第一章 数列极限与实数系的基本定理

§ 1.1 实数系

§ 1.1.1 实数的连续性

所有自然数的集合, 所有整数的集合, 所有有理数的集合, 所有实数的集合和所有复数的集合分别记为 $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$. 众所周知,$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

设 $\mathbf{K}$ 是含有非零数的集合, 若 $\mathbf{K}$ 对四则运算是封闭的, 即 $\mathbf{K}$ 中任意二数的和、差、积、商（除数不为零）仍在 $\mathbf{K}$ 中, 则称 $\mathbf{K}$ 是一个数域. 由定义易知,$\mathbf{Q}$,$\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 都是数域, 并分别称为有理数域、实数域和复数域, 而 $\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{Z}$ 都有不数域. 此外易知, 任何数域必定含有 0 和 1 这两个数, 因此任意数域都包含有理数域, 从而 $\mathbf{R}^+$,$\mathbf{R}^-$,$\mathbf{Q}^+\mathbf{Q}^-$ 等都不是数域.

因为实数域 $\mathbf{R}$ 中的任何数 x 与数轴 OX 上的点一一对应, 故今后将实数 x 也说成是数轴 OX 上的点 x, 因此 $\mathbf{R}$ 也称实数直线或简称为数直线. 由于直线是连续的、没有间隙的, 所以我们说实数域 $\mathbf{R}$ 具有连续性或完备性. 有理数域 $\mathbf{Q}$ 所对应的点（称为有理点）在数轴上的分布是很密的, 以至于任何两个不同的有理点之间必定还有一个（从而有无限多个）有理点存在, 所以我们说 $\mathbf{Q}$ 在 $\mathbf{R}$ 中是稠密的, 或 $\mathbf{Q}$ 具有稠密性.

但是数轴上确实存在无理点. 比如说, 若用 c 表示边长为 1 的正方形的对角线的长度, 这个 c 就无法用有理数来表示. 这可以通过反证法来论证：根据勾股定理,$c^2 = 2$. 若 $c = \dfrac{q}{p}$, 其中 $p, q \in \mathbf{N}$, 并且 p, q 互质, 那么 $q^2 = 2p^2$. 由于奇数的平方必为奇数, 因此 q 是偶数. 设 $q = 2r, r \in \mathbf{N}$, 又得到 $p^2 = 2r^2$, 也就是说 p 也是偶数, 这就与 p, q 互质的假设发生矛盾, 所以 c 不是有理数. 换句话说, 有理数集合 $\mathbf{Q}$ 对于开方运算是不封闭的,

所以, 有理点虽然在坐标轴上密密麻麻, 但并没有布满整条直线, 其中留有许多“空隙”, 如与单位正方形对角线长度对应的点 $c = \sqrt{2}$ 就位于有理点集合的“空隙”中, 也就是说 $\mathbf{Q}$ 没有连续性或完备性.

设 a 和 b 是两个实数且 $a < b$. 将集合 $\{x : a < x < b\}$,$\{x : a \le x < b\}$,$\{x : a < x \le b\}$,$\{x : a \le x \le b\}$, 分别记为 $(a, b), [a, b), (a, b], [a, b]$ 并称之为区间. (a, b) 称为开区间, $[a, b]$ 称为闭区间,$[a, b)$ 和 $(a, b]$ 称为半开半闭区间. 此外, 引入记号 $-\infty$ 和 $+\infty$, 分别称为负无穷大和正无穷大, 对于任何 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $-\infty < x < +\infty$. 注意,$-\infty$ 和 $+\infty$ 只是记号而不是实数. 推广区间的概念, 把 $(-\infty, b)$,$(-\infty, b]$,$(a, +\infty)$,$[a, +\infty)$ 和 $(-\infty, +\infty)$ 都称为无穷区间. $(-\infty, b)$ 和 $(a, +\infty)$ 是开区间, $(-\infty, b]$ 和 $[a, +\infty)$ 是闭区间, 而 $(-\infty, +\infty)$ 是既开又闭的区间.

§ 1.1.2 确界原理

下面我们讨论实数集 $\mathbf{R}$ 的各种子集, 简称为数集.

为了表达上的方便, 引入两个记号：”$\exists$” 表示” 存在”, ”$\forall$” 表示” 对于任意给定的” 或” 对于每一个”. 例如

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A, 有 x \in B,$$

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x \in A, \text{使得} x \notin B.$$

设 S 是一个数集, 如果 $\exists \xi \in S$, 使得 $\forall x \in S$, 有 $x \le \xi$, 则称 ξ 是数集 S 的最大数, 记为 $\xi = \max S$；如果 $\exists \eta \in S$, 使得 $\forall x \in S$, 有 $x \ge \eta$, 则称 η 是数集 S 的最小数, 记为 $\eta = \min S$.

当数集 S 是非空有限集, 即 S 只含有有限个数时, $\max S$ 与 $\min S$ 显然存在, 且 $\max S$ 是这有限个数中的最大者,$\min S$ 是这有限个数中的最小者. 但是当 S 是无限集时, 最大数及最小数就有可能不存在. 例如集合 $A = \{x : x \ge 0\}$ 没有最大数, 但有最小数, $\min A = 0$. $B = \{x : 0 \le x < 1\}$ 没有最大数数.

设 S 是一个非空数集, 若存在实数 β 满足以下两个条件：

(1) $\forall x \in S$ 有 $x \le \beta$(称 S 有上界)；

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in S$, 使得 $x_\varepsilon > \beta - \varepsilon$. 则称 β 为集合 S 的上确界, 记为 $\beta = \sup S$. 显然 β 是 S 的最小上界.

同样, 设 S 是一个非空数集, 若存在实数 α 满足以下两个条件：

(1) $\forall x \in S$ 有 $x \ge \alpha$(称 S 有下界)；

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon \in S$, 使得 $y_\varepsilon < \alpha + \varepsilon$. 则称 α 为集合 S 的下确界, 记为 $\alpha = \inf S$. 显然 α 是 S 的最大下界.

确界原理(实数的连续性或完备性) 有上界的非空数集必有上确界, 有下界的非空数集必有下确界.

注 1 若将实数定义为无限十进小数, 可用初等方法证明 (或几何上解释) 确界的存在性. 但此处是将确界原理作为公理来刻画实数的连续性或完备性.

确界原理反映了实数系连续性这一基本性质, 这可以从几何上加以理解: 假若实数全体不能布满整条数轴, 其上留有" 空隙", 则" 空隙" 左边的数集就没有上确界," 空隙" 右边的数集就没有下确界. 比如, 由于有理数集合 **Q** 在数轴上有" 空隙", 它就不具备实数集合 **R** 所具有的" 确界原理", 也就是说:**Q** 内有上界的集合 T 未必在 **Q** 内有它的上确界.

注 2 对无上界 (无下界) 的数集 S, 规定 $\sup S = +\infty$ $(\inf S = -\infty)$.

定理 1.1.1 设数集 S 有上（下）确界, 则这上（下）确界是唯一的.

证明 设 β, α 为 S 的上确界且 $\beta \ne \alpha$, 不妨设 $\alpha < \beta$. 取 $\varepsilon = \beta - \alpha$, 由 β 为 S 的上确界, 存在 $x_\varepsilon \in S$ 满足 $x_\varepsilon > \beta - \varepsilon = \beta - (\beta - \alpha) = \alpha$, 与 α 也为 S 的上确界矛盾, 从而上确界唯一. 同理可证下确界唯一.

例 设

$$\begin{array}{ll} E_1 = (1, 1/2, \cdots, 1/n, \cdots); & E_2 = (1, 2, \cdots, n \cdots); \\ E_3 = \mathbf{Z}; & E_4 = (0, 1]; \\ E_5 = \{\sin \dfrac{\pi}{n} : n \in \mathbf{N}^+\}. & \end{array}$$

则

$$\begin{array}{ll} \sup E_1 = 1,\ \inf E_1 = 0; & \sup E_2 = +\infty,\ \inf E_2 = 1; \\ \sup E_3 = +\infty,\ \inf E_3 = -\infty; & \sup E_4 = 1,\ \inf E_4 = 0; \\ \sup E_5 = \inf E_5 = 0. & \end{array}$$

§ 1.1.3 常用不等式 (述而不证)

1、绝对值不等式 设 a, b 为任意实数, 则有

$$||a| - |b|| \le |a \pm b| \le |a| + |b|.$$

另外, 不等式 $|x| < h(h > 0)$ 等价于不等式

$$-h < x < h.$$

2、伯努利 (Bernoulli) 不等式 设 $h > -1, n \in \mathbf{N}, n \ge 2$, 则有

$$(1+h)^n \ge 1 + nh,$$

其中等号当且仅当 $h = 0$ 时成立.

3、柯西 (Cauchy) 不等式 设 $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ 为两组实数, 则有

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right).$$

其中等号成立当且仅当数组 $\{x_i\}$ 与 $\{x_i\}$ 对应成比例.

4、调合平均值 - 几何平均值 - 算术平均值不等式（简称平均值不等式）

设 $x_1, \cdots, x_n$ 为 n 个非负实数, 则有

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

其中等号当且仅当所有 x_i 都相等时成立.

注 由于当某个 $x_i = 0$ 时, 不等式显然成立, 故可假设 $x_1, \cdots, x_n$ 皆为正数；在以下的赫尔德 (Höder) 不等式中也是如此.

5、赫尔德不等式 设 $\{x_i\}_1^n, \{y_i\}_1^n$ 为两组非负实数, 又实数 p, q 满足

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

则当 $p > 1$ 时有

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

当 $p < 1$ 时上述不等式反向.

习题 1.1

1. 求证：

(1) 若 $r + s\sqrt{2} = 0$, 其中 r, s 是有理数, 则 $r = s = 0$;

(2) 若 $r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3} = 0$, 其中 r, s, t 是有理数, 则 $r = s = t = 0$.

2. 证明下列绝对值不等式：

(1) $|x-y| \geq ||x|-|y||$;

(2) $|x_1+x_2+\cdots+x_n| \leq |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$;

(3) $|x+x_1+\cdots+x_n| \geq |x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$.

3. 证明不等式：

(1) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

(2) $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

4. 求证：对 $\forall a,b\in R$ 有

$$max\{a,b\}=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2}; \qquad min\{a,b\}=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}.$$

5. 指出下列数集的上确界, 并指出它们是否为该集合的最大值和最小值

(1) $\{-1,3,4,5,1,9,14\}$;

(2) $\{x:\sin\frac{\pi}{x}=0, x>0\}$;

(3) $\{x:|\log x|<1\}$;

(4) $\{(1+\frac{1}{n})^n : n\in N\}$;

(5) $\{x:x^2-2x-3<0\}$;

(6) $\{n^{1/n} : n\in N\}$.

6. 求证：

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

7. 设 $f(x)$ 在集合 X 上有界, 求证：

$$|f(x)-f(y)| \leq \sup_{x\in X} f(x)-\inf_{x\in X} f(x) \qquad (\forall x,y\in X).$$

8. 设 $\{-x\}$ 为数的集合, 这些数是与 $x\in\{x\}$ 符号相反的数. 证明等式：

(1) $\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$;

(2) $\sup\{-x\}=-inf\{x\}$.

9. 设 $f(x),g(x)$ 在集合 X 上有界, 求证：

$$\inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\} \leq \begin{cases} \inf_{x\in X}\{f(x)\}+\sup_{x\in X}\{g(x)\}; \\ \sup_{x\in X}\{f(x)\}+\inf_{x\in X}\{g(x)\} \end{cases}.$$

§ 1.2 数列极限的定义

数列是指按自然数编了号的一串数：

$$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots,$$

通常记为 $\{x_n\}$, 其中 x_n 称为数列的通项. 例如

$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}: 1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$;

$\{(-1)^{n-1}\}: 1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^n, \cdots;$
$\left\{\dfrac{2n+1}{n}\right\}: \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots, \frac{2n+1}{n}, \cdots;$
$\{(2n-1)^2\}: 1, 3^2, \cdots, (2n-1)^2, \cdots;$
$\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots.$

观察 n 无限增大时, 数列 $\{x_n\}$ 的变化规律: 第一个数列 $\frac{1}{n} \approx 0$; 第二个数列 $(-)^{n-1}$ 各项是 1 或 -1; 第三个数列 $\frac{2n+1}{n} \approx 2$; 第四个数列 $(2n-1)^2 \approx$ 越来越大; 第五个数列 $\frac{1}{2^n} \approx 0$.

由此可给出数列极限的描述性定义如下:

设 $\{x_n\}$ 为一数列, 而 a 为一实数, 如果下标 n 越来越大时, x_n 越来越接近于 a, 即 $x_n - a$ 越来越接近于 0, 则称数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限.

这个定义与上述例子相结合, 很容易为人接受, 并且给人以直观的印象. 但是, 它却不适于进行严格的推理论证. 因此, 有必要使用分析语言给出确切的定义.

定义 1.2.1 设 $\{x_n\}$ 是一个数列, a 是一个实数, 如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在一个自然数 N, 使得凡是 $n > N$ 时, 都有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 就说数列 $\{x_n\}$ 当 n 趋向无穷大时以 a 为极限, 记成 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 也可以简记为 $x_n \to a(n \to \infty)$, 我们也说数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a. 存在极限的数列称为收敛数列, 没有极限的数列称为发散的. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, 则称 $\{x_n\}$ 为无穷小量.

记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[2.3] = 2; [-1.4] = -2; [5] = 5$. 用 $\forall$ 表示任意, $\exists$ 表示存在.

例 1.2.1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1} = \dfrac{3}{2}$.

证明 设 $a_n = \dfrac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}$, 则

$$\left|a_n - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{5}{2(2\sqrt{n}-1)}\right| = \left|\frac{5}{2(\sqrt{n}+\sqrt{n}-1)}\right| \leq \frac{5}{\sqrt{n}}.$$

$\forall \varepsilon > 0$, 要使 $\left|a_n - \dfrac{3}{2}\right| < \varepsilon$, 只需 $\dfrac{5}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$, 由此 $n > \dfrac{25}{4\varepsilon^2}$.

取 $N = \left[\dfrac{25}{4\varepsilon^2}\right] + 1$, 当 $n > N$ 时, $\left|a_n - \dfrac{3}{2}\right| < \varepsilon$, 故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1} = \frac{3}{2}.$$

例 1.2.2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n+1}{3n^2-4n} = \dfrac{1}{3}$.

证明 设 $a_n = \dfrac{n^2+n+1}{3n^2-4n}$, 则当 $n > 3$ 时,

$$\left|a_n - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{7n+3}{3(3n^2-4n)}\right| = \left|\frac{7n+3}{3(n^2+2n^2-4n)}\right| \leq \frac{8n}{3n^2} < \frac{8}{n}.$$

$\forall\varepsilon>0$, 要使 $\left|a_n-\dfrac{1}{3}\right|<\varepsilon$, 只需 $\dfrac{8}{n}<\varepsilon$, 由此 $n>\dfrac{8}{\varepsilon}$.

取 $N=\max\left\{\left[\dfrac{8}{\varepsilon}\right]+1,3\right\}$, 当 $n>N$ 时,$\left|a_n-\dfrac{1}{3}\right|<\varepsilon$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{3n^2-4n}=\frac{1}{3}.$$

例 1.2.3 当 $|q|<1$ 时, 证明 $\{q^n\}$ 为无穷小量.

证明 当 $q=0$ 时, $q^n=0$, $\{q^n\}$ 显然为无穷小量. 当 $|q|<1, q\neq 0$ 时,$|q^n-0|=|q|^n$.

$\forall\varepsilon>0$, 由 $|q|^n<\varepsilon$ 知 $n\ln|q|<\ln\varepsilon$, $n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$.

取 $N=\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]+1$, 当 $n>N$ 时,$|q^n-0|<\varepsilon$, $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$. 故 $\{q^n\}$ 为无穷小量.

例 1.2.4 当 $a>0$ 时, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

证明 当 $a=1$ 时, $\sqrt[n]{a}=1$.

当 $0<a<1$ 时,$|\sqrt[n]{a}-1|=1-\sqrt[n]{a}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

$\forall\varepsilon>0$, 由 $1-\sqrt[n]{a}<\varepsilon$ 知 $\sqrt[n]{a}>1-\varepsilon$, $n>\dfrac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln a}$.

取 $N=\left[\dfrac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln a}\right]+1$, 当 $n>N$ 时,$|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

同理可证当 $a>1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

例 1.2.5 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明 令 $\sqrt[n]{n}=1+\alpha_n$, 则当 $n>1$ 时

$$n=(1+\alpha_n)^n=1+n\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2+\cdots+C_n^k\alpha_n^k+\cdots+\alpha_n^n\geq 1+\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2.$$

所以 $\alpha_n^2<\dfrac{2}{n}$, $|\sqrt[n]{n}-1|=|\alpha_n|<\sqrt{\dfrac{2}{n}}$.

$\forall\varepsilon>0$, 要使 $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$, 只需 $\sqrt{\dfrac{2}{n}}<\varepsilon$, 由此 $n>\dfrac{2}{\varepsilon^2}$.

取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon^2}\right]+1$, 当 $n>N$ 时,$|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

注

1. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Longleftrightarrow x_n-a$ 为无穷小量.
2. 在定义中, 正数 ε 必须是任意给定的, 不能用一个很小的正数来代替.
3. 当正数 ε 给定之后, 满足要求的 N 通常是与 ε 有关的, 此时 $N+1, N+2$ 等也满足要求.
4. N 由 $|x_n-a|<\varepsilon$ 确定, 有时将 $|x_n-a|$ 适当放大, 使 $|x_n-a|<\beta_n$, 再由 $\beta_n<\varepsilon$ 确定 N.
5. 极限定义中, 不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 换成 $|x_n-a|<M\varepsilon$ 也行, 此处 M 为正常数.
6. 几何意义：对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 除有限项外 $\{x_n\}$ 都落在区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 内.

习题 1.2

1. 用极限定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}} = 0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0 \ (a > 0)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \cdot 0.999^n = 0$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 q^n = 0 \ (|q| < 1)$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0$;

(8) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} = 0$.

2. 用准确语言叙述: 数列 $\{a_n\}$ 不以 a 为极限.

3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 求证：$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. 它的逆命题是否成立？

4. 数列 $\{x_n\}$ 有界, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

§ 1.3 数列极限的性质

定理 1.3.1（唯一性） 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则极限唯一.

证明 若 $\{x_n\}$ 有极限 a 与 b, 由极限的定义,

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, \forall n > N_1 : |x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$; 且 $\exists N_2, \forall n > N_2 : |x_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{4}$.

取 $N = \max\{N_, N_2\}$, 当 $n > N$ 时,

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \le |x_n - a| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

由 ε 可以任意接近于零知 $a = b$.

定理 1.3.2（有界性） 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则数列 $\{x_n\}$ 有界.

证明 若 $\{x_n\}$ 有极限 a, 由极限的定义, 取 $\varepsilon = 2, \exists N_1, \forall n > N : |x_n - a| < 1$, 因而 $|x_n| < |a| + 1$. 取 $M = \max\{|x_1|, \cdots, |x_N|, |a| + 1\}$, 则对一切 n, $|x_n| \le M$, 即数列 $\{x_n\}$ 有界.

定理 1.3.3 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ 且 $a > b$, 则总有一个正整数 N 存在, 当 $n > N$ 时, 不等式 $x_n > y_n$ 成立.

证明 取 $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$, 由极限的定义, $\exists N_1, \forall n > N_1 : |x_n - a| < \dfrac{a-b}{2}$, 因而 $x_n > q - \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2}$;

且 $\exists N_2, \forall n > N_2 : |y_n - b| < \dfrac{a-b}{2}$, 因而 $y_n < b + \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2}$.

取 $N = \max\{N_, N_2\}$, 当 $n > N$ 时,

$$x_n > \frac{a+b}{2} > y_n.$$

推论 1.3.1（保号性） 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$, 则总有一个正整数 N 存在, 当 $n > N$ 时, 不等式 $x_n > 0$ 成立.

推论 1.3.2 若 $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$, 且有一正整数 N, 当 $n > N$ 时, 不等式 $x_n \geq y_n$ 都成立, 则 $a \geq b$.

证明 若 $a < b$, 由定理 1.3.3 知, 存在一个正整数 N, 当 $n > N$ 时, 不等式 $x_n < y_n$ 成立, 与条件矛盾.

在数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 中, 保持原来次序自左往右任意选取无穷多个项, 如

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$$

这种数列称为 $\{x_n\}$ 的**子列**.

定理 1.3.4 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 则其任何子序列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛于 a.

证明 若 $\{x_n\}$ 收敛于 a 有, 由极限的定义,$\forall\varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$.

取 $K = n_N$, 当 $k > K$ 时, $n_k \geq k > n_N \geq N$, 因而 $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$, 即 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛于 a.

注 可用此定理判定数列发散: 若存在数列 $\{x_n\}$ 的两个子列 $\{x^1_{n_k}\}$ 与 $\{x^2_{n_k}\}$, 分别收敛于不同的极限, 则数列 $\{x_n\}$ 必定发散. 如证明 $\{(-1)^n\}$ 的极限不存在.

例 1.3.1 对数列 $\{x_n\}$, 证明：$x_n \to a \ (n \to \infty)$ 的充要条件是 $x_{2k} \to a \ (k \to \infty)$, $x_{2k-1} \to a \ (k \to \infty)$.

证明 必要性由定理 1.3.4 即知. 下证充分性.

由 $x_{2k} \to a \ (k \to \infty)$ 及 $x_{2k-1} \to a \ (k \to \infty)$ 知, $\forall\varepsilon > 0, \exists K_1, \forall k > K_1 : |x_{n_{2k}} - a| < \varepsilon$;

且 $\exists K_2, \forall k > K_2 : |x_{n_{2k-1}} - a| < \varepsilon$.

取 $N = \max\{2K_1, 2K_2 - 1\}$, 当 $n > N$ 时, 若 $n = 2k > N$, 则 $2k > 2K_1, k > K_1$, $|x_n - a| = |x_{2k} - a| < \varepsilon$;

若 $n = 2k - 1 > N$, 则 $2k - 1 > 2K_2 - 1, k > K_2, |x_n - a| = |x_{2k-1} - a| < \varepsilon$. 由此 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

定理 1.3.5 (夹逼原理) 若有一个正整数 N, 当 $n > N$ 时, 有 $x_n \leq y_n \leq z_n$ 且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a,$$

则有 $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

证明 由 $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$ 知 $\forall\varepsilon > 0, \exists N_1, \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon$, 因而 $a - \varepsilon < x_n$;

且 $\exists N_2, \forall n > N_2 : |z_n - a| < \varepsilon$, 因而 $z_n < a + \varepsilon$.

取 $N_3 = \max\{N_1, N_2, N\}$, 当 $n > N_3$ 时,$1 - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$, 所以 $|y_n - a| < \varepsilon$, $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

例 1.3.2 设 $a_1, \cdots, a_k$ 是 k 个正数, 证明

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_k^n} = \max\{a_1, \cdots, a_k\}.$$

证明 设 $M = \max\{a_1, \cdots, a_k\}$, 则

$$M = \sqrt[n]{M^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_k^n} \leq \sqrt[n]{kM^n} = M\sqrt[n]{k}.$$

由 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1, \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k}M = M$ 及夹逼原理得

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_k^n} = M = \max\{a_1, \cdots, a_k\}.$$

例 1.3.3 设 $0 < \alpha < 1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha - n^\alpha] = 0$.

证明

$$0 \le (n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha\left[(1+\frac{1}{n})^\alpha - 1\right] \le n^\alpha\left[(1+\frac{1}{n}) - 1\right] = n^{\alpha-1}.$$

而当 $0 < \alpha < 1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha-1} = 1$, 由夹逼原理得 $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha - n^\alpha] = 0$.

定理 1.3.6（极限的四则运算） 设 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 都是收敛数列, 则 $\{x_n \pm y_n\}, \{x_n y_n\}$ 也是收敛. 又如果 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \ne 0$, 则 $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ 也收敛, 并且

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \times \lim\limits_{n\to\infty} y_n$; 特别地, 如果 c 是常数, 便有 $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 则 $\{x_n\}$ 有界, 即 $\exists M > 0$, 使得 $|x_n| \le M$.

再由极限的定义,$\forall\varepsilon > 0, \exists N_1, \forall n > N_1 : |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$;

且 $\exists N_2, \forall n > N_2 : |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时,

$$|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| = |(x_n - a) \pm (y_n - b)| \le |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$$|x_n y_n - ab| = |x_n(y_n - b) + (x_n - a)b| \le (M + |b|)\varepsilon.$$

由此

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab,$$

特别地取 $y_n = c$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

若 $b \ne 0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n| = |b| > \frac{|b|}{2} > 0$.

由不等式性质, $\exists N_0, \forall n > N_0 : |y_n| > \frac{|b|}{2}$.

取 $N = \max\{N, N_2, N_0\}$, 当 $n > N$ 时,

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{b(x_n - a) - a(y_n - b)}{y_n b}\right| \le \frac{2(|b| + |a|)}{b^2}\varepsilon,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

例 1.3.4 设 $|q| < 1$, 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + q + q^4 + \cdots + q^n)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + q + q^2 + \cdots + q^n) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1 - q^l}{1 - q} = \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$.

例 1.3.5 设 $a > 1$ 及 $k \in N$, 求证：$\left\{\dfrac{n^k}{a^n}\right\}$ 是无穷小.

证明 当 $k = 1$ 时, 令 $a = 1 + b$, 则 $b = a - 1 > 0$, 从而

$$a^n = (1+b)^n = 1 + b + \frac{n(n-1)}{2}b^2 + \cdots + b^n > \frac{n(n-1)}{2}b^2,$$

$$0 < \frac{n}{a^n} < \frac{2}{b^2(n-1)},$$

由夹逼原理得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n} = 0.$$

对一般的 k, $a^{\frac{1}{k}} > 1$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n}\right]^k = 0^k = 0.$$

例 1.3.6 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

解

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1}\\
&= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

例 1.3.7 设 $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^1+n}} = 1 = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

由夹逼原理得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

例 1.3.8 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^n - (-3)^{n+1}}{4\cdot 7^{n+1} + 3\cdot 4^n}$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^n - (-3)^{n+1}}{4\cdot 7^{n+1} + 3\cdot 4^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1 + 3\left(\frac{-3}{7}\right)^n}{28 + 3\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^n} = \frac{1}{28}.$$

例 1.3.9 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\cos n + \dfrac{2n^2 - 3n + 8}{3n^2 + 4n - 1}\right)$.

解 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ 及 $\cos n$ 为有界量知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cos n=0$. 而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+4}{8n^2+4n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{8}{n^2}}{5+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}=\frac{2}{5}.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cos n+\frac{2n^2-3n+4}{5n^2+4n-1}\right)=0+\frac{5}{5}=\frac{2}{5}.$$

习题 1.3

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n}{n+1}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})\cos\sqrt{n}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n-5n-1}{n-3}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+n}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n}\right)$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right|$;

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n},\ \ a\neq 1$;

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$;

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1-\sqrt{\left(3-\frac{a}{n}\right)\left(1-\frac{b}{n}\right)}\right)$;

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+a+\cdots+a^n}{1+b+\cdots+b^n},|a|<1,|b|<1.$

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(2\sin^2 n+\cos^2 n)^{1/n}$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\arctan n)^{1/n}$.

3. 设序列 x_n 和 y_n 发散 $(n=1,2,\cdots)$, 可否判定序列

(1) x_n+y_n (2) x_ny_n 也发散, 举例说明. 若 x_n 收敛而 y_n 发散呢?

4. 证明 $\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^n$, 并用此结论求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 证明: 若 $a_n>0,a>0,k\in\mathbf{N}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{a}$.

§ 1.4 无穷大量

设 $\{x_n\}$ 是一个数列, 如果对任意给定的 $G>0$, 总存在正整数 N, 当 $n>N$ 时必有 $|x_n|>G$, 我们就称 $\{x_n\}$ 是一个无穷大量, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ 或 $x_n\to\infty\ \ (n\to\infty)$.

例 1.4.1 设 $x_n=\dfrac{2n^3-5n+1}{5n^2-4n-4}$, 则 $\{x_n\}$ 是无穷大量.

证明 当 $n>3$ 时, $n^3-5n+1>0$,

$$\frac{7n^3-5n+1}{5n^2-4n-4}=\frac{n^6+(n^3-5n+1)}{5n^2-4n-7}>\frac{n^3}{5n^2}=\frac{n}{5}.$$

对 $\forall G>0$, 由 $\dfrac{n}{5}>G$ 得 $n>5G$, 取 $N=\max\{3,[5G]+1\}$, 当 $n>N$ 时,

$$x_n=\frac{2n^3-5n+1}{5n^2-5n-4}>G,$$

故 $\{x_n\}$ 是无穷大量.

性质 1.4.1 若 $\{x_n\}$ 为无穷大量, 则它的倒数所成的数列 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷小量, 反之, 若 $\{x_n\}$ 为无穷小量, 且 $x_n\neq 0\ (n=1,2,\cdots)$, 则它的倒数所成的数列 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷大量.

证明 $\forall\varepsilon>0$, 取 G 满足 $G>\dfrac{1}{\varepsilon}$. 由 $\{x_n\}$ 是无穷大量, 则总存在正整数 N, 当 $n>N$ 时必有 $|x_n|>G$.

从而 $|x_n|>G>\dfrac{1}{\varepsilon}$, $\left|\dfrac{1}{x_n}\right|<\varepsilon$, 即 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷大小量.

反之,$\forall G>0$, 若 $\{x_n\}$ 为无穷小量, 且 $x_n\neq 0$, 取 $\varepsilon>0$ 满足 $\varepsilon<\dfrac{1}{G}$, 则总存在正整数 N, 当 $n>N$ 时必有 $|x_n|<\varepsilon<\dfrac{1}{G}$, 从而 $|\frac{1}{x_n}|>G$, 即 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷大量.

性质 1.4.2 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都是正（或负）无穷大量, 那么它们的和 $\{x_n+y_n\}$ 也是正（或负）无穷大量.

证明 $\forall G>0$, 由 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都是正（或负）无穷大量,

$$\exists N_1: n>N_1: x_n>\frac{G}{2},\quad \left(x_n<-\frac{G}{2}\right);\quad \exists N_2: n>N_2: y_n>\frac{G}{2},\quad \left(y_n<-\frac{G}{2}\right).$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 当 $n>N$ 时必有

$$x_n+y_n>\frac{G}{2}+\frac{G}{2}=G,\quad \left(x_n+y_n<-\frac{G}{2}-\frac{G}{2}=-G\right).$$

从而 $\{x_n+y_n\}$ 也是正（或负）无穷大量.

性质 1.4.3 设 $\{x_n\}$ 是无穷大量, 而 $\{y_n\}$ 是有界数列, 那么它们的和 $\{x_n+y_n\}$ 是无穷大量.

证明 $\{y_n\}$ 是有界数列, 即 $\exists M>0$ 满足对一切 $n, |y_n|\leq M$. $\forall G>0$, 由 $\{x_n\}$ 是无穷大量,$\exists N: n>N: |x_n|>G+M$.

所以 $|x_n+y_n|\geq |x_n|-|y_n|>G+M-M=G$, 从而 $\{x_n+y_n\}$ 也是无穷大量.

性质 1.4.4 设 $\{x_n\}$ 是无穷大量, 又设数列 $\{y_n\}$ 具有以下特性：存在某个 N_1, 当 $n>N_1$ 时有 $|y_n|\geq\delta>0$, 那么它们的乘积 $\{x_ny_n\}$ 是无穷大量.

证明 由 $\{x_n\}$ 是无穷大量,$\exists N_2: n>N_2: |x_n|>\dfrac{G}{\delta}$, 取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 当 $n>N$ 时有 $|x_ny_n|>\dfrac{G}{\delta}\delta=G$, 从而 $\{x_ny_n\}$ 是无穷大量.

习题 1.4

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$.
2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty, \lim\limits_{n\to\infty} b_n + \infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$.
3. 按定义证明下列各数列为无穷大量:

(1) $\{\frac{n^2-3}{2n-1}\}$; (2) $\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\}$;
(3) $\{\ln\frac{1}{n}\}$; (4) $\{\sqrt{n}\arctan n\}$.

§ 1.5 数列极限的判定定理

定理 1.5.1 (单调有界收敛定理) 单调有界数列必有极限.

证明 不妨设 $\{x_n\}$ 为单调增加的有界数列, 即 $\exists M > 0, |x_n| \le M$ 且 $x_n \le x_{n+1}$. 由确界原理知 $\{x_n\}$ 存在上确界 $a = \sup\limits_n x_n$, 从而 $\forall \varepsilon > 0, \exists N : x_N > a - \varepsilon$, 当 $n > N$ 时

$$x_n \ge x_N > a - \varepsilon,$$

而 $x_n \le a < a + \varepsilon$, 故 $|x_n - a| < \varepsilon$,$\{x_n\}$ 有极限 a.

同理可证单调减少的有界数列 $\{x_n\}$ 有极限 $\inf\limits_n x_n$.

推论 若 $\{y_n\}$ 为单调增加无上界数列, 则 $y_n \to +\infty$. 若 $\{y_n\}$ 为单调减少无下界数列, 则 $y_n \to \infty$.

例 1.5.1 证明数列 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调增加,$\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 单调减少, 两者收敛于同一极限, 今后记该极限为 e.

证明 记 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, 利用平均值不等式

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \quad (a_k \ge 10, k = 1, 2, \cdots, n)$$

得到

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1 \le \left[\frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n + 1}\right]^{n+1} = \left(\frac{n + 2}{n + 1}\right)^{n+1} = x_{n+1},$$

和

$$\frac{1}{y_n} = \left(\frac{n}{n + 1}\right)^{n+1} \cdot 1 \le \left[\frac{(n + 1)\frac{n}{n+1} + 1}{n + 2}\right]^{n+2} = \left(\frac{n + 1}{n + 2}\right)^{n+2} = \frac{1}{y_{n+1}}.$$

这表示 $\{x_n\}$ 单调增加, 而 $\{y_n\}$ 单调减少. 又由于 $2 = x_1 < x_2 < x_n < y_n < y_1 = 4$ 可知数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 都收敛. 因为 $y_n = x_n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, 所以它们具有相同的极限, 记该极限为 e.

例 1.5.2 求数列 $\left\{\dfrac{a^n}{n!}\right\}$ 的极限, 这里 a 是一个任意给定的实数.

证明 令 $x_n = \left|\dfrac{a^n}{n!}\right|$, 则 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{|a|}{n + 1}$. 当 $n + 1 > |a|$, 即 $n > |a| - 1$ 时, $\{x_n\}$ 单调减少.

取 $N=[|a|-1]+2$, 当 $n>N$ 时,$0<x_n<x_N$, 有单调由界原理知数列 $\{x_n\}$ 收敛, 记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

再由 $x_{n+1}=\dfrac{|a|}{n+1}x_n$ 两边取极限得 $A=0\times A, A=0$, 即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^n}{n!}\right|=0,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

例 1.5.3 考察数列: $x_1=\sqrt{a}, x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},\cdots,x_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}$ 的敛散性, 其中 $a>0$.

证明 注意到 $x_n>0, x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$,

显然 $x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}>\sqrt{a}=x_1$; 若 $x_n>x_{n-1}$, 则由 $x_{n+1}^2=a+x_n$ 知

$$x_{n+1}^2-x_n^2=(a+x_n)-(a+x_{n-1})=x_n-x_{n-1}>0,$$

从而 $x_{n+1}>x_n$, $\{x_n\}$ 为单调增加数列.

再由 $x_{n+1}^2=a+x_n>x_n^2$ 知 $x_n^2-x_n-a<0$. 所以

$$\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}<x_n<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2},$$

$\{x_n\}$ 有界. 由单调有界原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在设为 A. 由 $x_{n+1}^2=a+x_n$ 两边取极限得 $A^2=a+A, A=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ (舍去 $\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$).

定理 1.5.2 (Stolz, 施笃茨定理) 设 $\{y_n\}$ 是严格递增的正无穷大数列, 它与数列 $\{x_n\}$ 一起满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=l$ (l 为有限数, $+\infty$ 与 $-infty$), 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l$.

证明 先考虑 l 为有限数的情形. 由条件 $\forall\varepsilon>0,\exists k\in\mathbf{N}^+,\forall m\geq k$, 有

$$-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_{m+1}-x_m}{y_{m+1}-y_m}-l<\frac{\varepsilon}{2},$$

即对 $m=k,k+1,\cdots$, 有

$$\left(l-\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{m+1}-y_m)<x_{m+1}-x_m<\left(l+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{m+1}-y_m).$$

分别以 $m=k,k+1,\cdots,n-1$ 代入上式, 并将得到的 $n-k$ 个不等式相加, 得

$$\left(l-\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n-y_k)<x_n-x_k<l\left(l+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n-y_k).$$

两边同时除以 y_n 得

$$\left(l-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{y_k}{y_n}\right)<\frac{x_n}{y_n}-\frac{x_k}{y_n}<\left(l+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{y_k}{y_n}\right)$$

$$-\frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{y_k}{y_n}\right)<\frac{x_n}{y_n}-l-\frac{x_k}{y_n}+l\frac{y_k}{y_n}<\frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{y_k}{y_n}\right)$$

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-l-\frac{x_k}{y_n}+l\frac{y_k}{y_n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{y_k}{y_n}\right)$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty, \exists N>k, \forall n>N$, 有

$$0<1-\frac{y_k}{y_n}<1,\quad \left|\frac{x_k}{y_n}\right|<\frac{\varepsilon}{4}, qawz\ \ \frac{y_k}{y_n}<\frac{\varepsilon}{4(|l|+1)}.$$

（这里不妨假定 $\forall n\geq k, y_n>0$).

从而 $\forall n>N$, 有

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l$.

$l=+\infty$ 的情形. 由定义,$\forall M>0, \exists N_1, \forall k>N_1$,

$$x_k-x_{k-1}>M(y_k-y_{k-1}).$$

将上述 $k=N_1+1, N_2+2,\cdots,n$ 情形下的 $(n-N)$ 个不等式相加得到

$$x_n-x_{N_1}>M(y_n-y_{N_1}).$$

由此

$$\frac{x_n}{y_n}>\frac{x_{N_1}}{y_n}+M-M\frac{y_{N_1}}{y_n}.$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{N_1}}{y_n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}M\frac{y_{N_1}}{y_n}=0,$$

所以存在 N_2, 当 $n>N_2$ 时, $-\frac{1}{2}<\frac{x_{N_1}}{y_n}, M\frac{y_{N_1}}{y_n}<\frac{1}{2}$. 取 $N=\{N_1,N_2\}$, 当 $n>N$ 时

$$\frac{x_n}{y_n}>M-1,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=+\infty.$$

$l=-\infty$ 的情形的证明同上.

习题 1.5

1. 证明：若 $x_1=a>0, y_1=b>0, x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}, y_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+y_n)\ \ (n=1,2,\cdots)$, 则数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都存在极限, 且极限相等.

2. 利用单调收敛定理判定下列各数列的收敛性:

(1) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$;

(2) $x_1 = \sqrt{2}, \cdots, x_n = \sqrt{2x_{n-1}}, \cdots$.

3. 证明：若 $a_n = \underbrace{\sin\sin\cdots\sin x}_{n个}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

4. 设 $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

5. 如果 $|x_{n+1} - a| \le k|x_n - a|, 0 < k < 1$ 对任意的 $n \in N$ 成立, 求证： $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

6. 设 $x_0 = 1, x_1 = 1 + \dfrac{x_0}{1 + x_0}, \cdots, x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{1 + x_n}$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求出它.

7. 证明：若 $\{x_n\}$ 上升,$\{y_n\}$ 下降, 而 $\{x_n - y_n\}$ 为无穷小量, 则 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 必有同一极限.

§ 1.6 实数的基本定理

定理 1.6.1（区间套定理） 设 $I_n = [a_n, b_n], n \in N$, 并且 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$. 如果区间列的长度 $|I_n| = b_n - a_n \to 0 (n \to \infty)$, 则区间的端点所成两数列 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$ 收敛于同一极限 ξ, 并且 ξ 是所有区间的唯一公共点.

证明 由条件知

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{n-1} \le a_n \le b_n \le b_{n-1} \le \cdots \le b_2 \le b_1,$$

$\{a_n\}$ 为单调递增且有上界的数列,$\{b_n\}$ 为单调递减且有下界的数列, 由单调有界原理两者都有极限, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$. 从而

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) + \lim_{n\to\infty} a_n = 0 + \xi = \xi,$$

故

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi.$$

显然 $\forall n, a_n \le a_{n+k} \le b_{n+k}$, 令 $k \to \infty$, 则 $a_n \le \xi \le b_n$.

若存在另一 η 使得对任意的 $n, a_n \le \eta \le b_n$, 令 $n \to \infty$, 则 $\xi \le \eta \le \xi, \eta = \xi$, 即 ξ 是所有区间的唯一公共点.

注 定理中闭区间的闭字不可去掉, 如 $I_n = \left(0, \dfrac{1}{n}\right)$.

定理 1.6.2（致密性定理, Weierstrass 定理） 任一有界数列必有收敛的子列.

证明 设数列 $\{x_n\}$ 有界, 于是存在实数 a_1, b_1, 成立

$$a_1 \le x_n \le b_1, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

将闭区间 $[a_1, b_1]$ 等分为两个小区间 $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ 与 $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$, 则其中至少有一个含有数列 $\{x_n\}$ 中的无穷多项, 把它记为 $[a_2, b_2]$, $b_2 - a2 = \frac{b-a}{2}$. 再将闭区间 $[a_2, b_2]$ 等分为两个小区间 $\left[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}\right]$ 与 $\left[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2\right]$, 同样其中至少有一个含有数列 $\{x_n\}$ 中的无穷多项, 把它记为 $[a_3, b_3]$, $b_3 - a_3 = \frac{b-a}{2^2}$. $\cdots\cdots$ 这样的步骤可以一直做下去, 于是得到一

个闭区间套 $[a_k, b_k]$, 其中每一个闭区间 $[a_k, b_k]$ 中都含有数列 $\{x_n\}$ 中无穷多项, 且当 $k \to \infty, b_k - a_k = \frac{b-a}{2^{k-1}} \to 0$.

根据闭区间套定理, 存在实数 ξ, 满足

$$\xi = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k.$$

现在我们证明数列 $\{x_n\}$ 必有一子列收敛于实数 ξ.

首先在 $[a_1, b_1]$ 中选取 $\{x_n\}$ 中某一项, 记它为 x_{n_1}, 然后, 因为在 $[a_2, b_2]$ 中含有 $\{x_n\}$ 中无穷多项, 可以选取位于 x_{n_1} 后的某一项, 记它为 $x_{n_2}, n_2 > n_1$. 继续这样做下去, 在选取 $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ 后, 因为在 $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ 中仍含有 $\{x_n\}$ 中无穷多项, 可以选取位于 x_{n_k} 后的某一项, 记它为 $x_{n_{k+1}}, n_{k+1} > n_k$. 这样就得到了数列 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$, 满足

$$a_k \le x_{n_k} \le b_k, \quad k = 1, 2, \dots.$$

由

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \xi,$$

利用极限的夹逼原理, 得到

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi.$$

定理 1.6.2 是从数列的角度来得到的结果, 这个事实还可以从点集的角度来考察, 得到的情形称之为聚点定则.

定义 1.6.1 设点集 $S \subset \mathbf{R}, \alpha \in \mathbf{R}$, 如果 α 的任何空心邻域中都含有点集 S 中的点, 则称 α 为集 S 的聚点.

注 1 若 a 是 S 的聚点, 则对任意的 $\delta > 0, U(a, \delta) - \{a\}$ 含有 S 中的无限多个点, 从而存在序列 $\{x_n\} \subset S$, 其中 x_n 互异, 使 x_n 收敛于 a.

注 2 有聚点的集合一定是无限集.

定理 1.6.2' 有界无穷点集必有聚点.

证明 设 S 为有界无穷点集. 从 S 中依次取出互不相同的点 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 排成一列, 于是得到有界数列 $\{x_n\}$, 由定理 1.6.2 知其中必有收敛子列, 不妨设数列 $\{x_n\}$ 本身收敛于 α, 亦即有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

往证 α 即为的聚点. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, 故对任何 $\varepsilon > 0$, 都存在 N, 使当 $n > N$ 时, 就有 $|x_n - \alpha| < \varepsilon$. 亦即 $x_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, 因为 x_n 互不相同, 故知 α 为 S 的聚点. 这样, 我们用定理 1.6.2 证明了定理 1.6.2'.

反之, 利用定理 1.6.2' 也可以证明定理 1.6.2.

设 $\{x_n\}$ 为有界数列. 若有某数 α 在数列 $\{x_n\}$ 中无穷次出现, 亦即有无穷多项的值都是 α, 则这些项就构成 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列, 定理 1.6.2 当然成立.

否则, 任何一个数在 $\{x_n\}$ 中都至多出现有限多次, 于是 $\{x_n\}$ 有无穷多个互不相同的项. 从而相应的子集是有界无穷点集, 由定理 1.6.2' 知这个点集必有聚点 α. 对于 $\varepsilon_1 = 1, \exists x_{n_1} \in (\alpha - 1, \alpha + 1); \cdots$; 对于 $0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2}, \exists x_{n_1} \in (\alpha - \varepsilon_2, \alpha + \varepsilon_2); \cdots$; 对于 $0 < \varepsilon_k < \frac{1}{k}, \exists x_{n_k} \in (\alpha - \varepsilon_k, \alpha + \varepsilon_k), \cdots$. 从而 $x_{n_k} \to \alpha$.

也可象定理 1.6.2 证明中最后一段那样, 又可找出收敛于 α 的子列, 这就证明了定理 1.6.2.

例 1.6.1 有界数列 $\{x_n\}$ 若不收敛, 则必存在两个子列 $x_{n_k}^{(1)} \to a, x_{n_k}^{(2)} \to b\ (a \neq b)$.

证明 $\{x_n\}$ 有界, 由致密性定理知 $\{x_n\}$ 存在子列 $x_{n_k}^{(1)} \to a$, 由 $\{x_n\}$ 不收敛知 $\{x_n\} \not\to a, \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N, \exists n > N$, 使得 $|x_n - a| \geq \varepsilon_0$, 从而存在 $\{x_n\}$ 的子列 $x_n^{(2)}$ 使得 $|x_n^{(2)} - a| \geq \varepsilon_0$, 再由 $x_n^{(2)}$ 的有界性及致密性定理,$x_n^{(2)}$ 存在子列 $x_{n_k}^{(2)} \to b$. $|x_{n_k}^{(2)} - a| \geq \varepsilon_0$, 显然 $a \neq b$.

性质 1.6.1 若 $\{x_n\}$ 是一个无界数列, 则存在子列 $x_{n_k} \to \infty$.

证明 由于 $\{x_n\}$ 无界, 因此对 $M_1 = 1$, 存在 n_1 使得 $|x_{n_1}| > 1$; 对 $M_2 = 2$, 存在 $n_2 > n_1$ 使得 $|x_{n_2}| > 2$, 否则对一切 $n > n_1, |x_n| \leq 2$ 从而 $\{x_n\}$ 有界, 矛盾. 同样对 $M_3 = 3$, 存在 $n_3 > n_2$ 使得 $|x_{n_3}| > 3.\cdots\cdots$ 这样便得到 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足

$$|x_{n_k}| > k,$$

由定义 $x_{n_k} \to \infty$.

定理 1.6.3（柯西收敛原理） 数列 $\{x_n\}$ 有极限的必要与充分条件是：对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 有一正整数 N, 当 $m, n > N$ 时, 有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

证明 先证必要性. 设 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 按照定义,$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, m > N$:

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},\ \ |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

于是

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon.$$

再证充分性.

先证明 $\{x_n\}$ 有界. 取 $\varepsilon_0 = 1$, 由条件 $\exists N_0, \forall n > N_0$:

$$|x_n - x_{N_0+1}| < 1.$$

令 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{N_0}|, |x_{N_0+1}| + 1\}$, 则对一切 n 成立

$$|x_n| \leq M.$$

由致密性定理, 在 $\{x_n\}$ 中必有收敛子列 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$. 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 由条件有一正整数 N, 当 $m, n > N$ 时, 有 $|x_n - x_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 在上式中取 $x_m = x_{n_k}$, 其中 k 充分大, 满足 $n_k > N$, 并且令 $k \to \infty$, 于是得到

$$|x_n - \xi| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

此即表明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

例 1.6.2 设 $\alpha \leq 1$, 令 $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^\alpha} + \dfrac{1}{3^\alpha} + \cdots + \dfrac{1}{n^\alpha}$, 证明 $\{x_n\}$ 是发散的.

证明 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2^\alpha}$, 对 $\forall N$, 取 $n = N + 1, m = N + N$,

$$|x_n - x_m| = \frac{1}{(N+1)^\alpha} + \frac{1}{(N+2)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(N+N)^\alpha} \geq N\frac{1}{(N+N)^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha} = \varepsilon_0.$$

由 Cauchy 收敛准则知 $\{x_n\}$ 是发散的.

例 1.6.3 令 $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛.

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, 当 $n > N$ 时, $\forall p \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
|x_{n+1} - x_{n+p}| &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\
&\le \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

由 Cauchy 收敛准则知 $\{x_n\}$ 是收敛的.

定理 1.6.4（有限覆盖定理） 若开区间所成的区间集 E 覆盖一个闭区间 $[a,b]$, 则总可从 E 中选出有限个区间, 使这有限个区间覆盖 $[a,b]$.(反证法, 区间套定理)

证明 用反证法. 设 $[a,b]$ 不能被 E 中有限个区间所覆盖. 等分 $[a,b]$ 为两个部分区间, 则至少有一个部分区间不能被 E 中有限个区间所覆盖, 把这区间记为 $[a_1,b_1]$. 再等分 $[a_1,b_1]$, 记不能被 E 中有限个区间所覆盖的那个部分区间为 $[a_2,b_2]$. 照这样继续分割下去, 得到一个区间列 $\{[a_n,b_n]\}$, 这区间列显然适合下列三条件：

(i) 每一 $[a_n,b_n]$ 皆不能被 E 中有限个区间所覆盖；

(ii) $[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \cdots \supset [a_n,b_n] \supset \cdots$;

(iii) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0$.

由条件 (ii) 及 (iii), 根据区间套定理, 则有唯一点 $\xi \in [a,b]$, 且 $a_n \to \xi, b_n \to \xi$. 按覆盖概念及定理所设条件, 在 E 中至少存在一个开区间, 设为 (α,β), 使 $\xi \in (\alpha,\beta)$ 即 $\alpha < \xi < \beta$.

由数列极限的性质知道, 必存在一个正整数 N, 当 $n > N$ 时, 有

$$\alpha < a_n < b_n < \beta$$

即当 $n > N$ 时, 有

$$[a_n,b_n] \subset (\alpha,\beta)$$

也就是用 E 中一个区间 (α,β) 就可覆盖所有形如 $[a_n,b_n](n > N)$ 的区间, 与 (i) 矛盾, 定理证毕.

在定理的条件中, 若 E 不是开区间集, 或 $[a,b]$ 为非闭区间, 则从 E 中就不一定能选出有限个区间覆盖, 如 $[0,\frac{1}{2})$, $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$, $[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}), \cdots$, $[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}), \cdots$, 及 $[1,2]$ 覆盖区间 $[0,2]$; 又 $(0,\frac{2}{3}), (\frac{1}{2},\frac{3}{4}), \cdots, (\frac{n-1}{n}, \frac{n+1}{n+2}), \cdots$ 覆盖区间 $(0,1)$. 在上面两个例子中就不能选有限个区间覆盖 $[0,2]$ 或 $(0,1)$.

习题 1.6

1. 试叙述“某序列不满足柯西准则”的意义.

2. 利用柯西判别法, 证明序列 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ 的发散性.

3. 设开区间 $\{(a_n, b_n)\}$ 满足以下条件：

(1) $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots < b_n < \cdots < b_2 < b_1$;

(2) $b_n - a_n \to 0 (n \to \infty)$, 证明存在唯一的数 ξ, 使得 $a_n < \xi < b_n (n = 1, 2, \cdots)$.

4. 设数列 $\{|a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_n - a_{n-1}|\}$ 有界, 求证 $\{a_n\}$ 收敛.

5. 若在区间 $[a, b]$ 内的两个数列 $\{x_n^{(1)}\}$ 及 $\{x_n^{(2)}\}$ 满足 $|\{x_n^{(1)}\} - \{x_n^{(2)}\}| \to 0 (n \to \infty)$, 则在此两数列中能找出具有相同足标 n_k 的子列, 使 $x_{n_k}^{(1)} \to x_0, x_{n_k}^{(2)} \to x_0$.

§ 1.7 数列的上极限和下极限

对于一个数列 $\{a_n\}$, 记 $b_k = \sup\limits_{n \geq k}\{a_n\}, c_k = \inf\limits_{n \geq k}\{a_n\}$. 显然 $\{b_k\}, \{c_k\}$ 分别是单调递减, 递增数列. 若 $\{a_n\}$ 有界, 则 $\{b_k\}, \{c_k\}$ 也为有界数列, 从而均有极限; 若 $\{a_n\}$ 无上界, 则 $b_k = +\infty$, 若 $\{a_n\}$ 无下界, 则 $c_k + -\infty$. 由此可给出数列的上极限和下极限的定义.

定义 1.7.1 对于一个有界数列 $\{a_n\}$, 上极限和下极限分别为:

$$H = \overline{\lim_{n \to \infty}} a_n = \lim_{k \to \infty} \sup_{n \geq k}\{a_n\}$$

$$h = \underline{\lim}_{n \to \infty} a_n = \lim_{k \to \infty} \inf_{n \geq k}\{a_n\}.$$

若 $\{a_n\}$ 无上界, 则规定 $H = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n = \infty$; 若 $\{a_n\}$ 无下界, 则规定 $h = \underline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n = -\infty$. 显然：$h \leq H$.

定理 1.7.1 设 $H = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n$, 则

(i) 当 H 为有限时, 对于 H 的任何 ε 邻域 $(H - \varepsilon, H + \varepsilon)$, 在数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个项属于这个邻域, 而在 $(H + \varepsilon, +\infty)$ 中只有有限多个项.

(ii) 当 $H = +\infty$ 时, 对任何数 $N > 0$, 在 $\{a_n\}$ 中必有无穷多个项大于 N.

(iii) 当 $H = -\infty$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 以 $-\infty$ 为极限.

证明 (i) 先证 $\forall \varepsilon > 0$, $\{a_n\}$ 中大于 $H - \varepsilon$ 的项有无限项. 否则,$\exists \varepsilon_0 > 0$, $\{a_n\}$ 大于 $H - \varepsilon$ 的项仅有有限项, 从而, $\exists n_0$, 当 $n > n_0$ 时,

$$a_n \leq H - \varepsilon_0, \quad b_k = \sup_{n > k} \leq H - \varepsilon_0, \quad H = \lim_{k \to \infty} b_k \leq H - \varepsilon_0,$$

矛盾.

次证 $\forall \varepsilon > 0$, $\{a_n\}$ 大于 $H + \varepsilon$ 的项仅有有限项. 事实上, 由 $\lim\limits_{k \to \infty} b_k = H$ 知当 $k > k_0$ 时

$$b_k \leq H + \varepsilon.$$

而 $b_k = \sup\limits_{n > k} a_n \leq H + \varepsilon$, 于是 $a_{k+n} \leq H + \varepsilon$, 故 $\{a_n\}$ 大于 $H + \varepsilon$ 的项仅有有限项.

(ii) 若 $H = +\infty$, 则 $\{a_n\}$ 无上界, 所以 $\forall N, \exists n_N, a_{n_N} > N; \exists n_{N+1}, a_{n_{N+1}} > a_{n_N} > N; \cdots$, 继续下去, $\exists a_{n_K}, a_{n_k} > a_{n_N} > N$. 故 $\{a_n\}$ 中必有无穷多个项大于 N.

(iii) 若 $H = -\infty$, 即 $\lim\limits_{k \to \infty} b_k = -\infty$.

$\forall M, \exists N$, 当 $k > N$ 时, $a_k \le b_k < -M$, 所以 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = -\infty$.

用同样的方法可证下面的定理, 留作习题.

定理 1.7.2 设 $h = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$, 则

(i) 当 h 为有限时, 对于 h 的任何 ε 邻域 $(h-\varepsilon, h+\varepsilon)$, 在数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个项属于这个邻域, 而在 $(-\infty, h-\varepsilon)$ 中只有有限多个项.

(ii) 当 $h = -\infty$ 时, 对任何数 $N > 0$, 在 $\{a_n\}$ 中必有无穷多个项小于 $-N$.

(iii) 当 $h = +\infty$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 以 $+\infty$ 为极限.

定理 1.7.3 设 H 为 $\{a_n\}$ 的上极限, 那么,H 必是 $\{a_n\}$ 中所有收敛子列的极限中的最大值. 设 h 为 $\{a_n\}$ 的下极限, 那么,h 必是 $\{a_n\}$ 中所有收敛子列的极限中的最小值.

证明 (1) 若 H 有限, 由定理 1.6.1 知 $\forall \varepsilon > 0, (H-\varepsilon, H+\varepsilon)$ 含有 $\{a_n\}$ 中无穷多项.

对 $\varepsilon = 1, \exists n_1, |a_{n_1} - H| < 1$; 对 $\varepsilon = \frac{1}{2}, \exists n_2 > n_1, |a_{n_2} - H| < \frac{1}{2}; \cdots$; 继续下去, 对 $\varepsilon = \frac{1}{k}, \exists n_k > n_{k-1}, |a_{n_k} - H| < \frac{1}{k}$. 显然 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = H$.

另一方面, $\forall \{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$, 若 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$, 由 $b_{n_k} = \sup\limits_{n \ge n_k}\{a_n\} \ge a_{n_k}$ 知 $H \ge a$, 从而 H 必是 $\{a_n\}$ 中所有收敛子列的极限中的最大值.

(2) 若 $H = +\infty$, 则存在 n_k, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = H$, 结论显然成立.

(3) 若 $H = -\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, 结论成立.

同理可证 h 必是 $\{a_n\}$ 中所有收敛子列的极限中的最小值.

推论 1.7.1 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$（有限或无穷大）的充要条件为：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = A$

例 1.7.1 已知 $a_n = n + (-1)^n$, 求上、下极限.

解 上、下极限均为 $+\infty$.

例 1.7.2 $a_n = \cos\dfrac{n}{4}\pi$, 求上、下极限.

解 因为 $\cos\frac{8k}{4}\pi = \cos 2k\pi = 1$, 且 $\cos\frac{n}{4}\pi \le 1$, 所以 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = 1$; 同理 $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -1$.

习题 1.7

1. 证明定理 1.7.2.
2. 证明推论 1.7.1.
3. 设数列 $\{a_n\}$, 令 $b_k = \sup\limits_{n\ge k}\{a_n\}, c_k = \inf\limits_{n\ge k}\{a_n\}$.

(1) 证明 $\{b_k\}, \{c_k\}$ 分别是单调递减, 递增数列.

(2) 令 $H = \lim\limits_{k\to\infty} b_k, h = \lim\limits_{k\to\infty} c_k$, 则 $H = \inf\limits_{k\in N} b_k, h = \sup\limits_{k\in N} c_k$.

4. 设 $a_n > 0$, 求证 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n} - 1\right) \ge 1$.
5. 设 $x_n > 0$, 求证 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n})^n \ge e$.

第一章典型例题

例 1.1 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \cdots + \frac{n}{a^n})$ $(a > 1)$.

解 记 $s_n=\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}$, 则

$$\begin{aligned}(1-a^{-1})s_n &= s_n-\frac{1}{a}s_n=\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}-\frac{n}{a^{n+1}}\\ &= \frac{a^{-1}(1-a^{-n})}{1-a^{-1}}-\frac{n}{a^{n+1}}\end{aligned}$$

由此知当 $n\to\infty$ 时, $s_n\to\frac{a^{-1}}{(1-a^{-1})^2}$.

例 1.2 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{2^2-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}\left(\frac{2^2}{2^3-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}}\cdots\left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$

解 先取对数, 再求极限.

$$\begin{aligned}\ln x_n &= \frac{1}{2^{n-1}}\ln\frac{2}{2^2-1}+\frac{1}{2^{n-2}}\ln\frac{2^2}{2^3-1}+\cdots+\frac{1}{2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\\ &= \frac{1}{2^{n-1}-1}\left(\ln\frac{2}{2^2-1}+2\ln\frac{2^2}{2^3-1}+\cdots+2^{n-2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)\end{aligned}$$

应用 Stolz 公式,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln x_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}}{2^{n-1}-2^{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{1}{2-\frac{1}{2^{n-1}}}\\ &= \ln\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

故原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

例 1.3 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

证明

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|=\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in\mathbf{N},\forall n>N_1$, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$. 利用绝对值不等式, 当 $n>N_1$ 时, 上式右边不超过

$$\frac{1}{n}\left|(a_1-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)\right|+\frac{1}{n}\left(\left|a_{N_1+1}-a\right|+\cdots+|a_n-a|\right)<\frac{M}{n}+\frac{n-N_1}{n}\varepsilon,$$

其中 $M=\left|(a_1-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)\right|$.

又对上述 $\varepsilon>0$, 取 $N_2=\left[\frac{M}{\varepsilon}\right]$, 则 $\forall n>N_2$, 有 $\frac{M}{n}<\varepsilon$.

综上, 我们得到：$\forall\varepsilon>0,\exists N=\max\{N_1,N_2\},\forall n>N$, 有

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\frac{M}{n}+\frac{n-N_1}{n}\varepsilon<2\varepsilon.$$

例 1.4 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$, 试证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}=ab$$

解 令 $x_n = a+\alpha_n, y_n = b+\beta_n$, 则 $n\to\infty$ 时, α_n、$\beta_n \to 0$. 于是

$$\begin{aligned}
&\frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1}{n}\\
=&\frac{(a+\alpha_1)(b+\beta_n)+(a+\alpha_2)(b+\beta_{n-1})+\cdots+(a+\alpha_n)(b+\beta_1)}{n}\\
=&ab + a\frac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}{n} + b\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}\\
+&\frac{\alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_1}{n}.
\end{aligned}$$

据例 1.3, $n\to\infty$ 时第二, 三项趋于零. 现证第四项极限亦为零.

事实上, 因当 $n\to\infty$ 时, $\alpha_n\to 0$, 所以 α_n 有界, 即 $\exists M>0$, 使得 $\forall n\in N, |\alpha_n|\le M$. 故

$$\begin{aligned}
0 &< \left|\frac{\alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_1}{n}\right|\\
&\le M\frac{|\beta_n|+|\beta_{n-1}|+\cdots+|\beta_1|}{n}\to 0.
\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n} = ab.$$

例 1.5 设 $a_1>0, a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}, n=1,2,\cdots$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1.$$

证明 显然 $a_n\ge 2\ (n\ge 2)$ 且 $a_{n+1}\ge a_n$.

若 $\{a_n\}$ 有界, 由单调有界原理 $\{a_n\}$ 有极限, 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a\ge 2$, a 为有限数. 由递推式 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$ 两边取极限有 $a=a+\frac{1}{a}, \frac{1}{a}=0$ 出现矛盾. 从而 $\{a_n\}$ 无界, 而由 $\{a_n\}$ 严格递增, 有又易见 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$.

取 $x_n=a_n^2, y_n=2n$, 显然 $\{y_n\}$ 递增且 $y_n\to\infty$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^2-a_n^2}{2(n+1)-2n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}^2-a_n^2).$$

由题设递推式 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$ 得

$$a_{n+1}^2 = a_n^2+\frac{1}{a_n^2}+2,$$

即

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = \frac{1}{a_n^2}+2,$$

代入前面的式子, 并注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n^2}=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n^2}+2\right)=1$$

应用施笃茨定理得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=1.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2n}}=1$.

例 1.6 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在.

证明 方法一 (反证法): 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=A$, 其中 A 为有限数.

$$\sin(n+2)-\sin n=2\cos(n+1)\sin 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}2\cos(n+1)\sin 1=\lim_{n\to\infty}(\sin(n+2)-\sin n)=A-A=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\cos(n+1)=0,\quad \lim_{n\to\infty}\cos n=0,$$

$$A=\lim_{n\to\infty}\sin n=\pm 1.$$

另一方面 $\sin 2n=2\sin n\cos n$ 两边取极限 $A=2A\times 0=0$ 矛盾. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在.

方法二 (Cauchy 收敛准则的否定定义): 对 $\varepsilon_0=\frac{\sqrt{2}}{2},\forall N$, 取 $n=[2N\pi+\frac{3\pi}{4}],m=[2N\pi+2\pi]$. 则

$$2N\pi+\frac{\pi}{4}\le 2N\pi+\frac{3\pi}{4}-1\le n\le 2N\pi+\frac{3\pi}{4},$$

$$2N\pi+\pi\le 2N\pi+2\pi-1\le m\le 2N\pi+2\pi.$$

从而

$$|\sin n-\sin m|=\sin n-\sin m\ge\sin n\ge\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\varepsilon_0,$$

由 Cauchy 收敛准则的否定定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在.

例 1.7 设 $\lim\limits_{n\to\infty}n(A_n-A_{n-1})=0$. 试证: 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_1+A_2+\cdots+A_n}{n}$存在时

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\frac{A_1+A_2+\cdots+A_n}{n}$$

证明 因 $A_n=\left(A_n-\frac{A_1+\cdots+A_n}{n}\right)+\frac{A_1+\cdots+A_n}{n}$, 只需证明第一项趋于零.

为了利用 $\lim\limits_{n\to\infty}n(A_n-A_{n-1})=0$, 特令 $a_1=A_1,a_2=A_2-A_1,\cdots,a_n=A_n-A_{n-1},\cdots$ 则知 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$, 且

$$\begin{aligned}A_n&=(A_n-A_{n-1})+(A_{n-1}-A_{n-2})+\cdots+(A_2-A_1)+A_1\\&=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1.\end{aligned}$$

于是

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(A_n-\frac{A_1+\cdots+A_n}{n}\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\left((a_1+\cdots+a_n)-\frac{a_1+(a_1+a_2)+\cdots+(a_1+\cdots+a_n)}{n}\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{a_2+2a_3+\cdots+(n-1)a_n}{n}\quad(\text{应用 Stolz 公式})\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)a_n}{n-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}na_n=0.
\end{aligned}
$$

证毕

例 1.8 设 $x_1>0, x_{n+1}=\frac{c(1+x_n)}{c+x_n}(c>1\text{为常数})$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解

$$x_{n+1}-x_n=\frac{c(1+x_n)}{c+x_n}-\frac{c(1+x_{n-1})}{c+x_{n-1}}=\frac{c(x_n-x_{n-1})(c-1)}{(c+x_n)(c+x_{n-1})}.$$

$$x_2-x_1=\frac{c(1+x_1)}{c+x_1}-x_1=\frac{c-x_1^2}{c+x_1}.$$

(1) 若 $x_1=\sqrt{c}$, 则 $x_2=x_1, x_{n+1}=x_n=\sqrt{c}$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$.

(2) 若 $x_1>\sqrt{c}$, 则 $x_2-x_1=\frac{c-x_1^2}{c+x_1}<0$, 于是 $x_2<x_1$. 假定 $x_n<x_{n-1}$, 则 $x_{n+1}<x_n$. 由 $x_{n+1}=\frac{c(1+x_n)}{c+x_n}<x_n$, 则 $c+cx_n<cx_n+x_n^2, x_n>\sqrt{c}$. 而 $x_n<x_1$, 所以 x_n 单调递减且有界.

同理可证, $x_1<\sqrt{c}$ 时,x_n 单调递增且 $x_1<x_n<\sqrt{c}$.

总之,x_n 单调有界, 极限存在. 在 $x_{n+1}=\frac{c(1+x_n)}{c+x_n}$ 里取极限, 解方程可知极限值为 $\sqrt{c}$

例 1.9 用有限覆盖定理证明 Weierstrass 定理.

证明 Weierstrass 定理 (致密性定理) 任何有界数列必有收敛的子数列.

设 $\{x_n\}$ 为有界数列, a 是它的一个下界, b 是它的一个上界, 于是下列两种情形之一成立:

(i) 存在 $\alpha\in[a,b]$, 使在 α 的任何邻域中都有 $\{x_n\}$ 的无穷多项;

(ii) 对任何 $x\in[a,b]$, 都存在 x 的一个邻域 $(x-\delta_x, x+\delta_x)$, 使其中只含 $\{x_n\}$ 的有限多项.

如果 (ii) 成立, 则开区间族 $\{(x-\delta_x,x+\delta_x)|x\in[a,b]\}$ 构成 $[a,b]$ 的一个开覆盖. 于是由限覆盖定理知, 其中必有有限子覆盖. 由于每个开区间中都只含 $\{x_n\}$ 的有限多项, 故有限个开区间之并也只含 $\{x_n\}$ 的有限多项. 但另一方面又 $[a,b]$ 应该包含 $\{x_n\}$ 的所有项, 矛盾, 这表明 (ii) 不能成立, 即 (i) 必是成立.

考察 α 的邻域序列 $\left\{\left(\alpha-\frac{1}{n},\alpha+\frac{1}{n}\right)\right\}$ 序列, 由 (i) 知, 每个邻域中都含有 $\{x_n\}$ 的无穷多项. 首先在区间 $(\alpha-1,\alpha+1)$ 中取一项, 记为 x_{n_1}. 然后因 $\left(\alpha-\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2}\right)$ 中含 $\{x_n\}$ 的无穷多项, 故可在其中取得下标大于 n_1 的一项, 记为 x_{n_2}. 一般地, 当 $x_{n_k}\in\left(\alpha-\frac{1}{k},\alpha+\frac{1}{k}\right)$ 取定之后, 由于 $\left(\alpha-\frac{1}{k+1},\alpha+\frac{1}{k+1}\right)$ 中含有 $\{x_n\}$ 的无穷多项. 故又可从中取出下标大于 n_k 的一项, 记为 x_{k+1}. 这样可以得到子列 $\{x_{n_k}\}$. 满足条件

$$|\alpha-x_{n_k}|<\frac{1}{k},\ \ k=1,2,\cdots.$$

当然有

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha,$$

即 $\{x_{n_k}\}$ 为 $\{x_n\}$ 的收敛子数列.

例 1.10 设 $\{a_n\}$ 为正数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}} = 0$, 求证数列 $\{a_n\}$ 无界.

证明 由条件知 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}+a_{n+2}}{a_n} = +\infty$.

对 $M = 4, \exists N, n \geq N : \dfrac{a_{n+1}+a_{n+2}}{a_n} > M$, 即 $a_{n+2}+a_{n+1} > 4a_n$.

由此 $\exists n_1 \geq N : a_{n_1} > 2a_N$, 否则 $a_{N+2} \leq 2a_N, a_{N+1} \leq 2a_N$, 进而 $a_{N+2}+a_{N+1} \leq 4a_N$ 矛盾.

同理

$$\exists n_2 > n_1 : a_{n_2} > 2a_{n_1} > 2^2 a_N;$$

$$\cdots$$

$$\exists n_k > n_{k-1} : a_{n_k} > 2^K a_N.$$

显然 $a_{n_k} \to \infty$, 从而数列 $\{a_n\}$ 无界.

例 1.11 设 $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = x_n(1-x_n), n = 1, 2, \cdots$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 1$.

证明 由 $x_{n+1} = x_n(1-x_n)$ 知 $x_{n+1} - x_n = -x_n^2 < 0,$. 用数学归纳法可证 $\{x_n\}$ 单调减且 $0 < x_n < 1$. 由单调有界原理知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在设为 a. 由

$$x_{n+1} - x_n = -x_n^2$$

两边取极限得, $a - a = -a^2, a = 0$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \infty$.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - x_n, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - 0 = 1.$$

由 Stolz 定理得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} nx_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = -\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}x_n}{x_{n+1}-x_n} \\ &= -\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}x_n}{-x_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1.\end{aligned}$$

第一章复习题

1. 设 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1\right)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2. 证明：若数列 $\{x_n\}$ 无界，但非无穷大量，则必存在两个子列 $\{x_{n_k}^{(1)}\}$ 与 $\{x_{n_k}^{(2)}\}$，其中 $\{x_{n_k}^{(1)}\}$ 是无穷大量，$\{x_{n_k}^{(2)}\}$ 是收敛子列.

3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 存在, 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+2a_2+\cdots+na_n)=0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n!\cdot a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=0\ \ (a_i>0, i=1,2,\cdots)$.

4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}$.

5. 设 $a_n\to a(n\to\infty)$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^ka_k=a.$$

6. 证明：若 p 为自然数, 则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)=\frac{1}{2}$.

7. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty$.

8. 证明：若 $x_n>0\ \ (n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$. 并用此结论证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$.

9. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 求证：

(1) 若 $a\neq0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$;

(2) 若 $a=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 可能不存在, 举例说明;

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在且为 b, 则 $-1\leq b\leq1$.

10. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$, 求证：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$.

11. 设 $\{a_n\}$ 单调下降, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0, b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 求证：

(1) b_n 单调下降；

(2) $b_{2n}\leq\frac{1}{2}(a_n+b_n)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

12. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, 并且存在常数 K 使得 $|y_1|+|y_2|+\cdots+|y_n|\leq K$ 对一切 $n\in N$ 成立, 令 $z_n=x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1, n\in N$ 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$.

13. 设 $a>0, x_1>0, x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})\ \ (n=1,2,\cdots)$.

(1) 求证:x_n 是单调下降且有下界;

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

14. 设 $F_0=F_1=1, F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_n}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

15. 设序列 $\{x_n\}$ 满足 $|x_{n+1}-x_n|\leq q|x_n-x_{n-1}|(n=1,2,\cdots)$, 其中 $0<q<1$. 求证：序列 $\{x_n\}$ 的极限存在.

16. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足条件：

$$|f(x)-f(y)|\leq q|x-y|(\forall x,y\in(-\infty,+\infty)),$$

其中 $0 < q < 1$. 对 $\forall x_1 \in (-\infty, +\infty)$, 令 $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 求证：序列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且极限是 $f(x)$ 的不动点.

17. 设 $x_0 = a, x_1 = b$ $(b > a)$, 用如下公式定义序列的项：

$$x_{2n} = \frac{x_{2n-1} + 2x_{2n-2}}{3}, \quad x_{2n+1} = \frac{2x_{2n} + x_{2n-1}}{3}.$$

求证：序列 $\{x_n\}$ 的极限存在.

18. 设 $a_0, a_1 = q\sin a_0 + 1, a_{n+1} = q\sin a_n + a$, $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 其中 $0 < q < 1$, a 为常数, 证明

（1） $\{a_n\}$ 收敛;

（2） 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$, 则 ξ 是方程 $x = q\sin x + a$ 的根.

19. 设 $x_n, y_n > 0$. 若 $x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}, y_{n+1} = \frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}$, $n = 1, 2, \cdots$, 证明 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

20. 设 $c > 0$, 任取 $0 < x_0 < \frac{1}{c}$, 若 $x_{n+1} = x_n(2 - cx_n)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

21. 设 $x_n > 0$, 求证 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n})^n \geq e$.

22. 数列 $\{x_n\}$ 有界且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$, 令 $l = \lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k\geq n} x_k, L = \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geq n} x_k$, 若记 $S = \{a \in R: 有子列 x_{k_n} \to a(n\to\infty)\}$, 求证：$S = [l, L]$.

23. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \sum\limits_{k=1}^{n} a_i^2 = 1$, 求证：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{3n}a_n = 1$.

24. 设数列 $\{x_n\}$ 满足条件：对任何 $m, n \in N$, 都有 $0 \leq x_{m+n} \leq x_m + x_n$, 求证极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$ 存在.

第二章 函数的极限与连续函数

§ 2.1 函数

§2.1.1 函数的定义

定义 2.1.1 在所考察的过程中保持不变的量称为常量, 在这一过程中会起变化的量称为变量. 如 $s = v_0 t$, v_0 为常量, 时间 t 与路程 s 为变量.

定义 2.1.2 设集 $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}$ 为非空集合, 如果有一个 $\mathbf{X}$ 从到 $\mathbf{R}$ 的对应法则 f, 使对每个 $x \in \mathbf{X}$, 在对应法则 f 之下都有唯一的 $y \in \mathbf{R}$ 与 x 对应, 则称这个对应法则 f 是 $\mathbf{X}$ 上的一个函数, 并称 $\mathbf{X}$ 为函数 f 的定义域, 称 $R(f) = \{y : y = f(x), x \in \mathbf{X}\}$ 为函数 f 的值域, 这时 $y = f(x)$ 称为 x 的象, 而 x 称为 y 的原象, 函数 $y = f(x)$ 的定义域记为 $D(f)$. x 是函数的自变量, y 是函数 f 的因变量.

特征函数

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A, \\ 0, x \notin A, \end{cases}$$

其中 A 是 $\mathbf{R}$ 的子集.

Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbf{Q}, \\ 0, x \notin \mathbf{Q}, \end{cases}$$

其中 Q 是有理数集.

符号函数

$$sgn(x) = \begin{cases} -1, x < 0, \\ 0, \quad x = 0, \\ 1, \quad x > 0. \end{cases}$$

Riemann 函数

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}, x = \dfrac{q}{p}, q \in \mathbf{Z}, p \in \mathbf{N}, (p, q) = 1, \\ 0, \qquad\qquad x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

取整函数

$$y = [x],$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 它的定义域是 $X = (-\infty, +\infty)$, 值域是 $R = \mathbf{Z}$.

x 的非负小数部分函数 $y = x - [x]$, 它的定义域是 $X = (-\infty, +\infty)$, 值域是 $R = [0, 1)$.

定义 2.1.3 设 A, B 是两个互不相交的实数集合,$\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是分别定义在集合 A 和集合 B 上的函数, 则

$$f(x) = \begin{cases} \phi(x), x \in A, \\ \psi(x), x \in B, \end{cases}$$

是定义在集合 $A \bigcup B$ 上的函数. 这样的表示方法称为函数的分段表示, 这里函数 f 是分成两段来表示的. 事实上, 分段表示可以分成任意有限段, 甚至无限多段. 上述函数都是分段函数.

定义 2.1.4 设 $F(x,y)$ 表示二元方程, X,Y 为实数集. 如果对每个 $x\in X$, 都能唯一地确定一个 $y\in Y$ 值使 $F(x,y)=0$ 成立, 则令这个 y 与 x 对应, 从而确定了一个函数 $y=f(x)$, 满足 $F(x,f(x))=0$. 于是称函数 $y=f(x)$ 为由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数. 相对地, 以前由解析表达式给出的函数 $y=f(x)$ 则称显函数. 对于隐函数, 有时可以解出明显表达式而化成显函数, 有时则无法解出.

例 2.1.1 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\lg(2-x)}+\arcsin\dfrac{x}{3}$ 的定义域.

解 要使函数有意义必须

$$\begin{cases} x^2-1\geq 0;\\ 2-x>0;\\ 2-x\neq 1;\\ -1\leq \dfrac{x}{3}\leq 1.\end{cases}$$

解上述不等式组, 所求定义域为: $x\in[-3,-1)\bigcup(1,2)$.

例 2.1.2 设 $f(\dfrac{x+1}{3})=x^2+2x-1$, 求 $f(x)$.

解 令 $\frac{x+1}{3}=t$, 则 $x=3t-1$.

$$f(t)=(3t-1)^2+2(3t-1)-1=9t^2-2,$$

所以

$$f(x)=9x^2-2.$$

例 2.1.3 设 $f:R\longrightarrow R$ 满足方程 $f(x+y)=f(x)+f(y), x,y\in R$, 试证：对一切有理数 x, 有 $f(x)=xf(1)$.

证明 由条件 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 知

$$f(\sum_{k=1}^{n}x_k)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k),\quad (x_k\in\mathbf{R}).$$

若 $q\in\mathbf{N}, x\in\mathbf{R}$, 则 $f(qx)=qf(x)$, 特别地 $f(q)=qf(1)$.
由 $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$ 得 $f(0)=0$.

$$0=f(0)=f(1+(-1))=f(1)+f(-1), f(-1)=-f(1).$$

若 $q\in\mathbf{Z}^-$, 则 $f(q)=f((-q)\cdot(-1))=(-q)f(-1)=qf(1)$.
由此 $q\in\mathbf{Z}, f(q)=qf(1)$. 对任何有理数 $x=\frac{q}{p}$, $(q\in\mathbf{Z}, p\in\mathbf{N})$,

$$qf(1)=f(q)=f(p\cdot\frac{q}{p})=pf(\frac{q}{p}),\quad f(x)=\frac{q}{p}f(1)=xf(1).$$

§ 2.1.2 函数的几何特征

（1）**单调性** 设函数 $f(x)$ 于某区间 I 上有定义. 如果对于任何 $x_1,x_2\in I, x_1<x_2$, 都有

$$f(x_1)\leq f(x_2)\qquad (f(x_1)\geq f(x_2))$$

则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上是单调递增 (递减) 函数, 如果式中为严格不等号, 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上是严格单调递增 (严格单调递减) 函数. 单调递增函数和单调递减函数统称单调函数, 严格单调递增函数和严格单调递减函数统称为严格单调函数.

（2）**奇偶性** 如果函数 $y = f(x)$ 的定义域是关于原点对称的区间或关于原点对称的更一般的集 I, 且对任何 $x \in I$, 都有

$$f(-x) = -f(x), \qquad (f(-x) = f(x)),$$

则称函数 $f(x)$ 为奇 (偶) 函数. 易见, 奇函数的图形关于原点中心, 而偶函数的图形关于 y 轴对称.

（3）**有界性** 设函数 $f(x)$ 的定义域是 X, 值域是 $R(f) = \{f(x) : x \in X\}$. 如果实数集 $R(f)$ 有上界 (下界), 称函数 $f(x)$ 有上界 (下界); 如果说函数 $f(x)$ 的值域 $R(f)$ 是有界集, 则称 $f(x)$ 为有界函数; 如果 $R(f)$ 是无界集, 则称 $f(x)$ 为无界函数. 显然, 函数 $f(x)$ 为 X 上的有界函数的充分必要条件是存在 $M > 0$, 使对所有 $x \in X$, 都有 $|f(x)| \le M$.

（4）**周期性** 凡是能使等式 $f(x + r) = f(x)$, ($r > 0$ 为常数) 对所有 x 恒成立的函数 $f(x)$ 称为周期函数, 其中的常数 r 称为函数 $f(x)$ 的周期, 其中最小的称为最小周期.

例 2.1.4 判定函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ 的奇偶性.

解

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{1 + (-x)^2}) = \ln(-x + \sqrt{1 + x^2}) \\ &= \ln\frac{(1 + x^2 - x^2)}{x + \sqrt{1+^2}} = -\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = -f(x). \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

例 2.1.5 求证：$(-a, a)$ 上的任何函数均可表为一个奇函数和一个偶函数之和.

证明 设 $f(x)$ 为 $(-a, a)$ 上的任何函数,

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

而 $\phi(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ 为偶函数, $\psi(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ 为奇函数, 因此 $f(x) = \phi(x)+\psi(x)$ 表为一个奇函数和一个偶函数之和.

例 2.1.6 Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbf{Q}, \\ 0, x \notin \mathbf{Q}, \end{cases}$$

为有界的偶函数, 但非单调. 任何正有理数都是它的周期, 但无最小周期.

§ 2.1.3 **复合函数与反函数**

复合函数 $y = f(u), u = \phi(x)$ 复合为 $y = f[\phi(x)]$, $\phi(x)$ 的值域不能超过 $f(u)$ 的定义域.

例 2.1.7 设 $f(x) = \sin x, f[\phi(x)] = 1 - x^2$, 且 $|\phi(x)| \le \dfrac{\pi}{2}$, 求 $\phi(x)$ 及其定义域.

解 $y=f(u)$ 与 $u=\phi(x)$ 的复合为 $y=f[\phi(x)]=\sin\phi(x)$. 所以

$$\sin\phi(x)=1-x^2,\ \ \phi(x)=\arcsin(1-x^2),$$

定义域为 $-1\le 1-x^2\le 1$, 即 $|x|\le\sqrt{2}$.

例 2.1.8 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 4,\\ e^x, & x>4;\end{cases}$ $\phi(x)=\begin{cases}1+x, & x\le 0,\\ \ln x, & x>0.\end{cases}$ 求 $\phi[f(x)]$.

解

$$\phi[f(x)]=\begin{cases}1+f(x), f(x)\le 0;\\ 2\ln f(x), \quad f(x)>0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}1, & x=0;\\ 2\ln|x|, & x\neq 0, x\le 4;\\ x, & x>4.\end{cases}$$

反函数 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 X, 如果对于任何 $y\in R(f)$, 都恰有一个 $x\in X$, 使得 $y=f(x)$, 则 $y=f(x)$ 就确定了一个 $y\in R(f)$ 由到 $x\in X$ 的单值对应. 按定义, 这就确定了 x 为 y 的函数, 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数, 记为 $x=f^{-1}(y)$. 但也可以按习惯把自变量写成 x, 而因变量写成 y, 即写成 $y=f^{-1}(x)$. 它的定义域是 $R(f)$, 而值域是 X. 于是有

$$(f\circ f^{-1})(x)=x, x\in R(f),$$

$$(f^{-1}\circ f)(x)=x, x\in X.$$

关于反函数的存在性, 我们有如下的定理.

定理 2.1.1 设 $y=f(x)$ 在某个区间 X 内严格单调增加（或减少）, 又设和这个 X 相对应的值域为 Y, 那么必存在反函数 $x=f^{-1}(y)$, 它在 Y 内也是严格单调增加（或减少）的.

证明 对于任何 $y\in Y$, 因为 Y 为 $f(x)$ 的值域, 故有 $x\in X$, 使得 $y=f(x)$. 若还有 $x'\in X, x\neq x'$, 使得 $f(x')=y$, 则有 $f(x)=f(x')$, 此与函数 $f(x)$ 的严格递增性矛盾, 故满足条件 $y=f(x)$ 的 x 是唯一的, 即对应 $y\to x$ 是单值的. 从而函数 $x=f^{-1}(y)$ 存在.

对于任何 $y_1,y_2\in Y, y_1<y_2$, 记 $x_1=f^{-1}(y_1)$,$x_2=f^{-1}(y_2)$. 若 $x_1\ge x_2$, 则由函数的严格递增性可得 $f(x_1)\ge f(x_2)$, 即 $y_1\ge y_2$ 矛盾, 故必有 $x_1<x_2$, 即反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也是严格递增的.

当 $f(x)$ 为区间 I 上的严格单调函数时, 它当然有反函数 f^{-1}, 但当 $f(x)$ 不是严格单调函数时, 也可能有反函数. 例如函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{当}x\text{为有理数},\\ -x, & \text{当}x\text{为无理数},\end{cases}$$

它不但不是严格单调函数, 而且它的图形也无法明确画出来. 但是,$f(x)$ 有反函数而且反函数就是它自身, 即 $f^{-1}(x)=f(x)$.

例 2.1.9 求函数

$$y=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ x^2, & 1\le x\le 4,\\ 2^x, & 4<x<+\infty\end{cases}$$

的反函数及反函数的定义域.

解 反函数及反函数的定义域如下:

$$x=\begin{cases} y, & -\infty < y < 1; \\ \sqrt{y}, & 1 \le y \le 16; \\ \log_2 y, & 16 < y < +\infty. \end{cases}$$

§ 2.1.4 基本初等函数

指数函数 $y = a^x \ (a > 0, a \neq 1)$

对数函数 $y = \log_a x \ (a > o, a \neq 1)$

幂函数 $y = x^\mu \ (\mu \neq 0)$

三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$

反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \mathrm{arccot} x$

双曲函数 $\mathrm{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \mathrm{cth}x = \dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$

上述六类函数统称为基本初等函数. 凡经过基本初等函数的有限次四则运算及有限次复合所得到的函数, 称为初等函数.

习题 2.1

1. 求定义域

(1) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$; (2) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$;

(3) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-2}$; (4) $f(x) = \log(\frac{1+\sin x}{1-\cos x})$;

(5) $f(x) = \ln(\sin \frac{\pi}{x})$; (6) $f(x) = \arcsin(1 - x) + \ln(\ln x)$.

2. 判断下列函数在给定区间的单调性, 并证明:

(1) $f(x) = x^2 \ (0 \le x < +\infty)$; (2) $f(x) = \sin x \ (-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2})$;

(3) $f(x) = \tan x \ (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$; (4) $f(x) = \cos x \ (0 \le x \le \pi)$;

(5) $f(x) = \cot x \ (0 < x < \pi)$.

3. 符号函数 $y = sgnx$, 用下列方法来定义:

$$sgnx = \begin{cases} 1, & \text{若 } x > 0; \\ 0, & \text{若 } x = 0; \\ -1, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

作这个函数的图象, 并证明 $|x| = xsgnx$.

4. 函数 $y = [x]$(数 x 的整数部分）用下法定义：若 $x = n + r$, 式中 n 为整数且 $0 \le r < 1$, 则 $[x] = n$. 作这个函数的图象.

5. 函数 $chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $sh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, 分别称为双曲余弦和双曲正弦. 证明：
（1）chx 是偶函数, shx 是奇函数;
（2）$chx^2-shx^2=1\ \ x\in R$.
6. 设 $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})\ \ (a>0)$ 证明：$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$.
7. 求下列函数的定义域和值域：

(1) $y=\sqrt{2+x-x^2}$;　　(2) $y=\arcsin(\ln\frac{x}{10})$;
(3) $y=\ln(1-2\cos x)$;　　(4) $y=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$.

8. 已知 $f(x)=\frac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$
(1) 判定函数 $f(x)$ 的奇偶性;
(2) 证明函数 $f(x)$ 在定义域内增函数;
(3) 求 $f(x)$ 的值域.
9. 已知 $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$, 求

$$f(\frac{1}{2009})+f(\frac{2}{2009})+f(\frac{3}{2009})+\cdots+f(\frac{2008}{2009}).$$

10. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有定义.$a>0,b>0$, 求证：
（1） 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降, 则 $f(a+b)\le f(a)+f(b)$;
（2） 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调上升, 则 $f(a+b)\ge f(a)+f(b)$.
11. 利用上题结论证明：
（1） 当 $p>1$ 时,$(a+b)^p\ge a^p+b^p$;
（2） 当 $0<p<1$ 时 $(a+b)^p\le a^p+b^p$.

§2.2 函数的极限

定义 2.2.1(函数在某点极限) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义, 但 x_0 这一点可以例外,A 是一实数. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 就称 $f(x)$ 当 x 趋向 x_0 时以 A 为极限, 记成 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, 也可以简记为 $f(x)\to A(x\to x_0)$, 我们也说 $f(x)$ 在点 x_0 有极限.

在上述定义中如将 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0-\delta<x<x_0$, 其它不变, 可定义左极限 $f(x_0-)=\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)$. 同样可定义右极限 $f(x_0+)$.

注 1 当正数 ε 给定之后, 满足要求的 δ 通常是与 ε 有关的, 由 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 确定. 有时先限定 $|x-x_0|<r$, 将 $|f(x)-A|$ 适当放大, 使 $|f(x)-A|<M|x-x_0|$, 再由 $M|x-x_0|<\varepsilon$ 确定 δ.

注 2 几何意义：对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 曲线 $y=f(x)$ 总在两条直线 $y=A-\varepsilon,y=A+\varepsilon$ 之间.

注 3 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)$ 存在且相等.

例 2.2.1 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=3$.

证明 先限定 $|x-1|<1$, 即 $0<x<2$.

$$\left|\frac{x^3-1}{x-1}-3\right| = |x^2+x-2| = |(x+2)(x-1)| = |x+2||x-1| < 4|x-1|.$$

$\forall\varepsilon>0$, 由 $4|x-1|<\varepsilon$ 得 $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{4}$.

取 $\delta=\min\{1,\dfrac{\varepsilon}{4}\}$, 当 $0<|x-1|<\delta$ 时, 有 $\left|\dfrac{x^3-1}{x-1}-3\right|<\varepsilon$. 由此 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=3$.

例 2.2.2 证明 $\lim\limits_{x\to3}(x^2-4x+4)=1$.

证明 先限定 $|x-3|<1$, 即 $2<x<4$.

$$\left|(x^2-4x+4)-1\right| = |x^2-4x+3| = |(x-3)(x-1)| = |x-3||x-1| < 3|x-3|.$$

$\forall\varepsilon>0$, 由 $3|x-3|<\varepsilon$, 得 $|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{3}$.

取 $\delta=\min\{1,\dfrac{\varepsilon}{3}\}$, 当 $|x-3|<\delta$ 时, 有 $\left|(x^2-4x+4)-1\right|<\varepsilon$. 由此 $\lim\limits_{x\to3}(x^2-4x+4)=1$.

例 2.2.3 讨论下列函数在所指点的左、右极限

(1) $f(x)=\dfrac{(x+1)(-1)^{[x]}}{x^2-1}$, $(x=-1)$;

(2) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ 1+x^2, & x<0, \end{cases}$ $(x=0)$.

解 (1) $x\neq-1$ 时, $f(x)=\dfrac{(-1)^{[x]}}{x-1}$.

$$\lim_{x\to-1-}f(x)=\frac{(-1)^{-2}}{(-1)-1}=-\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to-1+}f(x)=\frac{(-1)^{-1}}{(-1)-1}=\frac{1}{2}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}x\sin\dfrac{1}{x}=0.$ $\quad\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}(1+x)=1.$

定义 2.2.2(函数在正无限处极限) 若对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $X>0$, 当 $x>X$ 时, 总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 就称 A 为 $f(x)$ 在正无限远处的极限, 或者称 A 是当 $x\to+\infty$ 时的极限, 记为: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $f(+\infty)=A$, 这时也称函数 $f(x)$ 在正无限远处有极限 A.

相仿地, 可给出函数在负无限远处极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 及函数在无限远处极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的定义.

易证 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

例 2.2.4 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x}{x^2-2}=2$.

证明 先限定 $|x|>4$.

$$\left|\frac{2x^2+x}{x^2-2}-2\right| = \left|\frac{x+4}{x^2-2}\right| \le \frac{|x|+4}{\frac{1}{2}x^2+(\frac{1}{2}x^2-2)} < \frac{2|x|}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{4}{|x|}.$$

$\forall\varepsilon>0$, 由 $\dfrac{4}{|x|}<\varepsilon$ 得 $|x|>4\varepsilon$.

取 $X=\max\{4,4\varepsilon\}$, 当 $|x|>X$ 时, 有 $\left|\dfrac{2x^2+x}{x^2-2}-2\right|<\varepsilon$. 由此 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x}{x^2-2}=2$.

定义 2.2.3 前面所讲的都是自变量 $x\to a$（这里 $a=x_0$ 或 x_0+, x_0- 或 $\infty,+\infty,-\infty$ 等）, 函数值随着 $x\to a$ 趋近某个定数的情形. 现在, 我们讨论当 $x\to a$ 时函数值无限制地增大, 即函数值趋于无穷大的情形.

$$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to a}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to a}f(x)=\infty.$$

性质 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$；反之, 若在 a 的某空心邻域内 $f(x)\neq 0$, 且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

证明 $\forall\varepsilon>0$, 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, 则存在 $\delta>0$ 当 $0<|x-a|<\delta$ 时, $|f(x)|>\dfrac{1}{\varepsilon}$, 即 $\dfrac{1}{|f(x)|}<\varepsilon$, 故

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0.$$

同理可证: 若在 a 的某空心邻域内 $f(x)\neq 0$, 且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$. 证明留给读者.

例 2.2.5 已知 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$, 求 $f(0-), f(0+)$.

解 $f(0-)=\lim\limits_{x\to 0-}e^{\frac{1}{x}}=0$, $f(0+)=\lim\limits_{x\to 0+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

例 2.2.6 已知 $f(x)=sgnx$, 求 $f(0-), f(0+), f(+\infty), f(-\infty)$.

解 显然 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ 所以

$$f(0-)=-1, f(0+)=1, f(+\infty)=1, f(-\infty)=-1.$$

习题 2.2

1. 用函数极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=2$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0+}\ln x=-\infty$; (4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x+1}=-\infty$;

(5) $\lim\limits_{x\to 2+}\frac{2x}{x^2-4}=+\infty$; (6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x-1}=-\frac{1}{2}$;

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{x^2-2}=3$; (8) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}$;

(9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$; (10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$.

2. 证明等式：

(1) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$; (2) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.

3. 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有定义, 且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{x}=0$, 求证：$\lim\limits_{n\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$.

§2.3 函数极限的性质与四则运算

定理 2.3.1（唯一性） 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 收敛, 则极限唯一.

证明 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=b,(b\neq a)$.

不妨设 $a<b$. 取 $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$, 根据函数极限的定义, 存在 $\delta_1>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时,

$$|f(x)-a|<\varepsilon=\frac{b-a}{2},$$

即

$$-\frac{b-a}{2}<f(x)<\frac{b+a}{2}.$$

以及存在 $\delta_2>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时,

$$|f(x)-b|<\varepsilon=\frac{b-a}{2},$$

即

$$\frac{b+a}{2}<f(x)<\frac{3b-a}{2}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$, 同时有

$$\frac{b+a}{2}<f(x)<\frac{b+a}{2}$$

矛盾, 证毕.

定理 2.3.2（有界性） 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 收敛, 则 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域内有界.

证明 函数 $f(x)$ 在 x_0 收敛, 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$.

取 $\varepsilon=1$, 根据函数极限的定义, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$|f(x)-a|<1$ 所以 $|f(x)|<|a|+1$, $f(x)$ 在 $0<|x-x_0|<\delta$ 内有界.

定理 2.3.3 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的一个空心邻域中有定义, 且对任何序列 $x_n\neq x_0, x_n\to x_0$, $\{f(x_n)\}$ 都收敛, 则存在 $A\in\mathbf{R}$, 使得

(i) 对任何上述的 $\{x_n\}$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

证明 (i) 取定一个数列序列 $x_n'\neq x_0, x_n'\to x_0$, 是由假设 $\{f(x_n')\}$ 收敛, 记

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n')=A.$$

对于任何一个数列 $x_n \neq x_0, x_n \to x_0$, 同样由假设 $\{f(x'_n)\}$ 收敛, 记 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = B$. 令

$$y_n = \begin{cases} x'_k, \text{当} n = 2k-1, \\ x_k, \quad\ \text{当} n = 2k, \end{cases}$$

则 $\{y_n\}$ 满足条件 $y_n \neq x_0, y_n \to x_0$, 由假设 $\{f(y_n)\}$ 收敛, 因而 $\{f(x'_n)\}, \{f(x_n)\}$ 作为它的两个子列, 极限相等, 故有 $B = A$. 即 (i) 得证.

(ii) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq A$, 则由极限的否定定义知存在 ε_0, 使对任何 $\delta = 1/n > 0$, 都存在 x_n, 使得 $0 < |x_n - x_0| < 1/n, |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$. 这表明 $\{x_n\}$ 满足条件 $x_n \neq x_0, x_n \to x_0$, 但 $\{f(x_n)\} \neq A$, 此与 (i) 的结果矛盾, 从而必有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq A$.

推论 设有两个数列 $\{x_n\}$ 和 $\{x'_n\}$: $x_n \neq x_0, x_n \to x_0, x'_n \neq x_0, x'_n \to x_0$, 使得 $\{f(x_n)\}$ 和 $\{f(x_n)\}$ 都收敛但极限不等, 则 $f(x)$ 在点 x_0 没有极限.

注：如果我们只关心函数在点的极限是否存在, 而不管极限值是多少, 则定理有下述另一种表述.

定理 2.3.4 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是对任何序列 $x_n \neq x_0, x_n \to x_0$,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

都收敛.

证明 必要性. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 则对任何 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$. 又因 $x_n \neq x_0, x_n \to x_0$,, 故对上述 δ, 有 N, 使当 $n > N$ 时, 就有 $0 < |x_n - x_0| < \delta$, 由此 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 收敛.

充分性. 若对任何序列 $x_n \neq x_0, x_n \to x_0$,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

都收敛, 由**定理 2.3.3** 存在 $A \in \mathbf{R}$, 使得 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在.

推论 2.3.1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的充要条件是对任何序列 $x_n \neq x_0, x_n \to x_0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

定理 2.3.5 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ 的充要条件是对任何序列 $x_n \neq x_0, x_n \to x_0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty.$$

该定理的证明同推论 2.3.1.

例 2.3.1 证明 $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

证明 取 $x_n = \dfrac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$, 则 $x_n \to 0$. 显然 $\sin\dfrac{1}{x_n} = (-1)^n$. 但由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在, 根据定理 2.3.4, 可知 $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

定理 2.3.6（保号性） 若在 x_0 的某空心邻域内

$$f(x) \geq g(x), \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = B,$$

则 $A \geq B$.

证明 运用反证法. 若 $A < B$, 取 $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$.

由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 存在 $\delta_1 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时,$|f(x) - A| < \varepsilon = \frac{B-A}{2}$, 即

$$-\frac{B-A}{2} < f(x) < \frac{B+A}{2}.$$

由 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, 存在 $\delta_2 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时,$|g(x) - B| < \varepsilon = \frac{B-A}{2}$, 即

$$\frac{B+A}{2} < g(x) < \frac{3B+A}{2}.$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$, 同时有

$$f(x) < \frac{B+A}{2} < g(x)$$

与条件在 x_0 的某空心邻域内 $f(x) \geq g(x)$ 矛盾, 证毕.

推论 2.3.2 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, $A > B$, 则在 x_0 的某空心邻域内 $f(x) > g(x)$.

证明 反证法. 若在 x_0 的某空心邻域内 $f(x) \leq g(x)$, 则由定理 2.3.6, $A \leq B$, 矛盾.

定理 2.3.7（夹逼原理） 若在 x_0 的某空心邻域内有 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ 且

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = A,$$

则有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$.

证明 由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 存在 $\delta_1 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时,$|f(x) - A| < \varepsilon$, 即

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

由 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$, 存在 $\delta_2 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时,$|h(x) - A| < \varepsilon$, 即

$$A - \varepsilon < h(x) < A + \varepsilon.$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$, 时,

$$A - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < A + \varepsilon,$$

从而 $|g(x) - A| < \varepsilon$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$.

定理 2.3.8（极限的四则运算）　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, 则

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B,\quad \lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=AB, \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B},$$

在商的情况下, 要求 $B\neq 0$.

证明　由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 存在 $\delta_1>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时,$|f(x)-A|<\varepsilon$.

由 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, 存在 $\delta_2>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时,$|g(x)-B|<\varepsilon$,

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$, 同时有 $|f(x)-A|<\varepsilon$, $|g(x)-B|<\varepsilon$.

由此

$$|f(x)\pm g(x)-(A\pm B)|\le|(f(x)-A)\pm(g(x)-B)|\le|f(x)-A|+|g(x)-B|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B.$$

由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$ 及定理 2.3.2, 存在正常数 M, 使得在 x_0 的某空心邻域内有 $|f(x)|\le M$,$|g(x)|\le M$.

$$\begin{aligned}&|f(x)g(x)-AB|=|(f(x)-A)g(x)+A(g(x)-B)|\\&\le|f(x)-A||g(x)|+|A||g(x)-B|<(M+|A|)\varepsilon,\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=AB$.

由 $B\neq 0$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0}|g(x)|=|B|>\frac{|B|}{2}$, 可假定在 x_0 的某空心邻域内 $|g(x)|>\frac{|B|}{2}$.

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}\right|=\left|\frac{f(x)B-Ag(x)}{g(x)B}\right|=\left|\frac{(f(x)-A)B-A(g(x)-B)}{g(x)B}\right|\\&\le 2\frac{|B|\varepsilon+|A|\varepsilon}{|B|^2}=2\frac{|A|+|B|}{|B|^2}\varepsilon,\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

定理 2.3.9（柯西收敛原理）　函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极限的充分必要条件是对任何 $\varepsilon>0$, 都存在 $\delta>0$, 使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 及 $0<|x'-x_0|<\delta$ 时, 就有

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

证明　必要性. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 于是对于任给的 $\varepsilon>0$,$\delta>0$, 使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 就有

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $0<|x-x_0|<\delta$ 及 $0<|x'-x_0|<\delta$ 时, 就有

$$|f(x)-f(x')|\le|f(x)-f(x_0)|+|f(x')-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

充分性. 设 $\{x_n\}$ 是满足条件 $x_n \to x_0\ (n\to\infty)$ 且 $x_n \neq x_0\ (n=1,2,\cdots)$ 的任一数列. 对于任给的 $\varepsilon>0$, 按假设存在 $\delta>0$ 使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 及 $0<|x'-x_0|<\delta$ 时, 就有

$$|f(x)-f(x')|<\delta.$$

对于上述的 δ , 因为 $x_n \to x_0\ (n\to\infty)$ 且 $x_n\neq x_0\ (n=1,2,\cdots)$ 故有 N, 使当时 $m>N, n>N$,

$$0<|x_m-x_0|<\delta, 0<|x_n-x_0|<\delta,$$

故 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$, 即 $\{f(x_n)\}$ 为柯西数列, 从而由数列极限的柯西收敛原理知 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 再由定理 2.3.4, 即知 $f(x)$ 在点 x_0 的极限存在.

注意, 对于其他过程, 也都有相应的柯西收敛原理, 例如在 $x\to+\infty$ 时, 有如下的定理.

定理 2.3.9' 函数 $f(x)$ 在 $+\infty$ 处有极限的充分必要条件是对任何 $\varepsilon>0$, 都存在 $X>0$, 使当 $x>X, x'>X$ 时, 就有

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

例 2.3.2 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.\end{aligned}$$

例 2.3.3 从条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$, 求常数 a,b.

解 由条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$ 知

$$0=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}-x-\frac{b}{x}\right)=1-a,$$

所以 $a=1$, 从而 $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x}{x+1}=-1.$

重要极限一

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

证明 通过单位圆内扇形面积与两三角形面积比较得

$$\sin x<x<\tan x,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

从而有

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

显然上式对于 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 也成立. 由于

$$|\cos x - 1| = 2\sin^2\frac{x}{2} \le \frac{x^2}{2},$$

可知 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. 应用极限的夹逼法则, 得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

重要极限二

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

证明 先证 $x \to +\infty$ 的情形. 对任意 $x \ge 1$,

$$[x] \le x < [x]+1, 1+\frac{1}{[x]+1} < 1+\frac{1}{x} < 1+\frac{1}{[x]},$$

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分. 当 $x \to +\infty$ 时, 不等式左右两侧表现为两个数列极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

与

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

利用函数极限的夹逼性, 得到

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

再证

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

为此令 $y = -x$, 于是当 $x \to -\infty$ 时, $y \to +\infty$, 从而有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}\\ &= \lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right)\right] = e.\end{aligned}$$

将 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 结合起来, 就得到

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

证毕

注 上述证明中包含下述结果:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{e}.$$

例 2.3.4 求极限 $\lim\limits_{x\to1}(3-2x)^{\frac{2}{1-x}}$.

解 $3-2x=1+2(1-x)$, 令 $y=\frac{1}{2(1-x)}$, 则当 $x\to1$ 时 $y\to\infty$.

$$\lim_{x\to1}(3-2x)^{\frac{2}{1-x}}=\lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^{\frac{4}{y}}=e^4.$$

例 2.3.5 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{n^2}}{\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{3}}$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n^2}}{\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{3}\right)\sin\frac{\pi}{n^2}}{\left(3+\frac{1}{n^2}\right)-3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\pi\left(\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{3}\right)\frac{\sin\frac{\pi}{n^2}}{\frac{\pi}{n^2}}=2\sqrt{3}\pi.$$

例 2.3.6 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

解 令

$$y=\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}},$$

则

$$\ln y=\frac{1}{\sin x}\ln\frac{1+\tan x}{1+\sin x}=\frac{1}{\sin x}\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\ln\left(1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1+\sin x}{\tan x-\sin x}}.$$

因为

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin x}\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\cos x(1+\sin x)}=0,$$

$$\lim_{x\to0}\left(1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1+\sin x}{\tan x-\sin x}}=e,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln y = 0\cdot e = 0$, 原式 $=\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} e^{\ln y} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln y} = e^0 = 1$.

例 2.3.7 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n^2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}} = e^0 = 1$.

习题 2.3

1. 证明**定理 2.3.5**.
2. 求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$; (2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+2x)(1+3x)-1}{x}$; (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$; (6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$ (m和n为自然数); (8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\frac{1-x}{1+x}$; (10) $\lim\limits_{x\to\infty}\arccos\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$.

3. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; (2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; (4) $\lim\limits_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$;

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$; (6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$; (8) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

4. 讨论下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}$ (m和n为整数); (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin 3x}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$; (4) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$; (6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x^2}$;

(7) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$; (8) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cot x-\cot a}{x-a}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$; (10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$;

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$; (12) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$;

(13) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$; (14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$;

(15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$; (16) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$.

5. 求极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$;　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}\ (a>0)$;　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$;　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\cot^2 x}$;　(8) $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin(\pi x))^{\cot \pi x}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$;　(10) $\lim\limits_{x\to\infty}x\,[\ln(1+x)-\ln x]$.

6. 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\ \ (a\geq 0)$, 证明：$\lim\limits_{x\to\sqrt{a}}f(x^2)=A$.

§2.4 连续函数

§ 2.4.1 连续函数的定义

定义 2.4.1 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 连续; 若 $\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 左连续; 若 $\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 右连续. 若 $f(x)$ 在某区间 I 上每点连续, 则称 $f(x)$ 在 I 上连续.

定义 2.4.2 设函数 $f(x)$ 在区间 I（或开, 或闭, 或半开半闭）内满足：对任意的 $\varepsilon>0$, 可找到只与 ε 有关而与 I 内的点 x 无关的 $\eta>0$, 使得对 I 内任意两点 x_1 和 x_2, 当 $|x_1-x_2|<\eta$ 时, 总有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$, 就称 $f(x)$ 在 I 内一致连续.

例 2.4.1 函数 $\sin x,\cos x$ 在任意一点 x_0 是连续的, 也就是在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

解 $\forall\varepsilon>0$, 因为

$$|\sin x-\sin x_0|=\left|2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leq 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|=|x-x_0|,$$

取 $\delta=\varepsilon$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, $|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$. 所以 $\sin x$ 在任意一点 x_0 是连续的. 同理可证 $\cos x$ 在任意一点 x_0 是连续的, 故 $\sin x,\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.
由证明过程可知 $\sin x,\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内也是一致连续的.

例 2.4.2 证明 x^2 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 但非一致连续.

证明 $\forall x_0\in(-\infty,+\infty$, 假定 $|x-x_0|<1$, 则 $|x|<|x_0|+1$. $\forall\varepsilon>0$, 因为

$$|x^2-x_0^2|=|(x+x_0)(x-x_0)|\leq(|x|+|x_0|)|x-x_0|\leq(2|x_0|+1)|x-x_0|,$$

要使 $|x^2-x_0^2|<\varepsilon$, 只须 $(2|x_0|+1)|x-x_0|<\varepsilon$, 即 $|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon}{2|x_0|+1}$.

取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{2|x_0|+1}\right\}$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时,$|x^2-x_0^2|<\varepsilon$, 故 x^2 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

取 $\varepsilon = 1$, $\forall\delta$, 取 $x_1 = \delta + \frac{1}{\delta}$, $x_2 = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{\delta}$, 显然 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$ 且 $|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2} < \delta$, 但

$$|x_1^2 - x_2^2| = \left|\left(\delta + \frac{1}{\delta}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2} + \frac{1}{\delta}\right)^2\right| = 1 + \frac{3\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon_0,$$

由此 x^2 在 $(-\infty, +\infty)$ 内非一致连续.

§ 2.4.2 连续函数的性质和运算

定理 2.4.1 若 $f(x), g(x)$ 都在 x_0 点连续, 则 $f(x) \pm g(x), f(x)g(x), \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也在点 x_0 连续；但对商的情形, 必须设 $g(x_0) \neq 0$.

证明 由极限的四则运算及连续性定义即知.

定理 2.4.2 设 $f(x)$ 在 $a \le x \le b$ 严格增加（减少）, 并且在每点连续, 又设 $f(a) = \alpha, f(b) = \beta$, 则在区间 $y \in [\alpha,\beta]$ 上, 存在反函数 $x = \phi(y)$, 它在这区间上也是严格增加（减少）和连续的.

证明 见定理 2.6.4 的证明.

定理 2.4.3 若 $y = f(u)$ 在点 u_0 连续, 而 $u = \phi(x)$ 在 x_0 点的极限为 u_0, 即 $\lim\limits_{x\to x_0} \phi(x) = u_0$, 则

$$\lim_{x\to x_0} f[\phi(x)] = f(u_0) = f[\lim_{x\to x_0} \phi(x)].$$

特别地, 若 $f(u)$ 在点 u_0 连续, 而 $u = \phi(x)$ 在点 x_0 连续, 那么复合函数 $y = f[\phi(x)]$ 在点 x_0 连续.

证明 $\forall\varepsilon > 0$, 由 $y = f(u)$ 在点 u_0 连续, 存在 $\delta_1 > 0$, 当 $|u - u_0| < \delta_1$ 时,

$$|f(u) - f(u_0)| < \varepsilon.$$

再由 $\lim\limits_{x\to x_0} \phi(x) = u_0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|\phi(x) - u_0| < \delta_1$. 若 $u = \phi(x)$, 则 $|u - u_0| < \delta_1$, 从而 $|f[\phi(x)] - f(u_0)| < \varepsilon$, 故

$$\lim_{x\to x_0} f[\phi(x)] = f(u_0) = f[\lim_{x\to x_0} \phi(x)].$$

特别地, 若 $f(u)$ 在点 u_0 连续, 而 $u = \phi(x)$ 在点 x_0 连续, 则

$$\lim_{x\to x_0} \phi(x) = \phi(x_0) = u_0, \quad \lim_{x\to x_0} f[\phi(x)] = f(u_0) = f[\phi(x_0)],$$

即 $y = f[\phi(x)]$ 在点 x_0 连续.

§ 2.4.3 初等函数连续性与函数的间断点分类

例 2.4.3 证明 $y = a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

证明 先证 $y = a^x$ 在 $x = 0$ 连续.

若 $a > 1$, $\forall\varepsilon > 0$, 要使 $|a^x - a^0| = |a^x - 1| < \varepsilon$, 只需 $1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon$, 即

$$\log_a(1 - \varepsilon) < x < \log_a(1 + \varepsilon).$$

若取 $\delta=\min\{-\log_a(1-\varepsilon),\log_a(1+\varepsilon)\}$, 当 $|x-0|=|x|<\delta$ 时,

$$|a^x-a^0|=|a^x-1|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1=a^0$, 即 $y=a^x$ 在 $x=0$ 连续.

对一般的 $x_0\in(-\infty,+\infty)$, 因为 $a^x=a^{x_0}a^{x-x_0}$, a^{x-x_0} 可看成 $y=a^u$ 与 $u=x-x_0$ 复合而成, a^u 在 $u=0$ 连续,$u=x-x_0$ 在 $x=x_0$ 连续, 由复合函数的连续性知 a^{x-x_0} 在 $x=x_0$ 连续, $a^x=a^{x_0}a^{x-x_0}$ 在 $x=x_0$ 连续, 从而 $y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

若 $a=1, y=a^x\equiv 1$ 结论显然.

若 $0<a<1, y=a^x=\dfrac{1}{(\frac{1}{a})^x}$. 因为 $\frac{1}{a}>1$, $(\frac{1}{a})^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 故 $y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

综上所述 $y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

已知 $\sin x,\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 由连续的四则运算知 $y=\tan x,\cot x$ 在定义域内连续, 从而一切三角函数在定义域内连续. 由 $y=a^x$ 在定义域内连续及反函数的连续性知 $y=\log_a x$ 在定义域内连续, 由此 $y=x^\mu=e^{\mu\ln x}$ 在定义域内连续, 故一切基本初等函数, 进而一切初等函数在定义域内连续, 即得下面的定理.

定理 2.4.4 初等函数在定义域内连续.

定义 2.4.3

（1）$f(x_0-), f(x_0+)$ 存在, 但不相等, 此时称 x_0 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

（2）$f(x_0-)=f(x_0+)$, 亦即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在, 但它不等于 $f(x_0)$ 或 $f(x)$ 在 x_0 点没有定义, 这时称 x_0 为可去间断点.

（3）$f(x_0-), f(x_0)$ 中至少有一不存在, 此时称 x_0 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

注 在可去间断点处可改变点的函数值或者补充该点的函数值使该函数在此点连续.

跳跃间断点和可去间断点统称为第一类间点.

例 2.4.4 讨论 $y=\dfrac{x}{\tan x}$ 的不连续点（间断点）.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=1$, $x=0$ 为可去间断点.

$\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{x}{\tan x}=\infty\ \ (k\neq 0)$, $x=k\pi$ 为无穷间断点 (第二类间断点).

$\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\tan x}=0\ \ (k\neq 0)$, $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 为可去间断点 (第一类间断点).

例 2.4.5 讨论 $y=x[x]$ 的不连续点（间断点）.

解 $x=k\in\mathbf{Z}\ \ (k\neq 0)$ 为跳跃间断点

例 2.4.6 研究函数 $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3}, & x\neq 3,\\ 6, & x=3.\end{cases}$ 的连续性, 并画出该函数的图形.

解 $x\neq 3$ 时, $f(x)=x+3$ 连续. 而

$$\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6=f(3),$$

由此 $f(x)$ 在 $x=3$ 连续. 从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

例 2.4.7 定出 a,b 和 c, 使得函数

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x\le -1;\\ ax^2+bx+c, & |x|<1, x\ne 0;\\ 2, & x=0;\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

解 $f(-1-)=-1,\ \ f(-1+)=a(-1^2)+b(-1)+c=a-b+c$.

由 $f(x)$ 连续知 $f(-1-)=f(-1+)$, 所以 $a-b+c=-1$.

而 $f(0-)=c=f(0+)=f(0)=2$.

再由 $f(1-)=a+b+c, f(1+)=1$ 知 $a+b+c=1$.

联立上述三方程解得 $a=-2, b=1, c=2$.

例 2.4.8 设函数 f,g 在 (a,b) 上连续, 令

$$F(x)=\max(f(x),g(x)), G(x)=\min(f(x),g(x)),$$

则 F,G 是 (a,b) 上的连续函数.

证明 由

$$F(x)=\frac{f(x)+g(x)}{2}+\frac{|f(x)-g(x)|}{2},\ \ G(x)=\frac{f(x)+g(x)}{2}-\frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

及 $y=|x|$ 的连续性即知.

例 2.4.9 证明 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(c,1)\ \ (c>0)$ 是一致连续的, 而在 $(0,1)$ 连续但非一致连续.

证明 $\forall x_1,x_2\in(c,1)$,

$$\begin{aligned}\left|\sin\frac{1}{x_1}-\sin\frac{1}{x_2}\right|&=2\left|\cos\left(\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}}{2}\right)\right|\\ &\le 2\left|\frac{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}}{2}\right|\le\frac{1}{c^2}|x_1-x_2|.\end{aligned}$$

$\forall\varepsilon>0$, 若 $\dfrac{1}{c^2}|x_1-x_2|<\varepsilon$ 即 $|x_1-x_2|<c^2\varepsilon$. 取 $\delta=c^2\varepsilon$, 当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,

$$\left|\sin\frac{1}{x_1}-\sin\frac{1}{x_2}\right|<\varepsilon.$$

故 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(c,1)\ \ (c>0)$ 是一致连续的.

$\forall x\in(0,1)$ 取 $c>0$ 使 $x\in(c,1)$, 由前面的证明知 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(c,1)$ 上一致连续, 进而在 $x\in(0,1)$ 连续.

对 $\varepsilon = 1, \forall\, \delta > 0$, 取 $x_1 = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, x_2 = \dfrac{1}{2n\pi} \in (0,1)$, 当 n 充分大时

$$|x_1 - x_2| = \frac{\pi}{2n\pi(2n\pi + \frac{\pi}{2})} < \delta.$$

但

$$\left|\sin\frac{1}{x_1} - \sin\frac{1}{x_2}\right| = 1 = \varepsilon,$$

所以 $y = \sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上非一致连续.

习题 2.4

1. 求极限

(1) $\lim\limits_{x\to 1-} \arctan\frac{1}{1-x}$.　　(2) $\lim\limits_{x\to 1+} \arctan\frac{1}{1-x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to 0+} x\left[\frac{1}{x}\right]$.

2. 证明

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数.

3. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a > 0, \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, 证明：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = a^b$, 并求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+1}{x-1})^{\frac{2x-1}{x+1}}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+1}{x-1})^{x}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \tan^n(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})$;　　(4) $\lim\limits_{x\to a}(\frac{\sin x}{\sin a})^{\frac{1}{x-a}}$.

4. 证明

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \ (a > 0)$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a$.

5. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 中有定义且在点 $x_0 \in (a,b)$ 连续, 则 $f(x)$ 在点 x_0 的某一个邻域有界.

6. 证明若 $f(x)$ 为连续函数, 则 $|f(x)|$ 也是连续的.

7. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充分必要条件是对于任何收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$, 都有

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

8. 证明：

(1) 某区间上两个一致连续函数之和必定一致连续;

(2) 某区间上两个一致连续函数之积不一定一致连续.

9. 求证函数 $\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上不一致连续.

10. $f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上非一致连续, 但是在 $[a,A]$ 上一致连续（A 为任意有限正数）.

11. 指出下列各函数的间断点, 并指出间断点的类型:

(1) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$; (2) $f(x)=x\arctan\frac{1}{x}$;

(3) $f(x)=x\cot x$; (4) $f(x)=\frac{1}{\ln x}$;

(5) $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{x}, |x|\le 1,\\ |x-1|, |x|>1\end{cases}$;

(6) $f(x)=\begin{cases}\sin(\pi x), & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$

12. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续且 $f(x_0)>0$, 求证存在 $\delta>0$ 使当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 就有 $f(x)\ge c>0$, 其中 c 为常数.

13. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 恒正, 按定义证明 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 连续.

14. 设对所有 $x\in[-1,1]$, 均有 $|f(x)|\le|x|$, 求证 $f(x)$ 在点 0 连续.

15. 设 $a>0$, 函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上满足李普希兹条件：对任意 $x,y\in[a,+\infty)$, 都有 $|f(x)-f(y)|\le L|x-y|$, 其中 L 为常数, 求证函数 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

16. 判断下列各函数在指定区间上是否一致连续？说明理由.

(1) $f(x)=\sqrt[3]{x},\ [0,1]$; (2) $f(x)=\sin\frac{\pi}{x},\ (-\infty,+\infty)$;

(3) $f(x)=x+\sin x,\ (-\infty,+\infty)$; (4) $f(x)=\sin x^2,\ (-\infty,+\infty)$.

17. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 中一致连续, 求证 $f(x)$ 在 (a,b) 中有界.

18. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有第一类间断点, 求证 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 上有界.

19. 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 与 $[b.c)$ 上都一致连续, 求证 $f(x)$ 在 (a,c) 中一致连续, 若将区间 $(a,b]$ 改为 (a,b), 其他条件不动, 结论如何？

§2.5 无穷小量和无穷大量的阶

定义 2.5.1 当 $x\to x_0$ 时,$f(x),g(x)$ 为无穷小量.

（1）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\infty$, 称 $f(x)$ 关于 $g(x)$ 是高阶无穷小量, 也称 $g(x)$ 关于 $f(x)$ 是低阶无穷小量, 记作 $f(x)=o(g(x))$.

（2）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c\ne 0$, 就称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是同阶无穷小量. 一般地, 若存在常数 $A>0,B>0$, 当 x 在 x_0 的某空心邻域内时,$a\le\dfrac{f(x)}{g(x)}\le B$ 就称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是同阶无穷小量, 记为 $f(x)=O(g(x))$ 或 $g(x)=O(f(x))$.

（3）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, 就称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是等价无穷小量, 记为 $f(x)\sim g(x)$.

（4）若以 x 作为基本无穷小量, 则当 $f(x)$ 与 x^k (主部, k 为某一正数) 为同阶无穷小量时, 称 $f(x)$ 为 k 阶无穷小量.

关于无穷大量的比较, 也有类似的定义, 例如当 $x\to x_0$ 时, $f(x), g(x)$ 为无穷大量, 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$, 就称 $f(x)$ 关于 $g(x)$ 为高阶无穷大量, 等等.

除了 $f(x)\sim g(x), f(x)=O(g(x)), f(x)=o(g(x))$ 这些记号以外, 我们时常还用 $f(x)=O(1)$ 表示 $f(x)$ 是有界变量, 用 $f(x)=o(1)$ 表示 $f(x)$ 是无穷小量.

定理 2.5.1 若 $\alpha\sim\alpha_1, \beta\sim\beta_1$, 则 $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$.

证明 若 $\alpha\sim\alpha_1, \beta\sim\beta_1$, 则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\alpha_1}=1,\ \lim_{x\to x_0}\frac{\beta}{\beta_1}=1.$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\alpha_1}\frac{\alpha_1}{\beta_1}\frac{\beta_1}{\beta}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

在求极限时经常先有等价无穷小代换.

例 2.5.1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan^4 x}{\sin^3 x(1-\cos x)\cos^2 3x}$.

解 因为 $x\to 0, \sin x\sim x, \tan x\sim x, 1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\sim\frac{x^2}{2}$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\tan^4 x}{\sin^3 x(1-\cos x)\cos^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x^4}{x^3\cdot\frac{x^2}{2})\cos^2 3x}=2.$$

习题 2.5

1. 写出下述命题的“否定命题”的分析表述:

(1) $\{x_n\}$ 是无穷小量;

(2) $\{x_n\}$ 是正无穷大量;

(3) $f(x)$ 在 x_0 的右极限是 A;

(4) $f(x)$ 在 x_0 的左极限是正无穷大量;

(5) 当 $x\to-\infty, f(x)$ 的极限是 A;

(6) 当 $x\to+\infty, f(x)$ 是负无穷大量.

2. 设 $x\to+\infty$ 和 $n>0$. 证明

(1) $cO(x^n)=O(x^n)$; (2) $O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)$, $(n>m)$; (3) $O(x^n)O(x^m)=O(x^{m+n})$.

3. 设 $x\to+0$, 证明

(1) $x\sin\frac{1}{x}=O(|x|)$;　　(2) $\ln x=o(\frac{1}{x^{\varepsilon}}), (\varepsilon>0)$;

(3) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt[8]{x}$;　　(4) $\arctan\frac{1}{x}=O(1)$;

(5) $(1+x)^n=1+nx+o(x)$.

4. 设 $x \to +\infty$. 证明

(1) $x + x^2 \sin x = O(x^2)$;　　(2) $\ln x = o(x^{\varepsilon})$;

(3) $x^p e^{-x} = o(\frac{1}{x^2})$;　　(4) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}$.

5. 设 $x \to 0$, 选出下列函数的形如 Cx^n 的主部, 并求其对于无穷小变数 x 的阶.

(1) $2x - 3x^2 + x^5$;　　(2) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$;

(3) $\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$;　　(4) $\tan x - \sin x$.

6. 设 $x \to +\infty$, 选出下列函数的形如 $C(\frac{1}{x})^n$ 的主部, 并求其对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 的阶:

(1) $\frac{x+1}{x^4+1}$;　　(2) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$;

(3) $\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$;　　(4) $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$.

7. 设 $x \to 1$, 选出下列函数的形如 $C(\frac{1}{x-1})^n$ 的主部, 并求对于无穷大 $\frac{1}{x-1}$ 的阶:

(1) $\frac{x^2}{x^2-1}$;　　(2) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;

(3) $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$;　　(4) $\frac{1}{\sin \pi x}$;

(5) $\frac{\ln x}{(1-x)^2}$.

8. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4 + x^3}{\sin \frac{1}{2} x \tan^2 x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}\right)$;　(4) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cos x - \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

第二章典型例题选讲一

例 2.1 讨论极限 $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right)$ 是否存在.

分析 与取整数函数 $y = [x]$ 有关的函数, 在整数点的两侧以分段函数形式表示, 故应考虑左、右极限.

解 在点 $x_0 = 1$ 的左右两侧附近, 当 $x > 1$ 时有

$$0 < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = 0,$$

于是有

$$\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1;$$

当 $x<1$(限定 $x>0$) 时有

$$1 \le \left[\frac{1}{x}\right] \le \frac{1}{x},$$

故由夹逼法则得 $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\frac{1}{x}\right]=1$, 从而有

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)=0.$$

综上可知, 极限 $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)$ 不存在.

例 2.2 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{\ln(1+x)}(a\ne 0)$;　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$;

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+\eta)^a-x^a]$, 其中 $a>0, a\ne 1, \eta>0$.

解

$$(1)\ \ \sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2},$$

$$\begin{aligned}\sin\tfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}&=\sin\tfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\\ &\approx\tfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\approx\tfrac{1}{4\sqrt{x}}\ \ (x\to+\infty),\\ \cos\tfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}&=O(1)\ \ (x\to+\infty),\end{aligned}$$

所以有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)=0$.

(2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$$

(3) 令 $t=(1+x)^a-1$, 则当 $x\to 0$ 时 $t\to 0$, 且有

$$\ln(1+x)=\frac{1}{a}\ln(1+t)\approx\frac{t}{a}\ \ (t\to 0),$$

从而得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{\ln(1+x)}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{t}{a}}=a.$$

(4)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}&=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)\right)^{\frac{1}{\cos\frac{1}{x}-1}}\right]^{(\cos\frac{1}{x}-1)x^2}\\ &=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(-2\sin^2\frac{1}{2x})x^2}=e^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

(5) $(x+\eta)^a-x^a=x^{a-1}\cdot x[(1+\frac{\eta}{x}^a)-1]$, 而

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\left(1+\tfrac{\eta}{x}\right)^a-1\right]=\eta\lim_{t\to0^+}\tfrac{(1+t)^a-1}{t}\ (\text{令 } t=\tfrac{\eta}{x})$$

$$=\eta\lim_{t\to0^+}\frac{(1+t)^a-1}{\ln(1+t)}=\eta a.$$

所以有

$$\lim_{x\to+\infty}[(x+\eta)^a-x^a]=\begin{cases}0, & 0<a<1,\\ +\infty, & a>1.\end{cases}$$

例 2.3 设 $a\ge 0, b\ge 0$, 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$.

解 考虑函数极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left[(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}\right]^{x\varphi(x)},$$

其中 $\varphi(x)=\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}})-1$. 利用基本极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$, 得到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}x\varphi(x)&=\lim_{t\to0^+}\tfrac{a^t+b^t-2}{2t}\\&=\lim_{t\to0^+}\tfrac{a^t-1}{2t}+\lim_{t\to0^+}\tfrac{b^t-1}{2t}\\&=\tfrac{1}{2}(\ln a+\ln b).\end{aligned}$$

另一方面, 当 $x\to+\infty$ 时, $\varphi(x)\to0$, 故有

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e.$$

于是利用幂指数求极限公式得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x=e^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)}=\sqrt{ab}.$$

最后, 由归结原则得

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^x=\sqrt{ab}.$$

例 2.4 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\alpha}{n}+\sin\frac{\alpha}{n}\right)^n\quad(\alpha\neq0).$$

解 先求相应的函数极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{\alpha}{x}+\sin\frac{\alpha}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left[(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}\right]^{x\varphi(x)},$$

其中 $\varphi(x)=\cos\frac{\alpha}{x}+\sin\frac{\alpha}{x}-1$, 且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$, 又

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}x\varphi(x)&=\lim_{t\to0^+}\tfrac{\sin\alpha t+\cos\alpha t-1}{t}\\&=\lim_{t\to0^+}\left(\alpha\tfrac{\sin\alpha t}{\alpha t}-\cdot\tfrac{2\sin^2\frac{\alpha t}{2}}{t}\right)\\&=\alpha.\end{aligned}$$

所以有

$$\lim_{x\to+\infty}(\cos\frac{\alpha}{x}+\sin\frac{\alpha}{x})^x=e^\alpha\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(\cos\frac{\alpha}{n}+\sin\frac{\alpha}{n})^n=e^\alpha.$$

例 2.5 设函数 $f(x)$ 定义在 $(a,+\infty)$ 上, 满足条件

(i) $\forall b>a, f(x)$ 在 (a,b) 内有界;

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$,

证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A$.

证明 由条件 $(ii), \forall\varepsilon>0, \exists G>a, \forall x\geq G$, 有

$$|f(x+1)-f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

$\forall x\geq G, x$ 可表示为 $x=G+k+\alpha$, 其中 k 为非负整数, $0\leq\alpha<1$. 于是有

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{x}-A\right|&=\left|\frac{f(x)-f(G+\alpha)+f(G+\alpha)}{x}-\frac{G+k+\alpha}{x}A\right|\\&\leq\left|\frac{f(x)-f(G+\alpha)}{x}-\frac{k}{x}A\right|+\left|\frac{f(G+\alpha)}{x}\right|+\left|\frac{G+\alpha}{x}A\right|.\end{aligned}$$

利用条件 $(i), f$ 在 $(a,G+1)$ 内有界, 故只要取 $x(\geq G)$ 充分大, 就能同时成立

$$\left|\frac{f(G+\alpha)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{3}\ \text{以及}\ \left|\frac{G+\alpha}{x}A\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(x)-f(G+\alpha)}{x}-\frac{k}{x}A\right|\\&=\frac{1}{x}|[f(x)-f(x-1)-A]+[f(x-1)-f(x-2)-A]+\cdots\\&+[f(G+1+\alpha)-f(G+\alpha)-A]|\\&\leq\frac{1}{x}k\cdot\frac{\varepsilon}{3}<\frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

综合上面的式子导出 $\left|\frac{f(x)}{x}-A\right|<\varepsilon$, 从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A$.

例 2.6 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调, 则 $\forall x_0\in(a,b), f(x_0+), f(x_0-)$ 存在.

证明 不妨设 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调递增. 令 $\xi=\sup\limits_{x<x_0}f(x)$.

$\forall\varepsilon>0$, 由定义, $\exists x_1\in(a,b), x_1<x_0, \xi-\varepsilon<f(x_1)$.

取 $\delta=x_0-x_1$, 则 $x>x_0-\delta=x_1$ 时, $f(x)\geq f(x_1)>\xi-\varepsilon$. 从而

$$\xi-\varepsilon<f(x)|\leq\xi<\xi+\varepsilon,\quad\lim_{x\to x_0-}f(x)=\xi.$$

若设 $\eta=\inf\limits_{x>x_0}f(x)$, 同理可证 $f(x_0+)=\eta$.

例 2.7 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有定义, 且函数 $e^xf(x)$ 与 $e^{-f(x)}$ 在 $(0,1)$ 内都是单调不减的. 试证:$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续.

证明 由 $e^{-f(x)}$ 在 $(0,1)$ 内单调不减知, 当 $x > x_0$ 时, 有 $e^{-f(x)} \geq e^{-f(x_0)}$. 从而 $f(x_0) \geq f(x)$, 此即表明 $f(x)$ 单调递减, 所以 $\forall x_0, f(x_0+), f(x_0-)$ 存在. 令 $x \to x_0+$ 得 $f(x_0) \geq f(x_0+)$.

由 $e^x f(x)$ 单调不减知, 当 $x > x_0$ 时, $e^x f(x) \geq e^{x_0} f(x_0)$. 令 $x \to x_0+0$, 得 $e^{x_0} f(x_0+) \geq e^{x_0} f(x_0)$, $f(x_0) \geq f(x_0)$. 故 $f(x_0+) = f(x_0)$.

类似可证 $f(x_0-) = f(x_0)$，从而 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 由 x_0 的任意性, 知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 处处连续.

例 2.8 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上至多只有第一类间断点, 且对 $\forall x,y \in (a,b)$ 有 $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$. 求证:$f(x)$ 在 (a,b) 上连续.

证明 因为 $f(x)$ 在 (a,b) 上至多只有第一类间断点, 所以 $\forall x_0 \in (a,b), f(x_0-), f(x_0+)$ 存在.

取 $x = x_0 - h, y = x_0 + h$, 由条件得

$$2f(x_0) \leq f(x_0 - h) + f(x_0 + h).$$

令 $h \to 0$, 则

$$2f(x_0) \leq f(x_0-) + f(x_0+).$$

取 $x = x_0, y = x_0 + 2h$, 由条件得

$$2f(x_0 + h) \leq f(x_0) + f(x_0 + 2h).$$

令 $h \to 0$, 则

$$2f(x_0+) \leq f(x_0) + f(x_0+);\quad f(x_0+) \leq f(x_0).$$

同理可证 $f(x_0-) \leq f(x_0)$, 所以

$$2f(x_0) = f(x_0-) + f(x_0+) \leq f(x_0) + f(x_0+);\quad f(x_0) \leq f(x_0+).$$

故 $f(x_0-) = f(x_0)$, 同理 $f(x_0+) = f(x_0)$. 因而 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续.

例 2.9 设 $f(x)$ 对 $(-\infty,+\infty)$ 内一切 x 有 $f(x^2) = f(x)$, 且 $f(x)$ 在 $x=0, x=1$ 连续, 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 为常数.

证明 若 $x > 0$, 由条件得

$$f(x) = f(x^{\frac{1}{2}}) = f(x^{\frac{1}{4}}) = \cdots = f(x^{\frac{1}{2^n}}) = \cdots$$

因此

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f(\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{2^n}}) = f(1).$$

若 $x < 0$, $f(x) = f(x^2) = f(1)$. 当 $x = 0$ 时, $f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(1)$. 故 $f(x) = f(1)$ (常数).

例 2.10 证明 (1) 若数列 $x_n (n = 1,2,\cdots)$ 收敛, 且 $x_n > 0$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

(2) 若 $x_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在, 则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

证明 (1) 利用例 1.1 的已知极限及连续性,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}(\ln x_1 + \cdots + \ln x_n)} \\
&= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\ln x_1 + \cdots + \ln x_n)} \\
&= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \ln x_n} = e^{\ln(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} x_n
\end{aligned}$$

(2) 利用 (1) 的结果

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1} \sqrt[n]{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\left(\frac{x_3}{x_2}\right)\cdots\left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1} \left[\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\left(\frac{x_3}{x_2}\right)\cdots\left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)\right]^{\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}} \\
&= 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}.
\end{aligned}$$

第二章复习题一

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x[\frac{1}{x}]$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]\right)$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$;

(5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^a \sin\frac{1}{x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to \infty} e^x \sin x$;　　(8) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan(a+x) - \arctan a}{x}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$;　　(10) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}$;

(11) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;　　(12) $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{x}{x+1}\right)$.

2. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2}$ $(a > 0)$　　(2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+2x^2}}{\ln(1+3x)}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$;

(5) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x\right)$;

(6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x}\right)$.

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$;

(2) $\lim\limits_{x\to1} (2-x)^{\sec\frac{\pi x}{2}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$;

(4) $\lim\limits_{x\to0} (x+e^x)^{\frac{1}{x}}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$;

(6) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$

(7) $\lim\limits_{x\to0+} \left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$;

(8) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln\tan(\frac{\pi}{4}+ax)}{\sin bx}$;

(9) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}$;

(10) $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

(11) $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

(12) $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0, b>0)$;

(13) $\lim\limits_{x\to0} \frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$;

(14) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+2^x)\ln(1+\frac{3}{x})$;

(15) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\log_x 2$;

(16) $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0, b>0, c>0)$.

4. 利用夹逼法证明：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^k}{a^x}=0$, 其中 $a>1, k$ 为任意自然数;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln^k x}{x}=0$, 其中 k 为任意自然数.

5. 求下列函数的间断点, 并判断间断点的类型.

(1) $f(x)=\frac{x}{\sin x}$;

(2) $f(x)=[x]\sin\frac{1}{x}$;

(3) $f(x)=[2x]-2[x]$;

(4) $f(x)=\frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x^2}}$;

(5) $f(x)=x\ln^n|x|$;

(6) $f(x)=\frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$;

(7) $f(x)=\frac{\sqrt{1+3x}-1}{\sqrt{1+2x}-1}$;

(8) $f(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$;

(9) $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi}{p}, & x=\frac{q}{p}(p,q\text{互质}, p>0)\\ 0, & x\text{无理数}\end{cases}$.

6. 证明: $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=+\infty$ 的充分必要条件是对于任意从右方收敛于的数列 $\{x_n\}$ $(x_n>x_0)$, 成立

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty.$$

7. 证明区间 (a,b) 上单调函数的不连续点必为第一类不连续点.

8. 确定 a 和 b , 使下列各无穷小量或无穷大量等价于 ax^b.

(1) $f(x)=x^5-3x^4+x^3+x(x\to0,\ (x\to\infty)$;

(2) $f(x)=\frac{x^5+3x^2}{3x^4-x^3}$, $(x\to0, x\to\infty)$;

(3) $f(x)=\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^2}$, $(x\to0+, x\to+\infty)$;

(4) $f(x)=\sqrt{x^2-1}-x$, $(x\to+\infty)$;

(5) $f(x)=\sqrt{1+x\sqrt{x}}-e^{2x}$, $(x\to0+)$;

(6) $f(x)=\ln\cos x-\arctan x^2$, $(x\to0)$;

(7) $f(x)=\sqrt{1+3x}-\sqrt[3]{1+2x}$, $(x\to0,\ (x\to+\infty)$;

(8) $f(x)=\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$, $(x\to 0)$.

9. 当 $x\to 0+$ 时, 对任意自然数 k, $(\frac{-1}{\ln x})^k$ 关于 x 是低阶无穷小量.

10. 当 $x\to 0+$ 时, 对任意自然数 k, $e^{-\frac{1}{x}}$ 关于 x^k 是高阶无穷小量.

11. 函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在而且有限的充分必要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $X>0$, 对一切 $x',x''>X$, 成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

12. 函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充分必要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x'-x_0|<\delta$, $0<|x''-x_0|<\delta$ 时, 成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

13. 当 $x=0$ 时下列函数无定义, 试定义 $f(0)$ 的数值, 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续：

(1) $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$; (2) $f(x)=\frac{\tan 2x}{x}$;

(3) $f(x)=\sin x\sin\frac{1}{x}$; (4) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$;

(5) $f(x)=x\ln^2 x$; (6) $f(x)=x^x$ $(x>0)$.

14. 设 $|x|<1$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+x^2+\cdots+x^n}{n}\right)^n$.

15. 已知 $a_1,\cdots,a_n>0$ $(n\geq 2)$, 且 $f(x)=\left[\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right]^{\frac{1}{x}}$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

16. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$, 求证 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln f(x)}{f(x)}=0$.

17. 设 $f(x)$ 在实轴上连续, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f^2(x)=\infty$, 求证 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

18. 设序列 $\{x_n\}$ 由如下迭代产生：$x_1=\frac{1}{2}$, $x_{n+1}=x_n^2+x_n(n=1,2,\cdots)$, 求证：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\right)=2.$$

§ 2.6 闭区间上连续函数性质及其证明

我们已经知道：闭区间上的连续函数具有许多很很重要的性质. 其中大多数性质从直观上看是相当明显的, 但在数学上却必须一个个加以严格的论证, 而不能仅以直观来代替, 这些性质, 对于开区间上的连续函数或者闭区间上的非连续函数, 一般说来是不成立的. 在下面的讨论中, 我们将给出适当的例子来表明这一点.

定理 2.6.1 (有界性定理) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则它在 $[a,b]$ 上有界.

证法 1 用致密性定理来证. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上无界, 则对于任何自然数 n, 在闭区间 $[a,b]$ 上至少存在一点 x_n, 使得 $|f(x_n)|>n$, 显然 $f(x_n)\to\infty(n\to\infty)$. 由致密性定理, 在有界数列 $\{x_n\}$ 中能选出一个收敛的子列 $x_{n_k}\to x_0\in[a,b]$. 一方面 $f(x_{n_k})\to\infty$ $(k\to\infty)$; 另一方面, 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 故在 x_0 点处, 当 $x\to x_0$ 时, 就有 $f(x)\to f(x_0)$, 而 $x_{n_k}\to x_0$, 根据函数极限与数列极限的关系, 有 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0)$, 到此我们获得了两个互相矛盾的结论: $f(x_{n_k})\to\infty$ 及 $f(x_{n_k})\to f(x_0)$ $(k\to\infty)$, 也就是说, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界的假设与已给条件矛盾, 这样就证明了定理.

证法 2 用有限覆盖定理来证.

$\forall x_0 \in [a,b]$, 按连续的定义, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, 因此存在 $\delta_{x_0} > 0$, 使 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta_{x_0}, x_0+\delta_{x_0})$ 内有界 (若 $x_0 = a$ 补充 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta_{x_0}, x_0)$ 的值为 $f(a)$, 对于 $x_0 = b$ 同样考虑), 即存在 $M_{x_0} > 0$ 使得对 $\forall x \in (x_0-\delta_{x_0}, x_0+\delta_{x_0})$ 有 $|f(x)| \le M_{x_0}$. 显然 $[a,b] \subset \bigcup\limits_{x_0\in[a,b]} (x_0-\delta_{x_0}, x_0+\delta_{x_0})$. 由有限覆盖定理, 存在有限个开区间覆盖 $[a,b]$, 记这有限个开区间为

$$(x_1-\delta_{x_1}, x_1+\delta_{x_1}), (x_2-\delta_{x_2}, x_2+\delta_{x_2}), \cdots, (x_k-\delta_{x_k}, x_k+\delta_{x_k}).$$

记 $M = \max\{M_{x_1}, M_{x_2}, \cdots, M_{x_k}\}$, 则 $\forall x \in [a,b]$, 存在 i, 使得 $x \in (x_i-\delta_{x_i}, x_i+\delta_{x_i})$, 从而 $|f(x)| \le M_{x_i} \le M$. 故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

在上面的证明中, 还有一点需要补充说明一下, 在端点 a 及 b 上, 按极限性质, 应有半开半闭区间 $[a, a+\delta_a)$ 及 $(b-\delta_b, b])$, 使 $f(x)$ 在这两个区间上函数为有界, 而这两个区间皆非开区间, 但我们可以把它们换为开区间 $(a-\delta_a, a+\delta_a)$ 及 $(b-\delta_b, b+\delta_b)$, 并考虑函数 $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} f(a), & a-\delta_a < x < a \\ f(x), & a \le x \le b \\ f(b), & b < x < b+\delta_b \end{cases}$$

由上面的讨论知道 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 亦即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

注 1 此定理还可用区间套定理证明.

注 2 这个定理只表明了闭区间上的连续函数一定有界. 但对于开区间上的连续函数和闭区间上的非连续函数, 这时既不能肯定它们一定无界, 也不能肯定它们一定有界, 需按具体的问题而定. 例如函数 $y = \sin\dfrac{1}{x}$ 和 $y = \dfrac{1}{x}$ 皆在开区间 $(0,1)$ 连续, 但前者在 $(0,1)$ 内有界, 后者无界.

$y = x - [x]$ 在 $[0,1]$ 的上确界为 1, 下确界为 0, 但无最大值. $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 的上确界为 $+\infty$, 下确界为 1, 但无最大值也无最小值.

从上面的两个例子可以看到, 若函数在闭区间不连续或仅在开区间连续, 就不一定有最大值或最小值. 即使对有界函数而言, 虽然它一定存在上确界和下确界, 但它仍然可以没有最大值和最小值.

定理 2.6.2 (最大、最小值定理) 在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 一定有最大值和最小值.

证明 由有界性定理, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界, 因此有上确界 M 和下确界 m, 即 $M = \sup\limits_{x\in[[a,b]} f(x), m = \inf\limits_{x\in[[a,b]} f(x)$.

由上确界定义, 对 $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, 存在 $x_n \in [a,b]$ 使 $M - \dfrac{1}{n} < f(x_n) \le M$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$. 由致密性定理, $\{x_n\}$ 有一收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$, 设 $x_{n_k} \to x_0 \in [a,b]$, 再由子列的性质 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$. 而 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, 由函数极限与数列极限的关系, 最后得到

$$M = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

这就证明了 $f(x)$ 有最大值. 同理可证 $f(x)$ 有最小值.

定理 2.6.3 (零点存在定理) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 且 $f(a), f(b)$ 异号, 则在 (a,b) 内至少有 $f(x)=0$ 的一个根 ξ.

证明(应用区间套定理) . 不妨设 $f(a)<0, f(b)>0$, 将 $[a,b]$ 二等到分, 中点为 $\frac{1}{2}(a+b)$. 若 $f(\frac{1}{2}(a+b))=0$, 定理就得到了证明. 若不然, 两个部分区间中必有一个区间, 在两端点处函数值异号, 设此区间为 $[a_1,b_1]$, 并且也有 $f(a_1)<0, f(b_1)>0$. 再将 $[a_1,b_1]$ 二等分, 中点为 $\frac{1}{2}(a_1+b_1)$, 若 $f(\frac{1}{2}(a_1+b_1))=0$, 定理就得到了证明. 若不然, 可以继续下去, 于是有两种可能:

1. 进行若干次后, 在某分点处函数值为零, 这样定理即得证明.

2. 分点处函数值不为零, 此时函数在两端异号, 如此我们得到一个区间列 $\{[a_n,b_n]\}$, 它有两个性质: (1) $[a_1,b_1]\supset[a_1,b_1]\supset\cdots$, 并且 $f(a_n)<0, f(b_n)>0$; (2) 当 $n\to\infty$ 时 $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0$. 由区间套定理, 必有 $\xi\in[a,b]$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$. 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 因此在 $x=\xi$ 处亦连续, 因而 $f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)\le 0$ 和 $f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)\ge 0$, 即 $f(\xi)=0$, 证毕.

注意, 在定理的条件下, $f(x)$ 在 (a,b) 之间也可能不止一个根; 又当 $f(a), f(b)$ 同号时, 也不能说 $[a,b]$ 中一定没有 $f(x)$ 的根, 画图可举出这样的例子. ‘

推论 2.6.1 (介值定理) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 且 $f(a)\ne f(b)$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内可取得介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何值 η.

证明 令 $F(x)=f(x)-\eta$, 显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 且 $F(a)=f(a)-\eta<0, F(b)=f(b)-\eta>0$. 由零点存在定理至少存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=\eta$.

推论 2.6.2 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 最小值与最大值分别为 m, M. 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内可取得介于 m 与 M 之间的任何值 η.

证明 若 $m=M$, 则 $f(x)\equiv c$ 结论显然成立. 设 $m<M$, 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续知存在 $\alpha,\beta\in[a,b]$ 使 $f(\alpha)=m, f(\beta)=M$. 将 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$ 上利用推论 2.6.1, 存在 $\xi\in(\alpha,\beta)\subset(a,b)$ 使得 $f(\xi)=\eta$, 证毕.

定理 2.6.4 (反函数连续性定理) 设 $f(x)$ 在 $a\le x\le b$ 上严格增加（减少）且连续, 又 $f(a)=\alpha, f(b)=\beta$, 则在 $\alpha\le y\le\beta$ 上存在着 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\phi(y)$, $\phi(y)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上也是严格增加（减少）且连续的.

证明 在第一节中, 我们已经证明了反函数的存在性和单调性, 现在只要再证明: (1) 函数的值域是 $[\alpha,\beta]$; (2) 反函数在 $[\alpha,\beta]$ 连续.

(1) 设 y 是 $[\alpha,\beta]$ 中的任意一点, 如果 $y=\alpha$ 或 β, 那么相应的 $x=a$ 或 b, 即有 $f(a)=\alpha$ 或 $f(b)=\beta$, 换句话说, α 和 β 在 $f(x)$ 的值域中. 又如果 $\alpha<y<\beta$, 由介值定理知道, 在 (a,b) 中必存在一点 x_0, 满足 $f(x_0)=y$, 这表明 (α,β) 内的任何 y 也在 $f(x)$ 的值域中, 即证明了 (i).

(2) 证明 $\phi(y)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续, 即证明 $\phi(y)$ 在区间上任意一点 y_0 是连续的. 按定义, 也就是要证明, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使 $|y-y_0|<\delta$ 时, 成立下式:

$$|\phi(y)-\phi(y_0)|<\varepsilon.$$

记 $\phi(y_0)=x_0, \phi(y)=x$, 那么 $f(x_0)=y_0, f(x)=y$, 我们所要证明的不等式 $|\phi(y)-\phi(y_0)|<\varepsilon$ 化为 $|x-x_0|<\varepsilon$, 亦即

$$x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon.$$

从 $\phi(y)$ 的严格单调增加性, 要这个不等式成立, 只要

$$f(x_0-\varepsilon)<f(x)<f(x_0+\varepsilon)$$

就可以了. 也就是只要

$$f(x_0-\varepsilon)-f(x_0)<f(x)-y_0<f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)$$

因此只要取 $\delta=\min\{f(x_0)-f(x_0-\varepsilon),f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)\}$, 于是当 $|y-y_0|<\delta$ 时, 就有 $|\phi(y)-\phi(y_0)|<\varepsilon$.

定理 2.6.5 (一致连续性定理, 康托定理） 闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 必定一致连续.

证法 1 (采用反证法)

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非一致连续, 则存在 $\varepsilon_0>0$ 对于任何数 $\delta=\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$, 在区间 $[a,b]$ 内至少存在两点 $x_n^{(1)}$ 及 $x_n^{(2)}$, 虽然 $|x_n^{(1)}-x_n^{(2)}|<\frac{1}{n}$, 但

$$|f(x_n^{(1)})-f(x_n^{(2)})|\geq\varepsilon_0.$$

由致密性定理在有界数列 $\{x_n^{(1)}\}$ 中存在一收敛的子列 $x_{n_k}^{(1)}\to x_0$, 这里 $x_0\in[a,b]$. 再由 $|x_n^{(1)}-x_n^{(2)}|<\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$ 知 $x_{n_k}^{(1)}-x_{n_k}^{(2)}\to 0$, 所以有 $x_{n_k}^{(2)}\to x_0(k\to\infty)$ 并且 $f(x_{n_k}^{(1)})-f(x_{n_k}^{(2)})|\geq\varepsilon_0$ 对一切 k 成立. 另一方面, 由于函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 亦即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 按函数极限与数列极限的关系有

$$\lim_{x\to x_0}f(x_{n_k}^{(1)})=f(x_0),\lim_{x\to x_0}f(x_{n_k}^{(2)})=f(x_0)$$

从而

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x_{n_k}^{(1)})-f(x_{n_k}^{(2)})\right)=0$$

这同 $f(x_{n_k}^{(1)})-f(x_{n_k}^{(2)})|\geq\varepsilon_0$ 对一切 k 成立相矛盾, 从而证明了康托定理.

证法 2 (用有限覆盖定理来证明).

设 x_0 是 $[a,b]$ 的任何一点. 因为 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 所以对任一正数 ε, 必有正数 $\delta_{x_0}>0$, 对于适合不等式 $|x'-x_0|<\frac{\delta_{x_0}}{2}$ 和 $|x''-x_0|<\frac{\delta_{x_0}}{2}$ 的一切 x' 和 x'', 有 $|f(x')-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2},|f(x'')-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$, 于是

$$|x''-x'|\leq|x''-x_0|+|x'-x_0|<\frac{\delta_{x_0}}{2}+\frac{\delta_{x_0}}{2}=\delta_{x_0},$$

$$|f(x'')-f(x')|\leq|f(x'')-f(x_0)|+|f(x')-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

这就是说: $[a,b]$ 的任何一点 x_0 的邻域 $O(x_0,\frac{\delta_{x_0}}{2})$ (a 点有右邻域, b 点有左邻域) 内任意两点 x' 和 x'', 都有

$$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon.$$

显然 $[a,b]\subset\bigcup\limits_{x_0\in[a,b]}O(x_0,\frac{\delta_{x_0}}{4})$. 由有限覆盖定理, 存在有限个开区间覆盖 $[a,b]$, 记这有限个开区间为 $O(x_i,\frac{\delta_{x_i}}{4})$ $i=1,2\cdots,m$.

取 $\eta=\min\{\frac{\delta_{x_1}}{4},\frac{\delta_{x_2}}{4},\cdots,\frac{\delta_{x_m}}{4}\}$. 对 $\forall x',x''\in[a,b],|x'-x''|<\eta$.
$x'\in[a,b]\subset\bigcup\limits_{k=1}^{m}O(x_k,\frac{\delta_{x_k}}{4})$, 存在 k,$x'\in O(x_k,\frac{\delta_{x_k}}{4})$, 即 $|x'-x_k|<\frac{\delta_{x_k}}{4}$. 又由

$$|x''-x_k|\le|x''-x'|+|x'-x_k|<\eta+\frac{\delta_{x_k}}{4}\le\frac{\delta_{x_k}}{2},$$

于是

$$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon,$$

证毕.

对于开区间 (a,b) 内的连续函数, 只要在端点 a,b 处, 函数具有单侧极限 $f(a+0),f(b-0)$, 那么可以断言这个函数在 $[a,b]$ 一致连续. 对于无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的连续函数, 当 $x\to+\infty$ 时如果函数具有有限极限, 那么这函数是 $[a,+\infty)$ 上的一致连续函数. 此外有限区间上的一致连续的函数必为有界的.

例 2.6.1 证明方程 $2^x-4x=0$ 在区间内 $(0,\dfrac{1}{2})$ 有一根.

证明 令 $F(x)=2^x-4x$, 显然 $F(x)$ 在 $[0,\dfrac{1}{2}]$ 连续, 且 $F(0)=1>0,F(\dfrac{1}{2})=\sqrt{2}-2<0$. 由零点存在定理存在 $\xi\in(0,\dfrac{1}{2})$ 使得 $F(\xi)=0$, 即 $2^x-4x=0$ 在区间内 $(0,\dfrac{1}{2})$ 有一根.

例 2.6.2 证明方程 $x^3+2x-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有唯一根.

证明 令 $F(x)=x^3+2x-1$, 显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 且 $F(0)=-1<0,F(1)=2>0$. 由零点存在定理存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $F(\xi)=0$, 即 $x^3+2x-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有一根, 即有 $\xi^3+2\xi-1=0$. 若 η 是 $x^3+2x-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内另一根, 则 $\eta^3+2\eta-1=0$ 故 $\eta^3+2\eta-1=\xi^3+2\xi-1,(\eta-\xi)(\eta^2+\eta\xi+\xi^2+2)=0$, 而 $\eta^2+\eta\xi+\xi^2+2>0$, 所以 $\eta=\xi$ 矛盾, 故方程 $x^3+2x-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有唯一根.

例 2.6.3 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $f(0)=f(1)$, 求证：对任何 $n\in N$ 存在 $x_n\in[0,1]$ 使得 $f(x_n)=f(x_n+\dfrac{1}{n})$.

证明 (反证法) 令 $F(x)=f(x)-f(x+\dfrac{1}{n})$. 若不存在 $x_0\in[0,1]$ 使得 $f(x_0)=f(x_0+\dfrac{1}{n})$, 即 $F(x_0)=0$, 则 $\forall x\in[0,1-\dfrac{1}{n}],F(x)\neq0$.

下证 $F(x)$ 在 $[0,1-\dfrac{1}{n}]$ 一定同号, 否则,$\exists x_1,x_2\in[0,1-\dfrac{1}{n}]$ 满足 $F(x_1)F(x_2)<0$, 由零点存在定理存在 $x\in[0,1-\dfrac{1}{n}],F(x)=0$ 矛盾.

若 $F(x)>0,\forall x\in[0,1-\dfrac{1}{n}]$, 则 $f(0)>f(\dfrac{1}{n})>f(\dfrac{2}{n})>\cdots>f(\dfrac{n}{n})=f(1)$ 与条件矛盾. 若 $F(x)<0,\forall x\in[0,1-\dfrac{1}{n}]$ 同理可得 $f(0)<f(1)$ 矛盾. 证毕.

例 2.6.4 证明 $y=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

证法一 首先 $y=\sqrt{x}$ 在 $[0,2]$ 上连续进而一致连续, 从而 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$, $\forall x_1,x_2\in[0,2]$, 当 $|x_1-x_2|<\delta_1$ 时, $|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|<\varepsilon$.

另一方面, 因为 $\forall x_1, x_2 \in [1, +\infty)$,

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2|,$$

取 $\delta_2 = 2\varepsilon$, 当 $x_1, x_2 \in [1, +\infty), |x_1 - x_2| < \delta$ 时

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| < \varepsilon.$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$, $\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 若 $|x_1 - x_2| < \delta$, 则 x_1, x_2 同属于 $[0, 2]$ 或 $[1, +\infty)$.

事实上若 $x_1 \in [0, 1]$, 由 $|x_2 - x_1| < 1$ 知 $x_2 \in [0, 2]$; 若 $x_1 \in [1, 2]$ 且 $x_2 \leq 1$, 则 $x_1, x_2 \in [0, 2]$; 若 $x_1 \in [1, 2]$ 且 $x_2 > 1$, 则 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$; 若 $x_1 \in [2, +\infty)$ 由 $|x_2 - x_1| < 1$ 知 $x_2 \in [1, +\infty)$. 故由上述讨论知当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, $\sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

证法二 $x_1 > x_2$,

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 + x_2 = x_1 - x_2 - \sqrt{x_2}(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) \leq x_1 - x_1$$

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leq |x_1 - x_2|.$$

例 2.6.5 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 对于任意 $x, y \in (-\infty, +\infty)$, 函数 f 满足

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad (0 < k < 1),$$

求证:

（1）函数 $kx - f(x)$ 递增;

（2）存在唯一的 $\xi \in (-\infty, +\infty)$, 使 $f(\xi) = \xi$.

证明 (1) $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty), x_1 > x_2$, 由条件知

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2| = k(x_1 - x_2),$$

$$kx_1 - f(x_1) \geq kx_2 - f(x_2),$$

所以函数 $kx - f(x)$ 递增.

(2) 先证存在性：固定 $x_1 \in (-\infty, +\infty)$. 令 $x_2 = f(x_1)$, $x_n = f(x_{n-1})$ $(n = 2, 3\cdots)$. 若当 $f(x_1) = x_1$, 则存在性得证，所以可设 $f(x_1) \neq x_1$, 不失一般性可假定 $f(x_1) < x_1$. 显然 $x_2 - x_1 = f(x_1) - x_1 < 0$; 若 $x_n - x_{n-1} < 0$, 则

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq k|x_n - x_{n-1}| = k|f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| \leq k^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq k^{n-1}|x_2 - x_1|.$$

由此

$$|x_{n+p} - x_n| \leq (k^{n+p-1} + \cdots + k^{n-1})|x_2 - x_1| = \frac{k^{n-1} - k^{n+p}}{1 - k}|x_2 - x_1|.$$

由于 $0 < k < 1$, 显然对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时, 对一切 n,

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \varepsilon.$$

即 $\{x_n\}$ 是柯西序列, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在设为 ξ. 由 $f(x)$ 的连续性及 $x_{n+1} = f(x_n)$, 两边取极限得 $\xi = f(\xi)$.

下正唯一性：$f(\xi) = \xi$. 若 $f(\eta) = \eta$, 由条件知

$$|f(\xi) - f(\eta)| \le k|\xi - \eta|,$$

从而 $\eta = \xi$, 定理证毕.

注：如去掉连续性条件，结论仍成立。只需在证明中注意到

$$|\xi - f(\xi)| = |\xi - x_{n+1} + x_{n+1} - f(\xi)| = |\xi - x_{n+1} + f(x_n) - f(\xi)| \le |x - x_{n+1}| + k|x_n - \xi| \to 0.$$

习题 2.6

1. 设 $f(x) \in C(a,b), x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a,b)$, 求证：$\exists \xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增且 $f(a) \ge a, f(b) \le b$, 求证存在点 $\xi \in [a,b]$, 使得 $f(\xi) = \xi$.

提示: 仿零点存在定理的证明 (区间套定理).

3. 试证任何试实系数的奇次多项式至少有一个实零点.

4. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续且 $f(a) < g(a), f(b) > g(b)$, 求证存在 $x_0 \in [a,b]$, 使得 $f(x_0) = g(x_0)$.

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且对任何 $x \in [a,b]$, 都存在 $y \in [a,b]$, 使得 $|f(y)| \le \frac{1}{2}|f(x)|$, 求证存在点 $\xi \in [a,b]$, 使得 $f(\xi) = 0$.

6. 设 $\omega_a(\delta) = \sup|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in N(a,\delta)$, 求证函数 $f(x)$ 在点 a 连续的充分必要条件是 $\lim\limits_{\delta\to 0+} \omega_a(\delta) = 0$.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 且 $f(0) = f(2)$, 证明：存在 $x, y \in [0,2], y - x = 1$, 使得 $f(x) = f(y)$.

提示: 令 $F(x) = f(x) - f(x+1), x \in [0,1]$.

8. 若单调函数 $f(x)$ 可以取到 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的所有值, 求证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续.

第二章典型例题选讲二

例 2.11 证明:

(1) $\sin\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续;

(2) $\sin x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续.

证明 (1) $\forall x', x'' \in [1,+\infty)$ 有

$$\begin{aligned}
|\sin\sqrt{x'} - \sin\sqrt{x''}| &= 2\left|\sin\frac{\sqrt{x'} - \sqrt{x''}}{2}\right|\left|\cos\frac{\sqrt{x'} + \sqrt{x''}}{2}\right| \\
&\le \left|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}\right| = \frac{|x' - x''|}{\sqrt{x'} + \sqrt{x''}} \\
&\le \frac{1}{2}\left|x' - x''\right|.
\end{aligned}$$

$\forall > 0$, 取 $\delta = 2\varepsilon$, 当 $|x' - x''| < \delta$ 时，

$$|\sin\sqrt{x'} - \sin\sqrt{x''}| < \varepsilon.$$

故 $\sin\sqrt{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续. 又 $\sin\sqrt{x}$ 在 $[0, 2]$ 上连续进而一致连续. 于是, $\sin\sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

(2) $\exists\varepsilon_0 = 1, \forall\delta > 0$, 取 $x_1 = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}, x_2 = \sqrt{n\pi}$, 则

$$|x_1 - x_2| = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}} + \sqrt{n\pi}}.$$

易见当正整数 n 充分大时有 $|x_1 - x_2| < \delta$, 而 $|\sin x_1^2 - \sin x_2^2| = 1 = \varepsilon_0$. 所以 $\sin x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上不一致连续.

例 2.12 设函数 f 在 (a, b) 内连续, 且

$$f(a + 0) = f(b - 0) = \alpha,$$

其中 α 为有限数,$+\infty$ 或 $-\infty$. 证明 f 在 (a, b) 内能取到最大值或最小值.

证明 当 α 为有限数时, 令

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a, b), \\ \alpha, & x = a \text{ 与 } b, \end{cases}$$

则易见 F 在 $[a, b]$ 上连续, 从而 F 在 $[a, b]$ 上能取到最大值与最小值. 由此不难推出 f 在 (a, b) 内至少能取到最大值或最小值之一.

当 $\alpha = +\infty$ 时, 取 $x_0 \in (a, b)$, 则 $\exists\delta > 0(\delta < \min\{x_0 - a, b - x_0\}), \forall x \in (a, a + \delta) \bigcup (b - \delta, b)$, 有 $f(x) > f(x_0)$. 而在闭区间 $[a + \delta, b - \delta]$ 上,f 能取到最小值, 设为 $f(x_1)$, 则 $f(x_0) \geq f(x_1)$. 由此可见 $f(x_1)$ 为 f 在 (a, b) 内的最小值.

类似地可证: 当 $\alpha = -\infty$ 时,f 在 (a, b) 内可取到最大值.

下例是利用连续函数的性质.

例 2.13 设 f 在 $[0, 1]$ 上连续且 $f(0) = 0, f(1) = 1, f(f(x)) = x$. 试证 $f(x) = x$.

证明 (1) 先证 f 是单射.

事实上, $\forall x_1, x_2 \in [0, 1]$, 若 $f(x_1) = f(x_2)$, 则利用条件 $f(f(x)) = x$ 可知

$$x_1 = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = x_2.$$

(2) 证明 $0 < f(x) < 1, \forall x \in (0, 1)$.

事实上, 由 f 是单射, 显然 $f(x) \neq 0, 1$. 若 $f(x) < 0$, 由 $f(1) = 1$, 将 $f(x)$ 在 $[x, 1]$ 上用介值定理, 存在 $\xi \in (x, 1)$, $f(\xi) = 0$. 而 $f(0) = 0$, 与 f 是单射矛盾. 而 $f(x) \neq 0$, 所以 $f(x) > 0$. 同理可证 $f(x) < 1$. 故 $0 < f(x) < 1$.

(3) 下证 f 严格单调增加.

$\forall x_1, x_2 \in [0, 1]$, 若 $x_1 < x_2$, 则 $f(x_1) < f(x_2)$. 否则 $f(x_2) < f(x_1) < 1 = f(1)$, 将 $f(x)$ 在 $[x_2, 1]$ 上用介值定理，存在 $\eta \in (x_2, 1)$ 使 $f(\eta) = f(x_1)$, 而 $\eta > x_2 > x_1$ 与 f 是单射矛盾, 由此知 f 在 $[0, 1]$ 严格单调增加.

(4) $\forall x \in [0,1]$, 要么 $f(x) \geq x$, 要么 $f(x) \leq x$. 由 $f(x) \nearrow$ 知,

$$f(x) \geq x\text{时, 有}x = f(f(x)) \geq f(x);$$

$$f(x) \leq x\text{时, 有}x = f(f(x)) \leq f(x).$$

故总有 $f(x) = x$.

例 2.14 设 $f : [a,b] \to [a,b]$ 为连续函数, 证明:$\exists \xi \in [a,b]$, 使得 $f(\xi) = \xi$.

证明 若 $f(a) = a$ 或 $f(b) = b$, 问题自明. 否则, $f(a) > a, f(b) < b$. 由 $g(x) = f(x)-x$ 连续, 及 $g(a) = f(a)-a > 0, g(b) = f(b)-b < 0$, 用介值定理知 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $g(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = \xi$. 证毕.

例 2.15 证明: $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的充要条件是: 对 I 上任意二数列 x_n, x'_n 只要 $x_n - x'_n \to 0$, 就有 $f(x_n) - f(x'_n) \to 0$ (当 $n \to \infty$ 时).

证明 必要性 因 f 一致连续, 所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x, x' \in I, |x - x'| < \delta$ 时有 $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. 但 $x_n - x'_n \to 0$ (当 $n \to \infty$ 时), 故对 $\delta > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时 $|x_n - x'_n| < \delta$, 从而

$$|f(x_n) - f(x'_n)| < \varepsilon.$$

即 $f(x_n) - f(x'_n) \to 0(\text{当}n \to \infty\text{时})$.

充分性 若 f 在 I 上非一致连续, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0, \exists x_n, x'_n \in I$, 虽然

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}, \text{但}|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0.$$

可见 $x_n - x'_n \to 0$, 但 $f(x_n) - f(x'_n) \not\to 0(\text{当 } n \to \infty \text{ 时})$, 矛盾.

例 2.16 设 $f(x)$ 在有限开区间 (a,b) 上连续, 试证 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续的充要条件是极限 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ 存在 (有限).

证明 必要性 已知 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x', x'' \in (a,b), |x' - x''| < \delta$ 时, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

故 $\forall x', x'' \in (a,b), a < x' < a + \delta, a < x'' < a + \delta$ 时, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

据 Cauchy 准则, 知 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ 存在 (有限). 同理 $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ 存在.

充分性 补充定义

$$f(a) = \lim_{x\to a+0} f(x), \quad f(b) = \lim_{x\to b-0} f(x),$$

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 由 Cantor 定理, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续. 从而原 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

注 (1) 此例表明: 在有限开区间上连续函数是否一致连续取决于函数在间断点附近的状态. 应用本例容易判明 $y = \frac{1}{x}\sin x$ 在 $(0,1)$ 上一致连续. 而 $y = \sin\frac{1}{x}, y = \ln x, y = \frac{1}{1-x}$ 在 $(0,1)$ 上非一致连续.

(2) 由此例还可看出, f 在 (a,b) 上一致连续, 则 f 在 (a,b) 上有界. 然而, 在开区间上连续、有界, 不一定一致连续, 如 $y=\sin\frac{1}{x}$.

(3) 当 (a,b) 改为无穷区间时, 该例的必要性不再成立. 如 $f(x)=x$, $g(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 但在端点 $\pm\infty$ 无极限. 对于无穷区间, 充分性仍是对的. 请看下例:

例 2.17 证明：若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ (有限), 则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=A$, 由 Cauchy 准则知 $\forall\varepsilon>0, \exists\Delta>a$ 当 $x',x''>\Delta$ 时, 有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

由 Cantor 定理, f 在 $[a,\Delta+1]$ 上一致连续, 故对此 $\varepsilon>0, \exists\delta_1>0$, 当 $x',x''\in[a,\Delta+1], |x'-x''|<\delta_1$ 时, 有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

令 $\delta=min\{1,\delta_1\}$, 则 $x',x''>a, |x'-x''|<\delta$ 时,x',x'' 要么同属于 $[a,\Delta+1]$, 要么同属于 $(\Delta,+\infty)$. 从而当 $|x'-x''|<\delta$ 时, $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 即 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

注 如下的证明是错误的: 首先利用以上证明得出结论"f 在 $[\Delta,+\infty)$ 上一致连续", 然后利用 Cantor 定理, f 在 $[a,\Delta]$ 上一致连续, 从而 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续. 其错误在于 Δ 与 ε 有关, 由上述证明得不出 f 在 $[\Delta,+\infty)$ 上一致连续.

例 2.18 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, $\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0$. 证明: $\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

证 因 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0$, 所以 $\forall\varepsilon>0, \exists\Delta>a$, 当 $x>\Delta$ 时, $|f(x)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$. 又因 f 一致连续, 故对 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta_1>0$, 当 $|x'-x''|<\delta_1$ 时 $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{3}$. 如此, $\forall x',x''>\Delta, |x'-x''|<\delta_1$ 时, 有

$$\begin{aligned}|\varphi(x')-\varphi(x'')| &\le |\varphi(x')-f(x')|+|f(x')-f(x'')|+|f(x'')-\varphi(x'')|\\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

利用 Cantor 定理, 可知 $\varphi(x)$ 在 $[a,\Delta+1]$ 上一致连续, 所以对此 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta_2>0$, 当 $x',x''\in[a,\Delta+1], |x'-x''|<\delta_2$ 时, 有

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\varepsilon.$$

3° 取 $\delta=\min\{1,\delta_1,\delta_2\}$ 时, 则 $x',x''\in[a,+\infty), |x'-x''|<\delta$ 时, x',x'' 要么同时在 $[a,\Delta+1]$, 要么同时在 $[\Delta,+\infty$, 所以 $|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\varepsilon$. 证毕.

注：由 $f(x)-\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，利用例 2.7 的结论知 $f(x)-\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，再由条件 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，进而 $\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上也一致连续。

例 2.19 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 则存在非负实数 a 与 b, 使对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$, 都有 $|f(x)|\le a|x|+b$. 试证明之.

证明 因 $f(x)$ 一致连续, 所以 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $|x'-x''|\le\delta$ 时, 有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 现将 $\varepsilon>0, \delta>0$ 固定. 由于 $\forall x\in(-\infty,+\infty), \exists n\in Z$ (整数集), 使得 $x=n\delta+x_0$, 其中

$x_0 \in (-\delta,\delta)$. 注意到 $f(x)$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上有界, 即 $\exists M>0$, 使得 $|f(x)| \le M \ \ (\forall x \in [-\delta,\delta])$. 因此,

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\{f(k\delta+x_0)-f[(k-1)\delta+x_0]\}+f(x_0),$$

$$|f(x)| \le \sum_{k=1}^{n}|f(k\delta+x_0)-f[(k-1)\delta+x_0]|+|f(x_0)| \le |n|\varepsilon+M.$$

由 $x=n\delta+x_0$ 知 $\left|\frac{x-x_0}{\delta}\right|=|n|$, 代入上式

$$\begin{aligned}|f(x)| &\le \frac{\varepsilon}{\delta}|x-x_0|+M \le \frac{\varepsilon}{\delta}|x|+(M+\frac{\varepsilon}{\delta}|x_0|)\\ &\le \frac{\varepsilon}{\delta}|x|+(M+\varepsilon).\end{aligned}$$

记 $\frac{\varepsilon}{\delta}=a, M+\varepsilon=b$, 则 $a>0, b>0$,

$$|f(x)| \le a|x|+b \quad (\forall x \in (-\infty,+\infty)).$$

注 此例说明, 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致连续, 则 $x \to +\infty$ 时,$f(x)=O(x)$.

例 2.20 设 $x \to 0$ 时,$f(x) \sim x$,$x_n=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\frac{2i-1}{n^2}a)$, 试证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a \ \ (a>0)$.

证明 由 $x \to 0$ 时,$f(x) \sim x$ 知 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, 当 $0<|x|<\delta$ 时,

$$\left|\frac{f(x)}{x}-1\right|<1$$

即

$$|f(x)-x|<\varepsilon|x|.$$

注意到 $a=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{n^2}a$, 则

$$\begin{aligned}|x_n-a| &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(\frac{2i-1}{n^2}a)-\sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{n^2}a\right|\\ &\le \sum_{i=1}^{n}\left|f(\frac{2i-1}{n^2}a)-\frac{2i-1}{n^2}a\right|\end{aligned}$$

而 $\frac{2i-1}{n^2}|a|<\frac{2n-1}{n^2}|a|<\frac{2}{n}|a|$, 当 $\frac{2}{n}|a|<\delta$, 即 $n>\frac{2|a|}{\delta} \triangleq N$ 时,

$$0<\frac{2i-1}{n^2}|a|<\delta \ \ (i=1,2,\cdots,n).$$

从而

$$|x_n-a| \le \sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{n^2}|a|\varepsilon=|a|\varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a \ \ (a>0)$, 证毕.

注 $f(x)=\sin x,\ \ \cos x,\ \ \arcsin x,\ \ \arctan x,\ \ e^x-1,\ \ \ln(1-x)$ 均满足上述条件.

第二章复习题二

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上单调, 求证：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号.

2. 讨论下列函数的一致连续性：

(1) $f(x)=\frac{x}{4-x^2}$ $(-1\geq x\geq 1)$;

(2) $f(x)=\ln x$ $(0<x<1)$;

(3) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ $0<x<\pi)$;

(4) $f(x)=e^x\cos\frac{1}{x}$ $(0<x<1)$;

(5) $f(x)=\arctan x(-\infty<x<+\infty)$;

(6) $f(x)=\sqrt{x}(1\leq x<+\infty)$;

(7) $f(x)=x\sin x(0\leq x<+\infty)$.

3. 证明函数 $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$ 在每个区间 $J_1=(-1<x<0), J_2=(0<x<1)$ 上是一致连续的, 但在它们的和 $J_1+J_2=(0<|x|<1)$ 上并不是一致连续的.

4. 证明函数 $f(x)=\sin x^2$ 在区间上 $(-\infty<x<+\infty)$ 是连续的并且有界, 但在此区间上并不是一致连续的.

5. 证明函数 $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ 在区间上 $(0,1)$ 是连续的并且有界, 但在此区间上并不是一致连续的.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 中有定义, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ 且对任何 $x>0$, 都有 $f(2x)=f(x)$, 求证 $f(x)\equiv l$.

7. 求证：方程 $x^3+px+q=0$ $(p>0)$ 有且仅有一个根.

8. 函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且对任何 $x\in[0,1]$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0(n\in N)$, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

9. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 对 $\forall h\geq 0, \lim\limits_{n\to\infty}f(h+n)=A$,（有限数）. 求证：

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A.$$

10. 证明连续的周期函数一定是一致连续的, 由此证明 $\sin^2 x+\sin x^2$ 不是周期函数.

11. 设 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, 且严格单调, 又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 求证：方程 $f^3(x)-6f^2(x)+9f(x)=3$ 有且仅有三个根.

12. 设 $f(x)\in C[a,b]$, 且有唯一的取到 $f(x)$ 最大值的点 x^* 又设 $x_n\in[a,b]$ $(n=1,2,\cdots)$, 使得 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x_n)=f(x^*)$, 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$.

13. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续, 值域含于区间 (c,d), 又 $g(x)$ 在 (c,d) 内一致连续, 求证：$g(f(x))$ 在 (a,b) 内一致连续.

14. 设 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, 存在 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$, 且 $f(x)$ 的最小值 $f(a)<a$, 求证：$f(f(x))$ 至少在两个点处取到它的最小值.

15. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且对任意的 $h>0$, 序列 $\{f(nh)\}$ 极限存在, 求证：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

16. 设 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, 且

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=B,$$

求证：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

17. 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{a}{n\sqrt{n}}\cos\frac{2a}{n\sqrt{n}}\cdots\cos\frac{na}{n\sqrt{n}}$.

18. 证明 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2i-1}{n^2}a\right)=e^{a^2}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{n}\cos\frac{\sqrt{2i-1}}{n}a^2=e^{-\frac{a^4}{2}}$.

第三章 导数与微分

§ 3.1 导数的定义

§ 3.1.1 导数的引进

1 变速直线运动的瞬时的速度

设质点作非匀速直线运动, 其所走路程 s 与时间 t 的函数关系为 $s = s(t)$, 求任一时刻 t_0 时质点运动的速度.

设从 t_0 到 $t_0 + \Delta t$ 这段时间内, 质点所走的路程为 $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$. 对匀速直线运动来说, 其速度可用公式来 $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 计算. 对变速直线运动来说, 当 Δt 很小时, 速度的变化也很小, 可以近似地看作匀速直线运动. 比值

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

就是变速直线运动在区间 $[t_0, t_0 + \Delta t]$ 上的平均速度. $\overline{v}$ 可以作为时刻 t_0 速度的近似值, 显然 Δt 愈小, 近似程度就愈好, 但是无论 Δt 取多么小, $\overline{v}$ 仍是平均速度, 如果采用极限的方法, 令 $\Delta t \to 0$, 若平均速度 $\overline{v}$ 的极限存在, 即

$$\lim_{\Delta t \to 0} \overline{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = v_0.$$

则称 v_0 为直线运动 $s = s(t)$ 在时刻 t_0 的瞬时速度.

2 曲线在一点处的切线斜率

设平面上一条处处有切线的曲线方程为 $y = f(x)$, 求曲线上点 $P_0(x_0, y_0)$ 处切线的斜率.

首先介绍曲线切线的概念. 在曲线上取点 $P_0(x_0, y_0)$, $P(x, y)$ 是曲线上点 P_0 邻近的一点, 过 P_0, P 两点作为一条直线, 得到曲线在点 P_0 处的一条割线 P_0P, 然后让点 P 沿曲线趋向 P_0, 则割线 P_0P 的极限位置 P_0T 就称为曲线在点 P_0 的切线. 注意到割线 P_0P 的斜率

$$\overline{k} = \tan\alpha_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

其中 α_1 为割线 P_0P 的倾角. 所以切线 P_0T 的斜率

$$k = \tan\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

其中 α 为切线 P_0T 的倾角.

从上面所讨论的两个问题可以看出它们的共性, 都可以归结为如下的极限：

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

由此可以得到函数在某一点处的导数定义.

§ 3.1.2 导数的定义及几何意义

定义 3.1.1 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 附近有定义, 对应于自变量的任一改变量 $\Delta x = x - x_0$, 函数的改变量为 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则此极限值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的导数（也叫微商）, 记为 $f'(x_0)$ (或 y', 或 $\dfrac{dy}{dx}$, 或 $\dfrac{df}{dx}$), 这时我们就说 $f(x)$ 在点 x_0 导数存在, 或者说 $f(x)$ 在点 x_0 可导.

导数的几何意义 $f'(x_0)$ 表示曲线 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处切线的斜率.

若极限值 $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 为 $+\infty$ 或 $-\infty$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 有无穷导数, 记为 $f'(x_0) = \pm\infty$.

利用左极限与右极限, 有左导数 $f'_-(x_0)$ 及右导数 $f'_+(x_0)$ 定义.

定义 3.1.2 设有函数 $y = f(x)$, 在 x_0 左边附近有定义, 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则此极限值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的左导数, 记为 $f'_-(x_0)$, 这时称 $f(x)$ 在点 x_0 左导数存在, 或者说 $f(x)$ 在点 x_0 左可导, 同样可定义导数 $f'_+(x_0)$.

函数 $f(x)$ 的导数仍可看成自变量 x 的一个函数, 也称为函数 $f(x)$ 的导函数, 记为 $f'(x)$, 有时也简记为 y'. 同样左导数记为 $f'_-(x)$, 右导数记为 $f'_+(x)$.

定义 3.1.3 若 $f(x)$ 在区间 (a, b) 的每一点都可导, 则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 可导. 若 $f(x)$ 在区间 (a, b) 可导, 且 $f'_+(a)$ 及 $f'_-(b)$ 都存在, 则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 可导.

例 3.1.1 求常数函数 $y = f(x) = C$ 的导数.

解 $\displaystyle f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x} = 0.$

例 3.1.2 求函数 $y = f(x) = x^2$ 的导数, 并求 $y = f(x)$ 在 $x = 4$ 处的切线与法线方程.

解 $\displaystyle f'(4) = \lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x\to 4}(x+4) = 4+4 = 8.$

$y = f(x)$ 在 $x = 4$ 处的切线方程为 $y - 16 = 8(x - 4)$, 即 $8x - y - 16 = 0$.

法线方程 $y - 16 = -\frac{1}{8}x - 4$, 即 $x + 8y - 132 = 0$.

例 3.1.3 求三角函数 $y = \sin x, \cos x$ 的导数.

解

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x.$$

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\sin x.$$

例 3.1.4 求对数函数 $y = \log_a x$ 的导数.

解

$$
\begin{aligned}
(\log_a x)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\\
&= \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}.
\end{aligned}
$$

例 3.1.5 求幂函数 $y = x^{\mu}$ 的导数.
解

$$
(x^{\mu})' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\mu}-x^{\mu})}{h} = \lim_{h\to 0}x^{\mu}\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\mu}-1}{h} = \lim_{h\to 0}x^{\mu-1}\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\mu}-1}{\frac{h}{x}} = \mu x^{\mu-1}.
$$

例 3.1.6 若 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则 $f(x)$ 在 x_0 处连续.
证明 由于 $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, 所以

$$
f(x)-f(x_0) = (f'(x_0)+\alpha)(x-x_0)
$$

其中 $x\to x_0$ 时, $\alpha\to 0$.
故 $x\to x_0$ 时, $f(x)\to f(x_0)$, 即 $f(x)$ 在 x_0 处连续.
例 3.1.7 设 $f(x) = |x|$, 证明函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.
证明

$$
\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+}\frac{|x|-0}{x} = 1,
$$

$$
\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-}\frac{|x|-0}{x} = -1,
$$

$f'(0+)\neq f'(0-)$, 所以函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.

习题 3.1

1. 由导数定义求 $y = \sqrt[3]{x}$ 的导数.
2. 按定义证明：可导的周期函数, 其导函数仍为周期函数.
3. 按定义证明：可导的偶函数其导函数为奇函数, 而可导的奇函数其导函数为偶函数.
4. 若函数 f 在点 x_0 处可导, 则 f 必在 x_0 处连续.
5. 设 $f(x) = |x|$, 证明函数 f 在 $x = 0$ 处不可导.
6. 设 f 是一偶函数且在 $x = 0$ 可导, 证明 $f'(0) = 0$.
7. 若 $f'_+(a) > 0$, 试证 $\exists\delta > 0, \forall x\in(a, a+\delta)$, 成立 $f(x) > f(a)$.
8. 设函数 f 在 x_0 可导, 则 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0)$.
9. 设 $y = f(x)$ 在 x_0 可导, 记 $\varphi(t) = f(x_0+at)$, a 为常数, 求 $\varphi'(0)$.

10. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导, 且对任意 $x, y \in R$, 成立 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$, 求 $f'(x)$.. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导, 且对任意 $x, y \in R$, 成立 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$, 求 $f'(x)$.

11. 设 $f(x)=x(x-2)^2(x-3)^3$, 求 $f'(0), f'(2), f'(3)$.

§ 3.2 求导法则

§ 3.2.1 导数的四则运算

定理 3.2.1 设 $u(x), v(x)$ 在 x 可导, 则

(1) $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$;

(2) $[cu(x)]' = cu'(x)$, 其中 c 为常数;

(3) $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;

(4) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$, 其中 $v(x) \neq 0$ 为常数.

证明 直接按导数的定义验证. 下仅证 (3). 令 $F(x)=u(x)v(x)$ 则

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h} \\ &= \frac{[u(x+h)-u(x)]}{h}v(x+h) + u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h} \\ &\to u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \ \ (h \to 0).\end{aligned}$$

例 3.2.1 求 $f(x)=x^5+\sin x - e^x$ 的导数.

解 $f'(x) = 5x^4 + \cos x - e^x$.

例 3.2.2 求 $f(x)=x^2\sin x + 7\sqrt{x}$ 的导数.

解 $f'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x + \frac{7}{2\sqrt{x}}$.

例 3.2.3 求 $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ 的导数.

解 $f'(x) = \dfrac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \sec^2 x$.

例 3.2.4 求 $f(x) = x^2 \cdot \sin x \cdot \ln x + \dfrac{\tan x}{x}$ 的导数.

解

$$\begin{aligned}f'(x) &= (x^2\sin x)'\ln x + (x^2\sin x)\frac{1}{x} + \frac{(\tan x)'x - \tan x}{x^2} \\ &= (2x\sin x + x^2\cos x)\ln x + x\sin x + \frac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2}.\end{aligned}$$

例 3.2.5 求曲线 $y=3(4x-x^2)$ 在点 $x=1$ 处的切线方程和法线方程.

解 $y' = 3(4-2x)$. 在点 $x=1$ 处,$y=9$, $y'=6$.

切线方程为 $y-9=6(x-1)$, 即 $6x-y+3=0$.

法线方程为 $y-9=-\dfrac{1}{6}(x-1)$, 即 $x+6y-55=0$.

§ 3.2.2 初等函数的求导

1 反函数的导数

定理 3.2.2 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某一邻域 (a,b) 内连续、严格单调, 且在点 x_0 导数 $f'(x_0)$ 存在. 则当 $f'(x_0)\neq 0$ 时, 其反函数 $x=\phi(y)$ 在 y_0 点可导, 这里 $y_0=\phi(x_0)$, 并且有 $\phi'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$; 当 $f'(x_0)=0$ 时, $\phi'(y_0)=\infty$.

证明 根据已知条件 $y=f(x)$ 的值域 $I=f((a,b))$ 也是区间, 反函数 $x=\phi(y)$ 在 I 上存在且同样是连续、严格单调的.

由此可见, 当 $\Delta x=x-x_0\to 0$ 时, $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\to 0$ 且 $\Delta x\neq 0\Longleftrightarrow\Delta y\neq 0$. 因此, 当 $f'(x_0)\neq 0$ 时, 有

$$\phi'(y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x_0)};$$

当 $f'(x_0)=0$ 时, $\phi'(y_0)=\infty$.

2 反三角函数的导数

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2},\qquad(arccot\,x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

3 指数函数的导数

$$(a^x)'=a^x\ln a,\qquad(e^x)'=e^x.$$

4 初等函数的求导公式

$$\begin{array}{ll}
(a^x)'=a^x\ln a & (e^x)'=e^x\\
\log_a x=\frac{1}{x\ln a} & (lnx)'=\dfrac{dx}{x}\\
(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}(\mu\neq 0) & \left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\\
(\sin x)'=\cos x & (\cos x)'=-\sin x\\
(\tan x)'=\sec^2 x & (\cot x)'=-\csc^2 x\\
(\sec x)'=\tan x\sec x & (\csc x)'=-\cot x\csc x\\
(\arcsin x)'=-(\arccos x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \\
(\arctan x)'=-(arccot\,x)'=\dfrac{1}{1+x^2} &
\end{array}$$

例 3.2.6 设 $y=\dfrac{e^x\sin x}{1+\tan x}+x^2\ln x$ 求 y'.

解

$$\begin{aligned}
y'&=\frac{(e^x\sin x+e^x\cos x)(1+\tan x)-e^x\sin x\sec x\tan x}{(1+\tan x)^2}+2x\ln x+x^2\frac{1}{x}\\
&=\frac{e^x(2\sin x+\cos x+\sin x\tan x-\tan^2 x)}{(1+\tan x)^2}+2x\ln x+x.
\end{aligned}$$

例 3.2.7 设 $y = x\arctan x - xe^x + \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, 求 y'.

解

$$
\begin{aligned}
y' &= \arctan x + \frac{1}{1+x^2} - e^x - xe^x + \frac{1}{x}x^{-\frac{1}{2}} + \ln x(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} \\
&= \arctan x + \frac{1}{1+x^2} - e^x - xe^x + \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2x\sqrt{x}}.
\end{aligned}
$$

例 3.2.8 曲线 $y = x^n$ (n 为正整数) 上点 $(1,1)$ 处的切线交 x 轴于点 $(\xi, 0)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} y(\xi)$.

解 $y' = nx^{n-1}$, $y'(1) = n$. 曲线 $y = x^n$ 上点 $(1,1)$ 处的切线方程为

$$y - 1 = n(x - 1),$$

令 $y = 0$, 则切线与 x 轴交点的横坐标为 $\xi = 1 - \frac{1}{n}$, 此时

$$y(\xi) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \quad \lim_{n\to\infty} y(\xi) = e^{-1}.$$

§ 3.2.3 复合函数的求导法

定理 3.2.3 若 $y = f(u)$ 在点 u 可导,$u = g(x)$ 在点 x 可导, 则复合函数 $y = f(g(x))$ 在点 x 可导, 且有关系式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

证明 由 $y = f(u)$ 在点 u 可导知

$$\Delta y = f'(u)\Delta u + o(1)\Delta u,$$

这里 $\Delta u \neq 0$, 但可补充定义 $\Delta u = 0$ 时 $o(1) = 0$, 此时该式也适用. 从而

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}o(1).$$

由 $u = g(x)$ 在点 x 可导知当 $\Delta x \to 0$ 时 $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to g'(x)$, 从而

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(u)g'(x),$$

即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

由此可见复合函数 y 关于自变量 x 的导数是：复合函数 y 关于中间变量 u 的导数与中间变量 u 关于自变量 x 的导数的乘积, 这就是复合函数的求导法则. 它在导数运算中有着很重要的作用, 利用它可以求出许多复杂的函数的导数.

例 3.2.9 设 $y=(x^2-2\sqrt{3}x+4)^4$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解 $y'=4(x^2-2\sqrt{3}x+4)^3(2x-2\sqrt{3})=8(x-\sqrt{3})(x^2-2\sqrt{3}x+4)^3$.

例 3.2.10 设 $y=\sin\sqrt{a^2-x^2}+e^{x^2}\cos 2x$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解

$$\begin{aligned} y'&=\cos\sqrt{a^2-x^2}(\sqrt{a^2-x^2})'+e^{x^2}(x^2)'\cos 2x+e^{x^2}(-2\sin 2x)\\ &=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(-2x)\cos\sqrt{a^2-x^2}+2xe^{x^2}\cos 2x-2e^{x^2}\sin 2x\\ &=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\cos\sqrt{a^2-x^2}+2xe^{x^2}\cos 2x-2e^{x^2}\sin 2x. \end{aligned}$$

例 3.2.11 设 $y=2^{\cos^2\frac{1}{x}}-4$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解

$$y'=2^{\cos^2\frac{1}{x}}\ln 2\left(\cos^2\frac{1}{x}\right)'=2\cos\frac{1}{x}(-\sin\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})2^{\cos^2\frac{1}{x}}\ln 2=\frac{\ln 2}{x^2}2^{\cos^2\frac{1}{x}}\sin\frac{2}{x}.$$

对数求导法

例 3.2.12 设 $y=[u(x)]^{v(x)}$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解 $y=e^{v(x)\ln[u(x)]}$,

$$y'=e^{v(x)\ln[u(x)]}\left(v'(x)\ln[u(x)]+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)=\left(v'(x)\ln[u(x)]+\frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right)[u(x)]^{v(x)}.$$

例 3.2.13 设 $y=\sqrt[4]{\dfrac{(x+3)(x+4)}{x-1}}$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解 易知函数的定义域为 $-4\le x\le -3$ 或 $x>1$. 函数 y 在 $x=-4,-3$ 处不可导. 当 $-4<x<-3$ 时

$$\ln y=\frac{1}{4}\left(\ln(-x-3)+\ln(x+4)-\ln(-x-1)\right),$$

两边对 x 求导得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{-x-3}+\frac{1}{x+4}-\frac{-1}{-x+1}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-1}\right),$$

$$y'=\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{(x+3)(x+4)}{x-1}}\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-1}\right).$$

当 $x>1$ 时, 求导结果相同.

习题 3.2

1. 求下列函数的导数 $\frac{dy}{dx}$.

(1) $y = x^3 - 3x + 7$;

(2) $y = \sqrt{x} - \frac{1}{x}$;

(3) $y = a\cos x + b\sin x$;

(4) $y = x^{\frac{2}{3}} + x\cos x$;

(5) $y = 3\log x^2 + 5e^{6x}$;

(6) $y = x\sin x^2$;

(7) $y = \sqrt[3]{x}\cos x$;

(8) $y = \frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x}$;

(9) $y = x\log x\sin x$;

(10) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(11) $y = \arctan(1 + x^3)$;

(12) $y = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$;

(13) $y = \sin^n x\cos x$;

(14) $y = (\sin x + \cos x)^n$;

(15) $y = \arctan\frac{2x}{1-x^2}$;

(16) $y = \arcsin(\sin x\cos x)$;

(17) $y = \frac{e^{-x}\sin x}{\sqrt{1+x^2}}$;

(18) $y = x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

2. 求下列函数的导数 $f'(x)$

(1) $f(x) = \sqrt{(1+x)\sqrt{x}e^{x-1}} + \arcsin\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$;

(2) $f(x) = x^{\sin x}$;

(3) $f(x) = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$;

(4) $f(x) = \tan(\cos x^x)$;

(5) $f(x) = \arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$;

(6) $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + a^2})$.

3. 设 $y = f(\sin x)\sin f(x)$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

4. 设 $y = \sqrt[\phi(x)]{\psi(x)}$, $(\phi(x) \neq 0, \psi(x) > 0)$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

5. 设

$$f(x) = \begin{cases} 3x - \frac{x^2}{2} - 2, & 0 \le x \le 4; \\ 6 - x, & x > 4. \end{cases}$$

问 $f(x)$ 在 $x = 4$ 处可导吗?

6. 设 $f(x)$ 可导, 计算 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(a+\alpha t)-f(a+\beta t)}{t}, \alpha \neq 0, \beta \neq 0$.

7. 设 $f(x)$ 对 x 可求导的函数, 求 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $y = f(x^3)$, (2) $y = f(e^x)e^{f(x)}$, (3) $y = f(f(f(x)))$.

8. 求曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处的切线方程和法线方程.

9. 求曲线 $y = e^x$ 上的一点, 使过该点的切线与直线 $y = -ex$ 平行, 并写出该点的法线方程.

10. 求曲线 $y = x^2$ 和 $y = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ 的交点处切线的夹角.

11. 确定常数 a, b, 使函数 $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x > 1, \\ x^2, & x \le 1 \end{cases}$ 有连续的导数.

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1-}\frac{x^2-1}{x-1} = 2, \quad f'_+(1) = \lim_{x\to 1+} f'(x) = a$$

由条件 f 应满足 $f(1) = f(1-) = f(1+)$, 以及 $f'_+(1) = f'_-(1)$. 于是有

$$a + b = 1, a = 2, \text{即 } a = 2, b = -1.$$

12. 设

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{\pi}{x}, & x<0;\\ A, & x=0;\\ ax^2+b, & x>0.\end{cases}$$

其中 A,a,b 为常数. 试问 A,a,b 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 并求 $f'(0)$.

13. 设在邻域 $U(0;\delta)$ 内函数 f,g 满足 $|f(x)|\le|g(x)|$. 若 $g(0)=g'(0)=0$, 求 $f'(0)$.

§3.3 微分及其运算

§ 3.3.1 微分的定义

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有定义, 且 $x_0\in(a,b)$. 如果存在一个常数 A, 使得

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x),\Delta x\to 0,$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微；函数改变量的线性主要部分 $A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 处的微分, 记为 dy 或 $df(x_0)$.

定理 3.3.1 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微的充要条件是 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导, 且 $dy=f'(x_0)dx$. 其中 $dx=\Delta x=x-x_0$ 称为自变量的微分.

证明 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微, 则

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x),\Delta x\to 0.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\to A$$

即 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导, 且 $f'(x_0)=A$, 从而在点 x_0 可导, 且 $dy=f'(x_0)dx$.

反过来, 若 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导, 记 $A=f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, 则

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha,$$

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x.$$

其中 $\alpha\to 0$ 当 $\Delta x\to 0$ 时. 故 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微.

由此, 对一元函数而言, 可导和可微是同一件事, 且 $df(x)=f'(x)dx$.

注 微分的几何意义表示曲线在该点处切线上点的纵坐标增量.

§ 3.3.2 微分的运算

微分的四则运算的证明完全同导数的四则运算.

定理 3.3.2 设 $u(x),v(x)$ 在 x 可微, 则

(1) $d[u(x)\pm v(x)]=du(x)\pm dv(x)$;

(2) $d[cu(x)]=cdu(x)$, 其中 c 为常数;

(3) $d[u(x)v(x)]=du(x)v(x)+u(x)dv(x)$;

(4) $d\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]=\dfrac{du(x)v(x)-u(x)dv(x)}{v^2(x)}$, 其中 $v(x)\neq 0$ 为常数.

§ 3.3.3 复合函数微分与基本公式

定理 3.3.3 设 $y=f(u)$ 与 $u=\phi(x)$ 均可微, 则复合函数 $y=f[\phi(x)]$ 的微分为

$$dy=f'(u)\phi'(x)dx.$$

证明 $dy=[f(\phi(x))]'dx=f'(u)\phi'(x)dx=f'(u)du.$
一阶微分的形式不变性:

定理 3.3.4 若 $y=f(u),u=\phi(x)$ 均可微, 则 $dy=f'(u)\phi'(x)dx=f'(u)du$, 不论 u 是自变量还是中间变量, 形式不变.

例 3.3.1 设 $y=\dfrac{\cos^2 2x}{x^3}+2$, 求 dy.

解 $y'=\frac{2cos(2x)(-\sin(2x))x^3-\cos^2(2x)3x^2}{x^6}=-\frac{x\sin(4x)+3\cos^2(2x)}{x^4}.$

$$dy=-\frac{x\sin(4x)+3\cos^2(2x)}{x^4}dx.$$

例 3.3.2 设 u,v 是 x 的可微函数,$v\neq 0$, $y=\arctan\dfrac{u}{v}$, 求 dy.

解

$$\begin{aligned}dy &= \frac{1}{1+(\frac{u}{v})^2}d(\frac{u}{v}))\\ &=\frac{v^2}{u^2+v^2}\frac{vdu-udv}{v^2}=\frac{vdu-udv}{u^2+v^2}\\ &=\frac{vu'-uv'}{u^2+v^2}dx.\end{aligned}$$

例 3.3.3 设 $y=e^{-x^2}\sin\frac{1}{x}$, 求 dy.

解

$$\begin{aligned}dy&=d(e^{-x^2})\sin\frac{1}{x}+e^{-x^2}d\sin\frac{1}{x}\\ &=-2xe^{-x^2}dx\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}e^{-x^2}\cos\frac{1}{x}dx\\ &=-e^{-x^2}\left(2x\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\right)dx.\end{aligned}$$

习题 3.3

1. 求 y 关于 x 的微分:

(1) $y=\frac{1}{x}$; (2) $y=\arctan(ax+b)$;
(3) $y=\sin x-x\cos x$; (4) $y=\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$.

2. 设 u, v, w 均为 x 的可微函数, 求 y 关于 x 的微分:

(1) $y = uvw$;　(2) $y = \frac{u}{v^2}$;
(3) $y = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$;　(4) $y = \arctan(\frac{u}{vw})$;
(5) $y = \ln(\sqrt{u^2+v^2+w^2})$.

3. 求 y 关于 x 的微分:

(1) $y = x^{\sin(\sin x^x)}$;　(2) $y = \tan(\cos x^x)$;
(3) $y = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$;　(4) $y = e^{x^2-\frac{1}{x}}$;
(5) $y = \sqrt{x} + \ln x - \frac{1}{\sqrt{x}}$;　(6) $y = \sin ax \cos bx$;
(7) $y = \ln\tan x$;　(8)$y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$;
(9) $y = \sin^2(\ln(3x+1))$;　(10) $y = \arctan e^x - \ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$.

§3.4 隐函数与参数方程式所表示函数的求导法

§ 3.4.1 隐函数求导法

一元函数中因变量 y 与自变量 x 的对应关系可以用不同的形式来表达, 若因变量 y 已经表达成自变量 x 的明显关系式 $y = f(x)$, 通常称其为显函数. 例如 $y = e^{x^2}, y = \tan\sqrt{x}$ 等.

若因变量 $y = f(x)$ 由方程 $F(x,y) = 0$ 确定, 即设有二元方程 $F(x,y) = 0$, 在某区间 I 上由方程确定了 x 与 y 的对应关系, 则称 $F(x,y) = 0$ 在区间 I 上确定了一个隐函数 $y = fx)$. 例如, 方程 $x^2 - 2x + y^3 = 3$ 及 $e^{xy} + x^2y = 1$, 由前者可解出 $y = \sqrt[3]{3+2x-x^2}$.

这种将隐函数化为显函数, 叫作隐函数的显化, 但是隐函数的显化有时很困难, 甚至是不可能, 例如从 $e^{xy} + x^2y = 1$ 中解出 y 是不可能的, 因此我们给出隐函数一般的定义.

定义 3.4.1 对于 x, y 的二元方程 $F(x,y) = 0$, 如果存在函数 $y = f(x)$, 使得 $F[x, f(x)] \equiv 0$, 则称 $y = f(x)$ 是由方程 $F(x,y) = 0$ 所确定的隐函数.

隐函数有时是多值的. 例如, 方程 $x^2 + y^2 = 1$ 定义了 y 是 x 的隐函数, 由于 $x \in [0,1]$, 除 $x = \pm 1$ 外都对应了两个 y 值, 对于这样的函数, 约定只取定其中的一支. 至于如何选择这单值支, 有时是任意的, 有时则要依其它条件.

方程 $F(x,y) = 0$ 的左端应满足什么条件, 才能确定一个隐函数? 这个隐函数是否存在导数? 将在本书的下册多元函数微分学一章中讨论, 这里不妨设方程 $F(x,y) = 0$ 确定了 y 为 x 的隐函数, 记为 $y = f(x)$, 且为可导函数, 于是有恒等式

$$F[x, f(x)] \equiv 0.$$

恒等式的两边对 x 求导数应相等, 再从等式中解出 $f'(x)$, 即为所求的隐函数之导数. 在具体求隐函数的导数时, 不需要把方程中的 y 换为 x, 只要将方程 $F(x,y) = 0$ 中的 y 视为 x 的函数, 并把等式看成恒等式, 两边对 x 求导数, 再从中解出 y' 即可.

例 3.4.1 若 $y(x)$ 是方程 $e^{xy} + x^2y = 1$ 所确定的函数, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 两边对 x 求导,

$$e^{xy}(y+xy')+2xy+x^2y'=0,$$

$$y'=-\frac{2xy+ye^{xy}}{x^2+xe^{xy}}.$$

例 3.4.2 求曲线 $y^3+y^2=2x$ 在点 $(1,1)$ 的切线方程和法线方程.

解 两边对 x 求导, $3y^2y'+2yy'=2$. 在点 $(1,1)$ 处

$$y'=\frac{2}{3y^2+2y}=\frac{2}{5}.$$

曲线 $y^3+y^2=2x$ 在点 $(1,1)$ 的切线方程为

$$y-1=\frac{2}{5}(x-1),\quad \text{即} 2x-5y+3=0;$$

法线方程

$$y-1=-\frac{5}{2}(x-1),\quad \text{即} 5x+2y-7=0.$$

§ 3.4.2 参数方程式所表示函数的求导法

设曲线由参数方程 $x=\phi(t), y=\psi(t)$ 给出, 其中 $t\in[\alpha,\beta]$ 为参数. 如果 $x=\phi(t)$ 在 $[a,b]$ 上是严格单调的, 故有反函数 $t=\phi^{-1}(x)$, 由此 $y=\psi[\phi^{-1}(x)]$. 这表明由参数方程可确定函数 $y=y(x)$, 它是 $y=\psi(t)$ 与 $x=\phi(t)$ 的反函数 $t=\phi^{-1}$ 的复合函数, 于是在 $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都可导且 $x=\phi(t)$ 的反函数存在的前提下, 有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}.$$

例 3.4.3 若 $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t \end{cases}$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^t\sin t+e^t\cos t}{e^t\cos t-e^t\sin t}=\dfrac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}$.

§ 3.4.3 不可导的函数举例

例 3.4.4 考察函数 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ $(-\infty<x<+\infty)$ 在点 $x=0$ 的导数.

解

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{x^{\frac{2}{3}}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0-}x^{-\frac{1}{3}}=-\infty$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{x^{\frac{2}{3}}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0+}x^{-\frac{1}{3}}=+\infty$$

所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 不可导.

例 3.4.5 考察函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 的导数.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\dfrac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

不存在. 故函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 不可导.

习题 3.4

1. 对于由方程确定的隐函数, 求解 $\frac{dy}{dx}$.

(1) $x=y+e^y$;
(2) $x=y+\log y$;
(3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;
(4) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}\ \ (a>0)$;
(5) $\frac{y^2}{x}=\sqrt{x^2+y^2}$;
(6) $ye^{xy}-x+1=0$;
(7) $y=1-\log(x+y)+e^y$;
(8) $\arctan\frac{y}{x}=\ln(\sqrt{x^2+y^2})$;
(9) $ye^x+\ln y=1$;
(10) $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=16$.

2. 求 $\frac{dy}{dx}$.

(1) $\begin{cases}x=10\cos 3t+120\cos t,\\ y=10\sin 3t+120\sin t;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t);\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=1-t^2,\\ y=t-t^3;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x=\sin^2 t,\\ y=\cos^2 t;\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x=e^{2t}\cos^2 t,\\ y=e^{2t}\sin^2 t.\end{cases}$

3. 设 $y=y(x)$ 是由 $y=-ye^x+2e^y\sin x-7x$ 所确定的函数, 求 $y'(0)$.

4. 对于由方程 $xy-e^x+e^y=0$ 确定的隐函数, 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

5. 求曲线 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 在点 $A(1,\dfrac{3\sqrt{3}}{2})$ 处的切线方程和法线方程.

6. 求下列函数在 0 点的左. 右导数.

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 0,\\ xe^x, & x>0;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\ne 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\ne 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

7. 求下列函数在导数不存在的点的左. 右导数：

(1) $y=|\ln|x||$;
(2) $y=|\tan x|$;
(3) $y=\sqrt{1-\cos x}$.

§3.5 高阶导数与高阶微分

设函数 f 在区间 I 上可导, 则 $f'(x)$ 在 I 上定义了一个函数 f', 称为 f 的导函数. 这时, 我们自然要进一步研究 f' 是不是可导? 如果 f' 在 I 上可导, 那么 f' 的导函数 $(f')'$ 记为 f'', 称为 f 的 2 阶导函数. 2 阶导函数的导函数（如果存在的话）记为 f''', 称为 f 的 3 阶导函数. 归纳地, 对任何自然数 n, 可以定义 f 的 n 阶导函数 $f^{(n)}$.

对于非匀速直线运动, 若用 $s(t)$ 表示质点的位移和时间的关系, 那么一阶导数 $s'(t)$ 是速度函数, 而 2 阶导数 $s''(t)$ 是质点的加速度函数. 为了说法上的一致起见, 函数 f 的导数也称为 f 的一阶导数. 对于平面曲线 $y = f(x)$ 来说, 一阶导数 $f'(x)$ 表示曲线上各点切线的斜率. 至于二阶导数 f'' 的许多重要的几何应用, 以后再说明.

例 3.5.1 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 求 $f''(x)$, 并讨论 $f^{(n)}(x)$ 的存在性.

解

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x^3 \sin \frac{1}{x} = 0,$$

当 $x \neq 0$, 时

$$f'(x) = 4x^3 \sin \frac{1}{x} - x^2 \cos \frac{1}{x}.$$

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0}(4x^3 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}) = 0,$$

当 $x \neq 0$, 时

$$f''(x) = 12x^2 \sin \frac{1}{x} - 6x \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{x}.$$

$$f^{(3)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\left(12x \sin \frac{1}{x} - 6 \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\right)$$

不存在. 由此当 $x \neq 0$ 时 $f^{(n)}(x)$ 存在, 但当 $x = 0$ 时,$f'(0) = f''(0) = 0$, 若 $n \geq 3$, $f^{(n)}(0)$ 不存在.

例 3.5.2 考虑函数 $y = e^{\lambda x}$ (λ 为一常数), 求 $f^{(n)}(x)$.

解 可用数学归纳法证明 $f^{(n)}(x) = \lambda^n e^x$.

例 3.5.3 对于 $f(x) = \sin x$, 求 $f^{(n)}(x)$.

解 $n = 1$ 时, $f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

设 $n = k$ 时 $f^{(k)}(x) = \sin(x + \frac{k\pi}{2})$, 当 $n = k + 1$ 时,

$$f^{(k+1)}(x) = \cos(x + \frac{k\pi}{2}) = \sin(x + \frac{(k+1)\pi}{2}).$$

由数学归纳法知对一切 n, $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$.

例 3.5.4 假设 $p(x)$ 是一个 n 次多项式, 试求将 $p(x)$ 按基底 $1, (x - a), (x - a)^2, \cdots, (x - a)^n$ 展开时的系数, 这里 a 是任意给定的实数.

解 设 $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (x - a)^k$, 则对 $i = 0, 1, \cdots, n$,

$$P^{(i)}(x) = \sum_{k=i}^{n} a_k k(k-1) \cdots (k - i + 1)(x - a)^{k-i},$$

取 $x=a$, 则 $P^{(i)}(a)=a_i i!, a_i=\frac{P^{(i)}(a)}{i!}$. 故将 $p(x)$ 按基底 $1,(x-a),(x-a)^2,\cdots,(x-a)^n$ 展开时的系数 $a_i=\frac{P^{(i)}(a)}{i!}$.

对于计算 n 阶导数, 显然有下列的公式

$$(f+g)^{(n)}=f^{(n)}+g^{(n)},(cf)^{(n)}=cf^{(n)},$$

这里 c 是任意的常数. 用数学归纳法可以计算两个函数的乘积的 n 阶导数:

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}g^{(k)}.$$

例 3.5.5 设 $y=x^2\cos x$, 求 $y^{(50)}$.

解 由于 $\cos^{(k)}x=\cos(x+\frac{k\pi}{2}),(x^2)'=2x,(x^2)''=2,(x^2)^{(k)}=0\ \ (k\geq 3)$. 所以

$$\begin{aligned}
y^{(50)}&=\sum_{k=0}^{50}C_{50}^k(x^2)^{(k)}\cos^{(50-k)}\\
&=x^2\cos(x+\frac{50\pi}{2})+C_{50}^1 2x\cos(x+\frac{49\pi}{2})+C_{50}^2 2\cos(x+\frac{48\pi}{2})\\
&=-x^2\cos x-100x(2450-x^2)\cos x-100x\sin x+2450\cos x\\
&=(2450-x^2)\cos x-100x\sin x.
\end{aligned}$$

高阶微分

若 $y=f(x)$, 则 $dy=f(x)dx$.

$$d^2y=d(dy)=d(f(x)dx)=d(f(x))dx+f(x)d(dx)=f''(x)(dx)^2=f''(x)dx^2.$$

同样

$$d^3y=f'''(x)dx^3,\cdots,d^ny=f^{(n)}(x)dx^n.$$

注: 高阶微分不具形式不变性. 若 x 为自变量, 则 $d(dx)=0, d^2y=f''(x)dx^2$; 若 x 为中间变量, 则 $d^2y=f''(x)dx^2+f(x)d(dx)$.

例 3.5.6 设 $y=x^2, x=t^2$, 求 d^2y.

解 一方面, 若 x 为中间变量, 则 $y=t^4, dy=4t^3dt, d^2y=12t^2dt^2$.

另一方面若 x 为自变量, 则 $dy=2xdx, d^2y=d(2x)dx=2dx^2$. 但此时

$$d^2y=2(dx)^2=2(2tdt)^2=8t^2dt^2,$$

二者不等.

习题 3.5

1. 求下列函数的二阶导数

(1 $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;	(2) $y=x\ln x$;
(3) $y=e^{-x^2}$;	(4) $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;
(5) $y=x^2e^{2x}$;	(6) $y=2x^3+3x^2-3x$.

2. 用归纳法证明

(1) $(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n \ (a > 0)$; (2) $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n}$;

(3) $\cos^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$.

3. 求 n 阶导数

(1) $y = \frac{1}{x(1-x)}$; (2) $y = \frac{1}{x^2-2x-3}$;

(3) $y = \cos^2 ax$; (4) $y = \frac{e^x}{x}$;

(5) $y = 2^x\ln x$.

4. 设 $f(x)$ 各阶导数存在, 求 y'' 及 y'''.

(1) $y = f(x^2)$; (2) $y = f(\frac{1}{x})$;

(3) $y = f(e^{-x})$; (4) $y = f(\ln x)$.

5. 求高阶微分

(1) $y = \sqrt{1 + x^2}$, 求 d^2y;

(2) $y = x^x$, 求 d^2y;

(3) $y = x\cos 2x$, 求 d^3y;

(4) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, 求 d^3y;

(5) $y = x^ne^x$, 求 d^ny;

(6) $y = \frac{\ln x}{x}$, 求 d^ny.

6. 若 u, v 为 x 的函数, 且可微分足够次数, 求高阶微分:

(1) $y = uv$, 求 d^2y;

(2) $y = \frac{u}{v}$, 求 d^2y;

(3) $y = \sin(u)$, 求 d^3y;

(4) $y = \ln u$, 求 d^3y.

7. 求由隐函数所确定的二阶导数:

(1) $e^{x+y} - xy = 0$;

(2) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$;

(3) $y^2 + 2\ln y - x^4 = 0$.

8. 若

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

求 $f'(0), f''(0)$.

9. 设 $f''(u)$ 存在, $y = f(x + y)$. 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{d^2x}$.

10. 求 $d(x^2)$. 它与 $(dx)^2 = dx^2$ 不同.

11. 若 $y(x)$ 是方程 $e^y = xy$ 所确定的函数, 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

12. 设 $y = C_1e^{\lambda_1x} + C_2e^{\lambda_2x}$, 其中 $C_1, C_2, \lambda_1, \lambda_2$ 是常数, 证明它满足方程

$$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2y = 0.$$

13. 若 $\begin{cases} x = e^t\cos t; \\ y = e^t\sin t. \end{cases}$ 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

14. 将 4 次多项式 $3x^4-5x^3+4x^2-2x-1$ 按 $(x-2)$ 的方幂展开.

第三章典型例题选讲

例 3.1 设 m 为自然数,f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上定义,

$$f(x)=\begin{cases} x^m\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

(1) m 为何值时, f 在 $x_0=0$ 可导;
(2) m 为何值时, f' 在点 $x_0=0$ 连续.
解 (1) 当 $x\neq 0$ 时, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=x^{m-1}\sin\frac{1}{x}$;
当 $x\to 0$ 时, $\sin\frac{1}{x}$ 有界但无极限.
因此 $f'(0)$ 存在当且仅当 $x^{m-1}\to 0\ (x\to 0)$. 于是 $m>1$, 这时 $f'(0)=0$.
(2) 当 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x)=mx^{m-1}\sin\frac{1}{x}-x^{m-2}\cos\frac{1}{x}=x^{m-2}(mx\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}).$$

当 $x\to 0$ 时, $mx\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ 有界但无极限. 因此 f' 在点 $x_0=0$ 连续, 当且仅当 $x^{m-2}\to 0\ (x\to 0)$, 于是有 $m>2$.

例 3.2 设 m 为自然数,

$$f(x)=\begin{cases} x^m\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

(1) 何时 $f''(0)$ 存在?
(2) 何时 f'' 在点 $x=0$ 连续?
解 (1) 当 $m>2$ 时,

$$f'(x)=\begin{cases} mx^{m-1}\sin\frac{1}{x}-x^{m-2}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

且 f' 在点 $x=0$ 连续, 于是当 $x\neq 0$ 时,

$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=mx^{m-2}\sin 1x-x^{m-3}\cos\frac{1}{x}=x^{m-3}(mx\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}).$$

由于当 $x\to 0$ 时, $mx\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ 有界但无极限, 因此上式当 $x\to 0$ 时极限存在, 当且仅当 $m>3$, 这时有

$$f''(0)=0.$$

(2) 当 $x\neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} f''(x)&=m(m-1)x^{m-2}\sin\tfrac{1}{x}-2(m-1)x^{m-3}\cos\tfrac{1}{x}-x^{m-4}\sin\tfrac{1}{x}\\ &=x^{m-4}[m(m-1)x^2\sin\tfrac{1}{x}-2(m-1)x\cos\tfrac{1}{x}-\sin\tfrac{1}{x}].\end{aligned}$$

由于当 $x \to 0$ 时,
$$m(m-1)x^2 \sin\frac{1}{x} - 2(m-1)x\cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}$$
有界但无极限, 因此 $f''(x)$ 在点 $x=0$ 处连续, 当且仅当 $m>4$, 这时有
$$\lim_{x\to 0} f''(x) = 0 = f''(0).$$

例 3.3 证明: 函数
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, \quad \text{x=0} \end{cases}$$
在 $x=0$ 处 $f^{(n)}(0)=0 \quad (n=1,2,\cdots)$.

证明 $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \overset{令 y=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{y\to\infty} \frac{y}{e^{y^2}} = 0.$

设 $f^{(n-1)}(0)=0$, 易证
$$f^{(n-1)}(x) = p\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (x \neq 0),$$
其中 $p\left(\frac{1}{x}\right)$ 表示关于 $\frac{1}{x}$ 的某个多项式. 因此
$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{p\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x-0} \overset{令 y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to\infty} \frac{yp(y)}{e^{y^2}} = 0.$$

例 3.4 设函数 f 在点 $x=0$ 连续, 并满足
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = A.$$
求证 $f'(0)$ 存在, 并且 $f'(0)=A$.

分析 由于需要证明 $f'(0)$ 的存在性, 我们应该根据题设条件, 按导数的定义来证明, 即对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|x|<\delta$ 时, 有
$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x} - A\right| < \varepsilon.$$

证明 由已知条件,$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $z \in U^\circ(0;\delta)$ 时, 有
$$\left|\frac{f(2z)-f(z)}{z} - A\right| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$
即有
$$A - \frac{1}{2}\varepsilon < \frac{f(2z)-f(z)}{z} < A + \frac{1}{2}\varepsilon.$$
任取 $x \in U^\circ(0;\delta)$, 并令 $z_m = 2^{-m}x, m=1,2,\cdots,n.$, 则有
$$2^{-m}(A - \frac{1}{2}\varepsilon) < \frac{f(2z_m)-f(z_m)}{x} < 2^{-m}(A + \frac{1}{2}\varepsilon), m=1,2,\cdots,n.$$

将上式中由 $m=1,2,\cdots,n$ 分别相加, 得到

$$(1-2^{-n})(A-\frac{1}{2}\varepsilon)<\frac{f(x)-f(2^{-n}x)}{x}<(1-2^{-n})(A+\frac{1}{2}\varepsilon).$$

在上式中令 $n\to+\infty$, 则由 f 在点 $x=0$ 的连续性,

$$A-\frac{1}{2}\varepsilon\le\frac{f(x)-f(0)}{x}\le A+\frac{1}{2}\varepsilon,$$

即

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}-A\right|\le\frac{1}{2}\varepsilon<\varepsilon.$$

于是由导数的定义, 有 $f'(0)=A$.

例 3.5 设函数 f 在 $(0,+\infty)$ 上定义, 且对任何 $x,y\in(0,+\infty)$, 都有

$$f(xy)=f(x)+f(y).$$

若 $f'(1)$ 存在, 求 $f'(x),\quad x\in(0,+\infty)$.

解 在等式 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 中取 $y=1$, 得 $f(1)=0$. 在上式中再令 $y=1+\triangle x, 0<|\triangle x|<1$, 得到

$$x\cdot\frac{f(x+x\triangle x)-f(x)}{x\triangle x}=\frac{f(1+\triangle x)}{\triangle x}=\frac{f(1+\triangle x)-f(1)}{\triangle x}.$$

在上式中令 $\triangle x\to 0$, 即得

$$xf'(x)=f'(1),$$

即

$$f'(x)=\frac{f'(1)}{x}.$$

例 3.6 星形线的参数方程为

$$x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t\ \ (a>0, 0\le t<2\pi).$$

(1) 求过点 $(x(t_0),y(t_0))$ 的切线方程;

(2) 证明当 $t_0\ne 0,\frac{\pi}{2},\pi$ 和 $\frac{3\pi}{2}$ 时, 切线被坐标轴所截线段为一常数.

解 (1) 由参数表示的函数的导数求导法则, 有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\tan t.$$

于是 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=t_0}=-\tan t_0$, 所求切线方程为

$$y-a\sin^3 t_0=-\tan t_0(x-a\cos^3 t_0).$$

(2) 该切线与 x 轴和 y 轴的交点分别是 $M(a\cos t_0,0)$ 和 $N(0,a\sin t_0)$. 于是有

$$|MN|=\sqrt{(a\cos t_0-0)^2+(0-a\sin t_0)^2}=a.$$

例 3.7 设 $y = \arctan x$

(1) 证明 y 满足方程

$$(1+x^2)y'' + 2xy' = 0;$$

(2) 求 $y^{(n)}(0)$.

分析 本题需将函数式或导数式变形后再求导, 从而得到一般的递推公式.

解 (1) $y(0) = 0$. 由 $y'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 得到 $y'(0) = 1$. 将等式

$$(1+x^2)y'(x) = 1$$

两边对 x 求一次导数, 有

$$(1+x^2)y'' + 2xy' = 0.$$

(2) 设 $n \geq 2$. 上式对 x 求 n 阶导数, 有

$$(1+x^2)y^{(n+2)} + 2(n+1)xy^{(n+1)} + n(n+1)y^{(n)} = 0.$$

于是得到递推公式

$$y^{(n+2)}(0) = -n(n+1)y^{(n)}(0).$$

又由

$$y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0,$$

$$y^{(2m)}(0) = 0, y^{(2m+1)}(0) = (-1)^m(2m)!.$$

例 3.8 证明:$f(x) = |x|^3$ 在 $x = 0$ 处三阶导数 $f'''(0)$ 不存在.

证 $f(x) = |x|^3 = sgnx \cdot x^3$, 因此

$$f'(x) = 3sgnx \cdot x^2 = 3x|x|. \quad (x \neq 0\text{时})$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{sgnx \cdot x^3}{x} = 0.$$

$$f''(x) = (3sgnx \cdot x^2)' = 6sgnx \cdot x = 6|x|. \quad (x \neq 0\text{时})$$

$$f''(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{3x|x|}{x} = 0.$$

$$f_+'''(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f''(x)-f''(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{6sgnx \cdot x}{x} = 6.$$

同理 $f_-'''(0) = -6$. 所以 $f'''(0)$ 不存在.

例 3.9 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, $f(a) = f(b)$, 且在开区间 (a,b) 内有连续的右导数

$$f_+'(x) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (a < x < b).$$

试证: 存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f_+'(\xi) = 0$.

证 若 $f(x) \equiv$ 常数, 则 $f_+'(x) \equiv 0$, 问题自明. 现设 $f(x)$ 不恒常数.

为了证明 $\exists\xi \in (a,b)$, 使 $f_+'(\xi) = 0$, 只要证明 $\exists\alpha,\beta \in (a,b)$, 分别有 $f_+'(\alpha) \leq 0, f_+'(\beta) \geq 0$, 那么由 $f_+'(x)$ 的连续性, 便知存在 ξ 使 $f_+'(\xi) = 0$. 事实上, 找这样的 α,β,

只要找最大 (小) 值点即可. 因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 故在 $[a,b]$ 上必达最、最小值. 而 $f(a)=f(b)$, 所以最大、最小值至少有一个在内部达到. 不妨设 $\alpha\in(a,b)$ 是 f 的最大值点 (内部达最小值类似讨论), 于是

$$f'_+(\alpha)=\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\le 0.$$

任取一点 $c: a<c<\alpha$, 因 f 在 $[c,\alpha]$ 上连续, f 在 $[c,\alpha]$ 上也必有一点 $\beta<\alpha$ 达到最小值. 于是

$$f'_+(\beta)=\lim_{x\to\beta^+}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\ge 0.$$

如此我们即达到了目的.

例 3.10 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微, $\alpha_n<x_0<\beta_n(n=1,2,\cdots)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=x_0$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(x_0).$$

证明 证法一：$\forall\varepsilon>0$，由条件知存在 $\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<\varepsilon,$$

即

$$(f'(x_0)-\varepsilon)|x-x_0|<f(x)-f(x_0)<(f'(x_0)+\varepsilon)|x-x_0|.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=x_0$, 所以存在 N, 当 $n>N$ 时 $|\alpha_n-x_0|<\delta$, $|\beta_n-x_0|<\delta$, 从而

$$(f'(x_0)-\varepsilon)(x_0-\alpha_n|<f(x_0)-f(\alpha_n)<(f'(x_0)+\varepsilon)(x_0-\alpha_n|$$

$$(f'(x_0)-\varepsilon)(\beta_n-x_0)<f(\beta_n)-f(x_0)<(f'(x_0)+\varepsilon)(\beta_n-x_0).$$

两式相加得

$$(f'(x_0)-\varepsilon)(\beta_n-\alpha_n)<f(\beta_n)-f(\alpha_n)<(f'(x_0)+\varepsilon)(\beta_n-\alpha_n).$$

即

$$\left|\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}-f'(x_0)\right|<\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(x_0)$.

证法二：首先, 容易看到

$$\begin{aligned}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}&=\frac{f(\beta_n)-f(x_0)+f(x_0)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}\\&=\frac{\beta_n-x_0}{\beta_n-\alpha_n}\cdot\frac{f(\beta_n)-f(x_0)}{\beta_n-x_0}-\frac{\alpha_n-x_0}{\beta_n-\alpha_n}\cdot\frac{f(\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n-x_0},\end{aligned}$$

若记 $\lambda_n=\frac{\beta_n-x_0}{\beta_n-\alpha_n}$, 则 $\frac{x_0-\alpha_n}{\beta_n-\alpha_n}=1-\lambda_n$, 且 $0<\lambda_n<1, 0<1-\lambda_n<1$, 上式可改写为

$$\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=\lambda_n\frac{f(\beta_n)-f(x_0)}{\beta_n-x_0}+(1-\lambda_n)\frac{f(\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n-x_0}.$$

但 $f'(x_0)=\lambda_n f'(x_0)+(1-\lambda_n)f'(x_0)$, 故

$$\left|\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}-f'(x_0)\right|\le\lambda_n\left|\frac{f(\beta_n)-f(x_0)}{\beta_n-x_0}-f'(x_0)\right|$$
$$+(1-\lambda_n)\left|\frac{f(\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n-x_0}-f'(x_0)\right|\to 0\quad(\text{当}n\to\infty\text{时})$$

例 3.11 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 试证:$\exists\xi\in[a,b]$ 使得

$$|f'(\xi)|\ge\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

证法 用二分法, 作区间套 $\{[a_n,b_n]\}$, 使

$$\left|\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\right|\ge\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

然后令 $n\to\infty$ 取极限, 利用上例结果.

证明 记 $c=\frac{a+b}{2}$ 为 $[a,b]$ 的中点, 又记 $v=|f(b)-f(a)|$. 则

$$v=|f(b)-f(a)|\le|f(b)-f(c)|+|f(c)-f(a)|.$$

于是 $|f(b)-f(c)|$ 与 $|f(c)-f(a)|$ 中至少有一个例如 $f(b)-f(c)|\ge\frac{v}{2}$, 那么相应地取 $a_1=c, b_1=b$. 不然就取 $a_1=a, b_1=c$. 总之,$[a_1,b_1]$ 为 $[a,b]$ 的半区间,$b_1-a_1=\frac{b-a}{2}$, 且

$$\left|\frac{f(b_1)-f(a_1)}{b_1-a_1}\right|\ge\frac{\frac{v}{2}}{\frac{b-a}{2}}=\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

用 $[a_1,b_1]$ 作为 $[a,b]$, 重复上述作法, 可得

$$[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1], b_2-a_2=\frac{b-a}{4},$$

且

$$\left|\frac{f(b_2)-f(a_2)}{b_2-a_2}\right|\ge\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

如此无限进行下去, 我们得到一区间套:

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$$

$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0$ (当 $n\to\infty$ 时), 且恒有

$$\left|\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\right|\ge\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\quad(n=1,2,\cdots)$$

根据区间套定理, $\exists\xi\in[a_n,b_n], n=1,2,\cdots$, 且 $a_n\to\xi, b_n\to\xi$ (当 $n\to\infty$ 时). 于是利用上题结果, 知

$$\left|f'(\xi)\right|=\left|\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\right|\geq\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

第三章复习题

1. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^2e^x\sin x-x\tan x+4\log x$; (2) $y=\frac{x\sin x+\cos x}{x\sin x-\cos x}$;

(3) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sin\sqrt{x}}}$; (4) $y=\arcsin(\sin^2 x)$;

(5) $y=2^x\sec x+(\arctan x^3)^2$; (6) $y=a^{x^a}+a^{a^x}+x^{a^a}$.

2. 求下列函数的导数:

(1) $y=f(e^x)e^{f(x)}$; (2) $y=f(x^2)+f(x+\sin x)$;

(3) $y=\arctan\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$; (4) $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)$.

3. 用对数求导法求下列函数的导数：

(1) $y=\frac{x^2}{1-x}\sqrt{\frac{x+1}{1+x+x^2}}$;

(2) $y=x^{x^x}$.

4. 已知 $\begin{cases}x=\cos^4 t,\\ y=\sin^4 t,\end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}\big|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

5. 设 $x(t),y(t)$ 可微,$r=\sqrt{x^2+y^2}, \theta=\arctan\frac{y}{x}$, 求 $dr, d\theta$.

6. 设曲线既可用参数式 $x=x(t), y=y(t)$ 表示, 又可用极坐标 $r=r(\theta)$ 表示. 求证：$(dx)^2+(dy)^2=(rd\theta)^2+(dr)^2$.

7. 求证心脏线 $r=a(1-cos\theta)(a>0)$ 的向径与切线间的夹角等于向径极角的一半.

8. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^3\cos x$, 求 $y^{(30)}(x)$.

(2) $y=\frac{e^x}{x}$, 求 $y^{(10)}(x)$.

(3) $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, 求 $y^{(10)}(x)$.

(4) $y=\frac{x^2}{1-x}$, 求 $y^{(8)}(x)$.

9. 求下列函数的 n 阶导数：

(1) $y=\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$; (2) $y=\cos^4 x$.

(3) $y=e^x\cos x$; (4) $e^x\sin x$.

10. 设 $y=\arcsin x$, 证明 $(1-x^2)y^{(n+2)}(x)-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}(x)=0\ (n\geq 0)$, 并求 $y^{(n)}(0)$.

11. 设 $y=(arcsinx)^2$.

(1) 求证：$(1-x^2)y''-xy'=2$; (2) 求 $y^{(n)}(0)$.

12. 设 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$, 求 $y^{(n)}(0)$.

13. 设 $f(x)$ 为可导函数, 证明: 若 $x=1$ 时, 有 $\frac{d}{dx}f(x^2)=\frac{d}{dx}f^2(x)$, 则必有 $f'(1)=0$ 或 $f(1)=1$.

14. 设 $f(x)=\sqrt{\frac{(1+x)\sqrt{x}}{e^{x-1}}}+\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$ 求 $f'(1)$.

15. 已知 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数, 它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)\ \ (x\to 0),$$

且 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程.

16. 若函数 $\psi(x)=\frac{f(x)-f(a)}{f'(a)}[1+\frac{f(x)-f(a)}{(f'(a))^2}(f'(a)-\frac{1}{2}f''(a))]$, 求 $\psi'(a),\psi''(a)$.

17. 已知 $f(x)=(x-a)^2\phi(x)$, 其中 $\phi'(x)$ 在点 $x=a$ 的某邻域内连续, 求 $f''(a)$.

18. 设函数 $f(x)$ 在点 a 处连续, 且 $|f(x)|$ 在 a 处可导, 证明: $f(x)$ 在 a 处也可导.

19. 设

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ \ln(1+x^2), & x\geq 0,\end{cases}$$

求 $f'(x)$.

20. 对于函数 $f(x)=|\sin x|^3, x\in(-1,1)$

(1) 证明: $f'''(x)$ 不存在;

(2) 说明点 $x=0$ 是不是 $f'''(x)$ 的可去间断点.

21. 求出函数

$$f(x)=\begin{cases}x^{\frac{4}{3}}\cos(x^{-\frac{1}{3}}), & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

的导函数 $f'(x)$, 讨论 $f'(x)$ 的连续性.

22. 设 $f\in C^2(R)$, 且 $f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\geq 0,\forall x\in R,\forall h>0$, 证明: $\forall x\in R,f''(x)\geq 0$.

23. 设函数 $f(x)$ 连续,$f'(0)$ 存在, 并且对于任何的 $x,y\in R$, 有

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}$$

(1) 证明:$f(x)$ 在 R 上可微;

(2) 若 $f'(0)=\frac{1}{2}$, 求 $f(x)$.

24. 设 $f(x)\in C[a,b],f'(a)$ 存在, 并设 η 满足 $f'(a)>\eta>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 求证：$\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}=\eta$.

25. 设 f 是定义在 R 上的函数, 且对任何 $x_1,x_2\in R$, 都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$, 且 $f'(0)=1$, 证明对任何 $x\in R$ 都有 $f'(x)=f(x)$.

26. 设 $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$. 求证：

(1) $P_n(x)$ 的最高次项系数为 $\frac{(2n)!}{2^n(n!)2}$;

(2) $P_n(1)=1,P_n(-1)=(-1)^n$;

(3) $(x^2-1)P_n''(x)+2xP_n'(x)-n(n+1)P_n(x)=0$.

第四章 微分学的中值定理及其应用

§ 4.1 中值定理

§ 4.1.1 费尔马 (Fermat) 定理

定义 4.1.1 设函数 $f : [a,b] \longrightarrow R$. 如果对点 $x_0 \in (a,b)$ 存在 $\delta > 0$ 使得 $\Delta = (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset [a,b]$ 并且当 $x \in \Delta$ 时 $f(x) \le f(x_0)$, 即 $f(x_0)$ 是 f 在 Δ 上的最大值, 那么称 $f(x_0)$ 是 f 在 $[a,b]$ 上的一个极大值,x_0 称为 f 的一个极大值点.

类似的可以定义 f 在 $[a,b]$ 上的极小值和极小值点.

极小值和极大值统称为极值, 而极小值点和极大值点统称为极值点.

定理 4.1.1(Fermat) 若函数 f 在其极值点 $x_0 \in (a,b)$ 处可导, 则必有 $f'(x_0) = 0$.

证明 若 f 在 x_0 取极小值点, 则 $f(x) \le f(x_0)$. $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$, 而 $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$, 故 $f'(x_0) = 0$.

定义 4.1.2 满足 $x_0 \in (a,b)$ 且 $f'(x_0) = 0$ 的点 x_0 称为函数 f 的一个驻点.

注：可导的极值点是驻点, 但反之未必.

§ 4.1.2 拉格朗日 (Lagrange) 中值定理

定理 4.1.2(Rolle) 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a) = f(b)$, 那么存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

证明 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可取最大值 M 与最小值 m.

(1) 若 $m = M$, 则 $\forall x \in [a,b], m \le f(x) \le M$, $f(x) = m = M$ 为常数, 此时 $\forall \xi \in (a,b)$, 有 $f'(\xi) = 0$.

(2) 设 $m < M$, 由于 $f(a) = f(b)$, 从而至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使 $f(x)$ 在点 ξ 取得 M 或 m. 显然 ξ 为 $f(x)$ 在 (a,b) 极值点, 再由 $f(x)$ 在 $\xi \in (a,b)$ 可导及费尔马定理知 $f'(\xi) = 0$.

几何意义: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使 $f(x)$ 在点 ξ 的切线与 x 轴平行, 或与端点连线平行.

例 4.1.1 考察 $2n$ 次多项式 $Q(x) = x^n(1-x)^n, n \in N$. 求证:$Q(x)$ 在 $(0,1)$ 之内无实零点.

证明 显然 $Q(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 在 $(0,1)$ 可导且 $Q(0) = Q(1) = 1$. 若 $Q(x)$ 在 $(0,1)$ 内有实零点 x_0, 由 Rolle 中值定理知存在 $\xi_1 \in (0,x_0)$ 及 $\xi_2 \in (x_0,1)$ 使 $Q'(\xi_1) = Q'(\xi_2) = 0$. 但若

$$Q'(x) = nx^{n-1}(1-x)^{n-1}(1-2x) = 0, \quad x \in (0,1),$$

则 $x = \frac{1}{2}$, 从而 $\xi_1 = \xi_2 = \frac{1}{2}$ 矛盾, 故 $Q(x)$ 在 $(0,1)$ 之内无实零点.

定理 4.1.3 设 f 与 λ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 并且 $\lambda(a) = 1, \lambda(b) = 0$, 则必存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi) = \lambda'(\xi)(f(a)-f(b))$.

证明：(将 ξ 改为 x, 两边积分, 有时先变形). 令 $F(x) = f(x) - \lambda(x)(f(a)-f(b))$, 由 $f(x)$ 与 $\lambda(x)$ 的条件知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 可导. 由

$$F(a) = f(a) - \lambda(a)(f(a)-f(b)) = f(b), \quad F(b) = f(b) - \lambda(b)(f(a)-f(b)) = f(b)$$

知 $F(a) = F(b)$, 由 Rolle 中值定理, 存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$f'(\xi) = \lambda'(\xi)(f(a)-f(b)).$$

定理 4.1.4(Lagrange) 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 则存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

证明 方法 1: 在定理 4.1.3 中取 $\lambda(x) = \dfrac{b-x}{b-a}$ 即得.

方法 2: 令 $F(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$, 显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 可导且 $F(a) = F(b) = 0$, 由 Rolle 中值定理, 存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

注 (1) 几何意义: $y = f(x)$ 上一定存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使 $f(x)$ 在点 ξ 的切线与端点连线平行.

(2) 若 $f(a) = f(b)$, 此时 Lagrange 中值定理即为 Rolle 中值定理.

推论 4.1.1 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 则 f 在 $[a,b]$ 上为常数的充要条件是 $f' = 0$ 在 (a,b) 内成立.

证明 若 f 在 $[a,b]$ 上为常数, 设 $f(x) = c$, 显然 $\forall \xi \in (a,b)$, $f'(\xi) = 0$. 反过来, 若 $\forall \xi \in (a,b), f'(\xi) = 0$. 将 $f(x)$ 在 $[a,x]$ 上用 Lagrange 中值定理存在 $\xi \in (a,x)$, $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) = 0$, $f(x) = f(a) = const$.

定理 4.1.5(Cauchy) 设 f 和 g 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且当 $x \in (a,b)$ 时, $g'(x) \neq 0$, 这时必存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证明 在定理 4.1.3 中取 $\lambda(x) = \dfrac{g(b)-g(x)}{g(b)-g(a)}$ 即得.

在一元函数微分学中,Rolle 定理,Lagrange 定理,Cauchy 定理统称为中值定理, 前一个是后一个的特例.

例 4.1.2 证明 $\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

证明 $\forall \varepsilon > 0, \forall x_1, x_2 \in (-\infty,+\infty)$, 不妨设 $x_1 < x_2$. 由于 $f(x) = \arctan x$ 在 $[x_1,x_2]$ 连续且可导, 于是由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (x_1,x_2)$ 满足 $f(x_2)-f(x_1) = f'(\xi)(x_2-x_1)$. 而 $f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$, 所以

$$|f(x_2)-f(x_1)| = \frac{1}{1+\xi^2}|x_2-x_1| \leq |x_2-x_1|.$$

对 $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon$, $\forall x_1, x_2 \in (-\infty,+\infty)$, 当 $|x_2-x_1| < \delta$ 时, $|f(x_2)-f(x_1)| < \varepsilon$, 故 $f(x) = \arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

例 4.1.3 设 $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, 求证：$\dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha} < \tan\beta - \tan\alpha < \dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}$.

证明 令 $f(x) = \tan x, x \in [\alpha,\beta] \subset (0,\frac{\pi}{2})$. 将 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 用 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (\alpha,\beta)$, $f(\beta) - f(\alpha) = f'(\xi)(\beta-\alpha)$. 而

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} < f'(\xi) = \sec^2\xi = \frac{1}{\cos^2\xi} < \frac{1}{\cos^2\beta},$$

所以

$$\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha} < \tan\beta - \tan\alpha < \frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}.$$

例 4.1.4 证明：当 $x\in(-\infty,1)$ 时 $\arctan\dfrac{1+x}{1-x}=\arctan x+\dfrac{\pi}{4}$.

证明 令 $F(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}-\arctan x$, 则

$$F'(x)=\frac{1}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2}\frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x^2}=0,$$

所以

$$F(x)=const=F(0)=\arctan 1-0=\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},$$

即

$$\arctan\frac{1+x}{1-x}=\arctan x+\frac{\pi}{4}.$$

例 4.1.5 讨论二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$, 求出点 ξ, 使得等式

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(\xi),x\neq y$$

成立.

解 不妨设 $x>y$. 将 $f(x)$ 在 $[y,x]$ 上用 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi\in(y,x)$ 满足

$$f(x)-f(y)=f'(\xi)(x-y).$$

而 $f'(\xi)=2a\xi+b$, 所以

$$ax^2+bx+c-(ay^2+by+c)=(2a\xi+b)(x-y),$$

$$a(x-y)(x+y)+b(x-y)=(2a\xi+b)(x-y),$$

$$a(x+y)+b=2a\xi+b,\xi=\frac{x+y}{2}.$$

例 4.1.6 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微. 试证: $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续的充要条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致可微. 即: $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $0<|h|<\delta$ 时, 有

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\varepsilon$$

对一切 $x\in[a,b]$ 成立.

证明 必要性: 因 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 因此一致连续, 即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $x',x''\in[a,b]$, $|x'-x''|<\delta$ 时, 便有 $|f'(x')-f'(x'')|<\varepsilon$. 由此 $0<|h|<\delta$ 时, 任何 $x\in[a,b]$, 有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|\\&=|f'(\xi)-f'(x)|\quad(\xi\text{在}x\text{与}x+h\text{之间})\\&<\varepsilon.\quad(\text{因为}|\xi-x|<h<\delta)\end{aligned}$$

充分性: 已知 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $0<|h|<\delta$ 时,

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\varepsilon,\quad (\forall x\in[a,b]).$$

因此, $\forall x_0\in[a,b], 0<|h|<\delta$ 时, 只要 $x_0+h\in[a,b]$, 便有

$$\begin{aligned}
&|f'(x_0+h)-f'(x_0)|\\
=&\left|f'(x_0+h)-\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right|\\
\le&\left|f'(x_0+h)-\frac{f(x_0+h-h)-f(x_0+h)}{-h}\right|\\
+&\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right|<2\varepsilon.
\end{aligned}$$

所以 $f'(x)$ 在 x_0 处连续. 由 x_0 的任意性, 知 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

例 4.1.7 设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 并且 $f(0)=0, f(1)=1$, 又设 $k_1,\cdots,k_n$ 是任意的 n 个正数. 求证：在 $(0,1)$ 中存在 n 个互不相同的数 $t_1,\cdots,t_n$, 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{k_i}{f'(t_i)}=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i$.

证明 对 $i=1,2,\cdots,n$, 令 $y_i=\frac{k_1+k_2+\cdots+k_i}{k}$, 其中 $k=k_1+k_2+\cdots+k_i$. 显然

$$0=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{n-1}<y_n=1.$$

$f(0)=0, f(1)=1$, 由介值定理, $\exists x_1\in(0,1), f(x_1)=y_1$; 将 $f(x)$ 在 $[x_1,1]$ 内用由介值定理,$\exists x_2\in(x_1,1)\subset(0,1), f(x_2)=y_2$; 以此继续下去,$\exists x_i\in(0,1), 0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$ 满足 $f(x_i)=y_i\ (1\le i\le n)$. 将 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]\ (1\le i\le n, x_0=0)$ 上用 Lagrange 中值定理,$\exists t_i\in(x_{i-1},x_i)$ 满足

$$y_i-y_{i-1}=f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(t_i)(x_i-x_{i-1}).$$

由此

$$\frac{y_i-y_{i-1}}{f'(t_i)}=x_i-x_{i-1},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{k_1+k_2+\cdots+k_i}{k}-\frac{k_1+k_2+\cdots+k_{i-1}}{k}\right)\frac{1}{f'(t_i)}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=x_n-x_0=1,$$

即 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{k_i}{k}\frac{1}{f'(t_i)}=1$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{k_i}{f'(t_i)}=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i$. 显然 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 互不相等.

习题 4.1

1. 证明: $3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi, x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

2. 证明下列不等式：

(1) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|, x,y\in R$;

(2) $\frac{a-b}{a} < \log(\frac{a}{b}) < \frac{a-b}{b}$, 其中 $0 < b < a$;
(3) $\frac{a-b}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} < \arctan a - \arctan b < a - b$, 其中 $0 < b < a$;
(4) $py^{p-1}(x-y) \le x^p - y^p \le px^{x-1}(x-y)$, 其中 $0 < y < x$ 且 $p > 1$.
(6) $x(x - \arctan x) > 0$, 当 $x \neq 0$ 时;
(7) $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$, 当 $x > 0$ 时;
(8) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$, 当 $x > 0$ 时;
(9) $\log(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}$, 当 $x > 0$ 时.
(10) 当 $a > \ln 2 - 1$ 时, $x^2 - 2ax + 1 < e^x (x > 0)$.
(11) $(\frac{\sin x}{x})^3 \ge \cos x \ (0 < |x| < \frac{\pi}{2})$.
(12) 设 n 为自然数, $0 < x < 1$, 则 $x^n(1-x) < \frac{1}{ne}$.
(13) $\frac{\ln x}{x-1} \le \frac{1}{\sqrt{x}} (x > 0, x \neq 1)$.
(14) 当 $x < 0$ 时, $\frac{1}{x} + \frac{1}{\ln(1-x)} < 1$.
(15) 设 $0 < x < y < 1$ 或 $1 < x < y$, 则 $\frac{y}{x} > \frac{y^x}{x^y}$.
(16) 当 $x > 0$ 且 $x \neq 1$ 时, 有 $(1-x)(x^2 e^{1/x} - e^x) \ge 0$.

2. 比较 π^e 与 e^π 的大小, 并说明理由.

3. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调下降, 可微, 如果当 $x \in (0,+\infty)$ 时,$0 < f(x) < |f'(x)|$ 成立, 则当 $0 < x < 1$ 时, 必有 $xf(x) > \frac{1}{x} f(\frac{1}{x})$.

4. 设 a, b, c 为三个实数, 证明：方程 $e^x = ax^2 + bx + c$ 的根不超过三个.

5. 证明对任意实数 c, 方程 $x^3 - 3x + c = 0$ 在 $[0,1]$ 上无相异根.

6、如果三阶可导的函数 f 是微分方程 $y'' + y = 0$ 的一个解, 证明: $f^2 + (f')^2$ 是常值函数.

7. 设函数 f 在 $[0,1]$ 上有 3 阶导函数, 且 $f(0) = f(1) = 0$. 设 $F(x) = x^2 f(x)$, 求证：：存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $F'''(\xi) = 0$.

8. 求证 $f(x) = \sqrt{x}\ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内除仅有的一个点外都可导, 求证：$\exists c_1, c_2 \in (a,b)$ 及 $\theta \in (0,1)$, 使得 $f(b) - f(a) = (b-a)[\theta f'(c_1) + (1-\theta) f'(c_2)]$.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续可导, 且在 $(0,3)$ 内 $f(0) + f(1) + f(2) = 3, f(3) = 1$, 求证：$\exists \xi \in (0,3)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

11. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $[0,1]$ 内可导,$f(0) = 0$, 求证：如果 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上不恒为零, 则存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) \cdot f'(\xi) > 0$.

提示: 若 $\forall x \in (0,1), f(x)f'(x) \le 0$, 则 $[f^2(x)]' \le 0, f^2(x) \le f^2(0) = 0, f^2(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$ 矛盾.

12. 设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内二次可导,$f(a) = f(b) = 0$, 且存在 $c \in (a,b)$ 使 $f(c) > 0$. 证明：存在 $\xi \in (a,b)$, 使 $f''(\xi) < 0$.

提示：精解 P209 416.

13. 设函数 f 在 R 上有 n 阶导数, 又 p 是一个 n 次多项式, 最高次项系数为 a_0. 如果有互不相同的 x_i 使得 $f(x_i) = p(x_i) (i = 0, 1, \cdots, n)$, 求证：存在 ξ, 满足 $a_0 = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$.

§ 4.2 泰勒公式

设函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导或可微, 于是按定义有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

这表明 $f(x)$ 在点 x_0 附近, 可用一次多项式近似表达 $f(x)$, 而误差是高于一阶的无穷小量. 从几何上看, 这就是用曲线的过点 x_0 的切线来近似曲线. 从指导思想上看, 这种逼近就是使在点 x_0, 函数值与一阶导数值都与原函数的相应值相等. 无论是理论证明还是实际计算中, 许多情况下使用这种逼近是不够的, 这就需要寻求并建立更准确的逼近. 自然想到用高次多项式去逼近, 并使多项式在点的函数及直到 n 阶导数的值都与原来函数的对应值相等. 这正是本节所要介绍的泰勒 (Taylor) 公式.

泰勒 (Taylor) 公式

定理 4.2.1 设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点有直到 n 阶的导数, 那么

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x),$$

这就是函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近关于 $(x - x_0)$ 的幂级数展开式, 也叫泰勒公式. 其中 $R_n(x - x_0) = o((x - x_0)^n)$ 叫做皮亚诺 (Peano) 余项.

证明 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点有直到 n 阶的导数, 当然要求 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 的某邻域 $O(x_0, \delta)$ 内有直到 $n - 1$ 阶的导数, 从而 $f(x)$ 在 $O(x_0, \delta)$ 内有直到 $n - 2$ 阶的连续导数且

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i,$$

$$R^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - \sum_{i=k}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} i(i-1)\cdots(i-k+1)(x - x_0)^{i-k}.$$

令 $x = x_0$, 则 $R^{(k)}(x_0) = 0,\ \ (k = 0, 1, \cdots, n - 1)$. 于是连续应用 $n - 1$ 次洛必达法则得

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \to x_0} \frac{R_n'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \cdots \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} \\
&= \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^{(n)}(x_0) \right) = 0.
\end{aligned}$$

故 $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$.

定理 4.2.2 设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点某邻域 $O(x_0, \delta)$ 内有直到 $n + 1$ 阶的导数, 那么

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$,$\xi$ 在 x_0 与 x 之间. 这就是函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近关于 $(x-x_0)$ 的幂级数展开式, 也叫泰勒公式, 式中 $R_n(x)$ 叫做拉格朗日余项.

证明 做辅出函数

$$\phi(t)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,$$

于是 $\phi(t)$ 在 $[x_0,x]$ 或 $[x,x_0]$ 上连续, 在 (x_0,x) 或 (x,x_0) 上可导且有 $\phi(x_0)=R_n(x),\phi(x)=0$,

$$\begin{aligned}\phi'(t)&=f'(t)-\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k-f^{(k)}(t)k(x-t)^{k-1}\right]\\&=-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\\&=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.\end{aligned}$$

再令 $\psi(t)=(x-t)^{(n+1)}$, 于是 $\psi(x_0)=(x-x_0)^{n+1},\psi(x)=0$. 用 Cauchy 中值定理存在 ξ 介于 x 与 x_0 之间, 使得

$$\begin{aligned}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}&=\frac{\phi(x_0)-\phi(x)}{\psi(x_0)-\psi(x)}=\frac{\phi'(\xi)}{\psi'(\xi)}\\&=\frac{-\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{-(n+1)(x-\xi)^n}=\frac{f^{(n+1)(\xi)}}{(n+1)!},\end{aligned}$$

由此得到公式.

在 $x=x_0=0$ 处的两种余项的泰勒公式分别化为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n),$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\quad(0<\theta<1).$$

这两个公式称为麦克劳林 (Maclaurin) 公式.

例 4.2.1 求 $\sin x,\cos x,e^x$ 的麦克劳林展开式.

解 $\sin^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$,

$$\sin^{(n)}(0)=\sin(\frac{n\pi}{2})=\begin{cases}(-)^{k-1}, n=2k-1,\\0\qquad\qquad n=2k.\end{cases}$$

$$\sin x=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{(2k-1)}+\frac{(-1)^n\sin\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

其中 $0<\theta<1,-\infty<x<+\infty$.

同样可求出

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}\cos\theta x}{(2n+2)!} x^{2n+2},$$

其中 $0 < \theta < 1, -\infty < x < +\infty$.

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k)!} x^k + \frac{e\theta x}{(n+1)!} x^{n+1},$$

其中 $0 < \theta < 1, -\infty < x < +\infty$.

例 4.2.2 求函数 $(1+x)^\alpha$ (α 为任何实数) 及 $\ln(1+x)$ 关于 $x = 0$ 的泰勒展开式.

解 设 $f(x) = (1+x)^\alpha$, 则

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}.$$

所以 $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$. 由此

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{(k)!} x^k + \frac{(\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

其中 $0 < \theta < 1, -1 < x < +\infty$.

设 $g(x) = \ln(1+x)$, 则当 $-1 < x < +\infty$ 时

$$g^{(k)}(x) = (g'(x))^{(k-1)} = \left((1+x)^{-1}\right)^{(k-1)} = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

所以 $g^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$, 因此

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},$$

其中 $0 < \theta < 1, -1 < x < +\infty$.

例 4.2.3 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{\sin x^3}$.

解 因为

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^4), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4),$$

所以

$$e^x \sin x - x(1+x) = (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^4))(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)) - x(1+x) = \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

又 $x \to 0$ 时 $\sin x \sim x$, 所以

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{\sin x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

例 4.2.4 设函数 f 在区间 $[0,2]$ 上二阶可导, 且在 $[0,2]$ 上有

$$|f(x)| \le 1, \quad |f''(x)| \le 1.$$

求证在 $[0,2]$ 上有 $|f'(x)| \le 2$.

证 任取 $x \in [0,2]$, 由泰勒公式

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(0-x)^2,$$

$$f(2) = f(x) + f'(x)(2-x) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(2-x)^2,$$

其中 $\xi_1 \in (0,x), \xi_2 \in (x,2)$. 上面两式相减得到

$$2f'(x) = f(2) - f(0) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}x^2 - \frac{f''(\xi_2)}{2!}(2-x)^2.$$

于是当 $x \in [0,2]$ 时, 有

$$\begin{aligned} 2|f'(x)| &\le |f(2)| + |f(0)| + \tfrac{|f''(\xi_1)|}{2}x^2 + \tfrac{|f''(\xi_2)|}{2}(2-x)^2 \\ &\le 2 + \tfrac{1}{2}[x^2 + (2-x)^2] \\ &= 3 + (1-x)^2 \le 3 + 1 = 4, \end{aligned}$$

即有

$$|f'(x)| \le 2.$$

习题 4.2

1. 求函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+2x-3}$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式.
2. 利用泰勒公式求极限

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}.$$

答案：$-\frac{1}{12}$

3. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数,$f'(a) = f'(b) = 0$, 试证: $\exists \xi \in (a,b)$ 使得

$$|f''(\xi)| \ge \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|.$$

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数, 且满足 $f(1) = f(0)$ 及 $|f''(x)| \le M(x \in [0,1])$. 试证: 对一切 $x \in [0,1]$ 有 $|f'(x)| \le \frac{M}{2}$.

§ 4.3 利用导数研究函数

§ 4.3.1 单调性

定理 4.3.1 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 那么 f 在 $[a,b]$ 上递增（减）的充分必要条件是 $f' \geq 0(\leq 0)$ 在区间 (a,b) 内成立.

证明 必要性: 不妨设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增. $\forall x \in (a,b)$,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0.$$

充分性: 假设 $\forall x \in (a,b), f'(x) \geq 0$. $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, 不妨设 $x_1 < x_2$. 显然 $[x_1,x_2] \subset [a,b]$. 将 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上利用拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in [x_1,x_2]$ 满足

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0,$$

所以 f 在 $[a,b]$ 上递增. 对于递减情形同样可证明.

定理 4.3.2 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 如果 $f' > 0(< 0)$ 在区间 (a,b) 内成立, 那么 f 在 $[a,b]$ 上是严格递增（严格递减）的.

证明 $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, 不妨设 $x_1 < x_2$. 显然 $[x_1,x_2] \subset [a,b]$. 将 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上利用拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in [x_1,x_2]$ 满足 $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, 而有条件 $f'(\xi) > 0$, 所以 $f(x_2) - f(x_1) > 0, f(x_2) > f(x_1)$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递增. 同样可证明若 $f'(x) < 0$ 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递减.

注： 该定理的逆命题不成立, 如 $f(x) = x^3$ 在 $[-\infty, +\infty]$ 上是严格递增的, 但 $f'(0) = 0$.

定理 4.3.3 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内除了有限个点之外, 有正（负）的导数, 那么 f 在 $[a,b]$ 上是严格递增（严格递减）的.

证明 设 $c \in (a,b), f'(c) = 0$ 而在 (a,c) 与 (c,b) 上 $f'(x) > 0(< 0)$. 由定理 4.3.2, f 在 $[a,c]$ 及 $[c,b]$ 都是严格递增（严格递减）的, 从而在 $[a,b]$ 上是严格递增（严格递减）. 对于开区间 (a,b) 内除了有限个点之外, 有正（负）的导数情形, 证明方法完全相同.

定理 4.3.4 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 那么 f 在 $[a,b]$ 上严格递增（严格递减）的充分必要条件是 (1) 当 $x \in (a,b)$ 时；$f' \geq 0(\leq 0)$; (2) 在 (a,b) 的任何开子区间内,$f' \not\equiv 0$.

证明 必要性: 不妨设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递增, 由定理 4.3.1 知 $f'(x) \geq 0$, (1) 成立.

假设条件 (2) 不成立, 则存在一开区间 $(\alpha,\beta) \subset [a,b]$ 满足 $f'(x) \equiv 0$, 从而 $f(x) \equiv C, x \in (\alpha,\beta)$. 这与 f 在 $[a,b]$ 上严格递增矛盾, 故 (2) 成立.

充分性: 若 (1),(2) 都成立, 由 (1) 知 f 在 $[a,b]$ 上递增, 从而 $\forall x_1, x_2 \in [a,b], x_1 < x_2, f(x_1) \leq f(x_2)$.

下证明 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 否则 $f(x_1) = f(x_2)$, $\forall x \in (x_1,x_2)$ 即 $x_1 < x < x_2$, 所以 $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ 从而 $f(x) = f(x_1) = f(x_2) = const$, 故在 (x_1,x_2) 内 $f'(x) \equiv 0$ 与条件 (2) 矛盾, 从而 $f(x_1) < f(x_2)$, 故 f 在 $[a,b]$ 上严格递增.

例 4.3.1 证明方程 $x - \dfrac{1}{2}\sin x = 0$ 只有一个根 $x = 0$.

证明 令 $f(x) = x - \dfrac{1}{2}\sin x$, 则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos x > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调递增. 显然 $x = 0$ 是 $f(x) = 0$ 的根, 故 $x - \dfrac{1}{2}\sin x = 0$ 只有一个根 $x = 0$.

例 4.3.2 求 $y = 3x - x^3$ 的单调区间.

解 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$. $y' = 3 - 3x^2$, 令 $y' = 0$, 则 $x = \pm 1$.

当 $-\infty < x < -1$ 或 $1 < x < +\infty$ 时, $y' < 0$; 当 $-1 < x < 1$ 时, $y' > 0$.

故 $y = 3x - x^3$ 在的单调减区间为 $-\infty < x < -1$ 或 $1 < x < +\infty$, 单调增区间为 $-1 \le x \le 1$.

例 4.3.3 证明 $x > 0$ 时 $\sin x > x - \dfrac{x^3}{3!}$.

证明 令 $f(x) = \sin x - (x - \dfrac{x^3}{3!})$.

$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2},\quad f''(x) = -\sin x + x,\quad f'''(x) = -\cos x + 1.$$

由 $f'''(x) \ge 0$ 且在任何开区间内不恒为零, 由定理 4.3.4 知 $x > 0$ 时 $f''(x)$ 严格单调递增, 从而 $x > 0$ 时 $f''(x) > f''(0) = 0$.

由定理 4.3.2 知 $x > 0$ 时 $f'(x)$ 严格单调递增，从而 $f'(x) > f'(0) = 0$, 同理 $f(x) > f(0) = 0$, 故 $x > 0$ 时 $\sin x > x - \dfrac{x^3}{3!}$.

例 4.3.4 设 $n = 0, 1, 2, \cdots$, 求证：$e^x > 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$ 对 $x > 0$ 成立.

证明 当 $n = 0$ 时, 由 $x > 0$ 知 $e^x > e^0 = 1$, 不等式成立.

设 $n = k$ 时成立,

$$e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!}.$$

当 $n = k + 1$ 时, 令

$$f(x) = e^x - (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!},$$

则

$$f'(x) = e^x - (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} > 0,$$

由此 $f(x)$ 在 $x > 0$ 时严格单调递增, $x > 0$ 时, $f(x) > f(0) = 0$, 故

$$e^x > (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}.$$

由归纳假设证毕.

例 4.3.5 求证：当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时, $\dfrac{2}{\pi} < \dfrac{\sin x}{x} < 1$.

证明 设 $f(x) = \sin x - \frac{2x}{\pi}$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 则 $f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$.

令 $f'(x) = 0$ 则 $x = \arccos\frac{2}{\pi}$.

当 $x \in (0, \arccos\frac{2}{\pi})$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, \arccos\frac{2}{\pi})$ 内严格单调递增, $f(x) > f(0) = 0$;

当 $x \in (\arccos\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2})$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(\arccos\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2})$ 内严格单调递减,$f(x) > f(\frac{\pi}{2}) = 0$.

所以 $f(x) > 0$, 即 $\sin x > \frac{2x}{\pi}$, $\dfrac{2}{\pi} < \dfrac{\sin x}{x}$.

同理可证 $\dfrac{\sin x}{x} < 1$.

§ 4.3.2 极值与最值

由 Fermat 定理知: 可导的极值点是驻点, 但极值点也可能是不可导点, 如 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 不可导, 但 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极小值点.

定理 4.3.5 设函数 f 在 $[a, b]$ 上连续,$x_0 \in (a, b)$, 如果存在正数 $\delta > 0$, 使得

(1) 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内 $f' > 0$, 而在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内 $f' < 0$, 那么 $f(x_0)$ 是 f 的一个严格极大值, 所谓“严格极大值”是指：当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) < f(x_0)$;

(2) 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内 $f' < 0$, 而在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内 $f' > 0$, 那么 $f(x_0)$ 是 f 的一个严格极小值, 所谓“严格极小值”是指：当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) > f(x_0)$;

(3) 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 与 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内 f' 同号, 那么 $f(x_0)$ 不是 f 的极值.

注：该定理适合 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$. 可画图说明可不要求 $f(x)$ 在 x_0 可导.

证明 (1) 由条件 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 严格单调递增, $f(x) < f(x_0)$; $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 内 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 严格单调递增, $f(x) < f(x_0)$, 所以当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) < f(x_0)$, $f(x_0)$ 是 f 的一个严格极大值. 同理可证明 (2) 与 (3).

定理 4.3.6 设 f 在 $[a, b]$ 上连续, x_0 是 f 的一个驻点. 进一步, 设 $f''(x_0)$ 存在, 那么

(1) 当 $f''(x_0) < 0$ 时 $f(x_0)$ 是 f 的一个严格极大值;

(2) 当 $f''(x_0) > 0$ 时 $f(x_0)$ 是 f 的一个严格极小值.

证明 (1) 若 $f''(x_0) < 0$ 则 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$, $\exists \delta > 0, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$, $\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$. 而 $f'(x_0) = 0$, 所以 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, $f'(x) > 0$; $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) < 0$. 由定理 4.3.5 知 $f(x_0)$ 是 f 的一个严格极大值.

同理可证明 (2).

应当看到, 以上两个定理都只是判断严格极值的充分条件. 有这样的情形, 存在着这样的函数 f, 在它的某个极值点的任何一侧, 都不具有单调的性质. 考察函数

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} + |x|, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

它是一个处处连续的偶函数, $f(0)$ 是它的一个极小值, 但是当 $x > 0$ 时 $f'(x) = \sin \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} \cos \dfrac{1}{x} + 1$, $f'(\dfrac{1}{n\pi}) = 1 + (-1)^{n+1} n\pi$ 交替改变符号, 因此对任意的 $\delta > 0$, 函数 f 在 $(0, \delta)$ 上都不是单调的；在 $(-\delta, 0)$ 上也不是单调的.

例 4.3.6 讨论 $y = (x - 1)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值.

解 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$. $y' = \frac{5x - 2}{3\sqrt[3]{x}}$, y 在 $x = 0$ 不可导.

令 $y' = 0$ 则 $5x - 2 = 0, x = \frac{2}{5}$. 用不可导点及驻点将定义域分为若干区间

$$(-\infty, 0], (0, \frac{2}{5}), [\frac{2}{5}, +\infty).$$

$x \in (-\infty, 0), y' > 0$; $x \in (0, \frac{2}{5}), y' < 0$; $x \in (\frac{2}{5}, +\infty), y' > 0$. 由此 $x = 0$ 时 y 取极大值 -1; $x = \frac{2}{5}$ 时 y 取极小值 $-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$.

定义 4.3.1 $[a, b]$ 上连续函数的最小值与最大值统称为最值, 而在其上取得最值的点称为最值点.

求最值的方法:

（1）求 (a, b) 内 f 的驻点与不可导点 $x_1, \cdots, x_m$.

（2）比较 $f(x_1), \cdots, f(x_m), f(a), f(b)$ 的大小, 其中最大的一个是最大值, 最小的一个是最大值.

（3）实际问题中, 如果 f 在 (a, b) 的内部驻点只有一个 x_1, 且从实际问题本身又可以知道在 (a, b) 内必定有最小值或最大值, 那么,$f(x_1)$ 就是所要求的最小值或最大值, 不需再算出 $f(a)$ 和 $f(b)$.

例 4.3.7 设 $f(x) = (x-1)(x-2)^2$, 求函数 f 在区间 $[0, \dfrac{5}{2}]$ 上的最小值与最大值.

解 $f'(x) = (x-2)^2 + 2(x-1)(x-2) = (x-2)(3x-4)$.

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = 2, \frac{4}{3}$. 因为

$$f(0) = -4, \ \ f(2) = 0, \ \ f(\frac{4}{3}) = \frac{4}{27}, \ \ f(\frac{5}{2}) = \frac{3}{8}.$$

所以 $\min = f(0) = -4, \ \max = f(\dfrac{5}{2}) = \dfrac{3}{8}$.

例 4.3.8 设有一块边长为 a 的正方形铁皮, 从其各角截去同样的小正方形, 作成一个无盖的方匣, 问截去多少, 方能使作成的匣子之容积最大.

解 设所截小正方形边长为 x, 则方匣容积 $V = x(a-2x)^2$.

$$V'(x) = (a-2x)^2 + 2x(a-2x)(-2) = (a-2x)(a-6x).$$

令 $V'(x) = 0$ 得驻点 $x = \frac{a}{6}$.

由实际意义, 当所截小正方形边长为 $\frac{a}{6}$ 时, 作成的匣子之容积最大.

§ 4.3.3 函数的凸性与作图

定义 4.3.2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 若对 $[a, b]$ 中任意两点 x_1, x_2, 恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

则称 f 在 $[a, b]$ 上是向上凸的, 简称上凸, 有恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

则称 f 在 $[a, b]$ 上是向下凸的, 简称下凸. 有时称下凸为凹.

如果上述定义中等号不成立时, 我们就说 f 在 $[a, b]$ 上是严格上凸的 (或严格下凸的).

定理 4.3.7 设 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上内存在二阶导数 $f''(x)$, 那么

(1) 在 (a, b) 内 $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 为上凸;

(2) 在 (a,b) 内 $f''(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 为下凸.

上凸弧与下凸弧的分界点称为拐点.

证明 $\forall x_1,x_2\in(a,b)$, 令 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，由二阶泰勒公式有

$$f(x_1)-f(x_0)=f'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(x_1-x_0)^2,$$

$$f(x_2)-f(x_0)=f'(x_0)(x_2-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x_2-x_0)^2.$$

两者相加, 若 $f''(x)<0$，则

$$f(x_1)+f(x_2)-2f(x_0)\le f'(x_0)(x_1+x_2-2x_0)=0.$$

从而

$$f(x_0)\ge\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

所以 $f(x)$ 在 (a,b) 为上凸.

同样可证若 $f''(x)>0$, 则

$$f(x_0)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

从而 $f(x)$ 在 (a,b) 为下凸.

函数 $y=f(x)$ 的图像作图步骤

(1) 求 $y=f(x)$ 的定义域;

(2) 求不可导点、驻点以及二阶导数为零的点;

(3) 用 (2) 中的点将定义域分成若干区间, 在每个区间内讨论 $f'(x),f''(x)$ 的符号, 一般可列表表示, 求出单调区间、凹凸区间、极值点、最值点与拐点;

(4) 求渐近线

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$, 水平渐近线 $y=a$.

$\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty$, 垂直渐近线 $x=c$.

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax-b]=0\Longrightarrow a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x},b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$, 斜渐近线 $y=ax+b$;

(5) 适当补充一些点, 描点作图.

例 4.3.9 讨论函数 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$ 的单调性及凸性, 并求它的极值与拐点.

解 首先可以知道, 函数 $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 它的零点为 $x=0$.

对 $f(x)$ 求导,

$$f'(x)=\frac{2(1+x^2)-2x\times 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2},$$

即 $f'(x)$ 有零点 $x=1$ 和 -1.

$f'(x)$ 在 $x=-1$ 的左边和右边的符号分别为负和正, 而在 $x=1$ 的右边和左边的符号分别为正和负, 所以 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 内单调递减, 在 $(-1,1)$ 内单调递增,

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'符号	−	0	+	0	−
y	↘	极小值−1	极大值1	↗	↘

表 1.

$(1,+\infty)$ 内单调递减, $x=-1$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 对应极小值为 -1, $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 对应极大值为 1.

再求 $f(x)$ 的二阶导数,

$$f''(x)=\frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^2},$$

即知零点为 $x=-\sqrt{3},0,\sqrt{3}$. 因为在 $x=-\sqrt{3},\sqrt{3}$ 的左边和右边 $f''(x)$ 的符号分别为负和正, 而在 $x=0$ 的左边和右边 $f''(x)$ 的符号分别为正和负, 所以 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{3}]$ 内上凸, 在 $(-\sqrt{3},0])$ 内下凸, 在 $(0,\sqrt{3})$ 内上凸, 在 $(\sqrt{3},+\infty)$ 下凸, $x=-\sqrt{3},0,\sqrt{3}$ 是 $f(x)$ 的拐点.

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},0)$	$(0,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y''符号	−	+	−	+
y	上凸	下凸	上凸	下凸

表 2.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2}=0$, 水平渐近线为 $y=0$; 无垂直渐近线.

$a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{1+x^2}=0$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2}=0$, 斜渐近线为 $y=ax+b=0$ 即为水平渐近线.

根据这些信息, 再求出若干个特殊点上的函数值, 就不难画出 $y=f(x)$ 的图形了 (图 3).

例 4.3.10 讨论 $y=x+\arctan x$ 的渐近线.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(x+\arctan x)=+\infty$, 无水平渐近线; $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(x+\arctan x)=x_0+\arctan x_0$, 无垂直渐近线.

$a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\arctan x}{x}=1$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x+\arctan x-x)=\pm\frac{\pi}{2}$, 斜渐近线为 $y=x\pm\frac{\pi}{2}$.

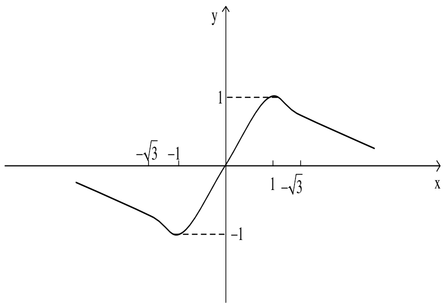

图 3.

例 4.3.11 在 Oxy 坐标系下画出函数 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的大致图形.

解　因为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 是在整个实数域中有定义的偶函数, 我们只要考察 $x \geq 0$ 就可以了.

求 $f(x)$ 的一阶导数和二阶导数, 有

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

和

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1),$$

所以, $f(x)$ 的可能的极值点为 $f'(x)$ 的零点 $x = 0$, 可能的拐点的横坐标为 $f''(x)$ 的零点 $x = 1$.

经检验, $f'(x)$ 在 $x = 0$ 的左边和右边的符号分别为正和负, 所以 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点; 而在的左边和右边的符号也分别为正和负, 所以 $(1, f(x))$ 即 $(1, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}})$ 是 $f(x)$ 的拐点.

这样, 我们便可以得知 $f(x)$ 在 $x \geq 0$ 处的大致变化情况 (表 4):

	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	极大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	单减且凸	拐点 $\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$	单减且凹

表 4.

当 $x \to \infty$ 时,$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \to 0$, 因此 $y = 0$ 即 x 轴是 $y = f(x)$ 的水平渐近线, 容易看出, $y = f(x)$ 不再有其它的渐近线 (图 5).

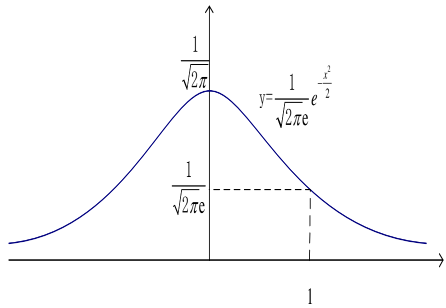

图 5.

利用上面得到的 $f(x)$ 性态, 便不难画出 $y = f(x)$ 在右半平面的图形, 然后利用对称性, 就可以作出整个 $y = f(x)$ 的图形了. 以后学习概率论时会知道, $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 是一个非常重要的函数.

习题 4.3

1. 求证：

(1) 当 $x \geq 0$ 时,$f(x) = \frac{x}{1+x}$ 单调增加;

(2) $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$

2. 求证：对任何 n 次多项式 $P(x)$,$\exists x_0 > 0$, 使得 $P(x)$ 在 $(-\infty, -x_0)$ 和在 $(x_0, +\infty)$ 上都是严格单调的.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且在 (a, b) 内只有一个极大值点和一个极小值点. 求证：极大值必大于极小值.

4. 设 $f(x) \in [a, b]$, 在区间 $[a, b]$ 上只有一个极值点, 求证：如果该点是极大值点必为最大值点, 如果该点是极小值点必为最小值点.

5. 内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 边平行于坐标轴的矩形, 何时面积最大?

6. 体积一定的圆锥形帐篷, 高与底半径之比如何时, 表面积最小?

7. 设 $f(x)$ 在内 (a, b) 二阶可导, 且 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f''(x_0) \neq 0$, 求证：

(1) 如果 $f'(x_0) = 0$, 则存在 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 使得 $f(x_1) - f(x_2) = 0$;

(2) 如果 $f'(x_0) \neq 0$, 则存在 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 使得 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(x_0)$.

8. 设 $a, b > 0, k \in R$, 求证：函数 $f(x) = a^2e^{kx} + b^2e^{-kx}$ 存在与 k 无关的极小值.

9. 设 $f(x), g(x)$ 在 (a, b) 内可导. 且 $f(x) \neq g(x), g(x) \neq 0$, 求证：$\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 (a, b) 内无极值的充要条件是 $\frac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}$ 在 (a, b) 内无极值.

10. (1) 求证：$\{\frac{\ln n}{n}\}_{n=3}^{\infty}$ 为一递减序列;

(2) 求序列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项.

11. 假设 $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. 求证：$f(x)$ 在实轴上有正的最小值.

12. 设 $a > 0, b > 0$, 求证：$f(x) = \sqrt{a + bx^2}$ 为凹函数.

13. 求证：不存在三次或三次以上的奇次多项式为凹函数.

14. 证明: 同一区间上的两个凸函数之和仍是凸函数.

15. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上取正值, 且为凸函数, 求证：$\frac{1}{f(x)}$ 是在 (a,b) 上的凹函数.

16. 判断函数的凹凸性:

(1) $x^{\alpha}x \geq 0, \alpha \geq 1$;

(2) $a^x, a > 0, x \in R$;

(3) $\log(\frac{1}{x}), x > 0$;

(4) $x\log x, x > 0$;

(5) $-\sin x, x \in [0,\pi]$.

17. 设 $f : [a,b] \to R$ 为凸函数, 如果有 $c \in (a,b)$ 使得 $f(a) = f(c) = f(b)$, 求证: f 为常值函数.

18. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二次可微,$f''(x) \geq 0$. 求证：

(1) $\frac{f(x)-f(x-h)}{h} \leq f'(x) \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{h}(0 < h < x)$;

(2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, 则 $\lim\limits_{\to+\infty} f'(x) = 1$.

19. 作出下列函数图形：

(1) $y = x^3 - x^2 - x + 3$, (2) $y = x^4 - 2x + 10$;

(3) $y = x + \frac{1}{x}$, (4) $y = x \cdot e^{-x^2}$;

(5) $y = x \cdot \ln x$; (6) $y = e^{-x^2}$;

(7) $y = \log(1 + x^2)$; (8) $y = x - \ln(1 + x)$;

(9)$y = \frac{x}{1-x}$; (10) $y = x^2e^{-x}$;

(11) $f(x) = |x + 2|e^{-\frac{1}{x}}$.

20. 已知 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 在 $x = 1$ 处有极值 -2, 确定系数 a, b, 并求出 $y = f(x)$ 所有极大、极小、拐点, 并描绘 $y = f(x)$ 的图形.

§4.4 弧微分与曲率

§ 4.4.1 平面曲线的曲率

在生产实践中, 常常需要考虑曲线的弯曲程度. 如厂房结构中的钢梁、车床上的轴等, 它们在外力作用下, 会发生弯曲, 弯曲到一定程度就要断裂. 因此, 在计算梁或轴的强度时, 需要考虑它们弯曲的程度. 我们先来看两条曲线, 如何比较它们的弯曲程度.

假如两曲线线段 AB 和 $A'B'$(图 6 的长度一样, 都是 Δs, 但它们的切线的变化不同, 对第一条曲线说来, 在 A 点有一条切线 τ_A, 我们设想 A 点沿着曲线变动到 B 点, 于是切线也跟着变动, 变为在 B 点的切线 τ_B. τ_A 与 τ_B 之间的夹角 $\Delta\varphi_1$ 就是从 A 到 B 切线方向变化的大小. 同样, 在第二条曲线上, $\Delta\varphi_2$ 是从 A' 到 B' 切线方向变化的大小. 在图上很容易看出 $\Delta\varphi_1 < \Delta\varphi_2$, 它表示第二条曲线段比第一条曲线段弯曲得厉害些, 由此可见, 角度变化 $\Delta\varphi$ 大, 弯度也大.

但是切线方向变化的角度 $\Delta\varphi$ 还不能完全反映曲线的弯曲程度. 如图 7 所示, 两段圆弧 Δs、$\Delta s'$ 的切线方向改变了同一角度 $\Delta\varphi$, 但可明显看出弧长小的一段弯曲大.

从以上的分析, 可见曲线的弯曲程度不仅与其切线方向变化的角度 $\Delta\varphi$ 的大小有关, 而且还与所考察的曲线段的弧长 Δs 有关, 因此, 一段曲线的弯曲程度可以用

$$\overline{K} = \frac{\Delta\phi}{\Delta s}$$

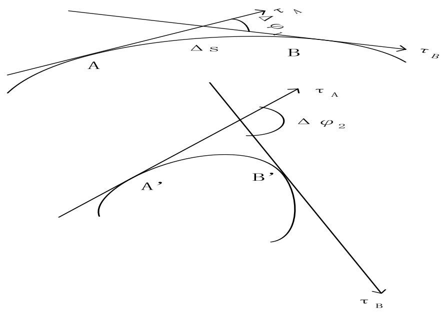

图 6.

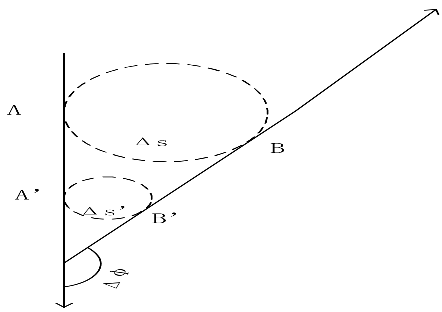

图 7.

来衡量, 如图 8 所示, 其中 $\Delta\varphi$ 表示曲线段 AB 上切线方向变化的角度,Δs 为这一段曲线 AB 的弧长, 我们称

$$\overline{K} = \frac{\Delta\phi}{\Delta s}$$

为曲线段的平均曲率, 它刻划了这一段曲线的平均弯曲程度.

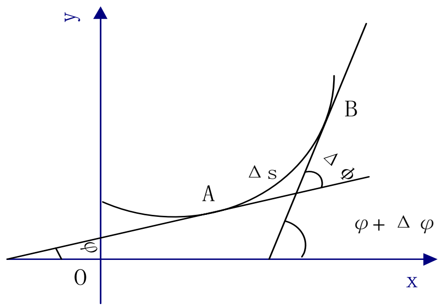

图 8.

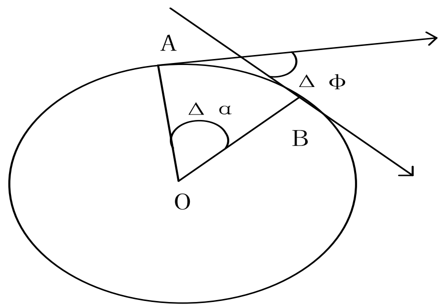

图 9.

对于半径为 R 的圆 (图 9) 来说, 圆周上任意弧段 $\widehat{AB}$ 的切线方向变化的角度 $\Delta\varphi$ 等于半径 OA 和 OB 之间的夹角 $\Delta\alpha$. 又因为 $\widehat{AB} = \Delta s = R\Delta\alpha$, 所以曲线段 $\widehat{AB}$ 的平均曲率为

$$\overline{K} = \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{1}{R}$$

上式说明圆周上的平均曲率 $\overline{K}$ 是一个常数 $\frac{1}{R}$.

对于直线来说, 因沿着它切线方向没有变化, 即 $\Delta\varphi = 0$, 所以

$$\overline{K} = \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = 0$$

这表示直线上任意一段的平均曲率都是零, 或者说“直线不曲”.

对于一般的曲线来说, 如何刻划它在一点 A 处的弯曲程度呢？从图中可以看到, 如果把 Δs 取得小一些,AB 弧段上的平均曲率也就能比较精确地反映出曲线在 A 点

处的弯曲程度. 随着点 B 越来越靠近点 A, 弧长 Δs 越来越小 ($\Delta\varphi$ 与 Δs 是有关系的, 随着 Δs 的缩小, $\Delta\varphi$ 也随之缩小, $\dfrac{\Delta\phi}{\Delta s}$ 也就越来越精确地刻划出在 A 点的弯曲程度 (即 A 点的曲率). 因此, 我们就把极限

$$\lim_{B\to A}\frac{\Delta\phi}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta s}$$

叫做曲线在 A 点的曲率. 这个极限也就是导数 $\dfrac{d\phi}{ds}$, 我们记为

$$K=\left|\frac{d\phi}{ds}\right|$$

曲率 K 刻划了曲线在一点处的弯曲程度. 这里取绝对值是为了使曲率为正数.

§ 4.4.2 弧长的微分

前面指出曲线的曲率 $K=\left|\dfrac{d\phi}{ds}\right|$, 因此要计算曲率, 须要求出 $d\varphi$ 及 ds, 这里的 ds 称为曲线弧长的微分, 它不仅在计算曲率时要用到, 在别的场合（如曲线积分）也要用到. 这里先借助几何的直观来讨论弧长的微分.

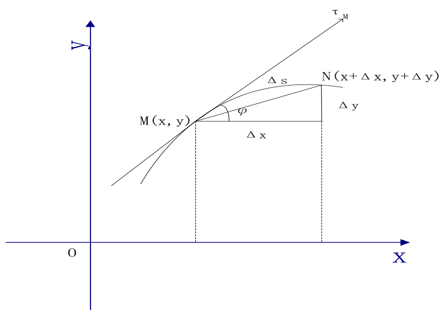

图 10.

设一条平面曲线的弧长 s 由某一定点起算. 设 $\widehat{MN}$ 是由某一点 $M(x,y)$ 起弧长的改变量 Δs, 而 Δx 和 Δy 是相应的 x 和 y 的改变量, 由直角三角形 (图 10) 得到

$$(\overline{MN})^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$$

由此

$$\frac{(\overline{MN})^2}{(\Delta x)^2}=1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

当 Δx 充分小时, 在一些假定之下（例如这条曲线具有连续导数）, 可以用弧 $\widehat{MN}$ 代替 $\overline{MN}$, 再令 $\Delta x\to 0$ 得到

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

由此得到弧长微分的表达式

$$ds = \pm\sqrt{1+y'^2}dx$$

或

$$ds = \pm\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}, ds^2 = dx^2+dy^2.$$

ds 正负的选取是按实际需要来确定, 这里暂不讨论.

下面给出 ds 的具体表达式:

(1) 若弧的方程为 $y = f(x)(a \le x \le b)$, $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 则

$$ds = \pm\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

(2) 若弧的方程为 $x = \phi(t), y = \psi(t)(\alpha \le t \le \beta)$, $\phi'(t), \psi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续, 且不全为 0, 则

$$ds = \pm\sqrt{(\phi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt.$$

(3) 若弧的方程式为 $\rho = \rho(\theta)$(极坐标方程式)$(\alpha \le \theta \le \beta)$, $\rho'(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续, 这时可将其看作参数方程 $x = \rho(\theta)\cos\theta, y = \rho(\theta)\sin\theta$, 从而有

$$\begin{aligned} ds &= \pm\sqrt{dx^2+dy^2} = \pm\sqrt{[(\rho(\theta)\cos\theta)']^2+[(\rho(\theta)\sin\theta)']^2} \\ &= \pm\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta. \end{aligned}$$

§ 4.4.3 曲率的计算

现在来导出曲率的计算公式, 为此, 需计算 $d\varphi$.

由图 10 看出, 曲线在点 M 的切线的斜率为 $\tan\varphi$, 再由导数的几何意义, 就有 $\tan\phi = y', \phi = \arctan y'$, 所以两边对 x 求导数, 有

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{y''}{1+y'^2},$$

即

$$d\phi = \frac{y''}{1+y'^2}dx.$$

把计算得到的 ds 和 $d\varphi$ 代入中 $K = \left|\frac{d\phi}{ds}\right|$, 得到

$$K = \left|\frac{d\phi}{ds}\right| = \left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|,$$

这就是曲率的计算公式.

由此, 不难推出曲线为参数方程 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 或极坐标方程 $\rho = \rho(\theta)$ 时, 曲率的计算公式, 请读者自行推导.

前已指出, 圆周上的平均曲率是一个常数, 因此圆周上任一点的曲率也是常数, 它正好等于圆的半径的倒数. 也就是说, 圆有这样的特点, 圆的半径正好是曲率的倒数, 即 $R = \dfrac{1}{K}$.

一般地, 我们把曲线上一点的曲率的倒数称为曲线在该点的曲率半径, 记作 $\rho = \frac{1}{K}$. 下面再解释一下曲率半径的几何意义.

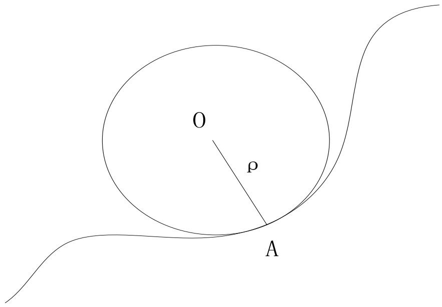

图 11.

如图 11, 在 A 点处作曲线的法线, 并在曲线凹的一侧, 在法线上取一点 O, 并使 $OA = \rho$ (ρ 是曲线在 A 点的曲率半径). 然后以 O 为圆心,ρ 为半径作一个圆, 这个圆称为曲线在 A 点的曲率圆. 此圆与曲线在 A 点具有以下关系.

(1) 有共同的切线, 亦即圆与曲线在点 p 相切;

(2) 有相同的曲率;

(3) 因此, 圆和曲线在 A 点具有相同的一阶和二阶导数.

这一事实表明, 当我们讨论函数 $y = f(x)$ 在某点 x 的性质时, 若这个性质只与 x, y, y', y'' 有关, 那么我们只要讨论曲线在 x 点的曲率的性质, 即可看出这曲线在 x 点附近的性质.

例 求抛物线 $y = x^2$ 上任一点处的曲率和曲率半径.

解 $y' = 2x, y'' = 2$. 曲率

$$K = \left|\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right| = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

曲率半径

$$\rho = \frac{1}{K} = \frac{(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}}{2}.$$

由上面 K 的表达式可以看出, 在原点处, $y = x^2$ 的曲率 K 最大, 即曲率半径最小. 随着曲线 $y = x^2$ 自原点处逐渐上升, K 的分母 $(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}$ 逐渐增大, 因而曲率也就逐渐减小, 即曲率半径逐渐增大 (如图 12).

习题 4.4

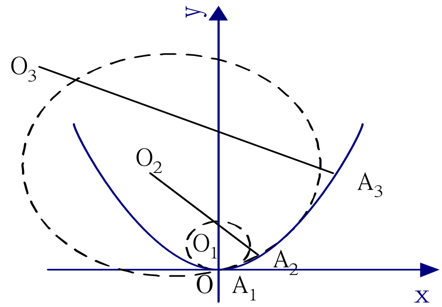

图 12.

1. 求下列曲线的曲率与曲率半径：

(1) $y = a\mathrm{ch}\frac{x}{a}\ (a > 0)$; (2) $y^2 = 2px(p > 0)$;
(3) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)\ (a > 0)$; (4) $\rho = a(1 + \cos\theta)\ (a > 0)$;
(5) $\rho^2 = 2a^2\cos 2\theta\ (a > 0)$; (6) $\rho = ae^{\lambda\theta}\ (\lambda > 0)$.

2. 求曲线 $y = 2(x-1)^2$ 的最小曲率半径.
3. 求曲线 $y = 4x - x^2$ 的曲率以及在点 $(2, 4)$ 的曲率半径.
4. 证明：若曲线的所有切线经过同一个点, 则该曲线是一条直线.

§ 4.5 洛必达 (L'Hospital) 法则

定理 4.5.1 设 f, g 在 (a, b) 内可导, 并且 $g(x) \neq 0$ 对 $x \in (a, b)$ 成立. 又设 $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = 0$. 在这些条件下, 如果极限 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或 ∞, 那么便有

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证明 取 $\delta > 0$ 满足 $a + \delta < b$. 令

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ f(x), & x \neq a \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ g(x), & x \neq a \end{cases}$$

显然 $F(x)$ 与 $G(x)$ 在 $[a, a+\delta]$ 上连续, 在 $(a, a+\delta)$ 可导. 将 $F(x)$ 与 $G(x)$ 在 $[a, x]$ 上用 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi \in (a, x)$ 满足

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

若 $x \to a+$, 则 $\xi \to a+$. 而 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或 ∞ 从而

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在或 ∞.

注：$x \to b-, x \to c \in (a,b)$, 情形同样.

定理 4.5.2 设 $f(x), g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可导, 并且 $g(x) \neq 0$ 对 $x \in (a,+\infty)$ 成立. 又设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. 在这些条件下, 如果极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或 ∞, 那么便有

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证明 令 $t = \frac{1}{x}$, 即 $x = \frac{1}{t}$, 当 $x \to +\infty$ 时, $t \to 0+$. 不妨设 $a > 0$.

设 $F(t) = f(\frac{1}{t}), G(t) = g(\frac{1}{t})), t \in (0, \frac{1}{a})$. 则 $F(t)$ 与 $G(t)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 内可导, $G(t) \neq 0$. 则

$$\lim_{t\to0+} F(t) = \lim_{t\to0+} f(\frac{1}{t}) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

$$\lim_{t\to0+} G(t) = \lim_{t\to0+} g(\frac{1}{t}) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

此外

$$\lim_{t\to0+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to0+} \frac{f'(t)(-\frac{1}{t^2})}{g'(t)-\frac{1}{t^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或}\infty).$$

由定理 4.5.2 知

$$\lim_{t\to0+} \frac{F(t)}{G(t)} = A(\text{或}\infty),$$

从而

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to0+} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to0+} \frac{F(t)}{G(t)} = A(\text{或}\infty).$$

注 $x \to -\infty, x \to \infty$, 情形同样.

定理 4.5.3 设 f, g 在 (a,b) 内可导, 并且 $g(x) \neq 0$ 对 $x \in (a,b)$ 成立. 又设 $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = \infty$. 在这些条件下, 如果极限 $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或 ∞, 那么便有

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证明 （类似于 Stolz 定理的证明）若 $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{有限数})$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$, 当 $x \in (a, a+\delta_1)$ 时

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon.$$

取定 c 满足 $(a,c) \subset (a, a+\delta_1), \forall x \in (a,c)$, 将 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 (x,c) 上用 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi \in (x,c)$ 满足

$$\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

而

$$\frac{f(x)-f(x)}{g(x)-g(c)}=\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(c)}{g(x)}}{1-\frac{f(c)}{g(x)}},$$

由此

$$A-\varepsilon<\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(c)}{g(x)}}{1-\frac{f(c)}{g(x)}}<A+\varepsilon,$$

$$(A-\varepsilon)\left(1-\frac{f(c)}{g(x)}\right)+\frac{f(c)}{g(x)}<\frac{f(x)}{g(x)}<(A+\varepsilon)\left(1-\frac{f(c)}{g(x)}\right)+\frac{f(c)}{g(x)}.$$

令 $x\to a-$, 上面右边与左边不得式两边分别取上极限与下极限得

$$A-\varepsilon\le\liminf_{x\to a-}\frac{f(x)}{g(x)}\le\limsup_{x\to a-}\frac{f(x)}{g(x)}\le A+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性知 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A.$

同理可证 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty.$

注：$x\to b-, x\to c\in(a,b), x\to-\infty, x\to+\infty, x\to\infty$, 情形同样.

例 4.5.1 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}.$

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}.$

例 4.5.2 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x\cos x}{x-sinx}.$

解

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{x-x\cos x}{x-sinx}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x+x\sin x}{1-\cos x}\\&=1+\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos x}=1+\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sin x}=1+2=3.\end{aligned}$$

例 4.5.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}.$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1.$

例 4.5.4 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\sin mx}{\ln\sin nx}.$

解 $x\to0,\ \ \sin x\sim x.$

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{\ln\sin mx}{\ln\sin nx}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{m\cos mx}{\sin mx}}{\frac{n\cos nx}{\sin nx}}\\&=\lim_{x\to0}\frac{m\sin nx\cos mx}{n\sin mx\cos nx}=\lim_{x\to0}\frac{mnx\cos mx}{nmx\cos nx}=\lim_{x\to0}\frac{\cos mx}{\cos nx}=1.\end{aligned}$$

其它情形: $0\times\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0$ 可转化为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$.

例 4.5.5 求极限 $\lim\limits_{x\to0+} x^{\mu}\ln x\ (\mu>0)$.

解

$$\lim_{x\to0+} x^{\mu}\ln x = \lim_{x\to0+}\frac{\ln x}{x^{-\mu}} = \lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\mu x^{-\mu-1}} = \lim_{x\to0+}\frac{x^{\mu}}{-\mu} = 0.$$

例 4.5.6 求极限 $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sec x-\tan x)$.

解 $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sec x-\tan x) = \lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{-\cos x}{-\sin x} = \lim\limits_{x\to\pi/2}\cot x = 0.$

例 4.5.7 求极限 $\lim\limits_{x\to0+}(\sin x)^x$.

解

$$\lim_{x\to0+}(\sin x)^x = e^{\lim\limits_{x\to0+}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to0+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{-\lim\limits_{x\to0+}\frac{x^2\cos x}{\sin x}} = e^{-\lim\limits_{x\to0+}\frac{x^2\cos x}{x}}e^0 = 1.$$

例 4.5.8 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点处二阶可导, 证明:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h^2} = f''(x_0).$$

证明 用洛必达法则及 $f''(x_0)$ 的定义可得

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h^2} = \lim_{h\to0}\frac{2f'(x_0+2h)-2f'(x_0+h)}{2h}\\ &= \lim_{h\to0}\frac{[f'(x_0+2h)-f(x_0)]-[f'(x_0+h)-f'(x_0)]}{h} = 2f''(x_0)-f''(x_0) = f''(x_0).\end{aligned}$$

注 对于 $\frac{0}{0}$ 型的极限问题, 可先用等价无穷小代换, 再用四则运算（极限不为零的因子先求出极限）, 最后再用洛必达法则.

例 4.5.9 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(\tan x-x)e^x\sin^3 2x}{(x-\sin x)\cos^3 x\tan^3 8x}$.

解 当 $x\to0$ 时, $\tan 2x\sim 2x, \sin 8x\sim 8x$, 所以

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{(\tan x-x)e^x\sin^3 2x}{(x-\sin x)\cos^3 x\tan^3 8x} = \lim_{x\to0}\frac{e^x}{\cos^3 x}\lim_{x\to0}\frac{(\tan x-x)(2x)^3}{(x-\sin x)(8x)^3}\\ &= \frac{1}{64}\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x} = \frac{1}{64}\lim_{x\to0}\frac{\sec^2 x-1}{1-\cos x} = \frac{1}{64}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{(1-\cos x)\cos^2 x}\\ &= \frac{1}{64}\lim_{x\to0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{32}.\end{aligned}$$

习题 4.5

1. 求下列极限:

(1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$; (2) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$;

(3) $\lim_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)^{\frac{1}{\ln x}}$ (4) $\lim_{x\to\infty}(\pi-2\arctan x)\ln x$;

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x)}{x^2}-\frac{1}{x}$; (6) $\lim_{x\to 0}(\frac{\tan x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$;

(7) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 3x}}{\ln(1+2x^2)}$; (8) $\lim_{x\to 0}(\frac{3-3^x}{2+x})^{\csc x}$;

(9) $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{\ln(1+5x^2\sin x)}$ (10) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}$;

(11) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}$; (12) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\dfrac{1}{2}$;

(13) $\lim_{x\to 0}\dfrac{(\tan x-x)e^x}{(x-\sin x)\cos^3 x}$; (14) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}(\tan x)^{\frac{\pi}{2}-x}$;

(15) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$; (16) $\lim_{x\to 0+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{-1}$;

(17) $\lim_{x\to\infty}x\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-e\right)=-\dfrac{e}{2}$; (18) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{\tan^3 x\cos^2 4x}$;

(19) $\lim_{x\to 0}[\frac{1}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}]=\frac{1}{3}$; (20) $\lim_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})\ (a>0)$.

2. 计算下列极限:

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}(a>0)$; (2) $\lim_{x\to infty}\left((x^3-x^2+\frac{x}{2})e^{1/x}-\sqrt{x^6+1}\right)$;

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{x\cot x-1}{x^2}$; (4) $\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$;

(5) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{x^3}$; (6) $\lim_{x\to 1-}\log x\log(1-x)$;

(7) $\lim_{x\to 0+}x^x$; (8) $\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$;

(9) $\lim_{x\to\infty}(\cos\frac{a}{x})^x$; (10) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$;

(11) $\lim_{x\to\infty}x((1+\frac{1}{x})^x-e)$; (12) $\lim_{x\to 0}(\frac{2}{\pi}\arccos x)^{\frac{1}{x}}$;

(13) $\lim_{x\to+\infty}(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x$.

3. 设 f 在 0 的某一邻域内二次连续可导且 $f(0)=0$, 定义 $g(0)=f'(0)$ 且当 $x\neq 0$ 时 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, 求证：g 在 0 的某一邻域内是连续可导的.

4. 设 $y_1=c>0, \frac{y_{n+1}}{n+1}=\log(1+\frac{y_n}{n}), n\geq 1$, 求极限 $\lim_{n\to\infty}y_n$.

第四章典型例题选讲

例 4.1 (1) 设 $h>0$, 函数 f 在 $[a-h,a+h]$ 上可导. 证明存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h}=f'(a+\theta h)-f'(a-\theta h);$$

(2) 设函数 g 在点 a 二阶可导. 证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-2g(a)+g(a-h)}{h^2}=g''(a).$$

证明 (1) 令

$$F(x)=f(a+x)+f(a-x),\quad x\in[0,h].$$

则函数 F 在 $[0,h]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件. 于是存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$\begin{aligned}\tfrac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h}&=\tfrac{F(h)-F(0)}{h-0}=F'(\theta h)\\&=f'(a+\theta h)-f'(a-\theta h).\end{aligned}$$

(2) 由于函数 g 在点 a 二阶可导, 于是存在 a 的某邻域 $U(a,\delta),\delta>0$, 使得 g 在 $U(a,\delta)$ 内连续并存在一阶导数. 任取 $h\in(0,\delta)$, 令

$$F(x)=g(a+x)-2g(a)+g(a-x),G(x)=x^2,x\in[0,h],$$

则函数 F 和 G 满足柯西中值定理中所有的条件, 因此存在 $\xi\in(0,h)$, 使得

$$\begin{aligned}\tfrac{F(h)-F(0)}{G(h)-G(0)}&=\tfrac{g(a+h)-2g(a)+g(a-h)}{h^2}\\&=\tfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\tfrac{g'(a+\xi)-g'(a-\xi)}{2\xi}.\end{aligned}$$

又因当 $h\to 0$ 时,$\xi\to 0$, 而 g 在点 a 二阶可导, 所以有

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\tfrac{F(h)-F(0)}{G(h)-G(0)}&=\lim_{h\to 0}\tfrac{g(a+h)-2g(a)+g(a-h)}{h^2}\\&=\lim_{\xi\to 0}\tfrac{g'(a+\xi)-g'(a-\xi)}{2\xi}\\&=\tfrac{1}{2}\lim_{\xi\to 0}[\tfrac{g'(a+\xi)-g'(a)}{\xi}+\tfrac{g'(a-0)-g'(a)}{-\xi}]\\&=\tfrac{1}{2}(g''(a)+g''(a))=g''(a).\end{aligned}$$

例 4.2 设函数 f 在区间 $(0,1]$ 内连续、可导, 并且

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}f'(x)=a,$$

求证 f 在 $(0,1]$ 内一致连续.

证明 (利用柯西中值定理) 由 $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x}f'(x)=a$ 知 $\exists c>0$, 当 $x\in(0,c)$ 时

$$\left|\sqrt{x}f'(x)\right|\le M.$$

$\forall\varepsilon>0,x_1,x_2\in(0,c),x_1<x_2$. 将 $f(x)$ 及 $g(x)=\sqrt{x}$ 在 $[x_1,x_2]$ 上用 Cauchy 中值定理

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=2\sqrt{\xi}f'(\xi),$$

其中 $\xi\in(x_1,x_2)$.

$$|f(x_2)-f(x_1)|=2\left|\sqrt{\xi}f'(\xi)\right|(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})\le 2M(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}).$$

又

$$(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})^2 = x_2 - 2\sqrt{x_1x_2} + x_1 = x_2 - x_1 - \sqrt{2x_1}(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}) \le x_2 - x_1$$

所以

$$|f(x_2)-f(x_1)| \le 2M\sqrt{x_2-x_1}.$$

$\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\{(\frac{\varepsilon}{2M})^2, c\}$, 则当 $x_1,x_2\in(0,c]$, 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有

$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)| &\le 2M|\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}| \\ &\le 2M\sqrt{|x_2-x_1|}<\varepsilon.\end{aligned}$$

从而 $f(x)$ 在 $(0,c]$ 上一致连续. 而 $f(x)$ 在 $[c,1]$ 连续从而一致连续, 故 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上一致连续.

例 4.3 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导且 $f'(a+)f'(b-)<0$. 证明 $\exists\xi(a,b)$ 满足 $f'(\xi)=0$. 并用此结果证明: 若 $f(x)$ 在 (a,b) 可导, 则其导数 $f'(x)$ 无第一间断点.(达布 Darboux 定理)

证明 (1) 由 $f'(a+)f'(b-)<0$, 不妨设 $f'(a+)>0, f'(b-)<0$.

由 $f'(a+)=\lim\limits_{x\to a+}f'(x)>0$, $\exists\delta_1$, 当 $x\in(a,a+\delta_1)$ 时, $f'(x)>0$. $f(x)$ 在 $(a,a+\delta_1)$ 上单调递增, $f(a)<f(x)$.

由 $f'(b-)=\lim\limits_{x\to b-}f'(x)<0$, $\exists\delta_2$, 当 $x\in(b-\delta_2,b)$ 时, $f'(x)<0$. $f(x)$ 在 $(b-\delta_2,b)$ 上单调递减, $f(b)<f(x)$.

又 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导必连续 (a,b 不可能为最大值点), 由最大值最小值定理知 $f(x)$ 在 (a,b) 内存在 (极值点) 最大值点 ξ, 由 Fermat 定理知 $f'(\xi)=0$.

(2) 假设 $f'(x)$ 有第一间断点 x_0, 则满足 $f'(x_0+)\neq f'(x_0-)$, 不妨设 $f'(x_0+)>f'(x_0-)$. 显然 $f'(x_0+)$ 与 $f'(x_0-)$ 存在无数个常数 c, 满足 $f'(x_0+)>c>f'(x_0-)$.

令 $F(x)=f(x)-cx$, 则 $F(x)$ 在 (a,b) 可导 $F'(x)=f'(x)-c$. $F'(x_0+)=f'(x_0+)-c>0$, $F'(x_0-)=f'(x_0-)-c<0$. 同 (1) 可证 $\exists\delta_1$, 当 $x\in(x_0,x_0+\delta_1)$ 时, $F'(x)>0$. $F(x)$ 在 $(x_0,x_0+\delta_1)$ 上单调递增, $F(x_0)<F(x)$.

$\exists\delta_2$, 当 $x\in(x_0-\delta_2,x_0)$ 时, $F'(x)<0$. $F(x)$ 在 $(x_0-\delta_2,x_0)$ 上单调递减, $F(x_0)<F(x)$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时 $F(x_0)<F(x)$, x_0 为 $F(x)$ 的极小值, 从而 $F'(x_0)=0$, 即 $f'(x_0)=c$, $c=f'(x_0)$ 为一定值, 与 c 的任意性矛盾, 假设不成立, 即 $f'(x)$ 无第一间断点.

注： 上述定理中条件 $f'(a+)f'(b-)<0$ 变为 $f'_+(a)f'_-(b)<0$, 结论仍成立.

例 4.4 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导且 $f'_+(a)\neq f'_-(b)$. 证明对于介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的每个实数 μ, $\exists\xi(a,b)$ 满足 $f'(\xi)=\mu$.

证明 令 $F(x)=f(x)-\mu x$, 则 $F'(a+)=f'(a+)-\mu<0, F'(b-)=f'(b-)-\mu>0$. 由例 4.3 知 $\exists\xi(a,b)$ 满足 $F'(\xi)=0$ 即 $f'(\xi)=\mu$.

例 4.5 (G. Darboux 定理, 导数的介值定理) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上处处可导 (端点指单侧导数), 且 $f'(a)<f'(b)$, 则 $\forall c: f'(a)<c<f'(b), \exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=c$.

证明 作辅助函数

$$g(x)=f(x)-cx$$

则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处可导, $g'(a)=f'(a)-c<0, g'(b)=f'(b)-c>0$, 只要能证明 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $g'(\xi)=0$, 则即 $f'(\xi)=c$, 命题得证.

事实上, 由于
$$\lim_{x\to a+0}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)<0,$$
所以 $x>a, x$ 与 a 充分接近时, 有 $g(x)<g(a)$; 同理由 $g'(b)>0$, 知 $x<b$ 且 x 与 b 充分接近时有 $g(x)<g(b)$. 故 $g(x)$ 在端点 a,b 处不取最小值. 但 $g(x)$ 连续, 它在闭区间 $[a,b]$ 上有最小值. 所以 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $g(\xi)=\min\limits_{a\le x\le b}g(x)$. 由 Fermat 定理, $g'(\xi)=0$.

例 4.6 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二次可微, 且有界, 试证存在点 $x_0\in(-\infty,+\infty)$, 使得 $f''(x_0)=0$.

证明 若 $f''(x)$ 不变号, 例如 $f''(x)>0$ ($f''(x)<0$ 类似可证), 则 $f'(x)$ 严格递增. 取 $x_0\in(-\infty,+\infty)$ 使 $f'(x_0)\neq0$. 否则 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $f'(x)=0$, $f\equiv C$ 茅盾. 不失一般性，设 $f'(x_0)>0$. 当 $x>x_0$, 并令 $x\to+\infty$ 时
$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\to+\infty.$$
若 $f'(x_0)<0$, 则当 $x<x_0$, 并令 $x\to-\infty$ 时
$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\to+\infty.$$
与 $f(x)$ 有界矛盾.

由此 $f''(x)$ 变号, 则由导数的介值性, $\exists\xi\in(-\infty,+\infty)$, 使得 $f''(\xi)=0$

例 4.7 若函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(x_0,+\infty)$ 内可微两次, 且 $\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ (或 A), 则至少存在 $\xi\in(x_0,+\infty)$ 满足 $f''(\xi)=0$.

证明 假设在 $(x_0,+\infty)$ 不存在 ξ 满足 $f''(\xi)=0$, 那么 $f''(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 保持同号, 即 $\forall x\in(x_0,+\infty)$ 有 $f''(x)>0$ 或 $f''(x)<0$. (如果 $\exists x_1,x_2\in(x_0,+\infty)$, $f''(x_1)f''(x_2)<0$, 那么由前例的结论 $\exists\xi\in(x_0,+\infty)$, $f''(\xi)=0$ 此与假设矛盾).

下设 $f''(x)>0$, 则 $f'(x)$ 严格单调递增. $\forall x\in(x_0,+\infty)$, 下证 $\exists c\in(x_0,+\infty)$ 满足 $f'(c)=0$.

否则 $f'(\xi)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 恒大于零 (或恒小于零), 此时 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上严格单调递增. $\forall x_1\in(x_0,+\infty)$, 取定
$$x_0<x_2<x_1<x_3<+\infty\Rightarrow f(x_2)<f(x_1),$$
一方面 $\forall x, x<x_2\Rightarrow f(x)<f(x_2)$, 当 $x\to x_0+$ 时有 $0\le f(x_2)<f(x_1)$.

另一方面 $\forall x, x_3<x\Rightarrow f(x_3)<f(x)$, 当 $x\to+\infty$ 时有 $f(x_1)<f(x_3)\le0$.

由此 $0\le f(x_2)<f(x_1)<f(x_3)\le0\Rightarrow f(x_2)=f(x_3)$ 矛盾. 故 $\exists c\in(x_0,+\infty)$ 满足 $f'(c)=0$.

再由 $f''(x)>0$, $f'(x)$ 严格单调递增知 $\exists\eta$, 当 $\eta>c$ 时 $f'(\eta)>f'(c)=0$. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\eta,f(\eta))$ 的切线方程
$$y(x)-f(\eta)=f'(\eta)(x-\eta)$$
令 $x\to+\infty$ 则 $y(x)\to+\infty$. 另一方面 $f''(x)>0$ 知切线在曲线 $y=f(x)$ 的下方, 即 $f(x)>y(x)$. 但当 $x\to+\infty$ 时有 $f(x)\to0$, 导致矛盾. 故至少存在 $\xi\in(x_0,+\infty)$ 满足 $f''(\xi)=0$.

例 4.8 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调递增, 又有

$$\{x_n\} \in [a,b], \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

证明 假设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq a$, 则 $\exists\varepsilon_0 > 0, \forall N, \exists n_N > N, x_{n_N} > a + \varepsilon_0$ 或 $x_{n_N} < a - \varepsilon_0$ (该情况舍). 故 $f(X_N) > f(a+\varepsilon_0)$.

由 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ 知 $\lim\limits_{N\to\infty} f(x_{n_N}) = f(a)$, 所以 $f(a) \geq f(a+\varepsilon_0) > f(a)$ 矛盾. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

例 4.9 设在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f''(x) > 0$, 又 $f(0) < 0$. 试证: $\frac{f(x)}{x}$ 分别在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内严格单调增加.

证明 $\forall x \in (0,+\infty)$. 在 $[0,x]$ 上用拉格朗日中值定理, $f(x) - f(0) = f'(\xi)x$. 由条件 $f''(x) > 0$, $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 而 $f(0) < 0$, 所以

$$f(x) = f(0) + f'(\xi)x < f'(\xi)x < f'(x)x.$$

$\forall x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ 不妨设 $x_1 < x_2$. 对于函数 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $[x_1,x_2]$ 上再用拉格朗日中值定理,

$$\frac{f(x_2)}{x_2} - \frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f'(\eta)\eta - f(\eta)}{\eta^2}(x_2 - x_1) > 0$$

其中 $\eta \in (x_1,x_2)$, 由此 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内严格单调增加.

同理可证 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 内严格单调增加.

例 4.10 设函数 f 在点 a 的某领域 $U(a;\delta)$ 内连续, 在 $U^\circ(a;\delta)$ 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ 存在. 证明 $f'(a)$ 存在, 且 $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$.

证明 由拉格朗日中值定理, $\forall x \in U^\circ(a;\delta)$, 存在介于 a 和 x 之间的一点 ξ, 使得

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi),$$

而且当 $x \to a$ 时, $\xi \to a$. 由题设,$\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ 存在, 于是在上式中令 $x \to a$, 即得

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} f'(\xi) = \lim_{x\to a} f'(x).$$

例 4.11 (1) 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$. 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi) = f'(\xi)$.

(2) 设函数 f 在 $[a,b]$ 上有一直到 n 阶导数, 在 (a,b) 内 $n+1$ 阶可导, 且有 $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0, k = 0,1,\cdots,n$. 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)$.

证明 (1) 令 $h(x) = e^{-x}f(x)$. 则 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且有 $h(a) = h(b) = 0$. 于是由罗尔中值定理 ,$\exists\xi \in (a,b)$, 使得

$$0 = h'(\xi) = e^{-\xi}[f'(\xi) - f(\xi)],$$

即

$$f(\xi) = f'(\xi).$$

(2) 当 $n = 0$ 时, 即为 (1) 中结论. 若 $n > 0$, 令

$$h(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x), x \in [a, b],$$

则由假设, 函数 $h(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且有

$$h(a) = h(b) = 0.$$

应用 (1) 中结论, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$0 = h'(\xi) = e^{-\xi} \left[\sum_{k=0}^{n} f^{(k+1)}(\xi) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(\xi) \right],$$

即

$$0 = \sum_{k=0}^{n} f^{(k+1)}(\xi) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - f(\xi).$$

例 4.12 设函数 f 在 $(a, +\infty)$ 内可导, 且有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = A$. 证明

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = A.$$

证明 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = A$ 和函数极限的局部有界性, $\forall \varepsilon > 0, \exists K > 0$ 和 $N' > \max\{a, K\}$, 使得

$$|f'(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \ |f'(x)| < K$$

对任何 $x > N'$ 成立. 于是由拉格朗日中值定理, $\exists \xi \in (N', x)$, 使得

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{x} - A \right| &= \left| \frac{f(x) - f(N') + f(N')}{x} - A \right| = \left| \frac{f'(\xi)(x - N') + f(N')}{x} - A \right| \\ &\le \left| f'(\xi) - A \right| + \frac{N'|f'(\xi)| + |f(N')|}{x} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{KN' + |f(N')|}{x} \end{aligned}$$

令 $M = KN' + |f(N')|$. 则必存在 $N > N'$, 使得 $x > N$ 时,

$$0 < \frac{M}{x} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是, 当 $x > N$ 时, 有

$$\left| \frac{f(x)}{x} - A \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{x} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

即有

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = A.$$

例 4.13 设函数 f 在区间 $[0,1]$ 上二阶可导, 且有

$$f(0)=f(1)=0,\ \min_{x\in[0,1]} f(x)=-1.$$

证明存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$f''(\xi)\geq 8.$$

证明 由条件，存在 $x_0\in(0,1)$ 满足 $f(x_0)=-1$. 因为 x_0 是最小值点, 也是驻点, 于是有 $f'(x_0)=0$. 将 $f(0)$ 和 $f(1)$ 在点 x_0 展开为泰勒公式

$$\begin{aligned} 0=f(0)&=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\tfrac{f''(\xi_1)}{2!}(0-x_0)^2\\ &=-1+\tfrac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2,\ \ \xi_1\in(0,x_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0=f(1)&=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\tfrac{f''(\xi_2)}{2!}(1-x_0)^2\\ &=-1+\tfrac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2,\ \ \xi_2\in(x_0,1), \end{aligned}$$

于是有

$$f''(\xi_1)=\frac{2}{x_0^2}, f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-x_0)^2}.$$

记 $\xi\in(0,1)$ 并满足

$$f''(\xi)=\max\{f''(\xi_1),\ \ f''(\xi_2)\},$$

当 $0<x_0\leq\frac{1}{2}$ 时 $0<x_0^2<\frac{1}{4}, 0<(1-x_0)^2\leq\frac{1}{4}$, 所以 $\max\{\frac{2}{x_0^2},\frac{2}{(1-x_0)^2}\}\geq 8$.

同理可证当 $\frac{1}{2}<x_0<1$ 时 $\max\{\frac{2}{x_0^2},\frac{2}{(1-x_0)^2}\}>8$.

于是有

$$f''(\xi)=\max\{\frac{2}{x_0^2},\frac{2}{(1-x_0)^2}\}\geq 8.$$

例 4.14 设 (a,b) 为有限或无穷区间,$f(x)$ 在 (a,b) 内可微, 且

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to b-0} f(x)=A$$

(有限或 $\pm\infty$), 试证: $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

证明 若 $f(x)\equiv A$(有限数), 则 $f'(x)\equiv 0$, 问题自明. 若 $f(x)$ 不恒等于 A, 则 $\exists x_0\in(a,b)$, 使得 $f(x_0)\neq A$, 下设 $f(x_0)>A$(对 $f(x_0)<A$ 类似可证). 因为

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to b-0} f(x)=A$$

函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续, 所以对于任意取定的数 μ, $(A<\mu<f(x_0))$, $\exists x_1\in(a,x_0)$, $x_2\in(x_0,b)$, 使得

$$f(x_1)=f(x_2)=\mu.$$

从而由 Rolle 定理知, $\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$. 若 $A=+\infty$ (或 $-\infty$), 则 (a,b) 任取一点作 x_0, 上面推理保持有效.

若 $A=+\infty, b=+\infty$. 取定 $x_0\in(a,+\infty)$, 再取 μ, $f(x_0)<\mu$.

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\exists x_2 > x_0$, $f(x_2) > \mu$. 将 $f(x)$ 在 $[x_0, x_2]$ 上用介值定理 $\exists \xi_2 \in (x_0, x_2)$ 使 $f(\xi_2) = \mu$.

而 $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = +\infty$, $\exists x_1$ $(a < x_1 < x_0)$, 使 $f(x_1) > \mu$. 将 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上用介值定理, 存在 $\xi_1 \in (x_1, x_0)$，使得 $f(\xi_1) = \mu$. 再将 $f(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上用罗尔中值定理, 得 $f'(\xi) = 0$

例 4.15 设 $f(x)$ 在包含 x_0 的区间 I 上二次可微,$x_0 + h \in I, \lambda \in (0,1)$, 试证: $\exists \theta \in (0,1)$, 使得

$$f(x_0 + \lambda h) = \lambda f(x_0 + h) + (1-\lambda) f(x_0) + \frac{\lambda}{2}(\lambda - 1) h^2 f''(x_0 + \theta h).$$

分析 因 $0 < \lambda < 1$, 可取数 M, 使得

$$f(x_0 + \lambda h) - \lambda f(x_0 + h) - (1-\lambda) f(x_0) - \frac{\lambda}{2}(\lambda - 1) h^2 \cdot M = 0. \tag{1}$$

故只要证明: $\exists \theta \in (0,1)$, 使得 $M = f''(x_0 + \theta h)$. 令

$$F(t) = f(x_0 + th) - t f(x_0 + h) - (1-t) f(x_0) - \frac{t}{2}(t-1) h^2 M,$$

则 $F(t)$ 在 $[0,1]$ 上二次可微, 且有三个零点

$$F(0) = F(1) = F(\lambda) = 0.$$

两次应用 Rolle 定理, 可知 $\exists \theta \in (0,1)$ 使得

$$F''(\theta) = 0.$$

此即 $M = f''(x_0 + \theta h)$. 移项, 即得所欲证结果.

例 4.16 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内有二阶导数, 试证存在 $c \in (a,b)$ 使

$$f(b) - 2f(\frac{a+b}{2}) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(c).$$

证法一 所证式左端

$$f(b) - 2f(\frac{a+b}{2}) + f(a) = \left[f(b) - f(\frac{a+b}{2})\right] - \left[f(\frac{a+b}{2}) - f(a)\right]$$
$$= \left[f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}) - f(\frac{a+b}{2})\right] - \left[f(a + \frac{b-a}{2}) - f(a)\right].$$

作辅助函数

$$\varphi(x) = f(x + \frac{b-a}{2}) - f(x)$$

则

$$\begin{aligned}
\text{上式} &= \varphi(\frac{a+b}{2}) - \varphi(a) \\
&= \varphi'(\xi)\cdot(\frac{a+b}{2} - a) = \varphi'(\xi)\frac{b-a}{2} \quad \xi \in (a, \frac{a+b}{2}) \\
&= [f'(\xi + \frac{b-a}{2}) - f'(\xi)]\frac{b-a}{2} \\
&= f''(\xi + \theta\frac{b-a}{2})\cdot\frac{b-a}{2}\cdot\frac{b-a}{2} \quad \theta \in (0,1) \\
&= f''(c)\cdot\frac{(b-a)^2}{4}, \quad c = \xi + \theta\frac{b-a}{2} \in (a,b).
\end{aligned}$$

证法二 待定系数法：取 M 使 $f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4}M$. 令

$$F(x) = f(x) - 2f\left(\frac{a+x}{2}\right) + f(a) - \frac{(x-a)^2}{4}M,$$

则 $F(a) = F(b) = 0$. 将 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上用 Rolle 中值定理存在 $\xi \in (a,b)$ 使 $F'(\xi) = 0$, 即

$$f'(\xi) - f'\left(\frac{a+\xi}{2}\right) = \frac{\xi - a}{2}M.$$

另一方面, 将 $f'(x)$ 在 $\left[\frac{a+\xi}{2}, \xi\right]$ 用拉格朗日中值定理存在 $c \in \left[\frac{a+\xi}{2}, \xi\right] \subset (a,b)$，使得

$$f'(\xi) - f'\left(\frac{a+\xi}{2}\right) = f''(c)\left(\xi - \frac{a+\xi}{2}\right).$$

故 $\frac{\xi-a}{2}M = f''(c)\left(\xi - \frac{a+\xi}{2}\right)$, 即 $M = f''(c)$. 从而 $c \in (a,b)$ 使 $f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4}f''(c)$.

例 4.17 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微, $f(0) = 0$, 并设有实数 $A > 0$, 使得 $|f'(x)| \le A|f(x)|$ 在 $[0,+\infty)$ 上成立, 试证明在 $[0,+\infty)$ 上 $f(x) \equiv 0$.

证法 I 因 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微, $f(0) = 0$, 利用 Langrange 定理

$$|f(x)| = |f(0) + f'(\xi_1)(x-0)| = |f'(\xi_1)x| \le A|f(\xi_1)|x$$

当限制 $x \in (0, \frac{1}{2A}]$ 时, 则得

$$|f(x)| \le \frac{1}{2}|f(\xi_1)|, \quad 0 < \xi_1 < x.$$

重复使用此式可得

$$|f(x)| \le \frac{1}{2}|f(\xi_1)| \le \frac{1}{4}|f(\xi_2)| \le \cdots \le \frac{1}{2^n}|f(\xi_n)|.$$

这里 $0 < \xi_n < \xi_{n-1} < \cdots < \xi_1 < x \le \frac{1}{2A}$. 由 $f(x)$ 的连续性, $\exists M > 0$, 使得 $|f(x)| \le M$, 在 $[0, \frac{1}{2A}]$ 上, 故

$$|f(x)| \le \frac{M}{2^n} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

从而 $f(x)\equiv 0$ 在 $[0,\frac{1}{2A}]$ 上. 用数学归纳法, 可证在一切 $\frac{i-1}{2A},\frac{i}{2A}](i=1,2,\cdots)$ 上恒有 $f(x)\equiv 0$, 所以 $[0,+\infty)$ 上 $f(x)\equiv 0$.

证法 II 因 $|f(x)|$ 在 $[0,\frac{1}{2A}]$ 上连续, 故 $\exists x_1\in[0,\frac{1}{2A}]$ 使

$$|f(x_1)|=\max_{0\le x\le\frac{1}{2A}}|f(x)|=M.$$

于是

$$\begin{aligned}M=|f(x_1)|&=|f(0)+f'(\xi)(x_1-0)|=|f'(\xi)x_1|\\&\le A|f(\xi)\cdot x_1\le\frac{1}{2}|f(\xi)|\le\frac{1}{2}M\end{aligned}$$

所以 $M=0,\quad f(x)\equiv 0$ 在 $[0,\frac{1}{2A}]$ 上, 以下同 I.

证法 III (反证法) 若 $f(x)$ 不恒等于零, 则 $\exists x_0\in(0,+\infty)$, 使得 $f(x_0)\neq 0$, 不妨设 $f(x_0)>0(f(x_0)<0$ 可类似证明). 记 $x_1=\inf\{x|(x,x_0)\text{上}f(x)>0\}$, 由连续函数局部保号性, 只能 $f(x_1)=0,(x_1,x_0)$ 内 $f(x)>0$.

$$g(x)=\ln f(x),\quad(\text{当}x\in(x_1,x_0)\text{时}).$$

则

$$|g'(x)|=\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\le A.$$

故 $g(x)$ 在有限区间 (x_1,x_0) 上有界. 但

$$\lim_{x\to x_1+0}f(x)=f(x_1)=0,$$

故 $\lim\limits_{x\to x_1+0}g(x)=+\infty$, 矛盾.

例 4.18 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可微,$a,b>0$, 且 $f(a+0),f(b-0)$ 均存在 (为有限数), 试证明: $\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$\xi f('\xi)-f(\xi)=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$

分析 令 $f(a)=f(a+0),f(b)=f(b-0)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 欲证明的式 (1) 可改写成

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f('\xi),$$

亦即

$$\frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{-(\frac{f(x)}{x})'}{-(\frac{1}{x})'}\bigg|_{x=\xi}.$$

因此, 对函数 $F(x)=\frac{f(x)}{x},G(x)=\frac{1}{x}$, 在 $[a,b]$ 上应用 Cauchy 中值定理即得.

例 4.19 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, (a,b) 内可导 $(0 \le a < b), f(a) \ne f(b)$. 证明: $\exists \xi, \eta \in (a,b)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta).$$

证明 所证之式等价于

$$\frac{f'(\xi)}{1}(b-a) = \frac{f'(\eta)}{2\eta}(b^2-a^2).$$

为证此式, 只要取 $F(x) = f(x)$, 取 $G(x) = x$ 和 x^2 在 $[a,b]$ 上分别应用 Cauchy 中值定理, 则知

$$f(b) - f(a) = \frac{f'(\xi)}{1} \cdot (b-a) = \frac{f'(\eta)}{2\eta}(b^2-a^2),$$

其中 $\xi, \eta \in (a,b)$.

例 4.20 设 (1) $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内是 n 阶连续可微函数; 此处 $\delta > 0$; (2) 当 $k = 2, 3, \cdots, (n-1)$ 时, 有 $f^{(k)}(x_0) = 0$ 但是 $f^{(n)}(x_0) \ne 0$; (3) 当 $0 \ne |h| < \delta$ 时有

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0 + h \cdot \theta(h)),$$

其中 $0 < \theta(h) < 1$ 证明: $\lim\limits_{h\to 0} \theta(h) = \sqrt[n-1]{\frac{1}{n}}$.

证明 我们要设法从条件 (3) 中解出 $\theta(h)$. 为此, 我们将条件 (3) 左边的 $f(x_0+h)$ 及右端的 $f'(x_0+h\cdot\theta(h))$ 在 x_0 处展开. 注意条件 (2), 知 $\exists \theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ 使得

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0+\theta_1 h),$$

$$f'(x_0+h\theta(h)) = f'(x_0) + \frac{h^{n-1}\cdot(\theta(h))^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0+\theta_2 h\theta(h)).$$

于是条件变成

$$\begin{aligned} &f'(x_0) + \tfrac{h^{n-1}}{n!} f^{(n)}(x_0+\theta_1 h) \\ &\qquad = f'(x_0) + \tfrac{h^{n-1}\cdot(\theta(h))^{n-1}}{(n-1)!} f^(n)(x_0+\theta_2 h\cdot\theta(h)), \end{aligned}$$

从而

$$\theta(h) = \sqrt[n-1]{\frac{f^{(n)}(x_0+\theta_1 h)}{n\cdot f^{(n)}(x_0+\theta_2 h\theta(h))}},$$

因 $\theta_1, \theta_2, \theta(h) \in (0,1)$, 利用 $f^{(n)}(x)$ 的连续性，由此可得

$$\lim_{h\to 0}\theta(h) = \sqrt[n-1]{\frac{1}{n}}.$$

例 4.21 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有二阶导数, 且 $f(0) = f'(0) = 0$,

$$|f''(x)| \le |f(x)| + |f'(x)|.$$

试证：$\exists\delta>0$, 使得 $(-\delta,\delta)$ 内 $f(x)\equiv 0$.

证明 为了证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内恒为零. 我们将 $f(x), f'(x)$ 在 $x=0$ 处按 Taylor 公式展开. 注意到 $f(0)=f'(0)=0$, 我们有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2=\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$$

$$f'(x)=f'(0)+f''(\eta)x=f''(\eta)x.$$

从而

$$|f(x)|+|f'(x)|=|\frac{1}{2}f''(\xi)x^2|+|f''(\eta)x|.$$

今限制 $x\in[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$, 则 $|f(x)|+|f'(x)|$ 在 $[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$ 上连续有, $x_0\in[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$, 使得

$$|f(x_0)|+|f'(x_0)|=\max_{-\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{4}}|f(x)|+|f'(x)|\equiv M.$$

我们只要证明 $M=0$ 即可. 事实上

$$\begin{aligned}M=|f(x_0)|+|f'(x_0)|&=|\tfrac{1}{2}f''(\xi_0)x_0^2|+|f''(\eta_0)x_0|\\&\le\tfrac{1}{4}(|f''(\xi_0)|+|f''(\eta_0)|)\\&\le\tfrac{1}{4}(|f'(\xi_0)|+|f(\xi_0)|+|f'(\eta_0)|+|f(\eta_0)|)\\&\le\tfrac{1}{4}\cdot 2M=\tfrac{1}{2}M.\end{aligned}$$

即 $0\le M\le\frac{1}{2}M$. 所以 $M=0$, 在 $[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$ 上 $f(x)\equiv 0$, 证毕.

例 4.22 求证 $\frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\sin x}, \forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

证明 原式等价于 $f(x)\equiv\sin x\cdot\tan x-x^2>0$. 因 $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$.

$$f'''(x)=\sin x(5\sec^2x-1)+6\sin^3x\sec^4x>0,$$

故 $f(x)>0$ (当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$). 原式得证.

例 4.23 设 $0<x_1<1, x_{n+1}=\sin x_n\ \ (n=1,2,\cdots,)$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}x_n=\sqrt{3}$.

证明 $0<x_1<1, 0<x_2=\sin x_1<x_1<1$, 用数学归纳法可证 $0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n<1$. 又单调有界原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. $x_{n+1}=\sin x_n$ 两边取极限得 $a=\sin a, a=0$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}nx_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}\quad(Stolz\text{定理})\\&=-\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2x_{n+1}^2}{x_{n+1}^2-x_n^2}=-\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2\sin^2x_n}{\sin^2x_n-x_n^2}.\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin^2x}{\sin^2x-x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{\sin^2x-x^2}&=\lim_{x\to0}\frac{4x^3}{2\sin x\cos x-2x}\\&=4\lim_{x\to0}\frac{x^3}{\sin 2x-2x}=4\lim_{x\to0}\frac{3x^2}{2\cos 2x-2}\\&=-6\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos 2x}=6\lim_{x\to0}\frac{2x}{2\cos 2x}=3.\end{aligned}$$

再由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n^2 = 3$ 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}x_n = \sqrt{3}$.

第四章复习题

2. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续, 在 (a,b) 内可导, $f(a) = f(b) = 0$. 试证: $\forall\alpha \in \mathrm{R}, \exists\xi \in (a,b)$ 使得 $\alpha f(\xi) = f'(\xi)$.

提示 考虑辅助函数 $F(x) = f(x)e^{-\alpha x}$.

3. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, $\forall x \in (a,b), g'(x) \neq 0$, 试证: $\exists\xi \in (a,b)$, 使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}$.

提示 考虑辅助函数 $F(x) = [f(x) - f(a)][g(b) - g(x)]$.

4. 设 $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta \cdot h), (0 < \theta < 1)$, 且 $f^{(n+1)}(x) \neq 0$, 证明:

$$\lim_{h\to 0} \theta = \frac{1}{n+1}.$$

提示

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + o(h^{n+1}).$$

从而有 $\theta h \frac{f^{(n)}(x+\theta h) - f^{(n)}(x)}{\theta h} = \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}(x) + o(h)$.

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 则存在 $x \in (a,b)$ 满足 $\frac{bf(b)-af(a)}{b-a} = f(\xi) + \xi f'(\xi)$.

6、设 f 在 $[0,+\infty)$ 可导, 且 $0 \le f(x) \le \dfrac{x}{1+x^2}$, 证明：存在 $\xi > 0$ 使得 $f'(\xi) = \dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

7. 设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内二次可导,$f(a) = f(b) = 0$ 且存在 $c \in (a,b)$, 使 $f(c) > 0$. 证明：存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f''(\xi) < 0$.

8、设 $f \in C(R)$, 存在常数 $k \in (0,1)$, 使得 $|f(x) - f(y)| \le k|x-y|$ 对一切 $x, y \in R$ 成立. 求证：在 R 上有唯一的不动点.

9. 设函数在区间 $[0,+\infty)$ 上可导,$f(0) = 0$ 且 f' 严格递增, 求证: $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(a,+\infty)$ 也严格递增.

10. 设函数 f 在 R 有上界, 且 $f'' \ge 0$, 证明：f 为常值函数.

11. 设函数 f, g 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续, 且当 $x > a$ 时 $|f'(x)| \le g'(x)$, 证明：当 $x \ge a$ 时

$$|f(x) - f(a)| \le g(x) - g(a).$$

12. 设函数 f 在开区间 I 内连续, 并且 I 中的每一点都是极值点, 求证: f 是 I 内的常值函数.

13. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足 $|f(x) - f(y)| \le N|x-y|^{\alpha}, \forall x, y \in [a,b]$, 其中 $M > 0, \alpha > 1$ 为常数, 证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为常数.

14. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中连续, $f(a) < f(b)$, 又设对一切 $x \in (a,b)$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}$$

存在, 用 $g(x)$ 表示这一极限值, 求证: 存在 $c \in (a,b)$, 使得 $g(c) \geq 0$.

15. 设 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上, 具有介质性质: $\forall r : f(c_1) < r < f(c_2)$ 其中 $c_1, c_2 \in [a,b]$, 必 $\exists c$ 在 c_1, c_2 之间, 使得 $f(c) = r$, 又设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可微, $f'(x)$ 在 (a,b) 内有界, 求证: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

16. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可微, 且满足不等式 $0 \leq f(x) \leq \ln\frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}, \forall x \in (0,+\infty)$, 证明存在一点 $\xi \in (0,+\infty)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{2}{2\xi+1} - \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$.

17. 设 $f(x)$ 在 x_0 处有连续的导数, 求证: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $k \neq h, |h|, |k| < \delta$ 时, 有 $|\frac{f(x_0+h)-f(x_0+k)}{h-k} - f'(x_0)| < \varepsilon$.

18. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 过点 $A(a,f(a))$ 与 $B(b,f(b))$ 的直线与曲线 $y = f(x)$ 相交于 $C(c,f(c))$, 其中 $a < c < b$, 证明：在 (a,b) 中至少存在一点 ξ, 使得 $f''(\xi) = 0$.

19. 函数 $f(x)$ 在 $[0,x]$ 区间上的拉格朗日中值公式为 $f(x) - f(0) = f'(\theta x)x$, 其中 $0 < \theta < 1$, 且 θ 是与 $f(x)$ 及 x 有关的量, 对 $f(x) = \arctan x$, 求当 $x \to 0+$ 时 θ 的极限值.

20. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可微, 若 ξ 为 (a,b) 内一定点 $f(\xi) > 0, (x-\xi)f'(x) \geq 0$, 则在 $[a,b]$ 上总成立着 $f(x) > 0$.

21. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导,$f'(a) = f'(b) = 0$ 并存在点 $c \in (a,b)$ 有 $f(c) = \max\limits_{a\leq x\leq b} f(x)$, 证明：方程 $f'''(x) = 0$ 在 (a,b) 内至少有一个根.

22. 证明：在区间 $(-1,1)$ 内, 至少存在两点, 使 $\frac{d^2}{dx^2}[(x^2-1)^n x] = 0$ (n 为大于 1 的正整数).

23. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 恒有 $|f(x)| \leq 1, |f''(x)| \leq 2$. 证明：当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $|f'(x)| \leq 3$.

24. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数, 且满足 $M_k = \sup\limits_{-\infty<x<+\infty} |f^k(x)| < +\infty$, $(k = 0,2)$. 试证: $M_1 = \sup\limits_{-\infty<x<+\infty} |f'(x)| < +\infty$, 且 $M_1^2 \leq 2M_0M_2$.

提示 上述 3 题同例 4.2.4，用泰勒展开.

25. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二次可导, 且 $f(0) = 0, f''(x) < 0$, 求证：$\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,a]$ 上单调下降.

26. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二次可微, $f''(x) \geq 0$, $\lim\limits_{\to+\infty} f(x) = 0$, 求证：$\lim\limits_{\to+\infty} f'(x) = 0$.

27. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 但非线性函数, 求证：$\exists \xi, \eta \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(\eta)$.

28. 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) + xf'(x)] = l$, 求证：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

29. 证明：若 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 内可导但无界, 则其导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内也必无界.

30. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导,, 则有 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(f(0)+f(1)) - \frac{1}{8}f''(\xi)$.

31. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内连续, 在 (a,b) 内二阶可导, 且 $|f''(x)| \geq m \geq 0$ (m 为常数), 又 $f(a) = f(b) = 0$, 证明；$\max\limits_{0\leq x\leq b} |f(x)| \geq \frac{m}{8}(b-a)^2$.

32. 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可微, 且满足 $|f'(x)| \leq 1$, 求证：$\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n})$ 存在.

33. 证明：函数 $f(x) = (\frac{2}{\pi} - 1)\ln x - \ln 2 + \ln(1+x)$ 在 $(0,1)$ 内只有一个零点.

34、设函数 f 在 $(a,+\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) + f'(x)) = 0$, 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

35. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=0$.

36、设 f 与 g 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导, 它们在 $-\infty$ 和 $+\infty$ 上分别存在有限的极限, 又设当 $x\in R$ 时 $g'(x)\neq 0$. 证明：存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$ 使得 $\dfrac{f(+\infty)-f(-\infty)}{g(+\infty)-g(-\infty)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

37、设 $n\in N$, 且 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k x}$, 其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为互不相等的实数,$c_1,\cdots,c_n$ 是不同时为 0 的实数, 试问：函数 f 至多能有多少个实零点？

38. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,$f'(a)=f'(b)$. 求证：$\exists c\in(a,b)$, 使得 $f(c)-f(a)=(c-a)f'(c)$.

提示: 先对 $f'(a)=f'(b)=0$ 情形证明, 再考虑 $g(x)=f(x)-A(x-a)$, 其中 $A=f'(a)=f'(b)$.

39、函数 f 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(1)-f(0)=1$. 求证：对于 $k=0,1,\cdots,n-1$, 存在一点 $\xi_k\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi_k)=\dfrac{n!}{k!(n-1-k)!}\xi_k^k(1-\xi_k)^{n-1-k}$.

40、设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可导, 求证：

（1）导函数 f' 可以取到 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的一切数值；（提示：可先设 $f'(a)f'(b)<0$.）

（2）f' 无第一类间断点.

41、函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内 n 次可导, 设 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 求证：有一点 $\xi\in(a,b)$, 使

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_n) \end{vmatrix} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)\, \amalg_{i>j}\,(x_i-x_j).$$

42、设 p 是一个实系数多项式, 再构造一个多项式 $q(x)=(1+x^2)p(x)p'(x)+x(p(x)^2)+p'(x)^2$. 假设方程 $p(x)=0$ 有 n 个大于 1 的不同实根, 试证：方程 $q(x)=0$ 至少有 $2n-1$ 个不同实根.

43、设 $f:R\to R$ 二次连续可导, 且对一切 $x\in R$ 有 $|f(x)|\leq 1$, 此外 $f(0)^2+f'(0)^2=4$, 证明：存在点 $x_0\in R$ 使得 $f(x_0)+f''(x_0)=0$.

44. 对于数列 $x_0=a,\quad 0<a<\frac{\pi}{2},\ x_{n+1}=\sin x_{n-1}\quad (n=1,2,\cdots)$. 证明: (1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}x_n=1$.

第五章　求导的逆运算 (不定积分)

§ 5.1　不定积分的定义与性质

定义 5.1.1 若在某个区间上, $F'(x) = f(x)$, 则在这个区间上, 函数 $F(x)$ 叫做函数 $f(x)$ 的原函数.

注：若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则 $f(x)$ 的任一原函数 $\phi(x)$ 可写为 $\phi(x) = F(x) + C$.

定义 5.1.2 $f(x)$ 在某区间的原函数全体称为 $f(x)$ 在此区间的不定积分, 记为

$$\int f(x)dx.$$

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则 $\int f(x)dx = F(x) + C$.

如：$\int \cos xdx = \sin x + C$.

注 (1) $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$;　$\int (\frac{d}{dx})f(x)dx = f(x) + c$.

(2) 不定积分是求导运算的逆运算.

基本公式

$$\begin{array}{ll}
d(e^x) = e^x dx & \int e^x e^x dx = e^x + C \\
d(\ln x) = \dfrac{dx}{x} & \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \\
d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1}dx \ \ (\mu \neq 0) & \int x^\mu dx = \dfrac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C, (\mu \neq -1) \\
d(\sin x) = \cos xdx & \int \cos xdx = \sin x + C \\
d(\cos x) = -\sin xdx & \int \sin x = -\cos x + C \\
d(\tan x) = \sec^2 xdx & \int \sec^2 xdx = \tan x + C \\
d(\cot x) = -\csc^2 xdx & \int \csc^2 xdx = -\cot x + C \\
d(\sec x) = \tan x \sec xdx & \int \tan x \sec x = \sec x + C \\
d(\csc x) = -\cot x \csc xdx & \int \cot x \csc x = -\csc x + C \\
d(\arcsin x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & \int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \\
d(\arctan x) = \dfrac{dx}{1+x^2} & \int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C
\end{array}$$

运算法则

定理 5.1.1 设 $f(x), g(x)$ 在某区间上的不定积分存在, k 为任意实数, 则

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$$

证明 设 $\int f(x)dx = F(x) + C_1, \int g(x)dx = G(x) + C_2$, 则

$$F'(x) = f(x), G'(x) = g(x).$$

所以

$$(F(x) \pm G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = F(x) \pm G(x) + C$$

$$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = F(x) + C_1 \pm (G(x) + C_2) = (F(x) \pm G(x)) + C_1 \pm C_2,$$

其中 C, C_1, C_2 均表示任意常数, 故

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

同理可证

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$$

例 5.1.1 求 $I = \int \left(3x^2 + \frac{4}{x}\right) dx$.

解 $I = 3\int x^2 dx + 4\int \frac{1}{x} dx = x^3 + 4\ln|x| + C$.

例 5.1.2 求 $I = \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$.

解 $I = \int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2} dx = \int dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctan x + C$.

例 5.1.3 求 $I = \int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx$.

解 $I = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} dx = \int (\cos x - \sin x) dx = -\sin x - \cos x + C$.

例 5.1.4 求 $I = \int \left(\tan^2 x - 3\sin x + e^x + 1\right) dx$.

解

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\sec^2 x - 3\sin x + e^x\right) dx \\ &= \int \sec^2 x dx - 3\int \sin x dx + \int e^x dx = \tan x + 3\cos x + e^x + C. \end{aligned}$$

例 5.1.5 求 $I = \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$.

解

$$\begin{aligned} I &= 2\int \left(\frac{1}{5}\right)^x dx - \frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx \\ &= 2\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln\frac{1}{5}} - \frac{1}{5}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}} = -\frac{2}{\ln 5 \cdot 5^x} + \frac{1}{5\ln 2 \cdot 2^x} + C. \end{aligned}$$

例 5.1.6 求 $I = \int \frac{x^2 - 2x + \sqrt[3]{x} + 1}{x^3} dx$.

解 $I=\int\left(\frac{1}{x}-2\frac{1}{x^2}+x^{-\frac{8}{3}}+x^{-3}\right)dx=\ln|x|+\frac{2}{x}-\frac{3}{5}x^{-\frac{5}{3}}-\frac{1}{2x^3}+C.$

例 5.1.7 已知曲线的切线斜率 $k=\dfrac{1}{4}x$, 它是随 x 而变化的.

（1）求此曲线方程;

（2）若曲线经过点 $(2,\dfrac{5}{2})$, 求此曲线方程.

解 由题意 $y'=\dfrac{1}{4}x$, 所以曲线方程族为 $y=\int\dfrac{1}{4}xdx=\dfrac{1}{8}x^2+C.$

若曲线经过点 $(2,\dfrac{5}{2})$, 则 $\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{8}\cdot 2^2+C, C=2$, 所求曲线方程为 $y=\dfrac{1}{8}x^2+2.$

例 5.1.8 求 $\int\max\{x^3,x^2,1\}dx.$

解

$$f(x)=\max\{x^3,x^2,1\}=\begin{cases}x^2, & x<-1,\\ 1, & -1\le x\le 1,\\ x^3, & x>1.\end{cases}$$

$$F(x)=\int\max\{x^3,x^2,1\}=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+C_1, & x<-1,\\ x+C_2, & -1<x<1,\\ \frac{1}{4}x^4+C_3, & x>1.\end{cases}$$

因为 $F(x)$ 在 $x=-1,1$ 处可导, 进而连续, 所以

$$F(-1)=\lim_{x\to-1-}F(x)=\lim_{x\to-1+}F(x);\quad F(1)=\lim_{x\to1-}F(x)=\lim_{x\to1+}F(x).$$

从而

$$F(-1)=-\frac{1}{3}+C_1=-1+C_2;\quad F(1)=1+C_2=\frac{1}{4}+C_3,$$

求得 $C_1=C_2-\frac{2}{3}, C_3=C_2+\frac{3}{4}, F(-1)-1+C_2, F(1)=1+C_2$, 故

$$F(x)=\int\max\{x^3,x^2,1\}=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+C_2-\frac{2}{3}, & x<-1,\\ x+C_2, & -1\le x\le 1,\\ \frac{1}{4}x^4+C_2+\frac{3}{4}, & x>1.\end{cases}$$

其中 C_2 为任意常数.

例 5.1.9 证明函数 $sgnx, x\in[-1,1]$ 不存在原函数.

解

$$sgnx=\begin{cases}-1, & -1\le x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & 0<x\le 1.\end{cases}$$

若 $sgnx, x\in[-1,1]$ 存在原函数 $F(x)$, 则

$$F(x)=\int sgnxdx=\begin{cases}-x+C_1, & -1\le x<0,\\ x+C_2, & 0<x\le 1.\end{cases}$$

$F(0)=\lim\limits_{x\to 0-}F(x)=\lim\limits_{x\to 0+}F(x)$, 即 $F(0)=C_1=C_2=C$, 故

$$F(x)=\begin{cases}-x+C, & -1\le x<0,\\ C, & x=0,\\ x+C, & 0<x\le 1.\end{cases}$$

其中 C 为任意常数. 但

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=-1,$$

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{x}{x}=1,$$

从而 $F'_-(0)\neq F'_+(0)$, $F(x)$ 在 $x=0$ 处不可导, 此与 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数矛盾.

习题 5.1

1. 求下列不定积分：

(1) $\int(x^5+3x^4+\frac{\sqrt{x}}{3})dx$; (2) $\int(5+x-3\sec^2 x)dx$;

(3) $\int(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}})dx$; (4) $\int(e^x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3})dx$;

(5) $\int(7-3x^2)^3dx$; (6) $\int(1-\frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}dx$;

(7) $\int(5\cos x+\sin x+3x+2)dx$; (8) $\int(3^x+(\frac{1}{4})^x-\frac{e^x}{5})dx$;

(9) $\int(\cos x-\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})dx$; (10) $\int(\sin x+e^x+\frac{3x^2}{1+x^2})dx$.

2. 证明：若 $\int f(t)dt=F(t)+c$, 则 $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+c$.

§ 5.2 不定积分的计算

§ 5.2.1 凑微分法

定理 5.2.1 若 $f(x)$ 为区间 I 上的函数, $f(x)$ 可写成 $g(\phi(x))\phi'(x)$, 其中 ϕ 在 I 上可导, 且 $G(u)$ 为 $g(u)$ 的一个原函数, 则 $G(\phi(x))$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 且

$$\int f(x)dx=\int g(\phi(x))\phi'(x)dx=\int g(u)du=G(\phi(x))+C.$$

证明 由 $G'(u)=g(u), u=\phi(x)$ 知

$$\frac{dG(\phi(x))}{dx}=G'(\phi(x))\phi'(x)=g(\phi(x))\phi'(x)=f(x).$$

故

$$\int f(x)dx=\int g(\phi(x))\phi'(x)dx=\int g(u)du=G(\phi(x))+C.$$

例 5.2.1 求 $\int x^2e^{x^3}dx$.

解 $\int x^2e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3}d(x^3) = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$.

例 5.2.2 求 $\int \dfrac{x^7}{3x^8+2}dx$.

解 $\int \dfrac{x^7}{3x^8+2}dx = \dfrac{1}{24}\displaystyle\int \dfrac{1}{3x^8+2}d(3x^8+2) = \dfrac{1}{24}\ln(3x^8+2) + C$.

例 5.2.3 求 $\int \dfrac{\ln x}{x}dx$.

解 $\int \dfrac{\ln x}{x}dx = \displaystyle\int \ln x d(\ln x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2 + C$.

例 5.2.4 求 $\int \dfrac{1}{x^2+a^2}dx \ (a>0)$.

解 $\int \dfrac{1}{x^2+a^2}dx = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int \dfrac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}d\left(\dfrac{x}{a}\right) = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C$.

例 5.2.5 求 $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$.

解 由于 $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$, 所以

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-a^2}dx &= \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx \\
&= \frac{1}{2a}\left(\int \frac{1}{x-a}dx - \int \frac{1}{x+a}dx\right) \\
&= \frac{1}{2a}\left[\int \frac{1}{x-a}d(x-a) - \int \frac{1}{x+a}d(x+a)\right] \\
&= \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C \\
&= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.
\end{aligned}$$

例 5.2.6 求 $\int \tan x dx$.

解 $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{\cos x}d(\cos x) = -\ln|\cos x| + C$.

类似可得 $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$.

例 5.2.7 求 $\int \sin^3 x\cos^5 x dx$.

解

$$\begin{aligned}
&\int \sin^3 x\cos^5 x dx = \int \sin^3 x\cos^4 x d(\sin x) = \int \sin^3 x(1-\sin^2 x)^2 d(\sin x) \\
&= \int \sin^3 x(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)d(\sin x) = \int(\sin^3 x - 2\sin^5 x + \sin^7 x)d(\sin x) \\
&= \frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{3}\sin^6 x + \frac{1}{8}\sin^8 x + C.
\end{aligned}$$

例 5.2.8 求 $\int \sin^3 x dx$.

解 $\int \sin^3 x dx = -\int \sin^2 x d(\cos x) = -\int(1-\cos^2 x)d(\cos x) = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$.

例 5.2.9 求 $\int \cos^4 x dx$.

解

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x dx &= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx \\ &= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx \\ &= \frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.\end{aligned}$$

例 5.2.10 求 $\int \sec x dx$.
解

$$\int \sec x dx = \int \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx$$
$$= \int \frac{1}{1-\sin^2 x}d(\sin x) = -\int \frac{1}{\sin^2 x-1}d(\sin x)$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}+C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+2\sin x+\sin^2 x}{\cos^2 x}+C = \frac{1}{2}\ln(\sec^2 x+2\sec x\tan x+\tan^2 x)+C$$
$$= \ln|\sec x+\tan x|+C.$$

例 5.2.11 求 $\int \csc x dx$.
解

$$\begin{aligned}\int \csc x dx &= \int \frac{1}{\sin x}dx = -\int \frac{1}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}d\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\int \sec\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx = -\ln\left|\sec\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+C \\ &= -\ln|-\csc x-\cot x|+C = \ln\left|\frac{1}{\csc x+\cot x}\right|+C \\ &= \ln\left|\frac{\csc x-\cot x}{\csc^2 x-\cot^2 x}\right|+C = \ln|\csc x-\cot x|+C.\end{aligned}$$

例 5.2.12 求 $I = \int \sin 5x\cos 3x dx$.
解

$$I = \int \sin 5x\cos 3x dx = \frac{1}{2}\int(\sin 8x+\sin 2x)dx$$
$$= \frac{1}{16}\int \sin 8x d(8x)+\frac{1}{4}\int \sin 2x d(2x)$$
$$= -\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C.$$

§ 5.2.2 换元法

定理 5.2.1 设 $f(x)$ 连续,$x=\phi(t)$ 及 $\phi'(t)$ 皆连续, $x=\phi(t)$ 的反函数 $t=\phi^{-1}(x)$ 存在且连续, 并且 $\int f(\phi(t))\phi'(t)dt=F(t)+C$, 则 $\int f(x)dx=F(\phi^{-1}(x))+C$.

证明 由 $\int f(\phi(t))\phi'(t)dt=F(t)+C$ 知 $F'(t)=f(\phi(t))\phi'(t)$, 从而

$$\frac{dF(\phi^{-1}(x))}{dx}=F'(t)\frac{dt}{dx}=f(\phi(t))\phi'(t)\frac{1}{\phi'(t)}=f(x),$$

故 $\int f(x)dx=F(\phi^{-1}(x))+C$.

注 形如 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, 用代换 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

形如 $\sqrt{a^2-x^2}$, 用代换 $x=a\sin t,(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$.

形如 $\sqrt{x^2-a^2}$, 若 $x>a$, 用代换 $x=a\sec t,(0<t<\frac{\pi}{2})$; 若 $x<-a$, 令 $x=-t$ 转化为前一种情形.

形如 $\sqrt{x^2+a^2}$, 用代换 $x=a\tan t,(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$.

例 5.2.13 求 $\int\frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}$.

解 令 $\sqrt{1+x}=t$, 则 $x=t^2-1, dx=2tdt$.

$$\begin{aligned}&\int\frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}=\int\frac{2tdt}{1+t}=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt\\&=2(t-\ln|1+t|)+C=2\sqrt{1+x}-\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)+C.\end{aligned}$$

例 5.2.14 求 $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$.

解 令 $\sqrt[6]{x}=t$, 则 $x=t^6, dx=6t^5dt$.

$$\begin{aligned}&\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}=6\int\frac{t^5}{t^3(1+t^2)}dt=6\int\frac{t^2}{1+t^2}dt\\&=6\int(1-\frac{1}{1+t^2})dt=6(t-\arctan t)+C=6\sqrt[6]{x}-6\arctan\sqrt[6]{x}+C.\end{aligned}$$

例 5.2.15 求 $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

解 令 $\sqrt{x}=t$, 则 $x=t^2, dx=2tdt$.

$$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{\sin t}{t}2tdt=2\int\sin tdt=-2\cos t+C=-2\cos\sqrt{x}+C.$$

例 5.2.16 求 $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$.

解 令 $x = a\sin t\ \ (a > 0, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$, 则 $dx = a\cos t dt$.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int a\cos t(a\cos t dt) = a^2\int \cos^2 t dt$$
$$= a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C$$
$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\sin t\cos t + C$$
$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} + C$$
$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

用三角代换同样可求得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} = \frac{x}{2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$$

§ 5.2.3 分部积分法

定理 5.2.2 设 u, v 可微, 则 $\int udv = uv - \int vdu$.
证明 因为 $d(uv) = udv + vdu$, 所以

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu, \int udv = uv - \int vdu.$$

特点: v 好求,$\int vdu$ 易求.
例 5.2.17 求 $\int x^2e^xdx$.
解

$$\int x^2e^xdx = \int x^2d(e^x) = x^2e^x - 2\int xe^xdx = x^2e^x - 2\int xd(e^x)$$
$$= x^2e^x - 2(xe^x - \int e^xdx) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

例 5.2.18 求 $\int x\arctan xdx$.

解

$$\int x\arctan x dx = \int \arctan x d(\frac{x^2}{2}) = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int (1-\frac{1}{1+x^2})dx = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

例 5.2.19 求 $\int e^{ax}\cos bx dx$. $(a\neq 0, b\neq 0)$.

解 因为

$$I = \int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{b}\int e^{ax}d(\sin bx)$$
$$= \frac{1}{b}(e^{ax}\sin bx - a\int e^{ax}\sin bx dx) = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}\int e^{ax}d(\cos bx)$$
$$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}(e^{ax}\cos bx - \int ae^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}I.$$

所以

$$(1+\frac{a^2}{b^2})I = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx,$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C.$$

§ 5.2.4 有理函数积分

部分分式法

例 5.2.20 求 $\int \frac{x}{x^3+x^2+3x+3}dx$.

解 设 $\frac{x}{x^3+x^2+3x+3} = \frac{x}{(x+1)(x^2+3)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$, 则

$$x \equiv A(x^2+3) + (x+1)(Bx+C).$$

令 $x=-1$, 则 $-1 = 4A, A = -\frac{1}{4}$;

令 $x=0$, 则 $0 = 3A + C, C = -3A = \frac{3}{4}$;

再令 $x=1$, 则 $1 = 4A + 2(B+C), 1 = -1 + 2(\frac{3}{4}+C), B = \frac{1}{4}$.

故

$$\frac{x}{x^3+x^2+3x+3} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\frac{x}{x^2+3} + \frac{3}{4}\frac{1}{x^2+3}.$$

$$\int \frac{x}{x^3+x^2+3x+3}dx = -\frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{8}\ln(x^2+3) + \frac{3}{4\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

5.2.5 含 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的积分

例 5.2.21 求 $I = \int \frac{2x+1}{\sqrt{-x^2-4x}}dx$.

解

$$
\begin{aligned}
I &= -\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-4x}} d(-x^2-4x) - 3\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-4x}} dx \\
&= -2\sqrt{-x^2-4x} - 3\int \frac{1}{\sqrt{4-(x+1)^2}} dx \\
&= -2\sqrt{-x^2-4x} - 3\arcsin\frac{x+2}{2} + C.
\end{aligned}
$$

例 5.2.22 求 $\int (x+1)\sqrt{x^2-2x+5}dx$.
解

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2-2x+5} d(x^2-2x+5) + 2\int \sqrt{(x-1)^2+4} dx \\
&= \frac{1}{3}(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}} + (x-1)\sqrt{x^2-2x+5} \\
&\quad + 4\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5}) + C.
\end{aligned}
$$

§ 5.2.6 三角函数积分

利用三角公式与万能变换.
例 5.12.23 求 $I = \int \dfrac{dx}{\sin x(1+\cos x)}$.
解 方法 1 (上下同乘 $\sin x$):

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x(1+\cos x)} = -\int \frac{d\cos x}{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)} \\
&= \int \left(\frac{1}{(u-1)(u+1)^2} du = \int \frac{1}{4(u-1)} - \frac{1}{4(u+1)} - \frac{1}{2(u+1)^2}\right) du \\
&= \frac{1}{4}\ln|u-1| - \frac{1}{4}\ln|u+1| + \frac{1}{2(u+1)} + C \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + \frac{1}{2(u+1)} + C \\
&= \frac{1}{4}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \frac{1}{2(1+\cos x)} + C.
\end{aligned}
$$

方法 2 (万能变换 $u = \tan\dfrac{x}{2}$):

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}} \\
&= \int \frac{\sec^4\frac{x}{2}}{4\tan\frac{x}{2}}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}d(\tan\frac{x}{2}) \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1+u^2}{u}du = \frac{1}{2}\int (u+\frac{1}{u})du \\
&= \frac{1}{2}\ln|u| + \frac{1}{4}u^2 + C = \frac{1}{2}\ln|\tan\frac{x}{2}| + \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2} + C.
\end{aligned}
$$

例 5.2.24 求 $I = \int \dfrac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx$.

解法一 $I = \int \tan^4 x\sec^2 x dx = \int \tan^4 x d(\tan x) = \frac{1}{5}\tan^5 x + C$.

解法二

$$I = \int \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{cos^2 x} - 2 + \cos^2 x\right)dx = \tan x - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\sin x.$$

习题 5.2

1. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{3x+6}{4x-5}dx$;

(2) $\int(\sin(2x+4)+\cos(5x+5))dx$;

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2}+3)^2}}$;

(4) $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx$;

(5) $\int \tan x dx$;

(6) $\int \tan\sqrt{1+x^2}\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$;

(7) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$;

(8) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$;

(9) $\int \frac{dx}{\sin^2(x+\frac{\pi}{4})}$;

(10) $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}dx$;

(11) $\int \frac{\sin^2 x\cos x}{1+\sin^3 x}dx$;

(12) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

(13) $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx$

(14) $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin^3 x}dx$;

(15) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$;

(16) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$;

(17) $\int \frac{dx}{x^2-2x+2}$;

(18) $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$;

(19) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$;

(20) $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$.

2. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; (2) $\int \frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{x^2}dx$;

(3) $\int e^{\sqrt{x+1}}dx$; (4) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$;

(5) $\int \sqrt{x^2+a^2}dx$; (6) $\int \sqrt{x^2-a^2}dx$;

(7) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$; (8) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax^2+b}}$;

(9) $\int \frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}}$; (10) $\int \sqrt{2+x-x^2}dx$.

3. 求下列不定积分：

(1) $\int x^2\cos xdx$; (2) $\int x3\ln xdx$;

(3) $\int \ln xdx$; (4) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(5) $\int \csc xdx$; (6) $\int \cos(\ln x)dx$;

(7) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$; (8) $\int x\cos^2 xdx$;

(9) $\int x\sin^2 xdx$; (10) $\int \arccos xdx$;

(11) $\int e^{ax}\cos bxdx$; (12) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$.

4. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$; (2) $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx$;

(3) $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$; (4) $\int \frac{dx}{x^3+1}$;

(5) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$; (6) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$;

(7) $\int \frac{x^2dx}{1-x^4}$; (8) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

5. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{dx}{\sin x+\tan x}$; (2) $\int \frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}}$;

(3) $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^4}}$; (4) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2+4x}}$;

(5) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}dx$; (6) $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$;

(7) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$; (8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}$;

(9) $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$; (10) $\int x\sqrt{x^4+2x^2-1}dx$;

(11) $\int \sqrt{2+x-x^2}dx$; (12) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$;

(13) $\int \sin^6 xdx$ (14) $\int \sin^2 x\cos^4 xdx$;

(15) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx$; (16) $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$;

(17) $\int \sin 5x\cos xdx$; (18) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx$;

(19) $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$; (20) $\int xe^x\cos xdx$;

(21) $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$; (22) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$;

(23) $\int x^2e^x\cos xdx$ (24) $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$;

(25) $\int x\arctan x\ln(1+x^2)dx$; (26) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

(27) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}dx$.

第五章典型例题选讲

例 5.1 求不定积分

$$I_1 = \int (\cos^4 x + \sin^4 x)dx \text{ 与 } I_2 = \int (\cos^4 x - \sin^4 x)dx,$$

进而求出 $\int \cos^4 xdx$ 与 $\int \sin^4 xdx$.

解 利用三角函数的倍角半角公式易得

$$\begin{aligned} I_1 &= \int [(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\cos^2 x \sin^2 x]dx \\ &= \int (1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 2x)dx = \tfrac{1}{4}\int (3 + \cos 4x)dx \\ &= \tfrac{1}{4}(3x + \tfrac{1}{4}\sin 4x) + C_1; \\ I_2 &= \int (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)dx \\ &= \int \cos 2xdx = \tfrac{1}{2}\sin 2x + C_2. \end{aligned}$$

从而又有

$$\begin{aligned} \int \cos^4 xdx &= \tfrac{1}{2}(I_1 + I_2) \\ &= \tfrac{1}{32}(12x + \sin 4x + 8\sin 2x) + C_3; \\ \int \sin^4 xdx &= \tfrac{1}{2}(I_1 - I_2) \\ &= \tfrac{1}{32}(12x + \sin 4x - 8\sin 2x) + C4. \end{aligned}$$

其中 $C_1, C_2, C_3, C4$ 都是任意常数.

例 5.2 求不定积分

$$I_1 = \int (2^x - 3^3)^2 dx \text{ 与 } I_2 = \int \frac{dx}{x^4(1 + x^2)}.$$

解

$$\begin{aligned} I_1 &= \int (4^x - 2\cdot 6^x + 9^x)dx \\ &= \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{2\cdot 6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C_1; \\ I_2 &= \int \frac{(1+x^2)-x^2}{x^4(1+x^2)}dx \\ &= \int \left[\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2(1+x^2)}\right]dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right)dx \\ &= -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} + \arctan x + C. \end{aligned}$$

例 5.3 试用多种办法求不定积分

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{4 - x^2}}.$$

解一 相继使用第一, 第二换元积分法, 得到

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{x^2\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}} = -\int \frac{1}{2\sqrt{(\frac{2}{x})^2-1}}d(\tfrac{2}{x}) \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}(\text{令} u = \sec t) \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{\sec t\tan t}{\tan t}dt \\
&= -\frac{1}{2}\ln|\sec t + \tan t| + C \\
&= -\frac{1}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2-1}\right| + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{2+\sqrt{4-x^2}}\right| + C.
\end{aligned}$$

解二 令 $x = 2\sin t$, 得到

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{2\cos t}{4\sin t\cos t}dt = \frac{1}{2}\int \csc t dt \\
&= \frac{1}{2}\ln|\csc t - \cot t| + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + C.
\end{aligned}$$

解三 令 $x^2 = \frac{1}{t}$, 于是有 $\frac{dx}{x} = \frac{-1}{2t}dt$, 从而得到

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t\sqrt{4-\frac{1}{t}}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{4t^2-t}} \\
&= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{(t-\frac{1}{8})^2-(\frac{1}{8})^2}}d(t-\tfrac{1}{8}) \\
&= -\frac{1}{4}\ln\left|t - \frac{1}{8} + \sqrt{t^2-\frac{t}{4}}\right| + C_1 \\
&= -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{8} + \sqrt{\frac{1}{x^4}-\frac{1}{4x^2}}\right| + C_1 \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{2+\sqrt{4-x^2}}\right| + C.
\end{aligned}$$

解四 令 $\sqrt{4-x^2} = t$, 于是 $x = \pm\sqrt{4-x^2}$, 从而得到

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{\pm t\sqrt{4-t^2}} \cdot \frac{\mp t}{\sqrt{4-t^2}}dt \\
&= -\int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right)dt \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{2+\sqrt{4-x^2}}\right| + C.
\end{aligned}$$

解五 由于

$$I = \int \frac{1}{x(2-x)}\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}dx,$$

因此又可令 $t = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$, 由此解出

$$x = \frac{2(1-t^2)}{1+t^2},\quad 2-x = \frac{4t^2}{1+t^2},\quad dx = \frac{-8t}{(1+t^2)^2}dt,$$

并得到

$$
\begin{aligned}
I &= \int \tfrac{1+t^2}{2(1-t^2)} \cdot \tfrac{1+t^2}{4t^2} \cdot t \tfrac{-8t}{(1+t^2)^2} dt \\
&= -\int \tfrac{dt}{1-t^2} = \tfrac{1}{2}\ln\left|\tfrac{t-1}{t+1}\right| + C \\
&= \tfrac{1}{2}\ln\left|\tfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}}\right| + C \\
&= \tfrac{1}{2}\ln\left|\tfrac{x}{2+\sqrt{4-x^2}}\right| + C.
\end{aligned}
$$

例 5.4 求不定积分

$$
I_1 = \int (2x-1)\cos 3x dx \text{ 与 } I_2 = \int x^2 e^{-x} dx.
$$

解 对于 I_1, 令 $u = 2x-1, v' = \cos 3x$, 则得

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int (2x-1) d(\tfrac{1}{3}\sin 3x) \\
&= \tfrac{1}{3}(2x-1)\sin 3x - \tfrac{2}{3}\int \sin 3x dx \\
&= \tfrac{1}{3}(2x-1)\sin 3x + \tfrac{2}{9}\cos 3x + C.
\end{aligned}
$$

类似地, 经两次分部积分, 又可求得

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int x^2 d(-e^{-x}) = -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x} dx \\
&= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2\int e^{-x} dx \\
&= -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C.
\end{aligned}
$$

例 5.5 求不定积分

$$
I_1 = \int \sec^3 x dx \text{ 与 } I_2 = \int \sqrt{x^2 + a^2} dx.
$$

解 由于

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int \sec x d(\tan x) \\
&= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx \\
&= \sec x \tan x + \int \sec x dx - \int \sec^3 x dx \\
&= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| - I_1,
\end{aligned}
$$

故得

$$
I_1 = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C.
$$

对于 I_2, 若令 $x = a\tan t$, 则得

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int a\sec t \cdot a\sec^2 t dt = a^2 \int \sec^3 t dt \\
&= \tfrac{a^2}{2}(\sec t \tan t + \ln|\sec t + \tan t|) + C_1 \\
&= \tfrac{a^2}{2}\left[\tfrac{x}{a}\sqrt{1 + \tfrac{x^2}{a^2}} + \ln\left|\sqrt{1 + \tfrac{x^2}{a^2}} + \tfrac{x}{a}\right|\right] + C_1 \\
&= \tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2\ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right|\right) + C.
\end{aligned}
$$

它也可利用 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{a^2+x^2}\right| + C$ 而求得:

$$\begin{aligned}
I_2 &= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dt \\
&= x\sqrt{x^2+a^2} + \int \frac{a^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}}dx - \int \sqrt{x^2+a^2}dx \\
&= x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| - I_2, \\
I_2 &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right|\right) + C.
\end{aligned}$$

第五章复习题

1. 求不定积分:

(1) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx$; (2) $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$;

(3) $\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)}$; (4) $\int \frac{dx}{1-x^4}$;

(5) $\int \frac{dx}{\tan^2 x}$; (6) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}dx$;

(7) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$; (8) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$;

(9) $\int \frac{dx}{2+\tan^2 x}$; (10) $\int \frac{dx}{1+a\cos x}dx\ \ (a>0)$;

(11) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

2. 求不定积分:

(1) $\int \frac{dx}{1+x^2+x^4}$; (2) $\int \frac{x^2}{1+x^2+x^4}$;

(3) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx$; (4) $\int \frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$.

3. 求不定积分:

(1) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$; (2) $\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$;

(3) $\int \sqrt{1+x^2}dx$; (4) $\int x^2\sqrt{x^2+1}dx$;

(5) $\int e^{2x}(\tan x+1)^2 dx$; (6) $\int \frac{e^x dx}{e^x+e^{-x}}$;

(7) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$; (8) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1^4)}}$.

4. 利用公式 $\int (f(x)+f'(x))e^x dx = \int (e^x f(x))' dx = e^x f(x) + c$, 求下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$; (2) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx$.

5. 设

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x<0; \\ x+1 & 0\le x\le 1; \\ 2x & x>1. \end{cases}$$

求 $\int f(x)dx$.

6. 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{\cos x \sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$; (2) $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$;

(3) $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$; (4) $\int \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$;

(5) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$; (6) $\int \tan^4 xdx$;

(7) $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}}$ $(x > 1)$; (8) $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{1+x^2}}dx$;

(9) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$; (10) $\int e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$;

(11) $\int t^a\ln tdt$ (a为常数); (12) $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$;

(13) $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx$; (14) $\int \frac{dx}{1+4\cos x}$;

(15) $\int(\ln\ln x + \frac{1}{\ln x})dx$; (16) $\int \frac{xdx}{x^3-3x+2}$.

7. 导出不定积分的递推公式:

(1) $I_n = \int(\ln x)^n dx$;

(2) $I_n = \int \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2+1}}$;

(3) $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$ $(n > 2)$.

8. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$; (2) $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$;

(3) $\int \sqrt{x\sqrt{x}}dx$; (4) $\int[\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}]dx$;

(5) $\int \tan^2 xdx$; (6) $\int \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$;

(7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sin x}$; (8) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$;

(9) $\int \frac{dx}{2+3x^2}$; (10) $\int \frac{dx}{2-3x^2}$;

(11) $\int \sqrt[3]{1-3x}dx$; (12) $\int x\sqrt[3]{1-3x}dx$.

9. 求不定积分:

$$I = \int \frac{1}{1+x^4}dx; \qquad J = \int \frac{x^2}{1+x^4}dx.$$

10. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$; (2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$;

(3) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$ $(a > 0)$; (4) $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx$ $(a \geq 0)$;

(5) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$; (6) $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$;

(7) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}(a < b)$; (8) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx$.

11. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$; (2) $\int \frac{dx}{(a^2+X^2)^3}$;

(3) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx$; (4) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$;

(5) $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$; (6) $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx$.

12. 求下列不定积分:

(1) $\int \ln(a+x^2)dx$; (2) $\int x^{\alpha}\ln x dx$;
(3) $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx$; (4) $\int x^2 e^{-2x}dx$;
(5) $\int x\cos\beta x dx$; (6) $\int x^2\sin 2x dx$;
(7) $\int x\arctan x dx$; (8) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$;
(9) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$; (10) $\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2)}dx$.

13. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1+x^2}}e^x dx$; (2) $\int \frac{1+\tan x}{\cos x}e^x dx$;
(3) $\int(\cos x-\sin x)e^{-x}dx$; (4) $\int x(2-x)e^{-x}dx$.

14. 求下列不定积分:

(1) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$; (2) $\int \sqrt{x^2-a^2}dx$;
(3) $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$; (4) $\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$;
(5) $\int x\arctan x\ln(1+x^2)dx$; (6) $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

15. 求下列不定积分:

(1) $\int \sin(\ln x)dx$; (2) $\int \cos(\ln x)dx$;
(3) $\int xe^x\cos x dx$; (4) $\int xe^x\sin x dx$.

16. 求下列不定积分的递推公式

(1) $\int x^n e^x dx$; (2) $\int x^n(\ln x)^m dx$;
(3) $\int \sin^n x dx$; (4) $\int \frac{dx}{\sin^n x}(n\geq 2)$.

17. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$; (2) $\int \frac{dx}{8-2x-x^2}$;
(3) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x-1)}$; (4) $\int \frac{2x-3}{x^2+2x+1}dx$;
(5) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$; (6) $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$.

18. 求下列不定积分:

(1) $\int \cos x\sin^2 x dx$; (2) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}dx$;
(3) $\int \tan x\sin^2 x dx$; (4) $\int \tan^3 x dx$;
(5) $\int \cos^4 x\sin^3 x dx$; (6) $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$;
(7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos x}$; (8) $\int \frac{\sin 2x}{2+\tan^2 x}dx$.

19. 求下列不定积分:

(1) $\int \sec^3 x dx$; (2) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx$
(3) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$; (4) $\int \frac{dx}{2x\cos^2 x+\sin x\cos x+\sin^2 x}$.

20. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{dx}{(1+cosx)^2}$;　　(2) $\int \frac{d\theta}{1+r^2-2r\cos\theta}$ $(0<r<1)$;

(3) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}dx$;　　(4) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$;

(5) $\int \frac{x}{x+\sqrt{x^2-1}}dx$;　　(6) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

21. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$;　　(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$

(3) $\int \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$;　　(4) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

22. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)\cdot f(b)>0, f(a)\cdot f(\frac{a+b}{2})<0$, 求证：对 $\forall k\in R, \exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=kf(\xi)$.

23. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)=0$, 求证：$\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

24. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导且 $f(0)=0$. 求证存在 $\xi\in(0,1)$ 满足 $\frac{f'(1-\xi))}{f(1-\xi)}=\frac{2f'(\xi)}{f(\xi)}$.

25. 已知 $f(1)=1$, 求 $f(2)$. 如果：

（1） $xf'(x)+f(x)=0$ 对一切 $x\in R$ 成立；

（2） $xf'(x)-f(x)=0$ 对一切 $x>0$ 成立.

第六章 函数的定积分及其应用

§ 6.1 定积分的定义

积分的定义的引进：

1 曲边梯形的面积 S

在初等数学中, 已经会求三角形、矩形、多边形等平面直边图形的面积. 对于平面上曲边图形的面积, 除了圆和圆扇形的面积之外, 现在还不会计算.

平面曲边图形中, 最基本的就是曲边梯形, 下面来讨论曲边梯形面积的求法.

在平面直角坐标系 xoy 中, 通常把由三条直线: $x = a$, $x = b$, Ox 轴, 及一条连续的曲线 $y = f(x)(f(x) \geq 0)$ 所围成的图形称为曲边梯形. 把 Ox 轴上的区间 $[a, b]$ 称为曲边梯形的底, 而曲线段 $y = f(x)(a \leq x \leq b)$ 称为曲边梯形的曲边.(图 13)

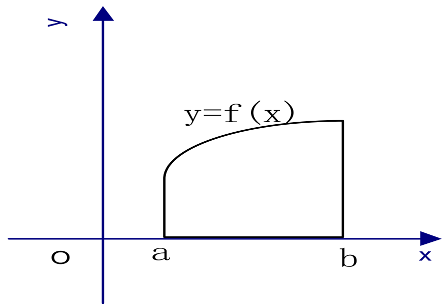

图 13.

由于曲边梯形在底边上各点处的高 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是变化的, 不便于直接求它的面积. 注意到 $f(x)$ 是连续的, 当 x 变化不大时,$f(x)$ 的变化也不大.

当用一组垂直于 Ox 轴的直线, 把曲边梯形分成很多窄条形的小曲边梯形时, 在这些小曲边梯形内, 高度的差别不大, 就可以用一点处的高度, 近似代替小曲边梯形内各点处的高度, 从而用一个小矩形的面积, 近似地代替小曲边梯形的面积. 只要曲边梯形分割得足够细, 且所有的小曲边梯形的底部宽度都很小, 这时, 小矩形的面积与相应的小曲边梯形的面积就越接近, 所有的小矩形面积之和, 就越逼近原来的大曲边梯形的面积 S。现详述如下:

(1) 分割

把区间 $[a, b]$ 任意分割为 n 个子区间, 其分点为

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

每一个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度记为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

过各分点作垂直于 Ox 轴的直线, 把原来的大曲边梯形分成 n 个小曲边梯形, 分别把这些小曲边梯形的面积记为 ΔS_i, $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 则

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i.$$

(2) 以常代变 (近似代替)

在每一个小曲边梯形中, 以底边长为 Δx_i, 底边 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任意一点 ξ_i 处的高度 $f(\xi_i)$ ($\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$) 为高的小矩形的面积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 近似代替小曲边梯形的面积 ΔS_i, 即

$$\Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i,\ (i = 1, 2, \cdots, n).$$

(3) 求和

把 n 个小矩形的面积加起来, 就得到大曲边梯形面积 S 的近似值：

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

(4) 取极限

一般地说, 无论 n 多么大, 各子区间的宽度 Δx_i 多么小, 和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 仍然不等于曲边梯形的面积 S, 它只是 n 个小矩形组成的台阶形的面积.

若把区间 $[a, b]$ 的分割无限地变细, 使每一个子区间的长度 Δx_i 皆趋于零, 则台阶形的面积 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, 与曲边梯形的面积 S 的差别就越来越小.

为了求出 S 的精确值, 令 $\|T\| = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$, 如果无论对区间 $[a, b]$ 采取何种分割, 也不论点 ξ_i 在子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 中如何取法, 只要分割无限地变细, 当 $\|T\| \to 0$ 时, 和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 均存在唯一的极限, 则这个极限值就是曲边梯形的面积 S. 即

$$S = \lim_{\|T\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

2 变速直线运动的路程

设物体作直线运动, 速度为 v, 求从时刻 $t = a$ 到 $t = b$ 时物体所走过的路程 s.

如果速度 v 不变, 物体作匀速直线运动, 路程 s 等于速度乘以所用的时间：$s = v(b - a)$.

现在考虑物体作变速直线运动, 其速度 v 随时间 t 而改变, 即 $v = v(t)$ ($a \le t \le b$) 是 t 的连续函数, 要求物体在时间间隔 $[a, b]$ 上所走过的路程 s. 解决这个问题的办法与上面求曲边梯形的面积相似.

(1) 分割

把区间 $[a, b]$ 任意分割为 n 个子区间, 其分点为

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b.$$

每一个子区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 的长度记为 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ($i = 1, 2, \cdots, n$). 物体在时间间隔 $[a, b]$ 上所走过的路程 s, 等于它在各子区间时间间隔 $[t_{i-1}, t_i]$ 上所走过的路程之和.

(2) 以常代变 (近似代替)

在每一小段时间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上, 以任意一时刻 ξ_i 处的速度 $v(\xi_i)$ 代替这一小段时间上各点处的速度, 得到物体在这一小段时间上路程 Δs_i 的近似值：

$$\Delta s_i \approx v(\xi_i)\Delta t_i, (i = 1, 2, \cdots, n).$$

(3) 求和

把上面的 n 个 Δs_i 的近似值加起来, 就得到路程 s 的近似值:

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i.$$

(4) 取极限

很明显, 分割越细, 总的误差就越小, 把区间 $[a,b]$ 无限地细分下去. 如果无论对 $[a,b]$ 采取何种分割, 也不论 ξ 在 $[t_{i-1},t_i]$ 中如何取法, 记 $\max\limits_{1\le i\le n}\Delta t_i = \|T\|$, 当 $\|T\|\to 0$ 时, 和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$ 均存在唯一的极限, 则这个极限值就是路程 s 的精确值. 即

$$s = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i.$$

定义 6.1.1 函数 f 在区间 $[a,b]$ 上有定义, 如果存在实数 I 使得对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $[a,b]$ 的分割 $T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ 适合 $\|T\| = \max\limits_{1\le i\le n}|x_i - x_{i-1}| < \delta$, 而不管 $\xi_i \in [x_{i-1},x_i](1\le i\le n)$ 如何选择, 都有

$$\left|I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| < \varepsilon$$

成立时, 称 f 在 $[a,b]$ 上可积, 称 I 是 f 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 定积分. 函数的积分通常用符号 $\int_a^b f(x)dx$ 来表记, 其中 a 与 b 分别称为积分的下限和上限,f 称为被积函数,x 称为积分变量,$f(x)dx$ 叫做被积表达式.

定理 6.1.1 函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积的必要条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 故存在实数 I, 使对 $\varepsilon_0 = 1$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $\|T\| < \delta$, 无论怎样选取 $\xi_k \in [x_{k-1},x_k], k = 1,\cdots,n$, 都有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - I\right| < 1.$$

取 n 足够大, 使 $\dfrac{b-a}{n} < \delta$. 将区间 $[a,b]$ 均分成 n 等分并记相应的分割为 $T = \{x_k\}$. 对任意 $j, 1\le j\le n$, 取 $\xi_k = x_k, k\ne j$. 于是

$$\left|\sum_{k\ne j}^{n} f(x_k)\Delta x_k + f(\xi_j)\Delta x_j - I\right| < 1,$$

$$|f(\xi_j)\Delta x_j| < |I| + 1 + \sum_{k\ne j}^{n}|f(x_k)\Delta x_k|,$$

$$|f(\xi_j)| < \frac{n(|I|+1)}{b-a} + \sum_{k\neq j}^{n} |f(x_k)|.$$

由于上式右端为常数, 而左端的 ξ_j 可在 $[x_{j-1}, x_j]$ 上任取, 故知 $f(x)$ 在 $[x_{j-1}, x_j]$ 上有界, 再由 j 的任意性知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

此外, 从定积分的定义可以看出, 定积分的值与积分变量无关, 即有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

因此, 在进行运算或论证时, 可随时根据需要而改换积分变量.

在定义中我们总假定 $a < b$, 即下限小于上限. 但在以后运算中, 也会遇到下限不小于上限的情形. 但由定义可直接看出：

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \quad \int_a^a f(x)dx = 0.$$

定积分的这种概念是由黎曼首先引入, 所以当有必要与其他方法所定义的积分相区别时, 我们将把这种积分称之为黎曼积分.

定积分的几何意义：$\int_a^b f(x)dx$ 表示 $y = f(x), x = a, x = b$ 与 x 轴所围若干曲边梯形的面积的代数和.

例 6.1.1 证明 $\int_a^b 1dx = b - a$.

证明 设 $f(x) = 1$, $\forall \varepsilon > 0, \forall$ 分割 $T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 因为

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1\Delta x_i = b - a,$$

所以

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - (b-a)\right| = 0 < \varepsilon,$$

$$\int_a^b 1dx = b - a.$$

例 6.1.2 计算 $\int_a^b xdx$.

解 设 $f(x) = x, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta < \varepsilon, \forall$ 分割 $T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, 任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. 记 $\eta_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \Delta x_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - x_{i-1}^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} \eta_i \Delta x_i\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)\Delta x_i\right| \\
&\le \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i| \Delta x_i \le \|T\| \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \\
&= \|T\|(b-a) < (b-a)\delta < (b-a)\varepsilon,
\end{aligned}$$

所以

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Delta x_i - \frac{1}{2}(b^2-a^2)\right| < \varepsilon,$$

$$\int_a^b xdx = \frac{1}{2}(b^2-a^2).$$

定理 6.1.2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且在 $[a,b]$ 上有原函数 $F(x)$, 则有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = F(x)\mid_a^b = F(b)-F(a).$$

证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 进而一致连续, 由此 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $x^{(1)}, x^{(2)}\in[a,b]$, $|x^{(1)}-x^{(2)}|<\delta$ 时

$$|f(x^{(1)})-f(x^{(2)})|<\varepsilon.$$

对任意分割 $T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 将 $F(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上用拉格朗日中值定理, 存在 $\eta_i\in[x_{i-1},x_i]$ 使得 $F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\eta_i)\Delta x_i=f(\eta_i)\Delta x_i$, 而

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}(F(x_i)-F(x_{i-1}))=\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i)\Delta x_i.$$

当 $\|T\|<\delta, \forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 时

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-(F(b)-F(a))\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i)\Delta x_i\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i)-f(\eta_i))\Delta x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)-f(\eta_i)|\,\Delta x_i \\
&< \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = (b-a)\varepsilon,
\end{aligned}$$

从而

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

例 6.1.3 计算 (1) $\int_0^1 x^2dx$; (2) $\int_0^\pi \sin xdx$.

解 (1) 因为 x^2 在 $[0,1]$ 上连续, $\left[\frac{1}{3}x^3\right]'=x^2$, 所以

$$\int_0^1 x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}(1-0)=\frac{1}{3}.$$

(2) 因为 $\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上连续, $[-\cos x]'=\sin x$, 所以

$$\int_0^\pi \sin xdx = [-\cos x]_0^\pi = -(\cos\pi-\cos 0)=2.$$

例 6.1.4 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$.

解 $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\left(\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})\right)}$.
令 $f(x)=\ln(1+x)$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且

$$\int f(x)dx = x\ln(1+x)+\ln(1+x)-x+C,$$

所以 $F(x)=x\ln(1+x)+\ln(1+x)-x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 由定理 6.1.2 知

$$\int_0^1 \ln(1+x)dx=[F(x)]_0^1=F(1)-F(0)=2\ln 2.$$

一方面, 取 $T:0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<\frac{n-1}{n}<1, \|T\|=\frac{1}{n}, x_i=\frac{i}{n}, \Delta x_i=\frac{1}{n}$. 由定积分的定义知

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1+x)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right),\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}=e^{\int_0^1\ln(1+x)dx}=e^{2\ln 2}=4.$$

习题 6.1

1. 利用定积分的定义计算：

(1) $\int_0^1 (ax+b)dx$; (2) $\int_{-2}^2 x^2dx$;
(3) $\int_0^3 x^3dx$; (4) $\int_0^a a^xdx$.

2. 求极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin(\frac{k\pi}{n})$;
(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2})$.
(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}$;
(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$

3. 求极限：
(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+\sqrt{x}}dx$.

§ 6.2 可积性理论

§ 6.2.1 记号

由于可积函数必是有界的, 在讨论可积性的时候, 我们总假设函数 f 在 $[a,b]$ 上有界, 用 M 与 m 分别记 f 在 $[a,b]$ 上的上确界与下确界, 令 $\omega = M - m$, 称 ω 为 f 在 $[a,b]$ 上的振幅.

对于 $[a,b]$ 的任何分割 $T : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, 在 T 的第 i 个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上 f 的上确界与下确界分别记为 M_i 与 m_i, 并令 $\omega_i = M_i - m_i$ 称之为 f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅, 这里 $i = 1, 2, \cdots, n$. 定义

$$\overline{S}(T) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad \underline{S}(T) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

并称它们是 f 关于分割 T 的达布上和与达布下和. 显然

$$\underline{S}(T) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \overline{S}(T).$$

§ 6.2.2 定积分存在的条件

定理 6.2.1 如果在原有的分点中加入新的分点，则上和不增，下和不减，也就是说，分割 T 加入新分点后对应的分割 T' 的上和及下和分别记为 $\overline{S}(T)$ 及 $\underline{S}(T')$，则 $\overline{S}(T') \le \overline{S}(T), \underline{S}(T') \ge \underline{S}(T)$.

证明 设原有分点为 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 不失一般性，不妨假定只在 $[x_{i-1}, x_i]$ 中插入一个新分点 $x' : x_{i-1} < x' < x_i$. 记

$$M_{i1} = \sup\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x']\}, \quad M_{i2} = \sup\{f(x)|x \in [x', x_i]\}.$$

显然 $M_{i1} \le M_i, M_{i2} \le M_i$, 所以

$$M_{i1}(x' - x_{i-1}) + M_{i2}(x_i - x') \le M_i(x_i - x_{i-1}).$$

而在 $\overline{S}(T)$ 及 $\overline{S}(T')$ 中其它各项并无变动，因此 $\overline{S}(T') \le \overline{S}(T)$. 同理可证

$$\underline{S}(T') \ge \underline{S}(T).$$

定理 6.2.2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 则有对于一切分割 T，有

$$m(b-a) \le \underline{S}(T) \le \overline{S}(T) \le M(b-a),$$

这里分别用 M 及 m 记 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的上确界及下确界.

证明 沿用以上记号，显然有 $m \le m_i \le M_i \ge M$，于是有

$$\underline{S}(T) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \ge m(b-a);$$

$$\overline{S}(T)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i\leq\sum_{i=1}^{n}M\Delta x_i=M(b-a).$$

故

$$m(b-a)\leq\underline{S}(T)\leq\overline{S}(T)\leq M(b-a).$$

定理 6.2.3 对任何两个分割 T_1,T_2，都有 $(\underline{S}(T_1)\leq\overline{S}(T_2))$.

证明 对于 $[a,b]$ 设有两个独立的分割 T_1,T_2，对应的达布和分别记为 $\underline{S}(T_1),\overline{S}(T_1)$ 及 $\underline{S}(T_2),\overline{S}(T_2)$，我们来证明 $\underline{S}(T_1)\leq\overline{S}(T_2)$. 把两种分割的分点合在一起，也是一种分割 $T_1\cup T_2$，对应的达布和分别记为 $\underline{S}(T_1\cup T_2)$，及 $\overline{S}(T_1\cup T_2)$. 于是由定理 6.2.1 可知

$$\underline{S}(T_1)\leq\underline{S}(T_1\cup T_2)\leq\overline{S}(T_1\cup T_2)\leq\overline{S}(T_2).$$

根据定理 6.2.2，下和的集合 $\{\underline{S}\}$ 有上界，从而必有上确界，记为 l，即 $l=\sup\limits_T\underline{S}(T)$，再由定理 6.2.3 可知 $l\leq\overline{S}(T)$. 同理记上和集合 $\{\overline{S}\}$ 的下确界为 L，就有 $\underline{S}(T)\leq L$，而显然 $l\leq L$，综合这些事实，有

$$\underline{S}(T)\leq l\leq L\leq\overline{S}(T).$$

现在我们进一步证明，上述达布上和集合 $\{\overline{S}(T)\}$ 的下确界 L 及达布下和集合 $\{\underline{S}(T)\}$ 的上确界 l, 正好就是这些和的极限，这就下述的定理.

定理 6.2.4（达布定理） 对任何有界函数 $f(x)$，必有 $\lim\limits_{\|T\|\to0}\overline{S}(T)=L,\ \lim\limits_{\|T\|\to0}\underline{S}(T)=l$.

证明 我们仅对上和的情形加以证明. 由于 L 是 $\{\overline{S}(T)\}$ 的下确界，所以对于任意 $\varepsilon>0$，可以对 $[a,b]$ 作一分割

$$T':a=x'_0<x'_1<\cdots<x'_{p-1}<x'_p=b$$

使得对应于这一分割的上和 $\overline{S}(T')$ 满足 $L\leq\overline{S}(T')\leq L+\frac{\varepsilon}{2}$,，即

$$0\leq\overline{S}(T')-L<\frac{\varepsilon}{2}.$$

固定了 p 及 $\{x'_i\}$ 以后，可取

$$\delta=\min\{x'_1-x'_0,x'_2-x'_1,\cdots,x'_p-x'_{p-1},\frac{\varepsilon}{2(p-1)(M-m)}\}$$

其中 M,m 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的上、下确界.

于是，为了得到所需的结论，只要证明，对任意的分割 $T:a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 只要 $\|T\|<\delta$ 时，就成立

$$|\overline{S}(T)-L|=\overline{S}(T)-L<\varepsilon$$

（其中 $\overline{S}(T)$ 为与此任意分割 T 对应的上和）即可.

事实上，合并以上两个分割的分点，作为新分割的分点，这样得到一个新的分割，设其对应的上和为 $\overline{S}(T\cup T')$，那么，由于任一长度 x_i-x_{i-1} 都小于任一长

度 $x'_j - x'_{j-1}$，所以在每一部分区间 (x_{i-1}, x_i) 内至多只有 $\{x'_j\}$ 中的一个点，又因 x'_0, x'_p 分别与 x_0, x_p 重合，因而它们不在 (x_0, x_1) 及 (x_{n-1}, x_n) 内，因此, 含有 $\{x'_j\}$ 的部分区间 (x_{i-1}, x_i) 最多只有 $p-1$ 个. 另一方面, 若 (x_{i-1}, x_i) 中不含有 x'_j 的点, 则在 $S(T)$ 及 $S(T \cup T')$ 中都含有项 $M_i(x_i - x_{i-1})$, 从而在差 $S(T) - S(T \cup T')$ 中只剩下 (x_{i-1}, x_i) 中含有 x'_j 点的那些项的差. 设 (x_{i-1}, x_i) 中含有点 x'_j, 而 M_{i1}, M_{i2} 分别为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x'_j]$ 及 $[x'_j, x_i]$ 的上确界, 那么对于含有 x'_j 的这种部分区间 (x_{i-1}, x_i) 作和, 得

$$\begin{aligned}
0 \le \overline{S}(T) - \overline{S}(T \cup T') &= \sum M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum [M_{i1}(x'_j - x_{i-1}) + M_{i2}(x_i - x'_j)] \\
&= \sum (M_i - M_{i1})(x'_j - x_{i-1}) + \sum (M_i - M_{i2})(x_i - x'_j) \\
&\le (M-m)[\sum (x'_j - x_{i-1}) + \sum (x_i - x'_j)] \\
&= (M-m)\sum (x_i - x_{i-1}) \le (M-m)(p-1)\|T\| \\
&< (M-m)(p-1) \cdot \frac{\varepsilon}{2(p-1)(M-m)} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

另一方面, 由定理 6.2.1 有

$$\overline{S}(T \cup T') - L \le \overline{S}(T') - L < \frac{\varepsilon}{2}$$

于是, 将上面的两个不等式相加, 得 $0 \le \overline{S}(T) - L < \varepsilon$. 定理得证.

定理 6.2.5（定积分存在的第一充要条件） 有界函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的充要条件是 $L = l$, 即 $\lim\limits_{\|T\| \to 0} \overline{S}(T) = \lim\limits_{\|T\| \to 0} \underline{S}(T)$.

证明 必要条件. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 其定积分为 I. 于是按定义知, 对任何 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使对 $[a, b]$ 上的任何分割 $T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 只要 $\|T\| < \delta$, 对 $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 就有

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

设 M_i 为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的上确界, 由上确界定义, 可得 $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 使

$$0 \le M_i - f(\eta_i) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

于是

$$\left| \overline{S}(T) - \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i \right| = \sum_{i=1}^{n} (M_i - f(\eta_i))\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

同时, 因为 $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 故

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i - I \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是有

$$|\overline{S}(T)-I| \leq \left|\overline{S}(T)-\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i - I\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即

$$\lim_{\|T\|\to 0}\overline{S}(T)=I.$$

同理可证

$$\lim_{\|T\|\to 0}\underline{S}(T)=I.$$

由此可见, 当 $f(x)$ 可积时, L 与 l 相等, 而且就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分值.

充分性. 设 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\overline{S}(T)=\lim\limits_{\|T\|\to 0}\underline{S}(T)=I$. 对于 $[a,b]$ 上的任何分割

$$T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

以及 $\forall \xi_i \in [x_{i-1},x_i]$, 有

$$\underline{S}(T) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq \overline{S}(T).$$

由夹逼原理得

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I,$$

从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

推论 6.2.1 有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是

$$\lim_{\|T\|\to 0}(\overline{S}(T)-\underline{S}(T))=0,$$

推论 6.2.2 有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0,$$

即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 对任意的分割 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 只要 $\|T\|<\delta$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$.

注意定理 6.2.4（达布定理）的证明, 实际上证明了: $\forall\varepsilon>0$, 若存在一个分割 T' 使得 $0\leq l-\underline{S}(T')<\frac{\varepsilon}{2}$ (或 $0\leq\overline{S}(T')-L<\frac{\varepsilon}{2}$), 那么就一定存在某个 $\delta>0$, 对满足 $\|T\|<\delta$ 的任意一种分割 T, 必有

$$0\leq l-\underline{S}(T)<\frac{\varepsilon}{2}\ \ (\text{或}0\leq\overline{S}(T)-L<\frac{\varepsilon}{2}).$$

利用这一思想, 结合定理 6.2.4 的证明即可推出如下推论.

推论 6.2.3 有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是 $\forall\varepsilon>0$, 存在分割 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$.

证明 由推论 6.2.2, 必要条件显然, 下证充分性. 由条件 $\forall\varepsilon>0, \exists$ 分割 T' 满足

$$\overline{S}(T')-\underline{S}(T')=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{3}.$$

同定理 6.2.4, $\exists\delta>0, \forall$ 分割 T, 当 $\|T\|<\delta$ 时

$$\underline{S}(T\cup T')-\underline{S}(T)<\frac{\varepsilon}{3},\ \ \overline{S}(T)-\overline{S}(T\cup T')<\frac{\varepsilon}{3}.$$

再由定理 6.2.3 得

$$\begin{aligned}\overline{S}(T)-\underline{S}(T)&=\overline{S}(T)-\overline{S}(T\cup T')+\overline{S}(T\cup T')-\underline{S}(T\cup T')+\underline{S}(T\cup T')-\underline{S}(T)\\&\le\left(\overline{S}(T)-\overline{S}(T\cup T')\right)+\left(\overline{S}(T')-\underline{S}(T')\right)+\left(\underline{S}(T\cup T')-\underline{S}(T)\right)\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

由推论 6.2.2 知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

定理 6.2.6（定积分存在的第二充要条件） 有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是：对任意给定的两个正数 $\eta>0$ 及 $\sigma>0$，可找到 $\delta>0$，使当任一分割满足 $\|T\|<\delta$ 时，对应于幅度 $\omega_{i'}\ge\eta$ 的那些区间 $\Delta x_{i'}$ 的长度之和 $\sum\limits_{i'}\Delta x_{i'}<\sigma$.

证明 必要性. 对于任给的 $\eta>0$ 及 $\sigma>0$, 令 $\varepsilon=\eta\sigma$. 由于 $f(x)$ 在 a,b 上可积, 故有 $\delta>0$, 使当 $\|T\|<\delta$ 时, 就有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon=\eta\sigma.$$

于是有

$$\eta\sigma>\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\ge\sum_{i'}^{n}\omega_{i'}\Delta x_{i'}>\eta\sum_{i'}^{n}\Delta x_{i'},$$

所以

$$\sum_{i'}^{n}\Delta x_{i'}<\sigma,$$

其中 $\omega_{i'}>\eta$，而 $\sum\limits_{i'}^{n}$ 表示对振幅 $\omega_{i'}>\eta$ 的那些项求和.

充分性. 对于任给的 $\varepsilon>0$, 取 $\eta=\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)},\sigma=\dfrac{\varepsilon}{2(M-m)+1}$. 设 $\omega_{i''}\le\eta$，而 $\sum\limits_{i''}$ 表示对振幅 $\omega_{i''}\le\eta$ 的那些项求和. 按充分性条件有 $\delta>0$, 使当 $\|T\|<\delta$ 时, 就有

$$\sum_{i'}\Delta x_{i'}<\sigma.$$

从而有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i &= \sum_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'}+\sum_{i''}\omega_{i''}\Delta x_{i''}\\ &<(M-m)\sum_{i'}\Delta x_{i'}+\eta\sum_{i''}\Delta x_{i''}\\ &<(M-m)\sigma+\eta(b-a)\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

从而由推论 6.2.2 知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

推论 6.2.4 有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是：对任意给定的两个正数 $\eta>0$ 及 $\sigma>0$，均存在一分割 T，使得对应于幅度 $\omega_{i'}\ge\eta$ 的那些区间 $\Delta x_{i'}$ 的长度之和 $\sum\limits_{i'}\Delta x_{i'}<\sigma$.

§ 6.2.3 **可积函数类**

利用定理 6.2.5 和定理 6.2.6, 可以证明如下的结果.

定理 6.2.7 下列三类函数是可积的:

(i) $[a,b]$ 上的连续函数.

(ii) 在 $[a,b]$ 上仅有有限个间断点 (即分段连续函数) 的有界函数.

(iii) $[a,b]$ 上的单调函数.

证明

(i) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续. 由此对于任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使当 $x^{(1)},x^{(2)}\in[a,b]$ 且 $|x^{(1)}-x^{(2)}|<\delta$ 时, 就有

$$|f(x^{(1)})-f(x^{(2)})|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

对于满足 $\|T\|<\delta$ 的任意分割 $T:a=x_0<x_1<x_2\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 有

$$\omega_i=M_i-m_i<\frac{\varepsilon}{b-a},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

其中 M_i,m_i 分别为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的上确界和下确界. 因而

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\varepsilon,$$

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

(ii) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上共有 p 个间断点记为 $x'_1<x'_2\cdots<x'_{p-1}<x'_p$, 不妨设 $x'_0=a<x'_1,x'_p<x'_{p+1}=b$. 对于任给 $\forall\varepsilon>0$, 取

$$\delta=\min\{\frac{x'_1-a}{2},\frac{b-x'_p}{2},\frac{x'_2-x'_1}{3},\cdots,\frac{x'_p-x'_{p-1}}{3},\frac{\varepsilon}{4p(M-m)}\}.$$

先以 x_j' 的 δ 邻域的两个端点 $x_{j-1}'-\delta, x_j'+\delta$ 为分点, 将 $[a,b]$ 分成 $2p+1$ 个子区间:

$[a,x_1'-\delta],[x_1'-\delta,x_1'+\delta],[x_1'+\delta,x_2'-\delta],[x_2'-\delta,x_2'+\delta],\cdots,[x_{p-1}'+\delta,x_p'-\delta],[x_p'-\delta,x_p'+\delta],[x_p'+\delta,b].$

于是 $f(x)$ 在子区间

$$D^{(1)}=[a,x_1'-\delta],D^{(j)}=[x_{j-1}'+\delta,x_j'-\delta],\ \ (j=2,\cdots,p),D^{(p+1)}=[x_p'+\delta,b]$$

上连续, 由 (i), $f(x)$ 在这些子区间上都可积, 所以在每个 $D^{(j)}$ 上分别存在分点

$$x_0^{(j)}<x_1^{(j)}<\cdots<x_{l_j}^{(j)}\ \ (j=1,\cdots,p+1)$$

使得

$$\sum_{i=1}^{l_j}\omega_i^{(j)}\Delta x_i^{(j)}<\frac{\varepsilon}{2(p+1)}.$$

将所有分点合为一组, 看成是的一个分割, 记 ω_j' 为 $f(x)$ 在 $[x_j'-\delta,x_j'+\delta]$ 的振幅, 即有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{p+1}\sum_{i=1}^{l_j}\omega_i^{(j)}\Delta x_i^{(j)}+\sum_{j=1}^{p}\omega_j'[(x_j'+\delta)-(x_j'-\delta)]\\&<(p+1)\cdot\frac{\varepsilon}{2(p+1)}+\frac{2\varepsilon}{4p(M-m)}\cdot p(M-m)=\varepsilon.\end{aligned}$$

由推论 6.2.3 知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积. 当 x_1' 和 x_p' 为 $[a,b]$ 的端点时可类似证得.

(iii) 不妨设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增. 若 $f(a)=f(b)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为常数, 当然可积, 故不妨设 $f(a)<f(b)$. 由于 $f(x)$ 递增, 所以对于 $[a,b]$ 上的任何分割 $T: a=x_0<x_1<x_2\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 都有 $\omega_i=M_i-m_i=f(x_i)-f(x_{i-1})$. 对于任给的 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, 于是当 $\|T\|<\delta$ 时, 就有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\delta\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}[f(b)-f(a)]=\varepsilon.$$

由定理 6.2.6 知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

推论 6.2.5 用类似的方法可以证明在 $[a,b]$ 上的两个函数，如果只在有限个点处具有不同的函数值，而其中的一个函数可积，那么另一个函数也可积，且积分之值相同. 因而，对于一个可积函数变动它的有限个点的值，可积性不变，积分之值也不变.

例 已知黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{p},\ x=\dfrac{q}{p},q\in\mathbf{Z},p\in\mathbf{N},(p,q)=1,\\0,\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x\notin\mathbf{Q}.\end{cases}$$

证明 $R(x)$ 在 $[0,1]$ 上的无理点连续, 在有理点间断, 但 $R(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积且 $\int_0^1 R(x)dx=0$.

证明 设 x_0 是 $[0,1]$ 中任一点, 先证明 $\lim\limits_{x\to x_0} R(x) = 0$. 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|R(x) - 0| < \varepsilon$. 事实上, 若 x 为无理数时, $R(x) = 0$, 显然有 $|R(x) - 0| < \varepsilon$. 若 x 为无理数时, 设 $x = \dfrac{q}{p}$, $p, q \in \mathbf{N}, 0 \le q \le p, (p,q) = 1$. 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 使 $|R(x)| \ge \varepsilon$ 即 $\frac{1}{p} \ge \varepsilon$ 的值 p 只可能是有限个, 而 $0 \le q \le p, q \in \mathbf{N}$ 从而对应的 x 也只可能是有限个, 设为 $x_1, \cdots, x_n$. 于是在 $[0,1]$ 中除了这有限个点之外, 都使 $D(x) < \frac{1}{p} < \varepsilon$. 因此对于 $[0,1]$ 中的任一点 $x_0 \neq x_i$, 可取 $\delta = \{|x_1 - x_0|, |x_2 - x_0|, \cdots, |x_n - x_0|\}$; 但若 x_0 是 $x_1, \cdots, x_n$ 中某一个点 x_i 时, 应取 $\delta = \{|x_1 - x_0|, |x_2 - x_0|, \cdots, |x_{i-1} - x_0|, |x_{i+1} - x_0|, \cdots, |x_n - x_0|\}$. 那么从上面的讨论可知, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|R(x)| = |R(x) - 0| < \varepsilon$, 所以 $\lim\limits_{x\to x_0} R(x) = 0$. 由此可见, $R(x)$ 在 $[0,1]$ 上的无理点连续, 在有理点间断 (可去间断点).

虽然这个函数具有无穷多个不连续点, 但在 $[0,1]$ 仍然是可积的.

对 $\forall \eta > 0$ 和 $\sigma > 0$, 由刚才的讨论知道,$R(\frac{q}{p}) = \frac{1}{p} \ge \eta$ 当且仅当 $p < \frac{1}{\eta}$, 由于这样的自然数 p 只有有限多个, 且由 $\frac{q}{p} \in [0,1]$ 又知 $0 \le q \le p$, 所以使 $R(x) \ge \eta$ 的点 x 只有有限多个, 设共有 h 个: $x_1', \cdots, x_h'$.

取 $\delta = \frac{\sigma}{2h}$, 于是当 $\|T\| < \delta$ 时, 使 $\omega_{k'} \ge \eta$ 的区间不超过 $2h$ 个, 这些区间长度之和

$$\sum_{k'} \Delta x_{k'} < 2h\delta = \sigma.$$

由定理 6.2.6 知 $R(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积且 $\int_0^1 R(x)dx = \underline{S}(T) = 0$.

习题 6.2

1. 若 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，证明 $\max\{f(x), g(x)\}$ 及 $\min\{f(x), g(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上也可积.

2. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，证明：若对于 $[a,b]$ 上任一可积函数 $g(x)$，恒有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0,$$

则函数 $f(x)$ 在连续点上恒为零.

3. 讨论函数 $f, f^2, |f|$ 三者间可积性的关系.

4. 证明下列函数在 $[0,1]$ 上可积.

(1) $f(x) = sgn(\sin\frac{\pi}{x})$;

(2) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}], & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

5. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，证明：$\lim\limits_{h\to 0} \int_c^d |f(x+h) - f(x)|dx = 0$, 其中 $a < c < d < b$.

6. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[c,d]$ 上可积，当 $x \in [c,d]$ 时，$g(x) \in [a,b]$, 证明 $f[g(x)]$ 在 $[c,d]$ 上可积.

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，证明 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是：存在可积函数 $g(x)$ 使得 $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt$.

§ 6.3 定积分的性质

性质 6.3.1 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，k 为一实数，则 $kf(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积，且有

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

证明 对任何 $\varepsilon > 0$, 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积知存在 $\delta > 0$, 使对 $[a,b]$ 上的任何分割 $T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 只要 $\|T\| < \delta$, 对 $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 就有

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon.$$

从而

$$\left|\sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\Delta x_i - kI\right| = k\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < k\varepsilon.$$

故 $kf(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积，且有

$$\int_a^b kf(x)dx = kI = k\int_a^b f(x)dx.$$

性质 6.3.2 若 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x) \pm g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积，且

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

证明 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 设 $\int_a^b f(x)dx = A$, $\int_a^b g(x)dx = B$, 由定积分定义, 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使对 $[a,b]$ 上的任何分割 $T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 只要 $\|T\| < \delta$, 对 $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 就有

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\left|\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i - B\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

所以

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^n (f(\xi_i) \pm g(\xi_i))\Delta x_i - (A \pm B)\right| \\
\le &\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - A\right| + \left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - B\right| \\
< &\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

性质 6.3.3 若 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则 $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 也可积.

证明 因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积, 故都在 $[a,b]$ 上有界, 即有常数 $M>0$, 使得 $|f(x)|\le M, |g(x)|\le M$. 任取两点 $x', x''\in[x_{i-1},x_i]$, 于是有

$$\begin{aligned}
&|f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| \\
&= |f(x')g(x') - f(x')g(x'') + f(x')g(x'') - f(x'')g(x'')| \\
&\le M|g(x') - g(x'')| + M|f(x') - f(x'')|.
\end{aligned}$$

用 $\omega_i(f), \omega_i(g), \omega_i(fg)$ 分别表示 f, g, fg 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅, 于是

$$\omega_i(fg) \le M[\omega_i(f) + \omega_i(g)].$$

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ 对于 $[a,b]$ 上的任何分割

$$T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

由 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积, 当 $\|T\|<\delta$ 时

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2M}, \qquad \sum_{i=1}^{n}\omega_i(g)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(fg)\Delta x_i < M(\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M}) = \varepsilon,$$

从而 $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

性质 6.3.4 设 $a<c<b$.

(i) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上也同时可积, 并成立

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

(ii) 反之若 $f(x)$ 在 $[a,c], [c,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积，并成立上面的等式 (a, b, c 可为任何顺序).

证明 (i) 对于 $\forall\varepsilon>0$, 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 对 $[a,b]$ 上的任一分割

$$T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

当 $\|T\|<\delta$ 时

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i < \varepsilon.$$

对于 $[a,c]$ 上的任一分割 T_1 和 $[c,b]$ 的任一分割 T_2, $T = T_1\cup T_2$ 便是 $[a,b]$ 上的一个分割, 当 $\|T_1\|<\delta, \|T_2\|<\delta$ 时, 有 $\|T\|<\delta$. 设 c 为分割 T 的 $n+1$ 个分点中的第 h 个分点, 于是

$$\sum_{i=1}^{h}\omega_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i < \varepsilon; \quad \sum_{i=h+1}^{n}\omega_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i < \varepsilon.$$

由此 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上都可积.

对于区间 $[a,b]$ 上的任一分割 T, 令 $T'=T\cup\{c\}, T_1=T'\cap[a,c], T_2=T'\cap[c,b]$, 于是 T_1 和 T_2 分别是 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上的一个分割. 因为 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上都可积, 若记

$$I_1=\int_a^c f(x)dx,\ \ I_2=\int_c^b f(x)dx,$$

则有

$$\underline{S}(T)\le\underline{S}(T')=\underline{S}(T_1)+\underline{S}(T_2)\le I_1+I_2\le\overline{S}(T_1)+\overline{S}(T_2)=\overline{S}(T')\le\overline{S}(T).$$

又因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 故有

$$\lim_{\|T\|\to0}\underline{S}(T)=\lim_{\|T\|\to0}\overline{S}(T).$$

从而

$$\int_a^b f(x)dx=I_1+I_2=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

(ii) 对于任给的 $\eta>0$ 和 $\sigma>0$, 因为 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上都可积, 故有 $\delta_1>0$ 和 $\delta_2>0$, 使对 $[a,c]$ 上的任意分割 $T_1=\{x_k'\}$ 和 $[c,b]$ 上的任意分割 $T_2=\{x_k''\}$, 只要 $\|T_1\|<\delta_1, \|T_2\|<\delta_2$, 其中振幅大于 η 的分割区间的长度之和

$$(T_1)\sum_{k'}\Delta x_{k'}'<\frac{\sigma}{3},\ \ (T_2)\sum_{k'}\Delta x_{k'}''<\frac{\sigma}{3}.$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\frac{\sigma}{3}\}$. 对于区间 $[a,b]$ 上的任一分割 T, 令 $T'=T\cup\{c\}, T_1=T'\cap[a,c], T_2=T'\cap[c,b]$, 于是 T_1 和 T_2 分别是 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上的一个分割. 当 $\|T\|<\delta$ 时,$\|T_1\|<\delta\le\delta_1, \|T_2\|<\delta\le\delta_2$. 分割 T 的分割区间中, 除了含点 c 的一个外, 其他分割区间或为 T_1 的分割区间, 或为 T_2 的分割区间. 所以, 分割 T 的振幅大于 η 的分割区间的长度之和满足估计式

$$(T)\sum_{k'}\Delta x_{k'}\le(T_1)\sum_{k'}\Delta x_{k'}'+(T_2)\sum_{k'}\Delta x_{k'}''+\delta<\sigma.$$

由此 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 上可积, 同 (i), 等式成立. 此外, 我们指出, 当等式中的三个积分都存在时, 对任意的 a,b,c, 等式都有成立, 即不必要求 $a<c<b$.

性质 6.3.5 若函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $f(x)\ge g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$; 特别地，若 $f(x)\ge0$, 则 $\int_a^b f(x)dx\ge0$.

证明 由性质 6.3.2，只需证明若 $f(x)\ge0$, 则 $\int_a^b f(x)dx\ge0$. 事实上, 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积及 $f(x)\ge0$, 则对 $[a,b]$ 上的任一分割 $T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b, \forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\ge0.$$

性质 6.3.6 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也可积, 且

$$\left|\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|\right|.$$

反之未必，如:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ -1, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

证明 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积知 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 对于 $[a,b]$ 上的任何分割

$$T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

当 $\|T\|<\delta$ 时

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i<\varepsilon.$$

其中 $\omega_i(f)$ 为 $f(x)$ 在区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅. 对任意的 $x',x''\in[x_{i-1},x_i]$ $|f(x')|-|f(x''| \le |f(x')-f(x''|$ 由此 $\omega_i^*(|f|)\le\omega_i(f)$, 进而

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i^*(|f|)\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i<\varepsilon,$$

从而 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可积.

而 $-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|$, 由性质 6.3.5 知

$$-\int_a^b|f(x)|dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b|f(x)|dx$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|\right|.$$

反过来，所给例子中，$|f(x)|\equiv 1$ 在 $[a,b]$ 上可积, 但 $\omega_i(f)=2$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i=2(b-a)$, 此时 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积.

性质 6.3.7（积分第一中值定理） 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，且在 $[a,b]$ 上可积，则在 $[a,b]$ 中存在一点 ξ，使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

特别地, 取 $g(x)=1$, 则 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$, 称 $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分平均值.

证明 不妨设 $g(x) \geq 0$. 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续知 $f(x)$ 存在最小值 m 与最大值 M, 即

$$m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,b],$$

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

若 $\int_a^b g(x)dx = 0$, 由 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号知 $g(x) \equiv 0$, 进而 $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. 显然任取 $\xi \in [a,b]$, $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0 = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

若 $\int_a^b g(x)dx \neq 0$ 则 $\int_a^b g(x)dx > 0$, 从而

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M,$$

将 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 利用介值定理, 在 $[a,b]$ 中存在一点 ξ，使

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = f(\xi),$$

即

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

性质 6.3.8 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$，则 $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 即存在常数 $M > 0$ 使得 $|f(x)| \leq M$. $\forall \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} F(x+\Delta x) - F(x) &= \left|\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(x)dx\right| \\ &= \left|\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx\right| \leq \int_x^{x+\Delta x} |f(x)|dx \\ &\leq M\Delta x \to 0. \end{aligned}$$

故 $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

习题 6.3

1. 比较下列各积分的大小：

(1) $\int_0^1 xdx,\ \int_0^1 x^2dx$; (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx$;

(3) $\int_{-2}^{-1} (\frac{1}{3})^x dx,\ \int_3^1 3^x dx$; (4) $\int_0^1 e^{-x}dx,\ \int_0^1 e^{-x^2}dx$;

(5) $\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x}dx,\ \int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}dx$;

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$\int_a^b f^2(x)dx = 0$ 证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为零.

3. 设 $y=\varphi(x)(x\geq 0)$ 是严格单调增加的连续函数，$\varphi(0)=0, x=\psi(y)$ 是它的反函数，证明：$\int_0^a \varphi(x)dx+\int_0^b \psi(y)dy \geq ab(a\geq 0, b\geq 0)$.

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 且 $f(x)>0$, 证明不等式：$\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \geq 1$.

5. 设 $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 证明 $(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$.

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续可导，且 $f(0)=0$，求证：$\int_0^1 |f(x)|^2dx \leq \int_0^1 |f'(x)|^2dx$.

§ 6.4 定积分的计算

§ 6.4.1 定积分计算的基本公式

定理 6.4.1 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则函数 $G(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 可导，且

$$G'(x)=f(x).$$

证明 $\forall x\in[a,b]$,

$$G(x+\Delta x)-G(x)=\int_a^{x+\Delta z} f(x)dx-\int_a^x f(x)dx=\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx.$$

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 将 $f(x)$ 在 $[x,x+\Delta x]$ 上用积分中值定理, $\exists\xi[x,x+\Delta x]$ 使得

$$\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx=f(\xi)\Delta x,$$

显然当 $\Delta x\to 0$ 时 $\xi\to x$. 由此

$$\frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x}=f(\xi)\to f(x),$$

函数 $G(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 可导，且 $G'(x)=f(x)$.

定理 6.4.2 基本公式: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的任意一个原函数，即 $F'(x)=f(x)$, 那么

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)|_a^b.$$

这个公式也叫牛顿 – 莱布尼兹公式.

证明 由定理 6.4.1, $G(x)=\int_a^x f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 再由 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数知

$$[F(x)-G(x)]'=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0,$$

$$F(x)-G(x)=const, F(b)-G(b)=F(a)-G(a),$$

$$F(b)-F(a)=G(b)-G(a)=\int_a^b f(x)dx-0==\int_a^b f(x)dx,$$

即

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

例 6.4.1 求 $\int_0^1 2xe^{x^2}dx$.

解 因为 $[e^{x^2}]' = 2xe^{x^2}$, 所以 e^{x^2} 是 $2xe^{x^2}$ 的一个原函数,

$$\int_0^1 2xe^{x^2}dx = [e^{x^2}]\Big|_0^1 = e - 1.$$

例 6.4.2 求 $\int_0^2 \frac{x}{1+x^2}dx$.

解 因为

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}d(1+x^2) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C,$$

所以 $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ 是 $\frac{x}{1+x^2}$ 的一个原函数.

$$\int_0^2 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\ln 5.$$

例 6.4.3 设 $F(x) = \int_0^x e^{-t}\sin 2t dt$, 求 $F'(0)$ 与 $F'(\frac{\pi}{4})$.

解 因为 $e^{-t}\sin 2t$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续, 由定理 6.4.1, $F'(x) = e^{-x}\sin 2x, x \in [-\pi, \pi]$. 从而

$$F'(0) = 0, \qquad F'(\frac{\pi}{4}) = e^{-\frac{\pi}{5}}\sin 2\cdot\frac{\pi}{4} = e^{-\frac{\pi}{4}}.$$

例 6.4.4 设 $F(x) = \int_{x^2}^0 \sqrt{1+t^2}dt$, 求 $F'(x)$.

解 $F(x) = \int_{x^2}^0 \sqrt{1+t^2}dt = -\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}dt$, $F(x)$ 可以看成 $-\int_0^u \sqrt{1+t^2}dt$ 与 $u = x^2$ 复合而成, 从而

$$F'(x) = -\sqrt{1+x^2}(x^2)' = -2x\sqrt{1+x^4}.$$

例 6.4.5 求极限

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}dt}{x^3}.$$

解 由 L'Hospital 法则得

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}dt}{x^3} = \lim_{x\to 0+} \frac{(\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t})'dt}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0+} \frac{2x\sin x}{3x^2} = \frac{2}{3}.$$

§ 6.4.2 定积分的换元公式

定理 6.4.3 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，作代换 $x=\phi(t)$，其中 $\phi(t)$ 在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数 $\phi'(t)$，当 $\alpha\le t\le\beta$ 时，$a\le\phi(t)\le b$, 且 $\phi(\alpha)=a,\phi(\beta)=b$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)dt.$$

证明 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续知它的原函数存在, 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数. 由复合函数求导法则知 $F(\phi(t))$ 为 $f(\phi(t))\phi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的一个原函数, 故

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)dt=F(\phi(\beta))-F(\phi(\alpha))=F(b)-F(a),$$

从而

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)dt.$$

注: 该定理也可反用, 即 $\int_a^b f[\phi(x)]\phi'(x)dx=\int_a^b f[\phi(x)]d(\phi(x))=F(\phi(x))|_a^b$. 方法完全同不定积分的凑微分法与变量代换法.

例 6.4.6 求

$$\int_a^{2a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx\quad(a>0).$$

解 令 $x=a\sec t$, 则 $dx=a\sec t\cdot\tan tdt$, 且当 t 从 0 变到 $\frac{\pi}{3}$ 时, x 从 a 变到 $2a$, 这时 $\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t$, 从而

$$\int_a^{2a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{a^2\tan^2 t\sec t}{a^4\sec^4 t}dt=\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 t\cos tdt$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 t\cos tdt=\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 td(\sin t)$$

$$=\frac{1}{3a^2}\sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{8a^2}.$$

例 6.4.7 求

$$\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

解 $I=\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$

令 $x=\pi-t$, 则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt.$$

所以
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt,$$
从而
$$I=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos^2 t}d(\cos t)=-\pi\arctan(\cos t)|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

例 6.4.8 求
$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx.$$

解 令 $x=\tan t$, 则
$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\tan t)}{1+\tan^2 t}\sec^2 tdt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{(\cos t+\sin t)}{\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-t)}{\cos t}dt$$
$$=\frac{\pi}{8}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos(\frac{\pi}{4}-t)dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos tdt.$$
令 $u=\frac{\pi}{4}-t$, 得 $t=\frac{\pi}{4}-u$. 从而
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos(\frac{\pi}{4}-t)dt=-\int_{\frac{\pi}{4}}^0\ln\cos udu=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos udu=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos tdt,$$
故
$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

§ 6.4.3 定积分的分部积分公式

定理 6.4.4 若 $u'(x),v'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则
$$\int_a^b uv'dx=[uv]|_a^b-\int_a^b u'vdx.$$

证明 由 $[uv]'=uv'+vu'$ 知 $uv'=[uv]'-vu'$, 两边在 $[a,b]$ 上取定积分得
$$\int_a^b uv'dx=\int_a^b[uv]'dx-\int_a^b u'vdx=[uv]|_a^b-\int_a^b u'vdx.$$

例 6.4.9 求 $\int_0^{\pi}x\cos xdx$.

解 $\int_1^{\pi}x\cos xdx=\int_0^{\pi}xd(\sin x)=[x\sin x]|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin xdx=-2.$

例 6.4.10 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$.

解 当 $n=1$ 时, 有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = (-\cos x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = -(0-1) = 1.$$

当 $n>1$ 时, 令 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, 则

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx \\
&= = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(-\cos x) \\
&= (-\cos x \sin^{n-1} x)|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x d(\sin^{n-1} x \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x) dx \\
&= (n-1)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx\right] \\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,
\end{aligned}$$

即

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

这个等式就是关于 I_n 的递推公式, 他将 I_n 的计算化为 I_{n-2} 的计算, 依次下去, 既可求得结果.

当 n 为奇数时,

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} \\
&= \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} I_1 \\
&= \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots 2}{n(n-2)(n-4)\cdots 3 \cdot 1} \\
&= \frac{(n-1)!!}{n!!}.
\end{aligned}$$

当 n 为偶数时,

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx \\
&= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \\
&= \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots 2}{n(n-2)(n-4)\cdots 4\cdot 2}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

综上所述, 有如下结果:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & (\text{当 } n \text{ 为奇数时}), \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & (\text{当 } n \text{ 为奇数时}). \end{cases}$$

§ 6.4.4 杂例

例 6.4.11 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

解 改写

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n}.$$

易见, 这是连续函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 在区间 $[0,1]$ 均分成 n 等分的分割上的一个积分和, 所以有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) \\
&\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)|_0^1 = \ln 2.
\end{aligned}$$

例 6.4.12 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，那么

(1) 当 $f(x)$ 为奇函数时, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$;

(2) 当 $f(x)$ 为偶函数时，$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

证明

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)dx &= \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = -\int_a^0 f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx \\
&= \int_0^a f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a [f(-x)+f(x)]dx.
\end{aligned}$$

(1) 若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上为奇函数, 则有 $f(-x)=-f(x)$, 即 $f(-x)+f(x)=0$, 此时 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

(2) 若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上为偶函数, 则有 $f(-x)=f(x)$, 即 $f(-x)+f(x)=2f(x)$, 此时 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

例 6.4.13 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明:

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$$

并利用此式计算定积分 $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$

证明 令代换 $x=\pi-t$, 则有

$$\begin{aligned}\int_0^\pi xf(\sin x)dx &= \int_{-\pi}^0(\pi-t)f[\sin(\pi-t)]d(\pi-t)\\ &= \int_0^\pi(\pi-t)f(\sin t)dt\\ &= \int_0^\pi \pi f(\sin t)dt - \int_0^\pi tf(\sin t)dt\\ &= \int_0^\pi \pi f(\sin x)dx - \int_0^\pi xf(\sin x)dx.\end{aligned}$$

移项有

$$2\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \pi\int_0^\pi f(\sin x)dx,$$

即

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx.$$

对定积分 $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$, 被积函数可以看成 $xf(\sin x)$, 这里

$$f(\sin x) = \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} = \frac{x\sin x}{2-\sin^2 x}.$$

由上面证得的等式可得

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx &= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{1}{1+\cos^2 x}d(\cos x)\\ &= -\frac{\pi}{2}\left[\arctan(\cos x)\right]\Big|_0^\pi = -\frac{\pi}{2}\left[-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

例 6.4.14 若 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数，则 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$

证明 因为

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{T+a} f(x)dx.$$

若令 $x=T+t$, 则 $\int_T^{T+a} f(x)dx = \int_0^a f(T+t)d(T+t) = \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(x)dx$, 所以

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

例 6.4.15 设 $f(x)$ 是连续函数，求导数 $\frac{d}{dx}\int_{x^3}^{x^2} f(t)dt$.

解 因为 $f(x)$ 是连续函数, 故 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 即有 $F'(x)=f(x)$. 从而有

$$\frac{d}{dx}\int_{x^3}^{x^2} f(t)dt=\frac{d}{dx}[F(x^2)-F(x^3)]=2xf(x^2)-3x^2f(x^3).$$

习题 6.4

1. (1) 求 $\int_{e^{-1}}^{e}|\ln x|dx$. (2) 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{dx}{\cos x}$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$, 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=a$.

3. 设 I 是一个开区间，$I\subset[A,B]$, 函数 f 在 $[A,B]$ 内连续. 设 $a<b$ 且 $a,b\in I$，求证：

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_a^b(f(x+h)-f(x))dx=f(b)-f(a).$$

4. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续并恒取正值，证明：$\phi(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ 是 $[0,+\infty)$ 上的严格递增函数.

5. 设 $[0,+\infty)$ 上的连续函数 f 满足关系 $\int_0^x f(t)dt=\dfrac{1}{2}xf(x), x>0$, 求证：$f(x)=cx$, 这里 x 是常数.

6. 设 $(0,+\infty)$ 上的连续函数 f 使得积分值 $\int_a^{ab}f(x)dx$ 与 a 无关，其中 $a,b>0$, 求证：$f(x)=\dfrac{c}{x}$, 其中 c 为常数.

7. 设 $b>a>0$，证明不等式 $\ln\dfrac{b}{a}>\dfrac{2(b-a)}{a+b}$.

8. 设 f 为连续函数，求证：

$$(1)\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx;\qquad(2)\quad\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\int_0^{\pi}f(\sin x)dx.$$

9. 证明：$\int_0^{2\pi}\left(\int_x^{2\pi}\dfrac{\sin t}{t}dt\right)dx=0$.

10. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续，对任何 $a>0$，求证:

$$\int_0^a\left(\int_0^x f(t)dt\right)dx=\int_1^a f(x)(a-x)dx.$$

§ 6.5 定积分在几何上的应用

定积分的应用很广泛，本节仅介绍它在几何上的应用，并结合具体问题，说明用定积分求某些量的方法.

我们已经知道，曲边梯形的面积、变速直线运动的路程都可以用定积分表示，那么一个能用定积分表示的量应当具备什么性质呢？从前面的讨论可以看出：它应当是与某一个变量 x 的变化区间 $[a,b]$ 相联系的整体量，并且这个整体量，当区间分割成若干个小区间后，就相应地分成了若干个部分量 ΔI 之和，即量 I 对于区间 $[a,b]$ 具有可加性.

当所求量 I 可以表示为定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 时，根据本章定理 6.4.1 可知：$I(x) = \int_a^x f(x)dx$ 就是 $f(x)$ 的一个原函数，从而被积式 $f(x)dx$ 就是 $I(x)$ 的微分，即 $f(x)dx$ 是增量 ΔI 的线性主部，而增量 ΔI 则是所求量 I 的部分量. 因此，用定积分求整体量 I 的一个常用方法是，任取所求量 I 的一个微小的部分量 ΔI，写出它的线性主部 $dI = f(x)dx$，再在 $[a,b]$ 上积分就得到所求量 I. 这种通过取出所求量的微小部分量 ΔI 的线性主部 dI，再积分求出 I 的方法，通常称为“微元法”或“元素法”.

运用“微元法”的关键，在于对问题作符合实际情况的正确分析，用“以常代变”的方法求出 ΔI 的近似值 $dI = f(x)dx$ (这里，ΔI 与 $dI = f(x)dx$ 之差是一个比 dx 更高阶的无穷小) 进行积分，下面，通过实例来说明.

§ 6.5.1 平面图形的面积

1、直角坐标系中的计算方法

众所周知，定积分的两个来源之一就是计算曲边梯形的面积，因此，计算平面图形的面积应该说是定积分的本职工作. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负连续，则由曲线 $y = f(x)$ 和直线 $x = a, x = b, y = 0$ 所围成的曲边梯形的面积就是定积分 $\int_a^b f(x)dx$, 而被积式 $f(x)dx$ 正是在子区间 $[x, x+dx]$ 上，以点 x 处的高近似代替了子区间 $[x, x+dx]$ 上各点处的高之后，用小矩形的面积 $f(x)dx$ 作为在子区间 $[x, x+dx]$ 上的小曲边梯形的面积 ΔS 的近似值，如图 14 中的阴影部分所示，也就是说 $ds = f(x)dx$, 在 $[a,b]$ 上积分，就得到曲边梯形的面积 $S = \int_a^b f(x)dx$. 如果在 $[a,b]$ 上总有 $f(x) \le 0$，则所论曲边梯形的面积就是

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

一般地，如果 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的变号连续函数，则 $S = \int_a^b |f(x)|dx$ 所表示的就是图 14 中阴影所示图形的面积.

例 6.5.1 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} = 1$ 的面积 S.

解 由对称性, 可先计算出椭圆在第一象限内的面积 S_1(图 15)，则整个椭圆的面积 $S = 4S_1$.

椭圆在第一象限的方程是：

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad (0 \le x \le a).$$

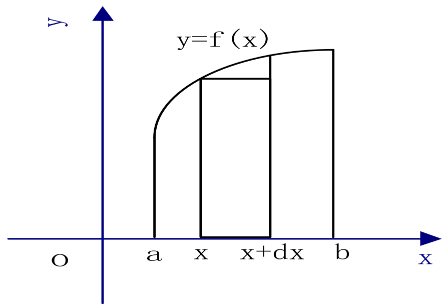

图 14.

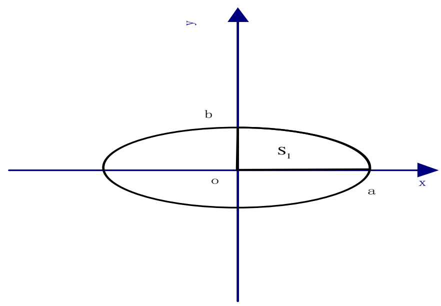

图 15.

故

$$
\begin{aligned}
S &= 4S_1 = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx \\
&= \frac{4b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\Big|_0^1 \\
&= \pi ab.
\end{aligned}
$$

当 $a = b$ 时，椭圆变成半径为 a 的圆，于是得圆面积公式：$S = \pi a^2$.

如果曲线 $y = f(x)$ 位于曲线 $y = g(x)$ 的上方，即当 $a \le x \le b$ 时，$f(x) \ge g(x)$, 那么由 $y = f(x)$ 及 $y = g(x)$ 这两条曲线和直线 $x = a, x = b$ 所围的平面图形的面积为

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

这是因为 S 的微元 dS，等于高为 $[f(x) - g(x)]$，宽为 dx 的矩形面积，即 $dS = [f(x) - g(x)]$(图 16) 的缘故.

类似地，如果曲线 $x = f(y)$ 位于曲线 $x = g(y)$ 的右方，即当 $c \le y \le d$ 时，$f(y) \ge g(y)$, 那么由这两条曲线和直线 $y = c, y = d$ 所围的平面图形 (图 17) 的面积为

$$S = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy.$$

对于更一般的平面图形，只要能把它分成有限多块，使得每块都是上述的图形，于是可按公式求得其面积，相加即得所论的平面图形的面积.

例 6.5.2 计算由曲线 $y = 4 - x^2$ 及 $y = 3x$ 所围形的面积 S.

解 先画出曲线 $y = 4 - x^2$ 及 $y = 3x$ 的图形，解出这两条曲线的交点坐标

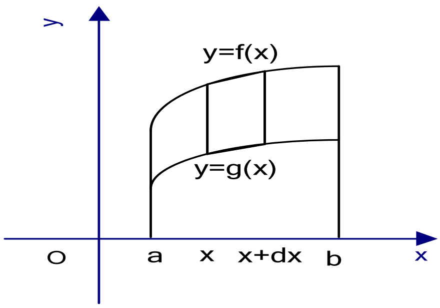

图 16.

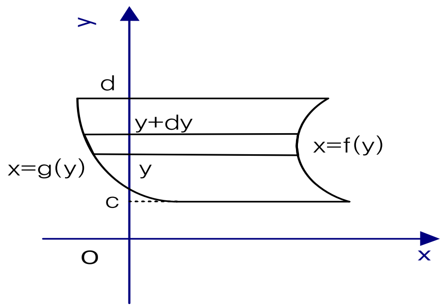

图 17.

$A(-4,-12)$, $B(1,3)$ (图 18). 以 x 为积分变量，有

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^{1}[(4-x^2)-3x]dx \\ &= \left(4x-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_{-4}^{1} \\ &= \frac{125}{6}. \end{aligned}$$

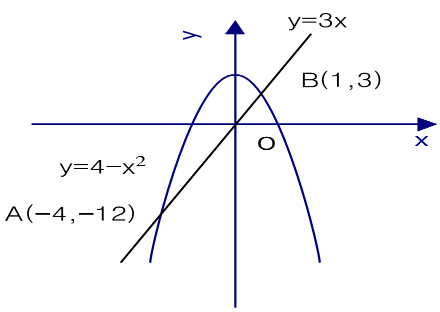

图 18.

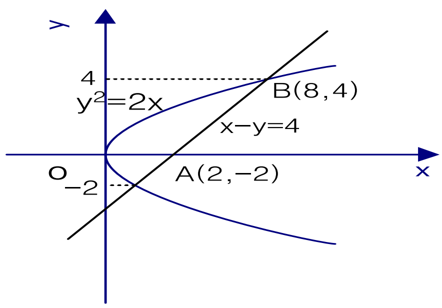

图 19.

例 6.5.3 计算由曲线 $y^2=2x$ 及 $x-y=4$ 所围图形的面积 S.

解 画出曲线 $y^2=2x$ 及 $x-y=4$ 的图形，解出交点坐标 $A(2,-2)$、$B(8,4)$(图 19), 本例题若以 x 作积分变量，计算就比较麻烦，但是，若以 y 作积分变量，计算就比较方便，以 y 作积分变量时，曲线的方程为：$x=\frac{1}{2}y^2$ 及 $x=y+4$，积分区间为

$[-2,4]$，则有

$$S = \int_{-2}^{4}[(y+4)-\frac{1}{2}y^2]dy$$
$$= \left(\frac{1}{2}y^2+4y-\frac{1}{6}y^3\right)\Big|_{-2}^{4}$$
$$= 18.$$

用定积分解实际问题时，对同一个问题有时可以选取不同的积分变量，积分变量选取的不同，积分计算的难易也不同，应当注意选取的积分变量，要使所求的积分比较容易计算.

若曲边梯形的曲边方程为参数形式：$x = x(t), y = y(t)$, 其中 $\alpha \le t \le \beta$, 设 $x(t)$ 随 t 的增加而增加，且 $x(\alpha) = a, x(\beta) = b$, $x(t), y(t)$ 及 $x'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续，那么由曲线 $x = x(t), y = y(t)$，x 轴以及直线 $x = a, x = b$ 所围成的图形面积的公式为:

$$S = \int_a^b |y|dx = \int_\alpha^\beta |y(t)|x'(t)dt.$$

例 6.5.4 求摆线

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(t-\cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

的一拱与 Ox 轴所围图形的面积 (图 20).

解 所围图形的面积为

$$S = \int_0^{2\pi a} ydx = \int_0^{2\pi a} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt$$
$$= a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt$$
$$= a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt$$
$$= a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt$$
$$= a^2\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}$$
$$= 3\pi a^2.$$

2、极坐标系中的计算方法

有些平面图形的边界曲线的方程，在极坐标系中表示比较方便，因此，还需要研究平面图形的面积在极坐标系中的计算方法.

在极坐标系中，由两条极径 $\theta = \alpha, \theta = \beta(\alpha < \beta)$ 及曲线 $\rho = \rho(\theta)$(假定 $\rho(\theta) \ge 0$) 所围成的平面图形 OAB(图 21) 称为曲边扇形. 现在用定积分计算曲边扇形的面积 S.

取 θ 为积分变量，则积分区间为 $[\alpha,\beta]$, 考虑在 $[\theta,\theta+\Delta\theta]$ 上的小曲边扇形的面积 ΔS，以 θ 处的极径 $\rho(\theta)$ 代替 $[\theta,\theta+\Delta\theta]$ 上各点处的极径后，小曲边扇形的面积 ΔS

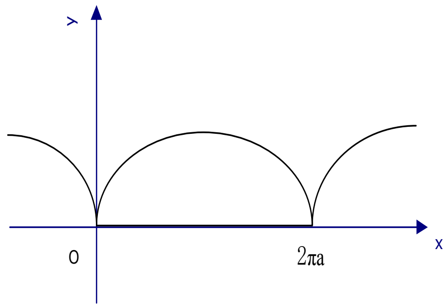

图 20.

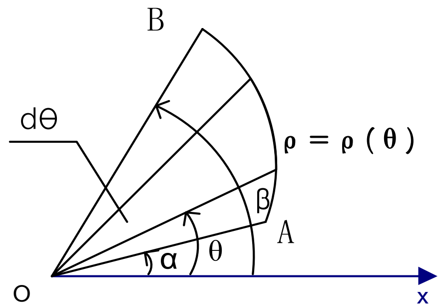

图 21.

就近似于一个圆心角为 $d\theta$，半径为 $\rho(\theta)$ 的圆扇形（图 21 中的阴影部分）的面积，按圆扇形的面积计算出小曲边扇形的面积 ΔS 的近似值，就得到所求的曲边扇形面积 S 的微分 dS，即

$$dS = \frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2 d\theta.$$

积分, 得

$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2 d\theta.$$

这就是在极坐标系中, 曲边扇形面积的计算公式.

例 6.5.5 求心形线 $\rho = a(1+\cos\theta)$, $(a > 0)$ 所围图形的面积 S(图 22).

解 由于所求的心形线的图形是对称于极轴的，设位于极轴上半部的面积为 S_1，则有

$$\begin{aligned} S &= 2S_1 = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi [\rho(\theta)]^2 d\theta \\ &= \int_0^\pi a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta \\ &= a^2\int_0^\pi \left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta \\ &= a^2\left(\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_0^\pi \\ &= \frac{3}{2}\pi a^2. \end{aligned}$$

例 6.5.6 求双纽线 $\rho^2 = a^2\cos 2\theta (a > 0)$ 所围图形的面积，如图 23.

解 由图形的对称性，双纽线所围的面积 S 等于它在第一象限内的面积 S_1 的 4

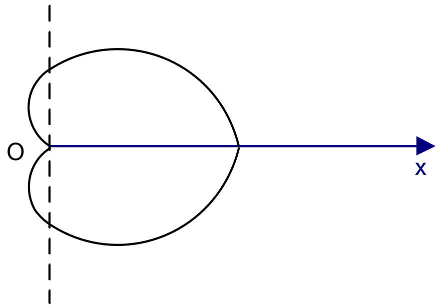

图 22.

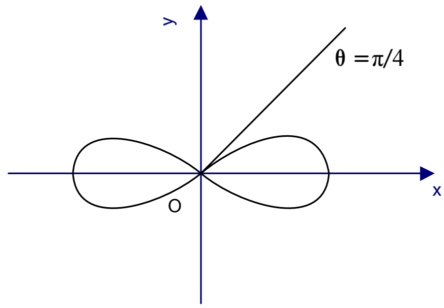

图 23.

倍，故

$$S = 4S_1 = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta d\theta$$
$$= 2a^2 \left(\frac{1}{2}\sin 2\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

§ 6.5.2 立体的体积

1、平行截面面积为已知的立体体积

当一个立体被垂直于坐标轴的平面所截，其截面和面积可以用已知的连续函数来表示时，此立体的体积 V 可以用定积分来计算.

设有一个由曲面和垂直于 Ox 轴的两个平面 $x = a, x = b$ $(a < b)$ 围成的立体 (图 24)，若已知过点 x 且垂直于 Ox 轴的平面截立体所得的截面面积为 $A(x)$ $(a \le x \le b)$，用“微元法”, 取 x 为积分变量，在立体中的一个微小的区间 $[x, x + dx]$ 上，立体的体积 $\Delta V \approx dV = A(x)dx$, 在 $[a, b]$ 上积分，就得到立体的体积公式：

$$V = \int_a^b A(x)dx.$$

例 6.5.7 一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心，并与底面构成的二面角为 α (图 25)，计算这个平面截圆柱体所得的立体的体积 V.

解 立体垂直于 Ox 轴的截面为矩形，在任意的点 $x(0 \le x \le R)$ 处，截面的面积为：

$$A(x) = AD \cdot CD = x\tan\alpha \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2}.$$

故立体的体积为

$$V = \int_0^R A(x)dx = \int_0^R 2\tan\alpha \cdot x\sqrt{R^2 - x^2}dx$$
$$= -\tan\alpha \int_0^R 2\sqrt{R^2 - x^2}d(R^2 - x^2)$$
$$= \frac{2}{3}R^3 \tan\alpha.$$

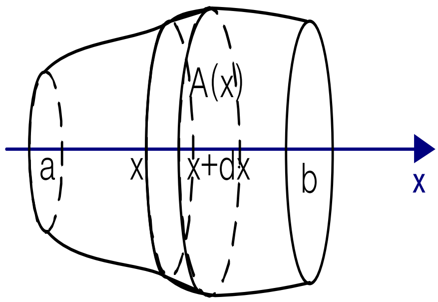

图 24.

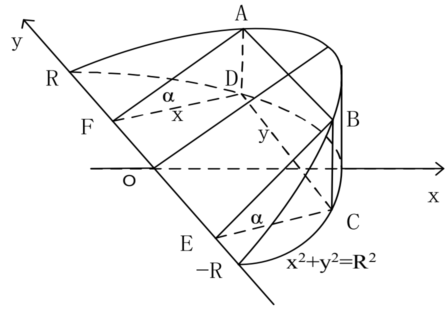

图 25.

另一方面，这个立体垂直于 y 轴的截面是直角三角形，在任意一点 y $(-R \le y \le R)$ 处，截面的面积为：

$$A(y) = \frac{1}{2} FD \cdot AD = \frac{1}{2} \tan\alpha \cdot FD^2 = \frac{1}{2} \tan\alpha (R^2 - y^2).$$

取 y 为积分变量，积分得:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^{R} A(y) dy = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2} \tan\alpha (R^2 - y^2) dy \\ &= \frac{1}{2} \tan\alpha (R^2 y - \frac{1}{3} y^3) \Big|_{-R}^{R} \\ &= \frac{2}{3} R^2 \tan\alpha. \end{aligned}$$

2、旋转体的体积

一个平面图形绕着此平面上的一条直线旋转而成的立体，叫做旋转体，这一条直线称为旋转轴.

考虑由连续曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$ 及 Ox 轴所围成的曲边梯形，绕 Ox 轴旋转而成的旋转体 (图 26). 显然，此旋转体的任何一个垂直于 Ox 轴的截面都是圆，且在任意一点 x 处的截面的面积为：

$$A(x) = \pi [f(x)]^2 dx.$$

由平行截面面积为已知的立体体积公式，不难得出旋转体的体积公式：

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

类似地，由连续曲线 $x = \phi(y)$, 直线 $y = c$, $y = d$ $(c < d)$ 及 Oy 轴所围成的曲边梯形，绕 Oy 轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V = \pi \int_a^b [\phi(y)]^2 dy.$$

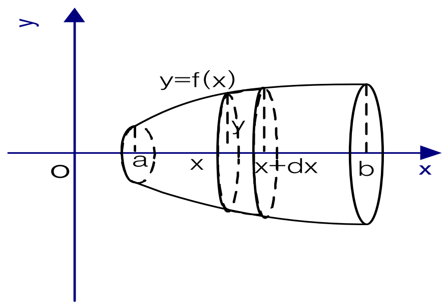

图 26.

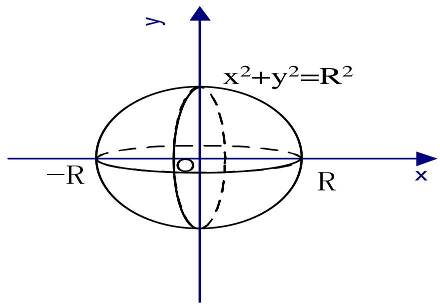

图 27.

例 6.5.8 求半径为 R 的球的体积.

解 如图 27 所示，球体可以看作上半圆周与 Ox 轴所围成的平面图形绕 Ox 轴旋转而成，因为上半圆周的方程为

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad (-R \leq x \leq R),$$

所以球体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^{R} \pi(\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = 2\int_0^R \pi(R^2 - x^2)dx \\ &= 2\pi\left(R^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^R \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

例 6.5.9 求由抛物线 $y = \sqrt{2px}$，直线 $x = a(p, a > 0)$ 及)x 轴所围成的曲边梯形绕 Ox 轴旋转而成的旋转体的体积 (图 28).

解 $V = \int_0^a \pi(\sqrt{2px})^2 dx = \int_0^a 2\pi px dx = \pi pa^2.$

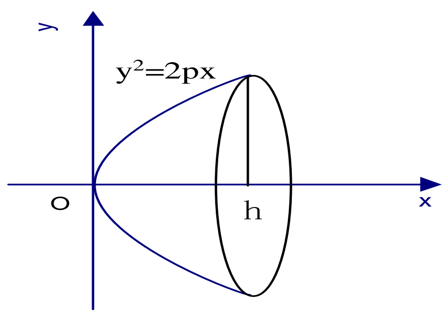

图 28.

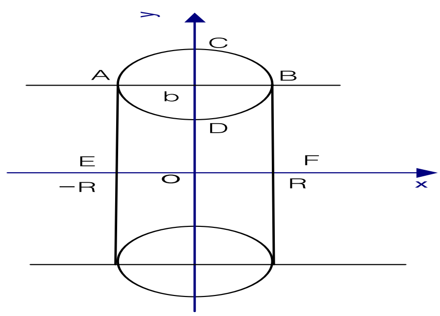

图 29.

例 6.5.10 求圆 $x^2+(y-b)^2=R^2(b>R>0)$ 绕 Ox 轴旋转所成的环体的体积 V (图 29).

解 所求环体的体积是由曲边梯形 $EACBF$ 绕 Ox 轴旋转所成的立体与由曲边梯形 $EADBF$ 绕 Ox 轴旋转所成的立体的体积之差.

因为曲线 $\widehat{ACB}$ 的方程为 $y=b+\sqrt{R^2-x^2}$, 曲线 $\widehat{ADB}$ 的方程为 $y=b-\sqrt{R^2-x^2}$. 故所求的环体的体积为

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-R}^{R}\pi(b+\sqrt{R^2-x^2})^2dx-\int_{-R}^{R}\pi(b-\sqrt{R^2-x^2})^2dx\\
&= 2\pi\left(R^2-\frac{1}{3}x^3\right)\bigg|_0^R\\
&= 4\pi b\int_{-R}^{R}\pi\sqrt{R^2-x^2}dx=4\pi b\cdot\frac{1}{2}\pi R^2=2\pi^2bR^2.
\end{aligned}$$

例 6.5.11 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 分别绕 Ox 轴及 Oy 轴旋转所成的旋转体的体积 V_x,V_y.

解 上半个椭圆与 Ox 轴所围成的平面图形绕 Ox 轴旋转所成的旋转体的体积即是 V_x. 由于上半椭圆弧的方程是：$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, 故有

$$\begin{aligned}
V_x &= \int_{-a}^{a}\pi\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2dx\\
&= \pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\bigg|_{-a}^{a}\\
&= \frac{4}{3}\pi ab^2.
\end{aligned}$$

同理，有

$$\begin{aligned}
V_y &= \int_{-a}^{a}\pi\left(\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\right)^2dy\\
&= \pi\frac{a^2}{b^2}\left(b^2y-\frac{1}{3}y^3\right)\bigg|_{-a}^{a}\\
&= \frac{4}{3}\pi ba^2.
\end{aligned}$$

当 $a=b$ 时，就得到了半径为 a 的球的体积: $V_{\text{球}}=\frac{4}{3}\pi a^3$.

例 6.5.12 计算由摆线 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)\ \ (0\le t\le 2\pi)$ 的一拱，与 $y=0$ 所围成的平面图形分别绕 Ox 轴，Oy 轴旋转而成的旋转体的体积 V_x,V_y.

解 解如图 30 所示.

$$
\begin{aligned}
V_x &= \int_0^{2\pi a} \pi y^2(x)dx \\
&= \pi \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 d[a(t-\sin t)] \\
&= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)dt \\
&= 5\pi^2 a^3.
\end{aligned}
$$

而摆线的一拱与 Ox 轴所围成的平面图形，绕 Oy 轴旋转而成的旋转体的体积 V_y，可以看作平面图形 $OAB2aO$ 与分别绕 Oy 轴旋转而成的旋转体的体积之差，故

$$
\begin{aligned}
V_y &= \int_0^{2a} \pi x_2^2 y dy - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y)dy \\
&= \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2(t-\sin t)^2 a\sin t dt - \pi \int_0^{\pi} a^2(t-\sin t)^2 a\sin t dt \\
&= -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t-\sin t)^2 \sin t dt = 6\pi^3 a^3.
\end{aligned}
$$

§ 6.5.3 平面曲线的弧长

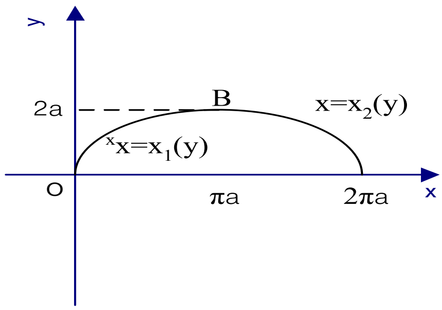

图 30.

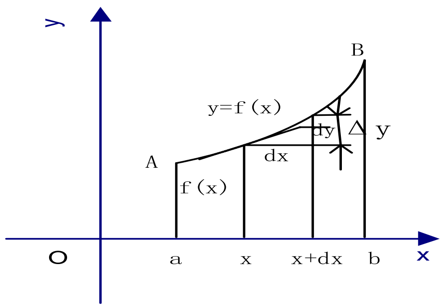

图 31.

设连续曲线 $\widehat{AB}$ 的方程为 $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$，其中 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有一阶连续的导数，求曲线 $\widehat{AB}$ 的弧长 s(图 31).

在直角坐标系下，对于曲线: $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$，在 $[a, b]$ 的任意一个子区间 $[x, x + dx]$ 上，曲线弧 $\widehat{AB}$ 的小弧段 Δs 的弧长的近似值 ds 为：

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2}dx,$$

由此得曲线 $\widehat{AB}$ 的弧长 s 为

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx.$$

例 6.5.13 某建筑物的层顶采用悬索结构，已知主索为一条抛物线 $y = kx^2$(图 32)，其跨度为 36m，中心下降 1.54m，求主索道的长度 s.

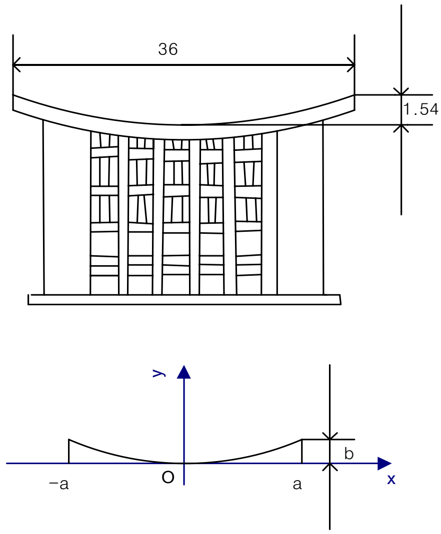

图 32.

解 由图 32 知，主索道的方程为: $y = \frac{b}{a^2}x^2$，其中 $a = 18, b = 1.54$, 故有

$$
\begin{aligned}
s &= \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx \\
&= 2\int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{2b}{a^2}x\right)^2} dx \\
&= \frac{a^2}{b}\int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{2b}{a^2}x\right)^2} d\left(\frac{2b}{a^2}x\right) \\
&= \frac{a^2}{b}\int_0^{\frac{2b}{a}} \sqrt{1 + u^2} du \\
&= \frac{a^2}{b}[\frac{u}{2}\sqrt{1 + u^2} + \frac{1}{2}\ln(u + \sqrt{1 + u^2})]\Big|_0^{\frac{2b}{a}} \\
&= a\sqrt{1 + \left(\frac{2b}{a}\right)^2} + \frac{a^2}{2b}\ln\left[\frac{2b}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{a^2}{2b}\right)^2}\right].
\end{aligned}
$$

把 $a = 18, b = 1.54$ 代入上式有 $s \approx 36.17(m)$.

当曲线弧由参量方程 $x = \phi(t), y = \psi(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ 给出时，其中 $\phi(t), \psi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的导数. 由于 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上的任意一个子区间 $[t, t + dt]$ 上，小弧段

Δs 的近似值 ds 为

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\phi'^2(t)(dt)^2 + \psi'^2(t)(dt)^2} = \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt.$$

于是所求的弧长为 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt.$

例 6.5.14 求摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 的一拱的弧长 s.

解

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[a(1-\cos t)]^2 + (a\sin t)^2}dt \\
&= 2a \int 2\pi_0 \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}dt = 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}}dt \\
&= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}dt = 2a\, x\left(-2\cos \frac{t}{2}\right)\Big|_0^{\pi} \\
&= 8a.
\end{aligned}$$

如果曲线弧 $\widehat{AB}$ 的方程由极坐标 $\rho = \rho(\theta)(\alpha \le \theta \le \beta)$ 给出时，由公式

$$\begin{cases} \rho(\theta)\cos\theta, \\ \rho(\theta)\sin\theta. \end{cases}$$

可得

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{[\rho'(\theta)]^2 + [\rho^2(t)]^2}d\theta.$$

于是曲线弧 $\widehat{AB}$ 的弧长为

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\rho'(\theta)]^2 + [\rho^2(t)]^2}d\theta.$$

例 6.5.15 求阿基米德螺线 $\rho = a\theta(0 \le \theta \le 2\pi)$ 的长度 s，其中 $a > 0$ 为常数 (图 33).

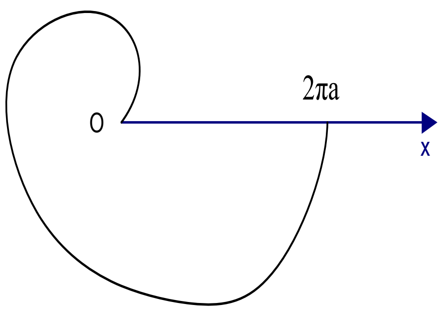

图 33.

解

$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + a^2\theta^2} d\theta = \int_0^{2\pi} a\sqrt{1+\theta^2} d\theta \\
&= a\left[\frac{\theta}{2}\sqrt{1+\theta^2} + \frac{1}{2}\ln(\theta + \sqrt{1+\theta^2})\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{a}{2}[2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})].
\end{aligned}
$$

§ 6.5.4 旋转体的侧面积

考虑一个旋转体，如图 34 所示，它的侧面是由区间 $a \le x \le b$ 所对应的连续曲线:$y = f(x)$ $(f(x) \ge 0)$ 绕 Ox 轴旋转而成的曲面，求此旋转曲面的侧面积 S.

取 x 为积分变量，积分区间为 $[a,b]$，考虑位于 $[a,b]$ 上的任意一个子区间 $[x, x+dx]$ 上的小窄带状侧面 ΔS, 由于此小窄带状侧面是由 $y = f(x)$ 的一小段弧 ds 旋转而成的，故小窄带状侧面的面积 ΔS 可以近似看成长为 $2\pi y$, 宽为 ds 的矩形面积，即 ΔS 的近似值 dS 为

$$dS = 2\pi y ds = 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'2(x)}dx,$$

故

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'2(x)}dx.$$

这就是旋转体的侧面积 S 的计算公式.

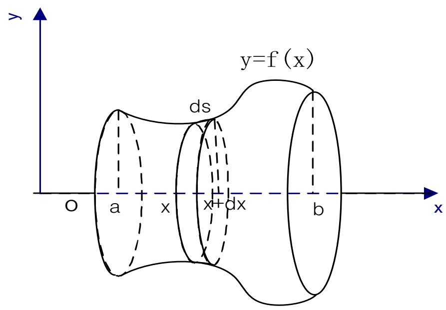

图 34.

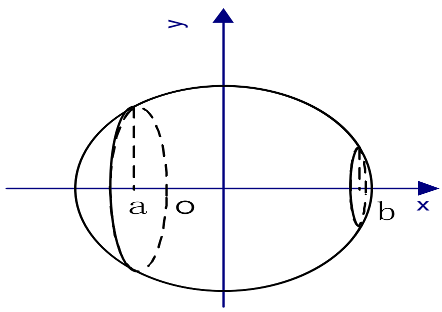

图 35.

例 6.5.16 在半径为 R 的球面上 (图 35)，求横坐标由 a 至 $b(-R \le a < b \le R)$ 的球带面的面积 S.

解 此球带是由圆弧 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ $(a \le x \le b)$, 绕 Ox 轴旋转而成，故有

$$
\begin{aligned}
S &= \int_a^b 2\pi\sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2} dx \\
&= 2\pi\int_a^b R dx = 2\pi R(b-a).
\end{aligned}
$$

当 $a=-R, b=R$ 时，就得到半径为 R 的球的表面积

$$S_{球}=2\pi R[R-(-R)]=4\pi R^2.$$

例 6.5.17 探照灯的反光镜由一条抛物线 $y^2=2px$ $(p>0, 0\le x\le h)$，绕 Ox 轴旋转而成，求反光镜的面积 S(图 36).

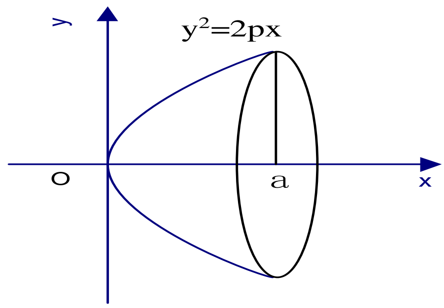

图 36.

解 因为 $y=\sqrt{2px}$ $(p>0, 0\le x\le h)$, 所以

$$\begin{aligned}S&=\int_0^h 2\pi\sqrt{2px}\sqrt{1+\left(\sqrt{\frac{p}{2x}}\right)^2}dx\\&=2\pi\sqrt{p}\int_0^h\sqrt{2x+p}dx\\&=\pi\sqrt{p}\int_0^h\sqrt{2x+p}d(2x+p)\\&=\pi\sqrt{p}\cdot\frac{2}{3}(2x+p)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^h\\&=\frac{2\pi p^2}{3}\left[\left(\frac{2h}{p}+1\right)^{\frac{3}{2}}-1\right].\end{aligned}$$

习题 6.5

1. 求下列平面图形的面积：

(1) 由曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 一段和 x 轴所围成的平面图形的面积；

(2) 由曲线 $y=\ln x$ 和直线 $y=\ln a, y=\ln b, x=0$ $(b>a>0)$ 所围平面图形的面积；

(3) 由 $y=e^x, y=e^{-x}$ 和直线 $x=1$ 所围成的平面图形的面积；

(4) 由曲线 $x=5y^2$ 和 $x=1+y^2$ 所围成的平面图形的面积；

(5) 由曲线 $y=2-x^2$ 和 $y^3=x^2$ 所围成的平面图形的面积；

(6) 由曲线 $y^2=4(x+1)$ 和 $y^2=4(1-x)$ 所围成的平面图形的面积；

(7) 由曲线 $y^2=2px$ 和 $x^2=2py$ 所围成的平面图形的面积；

(8) 曲线 $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{3}{2}}$ 所围成图形的面积；

(9) 曲线 $y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x$ 与直线 $y=0$ 及 $x=-1$ 所围成图形的面积；

(10) 由三条圆曲线 $x^2+y^2,(x-2)^2+y^2,(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$ 所围成的圆内公共部分图形的面积；

(11) 设曲线 $x^2-4y-4=0$ 与直线 $x+y-2=0$ 所围成的图形为 D，试求一条垂直于 x 轴的直线，它将 D 分成面积相等的两部分；

(12) 由星形线 $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ 所围成的平面图形的面积；

(13) 圆 $\rho=1$ 被心形线 $\rho=1+\cos\theta$ 分割成两部分，求这两部分的面积；

(14) 求曲线 $r=3\cos\theta, r=1+\cos\theta$ 所围的图形的面积.

(15) 求曲线 $y=\ln x(2\le x\le 6)$ 的一条切线，使该切线与直线 $x=2, x=6$ 及曲线 $y=\ln x$ 所围成的图形的面积为最小.

2. 求下列各立体的体积：

(1) 以抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $x=2$ 所围成的图形为底，而垂直于抛物线轴的截面都是等边三角形的立体的体积；

(2) 以长半轴 $a=10$，短半轴 $b=5$ 的椭圆为底，而垂直于长轴的截面是等边三角形的立体的体积；

(3) 两柱面 $x^2+y^2=a^2$ 及 $x^2+z^2=a^2$ 所围之体积; $(V=8\int_0^a(a^2-x^2)dx.)$

(4) 曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2=ax$ 所围立体的体积;

(5) 由半立方抛物线 $y^2=x^3$, x 轴和直线 $x=1$ 所围图形，分别绕 x 轴和 y 轴旋转而成的旋转体的体积；

(6) $y=x^2, y^2=x$ 所围图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积；

(7) 求抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $x=\frac{1}{2}$ 所围成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转而成的旋转体的体积；

(8) 由星形线 $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ 绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积；

(9) 由曲线 $y=x^2+7$ 和 $y=3x^2+5$ 所围图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积；

(10) 由圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 绕 y 轴旋转而成的环体的体积；

(11) 由心形线 $\rho=4(1+\cos\theta)$ 和直线 $\theta=0$ 及 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 所围图形绕极轴旋转而成的旋转体的体积；

(12) 由曲线 $y=\sin x(x\in[0,\pi])$ 与 x 轴所围图形绕 y 轴和直线 $l: y=1$ 旋转而成的旋转体的体积.

3. 求平面曲线的弧长：

(1) 悬链线 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 在 $x=-1$ 到 $x=1$ 之间一段的弧长;

(2) 曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}\ (0\le x\le 4)$ 的弧长;

(3) 曲线 $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y\ (1\le y\le e)$ 的弧长;

(4) 计算曲线 $y=\ln(1-x^2)$ 上相应于 $0\le x\le\frac{1}{2}$ 的一段弧的长度;

(5) 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}(a>b)$ 的弧长;

(6) 曲线 $(\frac{x}{a})^{\frac{2}{3}}+(\frac{y}{b})^{\frac{2}{3}}=1\ (a>0,b>0)$ 的全长.

(7) 曲线 $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{3}{2}}$ 的弧长;

(8) 曲线 $x=a(\cos t+t\sin t),y=a(\sin t-t\cos t)\ (0\le\theta\le2\pi)$ 的弧长;

(9) 星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t\end{cases}(0\le t\le 2\pi)$ 的全长; $(6a)$

(10) 心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 的全长;

(11) 对数螺线 $\rho=ke^{a\theta}$ 在 $\theta=\alpha$ 到 $\theta=\beta$ 之间的弧长;

4. 证明曲线 $y=\sin x$ 上相应于 x 从 0 变到 2π 的一段弧长等于椭圆 $2x^2+y^2=2$ 的周长;

5. 求下列各曲面的面积:

(1) $x^2=2py+a\ (0\le x\le a,a>1)$分别绕 x，y 轴;

(2) $y=\sin x(0\le\theta\le2\pi)$, 绕 x 轴;

(3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.绕 y 轴;

(4) 星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ 绕 x 轴旋转而成的曲面面积;

(5) 双纽线 $\rho^2=a^2\cos2\theta$ 绕极轴旋转而成的曲面面积;

(6) 曲线 $x^2+(y-b)^2=a^2(a<b)$ 绕 x 轴旋转而成的圆环面和面积;

(7) 摆线 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$ 绕直线 $x=\pi a$ 旋转而成的旋转体的侧面积.

6. 已知抛物线 $x^2=(p-4)y+a^2(p\neq4,a>0)$，求 p 和 a 的值，使满足下面两个条件：

(1) 抛物线与 $y=x+1$ 相切;

(2) 抛物线与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转有最大的体积.

7. 某反光镜可近似地看做介于 $x=0$ 与 $x=\dfrac{1}{4}$ 米之间的抛物线 $y^2=8x$ 绕 x 轴旋转所成的旋转抛物面. 求此反光镜面的面积.

8. 求圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与两平面 $z=0,z=2(x+a)$ 所围立体的体积和侧面积.

9. 求由曲线 $y=\cos x(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2})$ 与直线 $y=0$ 围成的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的侧面积, 设其为 S，求证: $4\pi<S<\frac{14\pi}{3}$.

§ 6.6 定积分在物理上的应用

定积分在物理上有十分广泛的应用，本节仅简要介绍应用定积分解决物体的质心、变力作功、引力、液体的侧压力等方面的问题.

§ 6.6.1 密度, 质量和质心

设由以弧长为参数的方程 $x=x(s),y=y(s),0\le s\le l$. 给出的光滑曲线上分布有质量, 其中 s 表示从曲线一个端点 A_0 算起的弧长, 并把曲线上对应于 s 的点记为 A_s. 设已知曲线从 A_0 到 A_s 的弧段的质量为 $m(s)$, 于是称比值

$$\frac{m(s+\Delta s)-m(s)}{\Delta s}$$

为曲线上从 As 到 $A_{s+\Delta s}$ 的弧段的平均密度. 如果极限

$$\rho(s) = \frac{dm}{ds} = \lim_{Deltas \to 0} \frac{m(s+\Delta s) - m(s)}{\Delta s}$$

存在, 则称之为曲线在 A_s 点的密度 (线密度). 按定义知, 密度就是质量关于弧长的导数. 反之, 质量函数就是密度 $\rho(s)$ 的一个原函数. 由此

$$m(s) = \int_0^s \rho(t)dt.$$

中学物理中讲过有限多个质点的质心的求法. 设在平面上有 n 个质点, 质量分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$, 坐标依次为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$. 则这 n 个质点系的质心坐标为

$$\overline{x} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}, \quad \overline{y} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}.$$

现在将这个问题加以推广, 利用定积分代替上式中的求和来求一条光滑曲线 l 的质心. 当密度 $\rho(x)$ 为常数时, 质心的位置只与 l 的形状有关, 这时称质心为形心.

设平面上有一条长为 l 的光滑曲线, 其以弧长 s 为参数的方程为

$$x = x(s), y = y(s), 0 \le s \le l.$$

曲线上分布有质量, 其密度函数为 $\rho(s)$. 为求这条曲线的质心, 在 $[0, l]$ 上取分割 $T: 0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n = l$. 取 $\xi_k \in [s_{k-1}, s_k]$, 并记曲线上对应于 s_k 的点为 A_k, 则从 A_{k-1} 到 A_k 的弧段的质量近似等于 $\rho(\xi_k)\Delta s_k, k = 1, 2, \cdots, n$. 将整条曲线近似地视为由 n 个质点组成的质点系，n 个质点的质量和位置分别为

$$\rho(\xi_k)\Delta s_k, \quad (x(\xi_k), y(\xi_k)), k = 1, 2, \cdots, n.$$

于是按质点系的质心坐标公式知

$$x(T) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\xi_k) x(\xi_k) \Delta s_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\xi_k) \Delta s_k}, \quad y(T) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\xi_k) y(\xi_k) \Delta s_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\xi_k) \Delta s_k}$$

就是曲线质心坐标的近似值. 不难看出，只要假设 $\rho(s)$ 连续，则当 $\|T\| \to 0$ 时，近似程度越来越好. 按定积分定义可知，质心的坐标为

$$\overline{x} = \frac{\int_0^l \rho(s) x(s) ds}{\int_0^l \rho(s) ds}, \quad \overline{y} = \frac{\int_0^l \rho(s) y(s) ds}{\int_0^l \rho(s) ds}.$$

当密度 $\rho(s)$ 为常数时, 上式化为

$$\overline{x} = \frac{1}{l} \int_0^l \rho(s) x(s) ds, \quad \overline{y} = \frac{1}{l} \int_0^l \rho(s) y(s) ds.$$

这是形心的坐标公式. 注意，曲线绕 x 轴旋转所得的旋转体的侧面积为

$$S = 2\pi \int_0^l y(s)ds = 2\pi\overline{y}l.$$

这表明曲线绕 x 轴旋转所得的旋转体的侧面积等于半径为形心的纵坐标 $\overline{y}$，高为弧长 l 的圆柱面的面积.

如果光滑曲线的参数方程是一般的参数方程

$$x = x(t), y = y(t),\ \ \alpha \le t \le \beta.$$

而对应于参数 t 的点的密度是 $\rho(t)$ 时，由弧微分公式有

$$\overline{x} = \frac{\int_\alpha^\beta \rho(t)x(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt}{\int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt},$$

$$\overline{y} = \frac{\int_\alpha^\beta \rho(t)y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt}{\int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt}.$$

显然，当光滑曲线是由直角坐标或极坐标函数给出时，也可以导出类似的公式，这里不再列举.

例 6.6.1 求圆弧 $x = r\cos t, y = r\sin t, |t| \le \alpha \le \pi$ 的形心.

解 由对称性知形心位于 x 轴上，故有 $\overline{y} = 0$. 只须再求 $\overline{x}$，按公式有

$$\overline{x} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} r\cos t\sqrt{[-r\sin t]^2 + [r\cos t]^2}dt}{\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{[-r\sin t]^2 + [r\cos t]^2}dt} = \frac{2r^2\sin\alpha}{2r\alpha} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}.$$

例 6.6.2 求心脏线 $r = a(1 + \cos\theta), 0 \le \theta \le 2\pi$ 的形心.

解 由对称性知，形心位于极轴的正向上，于是 $\overline{y} = 0$. 由上节例 6.5.14 知，心脏线的周长为 $8a$. 从而由公式知形心的横坐标为.

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{8a}\int_0^{8a} x(s)ds = \frac{1}{8a}\int_0^{2\pi} r\cos\theta\sqrt{r^2 + (r')^2}d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1 + \cos\theta)\cos\theta\sqrt{a^2(1 + \cos\theta)^2 + a^2(-\sin\theta)^2}d\theta \\
&= \frac{a}{8}\int_0^{2\pi}(1 + \cos\theta)\cos\theta\sqrt{2(1 + \cos\theta)}d\theta \\
&= \frac{a}{4}\int_0^{2\pi}(1 + \cos\theta)\cos\theta\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta \\
&= a\int_0^{\pi}(2 - 2\sin^2\frac{\theta}{2})(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2})d(\sin\frac{\theta}{2}) \\
&= 2a\int_0^1 (1 - t^2)(1 - 2t^2)dt = \frac{4}{5}a.
\end{aligned}$$

§ 6.6.2 变力所作的功

设力的大小为 f，其方向与 Ox 轴平行，某物体受力 f 的作用，由点 $x=a$ 沿 Ox 轴移动到点 $x=b$ $(a<b)$，求力 f 所作的功 W.

如果 f 是常力，那么它所作的功 W 等于 f 乘以物体移动的路程: $W=(b-a)f$.

如果 f 是变力，即在 Ox 轴上的不同点处，f 的大小也不同，这时 $f=f(x)$ 是一个随 x 而变的函数. 采用微元法: 先把 $[a,b]$ 分成 n 个子区间，在子区间 $[x,x+dx]$ 上变力所作的功为 ΔW，它可以用功的微元 dW 来近似代替 (图 37)，即

$$dW=f(x)dx,$$

于是

$$W=\int_a^b dW=\int_a^b f(x)dx.$$

这就是说，变力 $f(x)$ 所作的功，等于它在区间 $[a,b]$ 上的定积分.

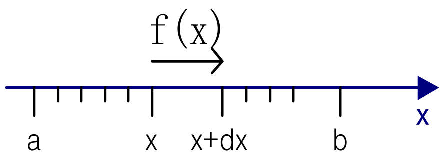

图 37.

例 6.6.3 一个弹簧原长为 $0.1m$，一个力 $f(N)$ 把它由原长拉长了 $0.06m$(图 38). 求力 f 所作的功 W.

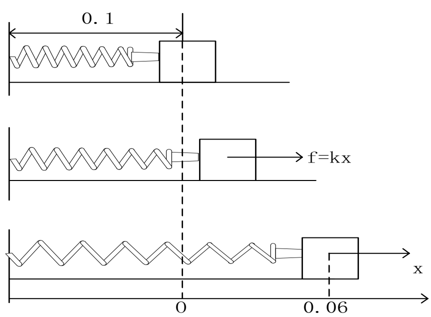

图 38.

解 由物理学知道，拉力 $f(N)$ 与弹簧的伸长量 $s(m)$ 成正比，即 $f=ks$（k 为比例常数）. 按图 38 选取坐标系，伸长量为 x, 拉力为 $f=kx$，以 m 为单位，积分区间是 $[0,0.06]$，于是力 f 所作的功 W 为：

$$W=\int_0^{0.06} f dx=\int_0^{0.06} kxdx=k\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{0.06}=0.0018k(J).$$

另外，本例若把坐标原点选在弹簧的固定端，则伸长量 $s = (x - 0.1)$，拉力为 $f = k(x - 0.1)^2$，而积分区间为 $[0.1, 0.16]$（长度以 m 为单位）有

$$W = \int_{0.1}^{0.16} k(x-1)dx = \frac{k}{2}(x-0.1)^2\Big|_{0.1}^{0.16} = 0.0018k(J).$$

例 6.6.4 一个圆柱形的储水罐，高 $5m$, 底圆半径 $3m$，罐内盛满了水，求把罐内的水全部抽出所作的功 W.

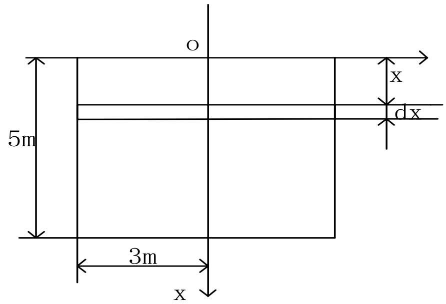

图 39.

解 如图 39 所示，选取 Ox 轴, 以水的深度 $x(m)$ 为积分变量, 积分区间为 $[0, 5]$. 设想把罐内的水分成许多水平的薄层，则在任意的一个小区间 $[x, x + dx]$ 上的一薄层水的厚度为 $dx(m)$. 因此，这一薄层水的重量为 $9.8(\pi 3^2)10^3 dx(N))$. 若把这一薄层水抽出所走过的路程用 x 近似代替，则抽出这一薄层水所作的功 Δw 可近似用 $dW = 9.8(\pi 3^2)x10^3 dx$ 表示. 在 $[0, 5]$ 上积分，有

$$\begin{aligned} W &= \int_0^5 dW = \int_0^5 9.8(\pi 3^2)x10^3 dx \\ &= (88.2\pi \times 10^3)\int_0^5 xdx \approx 3.46 \times 10^6 (J). \end{aligned}$$

例 6.6.5 把电量 $Q(C)$ 的点电荷放在 x 轴的原点，它产生一个电场，由库伦定律，把一个单位正电荷放在场中 Ox 轴上距离原点 O 为 $x(m)$ 的地方, 电场对它的作用力大小为 $F = k\frac{Q}{x^2}$ (k 为常数). 求：

（1） 场力把单位正电荷沿 Ox 轴由 $x = a(m)$ 处移至 $x = b(m)$ 处所作的功 W_1；

（2） 场力把单位正电荷沿 Ox 轴由 $= a(m)$ 移至无穷远点所作的功 W_2.

解 这是变力作功的问题图 40.

(1) 由于 $dW_1 = k\frac{Q}{x^2}dx$, 故

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_a^b k\frac{Q}{x^2}dx = kQ\left[-\frac{1}{x}\right]_a^b \\ &= kQ\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \quad (J); \end{aligned}$$

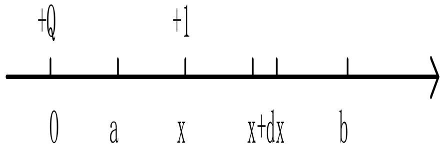

图 40.

(2) $W_2 = \int_a^{+\infty} k\frac{Q}{x^2}dx = \frac{kQ}{a} \quad (J)$.

§ 6.6.3 引力问题

万有引力定律告诉我们，质量为 m_1, m_2，相距为 r 的两个质点是相互吸引的，引力的方向沿着两个质点的联线，引力的大小为

$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

这里, k 为引力系数.

对于一个物体和一个质点（或两个物体），如果它们的距离非常遥远，那么都可以把它们近似地看成质点，直接用上面的公式来计算引力即可. 但是如果它们之间的距离不大，则在某些特殊的情况下可以用定积分的方法来解决，下面通过一个例子来说明引力问题的计算方法.

例 6.6.6 设有一长为 l, 质量为 M 的均匀细棒，在棒所在的直线上距棒的近端距离为 a 处有一个质量为 m 的质点，求棒对质点的引力 F.

解 在本例中，由于细棒与质点在同一条直线上，当分割细棒为 n 个小段时，将每个小段与质点之间的引力大小直接相加就可以得到细棒与质点之间的引力（即满足可加性）. 因此，这个问题可以用定积分来解决. 如图 41 选取坐标系，使棒的一端位于坐标原点 O，质点位于 $l+a$ 处. 把细棒上相应于 $[x, x+dx]$ 的一段近似地看成质点, 其质量为 $\frac{M}{l}dx$，这一小段棒与质点和距离是 $l+a-x$，则有

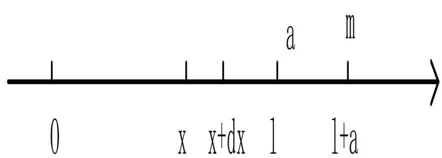

图 41.

$$dF = -k\frac{m\frac{M}{l}dx}{(l+a-x)^2} = -\frac{kMm}{l(l+a-x)^2}dx,$$

$$\begin{aligned}F &= \int_0^l dF = -\int_0^l \frac{kMm}{l(l+a-x)^2}dx\\ &= -\frac{kMm}{l}\int_0^l \frac{d[x-(l+a)]}{[x-(l+a)]^2}\\ &= -\frac{kMm}{a(l+a)}.\end{aligned}$$

§ 6.6.4 液体的侧压力

在水坝和闸门的工程设计中，需要计算水坝和闸门所受的水的压力，这就是液体的侧压力问题.

设有一曲边梯形平板 $ABDC$ 铅直地浸入液体之中，如图 42. 坐标系的选取使 Ox 轴向下, Oy 轴与液面相齐，曲边 CD 的方程为 $y = f(x)$, 现在来求此曲边梯形平板的一侧所受的液体的侧压力 P.

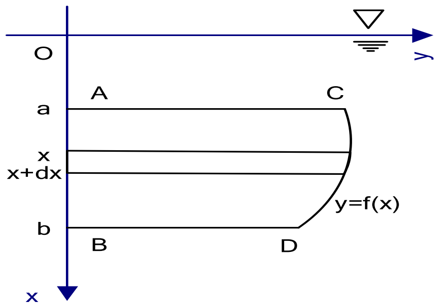

图 42.

从物理学知道，在液体中的每一点处，在各个方向上都承受着压力，并且各方向上的压力大小都相同. 也就是说，在液体中的同一深度处的各点所承受压力的大小都相同，若以 h 表示这一点的深度，p 表示这一点处的压强，γ 表示液体的比重，则有：

$$p = \gamma h.$$

由于压强是随着深度而变化的，我们取 x 为积分变量，考虑位于 $[x, x+dx]$ 处的小横条，在此小横条内压强的变化不大，用深度为 x 的压强 $p = \gamma x$ 代替横条上各点处的压强，同时把小横条的面积近似看成长为 $f(x)$，宽为 dx 的矩形面积，则小横条所受的液体压力 ΔP 的近似值 dP 为

$$dP = pf(x)dx = \gamma xf(x)dx.$$

把 dP 在 $[a, b]$ 上积分，则得液体侧压力公式：

$$P = \int_a^b \gamma xf(x)dx.$$

例 6.6.7 设某水渠的闸门与水面垂直，水渠的横截面是等腰梯形，下底 $2m$，上底为 $6m$，高为 $10m$，当水渠灌满时，求闸门所受的水压力.

解 如图 43 选取坐标系, CD 的方程为: $y-3=\frac{1-3}{10-0}x$, 即 $y=-\frac{1}{5}x+3$.

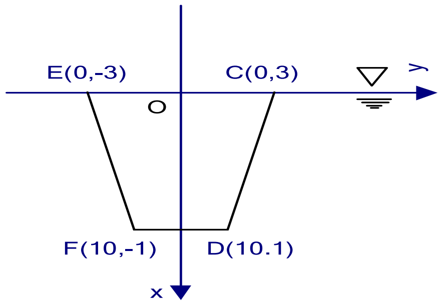

图 43.

由于闸门以 Ox 轴为对称轴，故只需计算它的一半的压力再乘以 2.

$$P=2\int_0^{10}\gamma x\left(-\frac{1}{5}x+3\right)dx=\frac{500}{3}\gamma\approx 1.63\times 10^6(N).$$

§ 6.6.5 函数的平均值

1、连续函数的平均值

平均值问题是实际问题中常见的问题. n 个离散量 y_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 的算术平均值 $\overline{y}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$ 是大家所熟知的.

若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，由定积分的中值定理可知，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值为：

$$\overline{y}=f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

例 6.6.8 设纯电阻电路中的正弦交流电的电流 $i=I_m\sin\omega t$，其中常数 I_m 为电流最大值，ω 为角频率. 求：

（1） 电流 i 在半周期区间 $[0,\frac{\pi}{\omega}]$ 上的平均值；

（2） 电路中的电阻为 R 时，在一个周期上交流电的平均功率 $\overline{p}$.

解 (1)

$$\bar{i}=\frac{1}{\frac{\pi}{\omega}}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}I_m\sin\omega t dt=\frac{\omega I_m}{\pi}\int^{\frac{\pi}{\omega}}\sin\omega t dt=\frac{2}{\pi}I_m.$$

（2） 因为电路中的电压 $U=iR=I_mR\sin\omega t$，所以功率 $p=Ui=I_m^2R\sin^2\omega t$,

在一个周期区间 $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$ 上的平均功率为：

$$
\begin{aligned}
\overline{p} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I_m^2 R\sin^2\omega t dt = \frac{I_m^2 R}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2\omega t d(\omega t) \\
&= \frac{I_m^2 R}{4\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (1-\cos 2\omega t d(\omega t) \\
&= \frac{1}{2} I_m^2 R.
\end{aligned}
$$

若取 $U_m = I_m R$，则上面的结果可以记成: $\overline{p} = \frac{1}{2} I_m U_m$. 这就是说在纯电阻电路中，正弦交流电的平均功率等于电流与电压的最大值的乘积的一半. 日常生活中所用的交流电器上标明的功率，就是指的平均功率 $\overline{p}$.

2、均方根值

交流电的电流 $i = i(t)$ 的大小和方向是随着时间的变化而变的. 但是，在一般的电器上却标明有确定的电流值，这实际上是指交流电的有效值.

若交流电流 $i = i(t)$ 在一个周期内，消耗在同一电阻 R 上的平均功率等于某直流电流 I 消耗在同一电阻 R 上的功率时，这称该直流电流 I 的数值为交流电流 $i(t)$ 的有效值.

例 6.6.9 在纯电阻电路中，若电阻为 R，交流电流 $i = i(t)$，求电流 $i(t)$ 的有效值 I.

解 电流 $i(t)$ 在 R 上消耗的功率为 $i^2(t)R$，它在一个周期区间 $[0, T]$ 上的平均值为

$$\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t) R dt.$$

设直流稳恒电流 I 在 R 上消耗的功率为 $I^2 R$，则有

$$I^2 R = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t) R dt = \frac{R}{T}\int_0^T i^2(t) dt,$$

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t) dt,$$

即 $I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t) dt}$. 可知有效电流 I 的值与 R 无关.

同理，还可以推出交流电压 $u = u(t)$ 的有效值 U 的公式

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t) dt}.$$

例 6.6.10 在纯电阻电路中的正弦交交流电，其电流强度为 $i = I_m \sin\omega t$, 其中 I_m 为电流的最大值, ω 是角频率. 求电流的有效值 I 及电压的有效值 U.

解 $I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T}\int_0^T \sin^2 tdt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0.707I_m.$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T ur(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (I_mR)^2\sin^2\omega tdt}$$
$$= \sqrt{\frac{U_m^2}{T}\int_0^T \sin^2\omega tdt}$$
$$= \frac{U_m}{\sqrt{2}} \approx 0.707U_m.$$

例题 6.6.10 说明，正弦交流电电流的有效值为其峰值的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍，而电压的有效值也为其峰值的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍. 对平常的照明用电，其电压为 $u(t) = 311\sin 100\pi t$，其电压峰值为 $311V$，因而电压的有效值为：$U = \frac{311}{\sqrt{2}} \approx 219.9 \approx 220V,$

在数学领域内的统计学上，称 $\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx}$ 为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的均方根. 因此，在交流电流电路中，电流、电压的有效值就是它们在一个周期上的均方根值.

习题 6.6

1. 一细轴, 长为 $10m$, 它的线密度 $\mu = 6 + 0.3x(kg/m)$, 其中 x 为距轴的一个端点的距离, 试求细轴的质量.

2. 求下列曲线段的质心坐标：

(1) 半径为 a，弧长为 $\frac{1}{2}\pi a(a \le \pi)$ 的均匀圆弧;

(2) $f = ae^{k\theta}(a > 0, k > 0)$ 上由点 (0,a) 到点 (θ, r) 的均匀弧段.

3. 求半圆 $0 \le y \le \sqrt{R^2 - x^2}$ 的重心.

4. 求半球 $0 \le z \le \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的重心.

5. 求抛物体的 $x^2 + y^2 \le z \le h$ 重心和饶 z 轴的转动惯量 (已知抛物体的密度为 1).

6. 已知抛物线段 $y = x^2(-1 \le x \le 1)$，曲线段上任一点处的密度与该点到 y 轴的距离成正比，$x = 1$ 处密度为 5，求此曲线段的质量.

7. 一质点运动的速度 $v = 0.1t^3(m/s)$, 试求运动开始后 $t = 10s$ 的时间内, 质点所经过的路程 s, 并求在此时间内质点运动的平均速度.

8. 物体按规律 $x = ct^3(c > 0)$ 作直线运动，x 表示在时间 t 内物体移动的距离，设介质的阻力与速度的平方成正比，求物体从 $x = 0$ 到 $x = a$ 时阻力所作的功.

9. 半径为 r 的球沉入水中，它与水面相接，球的比重为 1，现将球从水中取出，要做多少功?

10. 求解下列变力做功问题:

(1) 弹簧原长为 $1m$, 每压 $1cm$ 缩需力 $5g$, 若自 $80cm$ 压缩至 $60cm$, 求所作的功;

(2) 设有一半径为 R, 高为 h 的金属正圆柱体 (比重为 2.5), 沉入水中, 上底与水面重合, 现将圆柱铅直地打捞出水面, 试求所做的功;

(3) 有截面面积 $20m^2$, 深为 $5m$ 的水池, 用水泵把水池中的水全部抽到 $10m$ 高的水塔顶上去, 问要作多少功? 若要 $10min$(分钟) 把水池中的水全部抽空, 则水泵功率应是多少?

(4) 用铁锤将一铁钉击入木板, 设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的浓度成正比, 在铁钉击第一次时能将铁击入板内 1*cm*, 如果铁锤每次打击铁钉所作的功相等, 问铁锤击第二次时, 能把铁钉又击入多少 *cm*?

(5) 人造地球卫星质量为 173*kg*, 按下述两种情况, 计算发射卫星克服地球引力所作的功: (i) 把卫星送到离地面 630*km* 处, 使卫星进入轨道; (ii) 把卫星发射到无穷远处使之脱离地球.

(提示: 地球和卫星间引力)

第六章典型例题选讲

例 6.1 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 试证:

$$\lim_{h\to0^+}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx=\frac{\pi}{2}f(0).$$

证 I

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx &= \int_0^{h^{\frac14}} \frac{hf(x)}{h^2+x^2}dx+\int_{\frac14}^1 \frac{hf(x)}{h^2+x^2}dx\\ &= I_1+I_2\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^{h^{\frac14}} \frac{hf(x)}{h^2+x^2}dx=f(\xi)\int_0^{h^{\frac14}}\frac{h}{h^2+x^2}dx\\ &= f(\xi)arc\tan\frac{x}{h}\Big|_0^{h^{\frac14}}\\ &= f(\xi)arc\tan\frac{1}{h^{\frac34}}\quad (0\le\xi\le h^{\frac14})\\ &\to f(0)\frac{\pi}{2}\quad (\text{当 } h\to0^+ \text{ 时}).\\ |I_2| &= \Big|\int_{h^{\frac14}}^1 \frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx\Big|\le M\int_{h^{\frac14}}^1\frac{h}{h^2+x^2}dx\quad (|f(x)|\le M)\\ &= \Big(arc\tan\frac{1}{h}-arc\tan\frac{1}{h^{\frac34}}\Big)\to0\quad (\text{当 } h\to0^+ \text{ 时}).\end{aligned}$$

证 II (拟合法) 因 $\lim\limits_{h\to0^+}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2}$, 故极限值可改写为

$$\frac{\pi}{2}f(0)=\lim_{h\to0^+}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(0)dx.$$

问题归结为证明:

$$\lim_{h\to0^+}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]dx=0.$$

但
$$\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]dx = \Big(\int_0^\delta + \int_\delta^1\Big)\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]dx,$$
因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 所以 $\forall\varepsilon>0$, 当 $\delta>0$ 充分小时, 在 $[0,\delta]$ 上,$|f(x)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{\pi}$. 从而
$$\begin{aligned}&\Big|\int_0^\delta \frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]dx\Big|\\ \le& \int_0^\delta \frac{h|f(x)-f(0)|}{h^2+x^2}dx \le \frac{\varepsilon}{\pi}\cdot\int_0^\delta \frac{h}{h^2+x^2}dx\\ =& \frac{\varepsilon}{\pi}arc\tan\frac{\delta}{h} \le \frac{\varepsilon}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$
再将 δ 固定, 这时第二个积分
$$\begin{aligned}&\Big|\int_\delta^1 \frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]dx\\ \le& h\int_\delta^1 \frac{1}{x^2}[f(x)-f(0)]dx \equiv h\cdot M_0.\end{aligned}$$
于是当 $0<h<\frac{\varepsilon}{2M_0}$ 时
$$\Big|\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
证毕.

证 III
$$\int_0^1 \frac{hf(x)}{h^2+x^2}dx = \int_0^1 \frac{h(f(x)-f(0))}{h^2+x^2}dx + f(0)\int_0^1 \frac{hdx}{h^2+x^2} = I_1+I_2.$$
然后证明 $I_1\to 0, I_2\to\frac{\pi}{2}f(0)$.

例 6.2 试证:
$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx \ge \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$
分析 令 $t = arc\sin x$
$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin t)dt.$$
令 $t = arc\cos x$
$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos t)dt.$$
欲证的不等式化为
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin t)dt \ge \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos t)dt.$$

为此只要证明

$$\cos(\sin t) \geq \sin(\cos t) \quad \left[当\ t \in (0, \tfrac{\pi}{2})\ 时\right].$$

注意到

$$\cos(\sin t) = \cos(|\sin t|) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - |\sin t|\right),$$

所以

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - |\sin t|\right) \geq \sin(\cos t).$$

因在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内 $\sin x$ 递增, 只要证明

$$-\frac{\pi}{2} \leq \cos t \leq \frac{\pi}{2} - |\sin t| \leq \frac{\pi}{2}.$$

但因

$$\cos t \pm \sin t = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm t\right) \leq \sqrt{2} < \frac{\pi}{2},$$

故

$$-\frac{\pi}{2} < -1 \leq \cos t < \frac{\pi}{2} \pm \sin t \leq \frac{\pi}{2} - |\sin t| \leq \frac{\pi}{2}.$$

原题获证.

例 6.3 证明:$x > 0$ 时,

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

证明 已知 $\cos x \leq 1$ ($x > 0$ 只有 $x = 2n\pi$ 时等号才成立). 在此式两端同时取 $[0, x]$ 上的积分, 得

$$\sin x < x \quad (x > 0).$$

再次取 $[0, x]$ 上的积分, 得

$$1 - \cos x < \frac{x^2}{2} \quad (x > 0).$$

第三次取 $[0, x]$ 上的积分, 得

$$x - \sin x < \frac{x^3}{6} \quad (x > 0).$$

即

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x \quad (x > 0).$$

继续在 $[0, x]$ 上积分两次, 可得

$$\sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

证毕.

例 6.4 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负、连续, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)dx}=\max_{a\le x\le b}f(x).$$

证明 设 $M=\max\limits_{a\le x\le b}f(x)$. 若 $M=0$, 则 $f(x)\equiv 0$, 结论显然成立, 不妨设 $M>0$. $\forall\varepsilon>0(\varepsilon<M)$, 由保号性,$\exists[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, 使得

$$0<M-\varepsilon\le f(x)\le M,\ \ x\in[\alpha,\beta].$$

于是有

$$(M-\varepsilon)^n\le f^n(x)\le M^n,\ \ x\in[\alpha,\beta],$$

$$(M-\varepsilon)^n(\beta-\alpha)=\int_\alpha^\beta(M-\varepsilon)^n dx\le\int_\alpha^\beta f^n(x)dx$$

$$\le\int_a^b f^n(x)dx\le\int_a^b M^n dx=M^n(b-a),$$

$$(M-\varepsilon)\sqrt[n]{\beta-\alpha}\le\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)dx}\le M\sqrt[n]{b-a}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\beta-\alpha}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b-a}=1$, 因此

$$M-\varepsilon\le\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)dx}\le M.$$

由 ε 的任意性, 命题成立.

例 6.5 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos^n xdx=0.$$

证明 设 $f(x)=e^x\cos^n x$, 则

$$f'(x)=e^x\cos^{n-1}x(\cos x-n\sin x).$$

令 $f'(x)=0$, 当 $n\ge 2$ 时求得驻点 $x=\frac{\pi}{2},\arctan\frac{1}{n}\in[0,\frac{\pi}{2}]$, 记 $x_n=\arctan\frac{1}{n}$. 当 $x\in[0,x_n]$ 时 $f'(x)>0$, 函数 $f(x)$ 单调递增, 当 $x\in[x_n,\frac{\pi}{2}]$ 时 $f'(x)<0$, 函数 $f(x)$ 单调递减, 所以

$$\max_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}f(x)=e^{\arctan\frac{1}{n}}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)^n\to 1\ \ (n\to\infty).$$

$\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$. 因

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\arctan\frac{1}{n}=0,$$

故 $\exists N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时,$0 < x_n < \delta$，这时, 在 $[0, \delta]$ 上有

$$f(x) = e^x \cos^n x \le e^{x_n} \cos^n x_n = M_n.$$

又因 $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\arctan\frac{1}{n}}(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}})^n = 1$, 故 $\exists N_2 > 0$, 当 $n > N_2$ 时有 $0 < M_n < 2$. 于是当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时, 有

$$0 < \int_0^\delta f(x)dx \le \int_0^\delta M_n dx = M_n \cdot \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

再有, 当 $n > N_1$ 时 $f(x)$ 在 $[\delta, \frac{\pi}{2}] \subset [x_n, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减, 因此要使

$$0 < \int_\delta^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx < e^\delta \cos^n \delta \cdot (\frac{\pi}{2} - \delta) = \frac{1}{4} e^{\frac{\varepsilon}{4}} (\cos\frac{\varepsilon}{4})^n (2\pi - \varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2},$$

或者

$$(\cos\frac{\varepsilon}{4})^n < \frac{2\varepsilon}{2\pi - \varepsilon} e^{\varepsilon/4},$$

只须 $n > N_3 = \ln(\frac{2\varepsilon}{2\pi-\varepsilon} e^{-\frac{\pi}{4}})/\ln\cos\frac{\varepsilon}{4}$ 即可.

所以当 $n > N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ 时有, 就有

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^\delta f(x)dx + \int_\delta^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx < \varepsilon,$$

从而原命题成立.

例 6.6 证明: 若 $f(x)$ 为 $[0, 1]$ 上的递减函数, 则对任给的 $a \in (0, 1)$ 恒有

$$a\int_0^1 f(x)dx \le \int_0^a f(x)dx.$$

分析 把上面的不等式稍作变形:

$$a\int_0^1 f(x)dx = a\int_0^a f(x)dx + a\int_a^1 f(a)dx \le \int_0^a f(x)dx,$$

即得便于证明的形式 (两个积分区间不再叠合)

$$\frac{1}{1-a}\int_a^1 f(x)dx \le \frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx.$$

由积分中值定理及 $f(x)$ 的递减性此不等式显然成立.

证法一 由于 $f(x)$ 为递减函数, 因此有

$$\frac{1}{1-a}\int_a^1 f(x)dx \le \frac{1}{1-a}\int_a^1 f(a)dx = f(a),$$

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx \ge \frac{1}{a}\int_0^a f(a)dx = f(a),$$

从而分析中的式子成立, 从而原命题成立.

证法二 (用定积分定义) $f(x)$ 在 $[0,1]$ 递减, $\int_0^1 f(x)dx$ 存在, 将 $[0,1]$ 分成 n 等份,

$$a\int_0^1 f(x)dx = a\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(\frac{k}{n}) \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{n}f(\frac{ka}{n}) = \int_0^a f(x)dx.$$

证法三 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 将 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 及 $[a,1]$ 分别用积分中值定理得

$$\int_0^a f(x)dx = af(\xi_1);\quad \int_a^1 f(x)dx = (1-a)f(\xi_2).$$

注意到 $\xi_1 < \xi_2$ 及 $f(x)$ 的递减性, 有

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^a f(x)dx + \int_a^1 f(x)dx\\ &= af(\xi_1) + (1-a)f(\xi_2)\\ &\ge af(\xi_1) + (1-a)f(\xi_1)\\ &= f(\xi_1) = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx.\end{aligned}$$

例 6.7 设 $\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$E=\varphi([a,b])$, $f(x)$ 在 E 上为可微下凸函数. 证明:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(\varphi(t))dt \le f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)dt\right).$$

分析 设 $c=\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)dt$, 问题转而证明

$$\int_a^b f(\varphi(t))dt \le (b-a)f(c).$$

由 $f(x)$ 为 E 上的可微下凸函数, $\forall x\in E$, 有

$$f(x) \le f(c) + f'(c)(x-c).$$

以 $x=\varphi(t)$ 代入, 并在 $[a,b]$ 上求积分, 便可证得结论.

证明 由以上分析, 则有

$$f(\varphi(t)) \le f(c) + f'(c)[\varphi(t)-c],$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(t))dt &\le (b-a)f(c) + f'(c)\int_a^b \varphi(t)dt\\ &\quad -f'(c)c(b-a) = (b-a)f(c).\end{aligned}$$

从而原命题成立.

注 若 $f(x)$ 该改为可微凹函数，则所证不等号应反号.

例 6.8 求定积分

$$I=\int_0^2 \frac{x}{e^x+e^{2-x}}dx.$$

解 在无法直接求出原函数的情形下, 常采用分段积分, 而后消去难以求得的积分. 为此设

$$I=\int_0^1 \frac{x}{e^x+e^{2-x}}dx+\int_1^2 \frac{x}{e^x+e^{2-x}}dx=I_1+I_2.$$

令 $2-x=t$, 即 $x=2-t$, 则

$$\begin{aligned}
I_2&=-\int_1^0 \frac{2-t}{e^{2-t}+e^t}dt=\int_0^1 \frac{2-t}{e^{2-t}+e^t}dt\\
&=2\int_0^1 \frac{e^t}{e^{2t}+e^2}dt-\int_0^1 \frac{t}{e^{2-t}+e^t}dt\\
&=\frac{2}{e}\left[\arctan\frac{e^x}{e}\right]_0^1-I_1\\
&=\frac{2}{e}\left(-\arctan\frac{1}{e}+\frac{\pi}{4}\right)-I_1.
\end{aligned}$$

因此通过消去 I_1 而求得

$$I=\frac{2}{e}\left(-\arctan\frac{1}{e}+\frac{\pi}{4}\right).$$

例 6.9 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx=f(1).$$

证明 由于 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 因此存在 $M=\max\limits_{0\le x\le 1}|f'(x)|$, 且可通过分部积分得到

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^n f(x)dx&=\tfrac{x^{n+1}}{n+1}f(x)\Big|_0^1-\tfrac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx\\
&=\tfrac{1}{n+1}f(1)-\tfrac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx.
\end{aligned}$$

又因

$$\left|\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx\right|\le M\int_0^1 x^{n+1}dx=\frac{M}{n+2}\to 0\ \ (n\to\infty),$$

所以就能证得

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left[f(1)-\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx\right]=f(1).$$

例 6.10 设 $g(x)$ 是在 $[0,1]$ 上的连续函数, 而 $f(x)$ 是周期为 1 的连续周期函数. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g(x)f(nx)dx=\int_0^1 g(x)dx\int_0^1 f(x)dx.$$

性和周期函数 $f(x)$ 的积分性质.

证明 记 $A=\int_0^1|f(x)|dx$. 由 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续进而一致连续，所以 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$, 当 $n>N$ 且 $|x'-x''|<\frac{1}{n}$，x'、$x''\in[0,1]$ 时, 恒有

$$|g(x')-g(x'')|<\frac{\varepsilon}{A}.$$

显然当 $x\in[k-1,k]$ 时, $|\frac{x}{n}-\frac{k}{n}|\le\frac{1}{n}$, 从而对上述 n, $\left|g(\frac{x}{n})-g(\frac{k}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{A}$. 因此原式左边的定积分

$$\int_0^1 g(x)f(nx)dx=\frac{1}{n}\int_0^n g(\frac{x}{n})f(x)dx=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\int_{k-1}^k g(\frac{x}{n})f(x)dx.$$

而 $f(x)$ 以 1 为周期，所以

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\int_{k-1}^k g(\frac{k}{n})f(x)dx=\frac{1}{n})\sum_{k=1}^n g(\frac{k}{n})\int_{k-1}^k f(x)dx=\frac{1}{n})\sum_{k=1}^n g(\frac{k}{n})\int_0^1 f(x)dx.$$

$$\left|\int_0^1 g(x)f(nx)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\int_{k-1}^k g(\frac{k}{n})f(x)dx\right|=\left|\frac{1}{n})\sum_{k=1}^n\int_{k-1}^k\left(g(\frac{x}{n})-g(\frac{k}{n})\right)f(x)dx\right|$$
$$\le\frac{1}{n})\sum_{k=1}^n\int_{k-1}^k\left|g(\frac{x}{n})-g(\frac{k}{n})\right||f(x)|dx\le\frac{\varepsilon}{A}\frac{1}{n})\sum_{k=1}^n\int_{k-1}^k|f(x)|dx=\frac{\varepsilon}{A}\frac{1}{n})\sum_{k=1}^n\int_0^1|f(x)|dx=\varepsilon.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g(x)f(nx)dx=\int_0^1 g(x)dx\int_0^1 f(x)dx.$$

例 6.11 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为递减的可微函数, 且满足 $0<f(x)<|f'(x)|$, 证明:

$$xf(x)>\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right),\ \ x\in(0,1).$$

证明 由 $f(x)$ 递减可知 $f'(x)<0$, 且由 $0<f(x)<-f'(x)$ 知 $-\frac{f'(x)}{f(x)}>1$. 在 $[x,\frac{1}{x}]$ 上作积分, 得到

$$\ln\frac{f(x)}{f(\frac{1}{x})}=-\int_x^{\frac{1}{x}}\frac{f'(t)}{f(t)}dt>\int_x^{\frac{1}{x}}dt=\frac{1}{x}-x,x\in(0,1),$$

此即

$$\frac{f(x)}{f(\frac{1}{x})}>e^{\frac{1}{x}-x},x\in(0,1).$$

由于所要证的不等式即为 $\frac{f(x)}{f(\frac{1}{x})}>\frac{1}{x^2}$, 因此只需证明 $e^{\frac{1}{x}-x}>\frac{1}{x^2}$ 即可. 为此考察 $\varphi(x)=x^2e^{\frac{1}{x}-x}$ 的单调性: 由于

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=e^{\frac{1}{x}-x}(2x-x^2-1)\\&=-(x-1)^2e^{\frac{1}{x}-x}<0,\ x\in(0,1),\end{aligned}$$

因此 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上严格递减, 又 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 从而 $\varphi(x)>\varphi(1)=1$, 故 $x^2e^{\frac{1}{x}-x}>\varphi(1)=1,\ \ x\in(0,1)$.

例 6.12 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微, 且当 $x\in(0,1)$ 时,$0<f'(x)<1, f(0)=0$. 试证:

$$\Big(\int_0^1 f(x)dx\Big)^2>\int_0^1 f^3(x)dx.$$

证法一 问题在于证明

$$\Big(\int_0^1 f(x)dx\Big)^2-\int_0^1 f^3(x)dx>0.$$

作辅助函数

$$F(x)=\Big(\int_0^x f(t)dt\Big)^2-\int_0^x f^3(t)dt.$$

因 $F(0)=0$, 故只要证明在 $(0,1)$ 内有 $F'(x)>0$. 事实上,

$$F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)dt-f^3(x)=f(x)\Big[2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)\Big].$$

已知 $f(0)=0$, 当 $x\in(0,1)$ 时, $0<f'(x)<1$, 故 $f(x)>0$. 记

$$g(x)=2\int_0^x f(t)dt-f^2(x),$$

则 $g(0)=0$,

$$g'(x)=2f(x)-2f(x)\cdot f'(x)=2f(x)[1-f'(x)]>0,$$

于是

$$g(x)=2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)>0\quad(x\in(0,1)),$$

从而 $F'(x)>0$ 获证.

证法二 问题在于证明

$$\frac{\Big(\int_0^1 f(x)dx\Big)^2}{\int_0^1 f^3(x)dx}>1.$$

令 $F(x)=\Big(\int_0^x f(t)dt\Big)^2,\quad G(x)=\int_0^x f^3(t)dt$, 则利用 Cauchy 中值定理得

$$\begin{aligned}\frac{\Big(\int_0^1 f(x)dx\Big)^2}{\int_0^1 f^3(x)dx}&=\frac{F(1)-F(0)}{G(1)-G(0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}\\&=\frac{2f(\xi)\int_0^\xi f(t)dt}{f^3(\xi)}=\frac{2\int_0^\xi f(t)dt}{f^2(\xi)}\quad(0<\xi<1)\\&=\frac{2\int_0^\xi f(t)dt-2\int_0^0 f(t)dt}{f^2(\xi)-f^2(0)}=\frac{2f(\eta)}{2f(\eta)f'(\eta)}=\frac{1}{f'(\eta)}>1.\ (0<\eta<\xi<1).\end{aligned}$$

例 6.13 设 $f(x)$ 在任意 $[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$ 上 Riemann 可积且满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 试求 $f(x)$.

解 一方面, 由条件可得

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t+y)dt &= \int_0^x [f(t)+f(y)]dt\\ &= \int_0^x f(t)dt + xf(y);\end{aligned}$$

另一方面, 由换元积分, 又得

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t+y)dt &= \int_y^{x+y} f(u)du\\ &= \int_0^{x+y} f(u)du - \int_0^y f(u)du.\end{aligned}$$

所以有

$$xf(y) = \int_0^{x+y} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt - \int_0^y f(t)dt.$$

同理又有

$$yf(x) = \int_0^{y+x} f(t)dt - \int_0^y f(t)dt - \int_0^x f(t)dt.$$

由此可见, 对不等于零的任意两数 x 和 y, 恒有

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y} \equiv \text{常数},$$

即 $f(x)=ax, x\neq 0$. 再由题设条件, 知道

$$f(1)=f(1+0)=f(1)+f(0)\Rightarrow f(0)=0.$$

所以对 $x=0, f(x)=ax$ 同样成立; $x=1$ 时, $f(1)=a$, 所以 $f(x)=f(1)x$.

例 6.14 求满足下列条件的所有函数 $f(x)$:

(i) 在 $[0,+\infty))$ 上有定义, 且非负、连续;

(ii) 任给 $x\in(0,+\infty), f(x)$ 在 $[0,x]$ 上的积分平均等于 $f(0)$ 于 $f(x)$ 的几何平均.

解 条件 (ii) 即为

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \sqrt{f(0)f(x)}.$$

若记 $F(x)=\int_0^x f(t)dt, a=f(0)$, 则由 $f(x)$ 连续可知 $F'(x)=f(x)$; 且条件 (ii) 亦即

$$\left[\frac{1}{x}F(x)\right]^2 = af(x) = aF'(x).$$

这样, 问题化为关于 $F(x)$ 的微分方程求解.

把上式改写成

$$a\cdot\frac{F'(x)}{[F(x)]^2} = \frac{1}{x^2},$$

两边积分后得到

$$\frac{a}{F(x)} = \frac{1}{x} - C$$

即

$$F(x) = \frac{ax}{1 - Cx},$$

其中 C 为任意常数. 从而求得

$$f(x) = F'(x) = \frac{a}{(1 - Cx)^2}, \quad x > 0.$$

考虑到当 $C > 0$ 时, 上述 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上已不可积 ($x = \frac{1}{C}$ 不连续，舍去). 所以

$$f(x) = \frac{a}{(1 - Cx)^2} \begin{cases} \text{当}C > 0\text{时}, & x \in [0, \frac{1}{C}); \\ \text{当}C \leq 0\text{时}, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

就是所求的函数.

例 6.15 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的下凸函数, 证明:

$$H(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$$

也是 $(0, +\infty)$ 上的下凸函数.

证明 首先, 由 $f(x)$ 为下凸函数,$f(t)$ 在任意开区间 $(0, x)$ 内连续, 故 $f(t) \in \mathrm{R}[0, x]$. 由下凸函数的定义,$\forall \lambda \in (0, 1), \forall x_1, x_2 > 0$, 恒有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

由此便可证得

$$\begin{aligned} H(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) &= \tfrac{1}{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2} \int_0^{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2} f(t)dt \\ &= \int_0^1 f(x(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2))dx \\ &\leq \int_0^1 [\lambda f(x_1 x) + (1 - \lambda)f(x_2 x)]dx \\ &= \tfrac{\lambda}{x_1} \int_0^{x_1} f(t)dt + \tfrac{1-\lambda}{x_2} \int_0^{x_2} f(t)dt \\ &= \lambda H(x_1) + (1 - \lambda)H(x_2), \end{aligned}$$

所以 $H(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的下凸函数.

例 6.16 设在 $[a, b]$ 上 $g(x)$ 为连续函数,$f(x)$ 为单调的连续可微函数. 证明: 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx + f(b) \int_\xi^b g(x)dx.$$

证明 这是加强条件的积分第二中值定理, 可望有一个不难的证明.

设 $G(x)=\int_a^x g(t)dt, x\in[a,b]$, 则有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_a^b f(x)dG(x)\\ &= f(x)G(x)|_a^b-\int_a^b f'(x)G(x)dx\\ &= f(b)G(b)-\int_a^b f'(x)G(x)dx.\end{aligned}$$

由假设 $f(x)$ 为单调函数, 故 $f'(x)$ 不变号, 从而 $\exists\xi\in[a,b]$, 使得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= f(b)G(b)-G(\xi)\int_a^b f'(x)dx\\ &= f(b)\int_a^b g(x)dx-[f(b)-f(a)]\int_a^\xi g(x)dx\\ &= f(a)\int_a^\xi g(x)dx+f(b)\int_\xi^b g(x)dx.\end{aligned}$$

例 6.17 设 $f(x)$ 严格递减, 在 $[0,1]$ 上连续, $f(0)=1, f(1)=0$. 试证明:$\forall\delta\in(0,1)$ 有

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\int_\delta^1(f(x))^n dx}{\int_0^\delta(f(x))^n dx}=0$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\int_0^\delta(f(x))^{n+1}dx}{\int_0^1(f(x))^n dx}=1$.

证明 (1) (利用两边夹法则) 因 $f(x)\searrow, 0<f(\delta)<f(\frac{\delta}{2}), (\frac{f(\delta)}{f(\frac{\delta}{2})})^n\to 0$(当 $n\to\infty$ 时), 故对任意固定的 $\delta\in(0,1)$ 有:

$$\begin{aligned}0 &\le \frac{\int_\delta^1(f(x))^n dx}{\int_0^\delta(f(x))^n dx}\le\frac{\int_\delta^1(f(x))^n dx}{\int_0^{\frac{\delta}{2}}(f(x))^n dx}\le\frac{\int_\delta^1(f(\delta))^n dx}{\int_0^{\frac{\delta}{2}}(f(\frac{\delta}{2}))^n dx}\\ &\le\Big(\frac{f(\delta)}{f(\frac{\delta}{2})}\Big)^n\cdot\frac{(1-\delta)}{\frac{\delta}{2}}\to 0\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

(2) (利用两边夹法则的推广形式) 因 $f(x)$ 严格递减, $f(0)=1, f(1)=0$, 知 $0<f(x)<1$ 当 $x\in(0,1)$ 时. 据连续性, $\forall\varepsilon>0, \exists\delta_1: 0<\delta_1<\delta$ 使得

$$f(x)>1-\varepsilon\quad(\forall x\in[0,\delta_1]).$$

于是由(1) 知

$$\begin{aligned}1 &= \frac{\int_0^1(f(x))^n dx}{\int_0^1(f(x))^n dx}\ge\frac{\int_0^1(f(x))^{n+1}dx}{\int_0^1(f(x))^n dx}\ge\frac{\int_0^\delta(f(x))^{n+1}dx}{\int_0^1(f(x))^n dx}\\ &\ge\frac{\int_0^{\delta_1}(f(x))^{n+1}dx}{\int_0^1(f(x))^n dx}\ge(1-\varepsilon)\frac{\int_0^{\delta_1}(f(x))^n dx}{\int_0^{\delta_1}(f(x))^n dx+\int_{\delta_1}^1(f(x))^n dx}\\ &=(1-\varepsilon)\frac{1}{1+\frac{\int_{\delta_1}^1(f(x))^n dx}{\int_0^{\delta_1}(f(x))^n dx}}\to(1-\varepsilon)\ (\text{当}n\to\infty\text{时})\end{aligned}$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^\delta(f(x))^{n+1}dx}{\int_0^1(f(x))^n dx}=1.$$

例 6.18 设 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 上连续,$A<a<b<B$, 试证:

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx = f(b)-f(a).$$

证明

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[\int_a^b f(x+h)dx - \int_a^b f(x)dx\Big]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[\int_{a+h}^{b+h} f(t)dt - \int_a^b f(x)dx\Big].\end{aligned}$$

应用 $\frac{0}{0}$ 型 L'Hospital 法则

$$上式 = \lim_{h\to 0}[f(b+h)-f(a+h)] = f(b)-f(a).$$

例 6.19 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可导，$f(0)=f(1)=0$, 且当 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)\neq 0$. 求证：$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx \geq 4$. (精解 P195 15, 典型例题例 4.3.5)

证明 因 $(0,1)$ 内 $f(x)\neq 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内恒正或恒负 [否则由介值性, 必有零点在 $(0,1)$ 内, 与 $f(x)\neq 0$ 矛盾]. 不妨设 $f(x)>0$(<0 的情况类似可证). 因 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 故存在 $c\in[0,1]$, 使得 $f(c)=\max\limits_{0\leq x\leq 1} f(x)$. 注意到 $f(0)=f(1)=0$, 应用 Lagrange 中值定理,

$$\exists\xi\in(0,c), 使得 f'(\xi) = \frac{f(c)-f(0)}{c-0} = \frac{f(c)}{c},$$

$$\exists\eta\in(c,1), 使得 f'(\eta) = \frac{f(1)-f(c)}{1-c} = \frac{f(c)}{c-1}.$$

令 $a=\xi, b=\eta$, 则 $0<a<b<1$, 注意到

$$\sqrt{c(1-c)} \leq \frac{c+(1-c)}{2} = \frac{1}{2},$$

此时

$$\begin{aligned}\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx &\geq \int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(c)}\right|dx = \frac{1}{f(c)}\int_0^1 |f''(x)|dx\\ &\geq \frac{1}{f(c)}\int_a^b |f''(x)|dx \geq \frac{1}{f(c)}\Big|\int_a^b f''(x)dx\Big|\\ &= \frac{1}{f(c)}|f'(b)-f'(a)| = \frac{1}{f(c)}|f'(\eta)-f'(\xi)|\frac{1}{c(1-c)} \geq 4.\end{aligned}$$

命题获证.

例 6.20 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次连续可微,$f(\frac{a+b}{2})=0$, 试证:

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \leq M(b-a)^3/24,$$

其中 $M=\sup\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$.

证明 将 $f(x)$ 在 $x=\frac{a+b}{2}$ 处用 Tayor 公式展开, 注意到 $f(\frac{a+b}{2})=0$, 有

$$f(x)=f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{1}{2!}f''(\xi)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2.$$

右端第一项在 $[a,b]$ 上的积分为零. 故

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| &\le \frac{1}{2!}\int_a^b |f''(\xi)|\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2dx\\ &\le \frac{1}{6}M\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^3\Big|_a^b=\frac{M}{24}(b-a)^3.\end{aligned}$$

例 6.21 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数,$f(a)=0$, 试证:

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|dx\le\frac{b-a}{2}\int_a^b(f'(x))^2dx.$$

证明 令 $g(x)=\int_a^x|f'(t)|dt\quad(a\le x\le b)$, 则 $g'(x)=|f'(x)|$. 由 $f(a)=0$ 知

$$|f(x)|=|f(x)-f(a)|=\Big|\int_a^x f'(t)dt\Big|\le\int_a^x|f'(t)|dt=g(x).$$

因此

$$\begin{aligned}\int_a^b|f(x)f'(x)|dx&\le\int_a^b g(x)g'(x)dx=\int_a^b g(x)dg(x)=\frac{1}{2}g^2(x)\Big|_a^b\\ &=\frac{1}{2}\Big(\int_a^b|f'(t)dt\Big)^2=\frac{1}{2}\Big(\int_a^b 1\cdot|f'(t)dt|\Big)^2\quad(\text{应用 Schwarz 不等式})\\ &\le\frac{1}{2}\int_a^b 1^2dx\cdot\int_a^b|f'(t)|^2dt\le\frac{b-a}{2}\int_a^b(f'(t))^2dt.\end{aligned}$$

例 6.22 设函数 $f(x)$ 二次可微, 证明在 (a,b) 内存在一点 ξ, 使得

$$f''(\xi)=\frac{24}{(b-a)^3}\int_a^b\Big(f(x)-f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big)dx.$$

证明 记 $x_0=\frac{a+b}{2}$, 将被积函数在 $x=x_0$ 处按 Taylor 公式展开,

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}f''(\eta),$$

其中 η 在 x_0 与 x 之间. 在区间 $[a,b]$ 上取积分, 注意上式右边第一项的积分为零, 因此

$$\int_a^b(f(x)-f(x_0))dx=\frac{1}{2}\int_a^b(x-x_0)^2f''(\eta)dx,$$

此式右端 $f''(\eta)$ 虽然不一定连续, 但导数具有介值性质, 因而积分第一中值定理仍然成立. 故 $\exists\xi(a,b)$, 使得

$$\int_a^b (x-x_0)^2 f''(\eta)dx = f''(\xi)\int_a^b (x-x_0)^2 dx = \frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi).$$

从而结合以上两式命题得证.

例 6.23 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微, 且 $f(a)=f(b)=0$, 则

$$\max_{a\le x\le b}|f'(x)| \ge \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|dx.$$

证明

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|dx\\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)-f(a)|dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)-f(b)|dx\\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(\xi)(x-a)|dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(\eta)(b-x)|dx.\\ &\le M\frac{(b-a)^2}{8} + M\frac{(b-a)^2}{8} = M\frac{(b-a)^2}{4},\end{aligned}$$

这里 $M=\max_{a\le x\le b}|f'(x)|$, 且右端两项分别在 a,b 点应用了微分中值定理. 由此

$$\max_{a\le x\le b}|f'(x)| \ge \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|dx,$$

命题得证.

例 6.24 在 $[0,2]$ 上是否存在这样的函数, 连续可微, 并且

$$f(0)=f(2)=1, |f'(x)|\le 1, \left|\int_0^2 f(x)dx\right| \le 1?$$

证明 (据已知条件重新对积分 $\int_0^2 f(x)dx$ 进行分段)

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$$

右端第一项, 按 $x=0$ 处展开, 注意 $f(0)=1$ 及 $|f'(x)|\le 1$ 条件,

$$\begin{aligned}f(x) &= f(0)+f'(\xi)x \quad (0<\xi<x)\\ &= 1+f'(\xi)x \ge 1-x \quad (\forall x\in[0,1]).\end{aligned}$$

从而

$$\int_0^1 f(x)dx \ge \int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{2}.$$

类似, 当 $x \in [1,2]$ 时,

$$f(x) = f(2) + f'(\eta)(x-2) \geq x-1.$$

所以 $\int_1^2 f(x)dx \geq \int_1^2 (x-1)dx = \frac{1}{2}$.

(现证这种 f 不存在) 假设这种 f 存在, 则由 $\left|\int_0^2 f(x)dx\right| \leq 1$, 及 $\int_0^2 f(x)dx \geq 1$ 知

$$\int_0^2 f(x)dx = 1 = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx.$$

记

$$g(x) \equiv \begin{cases} 1-x, \text{ 当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时}, \\ x-1, \text{ 当 } 1 < x \leq 2 \text{ 时}. \end{cases}$$

由此表明二连续函数 $f(x) \geq g(x)$, 且积分值相等，从而 $f(x) \equiv g(x)$ 在 $[0,2]$ 上, 但此与 f 的可微性矛盾, 所以 f 不存在.

例 6.25 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上有连续的一阶导数, 证明:

$$\int_0^1 |f(x)|dx \leq \max\left\{\int_0^1 |f'(x)|dx, \left|\int_0^1 f(x)dx\right|\right\}.$$

证 (1) 若 $\left|\int_0^1 f(x)dx\right| = \int_0^1 |f(x)|dx$, 问题自明.

(2) 若 $\left|\int_0^1 f(x)dx\right| < \int_0^1 |f(x)|dx$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上变号, 由 f 的连续性知 $\exists x_0 \in (0,1)$ 使得 $f(x_0) = 0$, 于是

$$|f(x)| = |f(x) - f(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x f'(x)dx\right| \leq \int_{x_0}^x |f'(x)|dx \leq \int_0^1 |f'(x)|dx.$$

取积分知 $\int_0^1 |f(x)|dx \leq \int_0^1 |f'(x)|dx$. 原不等式获证.

例 6.26 设 $f(x)$ 为 n 次多项式, 且 $\int_0^1 x^k f(x)dx = 0 \quad (k = 1,2,\cdots,n)$ 试证:

(1) $f(0) = (n+1)^2 \int_0^1 f(x)dx$;

(2) $\int_0^1 f^2(x)dx = \left((n+1)\int_0^1 f(x)dx\right)^2$.

证明 既然 $f(x)$ 为 n 次多项式, 不妨设 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, 于是 $f(0) = a_0$. 利用已知条件

$$\int_0^1 f^2(x)dx = \int_0^1 (a_0 + a_1 + \cdots + a_n x^n) f(x)dx = a_0 \int_0^1 f(x)dx$$

可见, 只要证明了

$$a_0 = (n+1)^2 \int_0^1 f(x)dx$$

将其代入即得结论 (i) 与 (ii). 下面我们来证明此式. 事实上

$$\int_0^1 x^k f(x)dx = \frac{a_0}{k+1} + \frac{a_1}{k+2} + \cdots + \frac{a_n}{n+k+1} = \frac{Q(k)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n+1)}, \qquad *$$

其中 $Q(k)$ 是关于 k 的 n 次多项式. 根据已知条件知 $Q(k)=0 \quad (k=1,2,\cdots,n)$ 即 Q 以 $1,2,\cdots,n$ 为根, 因此

$$Q(k)=c(k-1)(k-2)\cdots(k-n)$$

(其中 c 为某一常数), 将其代入 (*) 的后一等式, 同乘以 $k+1$, 并令 $k=-1$, 则得

$$a_0=(-1)^n(n+1)c,$$

在将其代入 (*), 并令 $k=0$, 可得

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{(-1)^n}{n+1}c.$$

消去 c, 即得 $a_0=(n+1)^2\int_0^1 f(x)dx$, 证毕.

例 6.27 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,

$$\int_0^1 x^k f(x)dx=1 \ \ (k=0,1,\cdots,n-1), \int_0^1 x^n f(x)dx=0.$$

求证: 在 $[0,1]$ 的某一部分上 $|f(x)|\geq 2^n(n+1)$.

证明 由已知条件, 对任意 α, 恒有

$$\int_0^1 (x-\alpha)^n f(x)dx=1.$$

(用反证法) 假设 $[0,1]$ 处处都有 $|f(x)|<2^n(n+1)$. 若能选取恰当的 α, 由此得出估计 $\left|\int_0^1 (x-\alpha)^n f(x)dx\right|<1$, 便找到了矛盾. 事实上, 取 $\alpha=\frac{1}{2}$, 这时有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 (x-\alpha)^n f(x)dx\right|&<2^n(n+1)\int_0^1 |x-\alpha|^n dx=2^n(n+1)\int_0^1 \left|x-\frac{1}{2}\right|^n dx\\&=2^n(n+1)\Big[\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}-x\Big)^n dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 \Big(x-\frac{1}{2}\Big)^n dx\Big]=1.\end{aligned}$$

证毕.

例 6.28 设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x dx=0.$$

试证: $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内至少有两个零 (值) 点.

证明 (1) 若 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 无零点, 因 $f(x)$ 连续, $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 恒保持同号, 例如 $f(x)>0$(或 <0) 则得估计

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx>0(\text{或}<0),$$

与已知条件矛盾. 可见 $(0,\frac{\pi}{2})$ 中至少有一个零点 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$.

(2) 若 $f(x)$ 除 x_0 外在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内再无零点, 则 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 与 $(x_0,\frac{\pi}{2})$ 内分别保持不变号. 若 f 在此二区间符号相异, 则 $f(x)\sin(x-x_0)$ 恒正 (或恒负),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(x-x_0)dx>0(\text{或}<0).$$

但由已知条件

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(x-x_0)dx=\cos x_0\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin xdx$$

$$-\sin x_0\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos xdx=0,$$

矛盾. 若 f 在二区间上符号相同, 则 $f(x)\cos(x-x_0)$ 恒正 (或恒负), 同样可推出矛盾.

第六章复习题

1. 求下列定积分

(1) $\int_0^1\frac{x}{(1+x)^a}dx$;　(2) $\int_0^1\ln(1+\sqrt{x})dx$;

(3) $\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$;　(4) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$;

(5) $\int_0^4\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$;　(6) $\int_0^1\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$;

(7) $\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{\sqrt{2x-1}}dx$;　(8) $\int_0^{ln2}\sqrt{1-e^{-2x}}dx$;

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos 2x}dx$;　(10) $\int_0^1\frac{ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$;

(11) $\int_0^1\frac{x}{e^x+e^(1-x)}dx$;　(12) $\int_0^\pi\frac{dx}{2\cos^2x+\sin^2x}$;

(13) $\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx$;　(14) $\int_0^\pi e^x\cos^2 xdx$.

2. (1) 设 $x\geq -1$. 求 $\int_{-1}^x(1-|t|)dt$;　(2) 求 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}dx$.

3. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+2}t(\sin\frac{3}{t})f(t)dt$，其中 $f(t)$ 可微, 且已知 $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=1$.

4. 设 $f(2)=\frac{1}{2}$, $f'(2)=0$, $\int_0^2 f(x)dx=1$, 求 $\int_0^1 f''(2x)dx$.

5. 设 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$, 且当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)=x$, 求 $\int_\pi^{3\pi}f(x)dx$.

6. 设 $f(x)$ 可积，求证：$e^{f(x)}$ 也可积.

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且 $f(x)\geq C>0$. 求证：$\frac{1}{f(x)}$ $\ln f(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积.

8. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积且 $f(x)\geq a>0$. 求证：

$$\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\geq\frac{1}{\int_0^1 f(x)dx}.$$

9. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)>0$, 证明：$\ln\int_0^1 f(x)dx\geq\int_0^1\ln f(x)dx$.

10. 求证：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\cos x)dx$.

11. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{x^n}dx = 1$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1(1-x^2)^n dx = 0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^4}}dx = 0$.

12. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx$.

13. 对任意自然数 n, 求证：$\int_0^n \frac{1-(1-\frac{t}{n})^n}{t}dt = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

14. 设 $S(x) = \int_0^x|\cos t|dt$,

(1) 当 n 为整数, 且 $n\pi \le x < (n+1)\pi$ 时, 证明: $2n \le S(x) < 2(n+1)$;

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}$.

15. 设 $f(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\ \ (x \ne 0); f(0) = 0$.

(1) 问 $f(x)$ 是否在 $[-1,1]$ 上可积？

(2) 问变上限积分 $\int_{-1}^x f(t)dt$ 在点 $x = 0$ 处是否可导？

16. 设 f 为连续函数，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}f(x)dx = f(0)$.

17. 设 $f(x) \in C[01]$，且在 $(0,1)$ 上可微，若有 $8\int_{\frac{7}{8}}^1 f(x)dx = f(0)$，证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

18. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，求证：$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$. 并由此计算

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}dx.$$

19. 设 $f(x) \in R[0,1]$, 且 $a \le f(x) \le b$, 又 $\varphi(x)$ 是 $[a,b]$ 上可导的凹函数. 求证：

(1) $\varphi(f(x)) \ge \varphi(t) + \varphi'(t)(f(x)-t)\ \ (\forall t \in (a,b))$;

(2) $\int_0^1\varphi(f(x))dx \ge \varphi\left(\int_0^1 f(x)dx\right)$;

(3) $\int_0^1 e^{f(x)}dx \ge e^{\int_0^1 f(x)dx}$.

20. 设 $0 < a < b$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，并满足 $f(\frac{ab}{x}) = f(x)(\forall x \in [a,b])$, 求证：

$$\int_a^b f(x)\frac{\ln x}{x}dx = \frac{\ln(ab)}{2}\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx.$$

21. 设 $a > 0$,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，并满足 $f\left(\frac{a^2}{x}\right) = f(x)\ \ (\forall x > 0)$. 求证：

(1) $\int_a^{a^2}\frac{f(x)}{x}dx = \int_1^a\frac{f(x)}{x}dx$;

(2) $\int_1^a\frac{f(x^2)}{x}dx = \int_1^a\frac{f(x)}{x}dx$;

(3) 如果 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，则 $\int_1^a g\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{dx}{x} = \int_1^a g\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{dx}{x}$.

22. 设 $f \in C^1[0,1]$, $f(0) = f(1) = 0$, 证明

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \le \frac{1}{2}\int_0^1|f'(x)|dx.$$

23. 设 $f(x)$ 的一阶导数在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)=0$，求证；

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \leq \frac{1}{4}\max_{0\leq x\leq 1}|f'(x)|.$$

24. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续可微，且 $f(0)=1, x\geq 0$ 时，$f(x)>|f'(x)|$ 证明：$x>0$ 时，$e^x>f(x)$.

25. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有连续导数, 求 $\lim\limits_{a\to 0+}\frac{1}{a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]dt$.

26. 设 $f\in C[0,+\infty)$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, 求证：$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f(nx)dx=A$.

27. 设 $f(x)\geq 0, g(x)>0$, 二函数在 $[a,b]$ 上连续, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b (f(x))^n g(x)dx\right)^{\frac{1}{n}}=\max_{a\leq x\leq b}f(x).$$

28. 设 $f\in C[a,b]$, 且 $\exists m\in N$, 使得 $\int_a^b x^n f(x)dx=0\ (n=0,1,2\cdots,m)$, 求证：$f(x)$ 在 (a,b) 内至少有 $m+1$ 个零点, 且 $f(x)$ 在零点的两端异号. (归纳法)

29. 设函数 $f(x)$ 二阶可微，求证；存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\left|\int_a^b f(x)dx-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\leq\frac{M}{24}(b-a)^3,$$

其中 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$.

30. 设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上单调，求证：$\lim\limits_{\|T\|\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)\sin\|T\|xdx=0$.

31. 设 $f'(x)\in C[0,1]$，求证：$\int_0^1 x^n f(x)dx=\frac{f(1)}{n}+o(\frac{1}{n})\ (n\to\infty)$.

32. 若 $f(x)$ 是连续的以 T 为周期的函数，求证:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$$

33. 设 $f(x)\in C[0,+\infty)$, $\int_0^\infty|f(t)dt|$ 收敛, 并且 $|f(x)|\leq\int_0^x|f(t)|dt(x\geq 0)$, 求证: $f(x)=0$.

34. 设 $f(x)\in C[01]$, 且对一切 $x\in[0,1]$ 有 $\int_0^x f(u)du\geq f(x)\geq 0$，则 $f(x)=0$.

35. 设 $f(x)\geq 0$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(1)=0$, 求证：存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=\int_0^\xi f(x)dx$.

36. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)dx=0, \int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$．求证；在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

37. 函数 f 在 $[0,2]$ 上连续、可导，且 $f(0)=f(2)=1$，如果 $|f'(x)|\leq 1$, 求证：

$$\left|\int_0^2 f(x)dx\right|\geq 1.$$

(典型例题 P245 例 4.3.8)

38. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明 $2\int_a^b f(x)[\int_x^b f(t)dt]dx=[\int_a^b f(x)dx]^2$.
39. 设 $f(x)\geq 0, f''(x)\leq 0(\forall x\in[a,b])$. 求证:

$$\max_{a\leq x\leq b} f(x)\leq \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

40. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续可导，求证:

$$\max_{z\in[a,b]}|f(x)|\leq \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b |f'(x)|dx.$$

(解题指南 P150 例 3.2.7)

提示 $\exists\xi, x_0\in[a,b]$ 使得

$$|f(\xi)|=\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)dx\right|,$$

$$\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|=|f(x_0)|=\left|\int_\xi^{x_0} f'(t)dt+f(\xi)\right|.$$

41. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可微，求证:

$$f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)=\int_a^x f''(t)(x-t)dt,\ \ (\forall x\in[a,b]).$$

42. 设 $a,b>0, f(x)\geq 0$, 且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $\int_{-a}^b xf(x)dx=0$. 试证:

$$\int_a^b x^2 f(x)dx\leq ab\int_{-a}^b f(x)dx.$$

提示

$$\int_{-a}^b [(x+a)(b-x)]f(x)dx\geq 0.$$

43. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 似序, 即:$\forall x_1,x_2$ 有

$$(f(x_1)-f(x_2))(g(x_1)-g(x_2))\geq 0.$$

试证

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx\leq (b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

提示 在条件式里先对 x_1 于 $[a,b]$ 上取积分, 然后对 x_2 在 $[a,b]$ 上取积分.
44. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续可导，$f(a)=0$. 证明:
(1) $\max\limits_{z\in[a,b]} f^2(x)\leq (b-a)\int_a^b (f'(x))^2dx$;
(2) $\int_a^b f^2(x)dx\leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b (f'(x))^2dx$.(精解 P215 8)

45. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调递增，求证：

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

(精解 P216 10, 解题指南 P160 例 10)

46. 若函数 f 在 $[0,1]$ 上连续可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$, 求证:

$$\int_0^1 |f(x)-f'(x)|dx \geq \frac{1}{e}.$$

(解题指南 P162 例 11)

47. 设函数 f 连续可导，$f(1)=1$, 且当 $x \geq 1$ 时有

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)}.$$

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，且

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \leq 1+\frac{\pi}{4}.$$

48. 设函数 f 在 $[0,1]$ 上二阶连续可导，并且 $f(0)=f(1)=f'(0)=0, f'(1)=1$，求证：$\int_0^1 (f''(x))^2dx \leq 4$. 指出式中等号成立的条件.

49. 设函数 f 在区间 $[0,+\infty)$ 上递增，定义函数 $\phi(x)=\int_0^x f(t)dt, x\geq 0$, 求证：$\phi$ 是 $[0,+\infty)$ 上的凸函数. (典型例题 P263 例 4.3.28)

50. 设函数 f 在 $[-1,1]$ 上可导，$M=\sup|f'|$. 若存在 $a\in(0,1)$, 使得 $\int_{-a}^a f(x)dx=0$，求证：

$$\left|\int_{-1}^1 f(x)dx\right| \leq M(1-a^2).$$

51. 设 f 是 $[a,b]$ 上连续的凸函数，试证:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

(典型例题 P261 例 4.3.26)

52. 设 f 二阶连续可导，且 $f\geq 0, f''\leq 0$. 求证：对任何 $c\in[a,b]$, 有 $f(c) \leq \dfrac{2}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx.$

53. 设函数 f 在 $[0,1]$ 上可积，且有正数 m 和 M，使得 $m\leq f(x)\leq M$ 对 $x\in[0,1]$ 成立. 求证：

$$\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

54. 设 f 在 $[a,b]$ 上可积，则在开区间 (a,b) 内至少有 f 的一个连续点.

55. 设 $f\geq 0$ 在 $[a,b]$ 上可积，求证：等式 $\int_a^b f(x)dx=0$ 成立的必要充分条件是 f 在连续点处必取零值.(典型例题 P237 例 4.2.12)

56. 设 $f \in C[-1,1]$ 并满足条件：对 $[-1,1]$ 的任何偶函数 g, 积分 $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = 0$, 证明：$f$ 是 $[-1,1]$ 上的奇函数.(典型例题 P238 练习 4.2.7)

57. 设 $x(t)$ 在 $[0,a]$ 上连续并且满足 $|x(t)| \leq M + k\int_0^t |x(t)|dt$, 这里 M 与 k 为正常数，求证：$|x(t)| \leq Me^{kt}$，$t \in [0,a]$.