots)$ 则得到一个函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$, 其部分和序列$\{S_n(x)\}$ 与函数列$\{f_n(x)\}$ 相同. 这样, 函数项级数的敛散性问题就等同于其对应的函数列的敛散性问题,我们只须研究其一.

定义 9.1.3 若$x_0\in X$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x_0)$ 收敛，则称$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$在$x_0$收敛；$X$ 中使函数项级数收敛的点的集合, 称为函数项级数的收敛域; 若对任意的$x\in X$,$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在点x收敛，即函数项级数的收敛域为X, 则称$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$在$X$上收敛. 此时对任意的$x\in X$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$有和记为$S(x)$, 即$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)=S(x)$, $S(x)$称为$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$的和函数.

注 9.1.4 显然这里函数项级数的敛散性是由数项级数的敛散性得到的, 所以人们往往把这种收敛称为函数级数逐点收敛.

9.1.2　问题的提出

和函数是否具有有限和的那些性质？也就是:

（1）如果$u_n(x)\quad(n=1,2,3\ldots)$ 都在X上连续，它们的和函数$S(x)$是否也在X上连续？

（2）如果$u_n(x)\quad(n=1,2,3\ldots)$ 都在X上可导，$S(x)$是否也在X上可导？等式$S'^{+\infty}_{n=1}u'_n(x)$是否成立？或者说，级数是否可以“逐项求导”？

（3）如果$u_n(x)\quad(n=1,2,3\ldots)$ 在X的一个区间$[a,b]$可积，$S(x)$是否在$[a,b]$上可积？如果在$[a,b]$上可积，等式$\int_a^b S(x)dx=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_a^b u_n(x)dx$是否成立？或者说，积分号与求和号能否交换？

对于函数列也有上述三问题.

上面三条，对于有限个函数的和都是正确的，但对无穷级数的和，未必成立.

例 9.1.5 设$u_1(x)=x$, $u_n(x)=x^n-x^{n-1}$, $n=2,3,\cdots$. 显然$u_n(x)$在$[0,1]$上连续,可导, 并且级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$在$[0,1]$ 上收敛, 和函数记为$S(x)$, 但$S(x)$在$x=1$不连续，不可导.

证明. 事实上, n项部分和$S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)=x^n$, 所以和函数

$$S(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

但$S(x)$在$x=1$不连续，不可导. ■

例 9.1.6 在$[0,1]$ 上考虑函数序列$S_n(x)=2n^2x\,\mathrm{e}^{-n^2x^2}\ \ (n=1,2,\ldots)$.

解. 显然$S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=0$, 因而$0=\int_0^1 S(x)dx\neq\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)dx=1$. ■

从上述例子可以看出, 即使级数中的每一项都是连续的, 但是其收敛的和函数也不一定是连续的. 同样的对于可微性和可积性也有类似的问题. 那么如何才能使得这些重要的性质得以保持, 我们在下一节中将要研究这个问题: 上述三问题要成立，需补充条件"一致收敛".

9.1.3 一致收敛的定义

函数列$\{S_n(x)\}$ 或函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在X 上收敛于$S(x)$，也就是对任意的$x_0\in X$ 及$\varepsilon>0$ 存在正整数$N(\varepsilon)$，当$n>N(\varepsilon)$ 时有$|S_n(x_0)-S(x_0)|<\varepsilon$ 或$|r_n(x)|=\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}u_k(x_0)\right|<\varepsilon$. $N(\varepsilon)$ 与ε,x_0 有关，一致收敛要求$N(\varepsilon)$ 仅依赖于ε 而不依赖x_0.

定义 9.1.7 设在X 上有函数列$\{S_n(x)\}$，若对任意$\varepsilon>0$，存在正整数$N(\varepsilon)$，当$n>N(\varepsilon)$ 时，对一切$x\in X$ 有$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$, 则称$\{S_n(x)\}$ 在X 上一致收敛于$S(x)$. 对于函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$，若其部分和序列$\{S_n(x)\}$ 在X 上一致收敛于$S(x)$，则称$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在X 上一致收敛于$S(x)$.

显然一致收敛还可以用下面的方式来定义.

定义 9.1.8 $\{S_n(x)\}$ 在X 上一致收敛于$S(x)$的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in X}|S_n(x)-S(x)|=0$.

以后记$\|S_n-S\|=\sup\limits_{x\in X}|S_n(x)-S(x)|$.

例 9.1.9 证明$S_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$在$X=(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

证明. 显然, 对任意的$x\in(-\infty,+\infty)$, $S_n(x)$ 都有极限函数$S(x)$, 并且

$$S(x)=\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=0.$$

由于

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{|x|}{1+n^2x^2}=\frac{1}{2n}\frac{2n|x|}{1+n^2x^2}\leq\frac{1}{2n}<\frac{1}{n},$$

所以

$$\|S_n-S\|=\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|\leq\frac{1}{n}\to 0,\ \ n\to+\infty.$$

这样按照一致收敛的定义9.1.8, 可知函数列$\{S_n(x)\}$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛. ■

例 9.1.10 讨论$S_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$在$X=[0,1],(1,+\infty)$的一致收敛性.

解. 若$x=0, S_n(0)=0, S(0)=0$; 若$x>0$, $S(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)=0$.

所以对于任意的$x\in[0,+\infty), S(x)=0, S_n(x)-S(x)=S_n(x)$.

而$S_n'(x)=n\frac{(1-nx)(1+nx)}{(1+n^2x^2)^2}$, $x\in[0,\frac{1}{n})$时$S_n'(x)>0$, $S_n(x)$关于x递增; $x\in(\frac{1}{n},+\infty)$时$S_n'(x)<0$, $S_n(x)$关于x递减.

故当$X=[0,1]$时,

$$\|S_n-S\|=\sup_{x\in[0,1]}|S_n(x)|\geq|S_n(\frac{1}{n})|=\frac{1}{2}\neq 0.$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$ 上不一致收敛.

当$X=(1,+\infty)$时,

$$\|S_n-S\|=\sup_{x\in(1,+\infty)}|S_n(x)|\le|S_n(1)|=\frac{n}{1+n^2}\to 0,\ \ n\to+\infty.$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(1,+\infty)$ 上一致收敛. ■

利用上面的讨论, 不难发现在例9.1.5中的函数列$S_n(x)$ 在$[0,1]$ 上不是一致收敛的. 因为

$$|S_n(x)-S(x)|=\begin{cases}x^n, & 0\le x<1,\\ 0, & x=1.\end{cases}$$

所以 $\sup\limits_{x\in[0,1]}|S_n(x)-S(x)|=1$, 也就是$\|S_n-S\|=1$, 故函数列$S_n(x)$ 在$[0,1]$ 上不一致收敛. 并且不难发现, 函数列$S_n(x)$ 在开区间$(0,1)$ 上也是不一致收敛的. 但是在任何一个区间$[0,c]$ 上, 其中$0<c<1$,

$$\sup_{0\le x\le c}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{0\le x\le c}x^n=c^n\to 0,\ \ n\to+\infty.$$

故函数列$S_n(x)$ 是一致收敛的.

这说明函数列的一致收敛性是与其分布区间有关的. 如果函数列在一个区间上一致收敛, 那么它必然在含在这一区间内的任意闭子区间内一致收敛. 从上面的例子中也不难看出, 在区间(a,b) 内的任意闭子区间上一致收敛, 但是在区间(a,b) 上也不一定一致收敛. 当函数列$S_n(x)$ 在区间(a,b) 内的任一闭子区间上收敛时, 称$S_n(x)$ 在区间(a,b) 内闭一致收敛.

例 9.1.11 $S_n(x)=2n^2x\,\mathrm{e}^{-n^2x^2}$ $(n=1,2,\ldots)$在$X=(0,1)$非一致收敛，但在$(0,1)$内闭一致收敛于零.

证明. 若$0<x<1$, $S(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)=0$, 所以对于任意的$x\in(0,1)$, $S_n(x)-S(x)=S_n(x)$.

$$\|S_n-S\|=\sup_{x\in(0,1]}|S_n(x)|\ge|S_n(\frac{1}{n})|=2n\,\mathrm{e}^{-1}>0.$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,1)$ 上不一致收敛.

对任意的闭子区间$[a,b]\subset(0,1)$,

$$\|S_n-S\|=\sup_{x\in[a,b]}|S_n(x)|\le 2n^2b\,\mathrm{e}^{-n^2a^2}\to 0\ \ (n\to\infty),$$

所以$S_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于零, 进而在$(0,1)$内闭一致收敛于零. ■

9.1.4 习题9.1

1. 讨论下列函数序列在指定区间的一致收敛性.

   (1) $S_n(x)=\mathrm{e}^{-nx}$,
   $(i)x\in(0,1)$,
   $(ii)x\in(1,+\infty)$;

   (2) $S_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

   (3) $S_n(x)=\sin\frac{x}{n}$,
   $(i)x\in(-\infty,+\infty)$,
   $(ii)x\in[-A,A]$;

   (4) $S_n(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$,
   $(i)x\in(0,1)$,
   $(ii)x\in(1,+\infty)$;

(5) $S_n(x) = nx(1-x)^n,\ x \in [0,1]$;

(6) $S_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$,

$(i) x \in (0,1)$,

$(ii) x \in [0, 1-\delta], 0 < \delta < 1$,

$(iii) x \in (1, +\infty)$;

(7) $S_n(x) = \begin{cases} -(n+1)x+1, & 0 \le x \le \frac{1}{n+1}, \\ 0, & \frac{1}{n+1} < x \le 1. \end{cases}$

2. 证明:

$$S_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1 - \frac{1}{n}; \\ 2(1+nx-n), & 1-\frac{1}{n} \le x \le 1 - \frac{1}{2n}; \\ -2n(x-1), & 1-\frac{1}{2n} \le x \le 1 \end{cases}$$

在$[0,1)$上内闭一致收敛. 又问在$[0,1)$上一致收敛吗?

3. 已给$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-(n-1)x}$, 证明

(1) 收敛域为$[0,+\infty)$;

(2) 级数在$[0,+\infty)$上不一致收敛;

(3) 级数在$(0,+\infty)$上内闭一致收敛.

9.2 一致收敛级数的判别法

9.2.1 一致收敛级数的判别法

类似于数项级数的收敛性判别, 下面给出函数项级数收敛的一些判别法.

定理 9.2.1 ***(Cauchy收敛原理)*** 函数列$\{S_n(x)\}$在X上一致收敛的充要条件为：对任意的$\varepsilon > 0$，存在正整数$N(\varepsilon)$，当$n > N(\varepsilon)$时，对一切正整数p及$x \in X$ 有

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

对于函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$在$X$上一致收敛的充要条件是：对任意的$\varepsilon > 0$，存在正整数$N(\varepsilon)$，当$n > N(\varepsilon)$时，对一切正整数$p$及$x \in X$有

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

取$p=1$有:

推论 9.2.2 若$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$在$X$上一致收敛，则$\{u_n(x)\}$在$X$ 一致收敛于零.（可用于讨论非一致收敛性）

例 9.2.3 讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\,\mathrm{e}^{-nx}$在$(0,+\infty)$上的一致收敛性.

解. 设$u_n(x) = n\,\mathrm{e}^{-nx}$, 因为

$$\sup_{x\in(0,+\infty)} |u_n(x)| \ge |u_n(\frac{1}{n})| = ne^{-1} \to \infty,\ \ n \to \infty,$$

所以$u_n(x)$在$(0,+\infty)$ 上不一致收敛于零, 从而$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\,\mathrm{e}^{-nx}$在$(0,+\infty)$上不一致收敛. ■

定理 9.2.4 ***(Weierstrass判别法,比较判别法)*** 若正项函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$在$X$上一致收敛，且在$X$上有$|u_n(x)| \le v_n(x)$，则$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在X 上（绝对）一致收敛. 特别地，设在X上有$|u_n(x)| \le a_n$，其中$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$为收敛的正项级数，则$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在X 上（绝对）一致收敛.

用Cauchy收敛原理很容易证得上述定理.

例 9.2.5 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

证明. 因为$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ 且$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，由Weierstrass判别法知

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

在$(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛. ■

例 9.2.6 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{1+n^4x}$在$(0,+\infty)$上一致收敛.

证明. 当$x \in (0,+\infty)$时，因为$\left|\dfrac{x}{1+n^4x}\right| \le \frac{x}{n^4x} = \frac{1}{n^4}$，且$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$收敛，由Weierstrass判别法知$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{1+n^4x}$在$(0,+\infty)$上一致收敛. ■

与数项级数一样有Abel判别法与Dirchlet判别法.

定理 9.2.7 ***(Abel判别法)*** 若$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$在$X$上一致收敛，对每一$x \in X$，$a_n(x)$单调且一致有界（即存在与$x,n$无关的常数$M>0$，使$|a_n(x)| \le M$），那么$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$在$X$上一致收敛.

证明. 由级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$ 在X 上一致收敛，对任意给定的$\varepsilon > 0$，存在$N(\varepsilon) > 0$，使得当$n > N(\varepsilon)$ 时，对任何正整数p 都有

$$|b_{n+1}(x) + \cdots + b_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

对于固定的$x \in X$，再由函数列$a_n(x)$ 的单调性，利用Abel 引理，

$$|a_{n+1}(x)b_{n+1}(x) + \cdots +_{n+p}(x)b_{n+p}(x)| \le \varepsilon(|a_{n+1}(x)| + 2|a_{n+p}(x)|),$$

再由函数列$a_n(x)$ 在区间X 上的一致有界性，得到

$$|a_{n+1}(x)b_{n+1}(x) + \cdots + a_{n+p}(x)b_{n+p}(x)| \le 3L\varepsilon.$$

从一致收敛的Cauchy收敛原理即得级数的一致收敛性，定理证毕. ■

例 9.2.8 若$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_nx^n$在$[0,1]$上一致收敛.

证明. 对于每个$x \in [0,1]$，数列$\{x^n\}$ 单调，并且$|x^n| \le 1$. 又级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，利用Abel 定理，级数在区间$[0,1]$ 上一致收敛. ■

定理 9.2.9 ***(Dirchlet判别法)*** 设$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$的部分和在$X$上一致有界，且对每一$x \in X$, $a_n(x)$单调且在X上一致收敛于零，则$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$在$X$上一致收敛.

证明. 由部分和序列$B_k(x) = \sum\limits_{n=1}^{k} b_n(x)$ 在区间X 上一致有界, 设

$$|B_n(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\right| \le L.$$

那么对于任意的$x \in X$, 以及任意的正整数p 都成立

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} b_i(x)\right| \le \left|\sum_{i=1}^{n+p} b_i(x)\right| + \left|\sum_{i=1}^{\infty} b_i(x)\right| \le 2L.$$

利用Abel 定理, 就可以得到

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i(x)b_i(x)\right| \le 2L\left(|a_{n+1}(x)| + 2|a_{n+p}(x)|\right).$$

再利用$a_n(x)$ 在X 上一致收敛于零, 定理得证. ■

例 9.2.10 若a_n单调趋于零，则$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx$在$[\delta, \pi-\delta]$上一致收敛，这里$\delta$是小于$\pi$的任一正数.

证明. 首先证明部分和$B_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$ 在$[\delta, 2\pi-\delta]$ 上是一致有界的.

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \left|\frac{\cos\frac{1}{2}x - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}\right| \le \frac{1}{|\sin\frac{1}{2}x|} \le \frac{1}{|\sin\frac{1}{2}\delta|}.$$

由Dirchlet判别法, 得知$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx$在$[\delta, \pi-\delta]$上是一致收敛的. ■

9.2.2 习题9.2

1. 讨论下列函数项级数在指定区间的一致收敛性.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n x}$, (i) $x \in (0, +\infty)$; (ii) $x \in [\delta, +\infty), \delta > 0$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$, $x \in [0, +\infty)$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x)^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

(4) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, x \in (-\infty, +\infty)$.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^3 \mathrm{e}^{-nx}$, $x \in [0, +\infty)$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!}(x^n + x^{-n}),\quad \frac{1}{4} \le |x| \le 4;$

(8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n},\quad x \in [\varepsilon, 2\pi-\varepsilon],\quad 0<\varepsilon<\pi;$

2. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$在$[0,2\pi]$上不一致收敛,在$[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<\pi$ 上一致收敛.

3. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛, 证明$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\,\mathrm{e}^{-nx}$在$[0,+\infty)$上一致收敛.

4. 证明$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n(1-x)$在$[0,1]$上收敛, 但不一致收敛.

5. 设函数列$\{f_n(x)\}$ 与$\{g_n(x)\}$ 在区间I上分别一致收敛于$f(x)$ 和$g(x)$, 且$f(x), g(x)$ 在I上有界, 则函数列$\{f_n(x)g_n(x)\}$ 在I上一致收敛于$f(x)g(x)$.

6. 设$f(x)$在区间$[0,1]$上连续, $f(1)=0, g_n(x)=f(x)x^n$, 证明$\{g_n(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛

9.3 一致收敛级数的和函数性质

9.3.1 一致收敛级数的和函数性质

有了一致收敛的概念以后, 现在我们就可以回答前面提出的三个问题，只要加上一致收敛的条件，其答案是肯定的.

定理 9.3.1 若在$[a,b]$上函数列$\{S_n(x)\}$的每一项都连续，且$\{S_n(x)\}$一致收敛于$S(x)$，则$S(x)$也在$[a,b]$上连续, 即对于区间$[a,b]$ 上的任一点x_0, 成立

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x_0) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} S_n(x).$$

证明. 对于任意一点$x_0 \in [a,b]$, 证明$S(x)$ 在$x=x_0$ 处连续即可. 由于函数列$S_n(x)$ 在区间$[a,b]$ 上一致收敛于函数$S(x)$, 所以对任意给定的正数$\varepsilon>0$, 都存在一个与x 无关的$N>0$, 使得当$n \ge N$ 时,

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

由此

$$|S_N(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

又因为$S_N(x)$ 在$x=x_0$ 处连续, 那么存在$\delta>0$, 使得当$|x-x_0|<\delta$ 时,

$$|S_N(x) - S_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是当$|x-x_0|<\delta$ 时,

$$|S(x)-S(x_0)| \le |S(x)-S_N(x)| + |S_N(x)-S_N(x_0)| + |S_N(x_0)-S(x_0)| < \varepsilon.$$

定理证毕. ■

如果把$S_n(x)$ 写成函数和的形式, 就有下面的定理.

定理 9.3.2 若在$[a,b]$ 上级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的每项$u_n(x)$ 都连续，且$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 一致收敛于$S(x)$，则$S(x)$在$[a,b]$ 上连续, 即$\forall x_0 \in [a,b]$, $\lim\limits_{x\to x_0} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$, 换句话说, 一致收敛的级数可以逐项取极限.

例 9.3.3 设$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^n}\cos n\pi x$, 计算$\lim\limits_{x\to 1}S(x)$.

解. 设$u_n(x)=\dfrac{x^n}{3^n}\cos n\pi x$, 则$|u_n(x)|\le\frac{|x|^n}{3^n}$.

当$x\in[0,2]$时, $|u_n(x)|\le\frac{2^n}{3^n}$. 由于$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}$收敛, 从而$\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$在$[0,2]$上一致收敛于$S(x)$, 由定理9.3.1'知$S(x)$在$[0,2]$上连续, 所以

$$\lim_{x\to 1}S(x)=S(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cos n\pi=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{3}{4}.$$

■

例 9.3.4 证明$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\,\mathrm{e}^{-nx}$在$(0,+\infty)$上连续.

证明. $\forall x_0\in(0,+\infty)$, 取$[a,b]$ 使$x_0\in(a,b)\subset[a,b]\subset(0+\infty)$.

设$u_n(x)=n\,\mathrm{e}^{-nx}$, 显然$u_n(x)$在$[a,b]$ 上连续，且$|u_n(x)|\le n\,\mathrm{e}^{-na}$. 而$\sum\limits^{+\infty}n\,\mathrm{e}^{-na}$收敛, 所以$u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛, 由定理9.3.1知$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\,\mathrm{e}^{-nx}$在$[a,b]$上连续, 进而在$(0,+\infty)$上连续. ■

例 9.3.5 证明$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n+x}{n^3}$ 是$[0,+\infty)$上非一致收敛的连续函数.

证明. 设$u_n(x)=\frac{n+x}{n^3}$, 因为

$$\sup_{x\in[0,+\infty)}|u_n(x)|\ge|u_n(n^3)|=\frac{n+n^3}{n^3}>1>0,$$

所以$u_n(x)$在$(0,+\infty)$ 上不一致收敛于零, 从而$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n+x}{n^3}$ 是$[0,+\infty)$上不一致收敛.

$\forall x_0\in[0,+\infty)$, 取$[a,b]$ 使$x_0\in\subset[a,b]\subset[0+\infty)$. 显然$u_n(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，且$|u_n(x)|\le\frac{n+b}{n^3}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+b}{n^3}$ 收敛, 所以$u_n(x)$ 在$[a,b]$ 上一致收敛, 由定理9.3.1知$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+x}{n^3}$ 在$[a,b]$ 上, 进而在$[0,+\infty)$ 上连续. ■

注 9.3.6 注 *例9.2.3,* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\,\mathrm{e}^{-nx}$*在$(0,+\infty)$并非一致收敛，但由例9.3.4，*$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\,\mathrm{e}^{-nx}$*在$(0,+\infty)$上连续；再如例9.3.5，都说明定理9.3.1与定理9.3.2的逆命题未必成立. 在何条件下才成立呢？先看下面Dini定理.*

定理 9.3.7 ***(Dini定理)*** 若在有限区间$[a,b]$ 上连续函数序列$\{S_n(x)\}$ 收敛于连续函数$S(x)$，且对$[a,b]$上每一点x, $\{S_n(x)\}$ 是单调数列，则$\{S_n(x)\}$ 在$[a,b]$ 上一致收敛于$S(x)$.

先证明一个结论：若对固定的x, 由条件$\{S_n(x)\}$关于n单调, 则$\{|S_n(x)-S(x)|\}$关于n为单调递减. 事实上，若$\{S_n(x)\}$ 单调递增，则$S_n(x)\le S(x)\Rightarrow S(x)-S_n(x)\ge 0$从而$\{S(x)-S_n(x)\}$ 单调递减，于是$|S_n(x)-S(x)|=S(x)-S_n(x)$单调递减;

若$\{S_n(x)\}$ 单调递减，则$S_n(x)\ge S(x)\Rightarrow S_n(x)-S(x)\ge 0$从而$\{S_n(x)-S(x)\}$单调递减，即$|S_n(x)-S(x)|=S_n(x)-S(x)$单调递减.

下面用两种方法证明Dini定理.

证法一. (反证法) 若$S_n(x)$在$[a,b]$上不一致收敛于$S(x)$, 则$\exists\varepsilon_0>0,\forall N$, 存在$n>N$, 以及$x\in[a,b]$, 使得$|S_n(x)-S(x)|\ge\varepsilon_0$.

若取$N=1,\exists n_1>1$ 及$x_1\in[a,b]$, 使$|S_{n_1}(x_1)-S(x_1)|\ge\varepsilon_0$;

再取$N=n_1,\exists n_2>n_1$及$x_2\in[a,b]$, 使$|S_{n_2}(x_2)-S(x_2)|\ge\varepsilon_0$;

这样继续下去，$\exists n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ 及$x_k \in [a,b]$, 使$|S_{n_k}(x_k) - S(x_k)| \geq \varepsilon_0$. 而$\{x_k\} \in [a,b]$，由致密性定理,$\{x_k\}$ 存在收敛的子序列，为方便仍记为$\{x_k\}$, 此时$x_k \to \xi \in [a,b]$.

由$\lim\limits_{n\to\infty} S_n(\xi) = S(\xi)$, 对上述$\varepsilon_0 > 0$, $\exists N$, 使$|S_N(\xi) - S(\xi)| < \varepsilon_0$, 从而

$$\lim_{x\to\xi} |S_N(x) - S(x)| = |S_N(\xi) - S(\xi)| < \varepsilon_0.$$

由$x_k \to \xi$，当k充分大时

$$|S_N(x_k) - S(x_k)| < \varepsilon_0.$$

所以当$n > N$时, $|S_n(x_k) - S(x_k)| \leq |S_N(x_k) - S(x_k)| < \varepsilon_0$矛盾, 定理得证. ■

证法二. (用有限复盖定理) 记$\sigma_n(x) = |S_n(x) - S(x)|$, 由条件$\forall x \in [a,b]$，$\{S_n(x)\}$为单调, 可得$\{\sigma_n(x)\}$为单调递减数列.

$\forall \varepsilon > 0$, 由$\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, $\exists N_x \in \mathbf{N}$, $\sigma_{N_x}(x) = |S_{N_x}(x) - S(x)| < \varepsilon$. 而$\sigma_{N_x}(t)$在$t = x \in [a,b]$连续, $\exists \delta_x > 0$当$t \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \cap [a,b]$时, $\sigma_{N_x}(t) < \varepsilon$. 而

$$[a,b] \subset \cup_{x\in[a,b]}(x - \delta_x, x + \delta_x),$$

由有限覆盖定理有限个$\delta_{x_1}, \cdots, \delta_{x_r}$使得

$$[a,b] \subset \cup_{i=1}^{r}(x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}).$$

取$N = \max\{N_{x_1}, \cdots, N_{x_r}\}$, $\forall t \in [a,b]$, $\exists i$使得$t \in (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}) \cap [a,b]$, 而$\{\sigma_n(x)\}$为单调递减数列，所以当$n > N$时,

$$\sigma_n(t) \leq \sigma_N(t) \leq \sigma_{N_{x_i}}(t) < \varepsilon,$$

即

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon,$$

所以$\{S_n(x)\}$ 在$[a,b]$ 上一致收敛于$S(x)$. ■

定理 9.3.8 ***(Dini定理')*** 对于级数而言，若在有限区间$[a,b]$上连续的函数所成的级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在$[a,b]$上收敛于连续函数$S(x)$，对$[a,b]$ 上每一点x, 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$的各项同号，那么$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在$[a,b]$上一致收敛于$S(x)$.

注 9.3.9 如果把$Dini$定理中闭区间$[a,b]$换成开区间或者无穷区间，结论就可能不成立.

例如:

(1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n$的每一项在区间$[0,1)$上非负且连续，它的和函数$\dfrac{1}{1-x}$也在$[0,1)$上连续，该级数在$[0,1)$上并不一致收敛.

(2) 对于无穷区间，由例9.3.5知道，它的每一项是非负的，和函数在$[0,+\infty)$上连续，但它在$[0,+\infty)$上不一致收敛.

(3) 用Dini定理可知$S_n(x) = \dfrac{x^2}{1+n^2x^2}$ 在$[a,b]$ 上一致收敛; 由Weierstrass判别法知$S_n(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于零，但不能用Dini定理.

定理 9.3.10 若在$[a,b]$ 上函数列$\{S_n(x)\}$ 的每一项都连续，且$S_n(x)$ 一致收敛于$S(x)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} S_n(x)dx,$$

且$\int_a^x S_n(t)dt$ 在$[a,b]$ 上一致收敛于$\int_a^x S(t)dt$.

证明. 由定理9.3.1, 函数$S(x)$ 连续, 所以积分$\int_a^b S(x)dx$, $\int_a^x S(t)dt$ 存在. 并且因为函数列$S_n(x)$ 一致收敛于$S(x)$, 对于任意给定的$\varepsilon>0$, 存在$N(\varepsilon)>0$, 使得当$n>N(\varepsilon)$ 时, 对$x\in[a,b]$,

$$|S_n(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

那么,

$$\left|\int_a^b S_n(x)dx-\int_a^b S(x)dx\right|\le\int_a^b|S_n(x)-S(x)|dx<\varepsilon.$$

又若将积分上限b换为x, 则上式仍成立, 定理证毕. ■

该定理中的$S_n(x)$ 如果写成函数和的形式, 就变成了下面的定理.

定理 9.3.11 若在$[a,b]$ 上级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 的每项都连续，且$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 一致收敛于$S(x)$, 则

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b u_n(x)dx=\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)\right)dx,$$

且$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_a^x u_n(t)dt$ 在$[a,b]$ 上一致收敛于$\int_a^x S(t)dt$.

该定理也称逐项求积分定理.

注 9.3.12 在上述定理*9.3.10*或定理*9.3.11*中连续换成可积, 结论也成立.

例 9.3.13 设$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$, 计算$\int_0^\pi f(x)dx$.

解. 因为$\left|\dfrac{\cos nx}{n^2}\right|\le\dfrac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$收敛, 所以$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$在$[0,\pi]$上(绝对)一致收敛于$f(x)$. 由定理9.3.3’,

$$\int_0^\pi f(x)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^\pi\frac{\cos nx}{n^2}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_0^\pi=0.$$

■

例 9.3.14 若$S_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$在c点左连续, 但$\{S_n(c)\}$发散, 证明在任何开区间$(c-\delta,c)$内, $\{S_n(x)\}$必不一致收敛.

证明. 若$\{S_n(x)\}$在$(c-\delta,c)$内一致收敛, 则$\forall\varepsilon>0,\exists N$, 当$n>N$时, $\forall p\in\mathbf{N},\forall x\in(c-\delta,c)$,

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon,$$

在上式中令$x\to c^-$, 得到

$$|S_{n+p}(c)-S_n(c)|\le\varepsilon.$$

由Cauchy收敛准则知$\{S_n(c)\}$收敛，矛盾. 故$\{S_n(x)\}$在$(c-\delta,c)$内不一致收敛. ■

定理 9.3.15 如果在$[a,b]$ 上函数列$\{S_n(x)\}$ 的每一项上都有连续导数，$S_n(x)$ 至少在某一点$x_0\in[a,b]$收敛，且$S_n'(x)$ 一致收敛于$g(x)$，则$S_n(x)$ 也在$[a,b]$ 上一致收敛于某连续可微函数$S(x)$, 且$S'(x)=g(x)$即$\left(\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)\right)'=\lim\limits_{n\to\infty}S_n'(x)$.

该定理也称逐项求导数定理.

证明. 由定理9.3.1知$g(t)$ 在$[a,b]$ 上连续，由定理9.3.10知$\int_{x_0}^x S_n'(t)dt$ 在$[a,b]$ 上一致收敛于$\int_{x_0}^x g(t)dt$. 显然$S_n(x)-S_n(x_0)=\int_{x_0}^x S_n'(t)dt$, 又由条件$\{S_n(x_0)\}$ 收敛知$\{S_n(x)\}$ 也在$[a,b]$ 上一致收敛某个函数$S(x)$, 而$S(x)-S(x_0)=\int_{x_0}^x g(t)dt$, $S(x)$ 可微，且$S'(x)=g(x)$. ■

定理 9.3.16 如果$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的每一项在$[a,b]$ 上有连续导函数，且$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 至少某点$x_0 \in [a,b]$ 收敛，又$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u'_n(x)$ 在$[a,b]$ 上一致收敛$g(x)$，则$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在$[a,b]$ 上一致收敛于某个连续可导函数$S(x)$，且$S'(x)=g(x)$ 即$\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u'_n(x)$.

例 9.3.17 证明$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin nx}{n^4}$在$(-\infty,+\infty)$上有二阶连续可导函数，并且求$S''(x)$.

证明. $\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$, 取$[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$使得$x_0\in(a,b)$.

记$u_n(x)=\frac{\sin nx}{n^4}$, 则$|u_n(x)|\le\frac{1}{n^4}$, 而$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$ 收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在$[a,b]$ 上一致收敛$S(x)$;

$u'_n(x)=\frac{\cos nx}{n^3}$, $|u'_n(x)|\le\frac{1}{n^3}$, 而$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u'_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$g(x)$, 且$S'(x)=g(x)$, 即$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上有一阶连续导数.

又$u''_n(x)=-\frac{\sin nx}{n^2}$, $|u''_n(x)|\le\frac{1}{n^2}$, 而$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u''_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$h(x)$, 且$S''(x)=h(x)$, 即$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上有二阶连续导数，故$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$在$x_0$处二阶连续可导, 原命题得证. ∎

注 9.3.18 定理*9.3.10*与定理*9.3.15*中，一致收敛条件是进行极限运算与求导运算的充分条件.

反例1 $f_n(x)=x^{n-1}-x^n$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$的部分和$S_n(x)=1-x^n$. 其和函数$S(x)=1,(0\le x<1)$, $S(0)=0$. 易证$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在$[0,1]$ 上不一致收敛. 但

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1,$$

且

$$\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx=\int_0^1 S(x)dx=1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx=1.$$

反例2 $f_n(x)=n^2x\,\mathrm{e}^{-nx}$与$f'_n(x)=n^2(1-nx)\,\mathrm{e}^{-nx}$在$[0,1]$上都收敛于0，但

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-0|=f_n(\frac{1}{n})=\frac{n}{e}\to+\infty\ \ (n\to\infty),$$

$$\sup_{x\in[0,1]}|f'_n(x)-0|\ge f_n(0)=n^2\to+\infty\ \ (n\to\infty).$$

所以$f_n(x)$, $f'_n(x)$在$[0,1]$上都不一致收敛于0, 但关系式$\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)=0=\left[\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right]'$成立.

9.3.2 习题9.3

1. 讨论下列函数列在所定义区间上的一致收敛性及其极限函数的连续性、可积性和可微性:

   (1) $s_n(x) = x\,\mathrm{e}^{-nx^2}$, $x \in [-l, +l]$;

   (2) $s_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$, (*i*) $x \in [0, +\infty)$; (*ii*) $x \in [a, +\infty)$, $(a > 0)$.

2. 证明函数$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2+1}$在$(0, \pi)$连续，且有连续的导函数.

3. 证明函数$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$在$(1, +\infty)$连续，并有连续各阶导函数.

4. 证明函数$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin nx}{n^{\frac{7}{2}}}$在$(-\infty, +\infty)$连续，且有二阶连续的导函数.

9.4 第九章典型例题选讲一

9.4.1 例题选讲

例 9.4.1 设$f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上连续，

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x + \frac{k}{n})\frac{1}{n}.$$

证明*:* 函数列$\{f_n(x)\}$在任何有限区间上一致收敛.

证明. 由$f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上连续知对$\forall x \in (-\infty, +\infty)$，积分$g(x) = \int_0^1 f(x+t)dt$有意义.

设$[a, b]$是任意一个有限区间，$\forall x \in [a, b]$, 由$f(x)$在$[a, b+1]$上连续，进而一致连续. 由此$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当$x_1, x_2 \in [a, b+1], |x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

对$k = 0, 1, \cdots, n-1$ 及$t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, 显然$x + \frac{k}{n}, x + t \in [a, b+1]$且

$$\left|(x + \frac{k}{n}) - (x + t)\right| = \left|\frac{k}{n} - t\right| < \frac{1}{n}.$$

若取$N = \frac{1}{\delta}$, 当$n > N$时，有$\frac{1}{n} < \delta$, 从而

$$\left|f(x + \frac{k}{n}) - f(x + t)\right| < \varepsilon.$$

注意到

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x + \frac{k}{n})\frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x + \frac{k}{n})dt,$$

$$g(x) = \int_0^1 f(x+t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x+t)dt,$$

所以

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - g(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x + \frac{k}{n})dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x+t)dt\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(f(x + \frac{k}{n}) - f(x+t)\right) dt\right| \le \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left|f(x + \frac{k}{n}) - f(x+t)\right| dt \\
&< \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varepsilon dt = \varepsilon.
\end{aligned}$$

故$\{f_n(x)\}$在任何有限区间上一致收敛于$g(x)$. ■

例 9.4.2 给定函数列$f_n(x)=\frac{x(\ln n)^\alpha}{n^x}$, 讨论当$\alpha$为何值时, $\{f_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上一致收敛.

解. $f_n'(x)=\frac{(\ln n)^{\alpha+1}}{n^x}\left(\frac{1}{\ln n}-x\right)$. 由此可见对固定的$n$, 当$x<\frac{1}{\ln n}$时, $f_n'(x)>0$, $f_n'(x)$单调递增; 当$x>\frac{1}{\ln n}$时, $f_n'(x)<0$, $f_n(x)$单调递减, 所以$f_n(x)$在$x=\frac{1}{\ln n}$处其最大值.

注意到极限函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$. 故

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\max_{x\in[0,+\infty)}&=f_n\left(\frac{1}{\ln n}\right)=\frac{(\ln n)^{\alpha-1}}{n^{\frac{1}{\ln n}}}\\&=\frac{1}{e}(\ln n)^{\alpha-1}\begin{cases}\not\to 0, & \alpha\ge 1,\\ \to 0, & \alpha<1,\end{cases}\quad (n\to+\infty).\end{aligned}$$

所以当且仅当$\alpha<1$ 时$\{f_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上一致收敛. ■

例 9.4.3 设$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内连续，且当$x\neq 0$ 时$|f(x)|<|x|$. 记

$$f_1(x)=f(x),f_2(x)=f(f_1(x)),\cdots,f_n(x)=f(f_{n-1}(x)),\cdots.$$

证明: $f_n(x)$ 在$[-A,A]$ 上一致收敛（其中A为常数）.

证明. $x\neq 0$时$|f(x)|<|x|$, 令$x\to 0$, 则$0\le|f(0)|\le 0$, 从而$f(0)=0$. 所以$\forall x\in(-\infty,+\infty),|f(x)|\le|x|$.

由此, $\forall\varepsilon>0$ (不妨设$\varepsilon<A$), 当$x\in[-\varepsilon,\varepsilon]$时$|f(x)|\le\varepsilon$.

因为$\left|\frac{f(x)}{x}\right|<1$ 且在$[-A,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,A]$上连续, 有最大值$q:0<q<1$, 从而$|f(x)|\le q|x|$. 所以在$[-A,A]$上有

$$|f(x)|\le\max\{\varepsilon,qA\}<A.$$

$\forall x\in[-A,A]$, 若$|f(x)|\le\varepsilon$, 则$|f_2(x)|=|f(f(x))|\le|f(x)|\le\varepsilon$. 若$|f(x)|>\varepsilon$, 则$|f_2(x)|=|f(f(x))|\le q|f(x)|\le q^2A$, 所以

$$|f_2(x)|\le\{\varepsilon,q^2A\}.$$

同理, 由$|f_{n-1}(x)|\le\max\{\varepsilon,q^{n-1}A\}$可推得

$$|f_n(x)|\le\max\{\varepsilon,q^nA\}.$$

但当$n\to+\infty$时, $q^nA\to 0$, $\forall\varepsilon>0$, 存在自然数N, 当$n>N$时, $q^nA<\varepsilon$, 所以

$$|f_n(x)|\le\max\{\varepsilon,q^nA\}=\varepsilon.$$

故$f_n(x)$在$[-A,A]$上一致收敛于零. ■

例 9.4.4 设$\{u_n(x)\}$为$[a,b]$上的可导函数列, 且在$[a,b]$上有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}u_k'(x)\right|\le C,$$

C是不依赖于x和n的正数. 证明若$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上收敛, 则必为一致收敛.

证法一. (1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上收敛, 所以$\forall x_0\in[a,b],\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon,x_0)>0$, 当$n>N$时有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad(\forall p\in\mathbf{N}).$$

故
$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|\le\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)-\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x_0)\right|+\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x_0)\right|.$$
上式右端第一项，对函数$\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)$应用微分中值定理
$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|&\le\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k'(\xi)(x-x_0)\right|+\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x_0)\right|\\&<2C|x-x_0|+\frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$
其中ξ在x与x_0之间.

取$\delta=\frac{\varepsilon}{4C}$, 则当$|x-x_0|<\delta$时, 对$\forall p\in\mathbf{N},\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, 有
$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|\le\varepsilon.$$

(2) 对$[a,b]$上每点，都采用上述步骤, 则$\forall x_\lambda\in[a,b],\exists N(\varepsilon,x_\lambda)>0$, 当$n>N(\varepsilon,x_\lambda)$, $x\in(x_\lambda-\delta,x_\lambda+\delta)$时有
$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|\le\varepsilon.$$
如此$\{(x_\lambda-\delta,x_\lambda+\delta):x_\lambda\in[a,b]\}$组成了$[a,b]$的一个开覆盖. 由有限覆盖定理，其中存在有限子覆盖. 不妨设之为$\{(x_\lambda-\delta,x_\lambda+\delta)\}_{i=1}^r$，令$N=\max\limits_{1\le i\le r}\{N(\varepsilon,x_i)\}$, 则$n>N$时, $\forall x\in[a,b]$有
$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|\le\varepsilon.$$
由Cauchy收敛定理知$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛. ■

证法二. (1) $\forall\varepsilon>0$, 取m充分大, 将$[a,b]$ m等分,使分得的每个小区间长度$\delta<\frac{\varepsilon}{4C}$. 顺次以$x_1,x_2,\cdots,x_m$表示个小区间的中点. 因$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上收敛,所以$\forall\varepsilon>0,\exists N_i=N(\varepsilon,x_i)>0$, 当$n>N_i$时有
$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x_i)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad(\forall p\in\mathbf{N}).$$
令$N=\max\limits_{1\le i\le m}\{N(\varepsilon,x_i)\}$, 则$n>N$时, $\forall x\in[a,b]$有
$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|&=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x_i)+\int_{x_i}^{x}\left(\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(t)\right)'dt\right|\\&\le\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x_i)\right|+\int_{x_i}^{x}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k'(t)\right|dt\\&<\frac{\varepsilon}{2}+2C|x-x_i|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$
由Cauchy收敛定理知$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛. ■

9.4.2 第九章复习题一

1. 讨论函数$f_n(x)=x^n-x^{2n}$在$[0,1]$内的一致收敛性.

2. 讨论函数$f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$ 的一致收敛性($\varepsilon>0$).

   (1) $0\le x\le 1-\varepsilon$;

   (2) $1-\varepsilon\le x\le 1+\varepsilon$;

   (3) $1+\varepsilon\le x<+\infty$.

3. 证明$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^n(1-x)^2$在$[0,1]$上一致收敛.

4. 讨论$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$在$(0,a)$与$(a,+\infty)$内的一致收敛性.

5. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-)^n\frac{\mathrm{e}^{x^2}+\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}$在任何有限区间上一致收敛, 但在任何一点$x_0$处不绝对收敛.

6. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1-x)\frac{x^n}{1-x^{2n}}\sin nx$在$(\frac{1}{2},1)$内一致收敛.

7. 设函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\,\mathrm{e}^{-nx}$，$x\in(0,+\infty)$,

   (1) 证明此级数在上$(0,+\infty)$内收敛但不一致收敛性.

   (2) 证明此级数在上$(0,+\infty)$内闭一致收敛性, 并求其和函数.

8. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-x^n}{1+x^n}-\frac{1-x^{n-1}}{1+x^{n-1}}\right)$ 在上$[0,1]$上不一致收敛性.

9. 设$f_1(x)$在$[a,b]$上可积,
$$f_n(x)=\int_a^x f_{n-1}(t)dt\quad n=1,2,\cdots.$$
   证明函数列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于零.

10. 设函数$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上有连续的导函数$f'(x)$, $f_n(x)=\mathrm{e}^n[f(x+\mathrm{e}^{-n})-f(x)]$ $(n=2,3,\cdots)$. 证明函数列$\{f_n(x)\}$ 在任何有限区间上一致收敛于$f'(x)$.

11. 设一元函数$f(x)$在$x=0$的邻域内有二阶连续导数, $f(0)=0, 0<f'(0)<1$. 记$f_1(x)=f(x), f_2(x)=f(f_1(x)),\cdots,f_n(x)=f(f_{n-1}(x)),\cdots$. 证明: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$在$x=0$的某邻域内一致收敛.

12. 设$b>0$, $a_1,a_2,\cdots$均为常数, 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛, 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\frac{1}{n!}\int_0^x t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$在$[a,b]$上一致收敛.

13. 讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在$(-\infty,+\infty)$内的一致收敛性.

14. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$关于$x$在$(-\infty,+\infty)$上为一致收敛，但对任何$x$并非绝对收敛，而级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$虽在$(-\infty,+\infty)$上绝对收敛，但并不一致收敛.

15. 设$f_0(x),f_1(x)\cdots$在区间I上有定义,且满足$|f_0(x)|\le M$, $\sum\limits_{n=0}^{m}|f_n(x)-f_{n+1}(x)|\le M, m=0,1,2,\cdots$其中$M$是常数, 试证: 若级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$收敛, 则级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nf_n(x)$在$I$上一致收敛.

16. 设可微函数列$\{f_n(x)\}$ 在$[a,b]$ 上收敛, 且$\{f_n'(x)\}$ 在$[a,b]$ 上一致有界, 则函数列$\{f_n(x)\}$ 在$[a,b]$ 上一致收敛.

17. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续,$g_n(x)$为阶梯函数

$$g_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})\left(X_{\frac{k}{n}}(x)-X_{\frac{k-1}{n}}(x)\right),$$

其中

$$X_{\frac{k}{n}}(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x\le \frac{i}{n};\\ 0, & \frac{i}{n}\le x\le 1.\end{cases}$$

证明$g_n(x)$在$[0,1)$上一致收敛于$f(x)$.

18. 试证$x\to a$时,$f(x,y)$关于$y\in I$一致收敛于$\phi(y)$的充要条件是$\forall\{x_n\}\to a\quad(x_n\neq a)$ 有$\{f(x_n,y)\}$关于$y\in I$一致收敛于$\phi(y)$.

19. 若$f_n(x)$在$[a,b]$上可积,$n=1,2,\cdots$,且$f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上都可积,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|^2dx=0,$$

设$h(x)=\int_a^x f(t)g(t)dt,\quad h_n(x)=\int_a^x f_n(t)g(t)dt$, 则$h_n(x)$在$[a,b)$上一致收敛于$h(x)$.

9.5 幂级数

在函数项级数中, 下面形式的级数是一种最简单也是最重要的函数项级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots,$$

这种形式的级数称其为幂级数. 其较一般的形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots,$$

如果令$t=x-x_0$, 则一般形式的幂级数就转变成前面特殊形式的幂级数了, 正是由于这个原因, 在下面幂级数有关性质的讨论中, 我们仅对前面特殊形式的幂级数进行讨论, 得到的结论通过上述变换, 很容易得到关于一般形式幂级数的相应结论.

9.5.1 幂级数的收敛半径

对于幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_nx^n|}=|x|\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

那么根据Cauchy 判定准则, 级数的收敛与否取决于$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_nx^n|}$ 大于1 或小于1. 这样当

$$|x|<\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

时, 级数绝对收敛. 相应的, 当

$$|x|>\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

时, 级数发散.

并且在$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=0$ 时, 幂级数在任何点处都是绝对收敛的; 在$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty$ 时, 幂级数除了在点$x=0$ 处外都是发散的. 记

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}, & 0<\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}<\infty;\\ \infty, & \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=0;\\ 0, & \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty.\end{cases}$$

那么很容易得到下面的定理.

定理 9.5.1 幂级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$ 在$|x|<R$ 内绝对收敛, 在$|x|>R$ 内发散.

这样对于幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 都存在一个区间$(-R,R)$, 在这个区间内幂级数是绝对收敛的, 而在区间外幂级数是发散的. 我们称R 为幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径. 对于一般的幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, 存在一个以$x_0$ 为中心, 以收敛半径R 为半径的区间, 使得幂级数在区间内绝对收敛, 而在区间外是发散的.

利用定理9.5.1可以很容易得到下面的定理.

定理 9.5.2 若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在某点$x=\xi\neq 0$ 处收敛, 则幂级数必在$|x|<|\xi|$ 内绝对收敛. 若级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点$x=\xi\neq 0$ 处发散, 则它在$|x|>|\xi|$ 内发散. 显然$|\xi|\le R$.

利用上述定理很容易得到下面的定理.

定理 9.5.3 对于幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 若极限

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l,$$

$(0\le l\le+\infty)$, 则

$$R=\begin{cases}\frac{1}{l}, & 0<l<+\infty;\\ +\infty, & l=0;\\ 0, & l=+\infty.\end{cases}$$

对于一般的幂级数也有相应的结论.

推论 9.5.4 若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在某点$x=\xi\neq 0$ 处收敛, 则幂级数必在$|x-x_0|<|\xi-x_0|$ 内绝对收敛. 若级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在点$x=\xi\neq 0$ 处发散, 则它在$|x-x_0|>|\xi-x_0|$ 内发散.

例 9.5.5 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛半径和收敛范围.

解. 按收敛半径定义,

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1.$$

那么幂级数在$|x|<1$ 内绝对收敛, 在$|x|>1$ 内发散. 并且在$x=1$ 时发散, 在$x=-1$ 时收敛, 所以幂级数收敛范围为$-1\le x<1$, 发散范围为$x<-1$ 或$x\ge 1$. ■

例 9.5.6 证明$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 在任何点绝对收敛.

证明. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0.$$

根据定理9.5.2, 幂级数的收敛半径$R = +\infty$, 问题得证. ■

例 9.5.7 计算幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n}$的收敛半径,

解. 令$t = x^{2n}$, 则$\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n t^n$, 新幂级数的收敛半径为

$$R' = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2},$$

所以该新幂级数在$|t| < \frac{1}{2}$在收敛, 即原幂级数在$|x^2| < \frac{1}{2}$ 也即在$|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$在收敛, 从而原幂级的收敛半径为$1/\sqrt{2}$. ■

例 9.5.8 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(3+(-1)^n)x^n$在$(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4})$ 绝对收敛，在其它点发散.

证明. 由于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}}(3+(-1)^n) = 4,$$

所以$R = \frac{1}{4}$. 又当$x = \pm\frac{1}{4}$时, 级数的一般项不收敛于零, 因此在收敛区间的两个端点上级数发散. ■

定理 9.5.9 *(Abel 第二定理) 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为R, 则幂级数在区间$(-R, R)$ 内的任一个闭区间$[a, b]$ 上一致收敛(在$(-R, R)$ 上内闭一致收敛). 又若级数在点$x = R$ 处收敛, 则必在区间$[a, R]$ 内一致收敛. 同理, 当级数在点$x = -R$ 收敛时, 则必在区间$[-R, b]$ 内一致收敛.*

证明. 设$\xi = \max\{|a|, |b|\}$. 那么对任意的$x \in [a, b]$, 都有

$$|a_n x^n| \le |a_n \xi^n|.$$

由于级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$ 绝对收敛, 所以幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在$[a, b]$ 上一致收敛.

现在证定理的第二部分. 对于$x \in [a, R]$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{R^n} a_n R^n.$$

由于$\frac{x^n}{R^n}$ 在$[a, R]$ 上一致有界, 并且对于每个x 关于n 单调. 根据定理条件, 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛, 所以由Abel判别法, 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在$[a, R]$ 上一致收敛. ■

9.5.2 幂级数的性质

利用定理9.5.9, 容易得证下面两个定理, 证明留给读者.

定理 9.5.10 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为R, 那么其和函数$S(x)$ 在$(-R,R)$ 上连续; 若$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在$x=-R$ 收敛, 则$S(x)$ 在$[-R,R)$连续; 若$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在$x=R$ 收敛，则$S(x)$ 在$(-R,R]$ 连续.

定理 9.5.11 设$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为R, 其和函数$S(x)$ 在区间$(-R,R)$ 上具有连续的导数, 并且$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在$(-R,R)$ 内可以逐项积分和逐项微分, 即有

$$\int_0^x S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

以及

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}(a_n x^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

并且逐项求积和逐项求导后仍为级数，其收敛半径仍为R.

例 9.5.12 求级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$的和函数, 并求$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$的和.

解. 在$(-1,1)$ 内我们有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x}.$$

在此区间内逐项积分可得

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \int_0^x \frac{1}{1+x}dx = \ln(1+x),$$

该级数的收敛域为$(-1,1]$.

若取$x=1$,则$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$, 从而$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$. ■

例 9.5.13 求级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n x^n$的和函数, 并求$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{2^n}$的和.

解. 因为$x\in(-1,1)$时, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$, 所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n &= x\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}\\ &= x\sum_{n=1}^{+\infty}(x^n)' = x\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\right)'\\ &= x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

若将$x=\frac{1}{2}$代入上述两个幂级数中,则

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = 1, \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2$$

从而

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{2^n}=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=4-1=3.$$

■

例 9.5.14 求级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$的和函数及其收敛域.

解. 设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$, 则

$$\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{2^n}\int_0^x x^{2n-2}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n-1}.$$

但$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$, 其中$|x|<1$, 所以

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n-1}=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-1}=\frac{x}{2}\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{x}{2-x^2},$$

其中$|\frac{x^2}{2}|<1$, 即$|x|<\sqrt{2}$.

故$\int_0^x S(x)dx=\frac{x}{2-x^2}$, 两边对$x$求导, 得

$$S(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$$

此即为所求和函数，收敛域为$|x|<\sqrt{2}$. ■

9.5.3 函数的幂级数展开

从前面的研究中可以看出, 幂级数具有着很多很好的性质, 问题是能否把一个函数$f(x)$ 用一个幂级数来表示出来, 这也就是函数的幂级数展开问题. 首先我们假设如果一个函数$f(x)$ 在一个区间$(-R,R)$ 内能够展开成幂级数

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots,$$

那么其幂级数的系数应该具有什么性质呢? 由上一节的结果知函数$f(x)$ 在$(-R,R)$ 上有各阶导数, 并且其对应的幂级数可逐项求导数. 对$n=0,1,2,\cdots$,

$$f^{(n)}(x)=n!+\frac{(n+1)}{1!}a_{n+1}x+\cdots.$$

令$x=0$ 得

$$f(0)=a_0,\ \ f'(0)=a_1,\ \ f''(0)=2!a_2,\cdots,f^{(n)}(0)=n!a_n,\cdots,$$

即

$$a_0=f(0),\ \ a_1=f'(0),\ \ a_2=\frac{f''(0)}{2!},\cdots,a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\cdots.$$

那么如果函数$f(x)$ 在区间$(-R,R)$ 可以展成幂级数, 其幂级数展开式就为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots.$$

级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots$$

称为函数$f(x)$ 的麦克劳林级数.

为了研究清楚一个函数能否展成幂级数, 我们下面就讨论函数的麦克劳林级数是否收敛于函数$f(x)$. 为此首先定义余项

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

则麦克劳林级数收敛于函数$f(x)$ 的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

下面我们给出余项$R_n(x)$ 的积分表达式.

定理 9.5.15 设在零点的某个邻域U 内$f(x)$ 有任意阶导数, 那么对于任意的$x\in U$,

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),$$

而

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

证明. 因为函数$f(x)$ 在U 内具有任意阶导数,

$$R_n'(x)=f'(x)-f'(0)-f''(0)x-\cdots-\frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1},$$

$$R_n''(x)=f''(x)-f''(0)-f'''(0)x-\cdots-\frac{f^{(n)}(0)}{(n-2)!}x^{n-2},$$

$$\vdots$$

$$R_n^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0),$$

$$R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x).$$

这样

$$R_n(0)=R_n'(0)=R_n''(0)=\cdots=R_n^{(n)}(0)=0.$$

进行分部积分可以得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt=\int_0^x R_n^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt\\
&=\int_0^x (x-t)^n dR_n^{(n)}(t)\\
&=R_n^{(n)}(t)(x-t)^n|_0^x-\int_0^x R_n^{(n)}(t)n(x-t)^{n-1}(-1)dt\\
&=\int_0^x n(x-t)^{n-1}dR_n^{(n)}(t)\\
&=R_n^{(n-1)}(t)n(x-t)^{n-1}|_0^x-\int_0^x R_n^{(n-1)}(t)n(n-1)(x-t)^{n-2}(-1)dt\\
&=\int_0^x n(n-1)(x-t)^{n-2}dR_n^{(n-2)}(t)=\cdots\\
&=R_n'(t)n(n-1)\cdots 2(x-t)|_0^x-\int_0^x R_n'(t)n(n-1)\cdots 2(-1)dt\\
&=n!\int_0^x R_n'(t)dt=n!R_n(x).
\end{aligned}$$

这样就得到

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

定理证毕. ■

利用上面的定理就可以得到下面的展开定理.

定理 9.5.16 设函数$f(x)$ 在区间$(-R,R)$ 上具有任意阶导数, 并且存在常数$M>0$, 使得

$$|f^{(n)}(x)| \le M, \quad -R<x<R,$$

对$n=0,1,2,\cdots$ 成立. 则函数$f(x)$ 在$(-R,R)$ 上可以展开成幂级数

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots.$$

证明. 这里只要证明, 对任意的$x\in(-R,R)$, $R_n(x)\to 0$, $n\to\infty$. 由定理9.5.15,

$$|R_n(x)| \le M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} < M\frac{R^{n+1}}{(n+1)!},$$

而$\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$, 所以定理得证. ■

在定理的证明中我们注意到$R_n(x)$ 的表达式中, $(x-t)^n$ 在以0和x为端点的区间上不变号, 所以应用积分第一中值定理, 得到$R_n(x)$ 的表达式,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

同时也可以把它表示成拉格朗日形式:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0<\theta<1.$$

柯西形式:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}, \quad 0<\theta<1.$$

9.5.4 几个基本初等函数的幂级数展开

1. e^x的展开式.

   函数e^x 在$x=0$ 处的任意阶导数等于1, 所以

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{\theta x}, \ 0<\theta<1.$$

   那么$|R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{|x|}$. 这样对任意的$x$, 当$n\to\infty$ 时, 恒有$R_n(x)\to 0$, 所以函数e^x 的展开式为

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

2. $\sin x$ 与$\cos x$ 的展开式.

   对于函数$f(x)=\sin x$, 我们有

$$f^{(n)}(x) = \sin(\frac{n\pi}{2}+x),$$

   因此$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0, f'''^{2m}(0)=0, f^{2m+1}(0)=(-1)^m$.

所以对于任意的x,

$$R_{2m+2}(x)=\sin\left(\frac{2k+3}{2}\pi+\theta x\right)\frac{x^{2m+3}}{(2m+3)!}\to 0,\quad m\to\infty.$$

这样函数$f(x)=\sin x$ 的展开式为

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots,\quad(-\infty<x<+\infty)$$

同理可以得到

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots,\quad(-\infty<x<+\infty)$$

3. $\ln(1+x)$ 的展开式.
   这个展开式在前面已经给出,

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,\quad(-1<x\le 1)$$

4. $\arctan x$ 的展开式.
   由于

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots,\quad(-1<x<1)$$

两边求积分得

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots,\quad(-1\le x\le 1)$$

例 9.5.17 求级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$的和.

解. 由

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\quad(-1<x<1)$$

两边取积分得

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4}&=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1(-1)^n x^{2n}dx\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.\end{aligned}$$

■

5 五 $(1+x)^\alpha$ 的展开式.

对于函数$f(x)=(1+x)^\alpha$,

$$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1),$$

所以柯西余项表达式

$$R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n(1+\theta x)^{\alpha-1}.$$

对于$|x|<1$, 因为级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}$$

收敛, 所以余项$R_n(x)$ 的第一个因子

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}\to 0,\ \ n\to\infty.$$

对于第二个因子, 在$|x|<1$ 时, 由于$0\le 1-\theta<1+\theta x$,

$$0\le\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n<1$$

而第三个因子$(1+\theta x)^{\alpha-1}$ 恒有界. 这样就有

$$R_n(x)\to 0,\ \ n\to\infty.$$

所以在$-1<x<1$ 内, 二项式$(1+x)^\alpha$ 的展开式为

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots\\ &\quad+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots.\end{aligned}$$

例 9.5.18 求函数$\dfrac{1}{(1-x)(2-x)}$的$Maclaurin$展开式.

解.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)(2-x)} &= \frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})x^n,\end{aligned}$$

其中$x\in(-1,1)$. ■

9.5.5 幂级数的应用

下面举个例子说明幂级数在近似计算中的应用.

例 9.5.19 计算$\sin 10^\circ$的近似值, 要求精确到10^{-5}.

解.

$$\begin{aligned}\sin 10^\circ &= \sin\frac{\pi}{18}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n+1}\\ &\approx \frac{\pi}{18}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n+1}.\end{aligned}$$

由于交错级数的截断误差

$$\begin{aligned}|r_n| &< \left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n+1}\right|\\ &< \frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{3.6}{18}\right)^{2n+1}\\ &= \frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{5^{2n+1}}\end{aligned}$$

若要$|r_n| < 10^{-5}$,有$(2n+1)!5^{2n+1} > 10^5$. 可知取$n=2$即可,于是

$$\begin{aligned}\sin 10^\circ = \sin\frac{\pi}{18} &\approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 \\ &\approx 0.174533 - 0.000886 + 0.000000 = 0.17365.\end{aligned}$$

■

例 9.5.20 计算$\ln 2$的近似值, 精确到10^{-4}.

解. 若由展开式

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, x \in (-1, 1].$$

令$x = 1$有

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots,$$

因其收敛太慢,用它来计算$\ln 2$的近似值是没有应用价值的,由

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots, x \in [-1, 1).$$

于是

$$\begin{aligned}&\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) \\ &= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots\right), x \in (-1, 1).\end{aligned}$$

这是一个收敛较快的级数.

令$\frac{1+x}{1-x} = 2$有$x = \frac{1}{3}$,于是

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \cdots\right).$$

考虑

$$\begin{aligned}|r_n| &= 2\left[\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} + \frac{1}{2n+3}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+3} + \cdots\right] \\ &\le \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}\left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \cdots\right] \\ &\le \frac{2}{2n+1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}\cdot\frac{9}{8} < 10^{-4},\end{aligned}$$

取前四项有

$$\ln \approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{7}3^7\right) \approx 0.6931.$$

若令$\frac{1+x}{1-x} = 3$有$x = \frac{1}{2}$, 于是同样有$\ln 3 \approx 1.0986$. ■

为了应用方便, 在上例中, 由

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}, x \in (-1, 1).$$

取$x = \frac{1}{2k+1} (k \in \mathbf{N})$, 有

$$\ln\frac{1+\frac{1}{2k+1}}{1-\frac{1}{2k+1}} = \ln\frac{k+1}{k} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2k+1)^{2n+1}},$$

即

$$\ln(k+1) = \ln k + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2k+1)^{2n+1}}, (k \in \mathbb{N}).$$

由这个展开式,不难推算出自然对数表.

例 9.5.21 求$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$的近似值, 精确到$10^{-4}$ *(*取$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \approx 1.12838$*)*.

证明. 由$\mathrm{e}^{-x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$, 积分有

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$$

于是

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{2^2\cdot 3} + \frac{1}{2^4\cdot 5\cdot 2!} - \frac{1}{2^6\cdot 7\cdot 3!} + \cdots\right),$$

取前四项的和作为近似值,其误差为

$$|r_4| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2^8\cdot 9\cdot 4!} < \frac{1}{9000},$$

故

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{2^2\cdot 3} + \frac{1}{2^4\cdot 5\cdot 2!} - \frac{1}{2^6\cdot 7\cdot 3!}\right) \approx 0.5205.$$

■

9.5.6 逼近定理

定理 9.5.22 （魏尔斯特拉斯逼近定理, 叙而不证） 设$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，那么对任意给定的$\varepsilon > 0$，总存在多项式$P(x)$，使得$\max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon$.

魏尔斯特拉斯逼近定理在数学的不少分支中有着很重要的作用.我们知道，有理数在实数中的稠密的，即对每一个实数x，总可以找到一个有理数r，使得$|x-r| < \varepsilon$ (ε是预先给定的任意正数).逼近定理告诉我们，虽然$[a,b]$上的连续函数是多种多样的，而多项式函数不过是连续函数类中的一种特殊类型，但它却在连续函数类中稠密，即对每一个$[a,b]$上的连续函数$f(x)$，总可以找到一个多项式$P(x)$，使得$\max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon$.

9.5.7 习题9.4

1. 求下列幂级数的收敛半径与收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$;　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1}x^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\frac{3^n+(-2)^n}{n}x^n$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(2x+1)^n$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)x^n$;　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n$.

2. 求下列幂级数的收敛区间:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^3\cdot 2^n} x^n$; (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{2n+1}}(x+1)^n$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 5^{n+1} x^{2n+2}$; (4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} x^{n+1}$;

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-)^n \sqrt{(n+1)(n+2)} x^n$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^\cdot n} x^n$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) x^n \quad (a > b > 0)$; (8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{5^n\sqrt{n+1}} x^{2n-1}$.

3. 把下列函数展为x的幂级数:

(1) $f(x) = 2^x$; (2) $f(x) = \cos^2 x$;
(3) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; (4) $f(x) = \int_0^x \sqrt{t}\, \mathrm{e}^t\, dt$;
(5) $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$; (6) $f(x) = x \arctan x - \ln\sqrt{1+x}$;
(7) $f(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^{-x}$; (8) $f(x) = (1+x^2)\arctan x$.

4. 将函数$f(x) = \frac{1}{x^2+4x+3}$展为$(x-1)$的幂级数,并指出其收敛域.

5. 把函数$f(x) = \ln\frac{1}{x^2+2x+2}$在点$x_0 = -1$处展为泰勒级数,并指出其收敛域.

6. 求下列幂级数的和函数:

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n x^{n-1}$; (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

7. 求函数$\dfrac{x}{1+x-2x^2}$的Maclaurin展开式.

8. 求$\sqrt[3]{130}$的近似值,精确到10^{-3}.

9. 求$\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{\arctan x}{x}$的近似值,精确到$10^{-3}$.

10. 应用$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$, 计算$\pi$的值，要求精确到$10^{-4}$.

11. 求$\int_0^{\frac{1}{10}} \ln(1+t)^{\frac{1}{t}}$的近似值, 精确到$10^{-3}$.

9.6 第九章典型例题选讲二

9.6.1 例题选讲

例 9.6.1 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n$在其收敛域中的和函数. .

解. 用比值判别法可确定级数的收敛域为$|x| < 1$. 令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n \qquad (|x| < 1),$$

则

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n = \frac{x}{1-x} - \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}. \qquad (x \neq 0)$$

设

$$F(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}\qquad(|x|<1),$$

由逐项求导性可得

$$F'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}x^n=\frac{x}{1-x}.$$

因为$F(0)=0$, 所以$F(x)=\int_0^x\frac{t}{1-t}dt=-(x+\ln(1-x))$. 由此得

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\ln(1-x), & |x|<1,x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

■

例 9.6.2 求级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(n+1)nx^n$的和函数, 并求$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n(n+1)}{2^n}$的和.

解. 用比值判别法可确定级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(n+1)nx^n$的收敛半径为1, 收敛域为$|x|<1$. 已知

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^nx^n=-\frac{x}{1+x}\qquad(|x|<1),$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^nx^{n+1}=-\frac{x^2}{1+x}.$$

由逐项求导性可得

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(n+1)x^n=\left(-\frac{x^2}{1+x}\right)',$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(n+1)nx^{n-1}=\left(-\frac{x^2}{1+x}\right)'',$$

于是有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(n+1)nx^n=x\cdot\left(-\frac{x^2}{1+x}\right)''=\frac{-2x}{(1+x)^3}\qquad(|x|<1).$$

令$x=\frac{1}{2}$, 即有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n(n+1)}{2^n}=\frac{-2\cdot\frac{1}{2}}{(1+\frac{1}{2})^3}=-\frac{8}{27}.$$

■

例 9.6.3 设$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\quad(0\leq x\leq 1)$, 证明当$0<x<1$时有

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\frac{\pi^2}{6}.$$

证明. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$的收敛半径$R=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=1$, 收敛域为$[-1,1]$.

当$x\in[-1,1)$ 且$x\neq 0$ 时$f'(x)=-\frac{\ln(1-x)}{x}$. 当$x=1$时$f(1)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

级数在$(0,1)$内可逐项积分, $f(x)$有连续导数, 因此

$$\begin{aligned}
&[f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)]' \\
&= f'(x)-f'(1-x)+\frac{\ln(1-x)}{x}+\frac{\ln x}{x-1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}+\frac{\ln(1-x)}{x}+\frac{\ln x}{x-1} \\
&= -\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln x}{x-1}+\frac{\ln(1-x)}{x}+\frac{\ln x}{x-1}=0.
\end{aligned}$$

于是

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)\equiv C \quad x\in(0,1).$$

令$x\to 0^+$ 取极限知$C=f(1)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. 故

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\frac{\pi^2}{6}.$$

■

例 9.6.4 设$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上无限次可微且对任意的$n=1,2,\cdots$, $f\left(\frac{1}{2^n}\right)=0$, 并满足存在$M>0$, 使得$|f^{(k)}(x)|\le M(k=1,2,\cdots)$. 证明$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上恒为零.

证明. 由于$|f^{(k)}(x)|\le M, x\in(-\infty,+\infty), k=1,2,\cdots$,

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \\
&\le \frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}\to 0 \quad (n\to\infty),
\end{aligned}$$

因此

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

又因

$$f(0)=\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{2^n}\right)=0,$$

$$f'(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{2^n}\right)-f(0)}{\frac{1}{2^n}}=0.$$

由罗尔定理, 存在$\eta_n^{(1)}$满足

$$\frac{1}{2}>\eta_1^{(1)}>\frac{1}{2^2}>\eta_2^{(1)}>\frac{1}{2^3}>\cdots>\frac{1}{2^n}>\eta_n^{(1)}>\frac{1}{2^{n+1}}>\cdots,$$

使得

$$f'(\eta_n^{(1)})=0, \quad 且 \quad \eta_n^{(1)}\to 0.$$

故

$$f''(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f'(\eta_n^{(1)})-f'(0)}{\eta_n^{(1)}}=0.$$

且存在$\eta_n^{(2)}$满足

$$\eta_1^{(1)}>\eta_1^{(2)}>\eta_2^{(1)}>\eta_2^{(2)}>\eta_3^{(1)}>\cdots>\eta_n^{(1)}>\eta_n^{(2)}>\eta_{n+1}^{(1)}>\cdots,$$

使得
$$f''(\eta_i^{(2)})=0\quad(i=1,2,\cdots).$$
类似可证, 当$f^{(k)}(x)$在$\eta_1^{(k)}>\eta_2^{(k)}>\cdots>\eta_n^{(k)}>\cdots\quad(\eta_n^{(k)}\to 0)$点处有$f^{(k)}(\eta_n^{(k)})=0$, 且$f^{(k)}(0)=0$, 便可推出$f^{(k+1)}(0)=0$, 且存在$\eta_n^{(k+1)}$:
$$\eta_1^{(k)}>\eta_1^{(k+1)}>\eta_2^{(k)}>\eta_2^{(k+1)}>\eta_3^{(k)}>\cdots>\eta_n^{(k)}>\eta_n^{(k+1)}>\eta_{n+1}^{(k)}>\cdots,$$
使得
$$f^{(k+1)}(\eta_n^{(k+1)})=0\quad(n=1,2,\cdots),\quad f^{k+2}(0=0).$$
故由归纳法知$\forall n, f^{(n)}(0)=0$. 于是有$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\equiv 0$. ■

例 9.6.5 证明*:*

(1) 对每个正整数$n>1$, 方程$x+x^2+\cdots+x^n=1$在区间$(0,1)$中有且仅有一根.

(2) 记此根为x_n, 则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

(3) 求此极限值.

证明. (1) 记$p_n(x)\equiv x+x^2+\cdots+x^n$, 则$p_n(x)$连续, $p_n(0)=0, p_n(1)=n>1$, 有介值定理，$p_n(x)=1$在区间$(0,1)$中有根，但当$0<x<1$时, $p_n'(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}>0$，根唯一，因此$p_n(x)=1$在区间$(0,1)$中有且仅有一根.

(2) 若$x_{n+1}>x_n$, 则
$$1=p_{n+1}(x_{n+1})=x_{n+1}+x_{n+1}^2+\cdot+x_{n+1}^{n+1}>x_n+x_n^2+\cdots+x_n^n=p_n(x_n)=1$$
矛盾, 因此$x_{n+1}\le x_n$, 即$\{x_n\}$是单调递减数列，而$0<x_n<1$, 由单调有界原理知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

(3) 记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 而当$n\ge 2$时, $0<x_n\le x_2<1$, 取$q\in(x_2,1)$ 则$0\le a\le x_2<q<1$. 由$0<x_n^n<q^n$知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n=0$.

由$p_n(x_n)=x_n+x_n^2+\cdots+x_n^n=p_n(x_n)=1$ 知$\frac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}=1$, 两边取极限,得
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}=1,$$
从而$\frac{a(1-0)}{1-a}=1$, $a=\frac{1}{2}$, 故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$. ■

例 9.6.6 证明*Tauber*定理*:* 设在$-1<x<1$ 上有
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad \lim_{n\to\infty}na_n=0.$$
若$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=S$, 则$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛且其和为S.

证明. 由$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$知$\lim\limits_{n\to\infty}n|a_n|=0$, 从而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k|a_k|}{n}=0.$$
故$\forall\varepsilon>0,\exists N_1$, 使得$n>N_1$ 时, 有
$$0\le\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k|a_k|}{n}<\frac{\varepsilon}{3},\quad n|a_n|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

又$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=S$, 所以$\exists\delta>0$,当$1-\delta<x<1$时$|f(x)-S|<\frac{\varepsilon}{3}$. 取$N_2$, 当$n>N_2$时,$\frac{1}{n}<\delta$,从而$1-\delta<1-\frac{1}{n}$,取$x=1-\frac{1}{n}$,则

$$\left|f\left(1-\frac{1}{n}\right)-S\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

取$N=\{N_1,N_2\}$, 当$n>N$时

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n}a_k-S\right|&=\left|\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_kx^k-\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kx^k+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k-S\right|\\&\le\left|\sum_{k=1}^{n}a_k(1-x^k)\right|+\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kx^k\right|+\left|\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k-S\right|.\end{aligned}$$

取$x=1-\frac{1}{n}$, 右边第一项

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k(1-x^k)\right|&=\left|\sum_{k=1}^{n}a_k(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1})\right|\\&\le\sum_{k=1}^{n}|a_k|(1-x)\cdot k=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k|a_k|}{n}<\frac{\varepsilon}{3};\end{aligned}$$

右边第二项

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kx^k\right|&\le\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}k|a_k|x^k<\frac{\varepsilon}{3n}\sum_{k=n+1}^{\infty}x^k\\&\le\frac{\varepsilon}{3n}\cdot\frac{1}{1-x}=\frac{\varepsilon}{3n\cdot\frac{1}{n}}=\frac{\varepsilon}{3};\end{aligned}$$

右边第三项

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k-S\right|=\left|f\left(1-\frac{1}{n}\right)-s\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

故

$$\left|\sum_{k=0}^{n}a_k-S\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

■

9.6.2 第九章复习题二

1. 求下列幂级数的收敛半径与收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{n!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n+1}(x+1)^n$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln^2 n}{n^n}x^n$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n-1)!}x^{2n-1}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+1)^n}{4^n+(-2)^n}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^p}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(x-1)^n$;　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.

2. 求下列幂级数的收敛区间:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n} \quad (a>b>0)$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n (x+a)^{2n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{5^n\sqrt{n+1}} x^{2n-1}$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\sin\frac{1}{3n}\right)\left(\frac{3+x}{3-2x}\right)^n$.

3. 求下列幂级数的和函数:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n+1}$; (2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} x^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n$; (4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n, \quad (x\geq 0)$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n}$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}\cos(n-1)x, \quad (|q|<1)$;

(7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; (8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^{n-1}$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$; (10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$.

4. 把下列函数展为x的幂级数：

(1) $f(x)=\ln(1+x+x^2+x^3)$; (2) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

(3) $f(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3}$; (4) $f(x)=(1+\mathrm{e}^x)^3$;

(5) $f(x)=x\arctan x+\sqrt{1-x^2}$; (6) $f(x)=\sin 4x\cos x$.

5. 将函数$f(x)=\frac{x}{2-x-x^2}$展为x的幂级数,并指出其收敛域.

6. 把函数$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$在点$x_0=1$处展为泰勒级数,并指出其收敛域.

7. 将函数$f(x)=\sin x$展为$(x-\frac{\pi}{6})$的泰勒级数,并指出其收敛域.

8. 求级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$的和.

9. 求函数$\dfrac{\ln(1-x}{1-x}$的Maclaurin展开式.

10. 求函数$\arg\tan x-\ln\sqrt{1+x^2}$的Maclaurin展开式.

11. 求级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 的和.

12. 展开$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)$为$x$的幂级数，并推出$1=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}$.

13. 求函数$\int_0^x \cos t^2 dt$的幂级数展开式，并推出收敛半径.

14. 设$a,b>-1$, 证明下述级数在$[0,1]$上一致收敛:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x^{n+a}}{n+a}-\frac{x^{n+b}}{n+b}\right).$$

15. 证明当$a,b>-1$时,

$$\int_0^1 \frac{x^a-x^b}{1-x}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+a}-\frac{1}{n+b}\right).$$

16. 设$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上绝对收敛且一致收敛. 问：它是否必在$[a,b]$上绝对一致收敛? 研究例子

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n, \quad x\in[0,1].$$

17. 设$a_1=a_2, a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$, 证明: 对$|x|<\frac{1}{2}$, 幂级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n-1}$收敛,并求其和函数$s(x)$.

18. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(x-1)^n$的收敛域,并求其和函数$s(x)$.

19. 求$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{n+1}$在$x=0$的Taylor展开式.

20. 设$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R$, 证明: 当$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n R^{n+1}}{n+1}$收敛时,以下等式成立

$$\int_0^R \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n R^{n+1}}{n+1}x^n.$$

21. 设$p_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$, x_m 是$p_{2m+1}(x)=0$ 的实根. 求证: $x_m<0$, 且$\lim\limits_{n\to+\infty} x_m=0$.

第 十 章　Fourier级数与Fourier变换

10.1　周期函数的Fourier级数

10.1.1　三角函数系的正交性

在前一章中我们研究了函数项级数与幂级数. 这一章我们将研究另一种重要的函数项级数, 也就是三角级数. 所谓三角级数也就是下面形式的级数.

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{10.1}$$

其中$a_0,a_1,a_2,\cdots,$ 与$b_1,b_2,\cdots$ 都是常数.

下面给出周期函数的定义.

定义 10.1.1 设函数$f(x)$ 定义在$(-\infty,+\infty)$ 上, 若存在常数$T>0$, 使得对一切$x\in(-\infty,\infty)$ 有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称$f(x)$ 是周期函数, 周期是T.

注 10.1.2 一般所说的周期, 是指满足上式的T 中的最小者.

例如常见的三角函数$\sin x$ 和$\cos x$ 都是周期为2π 的周期函数. 显然如果(10.1) 式收敛, 那么得到的和函数一定是周期为2π 的函数. 我们的问题是: 如何将一个周期为2π 的周期函数展成形如(10.1) 式的三角级数. 为此我们先研究三角函数形成的函数集合的基本性质.

对于三角函数系

$$1,cosx,sinx,\ldots,cosnx,sinnx,\ldots$$

容易得到下面的公式.

设m, n 为正整数,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mxdx=0,$$

若$m\neq n$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mxdx=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mxdx=0,$$

若$m=n$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos nxdx=\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin nxdx=\pi.$$

由此上述三角函数系正交，即任意两个不同的函数的乘积在区间$[-\pi,\pi]$ 上的积分为0, 任意相同函数的乘积在区间$[-\pi,\pi]$上的积分为π 或2π.

10.1.2 Fourier级数的定义

周期为T的周期函数在某种条件下能表示成三角级数

$$g(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t),$$

$\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ 称为圆频率.

易知$\int_c^{c+T}g(t)dt=\int_0^T g(t)dt$. 设$t=\dfrac{T}{2\pi}x$, 则$g(t)=g(\dfrac{T}{2\pi}x)=f(x)$ 为以2π 为周期的周期函数, 因而我们只讨论以2π 为周期的周期函数.

设$f(x)$是以2π为周期的周期函数，它的圆频率ω为1，假定$f(x)$能展开成下列三角级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

考察此时三角级数系数满足的性质.

设上式的右端在$[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于函数$f(x)$, 则将上式两边逐项积分得到

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\pi a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right).$$

得

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx.$$

两边乘$\cos mx$再逐项积分得

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mxdx\\&=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mxdx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mxdx\right)\\&=a_m\pi.\end{aligned}$$

由此

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mxdx,\quad m=1,2,3,\cdots.$$

两边乘$\sin mx$再逐项积分得

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mxdx\\&=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mxdx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mxdx\right)\\&=b_m\pi.\end{aligned}$$

由此

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mxdx,\quad m=1,2,3,\cdots.$$

现在从另外一个角度来看，假定$f(x)$是一个周期为2π 的可积或绝对可积的函数（如果是有界函数，就假定它是Riemann 可积的，简称可积；如果是无界函数，就假定它是广义绝对可积的，简称绝对可积），按照上述公式，可以得出一串系数a_n,b_n，称为$f(x)$的Fourier系数，从而可以写出相应的三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

至于这个级数是否收敛？如果收敛的话，它的和是否就等于$f(x)$？这些问题都有待进一步研究，但有一点是可以肯定的，这个级数是由$f(x)$所确定的，称为$f(x)$的Fourier级数，记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

下面将要看到，对于相当广泛的一类函数，它的级数是收敛于它自己的，这正是Fourier级数之所以重要的原因. 下面看两个Fourier级数的例子.

例 10.1.3 设$f(x)$ 是周期为2π 的函数, 且

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-\pi, \pi); \\ -\pi, & x = \pi. \end{cases}$$

写出它的*Fourier*级数.

解.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = 0.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nxdx = 0.$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nxdx \\ &= \frac{1}{\pi}\left([-x\frac{\cos nx}{n}]\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx \right) \\ &= (-1)^{n-1}\frac{2}{n}. \end{aligned}$$

由此

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin nx, \quad x \in [-\pi, \pi).$$

■

例 10.1.4 设$f(x)$ 是周期为2π 的函数，且

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, 2\pi]; \\ 2\pi, & x = 0. \end{cases}$$

写出它的*Fourier*级数.

解.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} xdx = \frac{1}{\pi}[\frac{x^2}{2}]\Big|_{0}^{2\pi} = 2\pi.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x\cos nxdx \\ &= \frac{1}{\pi}\left([x\frac{\sin nx}{n}]\Big|_{0}^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_{0}^{2\pi}\sin nxdx \right) = 0. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left([-x\frac{\cos nx}{n}]\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nx dx \right) = -\frac{2}{n}.
\end{aligned}
$$

由此

$$
f(x) \sim \pi - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}\sin nx, \quad x \in (0, 2\pi].
$$

■

上面两个例子，作为2π的周期函数，它们是不一样的，因而它们的Fourier级数也不一样.

10.1.3 习题10.1

1. 证明:

   (1) $1, cosx, \cos 2x, \cdots, \cos nx, \cdots$

   (2) $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \cdots, \sin nx, \cdots$是$[0,\pi]$ 上的正交系;

   但

   $$1, cosx, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

   不是$[0,\pi]$ 上的正交系.

2. 设$f(x)$是周期为2π 的函数，且

   $$
   f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-\pi, 0); \\ 0, & x \in [0, \pi). \end{cases}
   $$

   写出它的Fourier级数.

10.2 函数的Fourier级数展开

10.2.1 周期为2π的函数

定义在$[-\pi,\pi)$上函数$f(x)$, 以2π为周期延拓到整个实数轴上得到周期函数

$$
\tilde{f}(x) = f(x - 2n\pi), \quad x \in [(2n-1)\pi, (2n+1)\pi),
$$

$\tilde{f}(x)$的Fourier级数称为$f(x)$ 的Fourier级数展开式.

例 10.2.1 把函数$f(x) = x^2, x \in [0, 2\pi)$ 展开为以2π为周期的*Fourier*级数.

解. 将$f(x)$在$[0,2\pi]$上以2π为周期延拓到整个实数轴上.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8}{3}\pi^2, \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(x^2\frac{\sin nx}{n} + 2x\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\sin nx}{n^3} \right)\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{4}{n^2}, \quad (n \in \mathbf{N}). \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[x^2\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) + 2x\left(\frac{\sin nx}{n^2}\right) + \left(\frac{\cos nx}{n^3}\right) \right]\Big|_0^{2\pi} \\
&= -\frac{4\pi}{n}, \quad (n \in \mathbf{N}).
\end{aligned}
$$

故$f(x)$的Fourier级数展开式为

$$f(x) \sim \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos nx - \frac{\pi}{n}\sin nx\right), \quad (x \in (0, 2\pi)).$$

■

10.2.2 正弦级数和余弦级数

定义在$[-\pi, 0]$或$[0, \pi]$上的函数奇、偶延拓到$[-\pi, \pi]$，再以2π为周期延拓到整个实数上.

由定积分的性质,若$f(x)$是奇函数, 那么显然有$a_n = 0$, 而

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx dx \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

这时, 相应的Fourier级数

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$$

称为正弦级数.

同样，若$f(x)$是偶函数, 那么有$b_n = 0$, 而

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx dx \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

这时, 相应的Fourier级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cos nx$$

称为余弦级数.

在实际问题中，出于某种特殊的用途，也经常需要将一个函数展开成正弦级数或余弦级数.

例 10.2.2 把函数$f(x) = x + 1, x \in (0, \pi)$分别展开为正弦和余弦级数.

解. 对$f(x)$进行奇延拓,有

$$F(x) = \begin{cases} x + 1, & 0 < x < \pi; \\ 0, & x = 0; \\ x - 1, & -\pi \le x < 0. \end{cases}$$

这时

$$\begin{aligned} a_0 &= 0; \quad a_n = 0; \quad (n \in \mathbf{N}) \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x+1)\sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{\sin nx}{n^2} - \frac{\cos nx}{n}\right]\Bigg|_0^\pi \\ &= \frac{2}{n\pi}[1 - (\pi+1)(-1)^n]. \quad (n \in \mathbf{N}). \end{aligned}$$

故$f(x)$的正弦级数展开式为$f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{2}{\pi}\left[(\pi+2)\sin x - \frac{\pi}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots\right] \\ &= \frac{2(\pi+2)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n}\sin 2nx, \quad (x \in (0, \pi)). \end{aligned}$$

对$f(x)$进行偶延拓,有

$$F(x)=\begin{cases} x+1, & 0<x<\pi; \\ 1, & x=0; \\ 1-x, & -\pi\le x<0. \end{cases}$$

这时

$$\begin{aligned} b_n &= 0;\quad (n\in\mathbf{N}) \\ a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^{\pi}=\pi+2; \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nxdx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{\sin nx}{n}\right]\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1].\quad (n\in\mathbf{N}). \end{aligned}$$

故$f(x)$的余弦级数展开式为

$$f(x)\sim\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x,\quad (x\in[0,\pi]).$$

■

10.2.3 周期为T的函数

若令$x=\frac{2\pi}{T}t$, 则$g(t)=f(\frac{2\pi}{T}t)$ 以2π为周期, 于是

$$g(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos ntdt=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\cos n\omega xdx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin ntdt=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\sin n\omega xdx.$$

此处$\omega=\frac{2\pi}{T}$. 从而

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x).$$

例 10.2.3 设$f(x)$是以4为周期的周期函数,它在$[-2,2]$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\in[-2,0); \\ h, & x\in[0,2). \end{cases}\qquad (\text{常数}h>0)$$

将$f(x)$展开为*(以4为周期)*正弦级数.

解.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2}\int_0^2 h dx = h; \\ a_n &= \frac{1}{2}\int_0^2 h\cos\frac{n\pi}{2}x dx = \frac{h}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi}{2}x\right]_0^2 = 0; \\ b_n &= \frac{1}{2}\int_0^2 h\sin nx dx = \frac{h}{n\pi}\left[-\cos\frac{n\pi}{2}x\right]_0^2 \\ &= \frac{h}{n\pi}(1-\cos n\pi) \quad (n\in\mathbb{N}). \end{aligned}$$

故$f(x)\sim\frac{h}{2}+\frac{2h}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}x,\quad x\in[-2,2]$. ■

10.2.4 Fourier级数的复数形式

首先我们回忆一下Euler公式,

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta})$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta})$$

如果记函数的三角级数展开式系数为

$$a_0 = c_0,\quad a_n - ib_n = c_n,\quad a_n + ib_n = c_{-n}.$$

那么上节中介绍的三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t)$$

就可以写成下面简洁的形式.

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\,\mathrm{e}^{in\omega t}.$$

经简单计算可得

$$c_n = a_n - ib_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{e}^{-in\omega t}\,dt,\quad n=1,2,\cdots.$$

同样可得

$$c_{-n} = a_n + ib_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{e}^{in\omega t}\,dt,\quad n=1,2,\cdots.$$

$$c_0 = a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt,$$

其中$\omega=\frac{2\pi}{T}$.

10.2.5 习题10.2

1. 证明$\{\mathrm{e}^{inx}: n=0,\pm1,\cdots\}$ 是$[-\pi,\pi]$ 上的正交系.

2. 把函数$f(x)=x^2, x\in[-\pi,\pi)$ 展开为Fourier级数.

   答案: $x^2=\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^2}\cos nx, x\in[-\pi,\pi]$. 取$x=\pi$ 得到$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$. 取$x=0$得到$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$.

3. 把函数$f(x)=x, x\in(0,\pi)$分别展开为余弦和正弦级数.

答案: $x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}, x\in[0,\pi]$. $x=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}, x\in[0,\pi)$.

4. 把函数$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{l}, & x\in(0,l/2);\\ 0, & x\in(l/2,l)\end{cases}$ 展开为正弦级数.

答案: $f(x)\sim\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{l}-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{4n^2-1}\frac{\sin 2n\pi x}{l}$.

10.3 Fourier级数的敛散性判别法

10.3.1 狄立克莱(Dirichlet)积分

为了研究Fourier级数的收敛问题，我们必须把Fourier级数的部分和表示为含参变量的广义积分：Dirichlet积分. 设

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

其中$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$; $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx, n=1,2,\ldots$.

考察$f(x)$在点x处的Fourier 级数部分和,

$$\begin{aligned}S_n[f(x)]&=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos mt\cos mx+\sin mt\sin mx]dt\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)[\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}\cos m(t-x)]dt.\end{aligned}$$

容易证明

$$\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}\cos mv=\frac{\sin(2n+1)\frac{v}{2}}{2\sin\frac{v}{2}}.$$

那么

$$\begin{aligned}S_n[f(x)]&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+u)\frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}}du\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+u)\frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}}du.\end{aligned}$$

由此Fourier级数的部分和

$$S_n[f(x)]=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}du.$$

这个重要的积分称为Dirichlet 积分，函数$\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}$称为Dirichlet 核.

这样一来级数的收敛问题，就变为研究含有参变量的Dirichlet积分是否有极限的问题.

10.3.2 黎曼(Riemann)引理

为了讨论上述Dirichlet积分否有极限的问题，先讲一个重要的引理.

引理 10.3.1 （**黎曼引理**） 设函数$g(t)$ 在区间$[a,b]$是可积广义绝对可积，那么以下的极限式成立：

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b g(t)\sin(pt)dt=0,\quad \lim_{p\to+\infty}\int_a^b g(t)\cos(pt)dt=0.$$

证明. (1) 先设$g(t)$ 在区间$[a,b]$有界可积. 对$[a,b]$ 的任一个分法,

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b,$$

设$\triangle t_i=t_i-t_{i-1}$, M_i, m_i 分别为函数$g(t)$ 在$[t_{i-1},t_i]$ 上的上确界、下确界. $\omega_i=M_i-m_i$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b g(t)\sin(pt)dt&=\sum_{i=1}^n\int_{t_{i-1}}^{t_i}g(t)\sin(pt)dt\\&=\sum_{i=1}^n\int_{t_{i-1}}^{t_i}[g(t)-m_i]\sin(pt)dt+\sum_{i=1}^n m_i\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sin(pt)dt.\end{aligned}$$

注意到

$$\left|\int_a^b\sin(pt)dt\right|=\left|\frac{\cos pa-\cos pb}{p}\right|\le\frac{2}{|p|}.$$

那么

$$\left|\int_a^b g(t)\sin(pt)dt\right|\le\sum_{i=1}^n\omega_i\triangle t_i+\frac{2}{|p|}\sum_{i=1}^n|m_i|.$$

对于任意给定的$\varepsilon>0$, 由$g(t)$ 在$[a,b]$ 上的可积性, 可取定一个分法使得

$$\sum_{i=1}^n\omega_i\triangle t_i<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令$M=\frac{4}{\varepsilon}\sum_{i=1}^n|m_i|$, 则当$|p|>M$ 时, 就有

$$\left|\int_a^b g(t)\sin(pt)dt\right|<\varepsilon.$$

即

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b g(t)\sin(pt)dt=0.$$

(2) 设函数$g(t)$ 在区间$[a,b]$广义(无界)绝对值可积,不妨设只有b点为奇点. 对于任意给定的$\varepsilon>0$, 由$|g(t)|$可积, 存在$\eta>0$, 使

$$\int_{b-\eta}^b|g(t)|dt<\frac{\varepsilon}{2}.$$

而由(1), 当p充分大时,

$$\left|\int_a^{b-\eta}g(t)\sin(pt)dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而

$$\left|\int_a^b g(t)\sin(pt)dt\right|\le\left|\int_a^{b-\eta}g(t)\sin(pt)dt\right|+\left|\int_{b-\eta}^b g(t)\sin(pt)dt\right|<\varepsilon.$$

即

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b g(t)\sin(pt)dt=0.$$

同理可证

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b g(t)\cos(pt)dt=0.$$

■

定理 10.3.2 （局部性定理） 可积或广义绝对值可积函数$f(x)$的*Fourier*级数在点x的收敛和发散情况，只与$f(x)$在这一点的充分邻近区域$(x-\delta,x+\delta)$的值有关.

证明. 对任意的$\delta>0$, $\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2\sin\frac{u}{2}}$在$[\delta,\pi]$上是可积或绝对可积的函数$f(x+u)+f(x-u)$ 同有界连续函数$\dfrac{1}{2\sin\frac{u}{2}}$ 的乘积，因此也是可积或绝对可积的, 由Riemann引理,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\delta^\pi[f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}du=0.$$

将$S_n[f(x)]$ 的积分分成在$[0,\delta]$与$[\delta,\pi]$两部分，第二个部当$n\to\infty$时，这一积分趋向于零，所以$S_n[f(x)]$的收敛问题就完全决定于$[0,\delta]$的积分当$n\to\infty$的极限情况.但在这积分中只牵涉到函数在区间$[x-\delta,x+\delta]$内的值，又δ是任意正数，这就证明了结论. ■

从以上的说明推知，如果两个函数在x点的一邻域内取值相同，不论在其他点处数值如何，它们的Fourier级数在点x的收敛或发散情况相同.

应用黎曼引理立即推出：

定理 10.3.3 可积或绝对值可积函数$f(x)$的*Fourier*系数趋向于零.

定理 10.3.4 设函数$\psi(u)$在区间$[0,\delta]$上可积或绝对可积*(*δ为任意正数*)*, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta\psi(u)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}du=\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta\psi(u)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{u}du.$$

证明. 令

$$g(u)=\begin{cases}\frac{1}{2\sin\frac{u}{2}}-\frac{1}{u}, & u>0\\ 0, & u=0.\end{cases}$$

容易验证$g(u)$是$[0,\delta]$上的连续函数, 由黎曼引理, 当$n\to\infty$时, 有

$$\int_0^\delta\psi(u)\left[\frac{1}{2\sin\frac{u}{2}}-\frac{1}{u}\right]\sin(n+\frac{1}{2})udu=\int_0^\delta\psi(u)g(u)\sin(n+\frac{1}{2})udu\to0.$$

■

10.3.3 狄尼(Dini)判别法及其推论

定理 10.3.5 （狄尼定理） 设$f(x)$是周期为2π且在$[-\pi,\pi]$上可积或绝对可积的函数，对某个实数s，命$\phi(u)=f(x+u)+f(x-u)-2s$, ，若能取到适当的$h>0$，使在$[0,h]$上，$\dfrac{\phi(u)}{u}$为可积或绝对值可积，那么$f(x)$的*Fourier*级数在点x收敛于s.

证明. 在Dirichlet积分中取$f=1$, 易得$\dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}du=1.$

$$\begin{aligned}S_n[f(x)]-s&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\phi(u)\left(\frac{1}{2\sin\frac{u}{2}}-\frac{1}{u}\right)\sin(n+\frac{1}{2})udu\\&+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{\phi(u)}{u}\sin(n+\frac{1}{2})udu.\end{aligned}$$

■

定义 10.3.6 设$f(x)$ 是定义在x_0附近的函数，如果存在$\delta > 0$, $L > 0$和$\alpha \in (0,1]$，使得当$u \in (0,\delta]$时有$|f(x_0 \pm u) - f(x_0 \pm 0)| < Lu^{\alpha}$,，就说$f$在$x_0$附近满足$\alpha$阶*Lipschitz* 条件.

推论 10.3.7 设$f(x)$ 是周期为2π 且在$[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积的函数，如果$f(x)$ 在x_0 附近满足α阶*Lipschitz*条件，那么
（*1*）当$f(x)$在x_0处连续时，$f(x)$ 的*Fourier* 级数在x_0点收敛于$f(x_0)$*;*
（*2*）当$f(x)$在x_0处有第一类间断点时，$f(x)$ 的*Fourier*级数在x_0点收敛于

$$\frac{1}{2}\left(f(x_0+) + f(x_0-)\right).$$

推论 10.3.8 设$f(x)$ 是周期为2π且在$[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积的函数，如果在x_0 存在导数$f'(x_0)$,，或是有两个有限的单侧导数$f'_+(x_0), f'_-(x_0)$，那么$f(x)$的*Fourier*级数在x_0点收敛于$f(x_0)$. 如果$f(x)$在x_0有两个有限的广义单侧导

$$\lim_{u\to 0+}\frac{f(x_0+u)-f(x_0+)}{u}, \lim_{u\to 0-}\frac{f(x_0-u)-f(x_0-)}{-u},$$

那么$f(x)$ 的*Fourier*级数在x_0 点收敛于$\frac{1}{2}\left(f(x_0+) + f(x_0-)\right)$. 因为这时对于函数在$x_0$ 点的$\alpha = 1$ 的*Lipschitz*条件是成立的.

10.3.4 Dirchlet-Jordan定理

定义 10.3.9 设函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上有定义, 若存在有限个分点$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 使得在每个区间(x_{i-1}, x_i) $(1 = 1, 2, \cdots, n)$ 上, $f(x)$ 都是单调的, 则称$f(x)$ 在$[a,b]$ 上逐段单调.

引理 10.3.10 （***Dirichlet*引理**） 设$g(t)$ 在$[0,b]$ $(b > 0)$ 上单调, 则

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^b g(t)\frac{\sin pt}{t}dt = \frac{\pi}{2}g(0+).$$

证明. 不失一般性, 可设$g(t)$ 是单调递增的. 我们有

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^b g(t)\frac{\sin pt}{t}dt \\
&= g(0+)\int_0^b \frac{\sin pt}{t}dt + \int_0^b [g(t) - g(0+)]\frac{\sin pt}{t}dt \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

因为$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$, 故

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to+\infty} I_1 &= \lim_{p\to+\infty} g(0+)\int_0^{pb}\frac{\sin t}{t}dt \\
&= g(0+)\int_0^{+\infty}\frac{\sin pt}{t}dt \\
&= \frac{\pi}{2}g(0+).
\end{aligned}$$

下面证明$I_2 \to 0$.

$$I_2 = \int_0^{\delta}[g(t) - g(0+)]\frac{\sin pt}{t}dt + \int_{\delta}^{b}[g(t) - g(0+)]\frac{\sin pt}{t}dt.$$

因为$g(t) - g(0+)$ 是单调函数, 并且当$t \to 0$ 时趋于零. 那么应用第二积分中值定理,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\delta}[g(t) - g(0+)]\frac{\sin pt}{t}dt &= [g(\delta) - g(0+)]\int_{\eta}^{\delta}\frac{\sin pt}{t}dt \\
&= [g(\delta) - g(0+)]\int_{p\eta}^{p\delta}\frac{\sin t}{t}dt.
\end{aligned}$$

其中$0 \le g(\delta) - g(0+) < \varepsilon$. 又因为$\int_{p\eta}^{p\delta} \frac{\sin t}{t} dt$ 关于p 一致有界, 因此有估计式

$$\left| \int_0^\delta [g(t) - g(0+)] \frac{\sin pt}{t} dt \right| \le 2L\varepsilon.$$

其中$\left| \int_0^\delta \frac{\sin t}{t} dt \right| \le L$.

对于积分

$$\int_\delta^b [g(t) - g(0+)] \frac{\sin pt}{t} dt,$$

由Riemann引理可知其趋于零, 这样Dirichlet引理得证. ■

定理 10.3.11 （***Dirichlet-Jordan*定理**） 设$f(x)$ 是在$(-\infty, \infty)$ 上以2π 为周期的函数, 满足*:*
(1) $f(x)$ 在$[-\pi, \pi]$ 上至多有有限个间断点, 而且都是第一类间断点*;*
(2) $f(x)$ 在$[-\pi, \pi]$ 上逐段单调.
则函数$f(x)$ 的*Fourier* 级数在$(-\infty, \infty)$ 上各点都收敛, 并且在$f(x)$ 的连续点收敛于$f(x)$, 在$f(x)$ 的间断点收敛于左、右极限的平均值$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

证明. 考察$f(x)$在点x处的Fourier 级数部分和

$$S_n[f(x)] = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin \frac{2n+1}{2} u}{2 \sin \frac{u}{2}} du.$$

$$S_n[f(x)] = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{u} du$$
$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+u) + f(x-u)] \left(\frac{1}{2\sin\frac{u}{2}} - \frac{1}{u} \right) \sin(n+\frac{1}{2}) u du.$$

由于

$$\lim_{u \to 0} \left(\frac{1}{2\sin\frac{u}{2}} - \frac{1}{u} \right) = 0,$$

所以函数$\frac{1}{2\sin\frac{u}{2}} - \frac{1}{u}$ 在$[0, \pi]$ 上连续, 从而函数$[f(x+u) + f(x-u)] \left(\frac{1}{2\sin\frac{u}{2}} - \frac{1}{u} \right)$ 在$[0, \pi]$ 上可积. 因此由Riemann引理可知

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+u) + f(x-u)] \left(\frac{1}{2\sin\frac{u}{2}} - \frac{1}{u} \right) \sin(n+\frac{1}{2}) u du \to 0, \quad (n \to \infty).$$

由定理中的条件"2", 存在$\delta > 0$, 使函数$f(x)$ 在$[x-\delta, x]$ 上单调, 在$[x, x+\delta]$ 上也是单调的. 所以,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta f(x+u) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{u} du = \frac{\pi}{2} f(x+0).$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta f(x-u) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{u} dt = \frac{\pi}{2} f(x-0).$$

由Riemann引理,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\delta^\pi \frac{f(x+u) + f(x-u)}{u} \sin(n+\frac{1}{2}) u du = 0.$$

那么就得到

$$\lim_{n\to\infty} S_n[f(x)] = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

定理证毕. ■

10.3.5 Fourier级数的一些性质

定理 10.3.12 ***(Fourier级数的逐项积分定理)*** 设周期为2π的函数$f(x)$在区间$[-\pi,\pi]$上可积或绝对可积且

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

则$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n}$收敛，且$f(x)$的*Fourier*级数可逐项积分，即$\forall c, x \in [-\pi,\pi]$

$$\int_c^x f(t)dt = \int_c^x \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)\right) dt.$$

证明. 仅对$f(x)[-\pi,\pi]$上只有有限个第一类间断点的情况加以证明. 记

$$F(x) = \int_c^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) dt.$$

由于

$$F(\pi) = \int_c^{\pi} \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) dt = \int_c^{0} \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) dt + \int_0^{\pi} \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) dt,$$
$$F(-\pi) = \int_c^{-\pi} \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) dt = \int_c^{0} \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) dt + \int_0^{-\pi} \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) dt,$$

所以

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_0^{\pi} \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) dt - \int_0^{-\pi} \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt - a_0\pi = 0,$$

从而$F(\pi) = F(-\pi)$.

故$F(x)$是周期为2π的连续函数, 且在$f(x)$的连续点，成立$F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$. 同时易知$\forall x \in [-\pi,\pi]$, $F(x)$的两个单侧导数$F'_{\pm}(x) = f(x\pm) - \frac{a_0}{2}$都存在, 据Jordan判别法, $F(x)$可展开为Fourier级数

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx).$$

令$x = 0$, 得

$$F(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} A_n = -F(0) - \frac{A_0}{2}.$$

而利用分部积分法，并分段使用Newton-Leibinz公式，即有

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}F(x)\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F'(x)\sin nx dx \\ &= -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - \frac{a_0}{2}\right]\sin nx dx = -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = -\frac{b_n}{n}. \end{aligned}$$

类似可得

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx dx = \frac{a_n}{n}.$$

所以$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n}=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}A_n=F(0)+\frac{A_0}{2}<+\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n}$收敛, 且

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx),$$

令$x=c$, 有

$$0=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-\frac{b_n}{n}\cos nc+\frac{a_n}{n}\sin nc),$$

两式相减并整理，即得到

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_c^x\left[f(t)-\frac{a_0}{2}\right]dt\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\frac{\sin nx-\sin nc}{n}+b_n\frac{-\cos nx+\cos nc}{n})\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_c^x(a_n\cos nt+b_n\sin nt)dt.\end{aligned}$$

即

$$\int_c^x f(t)dt=\int_c^x\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\right)dt.$$

■

由定理10.3.12可表明：

注 10.3.13 若$f(x)$可展成*Fourier*级数$\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 则该级数无论是否表示$f(x)$, 甚至根本不收敛，但它的逐项积分级数一定收敛.

注 10.3.14 并非每个三角级数（即使收敛）都能成为某个局部可积函数的*Fourier*级数. 如三角级数

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}.$$

用*Abel*判别法知该级数在$(-\infty,+\infty)$ 上点点收敛, 当由于$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$发散, 故它不可能是任何局部可积函数的*Fourier*级数.

定理 10.3.15 ***(Fourier*级数的逐项微分定理*)*** 设函数$f(x)$在区间$[-\pi,\pi]$上可积或绝对可积,

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

$f(-\pi)=f(\pi)$, 且除了有限个点外$f(x)$可微, f'可积或绝对可积, 则$f'(x)$的*Fourier*级数可由$f(x)$的*Fourier*级数逐项微分得到, 即

$$f'(x)\sim\frac{d}{dx}\left(\frac{a_0}{2}\right)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d}{dx}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-na_n\sin nx+nb_n\cos nx\right).$$

证明. 由条件知$f'(x)$可展开为Fourier级数, 记它的Fourier系数为a_n'和b_n', 则有

$$
\begin{aligned}
a_0' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = \frac{1}{\pi}[f(\pi)-f(-\pi)] = 0,\\
a_n' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx\\
&= \left.\frac{f(x)\cos nx}{\pi}\right|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = nb_n,\\
b_n' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx = -na_n,
\end{aligned}
$$

于是,

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-na_n \sin nx + nb_n \cos nx\right).$$

■

关于Fourier级数的一致收敛性问题，我们只叙述结论，它的证明需要量对黎曼引理和狄立克莱引理的一致收敛性的情况进行进行分析，我们就不详细讨论了.

10.3.6 习题10.3

1. 设$f(x) = \begin{cases} (x+2\pi)^2, & -\pi \le x < 0; \\ x^2, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$ 写出$f(x)$以2π为周期的Fourier级数的和函数$s(x)$在$[-\pi,\pi]$上的表达式.

2. 设$f(x) = \begin{cases} -x, & |x| \le \frac{\pi}{2}; \\ x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$ 写出$f(x)$以2π为周期的Fourier级数的和函数$s(x)$ 在$[-\pi,\pi]$ 上的表达式.

3. 设$f(x) = x^3, -\pi \le x < \pi$. 把$f(x)$展为以$2\pi$为周期的Fourier级数时,其和函数为$s(x)$, 求$s(\frac{5\pi}{2})$与$s(5\pi)$的值.

4. 若$f(x)$是以2π为周期的函数,将$f(x)$展为Fourier级数. 如果$f(x)$在$[-\pi,\pi)$上的表达式为:

   (1) $f(x) = 3x^2+1$; (2) $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$;
   (3) $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$; (4) $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$;
   (5) $f(x) = |\cos x|$; (6) $f(x) = 3\cos\frac{x}{2}$.

5. 若$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, 在下面所给的区间上把$f(x)$展为以2π为周期的Fourier级数.

   (1) $x \in (-\pi,\pi)$; (2) $x \in (0,\pi)$.

6. 将下列函数展开为成正弦级数:

   (1) $f(x) = 1, \quad x \in [0,\pi]$; (2) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}, \quad x \in [0,\pi]$;
   (3) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0,\frac{\pi}{2}); \\ \pi & x \in [\frac{\pi}{2},\pi]; \end{cases}$ (4) $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi x}{2}, & x \in [0,1), \\ 0, & x \in [1,2]. \end{cases}$;
   (7) $f(x) = sgn(\cos x)$.

7. 将$f(x) = x(\pi - x), x \in [0,\pi]$展开为以$2\pi$为周期的余弦级数.

8. 将$f(x) = 2x+3, x \in [0,\pi]$展开为以$2\pi$为周期的余弦级数.

9. 将$f(x) = 2x, x \in [0,\pi]$分别展为以2π为周期的正弦级数和余弦级数.

10. 将函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1,0), \\ x+1 & x \in [0,1] \end{cases}$$

展开为以2为周期的Fourier级数.

11. 将函数$f(x)=2+|x|,\ x\in[-1,1]$展开成以2为周期的Fourier级数,并求级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$的和.

12. 将周期为2π的函数$f(x)=\frac{1}{4}x(2\pi-x),\quad x\in[0,2\pi]$展开成Fourier级数, 并由此求出$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2},\quad x\in(0,2\pi)$的和函数及$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

13. 将函数
$$f(x)=\begin{cases}2-x, & x\in[0,4)]\\ x-6 & x\in(4,8]\end{cases}$$
展开为以8为周期的Fourier级数,并画出Fourier级数的和函数$s(x)$的图形.

14. 设$f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上可积且绝对可积, 应分别对它进行怎么样的延拓,才能使它在$[-\pi,\pi]$上Fourier级数的形式为

(1) $f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(2n-1)x$; (2) $f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n\sin 2nx$.

15. 设$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积且绝对可积, 证明:

(1) 若$\forall x\in[-\pi,\pi]$, 成立$f(x)=f(x+\pi)$, 则$a_{2n-1}=b_{2n-1}=0$;

(2) 若$\forall x\in[-\pi,\pi]$, 成立$f(x)=-f(x+\pi)$, 则$a_{2n}=b_{2n}=0$.

16. 设$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上Fourier系数为a_n和b_n, 求下列函数的Fourier系数$\tilde{a}_n$和$\tilde{b}_n$:

(1) $g(x)=f(-x)$; (2) $h(x)=f(x+C)$ (C是常数);

(3) $F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x-t)dt$ (假定积分顺序可以交换).

17. 设$\phi(s)$在$[a,b]$上为单调增加函数，证明

（1）如果$a=0,b<0$,有$\dfrac{1}{\pi}\int_a^b\phi(s)\dfrac{\sin ps}{s}ds\to-\dfrac{1}{2}\phi(-0)\ \ (p\to\infty)$

（2）如果$a<0,b>0$,有$\dfrac{1}{\pi}\int_a^b\phi(s)\dfrac{\sin ps}{s}ds\to\dfrac{\phi(+0)+\phi(-0)}{2}\ \ (p\to\infty)$.

18. 设$f'(x)$在$[0,1]$上Riemann可积, 而周期为1的函数$g(x)$在$\mathbf{R}$上连续且$\int_0^1 g(x)dx=0$. 记$a_m=\int_0^1 g(mx)f(x)dx$, 证明级数$\sum\limits_{m=1}^{+\infty}a_m^2$收敛.

10.4 Fourier变换

10.4.1 Fourier变换的定义

在下面的讨论中, 我们都假定函数$f(x)$ 在$(-\infty,\infty)$ 上绝对可积.

定义 10.4.1 称$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{e}^{-i\omega x}\,dx$ 为$f(x)$ 的*Fourier* 变换, 并把它记为$F(f)$ 或$\hat{f}(\omega)$. 那么,
$$F(f)=\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{e}^{-i\omega x}\,dx.$$

由$f(x)$的绝对可积性以及$|\,\mathrm{e}^{-i\omega x}\,|=1$ 可以证明：
(1) $\hat{f}(\omega)$ 是$\omega\in(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数.
(2) 黎曼引理: $\lim\limits_{\omega\to\infty}\widehat{f}(\omega)=0$.

下面我们可以从直观的角度分析一下Fourier 变换. 首先我们把任一个非周期的函数看成一个周期为T的周期函数, 也就是对于函数$f(x)$, 在$[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$ 内, 令$f_T(x)=f(x)$, 再延拓到$(-\infty,+\infty)$仍记为$f_T(x)$.

$\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 取$M > 2|x|$, $\forall T$, 当$T > M > 2|X|$时, $|x| < \frac{T}{2}, f_T(x) = f(x)$, 故

$$\lim_{T\to+\infty} f_T(x) = f(x).$$

那么函数$f_T(x)$ 有一个三角级数展开式,

$$f_T(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, \mathrm{e}^{i\omega_n x},$$

其中

$$c_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\, \mathrm{e}^{-i\omega_n t}\, dt, \quad \omega_n = n\omega.$$

那么,

$$f_T(x) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\, \mathrm{e}^{-i\omega_n t}\, dt\right]\mathrm{e}^{i\omega_n x}.$$

由此我们再计算一下原来函数$f(x)$ 的展开式.

$$f(x) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\, \mathrm{e}^{-i\omega_n t}\, dt\right]\mathrm{e}^{i\omega_n x}.$$

记$\triangle\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = \frac{2\pi}{T}$, 则$T = \frac{2\pi}{\triangle\omega}$. 所以

$$f(x) = \lim_{\triangle\omega\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\, \mathrm{e}^{-i\omega_n t}\, dt\right]\mathrm{e}^{i\omega_n}\, x\triangle\omega.$$

这样就有

$$f(x) = \lim_{\triangle\omega\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)\, \mathrm{e}^{-i\omega_n x}\, dx\right]\mathrm{e}^{i\omega_n x}\triangle\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\, \mathrm{e}^{i\omega x}\, d\omega.$$

其中

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-i\omega x}\, dx.$$

我们称

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\, \mathrm{e}^{i\omega x}\, d\omega.$$

为$\hat{f}(\omega)$ 的Fourier 逆变换. 又称

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-i\omega x}\, dx\right]\mathrm{e}^{i\omega x}\, d\omega.$$

为$f(x)$ 的Fourier 积分公式.

10.4.2 Fourier变换的性质

Fourier变换有一些简单的性质，这些性质在偏微分方程和概率论等课程中有很重要性的应用.

性质 10.4.2 *(线性)*

$$F(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 F(f_1) + a_2 F(f_2)$$

其中a_1, a_2 是两个任意常数.

性质 10.4.3 *(平移)* 对任何$f(x)$，设$\tau_s f(x)=f(x-s)$*(*即$f(x)$的不移*)*，那么

$$F(\tau_s f)=\mathrm{e}^{-is\omega}F(f).$$

这个性质表明平移后的*Fourier* 变换等于未作平移的*Fourier*乘$\mathrm{e}^{-is\omega}$.

性质 10.4.4 *(导数)* 设$f(x)\to 0(x\to\pm\infty)$则$F(\frac{d}{dx}f)=i\omega F(f).$，这一性质告诉我们，求导运算在富里埃变换下成为乘积运算.

性质 10.4.5

$$F(-ixf(x))=\frac{d}{d\omega}F(f).$$

10.4.3 习题10.4

1. 用实数形式的Fourier级数直接导出Fourier积分的三角形式

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)dt.$$

2. (1) 证明$f(x)$是偶函数时的Fourier积分

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)dt\right]\cos\omega x d\omega.$$

(2) 证明$f(x)$是奇函数时的Fourier积分

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}f(t)\sin\omega(x-t)dt\right]\sin\omega x d\omega.$$

3. 求下列定义在$(-\infty,+\infty)$的函数的Fourier变换:

(1) $f(x)=\mathrm{e}^{-a|x|}$, $(a>0)$;　　(2) $f(x)=x\,\mathrm{e}^{-ax^2}$, $(a>0)$;

(3) $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-2x}, & x\geq 0,\\ 0 & x<0\end{cases}$;　(4) $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x<1,\\ 0 & x\geq 1.\end{cases}$

4. 求$f(x)=\mathrm{e}^{-ax}(x\in[0,+\infty),a>0)$的正弦变换和余弦变换.