

計劃・筆記

PLAN&MEMO

主題
SUBJECT

Date/日期: 2023.1.25

Place/地點:

Member/人員:

习题一

1. 设集合 $A = \{1, 2, 4, 8\}$ $B = \{1, 3, 6, 9\}$ 试求 $A \cup B$, $A \cap B$ 和 $A - B$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$$

$$A \cap B = \{1\}$$

$$A - B = \{2, 4, 8\}$$

2. 设集合 $A = \{2n-1 | n \in \mathbb{N}\}$ $B = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$ 试求 $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ 和 $B - A$

$$A \cup B = \mathbb{N} \quad A \cap B = \emptyset \quad A - B = \{2n-1 | n \in \mathbb{N}\} = A$$

$$B - A = \{2n | n \in \mathbb{N}\} = B$$

3. $\forall n \in \mathbb{N}$ 设 $A_n = [-1 + \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^n}]$, 试求 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$$A_1 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

$$A_2 = [-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-1 + \frac{1}{2^n}) = -1$$

.....

$$A_n = [-1 + \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^n}] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{2^n}) = 1$$

$$\therefore \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (-1, 1)$$



4. $\forall n \in \mathbb{N}$ 设 $B_n = [-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$ 试求 $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1 - \frac{1}{n}) = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = [-1, 1]$$

計劃・筆記

PLAN&MEMO

主題
SUBJECT

Date/日期:

Place/地點:

Member/人員:

5. 试用肯定的语言叙述 $X \subset \mathbb{R}$ 是无界集, 并证明集合 $A = \{n \sin \frac{\pi}{2} | n \in \mathbb{Z}\}$ 是无界集合.

$$\forall M > 0 \exists x \in X \subset \mathbb{R} \text{ st } |x| > M.$$

$$\text{对 } \forall M > 0 \exists x_0 = (M+1) \sin \frac{(M+1)\pi}{2} \text{ st } |x_0| = M+1 > M. \therefore A \text{ 无界}$$

6. 求下列集合的上、下确界

1) $E = \{[1+(1/2)^n]^{1/n} : n \in \mathbb{N}\}$

2) $E = [0, 1] \setminus \{\frac{m}{n} : 0 < m < n, m, n \in \mathbb{N}\}$

3) $E = \{\sqrt[n]{1+2^{n-1}} : n \in \mathbb{N}\}$

4) $E = \{x - [x] : x \in \mathbb{R}\}$

1) 当 $n=2k$ 时 $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$$[1+(1/2)^n]^{1/n} = 2^{1/(2k)} = 2^{1/2k} \text{ 单调 (k)} \uparrow$$

$$\text{当 } k=1 \text{ 时 } (2+k)_{\max} = 3 \quad k \rightarrow +\infty \text{ 时 } (2+k) \rightarrow 2$$

2) 当 $h=2k+1$ 时 $[1+(1/2)^h]^{1/h} = 0$ 恒成立.

$$\therefore \sup E = 3 \quad \inf E = 0$$

2) $0 < \frac{m}{n} < 1 \quad \sup E = 1 \quad \inf E = 0$

3) $\sqrt[n]{1+2^{n-1}} \geq \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}} > 1$

$\forall \epsilon > 0$ 取 $n > \log_2 \frac{1}{\epsilon}$ 且 n 为奇

$$\text{有 } \sqrt[n]{1+2^{n-1}} = \sqrt[n]{1+\frac{1}{2^n}} \leq 1 + \frac{1}{2^n} < 1 + \epsilon$$

$$\therefore \inf E = 1$$

n 为奇数时 $\sqrt[n]{1+2^{n-1}} = \sqrt[n]{1+\frac{1}{2^n}} \leq 1 + \frac{1}{2^n} < 1 + \epsilon$

計劃 · 筆記

PLAN & MEMO

主題
SUBJECT

Date/日期:

Place/地點:

Member/人員:

$$n \text{ 为偶数时 } \sqrt[n]{H2^{n+1}} = \sqrt[n]{H2^n}$$

$$\sqrt[n]{H2^n} > \sqrt[n]{H2^{n+1}} \Leftrightarrow H2^n > \left(\frac{H2^{n+1}}{H2^n}\right)^n \text{ 单减.}$$

$$\therefore \max E = \sqrt{5} \text{ 此时 } n \text{ 为偶数 } n \geq 2$$

$$\therefore \sup E = \sqrt{5} \quad \inf E = 1$$

$$(4) \quad x + 1 < [x] \leq x$$

$$0 \leq x - [x] < 1 \quad \inf E = 0 \quad \sup E = 1$$

7. 设A和B是两个非空的有上界的实数集合. 定义集合 $C = \{x+y: x \in A, y \in B\}$. 证明: $\sup C = \sup A + \sup B$

思路 ① $a \geq b \Rightarrow a = b$ ② 上确界定义

由上确界定义 $x \leq \sup A, y \leq \sup B$

由条件 $\forall z \in C \exists x \in A, y \in B \text{ s.t. } z = x+y$

$\therefore z = x+y \leq \sup A + \sup B$ 即 $\sup A + \sup B$ 为C上界

$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A, y \in B \text{ s.t. } x > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}, y > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}$

于是 $z = x+y \in C$ 且

$z > \sup A + \sup B - \varepsilon$ 由上确界定义

$$\sup C = \sup A + \sup B$$

計劃 · 筆記

PLAN & MEMO

主題
SUBJECT

Date/日期:

Place/地點:

Member/人員:

8. 设正数x经过四舍五入后得到整数y, 写出y与x之间的函数关系.

$$y = \begin{cases} [x] & x - [x] < \frac{1}{2} \\ [x] + 1 & x - [x] \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$= [x] + I_2(x - [x])$$

$$= [x + 0.5] \quad x \geq 0$$

9. 某市出租车按如下方式计费: 3千米以内为起步价10元; 超过3千米而不足10km的部分每千米2元; 超过10千米的部分每千米3元. 试给出车费与行驶里程之间的关系.

设行驶里程: x 车费 f(x)

$$f(x) = \begin{cases} 10 & x \leq 3 \\ 2(x-3) + 10 & 3 < x < 10 \\ 3(x-10) + 24 & x \geq 10 \end{cases}$$

10. 设 $f(x) = x^2 + ax + b$ 证明

$$\max\{|f(0)|, |f(1)|, |f(-1)|\} \geq \frac{1}{2} \quad (\text{反证})$$

$$f(0) = b$$

假设 $|f(0)| < \frac{1}{2}$ 即 $|b| < \frac{1}{2}$

$$f(1) = 1 + a + b$$

$$|f(1)| < \frac{1}{2} \quad |a+b+1| < \frac{1}{2}$$

$$f(-1) = 1 - a + b$$

$$|f(-1)| < \frac{1}{2} \quad |1-a+b| < \frac{1}{2}$$

知乎 @ 星空的旋律

計劃 · 筆記

PLAN & MEMO

主 題
SUBJECT

Date/日期:

Place/地點:

Member/人員:

例1 $|a+b|+|a+b| < |a+b|+|a+b| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
 $|2b+2|$
 $\Rightarrow |b+1| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < b < -\frac{1}{2}$ 即 $|b| > \frac{1}{2}$ 与假设矛盾
 $\therefore$ 原命题得证

11 求函数 $y = \sqrt{x-x^2}$ 的定义域和值域

$$x-x^2 \geq 0$$

$$x(x-1) \leq 0 \quad y = \sqrt{-x^2+x} = \sqrt{-(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}$$

$$x \in [0, 1] \quad x = \frac{1}{2} \text{ 时 } y_{\max} = \frac{1}{2}$$

$$y \in [0, \frac{1}{2}] \quad x = 0 \text{ 或 } 1 \text{ 时 } y_{\min} = 0$$

12 作函数 $y = |x-a| + \frac{1}{2}|x-b|$ ($a < b$) 的图像

1° $x > b$ 时

$$y = x-a + \frac{1}{2}(x-b)$$

$$= \frac{3}{2}x - a - \frac{b}{2}$$

2° $a \leq x \leq b$

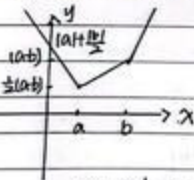
$$y = x-a + \frac{1}{2}(b-x)$$

$$= \frac{1}{2}x - a + \frac{b}{2}$$

3° $a > x$

$$y = a-x + \frac{1}{2}(b-x)$$

$$= -\frac{3}{2}x + a + \frac{b}{2}$$



計劃 · 筆記

PLAN & MEMO

主 題
SUBJECT

Date/日期:

Place/地點:

Member/人員:

B 设定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足

$$2f(x) + f(1-x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{试求 } f(x) \text{ 表达式}$$

$$\begin{cases} 2f(1-x) + f(x) = (1-x)^2 \\ 2f(x) + f(1-x) = x^2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{3}$$

14 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数且对一切不为零的实数 x 有

$$f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

试给出 $f(x)$ 在 $\mathbb{R} \setminus (-2, 2)$ 上的表达式

$$f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2} \quad \text{令 } y = x + \frac{1}{x} \text{ 则 } x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$$f(y) = y^2 - 2 \quad y \in [-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

$$\text{即 } f(x) \text{ 表达式为 } f(x) = x^2 - 2 \quad x \in \mathbb{R} \setminus (-2, 2)$$

*15 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在 D 上的有界非负函数. 证明:

$$\inf_{x \in D} f(x) \inf_{x \in D} g(x) \leq \inf_{x \in D} [f(x)g(x)] \leq \sup_{x \in D} f(x) \inf_{x \in D} g(x)$$

思路: 利用上下确界定义

$$\text{由条件对 } \forall x \in D \text{ 有 } f(x) \geq 0, g(x) \geq 0 \text{ 则有 } 0 \leq \inf_{x \in D} f(x) \leq f(x)$$

計劃 · 筆記

PLAN & MEMO

主題
SUBJECT

Date/日期:

Place/地點:

Member/人員:

$$\Rightarrow 0 \leq \inf_{x \in D} f(x) \inf_{x \in D} g(x) \leq f(x)g(x) \quad \forall x \in D$$

再由極值定義 $\inf_{x \in D} f(x) \inf_{x \in D} g(x) \leq \inf_{x \in D} (f(x)g(x))$

$$\text{由 } 0 \leq \inf_{x \in D} f(x) \leq f(x) \leq \sup_{x \in D} f(x)$$

$$f(x)g(x) \leq g(x) \cdot \sup_{x \in D} f(x) \quad x \in D \Rightarrow \inf_{x \in D} (f(x)g(x)) \leq g(x) \sup_{x \in D} f(x) \quad ①$$

1° 若 $\sup_{x \in D} f(x) = 0$ 且 $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in D$ 則 $f(x)g(x) \equiv 0$
於是 $\inf_{x \in D} (f(x)g(x)) = 0$

$$\text{此時 } \inf_{x \in D} (f(x)g(x)) = 0 = \sup_{x \in D} f(x) \inf_{x \in D} g(x)$$

$$2^\circ \sup_{x \in D} f(x) \neq 0 \Rightarrow \sup_{x \in D} f(x) > 0 \quad \text{由 } ① \Rightarrow \inf_{x \in D} (f(x)g(x)) \leq g(x) \sup_{x \in D} f(x)$$

即 $\inf_{x \in D} (f(x)g(x)) \leq \inf_{x \in D} g(x) \quad (\text{極值定義})$

$$\Rightarrow \inf_{x \in D} (f(x)g(x)) \leq \sup_{x \in D} f(x) \inf_{x \in D} g(x)$$

$$\text{綜上 } \inf_{x \in D} f(x) \inf_{x \in D} g(x) \leq \inf_{x \in D} (f(x)g(x)) \leq \sup_{x \in D} f(x) \inf_{x \in D} g(x)$$

同理有: $\inf_{x \in D} f(x) \sup_{x \in D} g(x) \leq \sup_{x \in D} (f(x)g(x)) \leq \sup_{x \in D} f(x) \sup_{x \in D} g(x)$
 $\inf_{x \in D} g(x) \sup_{x \in D} f(x) \leq \sup_{x \in D} (f(x)g(x)) \leq \sup_{x \in D} f(x) \sup_{x \in D} g(x)$

計劃 · 筆記

PLAN & MEMO

主題
SUBJECT

Date/日期:

Place/地點:

Member/人員:

16 設函數 $f(x)$ 在 D 上有定義 証明

$$1) \sup_{x \in D} \{-f(x)\} = -\inf_{x \in D} f(x) \quad \text{數}$$

$$2) \inf_{x \in D} \{-f(x)\} = -\sup_{x \in D} f(x)$$

$$1) \text{ 設 } A = \sup_{x \in D} \{-f(x)\} \text{ 有}$$

$$\begin{cases} \text{對 } \forall x \in D \text{ 有 } -f(x) \leq A \\ \text{對 } \forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in D \text{ s.t. } -f(x_0) > A - \varepsilon \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{對 } \forall x \in D \text{ 有 } f(x) \geq -A \\ \text{對 } \forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in D \text{ s.t. } f(x_0) \leq -A + \varepsilon \end{cases}$$

$$\Rightarrow -A = \inf_{x \in D} f(x) \quad \text{即 } \sup_{x \in D} \{-f(x)\} = -\inf_{x \in D} f(x)$$

$$2) \text{ 設 } B = \inf_{x \in D} \{-f(x)\} \text{ 則有}$$

$$\begin{cases} \text{對 } \forall x \in D \text{ 有 } -f(x) \geq B \\ \text{對 } \forall \varepsilon > 0 \exists x_1 \in D \text{ s.t. } -f(x_1) < B + \varepsilon \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{對 } \forall x \in D \text{ 有 } f(x) \leq -B \\ \text{對 } \forall \varepsilon > 0 \exists x_1 \in D \text{ s.t. } f(x_1) > -B - \varepsilon \end{cases}$$

$$\therefore -B = \sup_{x \in D} f(x) \quad \text{即 } \inf_{x \in D} \{-f(x)\} = -\sup_{x \in D} f(x)$$

计划·笔记

PLAN&MEMO

主题
SUBJECT

Date/日期:

Place/地点:

Member/人员:

17 用分段表达式来表示下列定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数

$$(1) f(x) = |x+1| - |x-1|$$

$$(2) f(x) = \sin x (2-x)(3x+1)$$

$$(3) f(x) = \arcsin(\cos x)$$

$$(4) f(x) = x - [x]$$

(11)

$$f(x) = \begin{cases} -2 & x \leq -1 \\ 2x & -1 \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x \end{cases}$$

$$1^\circ f(x) = 1$$

$$(12) f(x) = \begin{cases} 1 & x < -\frac{1}{2} \\ 0 & x = -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x < 2 \\ 0 & x = 2 \\ -1 & x > 2 \end{cases}$$

$$x(2-x)(3x+1) > 0$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (0, 2)$$

$$2^\circ f(x) = -1$$

$$x(2-x)(3x+1) < 0$$

$$\Rightarrow x \in (-\frac{1}{3}, 0) \cup (2, +\infty)$$

$$3^\circ f(x) = 0$$

$$x(2-x)(3x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, 2, -\frac{1}{3}$$

$$(13) f(x) = \arcsin(\cos x)$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$f(x) = \begin{cases} x+2k\pi - \frac{3}{2}\pi & 2k\pi + \pi \leq x \leq 2(k+1)\pi \\ -x+2k\pi + \frac{\pi}{2} & 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \pi \end{cases}$$

计划·笔记

PLAN&MEMO

主题
SUBJECT

Date/日期:

Place/地点:

Member/人员:

$$(14) f(x) = \begin{cases} x-n & n \leq x < n+1 \\ 0 & n=x \end{cases}$$

18 设 $f(x) = \sqrt{x}$ 定义在 $[0, 1]$ 上

(1) 将 $f(x)$ 延拓到 $[-1, 1]$ 上, 使其成为偶函数

(2) 将 $f(x)$ 延拓到 $[-1, 1]$ 上, 使其成为奇函数

(3) 将 $f(x)$ 延拓到 $(-\infty, +\infty)$ 上, 使其成为周期为 1 的周期函数

(1)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & -1 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{x} & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(2)

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & -1 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{x} & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \sqrt{x - [x]} \quad x - [x] \text{ 为 } x \text{ 的小数部分}$$

$$0 \leq x - [x] < 1$$

19 写出下列函数的反函数

$$(1) f(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \in (-\infty, 1] \\ x^2 & x \in (1, 10] \end{cases}$$

72/mx x ∈ [10, 5K] 乎 @ 星空的旋律

計劃・筆記

PLAN & MEMO

主 題
SUBJECT

Date/日期:

Place/地點:

Member/人員:

(3) $f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (-1 \leq x \leq 0)$

(11) 令 $y = f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

$(1+x)y = 1-x$

$x(y+1) = 1-y \quad y \neq -1 \Rightarrow x = \frac{1-y}{1+y} \therefore f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}$

(12) $x \in (-\infty, 0]$ 時

$y = f(x) = 2x-1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{2} \quad f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

$x \in (1, 10]$ 時

$y = f(x) = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$x \in (10, +\infty)$ 時

$y = f(x) = 72 \ln x \Rightarrow x = e^{\frac{y}{72}} \quad f^{-1}(x) = e^{\frac{x}{72}}$

$\therefore f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2} & (-\infty, 0] \\ \sqrt{x} & (1, 10] \\ e^{\frac{x}{72}} & (10, +\infty) \end{cases}$

(3) $y = f(x) = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2 = 1-x^2 \Rightarrow x = \sqrt{1-y^2}$

$f^{-1}(x) = -\sqrt{1-x^2}$

20 設 $f(x) = x^2 - 2x \quad g(x) = \begin{cases} x & x < 2 \\ 4-x & x \geq 2 \end{cases}$ 求 $f(g(x)) \quad g(f(x))$

 $g(f(x))$ 的表达式

計劃・筆記

PLAN & MEMO

主 題
SUBJECT

Date/日期:

Place/地點:

Member/人員:

$$f(g(x)) = \begin{cases} x^2 - 2x & x < 2 \\ (4-x)^2 - 2(4-x) = x^2 - 6x + 8 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$g(f(x)) = \begin{cases} x^2 - 2x & x^2 - 2x < 2 \Rightarrow 1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3} \\ 4 - x^2 + 2x & x^2 - 2x \geq 2 \Rightarrow x \geq 1 + \sqrt{3} \text{ or } x \leq 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$g(g(x)) = \begin{cases} x & x \leq 2 \\ 4-x & x > 2 \end{cases}$$

21 設 $f(x) = |x+1| - |x-1|$ 求 n 次复合函数 $f \circ f \circ \dots \circ f(x)$
n个

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x > 1 \\ 2x & -1 \leq x \leq 1 \\ -2 & x < -1 \end{cases}$$

$$f \circ f(x) = \begin{cases} 2 & x > \frac{1}{2} \\ 2^2 x & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2 & x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f \circ f \circ f(x) = \begin{cases} 2 & x > \frac{1}{2^2} \\ 2^3 x & -\frac{1}{2^2} \leq x \leq \frac{1}{2^2} \\ -2 & x < -\frac{1}{2^2} \end{cases}$$

... 归纳得

$$\underbrace{f \circ \dots \circ f}_n(x) = \begin{cases} 2 & x > \frac{1}{2^n} \\ 2^n x & -\frac{1}{2^n} \leq x \leq \frac{1}{2^n} \\ -2 & x < -\frac{1}{2^n} \end{cases}$$

知星 @ 星空的旋律

計劃・筆記

PLAN&MEMO

主題
SUBJECT

Date/日期:

Place/地點:

Member/人員:

數目法證明 假設 $f \circ \dots \circ f(x) = \begin{cases} 2 & x > \frac{1}{2^{n-1}} \\ 2^{n-1}x & -\frac{1}{2^{n-1}} \leq x \leq \frac{1}{2^{n-1}} \\ -2 & x < -\frac{1}{2^{n-1}} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \underbrace{f \circ \dots \circ f(x)}_n &= f \circ \underbrace{f \circ \dots \circ f(x)}_{n-1} \quad \text{令 } g(x) = \underbrace{f \circ \dots \circ f(x)}_{n-1} \\ &= f \circ g(x) \quad = \begin{cases} 2 & x > \frac{1}{2^{n-1}} \\ 2^{n-1}x & -\frac{1}{2^{n-1}} \leq x \leq \frac{1}{2^{n-1}} \\ -2 & x < -\frac{1}{2^{n-1}} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2 & x > \frac{1}{2^n} \\ 2^n x & -\frac{1}{2^n} \leq x \leq \frac{1}{2^n} \\ -2 & x < -\frac{1}{2^n} \end{cases} \quad \text{得证.} \end{aligned}$$

22. 设函数 $f(x)$ 为 $[-a, a]$ 上的奇(偶)函数. 证明: 若 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上递增, 则 $f(x)$ 在 $[-a, 0]$ 上递增(减).

证明:

1° $f(x)$ 为 $[-a, a]$ 上奇函数 则 $-f(x) = f(-x)$

$\forall x_1, x_2 \in [0, a]$ 不妨设 $x_1 < x_2$. $\because f(x)$ 递增 则 $f(x_1) < f(x_2)$
 $-f(x_2) < -f(x_1) \Rightarrow f(-x_2) < f(-x_1) \because x_1, x_2 \in [0, a]$ 且任意
 $\therefore -x_1, -x_2 \in [-a, 0]$ 且任意 $-x_1 > -x_2 \Rightarrow f(x)$ 在 $[-a, 0]$ 上递增.

2° $f(x)$ 为 $[-a, a]$ 上偶函数 则 $f(x) = f(-x)$

$\forall x_1, x_2 \in [0, a]$ 不妨设 $x_1 < x_2$ 则 $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(-x_1) < f(-x_2)$
 $\because x_1, x_2 \in [0, a] \therefore -x_1, -x_2 \in [-a, 0]$ 且 $-x_1 > -x_2 \Rightarrow f(x)$ 在 $[-a, 0]$ 上递减.

計劃・筆記

PLAN&MEMO

主題
SUBJECT

Date/日期:

Place/地點:

Member/人員:

23. 设函数 $f(x)$ 定义在集合 E 上. 证明: $f(x)$ 在 E 上严格单调的充要条件为对任意 $x_1, x_2, x_3 \in E$, 若 $x_1 < x_2 < x_3$ 则必有

$(f(x_1) - f(x_2))(f(x_2) - f(x_3)) > 0$ $\uparrow$
 证明: $\Rightarrow$ $f(x)$ 严格单调 初设 $f(x)$ 单调
 则 $x_1 < x_2 < x_3$ 有 $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$
 $f(x_1) - f(x_2) < 0 \quad f(x_2) - f(x_3) < 0$
 $\Rightarrow (f(x_1) - f(x_2))(f(x_2) - f(x_3)) > 0 \quad f(x)$ 单调同理可证

用 $\Rightarrow$ 验证以 $f(x)$ 递增

$\Leftarrow$ 反证法 假设有 $a < b \in E$ s.t. $f(a) \geq f(b)$.
 则 $\exists s \in (a, b)$ s 不是 $f(x)$ 递增点 取 $x < a \quad x \in E$
 $f(x) < f(a) \Rightarrow f(x) - f(a) < 0 \quad \text{令 } x_1 = x$
 $f(a) - f(b) \geq 0 \quad x_2 = a$

此时则有 $(f(x) - f(a))(f(a) - f(b)) \leq 0 \quad x_3 = b$

与题设条件矛盾 $\therefore f(x)$ 在 E 上严格单调.

$f(x)$ 单调同理可证

24. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上以 $m > 0$ 为周期的函数. a 为一给定的实数. 证: 若 $f(x)$ 在 $[a, a+m]$ 上有界, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界.

证: $\because f$ 在 $[a, a+m]$ 上有界 即 对 $\forall x \in [a, a+m] \exists M > 0$

s.t. $|f(x)| \leq M$ 对 $\forall y \in (-\infty, +\infty)$ 一定存在整数 k

s.t. $y = k \cdot m + x \quad x \in [a, a+m]$ 于是有

$|f(k \cdot m + x)| = |f(x)| \leq M \quad \therefore f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界

計劃 · 筆記

PLAN & MEMO

主 題
SUBJECT

Date/日期:

Place/地點:

Member/人員:

25 证明 $\sin(x+x)$ 不是周期函数 (反证法)

假设 $\sin(x+x)$ 为周期函数 周期为 T

则 $\sin(x+x) = \sin(x+x+T)$

令 $x=0$ $\sin 0 = \sin T = 0 \Rightarrow T = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

令 $x=1$ $\sin 2 = \sin(2+T) = \sin(2+k\pi) \quad k=1$ 时不成立(矛盾)

$\therefore$ 假设不成立. 证毕

26 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上定义, $x_1, x_2 > 0$ 证明:

(1) 若 $f(x)$ 单调下降, 则 $f(x_1+x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$

(2) 若 $f(x)$ 单调上升, 则 $f(x_1+x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$

(1) 由条件对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 有 $x_1 < x_1+x_2 \quad x_2 < x_1+x_2$

于是 $\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2} \leq \frac{f(x_1)}{x_1} \Rightarrow x_1 f(x_1+x_2) \leq (x_1+x_2) f(x_1)$

$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2} \leq \frac{f(x_2)}{x_2} \Rightarrow x_2 f(x_1+x_2) \leq (x_1+x_2) f(x_2)$

$\Rightarrow f(x_1+x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$

(2) 同理 $\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2} \geq \frac{f(x_1)}{x_1} \Rightarrow x_1 f(x_1+x_2) \geq (x_1+x_2) f(x_1)$

$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2} \geq \frac{f(x_2)}{x_2} \Rightarrow x_2 f(x_1+x_2) \geq (x_1+x_2) f(x_2)$
 $\Rightarrow f(x_1+x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$

計劃 · 筆記

PLAN & MEMO

主 題
SUBJECT

Date/日期:

Place/地點:

Member/人員:

27 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上定义, 且 $f(f(x)) \equiv x$

(1) 这种函数 $f(x)$ 是否唯一? 如果不唯一, 举例说明

(2) 若 $f(x)$ 是严格递增的, 此时是否唯一? 为什么?

(1) 不唯一 $f(x) = -x$, $f(x) = x$ 均满足

(2) 唯一 若 $f(x) > x$ 则 $f(f(x)) > f(x) > x$

若 $f(x) < x$ 则 $f(f(x)) < f(x) < x$

$\therefore f(x) \equiv x$

28 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 证明: 若 $f(f(x))$ 存在唯一的不动点, 则 $f(x)$ 也存在唯一的不动点. (注: 若存在 p , s.t. $g(p) = p$ 则 p 是 g 的不动点)

设 $f(f(x))$ 唯一不动点为 p 则 $f(f(p)) = p$

$x \neq p$ 时 $f(f(x)) \neq x$

1° 先证 $x \neq p$ 时 $f(x) \neq x$ 若不然有 $f(f(x)) = f(x) = x$ 与条件矛盾

2° 再证 p 为 $f(x)$ 不动点. 若不然 $f(p) \neq p$

设 $f(p) = q \quad q \neq p \quad f(f(p)) = f(q) = p$

$f(f(q)) = f(p) = q \Rightarrow q$ 也是 $f(f(x))$ 不动点与条件矛盾

$\therefore p$ 为 $f(x)$ 唯一不动点

29 证明 $f(x) = \frac{x}{1+x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界

由 $x \leq (1+x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$ 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的值域为 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

計劃・筆記

PLAN&MEMO

主 題
SUBJECT

Date/日期:

Place/地點:

Member/人員:

30. 用肯定的语气描述

(1) 函数 $f(x)$ 不是 $(-\infty, +\infty)$ 上的周期函数

(2) 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上无下界

(1) $\forall l > 0, \exists x \in \mathbb{R}$ st $f(x) \neq f(x+l)$

(2) $\forall M > 0, \exists x' \in (a, b)$, st $f(x') < -M$

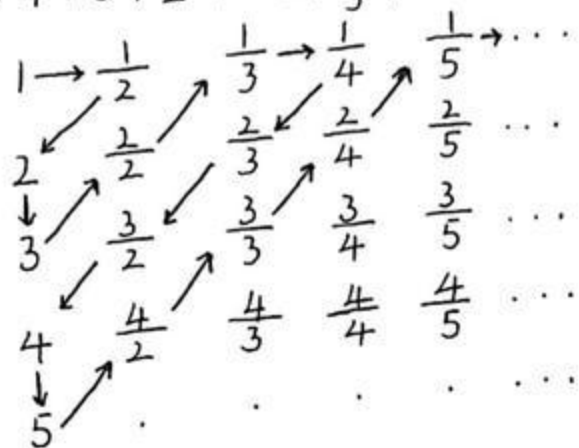
第二章 序列的极限

习题二

1. 解: 只需对全体正有理数做排列 (仅同理)

1, $\frac{1}{2}$, 2, 3, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, 4, 5, $\frac{1}{5}$, ...

方法如图:



(只保留可约化的最简式)

2. (1) 不能. 该条件只可成为 a 为序列 $\{x_n\}$ 极限的必要条件

(2) 可. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $k = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, 则 $\varepsilon_k < \varepsilon$, 且 $\exists N > 0$. 当 $n > N$ 时,
有 $|x_n - a| < \varepsilon_k < \varepsilon$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

(3) 可, M 为一大于零的常数, 则对任意小的正数 ε , $M\varepsilon$ 也可任意小.

用数学语言表达如下:

$\forall \varepsilon' = \frac{1}{M} \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < M\varepsilon' = M \cdot \frac{1}{M} \varepsilon = \varepsilon$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

(注: 从 (3) 中可以得出今后在证明极限时不必拘泥找 ε , 而是可以任意小的量)

3. 证: (1) 注意到当 $n \in \mathbb{N}^+$ 时有 $|\frac{\cos n}{n}| \leq |\frac{1}{n}|$

故对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时

有 $|\frac{\cos n}{n}| \leq |\frac{1}{n}| < |\frac{1}{N}| < \varepsilon$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n} = 0$

(2) 注意到 $n \in \mathbb{N}^+$ 时, 有 $|\frac{n}{n^3+1}| = |\frac{1}{n^2+\frac{1}{n}}| < |\frac{1}{n^2}| \leq |\frac{1}{n}|$

故对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时

$$\text{有 } |\frac{n}{n^3+1}| = |\frac{1}{n^2+\frac{1}{n}}| < |\frac{1}{n^2}| \leq |\frac{1}{n}| < \varepsilon$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3+1} = 0$$

(注: 原书上写的是 $n \rightarrow \infty$, 在序列极限中, $\{a_n\}$ 的指标 n 默认为 $\mathbb{N}^+$, 故书写 $n \rightarrow +\infty$ 也对, 且不用考虑 n 取负带来的影响, 如在此题中不需考虑 $n = -1$ 时分母为零.)

(3) 注意到当 $n \in \mathbb{N}^+$ 时, $|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = |\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}| < |\frac{1}{\sqrt{n}}|$

故对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = [\frac{1}{\varepsilon^2}] + 1 \in \mathbb{N}^+$, 当 $n > N$ 时

$$\text{有 } |\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = |\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}| < |\frac{1}{\sqrt{n}}| < \varepsilon$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$$

(注: 此题若未要求用定义证明, 也不可认为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty - \infty = 0 \quad \times$$

极限的四则运算前提是极限存在)

(4) 注意到当 $n \in \mathbb{N}^+$ 时, $|\frac{1-2n^2}{3n^2+1} - (-\frac{2}{3})| = |\frac{5}{9n^2+3}| = |\frac{1}{\frac{9}{5}n^2+\frac{3}{5}}| < |\frac{1}{n^2}| \leq |\frac{1}{n}|$

故对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时

$$\text{有 } |\frac{1-2n^2}{3n^2+1} - (-\frac{2}{3})| < |\frac{1}{n}| < \varepsilon$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n^2}{3n^2+1} = -\frac{2}{3}$$

(5) 当 $q=0$ 时, 易证

当 $q \neq 0$ 时, 设 $|q| = \frac{1}{1+a} < 1$, 其中 $a > 0$

注意到 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geq 5$ 时, 有 $|n^3 q^n| = \left| \frac{n^3}{(1+a)^n} \right| = \left| \frac{n^3}{\sum_{i=0}^n C_n^i a^i} \right| < \left| \frac{n^3}{C_n^4 a^4} \right| < \left| \frac{4! n^3}{(n-3)^4 \cdot a^4} \right|$

对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\left| \frac{4! n^3}{(n-3)^4 \cdot a^4} \right| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{n^3}{(n-3)^4} \right| < \frac{a^4 \cdot \varepsilon}{4!} = \varepsilon'$$

两边都为正数, 开四次方

$$\text{得 } \left| \frac{n^{\frac{3}{4}}}{n-3} \right| < \sqrt[4]{\varepsilon'}$$

$$\therefore \left| \frac{n^{\frac{3}{4}}}{n-3} \right| = \left| \frac{1}{n^{\frac{1}{4}} - \frac{3}{n^{\frac{3}{4}}}} \right| < \left| \frac{1}{n^{\frac{1}{4}} - 3} \right|$$

$$\therefore \text{若 } \left| \frac{1}{n^{\frac{1}{4}} - 3} \right| < \sqrt[4]{\varepsilon'}, \text{ 则 } \left| \frac{n^{\frac{3}{4}}}{n-3} \right| < \sqrt[4]{\varepsilon'}$$

$$\text{则 } \left| \frac{n^3}{(n-3)^4} \right| < \varepsilon'$$

$$\text{此时 } n > \left(\frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon'}} + 3 \right)^4$$

$$\text{故对于 } \forall \varepsilon > 0, \exists N = \max \left\{ 5, \left[\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{4!}}} + 3 \right)^4 \right] + 1 \right\} \in \mathbb{N}$$

$$\text{当 } n > N \text{ 时 } |n^3 q^n| < \left| \frac{4! n^3}{(n-3)^4 \cdot a^4} \right| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 q^n = 0 \quad (|q| < 1)$$

(6) 注意到当 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geq 6$ 时,

$$\text{有 } (n-1)(n-2) > (n-3)(n-4) > n$$

$$\text{故 } \frac{n^3}{n!} = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) \cdots} < \frac{1}{n-5}$$

对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 6 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时

$$\text{有 } \left| \frac{n^3}{n!} \right| < \left| \frac{1}{n-5} \right| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n!} = 0$$

4. 证: 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有 $|y_n - x_n| < \varepsilon$

由 $x_n \leq a \leq y_n$ 可得 $|y_n - x_n| = y_n - x_n = y_n - a + a - x_n = |y_n - a| + |x_n - a|$

故对于上述 ε , N , 当 $n > N$ 时 $|y_n - a| \leq |y_n - x_n| + |x_n - a| = |y_n - x_n| < \varepsilon$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$$

$$\text{同理 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

法二：由 $x_n \leq a \leq y_n$ 可得 $0 \leq y_n - a \leq y_n - x_n$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$, 由夹逼收敛原理可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - a) = 0$
 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - a + a) = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - a) + a = a$

同理可由 $0 \leq a - x_n \leq y_n - x_n$ 得出 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

5. 证：虽然题目未做出要求，但此处还是按照 a 为有限实数， $\pm\infty$ 的情况讨论

① a 为有限实数

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 可知对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = 0$ 可知对于上述 ε , $\exists N_2 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_2$ 时有 $\left| \frac{p_n}{p_1 + \dots + p_n} \right| < \frac{\varepsilon}{N_1}$

取 $N = N_1 + N_2$, 则 $n > N$ 时

$$\left| \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \dots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} - a \right| = \left| \frac{p_1 (a_n - a) + p_2 (a_{n-1} - a) + \dots + p_n (a_1 - a)}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right| \quad (1)$$

$$\leq \left| \frac{\sum_{i=1}^{n-N_1} p_i (a_{n+1-i} - a)}{\sum_{i=1}^n p_i} \right| + \left| \frac{\sum_{i=1}^{N_1} (a_i - a) p_{n+1-i}}{\sum_{i=1}^n p_i} \right|$$

$$< \varepsilon \left| \frac{\sum_{i=1}^{n-N_1} p_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \right| + \frac{\varepsilon}{N_1} \left| \sum_{i=1}^{N_1} (a_i - a) \right| \quad (2)$$

因为 $p_k > 0$, 故 $\left| \frac{\sum_{i=1}^{n-N_1} p_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \right| < 1$. 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 为有限实数, 则 $\exists M > 0$

使得 $\forall k \in \mathbb{N}$, 有 $|a_k| \leq M$, 则 $|a_k - a| \leq |a_k| + |a| \leq M + |a| = M'$

故 (2) 式 $< \varepsilon + M' \varepsilon = (1 + M') \varepsilon$

故 (1) 式 $< (2)$ 式 $< (1 + M') \varepsilon$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \dots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = a$

注：这里 M' 为定值

即 $(1 + M') \varepsilon = C \varepsilon$

C 为正的常数

此过程是为给初学者呈现清晰的思路，掌握后可适当修改使得最后的不等式右端为 ε , 但其本质与 $C\varepsilon$ 并无区别。

② a 为 $+\infty$, 即广义收敛 $\times$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ 可得对于 $\forall 2M > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时有 $a_n > 2M$

且 $a_n > a_i$, $i = 1, 2, \dots, N_1$

(注：这一点总是可以做到，若最初取的 N_1 不满足该条件

即 $\exists n > N_1$ 使得 $a_n > 2M$ 但 $a_n \leq a_i$, $i = 1, 2, \dots, N_1$, 那么只

需要对 $M' = \max \{a_i | i = 1, 2, \dots, N_1\}$, 找到 N_{12} 使得 $n > N_{12}$ 时

有 $a_n > M' \geq 2M$

② a 为 $+\infty$, 即广义收敛

$\forall M > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ 知, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $a_n > 2M$, 且 $a_1 + a_2 + \dots + a_{N_1} > 0$

(注: $a_1 + a_2 + \dots + a_{N_1} > 0$ 这一点总是可以做到, 由 $n > N_1$ 时 $a_n > 2M > 0$ 可知序列中非正的项有限, 令这些项的和为 S , 则对于 $|S|$, $\exists N_1'$ 使得 $a_{N_1'} > |S|$, 则上述 N_1 只需要满足本身条件的同时取在 N_1' 之后就可以了.)

对于 $\varepsilon = \frac{1}{3N_1} > 0$, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_2$ 时 $\left| \frac{p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right| < \varepsilon$, 由 $p_k > 0$ 有 $\frac{p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} < \varepsilon$

取 $N = N_1 + N_2$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\begin{aligned} \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \dots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} &= \frac{\sum_{i=1}^{n-N_1} p_i a_{n+1-i}}{\sum_{i=1}^n p_i} + \frac{\sum_{i=1}^{N_1} a_i p_{n+1-i}}{\sum_{i=1}^n p_i} \\ &> 2M \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n-N_1} p_i}{\sum_{i=1}^n p_i} + \frac{\sum_{i=1}^{N_1} a_i p_{n+1-i}}{\sum_{i=1}^n p_i} \\ &= 2M \cdot \frac{(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^{N_1} p_{n+1-i})}{\sum_{i=1}^n p_i} + \frac{\sum_{i=1}^{N_1} a_i p_{n+1-i}}{\sum_{i=1}^n p_i} \quad (1) \end{aligned}$$

注: (1) 式中 $2M \cdot \frac{(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^{N_1} p_{n+1-i})}{\sum_{i=1}^n p_i} > 2M(1 - N_1 \varepsilon)$

而 $\frac{\sum_{i=1}^{N_1} a_i p_{n+1-i}}{\sum_{i=1}^n p_i}$ 中将 a_1 到 a_{N_1} 中非正的项系数放大至多为 ε , 正项系数缩小

至多为 0, 则 $\frac{\sum_{i=1}^{N_1} a_i p_{n+1-i}}{\sum_{i=1}^n p_i} > \varepsilon \cdot S$, 这里的 S 同上文中的注, 此外, 若对于 $\forall M > 0$,

总是设 $M > |S| \geq 0$, 也符合上文中注的讨论, 为避免重复, 下文默认 $M > |S|$.

$$\begin{aligned} (1) \text{ 式} &> 2M(1 - N_1 \varepsilon) + \varepsilon \cdot S > 2M(1 - N_1 \cdot \frac{1}{3N_1}) + \frac{S}{3N_1} \\ &= \frac{4}{3}M + \frac{S}{3N_1} \quad (2) \end{aligned}$$

$\therefore S \leq 0$ 且 $|S| < M, N_1 \geq 1$

$$\therefore (2) \text{ 式} > \frac{4}{3}M - \frac{1}{3}M = M$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \dots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = +\infty$$

$a = -\infty$ 时同理可证.

③ 作为书本例 2.1.13 思考题的补充, 对于 $a = \infty$; $\{a_n\}$ 发散两种情况进行说明

令 $a_n = (-1)^n n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$; 令 $p_k = 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{p_1 + \dots + p_n} = 0$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}$

令 $a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇} \\ -2, & n \text{ 为偶} \end{cases}$, 则 a_n 发散; 令 $p_k = 1$ 同上, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 收敛

6. (1) 当 $n > 1$ 时, $\frac{n^2-2}{2n+1} > 0$, 则对于 $n > 1$, $|\frac{n^2-2}{2n+1}| = \frac{n^2-2}{2n+1} > \frac{n^2-4}{2n+4} = \frac{n-2}{2}$

$\forall M > 0, \exists N = [2M] + 3 > 1$, 当 $n > N$ 时 $|\frac{n^2-2}{2n+1}| > \frac{n-2}{2} > M$

故 $\{\frac{n^2-2}{2n+1}\}$ 为无穷大量

(2) 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{2^n} \geq 2$ 故 $|2^{2^n}| = 2^{2^n} > 2^n > n$ (原题为 $\{2^{2^n} + 1\}$)

$\forall M > 0, \exists N = [M] + 1$, 当 $n > N$ 时 $|2^{2^n}| > n > M$

故 $\{2^{2^n}\}$ 为无穷大量

(3) 由 Fibonacci 序列的递推公式可得对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n \geq n$

$\forall M > 0, \exists N = [M] + 1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时 $|F_n| \geq n > M$, 所以为无穷序列

补充: 结合高等代数的知识, 可求出其通项公式

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

对于矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 其特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^2 - \lambda - 1$, 在 $\mathbb{R}$ 内的两个根为 $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$

二阶方阵有两个相异的特征值, 则 A 相似于对角矩阵

对于 λ_1 , 齐次线性方程组 $(\lambda_1 E - A)X = 0$ 有基础解系 $\eta_1 = (\lambda_1, 1)$

对于 λ_2 , 齐次线性方程组 $(\lambda_2 E - A)X = 0$ 有基础解系 $\eta_2 = (\lambda_2, 1)$

$$\text{故有 } T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = A,$$

$$\text{从而 } A^n = (TAT^{-1})^n = T A^n T^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \\ = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} & \lambda_1 \lambda_2^{n+1} - \lambda_2 \lambda_1^{n+1} \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & \lambda_1 \lambda_2^n - \lambda_2 \lambda_1^n \end{bmatrix} \quad (2)$$

将(2)代入(1)中得 $F_n = (\lambda_1^n - \lambda_2^n + \lambda_1 \lambda_2^n - \lambda_2 \lambda_1^n) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$

由 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ 可得 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1})$

从通项也可看出该序列是无穷大量 知乎 @许耀文

$$1. \text{证: } \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \text{当 } n > N_1 \text{ 时有 } |x_{2n} - a| < \varepsilon$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \text{当 } 2n+1 > N_2 \text{ 时有 } |x_{2n+1} - a| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N = \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}, \text{当 } n > N \text{ 时 } |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

(注: 同理可证 $a = \pm \infty, \infty$, 即广义收敛的情况)

已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n}$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1}$ 都存在, 无法推出 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在

反例: 任意选择两个收敛的序列, 且满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

$$\text{令 } x_n = \begin{cases} a_n, & n \text{ 为偶数} \\ b_n, & n \text{ 为奇数} \end{cases} \text{ 即可得到反例.}$$

8. $\{x_n\}$ 是无穷小量

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{当 } n > N \text{ 时有 } |x_n| < \varepsilon$$

$\{x_n\}$ 不是无穷小量

$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \text{对于 } \forall N \in \mathbb{N}, \text{都 } \exists n_0 > N \text{ 使得 } |x_{n_0}| \geq \varepsilon_0$$

9. 证: 对于 $\{\cos n\}$ 的敛散性判断是很容易的, 在证明上却不是那么直接

这里将给出分析问题的思路

$$\pi = 3.14 \dots \text{ 故 } \pi/3 > 1$$

于是长度为 $\pi/3$ 的区间必定包含至少一个整数点。

则对于 $[2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}]$ 而言

设其中的一个整数点为 n_1 , 则

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq \cos n_1 \leq 1$$

对于 $[\frac{3}{2}k\pi - \frac{\pi}{6}, \frac{3}{2}k\pi + \frac{\pi}{6}]$ 而言

设其中的一个整数点为 n_2 , 则

$$-\frac{1}{2} \leq \cos n_2 \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{则 } |\cos n_1 - \cos n_2| \geq |\cos n_1| - |\cos n_2| \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

解答过程

$$\exists \varepsilon_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n_1 \in [2N\pi - \frac{\pi}{6}, 2N\pi + \frac{\pi}{6}]$$

满足 $n_1 \in \mathbb{N}$ 且 $n_1 > N$

$$\exists n_2 \in [\frac{3}{2}N\pi - \frac{\pi}{6}, \frac{3}{2}N\pi + \frac{\pi}{6}]$$

满足 $n_2 \in \mathbb{N}$ 且 $n_2 > N$

$$\text{且 } |\cos n_1 - \cos n_2| \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \varepsilon_0$$

由 Cauchy 收敛准则可知 $\{\cos n\}$ 发散。

$$10. (1) |\cos n| \leq 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{a}{n} = \sin 0 = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \cos n \sin \frac{a}{n} = 0$$

$$(2) \frac{7n^5 + n^3 - 2n}{2n^5 - n + 3} \text{ (当 } n \neq 0 \text{ 时)} = \frac{7 + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^4}}{2 - \frac{1}{n^4} + \frac{3}{n^5}} \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^5 + n^3 - 2n}{2n^5 - n + 3} = \frac{7}{2}$$

$$(3) \frac{1+2+\dots+n}{n^2} = \frac{n+n^2}{2n^2} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$(4) \text{当 } a=1 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a+a^2+\dots+a^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\text{当 } a \neq 1 \text{ 时, } \sum_{i=0}^{n-1} a^i = \frac{1-a^n}{1-a}, \text{ 则 } \frac{a^n}{1+a+a^2+\dots+a^{n-1}} = \frac{(1-a)a^n}{1-a^n}$$

注意到当 $a > 1$ 时 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$; 当 $0 < a < 1$ 时 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$

$$\text{于是 } a > 1 \text{ 时 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-a)a^n}{1-a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-a)}{\frac{1}{a^n} - 1} = a-1$$

$$0 < a < 1 \text{ 时 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-a)a^n}{1-a^n} = 0$$

$$\therefore \text{当 } 0 < a < 1 \text{ 时 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a+a^2+\dots+a^{n-1}} = 0$$

$$1 < a \text{ 时 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a+a^2+\dots+a^{n-1}} = a-1$$

$$(5) |\sin n^2| \leq 1; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}} = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \cdot \sin n^2}{n+1} = 0$$

$$(6) \text{利用立方差公式 } \sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) = \frac{n^{\frac{1}{3}}}{(n+1)^{\frac{1}{3}} + (n^2+n)^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{3}}}$$

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) = 0$$

$$(7) \text{利用 } \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \text{ 可知 } \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$(8) \frac{a+a^2+\dots+a^n}{b+b^2+\dots+b^n} = \frac{a(1-a^n)(1-b)}{b(1-b^n)(1-a)}$$

$$\text{由 } |a| < 1, 0 < |b| < 1 \text{ 可得 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-a^n)(1-b)}{b(1-b^n)(1-a)} = \frac{a(1-b)}{b(1-a)}$$

(9) 法一: 对于 $\forall 0 < \varepsilon < 1$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1-\varepsilon)^n = 0$, 于是对于 $a > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时

$$(1-\varepsilon)^n = |(1-\varepsilon)^n| < a, \text{ 即 } 1-\varepsilon < \sqrt[n]{a} \text{ 由 } 0 < a < 1 \text{ 可得 } \sqrt[n]{a} < 1$$

于是对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时有 $1-\varepsilon < \sqrt[n]{a} < 1$ ($\varepsilon \geq 1$ 时对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 都成立)

$$\text{即 } |\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$$

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (0 < a < 1)$$

法二: 设 $a = \frac{1}{a'}$ 则 $a' > 1$ 且 $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a'}}$

对于 $n > 1, \varepsilon > 0, (1+\varepsilon)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i \varepsilon^i = 1 + n\varepsilon + \dots > 1 + n\varepsilon$

故对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 n 充分大则有 $(1+\varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon > a'$

易求出 $N = \left[\frac{a'-1}{\varepsilon} \right]$, 当 $n > N$ 时即可满足上式

也即 $1+\varepsilon > \sqrt[n]{a'} > 1 \Rightarrow |\sqrt[n]{a'} - 1| < \varepsilon$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a'} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a'}} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}$

(10) 关键建在于把 a^n 与 n^k 联系起来

注意到 $a^n = (1+(a-1))^n = \sum_{i=0}^n C_n^i (a-1)^i = 1 + n(a-1) + \frac{n(n-1)}{2} (a-1)^2 + \dots$
$$> \frac{n(n-1)}{2} (a-1)^2 \quad (\text{由 } a > 1 \text{ 得})$$

当 $n > 2$ 时 $\frac{n(n-1)}{2} > \frac{n^2}{4}$ 于是 $a^n > \frac{n^2}{4} (a-1)^2 \quad (n > 2)$

于是当 $k=1$ 时 $0 < \frac{n^k}{a^n} = \frac{n}{a^n} < \frac{4n}{n^2(a-1)^2} = \frac{4}{n(a-1)^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

由夹逼收敛原理可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$

当 $k > 0$ 且 $k \neq 1$ 时, $\frac{n^k}{a^n} = \left[\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n} \right]^k$, 由 $a > 1$ 可知 $a^{\frac{1}{k}} > 1$

于是由上述 $k=1$ 的情况可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n} = 0$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n} \right]^k = 0^k = 0$

综上 $k > 0, a > 1$ 时 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$

(注: 当 $k \leq 0$ 时 $\frac{n^k}{a^n} = \frac{1}{n^{-k} \cdot a^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$)

11. 证: (1) 设 $C_n = \max\{x_n, y_n\}$

若 $a=b$, 对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时有 $|x_n - a| < \varepsilon, |y_n - b| < \varepsilon$

于是 $|C_n - a| = |C_n - b| < \varepsilon$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = a = b = \max\{a, b\}$

若 $a \neq b$, 不失一般性, 设 $a < b$, 则由序列极限的保序性可知 $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $x_n < y_n$, 此时 $C_n = y_n$.

对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_2$ 时有 $|y_n - b| < \varepsilon$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则 $n > N$ 时有 $|C_n - b| = |y_n - b| < \varepsilon$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = b = \max\{a, b\}$

(2) 同 (1) 可证

12. (1) 对于 $\sqrt[n]{1+x^n}$ 来说, $x \in \mathbb{R}$ 都是有意义的

但对于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n}$ 来说, 当 $x < -1$ 时 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{1+x^{2n}} = |x|$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{1+x^{2n+1}} = x$

因此 $\sqrt[n]{1+x^n}$ 是发散的, 故 $F(x)$ 在 $x < -1$ 时没有定义

当 $x = -1$ 时 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{1+(-1)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{2} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{1+(-1)^{2n+1}} = 0$

此时 $F(x)$ 也没有定义

对于 $-1 < x \leq 1$, $(1+x^n) \in (0, 2]$, 于是 $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n} = 1$

当 $1 < x$ 时, $x^n < 1+x^n < 2x^n$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2x^n} = x$

由夹逼收敛原理可知 $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n} = x$

$$\text{故 } F(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x \leq 1 \\ x, & 1 < x \end{cases}$$

(2) 对于 $\sqrt[n]{1+x^n+\frac{x^{2n}}{2^n}}$ 来说, $x \in \mathbb{R}$ 都是有意义的

但对于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n+\frac{x^{2n}}{2^n}}$ 来说, 当 $x = -1, -2$ 时, 同(1)可知极限不存在

下面说明 $-1 > x > -2$ 时的情况

此时 $\frac{x^{2n}}{2^n} = (x \cdot \frac{x}{2})^n < |x|^n$, 于是 $x^{2n} < 1+x^{2n}+\frac{x^{4n}}{2^{2n}} < x^{2n}+x^{2n}+x^{2n}$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{3x^{2n}} = |x|$ 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{1+x^{2n}+\frac{x^{4n}}{2^{2n}}} = |x|$

设 $\frac{x}{2} = q$, 则 $|q| < 1$, 于是 $\exists N$, 当 $n > N$ 时 $|q|^n < \frac{1}{2}$, 即 $-\frac{1}{2} < q^n < 0$

此时 $x^{2n+1} < 1+x^{2n+1}+(\frac{x}{2} \cdot x)^{2n+1} < 1+x^{2n+1}-\frac{1}{2}x^{2n+1} = 1+\frac{1}{2}x^{2n+1}$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{x^{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{1+\frac{1}{2}x^{2n+1}} = x$ 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{1+x^{2n+1}+\frac{x^{2(2n+1)}}{2^{2n+1}}} = x$

于是此时极限不存在

对于 $-1 < x < 1$, 易知 $(1+x^n+\frac{x^{2n}}{2^n}) \in (0, \frac{5}{2})$, 于是 $G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n+\frac{x^{2n}}{2^n}} = 1$

对于 $1 \leq x \leq 2$, $x^n < 1+x^n+\frac{x^{2n}}{2^n} \leq x^n+x^n+x^n$ 于是 $G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n+\frac{x^{2n}}{2^n}} = x$

对于 $x > 2$, $\frac{x^{2n}}{2^n} < 1+x^n+\frac{x^{2n}}{2^n} < \frac{x^{2n}}{2^n}+\frac{x^{2n}}{2^n}+\frac{x^{2n}}{2^n}$ 于是 $G(x) = \frac{x^2}{2}$

对于 $x < -2$, $-\frac{1}{2}\frac{x^{2n}}{2^n}+\frac{x^{2n}}{2^n} < 1+x^n+\frac{x^{2n}}{2^n} < \frac{x^{2n}}{2^n}+\frac{x^{2n}}{2^n}+\frac{x^{2n}}{2^n}$ 于是 $G(x) = \frac{x^2}{2}$

$$\text{综上 } G(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1 \\ x, & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{x^2}{2}, & |x| > 2 \end{cases}$$

13. 解: $x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$

$y_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$

由 $x_n \leq z_n \leq y_n$ 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$

14. 解:

(1) 注意到对 $\forall n \geq 2$, $\frac{n}{n-1} / \frac{n+1}{n} = \frac{n^2}{(n-1)(n+1)} > 1$ 于是 $\frac{n}{n-1} > \frac{n+1}{n}$

$0 < x_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{1}{2n} < \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{2n-2}{2n-3} \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{x_n} \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{2n} < \frac{1}{x_n} \cdot \frac{1}{n}$

于是 $x_n^2 < \frac{1}{n}$ 即 $x_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

(2) $\frac{2n+2}{\sqrt{(n+1)^2}} < \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{2n+2}{\sqrt{n^2}}$ 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{n} = 2 = \frac{2n+2}{n+1}$ 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$

(3) $\sqrt[n]{n \ln n} = e^{\ln \sqrt[n]{n \ln n}}$, 转而讨论 $\ln \sqrt[n]{n \ln n} = \frac{\ln(n \ln n)}{n} = \frac{\ln n + \ln \ln n}{n}$

对于 $n \geq 1$ 且 $n \in \mathbb{N}$, 由 $\sqrt{x} > \ln x \quad (x > 0)$ 可知 $\ln n < \sqrt{n}$

又由 $x > \ln x \quad (x > 0)$ 可知 $\ln \ln n < \ln n < \sqrt{n}$

于是对于 $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{\ln n + \ln \ln n}{n} < \frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}}$

由夹逼收敛原理可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{n \ln n} = 0$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln \sqrt[n]{n \ln n}} = e^0 = 1$

15. 证: $\{x_n\}$ 收敛, 根据Cauchy收敛准则, $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n, m > N_1$ 时

有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$

$\{y_n\}$ 发散, 于是 $\exists 2\varepsilon > 0, \forall N_2 \in \mathbb{N}, \exists n_0, m_0 > N_2$ 使得 $|y_{n_0} - y_{m_0}| \geq 2\varepsilon$

于是对于 $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n_0, m_0 > N$ 使得 $|x_{n_0} + y_{n_0} - x_{m_0} - y_{m_0}| \geq |x_{n_0} - x_{m_0}| - |y_{n_0} - y_{m_0}| \geq \varepsilon$

即 $\{x_n + y_n\}$ 发散

如 $x_n = \frac{1}{n}, y_n = n$ 但 $x_n y_n = 1$ 收敛; 如 $x_n = n, y_n = -n$ 但 $x_n + y_n = 0$ 收敛

如 $x_n = \cos n\pi, y_n = (-1)^n$ 但 $x_n y_n = 1$ 收敛

如 $x_n = \ln n$ 为无穷大量 但令 $y_n = \frac{1}{n}$ 则 $x_n y_n = \frac{\ln n}{n}$ 为无穷小量

16. 证: 当 $n=1$ 时, $0 < x_1 < \frac{1}{A}$

假设对于 $n=k$ 时也有 $0 < x_k < \frac{1}{A}$

则 $0 < Ax_k < 1$, 于是 $2 - Ax_k > 1$, 所以 $x_{k+1} = x_k(2 - Ax_k) > 0$

作差 $x_{k+1} - \frac{1}{A} = x_k(2 - Ax_k) - \frac{1}{A} = -Ax_k^2 + 2x_k - \frac{1}{A}$ (1)

将(1)式看做关于 x_k 的二次方程, 则由 $\frac{1}{A} > 0$, 即 $A > 0$ 可知开口向下

且判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 = 0$, 于是方程的根为 $x_k = \frac{1}{A}$

那么对于 $0 < x_k < \frac{1}{A}$, 上式恒小于零, 即 $x_{k+1} - \frac{1}{A} < 0$

于是 $0 < x_{k+1} < \frac{1}{A}$

由数学归纳法可知对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < x_n < \frac{1}{A}$

于是 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 2 - Ax_n > 1$, 即 x_n 严格单调上升

由单调收敛原理可知 $\{x_n\}$ 收敛

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(2 - Ax_n) = 2a - Aa^2$

$$\therefore a = \frac{1}{A}$$

17. 证: 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 设 $q_n = 1 - a_n$, $0 < a_n < 1$, 于是 $(1 - q_n)q_{n+1} = a_n q_{n+1} > \frac{1}{4}$

即 $q_{n+1} > \frac{1}{4a_n}$, 又由 $0 < q_{n+1} < 1$ 可得 $\frac{1}{4a_n} < 1$, 即 $\frac{1}{4} < a_n < 1$

于是 $q_n \in (0, \frac{3}{4})$. 对于 $(1 - q_n)q_{n+1} > \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow 4(1 - q_n) > \frac{1}{q_{n+1}} \Rightarrow 4(q_n - q_n^2) > \frac{q_n}{q_{n+1}} > 0$$

由二次函数性质可知对于 $q_n \in (0, \frac{3}{4})$, $4(q_n - q_n^2) \leq 1$

$\therefore \frac{q_n}{q_{n+1}} < 1$ 于是 $\{q_n\}$ 单调上升, 于是 $\{q_n\}$ 极限存在

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = a$, 由极限的保序性可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q_n)q_{n+1} = a - a^2 \geq \frac{1}{4}$

即 $-a^2 + a - \frac{1}{4} \geq 0$, 对于二次方程 $(-a^2 + a - \frac{1}{4})$ 其判别式 $\Delta = 0$

因此有且仅有一个根 $a = \frac{1}{2}$, 开口向下, 即 $-a^2 + a - \frac{1}{4} \leq 0$

于是 $a = \frac{1}{2}$

18. 解: (1) 首先利用数学归纳法证明 $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < 2$

$n=1$ 时 $a_1 = \sqrt{2} < 2$; 假设 $n=k$ 时成立

对于 $n=k+1$, $a_{k+1} = \sqrt{2a_k} < \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

于是对于 $\forall n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_n < 2$, 那么 $a_{n+1}/a_n = \sqrt{2/a_n} > 1$, 即 $\{a_n\}$ 单调上升

故 a_n 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2a_n} \Rightarrow a = \sqrt{2a} \Rightarrow a = 2$

(2) 同(1)可证极限为 2

19. 证: 利用数学归纳法及均值不等式很容易证明 $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < a_n < b_n$

$$\text{其次 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{b_n}{a_n}} > 1; \quad b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n) < 0$$

于是 $\{a_n\}$ 单调上升, $\{b_n\}$ 单调下降

且 $0 < a_1 < a_n < b_n < b_1$, 于是 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都有极限

$$\text{设 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n \cdot b_n} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\text{由于 } a > a_1 > 0 \text{ 于是 } \sqrt{a} = \sqrt{b} \Rightarrow a = b$$

$$20. (1) \text{ 法一: } \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{2n+1} = \frac{1}{\left(\frac{n-1}{n-2}\right)^{2n+1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-2}\right)^{n-2} \left(1+\frac{1}{n-2}\right)^{n-1} \left(1+\frac{1}{n-2}\right)}, \quad (n > 2)$$

$$\text{于是利用 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \text{ 可知 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{2n+1} = \frac{1}{e \cdot e \cdot 1} = e^{-2}$$

法二: 考查序列 $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1+\frac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{e}$$

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]^2 \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^3 = \left(\frac{1}{e}\right)^2 \cdot 1 = e^{-2}$$

注: 利用 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$ 可以简化很多问题, 这个极限更一般的形式将在下章出现

(2) 注意, 以下做法是错误的

$$\times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e} = 1 \quad \text{极限的四则运算针对的是有限次}$$

正解如下 (不唯一)

由 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 的单调性可知 $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ 也是单调上升的, 又由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ 可知有上界 e

$$\text{于是对于 } n \in \mathbb{N}, \sqrt[n]{2} \leq \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \leq \sqrt[n]{e}$$

$$\text{因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e}, \text{ 所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$$

$$(3) \text{ 对于 } \forall n \in \mathbb{N}, 2^n \leq \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty \text{ 可知 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty$$

21. 证:

① A 为有界实数

对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $\left| \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ 且 $b_n > 0$

即 $A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} < A + \frac{\varepsilon}{2}$, 由 $\{b_n\}$ 严格递增可知 $b_n - b_{n-1} > 0$

于是有 $(b_i - b_{i-1})(A - \frac{\varepsilon}{2}) < a_i - a_{i-1} < (b_i - b_{i-1})(A + \frac{\varepsilon}{2})$, $i = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, n$

将这些式子作和可得 $(b_n - b_{N_1})(A - \frac{\varepsilon}{2}) < a_n - a_{N_1} < (b_n - b_{N_1})(A + \frac{\varepsilon}{2})$

$$\text{即 } \left| \frac{a_n - a_{N_1}}{b_n - b_{N_1}} - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

再注意到 $\frac{a_n}{b_n} = \left(\frac{a_n - a_{N_1}}{b_n - b_{N_1}} \right) \cdot \left(\frac{b_n - b_{N_1}}{b_n} \right) + \frac{a_{N_1}}{b_n}$

推出
$$\begin{aligned} \frac{a_n}{b_n} - A &= \left(\frac{a_n - a_{N_1}}{b_n - b_{N_1}} - A \right) \cdot \left(\frac{b_n - b_{N_1}}{b_n} \right) + \frac{a_{N_1}}{b_n} - \frac{b_{N_1}}{b_n} A \\ &= \left(\frac{a_n - a_{N_1}}{b_n - b_{N_1}} - A \right) \cdot \left(1 - \frac{b_{N_1}}{b_n} \right) + \frac{a_{N_1} - b_{N_1} A}{b_n} \quad (\text{这里 } N \text{ 为任意正整数}) \end{aligned}$$

对于 $M = \max \left\{ 1, \frac{2|a_{N_1} - b_{N_1} A|}{\varepsilon} \right\}$, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_2$ 时 $b_n > M$ (M 的选取方式避免了 $a_{N_1} - b_{N_1} A$ 的情况)

取 $N = \max \{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - A \right| \leq \left| \frac{a_n - a_{N_1}}{b_n - b_{N_1}} - A \right| \cdot \left(1 - \frac{b_{N_1}}{b_n} \right) + \frac{|a_{N_1} - b_{N_1} A|}{b_n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A$$

② $A = \pm \infty$ (只证 $+\infty$ 的情况, $-\infty$ 同理)

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = +\infty$ 可知 $\exists N_1$, $n > N_1$ 时 $\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} > 0$, 由于 $b_n - b_{n-1} > 0$, 于是 $a_n - a_{n-1} > 0$

即 $\{a_n\}$ 从第 N_1 项开始严格单调递增, 对于 $M_1 > 1$, $\exists N_2 \geq N_1$, 使得 $\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} > M_1 > 1$

即 $a_n - a_{n-1} > b_n - b_{n-1}$. 对于 $\forall M > 0$, 取 $M_2 = \max \{M, M - a_{N_2} + b_{N_2}\}$, 则 $\exists N \geq N_2$, 当 $n > N$ 时

$$\begin{aligned} M_2 < b_n &= b_{N_2} + b_{N_2+1} - b_{N_2} + b_{N_2+2} - b_{N_2+1} + \dots + b_n - b_{n-1} < b_{N_2} + a_{N_2+1} - a_{N_2} + \dots + a_n - a_{n-1} \\ &= a_n - a_{N_2} + b_{N_2} \end{aligned}$$

于是 $a_n > M$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ 且从某一项开始严格单调

由于改变数列的有限项不改变其敛散性, 收敛时不改变极限值, 于是令 $a'_1 < a'_2 < \dots < a'_n$, 替代 $a_1 \dots a_{N_1}$ 形成序列 $\{a'_n\}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a'_n - a'_{n-1}}{a'_n - a'_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{a_n - a_{n-1}} = 0$, 由 (1) 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ (其正负性由以上的讨论是易得的)

22. (1) 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln n - \ln(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{n-1})^n} = 1$ 且 $\{\ln n\}$ 严格递增趋于 $+\infty$

于是由 Stolz 定理可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1$

(2) $\{\sqrt{n}\}$ 严格递增趋于 $+\infty$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n - \sqrt{n^2 - n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n^2 - n}}{n} = 2$

由 Stolz 定理可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = 2$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)^2}{n^3 - (n-1)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 4n + 1}{3n^2 - 3n + 1} = \frac{4}{3}$; $\{n^3\}$ 严格递增趋于 $+\infty$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2}{n^3} = \frac{4}{3}$

23. 证: 法一: $f(x)$ 在 (a, b) 内严格递增 $\Leftrightarrow \forall \xi', \xi'' \in (a, b)$, 当 $\xi' < \xi''$ 时有 $f(\xi') < f(\xi'')$

对于 $[\xi', \xi'']$ 上每一个点都存在题中所设的开邻域, 于是这些开邻域组成了

$[\xi', \xi'']$ 的一个开覆盖, 由有限覆盖定理可知存在有限子覆盖 $\{E_i\}_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$ 使得

$[\xi', \xi''] \subseteq \bigcup_{i=1}^n E_i$, 若有 $E_j \subseteq \bigcup_{i \neq j} E_i$, 则删去 E_j , 这样就删去了多余的开区间

最后得到 $E_1, E_2, \dots, E_n$. 注意到这些开区间都是以 $[\xi', \xi'']$ 上的点为中心的开区间

邻域, 记这些点为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ (两两互异), 再以大小顺序从小到大排序得到

$x'_1, x'_2, \dots, x'_n$, 对应的开邻域记为 $E'_1, E'_2, \dots, E'_n$, 则此时下角标相邻的开区间有

不为空的交集, 不相邻的开区间交集为空. 则 $\exists a_i \in E_i \cap E_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1$, 使得

$x'_i < a_i < x'_{i+1}$, 注意到 $\xi' \leq x'_1$ 且 $\xi' \in E'_1$; $x'_n \leq \xi''$ 且 $\xi'' \in E'_n$

于是 $f(\xi') \leq f(x'_1) < f(a_1) < f(x'_2) < f(a_2) < \dots < f(a_{n-1}) < f(x'_n) \leq f(\xi'')$

即 $\xi', \xi'' \in (a, b)$ 且 $\xi' < \xi''$ 时有 $f(\xi') < f(\xi'')$

法二: 若 $\exists \xi', \xi'' \in (a, b)$ 满足 $\xi' < \xi''$ 但 $f(\xi') \geq f(\xi'')$. 取中点 $\frac{\xi' + \xi''}{2}$, 若 $f(\frac{\xi' + \xi''}{2}) \geq f(\xi'')$

则记 $a_1 = \frac{\xi' + \xi''}{2}, b_1 = \xi''$; 若 $f(\frac{\xi' + \xi''}{2}) < f(\xi'')$, 则记 $a_1 = \xi', b_1 = \frac{\xi' + \xi''}{2}$. 此时 $a_1 < b_1$

且 $f(a_1) \geq f(b_1)$. 重复以上的方法得到一系列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$.

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi' + \xi''}{2^n} = 0$, 于是根据闭区间套定理可知存在唯一的一点 $c \in \mathbb{R}$, 使得

$\{c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. 由题记 $\delta > 0$ 且 $\delta < \min\{c - a, b - c\}$ 满足 $\forall x_1 \in (c - \delta, c), f(x_1) < f(c)$,

$\forall x_2 \in (c, c + \delta), f(x_2) > f(c)$. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$ 且 $a_n \leq c \leq b_n$ 可知 $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时

$c - \delta < a_n \leq c \leq b_n < c + \delta$, 则 $f(a_n) \leq f(c) \leq f(b_n)$, 又因为 $b_n > a_n$, 于是等号不全成立, 即 $f(a_n) < f(b_n)$, 由闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 的构造方法可知 $f(a_n) \geq f(b_n)$, 矛盾.

于是 $\forall \xi', \xi'' \in (a, b)$, 当 $\xi' < \xi''$ 时有 $f(\xi') < f(\xi'')$.

24. 证: 设 M 为非空实数集 E 的一个上界, 即 $\forall x \in E$, 有 $x \leq M$.

若 E 中存在最大数 M_1 , 则 $\sup E = \max E = M_1$.

若 E 中无最大值, 由 $E \neq \emptyset$, 任取 $x_0 \in E$, 对于闭区间 $[x_0, M]$ 做二等分

若 $[\frac{x_0+M}{2}, M] \cap E \neq \emptyset$, 则记 $[\frac{x_0+M}{2}, M] = [a_1, b_1]$, 否则记 $[x_0, \frac{x_0+M}{2}] = [a_1, b_1]$

对 $[a_1, b_1]$ 二等分, 采用同样的方法得到 $[a_2, b_2]$, 一直重复下去得到一闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M - x_0}{2^n} = 0$, 由闭区间套定理可知存在唯一的一点 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $c \in [a_n, b_n], n=1, 2, \dots$.

下面证明 $c = \sup E$

首先证明 $\forall b_n$ 均是 E 的上界, $\forall a_n$ 必有 $x_n \in E$ 且 $x_n \geq a_n$. 当 $n=1$ 时, 若 $[a_1, b_1] = [\frac{x_0+M}{2}, M]$

则 $b_1 = M$ 为 E 的上界, 由 $\frac{x_0+M}{2} > x_0$ 可知若 $\frac{x_0+M}{2} \notin E$, 则 $\exists x_1 > \frac{x_0+M}{2}$ 且 $x_1 \in E$

否则 $[a_1, b_1] \cap E = \emptyset$, 与构造的条件不符, 若 $\frac{x_0+M}{2} \in E$, 则令 $x_1 = \frac{x_0+M}{2}$.

若 $[a_1, b_1] = [x_0, \frac{M+x_0}{2}]$, 令 $x_1 = x_0$. 对于 $\frac{M+x_0}{2}$, 若 $\exists x_1 \in E$ 使得 $x_1 > \frac{M+x_0}{2}$

那么 $[\frac{x_0+M}{2}, M] \cap E \neq \emptyset$, 至少有 x_1 属于这个交集, 与构造的条件不符, 于是

$\forall x \in E$ 都有 $x \leq \frac{x_0+M}{2}$, 即 b_1 为 M 的上界.

于是 $n=1$ 时成立. 假设 $n=k$ 时成立, 那么对于 $n=k+1$ 时的情况

若 $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [\frac{a_k+b_k}{2}, b_k]$, 则同上可得成立

若 $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}]$, 此时需要注意, a_k 不一定属于 E . 假设不存在 $x_{k+1} \in E$ 使得 $x_{k+1} \geq a_{k+1}$ 那么与 $n=k$ 时成立的条件矛盾, 于是 $\exists x_{k+1} \in E$ 有 $x_{k+1} \geq a_{k+1}$. b_{k+1} 的证明同上

由数学归纳法可知 $\forall n \in \mathbb{N}$, 均有 b_n 为 E 的上界, $\exists x_n \in E$ 使得 $x_n \geq a_n$

对于 $\forall x \in E$, 均有 $x \leq b_n$, 由极限的保序性可知 $x \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$, 于是 c 是 E 的上界

对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时 $c - \varepsilon < a_n < c$, 由上可知 $\exists x_n \in E$ 使得 $x_n \geq a_n$

于是 $c - \varepsilon < a_n \leq x_n$ 于是 c 为 E 的上确界

下确界的证明同理.

25. 证: 设 $\mathbb{R}$ 的一个有界无穷子集 $E \subseteq [-M, M]$, 其中 $M > 0$. 记 $[a, b] = [b, a], a > b$.

令 $P = \{x | [x, M] \cap E \text{ 为无穷集}\}$, 则 M 为 P 的一个上界. 由 $[-M, M] \cap E = E$ 为无穷集可知

$-M \in P$. 于是 P 非空, 有上界. 由确界存在定理可知 P 有上确界, 记为 $\sup P = s$.

$\forall \delta > 0$, 存在 $x' \in P$ 使得 $x' > s - \delta$ 且 $[x', M] \cap E$ 为无穷集, 因为 $(s - \delta, M] \supseteq [x', M]$,

所以 $(s - \delta, M] \cap E$ 为无穷集. 由于 $\sup P = s$, 于是 $s + \delta \notin P$, 即 $[s + \delta, M] \cap E$ 为有限集

于是 $(s - \delta, s + \delta) \cap E$ 为无穷集, 则 s 为 E 的一个聚点.

26. 解: 对于任意给定的 $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a_N| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ 于是 } n, m > N \text{ 时有 } |a_n - a_m| \leq |a_n - a_N| + |a_m - a_N| < \varepsilon$$

所以 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 序列.

27. (1) $\forall \varepsilon > 0, \exists N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, 对于 $\forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$, 若 p 是奇数, 则

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} (-1)^{i-1} \frac{1}{i} \right| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \cdots - \frac{1}{n+p-1} + \frac{1}{n+p} \\ &= \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) - \cdots - \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) \\ &\leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon \end{aligned}$$

若 p 是偶数, 则 $|x_{n+p} - x_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} (-1)^{i-1} \frac{1}{i} \right| = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right)$

$$< \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

于是对于 $\forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, 于是 x_n 为 Cauchy 序列, 收敛.

(2) 当 $q = 0$ 时, 显然收敛; 当 $q \neq 0$ 时, 由于 $|q| < 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = 0$. 由 $\{a_n\}$ 有界设 $|a_n| \leq M$ 其中 $M > 0$. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\varepsilon_1 = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2M}, \frac{(1-q)\varepsilon}{M} \right\} > 0$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时有

$|q|^n < \varepsilon_1$. 此时对于 $\forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$, 有

$$|x_{n+p} - x_n| = |a_{n+1}q^{n+1} + \cdots + a_{n+p}q^{n+p}| \leq M |q^{n+1} + \cdots + q^{n+p}| = M \left| \frac{q^{n+1}(1-q^p)}{1-q} \right| \quad (1)$$

若 $-1 < q < 0$, 则 (1) 式 $< M |q^{n+1}(1-q^p)| < 2M |q|^{n+1} < 2M \varepsilon_1 \leq \varepsilon$

若 $0 < q < 1$, 则 (1) 式 $< M \cdot \frac{1}{1-q} \cdot |q|^{n+1} < \frac{M}{1-q} \varepsilon_1 \leq \varepsilon$

于是对于 $\forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, 于是 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 序列, 收敛

(3) $\forall \varepsilon > 0, \exists N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, 当 $n > N$ 时, 对于 $\forall p \in \mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{\sin[(n+1)x]}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{\sin[(n+p)x]}{(n+p)^2} \right| \leq \left| \frac{1}{(n+1)^2} \right| + \cdots + \left| \frac{1}{(n+p)^2} \right| \\ &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon \end{aligned}$$

同上可知 x_n 为 Cauchy 序列, 收敛

(4) $\forall \varepsilon > 0, \exists N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, 对于 $\forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{\sin(n+1)x}{(n+1)(n+1+\sin(n+1)x)} + \cdots + \frac{\sin(n+p)x}{(n+p)(n+p+\sin(n+p)x)} \right| \leq \frac{1}{(n+1)n} + \cdots + \frac{1}{(n+p)(n+p-1)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon \end{aligned}$$

同上.

28. $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}$, 都有 $n, m > N$ 使得 $|x_n - x_m| \geq \varepsilon_0$.

29. 证: 由于 $\{a_n\}$ 有界, 根据 Bolzano-Weierstrass 定理可知存在一个子序列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛, 设其极限为 c . 由于 $\{a_n\}$ 发散, 即 c 不为 $\{a_n\}$ 的极限, 则 $\{a_n\}$ 中有无穷多项属于 $[a, b] \setminus [c - \varepsilon_0, c + \varepsilon_0]$, 其中 $\varepsilon_0 > 0$ 为某一常数.

令这无穷多项为 $\{a_{n'_k}\}$, 则 $\{a_{n'_k}\}$ 有界, 故存在收敛的子序列 $\{a_{n''_k}\}$, 设其极限为 c' , 则 $c' \neq c$ 且 $\{a_{n''_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的子序列, 故 $\{a_{n''_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的子序列.

30. 证: 对于 $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \sin \frac{n\pi}{4}$

考察子序列 $x_{n_k} = (-1)^{4k} \left(1 + \frac{1}{4k}\right)^{4k} + \sin \frac{4k\pi}{4}, k = 1, 2, \dots$

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = e$$

考察另一子序列 $x_{n'_k} = (-1)^{2+8k} \left(1 + \frac{1}{2+8k}\right)^{2+8k} + \sin \frac{(2+8k)\pi}{4}, k = 1, 2, \dots$

$$\lim_{n'_k \rightarrow \infty} x_{n'_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n'_k} = e + 1. \text{ 于是 } \{x_n\} \text{ 发散.}$$

对于 $x_n = \begin{cases} n, & n=2k-1 \\ 1/n, & n=2k \end{cases}$, 易知其下角标为奇数的项组成的子序列趋于正无穷
下角标为偶数的项组成的子序列趋于零
所以发散

31. (1) 对于上下极限的计算, 往往靠观察具体例子的具体特性, 有的时候很直观, 容易求出. 有的时候比较复杂, 难以判断. 这里主要给出求上下极限的几种具体思路.

$x_n = \frac{n^2}{1+n^2} \cos \frac{n\pi}{2}$, 注意到 $\frac{n^2}{1+n^2}$ 恒正, 严格上升趋于 1

$\cos \frac{n\pi}{2}$ 在 $0, -1, 0, 1$ 之间波动, 于是 $|x_n| \leq 1$

取 $x_{n_k} = \frac{(4k)^2}{1+(4k)^2} \cos \frac{4k\pi}{2}, k = 1, 2, \dots$. 于是 $\lim_{n_k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = 1$

由上极限的性质可得 $1 = \lim_{n_k \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$. 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$

取 $x_{n'_k} = x_{(2+4k)}, k = 1, 2, \dots$, 再利用 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n'_k \rightarrow \infty} x_{n'_k}$. 同上可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$.

(2) 取 $x_{n_k} = 4k + 4k \cos 4k\pi + \sin \frac{4k\pi}{4}, k = 1, 2, \dots$

则 $x_{n_k} = 8k \rightarrow +\infty (k \rightarrow +\infty)$, 于是 $\lim_{n_k \rightarrow \infty} x_{n_k} = +\infty$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n_k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ 可知
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$

$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin \frac{n\pi}{4} \leq n + n \cos n\pi + \sin \frac{n\pi}{4}$, 取 $x_{n'_k} = x_{(5+8k)}$, 同 (1) 可知 $\lim_{n'_k \rightarrow \infty} x_{n'_k} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$(3) x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2} = \begin{cases} \frac{-1}{2k-1}, & n=2k-1 \\ \frac{1}{2k}+1, & n=2k \end{cases}$$

于是可直接由 $\sup_n \inf_k \{x_{n+k}\} = 0, n=1, 2, \dots, k=0, 1, 2, \dots$ 得出 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

同理 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_n \sup_k \{x_{n+k}\} = 1, n=1, 2, \dots, k=0, 1, 2, \dots$

或采用前两题的思路 取 $x_{n_k} = \frac{-1}{2k-1}, y_n = \frac{-1}{n}$, 则 $y_n \leq x_n$

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n_k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{n_k \rightarrow \infty} x_{n_k} = 0$$

同样的可求出上极限.

$$(4) \text{取 } x_{n_k} = (2k)^{(-1)^{2k}} = 2k, k=1, 2, \dots, \text{则 } +\infty = \lim_{n_k \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

$$\text{取 } x_{n_k} = (2k-1)^{-1}, k=1, 2, \dots, y_n = n^{-1}, \text{则 } y_n \leq x_n$$

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n_k \rightarrow \infty} x_{n_k} = 0$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

32. 证: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在 (题目中未特别说明, 指的是有穷极限. 但在这里也对广义收敛的情况做一个说明)

有穷极限: $\{x_n\}, \{y_n\}$ 有界, 于是应用上下极限的运算性质

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

即可得出结论.

广义极限: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 那么 $\{x_n + y_n\}$ 无上界, 按规定 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = +\infty$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 为有限实数, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, 设 $y_n \in [-m, m], m > 0$. 则 $\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}$. 当 $n > N$ 时 $x_n < -M - m$

此时 $x_n + y_n < -M$. 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = -\infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = -\infty$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 为有限实数

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

由于书中应对 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ 做出定义, 在此不做讨论. 事实上若存在

子列 $\{a_{n_k}\}$ 与 $\{a_{n'_k}\}$ 使得 $\lim_{n_k \rightarrow \infty} a_{n_k} = -\infty, \lim_{n'_k \rightarrow \infty} a_{n'_k} = +\infty$, 那么本身就有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, 再定义 ∞ 并无意义.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 为有限实数:

因为 $x_n \geq 0, y_n \geq 0$, 且 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 都有界, 于是根据上、下极限的运算性质

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} y_n = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} x_n \cdot \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} y_n \leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} (x_n \cdot y_n) \leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} x_n \cdot \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} y_n$$

即可得出结论

广义收敛: 由于 $x_n \geq 0$, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$

若 $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} y_n = 0$, 则 $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} y_n = 0$, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} y_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

而此时单从形式上来看的话 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty \cdot 0$ 为不定式, 需要针对具体例子具体讨论.

例如 $x_n = n, y_n = 1/n$ 时, $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} (x_n y_n) = 1$

$x_n = n, y_n = 1/n^2$ 时, $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} (x_n y_n) = 0$

$x_n = n, y_n = 1/\sqrt{n}$ 时, $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} (x_n y_n) = +\infty$

若 $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} y_n = a > 0$, 那么存在子列 $\{y_{n_k}\}$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = a$, 于是 $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n_k > N_1$

时 $\frac{a}{2} < y_{n_k} < \frac{3}{2}a$. 对于 $\forall \frac{2M}{a} > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_2$ 时 $x_n > \frac{2M}{a}$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n_k > N$ 时, 由于 $n_k \geq n$, 于是 $x_{n_k} y_{n_k} > M$

则 $\{x_{n_k} y_{n_k}\}$ 趋于正无穷, 于是 $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} (x_n y_n) = +\infty$

由于 a 为大于零的有限实数, 所以 $a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} y_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} (x_n y_n)$

33. 证: 这道题必须注意以下逻辑错误, 这里以一种错解来展示.

若对于任何序列 $\{y_n\}$ 成立 $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} (x_n + y_n) = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} x_n + \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} y_n$, 取 $y_n = -x_n$

则 $0 = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} (x_n + y_n) = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} x_n + \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} (-x_n) = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 即 $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

若成立 $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} (x_n y_n) = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} x_n \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} y_n$. 首先在 $\{x_n\}$ 中有子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} x_n$

令 $y_n = \begin{cases} 1, & \text{当 } n = n_k \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } n \neq n_k \text{ 时} \end{cases}$. 则 $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} y_n = 1$, 且 $x_n \cdot y_n = \begin{cases} x_{n_k}, & \text{当 } n = n_k \\ 0, & \text{当 } n \neq n_k \end{cases}$. 于是 $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

于是 $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} x_n \cdot 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

综上, 均有 $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. 于是 $\{x_n\}$ 收敛. (错解)

以上错解在于人为的加强了题目的条件,使得等式(1)恒成立或等式(2)恒成立.

正解:假设 $\{x_n\}$ 不收敛,则根据上、下极限的性质可知

$\exists \{x_{n_k}\}$ 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a \geq 0$, $\exists \{x_{n_j}\}$ 使得 $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = b > a \geq 0$

取 $y_n = \begin{cases} -a, & n = n_k \\ -x_n, & n \neq n_k \end{cases}$. 于是 $(x_n + y_n) = \begin{cases} x_n - a, & n = n_k \\ 0, & n \neq n_k \end{cases}$. 易知 $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} - a) = 0$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = 0$. 又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -a$, 由题设可知

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b - a > 0$, 矛盾. 于是必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = -ab$.

$x_n \cdot y_n = \begin{cases} -a x_n, & n = n_k \\ -x_n^2, & n \neq n_k \end{cases}$. 由上极限的性质可得, 对于任意收敛的子序列都有 $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} y_{n_i} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = -ab$

但显然有 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} y_{n_k} = -a^2 > -ab$. 所有矛盾均来自于假设, 于是 $\{x_n\}$ 收敛.

34. 证: $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot \frac{1}{x_n}) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot \frac{1}{x_n}) = 1$

(由于 $x_n > 0$, 故 $\frac{1}{x_n} > 0$, 于是以上不等式成立)

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n}$. 易知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \neq 0$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\{x_n\}$ 收敛

35. 证: 对于 $l, L \in [1, L]$, 由题设可证.

对于 $\forall \zeta \in (l, L)$, 假设 $\exists \zeta_0 \in (l, L)$ 使得: $\exists \varepsilon_0 > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时 $|x_n - \zeta_0| \geq \varepsilon_0$.

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ 可知对于上述 ε_0 , $\exists N_2 \geq N_1$, 当 $n > N_2$ 时 $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon_0$.

于是当 $n > N_2$ 时, 要么 $\forall x_n$ 均有 $x_n \leq \zeta_0 - \varepsilon_0$, 要么 $\forall x_n$ 均有 $\zeta_0 + \varepsilon_0 \leq x_n$

于是要么 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n < L$ 要么 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n > l$, 矛盾.

所以不存在假设中的点 $\zeta_0 \in (l, L)$, 即 $\forall \zeta \in (l, L)$, 对于 $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n_k > N$

使得 $|x_{n_k} - \zeta| < \varepsilon$, 即存在一个子列收敛于 ζ .

综上所述得证.

36. 证: 充分性: 若序列 $\{x_n\}$ 收敛, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} qx_n = qa$
 对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |qx_n - qa| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\text{于是当 } n > N \text{ 时, } |y_n - a + qa| = |x_{n+1} - qx_n - a + qa| \\ \leq |x_{n+1} - a| + |qx_n - qa| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a - qa$$

必要性: $y_n = x_{n+1} - qx_n$, 由 $\{y_n\}$ 收敛可知 $\{x_{n+1} - qx_n\}$ 收敛

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - qx_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-qx_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - qx_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - qx_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} (-qx_n) \\ \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - qx_n)$$

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-qx_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} (-qx_n)$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} qx_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} qx_n$$

$$\text{由于 } 0 < q, \text{ 于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} qx_n = q \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} qx_n = q \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$\text{又易知 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$\text{于是 } (1-q) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (1-q) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

$$\text{由于 } q < 1, \text{ 于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow \{x_n\} \text{ 收敛.}$$

37. 证: 任取 $m \in \mathbb{N}$, 则对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 总有 $n = k \cdot m + r$ (其中 $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $r \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$)

由题设可得 $x_n \leq k \cdot x_m + x_r$

$$\text{于是有 } \inf_n \frac{x_n}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{k \cdot x_m}{n} + \frac{x_r}{n}, \text{ 因为 } \inf \left\{ \frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \dots \right\} \leq \inf_n \frac{x_n}{n}$$

$$\text{于是 } \inf_{i \geq 1} \frac{x_i}{i} \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{k \cdot x_m}{n} + \frac{x_r}{n}, \text{ 由于 } \forall i \in \mathbb{N}, \frac{x_i}{i} \geq 0, \text{ 于是 } \inf_{i \geq 1} \frac{x_i}{i} \text{ 为有限实}$$

$$\text{数. 令 } n \rightarrow +\infty, \text{ 则 } \inf_{i \geq 1} \frac{x_i}{i} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-r}{n} \cdot \frac{x_m}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_r}{n} = \frac{x_m}{m}$$

$$\text{由于任取 } m \in \mathbb{N} \text{ 都可得到此式, 于是 } \inf_{i \geq 1} \frac{x_i}{i} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} \leq \inf_{m \geq 1} \frac{x_m}{m}$$

$$\inf_{i \geq 1} \frac{x_i}{i} = \inf_{m \geq 1} \frac{x_m}{m}, \text{ 于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}, \text{ 收敛. 且极限为 } \inf_{i \geq 1} \frac{x_i}{i}$$

第三章 函数的极限与连续性

习题三

1. 证: (1) $\Rightarrow$ (2)

对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, 当 $n > N$ 时, $\frac{1}{n} < \varepsilon$

对于 $\forall \delta > 0$, $\exists N_2 = [\frac{1}{\delta}] + 1$, 当 $n > N_2$ 时, $\frac{1}{n} < \delta$

于是对于 $\forall \varepsilon > 0$, 任取 $n > N$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时

$$|f(x) - A| < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

对于上述 $\delta > 0$, 取 $n_0 > N_2$, 则 $\frac{1}{n_0} < \delta$

于是当 $0 < |x - x_0| < \frac{1}{n_0} < \delta$ 时

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

综上所述即对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 n_0 , 当 $0 < |x - x_0| < \frac{1}{n_0}$ 时,

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

(2) $\Rightarrow$ “定义”

对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{1}{n_0}$, 则 $0 < |x - x_0| < \delta = \frac{1}{n_0}$ 时

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

“定义” $\Rightarrow$ (1)

对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 令 $\frac{1}{n} = \varepsilon > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

于是题中所述的 (1)、(2) 与函数极限的定义等价.

2. 证: (1) 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon$, 当 $x \in U_0(a, \delta)$ 时

$$||x| - |a|| < \varepsilon, \text{ 于是 } \lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|$$

(2) 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 不妨设 $\delta \leq 1$, 注意到当 $x \in U_0(3, 1)$ 时

$$|x^3 - 27| = |x - 3| |x^2 + 3x + 9| < 37 |x - 3|$$

于是取 $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{37}\} > 0$, 当 $x \in U_0(3, \delta)$ 时

$$|x^3 - 27| < 37 |x - 3| < 37 \cdot (\min\{1, \frac{\varepsilon}{37}\}) \leq \varepsilon$$

故 $\lim_{x \rightarrow 3} x^3 = 27$.

(3) 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 不妨设 $\delta \leq 1$, 注意到当 $x \in U_0(4, 1)$ 时

$$|\sqrt{x}-2| = \frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2} < |x-4|$$

取 $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$. 则当 $x \in U_0(4, \delta)$ 时
有 $|\sqrt{x}-2| < |x-4| < \delta \leq \varepsilon$, 于是 $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$

3. (1) $f(x_0-0) = A$

A 为有限实数: 设 $f(x)$ 在 $U_0^-(x_0, \delta_0)$ ($\delta_0 > 0$) 上有定义. 对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $x \in U_0^-(x_0, \delta)$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 的左极限存在, A 称为 $f(x)$ 在点 x_0 的左极限.

记为 $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A$ 或 $f(x_0-0) = A$.

A 为 $\pm\infty$ (以 $-\infty$ 为例): 设 $f(x)$ 在 $U_0^-(x_0, \delta_0)$ ($\delta_0 > 0$) 上有定义, 对于 $\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $x \in U_0^-(x_0, \delta)$ 时, 有 $f(x) < -M$, 称 $f(x)$ 为当 x 从左侧趋于 x_0 时的负无穷大量, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = -\infty$ 或 $f(x_0-0) \rightarrow -\infty$

A 为 ∞ : 设 $f(x)$ 在 $U_0^-(x_0, \delta_0)$ ($\delta_0 > 0$) 上有定义, 对于 $\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $x \in U_0^-(x_0, \delta)$ 时, 有 $|f(x)| > M$, 称 $f(x)$ 为当 x 从左侧趋于 x_0 时的无穷大量, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \infty$ 或 $f(x_0-0) \rightarrow \infty$.

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

设 $f(x)$ 在 $U_0(x_0, \delta_0)$ ($\delta_0 > 0$) 上有定义. 若 $\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $x \in U_0(x_0, \delta)$ 时, 有 $f(x) < -M$, 则称当 x 趋于 x_0 时, $f(x)$ 趋于 $-\infty$.
记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ 或 $f(x) \rightarrow -\infty (x \rightarrow x_0)$.

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$

l 为有限实数: 设 $f(x)$ 在 $U^-(\infty)$ 上有定义, 对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists X \in U^-(\infty)$, 当 $x < X$ 时, 有 $|f(x) - l| < \varepsilon$, 则称当 x 趋于 $-\infty$ 时 $f(x)$ 的极限存在, 其极限为 l , 记为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ 或 $f(x) \rightarrow l (x \rightarrow -\infty)$

l 为 $\pm\infty$ (以 $+\infty$ 为例): 设 $f(x)$ 在 $U^-(\infty)$ 上有定义, 对于 $\forall M > 0, \exists X \in U^-(\infty)$ 当 $x < X$ 时, 有 $f(x) > M$. 称 $f(x)$ 为当 x 趋于 $-\infty$ 时的正无穷大量, 记为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ 或者 $f(x) \rightarrow +\infty (x \rightarrow -\infty)$

l 为 ∞ : 设 $f(x)$ 在 $U^-(\infty)$ 上有定义. 对于 $\forall M > 0, \exists X \in U^-(\infty)$, 当 $x < X$ 时, 有 $|f(x)| > M$. 称 $f(x)$ 为当 x 趋于 $-\infty$ 时的无穷大量, 记为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ 或者 $f(x) \rightarrow \infty (x \rightarrow -\infty)$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

设 $f(x)$ 在 $U(\infty)$ 上有定义. 对于 $\forall M > 0, \exists X \in U(\infty)$, 当 $|x| > |X|$ 时, $f(x) < -M$. 则称 $f(x)$ 为当 x 趋于 ∞ 时的负无穷大量, 记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ 或者 $f(x) \rightarrow -\infty (x \rightarrow \infty)$.

4. (1) 设 $f(x)$ 在 $U^+(\infty)$ 上有定义, $\exists M_0 > 0$, 使得对于 $\forall X \in U^+(\infty)$ $\exists x_0 > X, f(x_0) \leq M$

(2) 设 $f(x)$ 在 $U^+(a, \delta_0)$ ($\delta_0 > 0$) 上有定义. 对于 $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon_0 > 0$, 使得对 $\forall \delta > 0, \exists x_0 \in U^+(a, \delta)$, 有 $|f(x_0) - A| \geq \varepsilon_0$.

5. 证: 已知对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x \in U_0(a, \delta)$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

(1) 对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x \in U_0(a, \delta)$ 时 有 $||f(x)| - |A|| \leq |f(x) - A| < \varepsilon$. 故 $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |A|$

(2) 若 $A = 0$. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 则 $\varepsilon^3 > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x \in U_0(a, \delta)$ 时 $|f(x)| < \varepsilon^3$, 即 $|\sqrt[n]{f(x)}| < \varepsilon$. 故 $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = 0$

若 $A \neq 0$. 不妨设 $0 < \varepsilon < \frac{|A|}{2}$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in U_0(a, \delta)$ 时 由 $|f(x) - A| < \varepsilon < \frac{|A|}{2}$ 可知此时 $f(x) \cdot A > 0$

注意到此时 $|\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{A}| = \frac{|f(x) - A|}{|\sqrt[n]{f(x)}^2 + \sqrt[n]{f(x)} \cdot \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{A}^2|} \leq \frac{|f(x) - A|}{\sqrt[n]{A}^2}$

即 $|\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{A}| \leq \frac{|f(x) - A|}{\sqrt[n]{A}^2} < \frac{1}{\sqrt[n]{A}^2} \cdot \varepsilon$. 故 $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{A}$.

注: 同上一章, 若 C 为常数且 $C > 0$, 那么任意小的 ε 与任意小的 $C\varepsilon$ 并无本质区别, 若为了解答形式上的完美, 只需要自行调整过程中的系数.

$$6. (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x + 2}{2x^2 + x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x^2 - x + 2}{\lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 + x + 1} = 2 \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x + 5}{2x^3 + x^2 - 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^3}} = \frac{1}{2}$$

$$(3) \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t} - 1}{\sqrt[3]{t} - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(\sqrt[3]{t^2} + \sqrt[3]{t} + 1)}{(\sqrt{t} + 1)(t-1)} = \frac{3}{2}$$

$$(4) \lim_{t \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+t} - 2}{t - 3} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{(1+t-4)}{(\sqrt{1+t} + 2)(t-3)} = \frac{1}{4}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

$$(6) \text{当 } x \geq 0 \text{ 时, } \frac{-\sqrt{x}}{x+1} \leq \frac{\sqrt{x} \sin x}{x+1} \leq \frac{\sqrt{x}}{x+1}, \text{ 由夹逼收敛原理可得 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \sin x}{x+1} = 0$$

$$(7) \text{当 } x > 1 \text{ 时, } 0 < \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} < \frac{\sqrt{2x}}{x + \sqrt{x} + 1}, \text{ 由夹逼收敛原理可得 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} = 0$$

$$(8) \text{当 } x > 0 \text{ 时, } \sqrt{x + \sqrt{x} + \sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x} + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}} + 1} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (x \rightarrow +\infty)$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x} + \sqrt{x}} - \sqrt{x}) = \frac{1}{2}$$

$$7. (1) \text{对于 } 0 < x < 1, [\frac{1}{x}] \geq 1 \text{ 且 } \frac{1}{x} - 1 < [\frac{1}{x}] < \frac{1}{x} + 1$$

$$\text{于是 } 1 - x < x[\frac{1}{x}] < 1 + x, \text{ 由于 } \lim_{x \rightarrow 0+0} (1-x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} (1+x) = 0$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 0+0} x[\frac{1}{x}] = 0$$

(2) 这里计算出结果是较为容易的, 为加深印象, 给出用定义的证明.

不妨设 $f(x) = \frac{[x]^2 - 4}{x^2 - 4}$ 在 $U_0^-(2, 1)$ 上有定义, 此时对于 $\forall x \in U_0^-(2, 1)$,

$$f(x) = \frac{-3}{x^2 - 4}, \text{ 对于 } \forall M \geq 1, \exists \delta = 2 - \sqrt{\frac{-3}{M} + 4} \in (0, 1], \text{ 使得当 } x \in U_0^-(2, \delta) \text{ 时}$$

$$f(x) > f(\sqrt{\frac{-3}{M} + 4}) = M, \text{ 于是对于 } \forall M > 0, \text{ 取 } \delta = 2 - \sqrt{\frac{-3}{\max\{1, M\}} + 4}, \text{ 即可保}$$

$$\text{证 } x \in U_0^-(2, \delta) \text{ 时, } f(x) > \max\{1, M\} \geq M$$

$$8. (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \log x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x \cdot \sin \log x}{\log x} \cdot \frac{5x}{5x \cdot \sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{5x} = 2$$

$$(2) \text{利用 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \sin x \sim x, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x^2} = 1$$

注: (1), (2) 采用的两种方法, 本质是一样的, (1) 的解题过程实际上就是定理 3.4.2 的证明过程. 对于等价无穷小(大)量在求极限时的替换要熟练.

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x (1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sin x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \cdot (\frac{x}{2})^2}{x^3} = 1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{x \cdot \sin x} = 2$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{\cos x \cdot x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2}x^2}{\cos x \cdot x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2\cos x} = \frac{1}{2}$$

$$(6) \text{令 } 1-t=x, \text{ 则 } t=1-x, \text{ 于是 } \lim_{t \rightarrow 1} (1-t) \tan \frac{\pi}{2} t = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{\sin \frac{\pi}{2} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos \frac{\pi}{2} x}{\frac{\pi}{2} x} = \frac{2}{\pi}$$

$$(7) \text{令 } x-\pi=t, \text{ 则 } x=t+\pi, \text{ 于是 } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin m(t+\pi)}{\sin n(t+\pi)} = \lim_{t \rightarrow 0} (-1)^{m+n} \frac{\sin mt}{\sin nt} = (-1)^{m+n} \frac{m}{n}$$

$$(8) \text{令 } x - \frac{\pi}{4} = t, \text{ 则 } x = t + \frac{\pi}{4}, \text{ 于是 } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \tan t}{(1 - \tan t)t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{1 - \tan t} = 2$$

$$(9) \text{令 } \arccos x - \frac{\pi}{2} = t, \text{ 则 } \arccos x = t + \frac{\pi}{2}, x = \cos(t + \frac{\pi}{2}) = -\sin t$$

 于是 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(n \arccos x)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos n(t + \frac{\pi}{2})}{-\sin t}$, 由于 n 为奇数, 设 $|n| = n'$
 则上式 = $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos n'(t + \frac{\pi}{2})}{-\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} (-1)^{\frac{n'-1}{2}} \frac{\sin n't}{\sin t} = (-1)^{\frac{n'-1}{2}} \cdot n' = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n$

$$(10) \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2+1} + n\pi - n\pi)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \sin(\pi(\sqrt{n^2+1} - n))$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \sin(\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n})$$

= 0 (这里给出的是 $n \rightarrow +\infty$ 的解法, $n \rightarrow -\infty$ 时只需稍做调整, 这里并没有指出是数列, 所以 n 应当做定义在 $\mathbb{R}$ 上的变量, “ ∞ ”也不应默认为“ $+\infty$ ”)

此外,对于上述解答过程用到的变量代换的方法,这里再说明其正确性。(证明两种情况,其余同理)

① 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ (有限实数), 且 $x = g(t)$, $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = a$, 若 $t \rightarrow b$ 的过程中, 始终有 $g(t) \neq a$, 则 $\lim_{t \rightarrow b} f(g(t)) = A$ (若 $f(x)$ 在 a 处连续, 则可用“ $\sim$ ”标注的条件, 反例将在下文给出)

证: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, 使得当 $x \in U_0(a, \delta_1)$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$

对于上述 δ_1 , $\exists \delta_2 > 0$, 使得当 $t \in U_0(b, \delta_2)$ 时, 有 $|g(t) - a| < \delta_1$

由于 $g(t) \neq a$, 于是 $g(t) \in U_0(a, \delta_1)$

综上即: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $t \in U_0(b, \delta)$ 时, 有 $|f(g(t)) - A| < \varepsilon$.

于是 $\lim_{t \rightarrow b} f(g(t)) = A$ ($f(x)$ 在 a 处连续时自然可去掉“ $\sim$ ”)

② 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ (有限实数), 且 $x = g(t)$, $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = +\infty$, 则

$$\lim_{t \rightarrow b} f(g(t)) = A$$

证: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X \in U^+(\infty)$, 当 $x > X$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$

对于上述 X , $\exists \delta > 0$, 当 $t \in U_0(b, \delta)$ 时, $g(t) > X$

此时 $|f(g(t)) - A| < \varepsilon$

综上即: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $t \in U_0(b, \delta)$ 时, $|f(g(t)) - A| < \varepsilon$

于是 $\lim_{t \rightarrow b} f(g(t)) = A$

注意: 这里给出的结论要与书中定理 3.2.1 (复合函数的连续性) 进行区别与联系. 这里是极限存在, 条件弱于连续.

$$9. (1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{2x+1} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{4}{2x+1} \right)^{\frac{2x+1}{4}} \right]^4 \cdot \left[\frac{2x+1}{2x-3} \right] = \frac{1}{e^4}$$

注意: 很容易可推出 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x = \frac{1}{e}$. 上述解答过程中的构造依据的是极限“有限次”的四则运算.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{\frac{1}{2x}} \right]^2 = e^{-2}$$

(3) 利用 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - 1 \sim x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1 + 1 - e^{bx} + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{bx} - 1}{x} = a - b$$

(4) 利用 $x = e^{\ln x}$ 及 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x) \sim x$, $\sin x \sim x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{a}{x} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2x} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2 \ln(1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2x})}$$

$$\begin{aligned} \text{由于 } \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln(1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-2 \cdot x^2 \cdot \sin^2 \frac{a}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-2 \cdot x^2 \cdot \frac{a^2}{4x^2} \right) \\ &= -\frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

又因为 $f(t) = e^t$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 于是 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2 \ln(1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2x})} = e^{-\frac{a^2}{2}}$

注: 这里实际上是上一题所证结论的运用, 且这里 $f(t)$ 连续, 条件更强, 下面将以结论形式给出 (证明方法同上一题所延伸的内容)

若 $f(x)$ 在 x_0 连续, 且 $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = x_0$, 则 $\lim_{t \rightarrow b} f(g(t)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{t \rightarrow b} g(t))$

这里还需要注意, 若复合函数 $f(g(t))$ 是 $f(x)$ 在 x_0 处极限存在, $g(t)$ 在 b 处连续, 那么此时不一定有 $\lim_{t \rightarrow b} f(g(t)) = f(\lim_{t \rightarrow b} g(t))$

因为 $f(x)$ 在 x_0 处不一定连续, 也不一定有 $\lim_{t \rightarrow b} f(g(t)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

$$\begin{aligned} (5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\left(1 + \frac{1}{\tan^2 x} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]^{\tan x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{\tan^2 x} \right)^{\tan x \cdot \frac{-1}{2 \tan x}} \\ &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

(需要上文中提过的“~”条件, 才能保证 $\lim_{t \rightarrow b} f(g(t)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$)

关于“~”的反例:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad g(t) = \begin{cases} t, & t \text{ 为无理数} \\ 0, & t \text{ 为有理数} \end{cases}$$

则 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow 1$; $t \rightarrow 0$ 时, $g(t) = 0$
但 $f(g(t))$ 极限不存在

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x})^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1)^{\frac{1}{\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1} \cdot x (\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1)} \quad (1)$$

$$\text{由于 } x (\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1) = x (\sin \frac{1}{x} - 2 \sin^2 \frac{1}{2x}) \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow \infty)$$

$$\text{于是 (1) 式} = e^1 = e$$

注: 对于 (5)、(6), 最后一步都用到了 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$,

这里将证明其正确性.

若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ (A, B 为有限实数, $A > 0$)

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = A^B$$

证: $A > 0$ 时: $(f(x))^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$ (由 $A > 0$ 可知在 a 的某个邻域内 $f(x) > 0$, 于是此式成立)

由于 $h(t) = e^t$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 由之前的讨论可得

$$\lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)}$$

对于 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)$ 来说, 已知 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$. 由于 $i(t) = \ln t$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上

连续, 同上可知 $\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \ln(\lim_{x \rightarrow a} f(x)) = \ln A$. 由极限的四则运

算有 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x) = B \cdot \ln A$. 于是 $e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)} = e^{B \cdot \ln A} = A^B$

10. 证: 充分性: $\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, $|f(x_n)| > M$. 由于 $\{x_n\} \subset D$, 于是 $f(x)$ 在 D 上无界.

必要性: 由于 $f(x)$ 在 D 上无界. 设数列 $b_n = n$, 则对于 $\forall b_i > 0$

$\exists x_i \in D$, 使得 $|f(x_i)| > b_i$. 令这些点为数列 $\{x_n\}$.

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n)| = +\infty$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$.

易知 $\{x_n\} \subset D$.

11. 证: 对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时, $|f(x_n) - A| < \varepsilon$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 于是对于 $a, \exists N_2 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_2$ 时, $x_n > a$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$

当 $x \geq x_{N+1}$ 时, 有 $a < x_{N+1} \leq x$. 由于 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调上升

于是 $f(x) \geq f(x_{N+1}) > A - \varepsilon$

对于上述 $x, \exists N_x \in \mathbb{N}$ 且 $N_x > N$, 使得 $n > N_x$ 时, $x_n > x$.

此时 $n > N$, 于是 $x_n > a, |f(x_n) - A| < \varepsilon$.

故 $A + \varepsilon > f(x_n) \geq f(x) \geq f(x_{N+1}) > A - \varepsilon$

综上所述: $\forall \varepsilon > 0, \exists X \in U^+(\infty)$, 当 $x > X$ 时

$$A + \varepsilon > f(x) > A - \varepsilon. \text{ 即 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

12. 证: 假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq +\infty$. 即 $\exists M_0 > 0$, 对于 $\forall N \in \mathbb{N}$, 都 $\exists n_0 > N$, 使得

$x_{n_0} \leq M_0$. 取 $N_1 = 1, \exists n_1 > N_1$, 满足 $x_{n_1} \leq M_0$. 取 $N_2 = n_1, \exists n_2 > N_2 = n_1$,

满足 $x_{n_2} \leq M_0$, 以此类推, 可知 $\exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ 满足 $x_{n_k} \leq M_0$.

则 $f(x_{n_k}) \geq f(M) > f(2M) \geq f(2kM)$ (1)

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 无论 A 为有限实数还是无穷, 根据

极限的性质都有:

① 对 $\{f(x_n)\}$ 的任意子序列 $\{f(x_{n_k})\}$, 都有 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$

② 对于 $U^+(\infty, a)$ 内任意趋于 $+\infty$ 的序列 $\{y_k\}$, 都有 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(y_k) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

于是对于 (1) 式, 当 $k \rightarrow +\infty$ 时 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \geq f(M) > f(2M)$
 $\geq \lim_{k \rightarrow \infty} f(2kM)$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) > \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. 矛盾

于是假设不成立, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

注: 这道题默认 $f(x)$ 只在 $(a, +\infty)$ 上有定义, 故 $\{x_n\} \subset (a, +\infty)$ 且 $M \in (a, +\infty)$. 因为若不是如此, 很容易举出反例, 如: $a = 0$, $f(x)$ 为偶函数, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ 也满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. 属于题目不严谨.

13. 证: 假设 $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, 有 $f(x_0) = c \neq 0$

由于 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的周期函数, 设周期为 T , $T > 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 故对于 $\varepsilon = |c| > 0$, $\exists X \in U^+(\infty)$, 当 $x > X$ 时, 有

$$|f(x)| < \varepsilon = |c|.$$

易知 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_0 + nT) = +\infty$, 则对于上述 X , $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时,

$$x_0 + nT > X$$

则 $|f(x_0 + nT)| < |c|$, 但 $f(x_0 + nT) = f(x_0) = c$, 矛盾.

于是 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有 $f(x) = 0$, 即 $f(x) \equiv 0$.

14. 证: 同13.

15. 证: 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = a$. 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\alpha x)}{\alpha x} = a$ ($\alpha \neq 1, 0$)

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow 0} \alpha \cdot \frac{f(\alpha x)}{\alpha x} = \alpha a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\alpha x)}{x}$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\alpha x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\alpha x)}{x} = a - \alpha a = 0$$

由 $a(1 - \alpha) = 0$ 且 $\alpha \neq 1$ 可知 $a = 0$

若 $\alpha = 0$, 由 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ 可得 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot x = a \cdot 0 = 0$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$, 若 $f(0) \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0)}{x} = \infty$, 矛盾.

于是 $f(0) = 0$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$

16. 证: ① $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$ (这里对 A 为 $\infty, \pm\infty$ 的情况也进行讨论)

A 为有限实数时: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists 1 > \delta > 0$, 当 $x \in U_0(0, \delta)$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \text{ 由于 } x \in U_0(0, \delta) \text{ 时 } |x| > |x|^3,$$

故 $x^3 \in U_0(0, \delta)$, 则 $|f(x^3) - A| < \varepsilon$, 即

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x^3) = A$$

A为 $\pm\infty, \infty$ 时(以 ∞ 为例,其余同理):

$\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x \in U_0(0, \delta)$ 时, 有 $|f(x)| > M$.

由于 $x \in U_0(0, \delta)$ 时, $|x| > |x|^3$, 故 $x^3 \in U_0(0, \delta)$, 则 $|f(x^3)| > M$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x^3) = \infty$$

② $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^3) = A$ (同上进行讨论)

A为有限实数时: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x \in U_0(0, \delta)$ 时, 有 $|f(x^3) - A| < \varepsilon$.

令 $t = x^3$, 则 $x = t^{\frac{1}{3}}$. 于是 $x \in U_0(0, \delta) \Leftrightarrow t \in U_0(0, \delta^3)$

于是 $t \in U_0(0, \delta^3)$ 时, $|f(t) - A| < \varepsilon$

$$\text{即 } \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = A, \text{ 易知 } \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

A为 $\pm\infty, \infty$ 时(以 ∞ 为例,其余同理):

$\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x \in U_0(0, \delta)$ 时, $|f(x^3)| > M$,

令 $t = x^3$, 则 $x = t^{\frac{1}{3}}$, 于是 $x \in U_0(0, \delta) \Leftrightarrow t \in U_0(0, \delta^3)$

于是 $t \in U_0(0, \delta^3)$ 时, $|f(t)| > M$, 即 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \infty$

同样的, 有 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

对于 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^3)$, 用同样的方法可以证明 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在

时 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^3)$ 一定存在且相等, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^3)$ 存在时, 回顾上面

的步骤可以发现, 若令 $t = x^2$, 则 $x = \sqrt{t}$, 此时要求 $t \geq 0$

只能证出单侧极限存在且相等, 即 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

例如: $f(x) = \operatorname{sgn} x$

$$17. (1) x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ 及 } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

跳跃间断点

$$(2) \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x}{(1+x)^2} = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x}{(1+x)^2} = -\infty, \text{于是 } x=-1 \text{ 为第二类间断点.}$$

注: 间断点定义中说的极限不包含广义极限. 做为一份解答, 前面的题多将结论拓展至广义极限, 但对于书中定义, 依然遵循无特殊强调时指有限极限的原则.

$$(3) \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} x = -1, \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \ln|x+1| = -\infty$$

于是 $x=-1$ 为第二类间断点.

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \ln|x+1| = \ln 2, \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x = 1$$

于是 $x=1$ 为跳跃间断点.

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0+0} \cos^2 \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \cos^2 t \text{ 不存在, 同理 } \lim_{x \rightarrow 0-0} \cos^2 \frac{1}{x} \text{ 也不存在}$$

于是 $x=0$ 为第二类间断点.

$$18. (1) \text{ 当 } x \neq 0 \text{ 且 } -1 < x \text{ 时, } \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1} = \frac{(\sqrt{1+x}+1)x}{x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)} = \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}$$

$$\text{令 } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1} = \frac{2}{3}, \text{ 则 } f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续}$$

$$(2) \text{ 对于 } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, -\sin x \leq \sin x \cdot \sin \frac{1}{x} \leq \sin x$$

$$\text{由夹逼收敛原理可知 } \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x \cdot \sin \frac{1}{x}) = 0$$

令 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$19. \text{ 对于 } \forall x \in (-\infty, 0), f(x) = e^x, \text{ 于是 } f(x) \text{ 在 } (-\infty, 0) \text{ 上连续.}$$

$$\text{对于 } \forall x \in (0, +\infty), f(x) = \alpha + x, \text{ 于是 } f(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上连续}$$

$$\text{由于 } \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} (\alpha + x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} e^x = 1$$

于是 $\alpha = 1$ 时, $f(0+0) = f(0-0) = f(0)$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

20. 易知 $f(x)+g(x)$ 在 $x=x_0$ 处一定不连续

$f(x)g(x)$ 有可能连续, 例如 $f(x) \equiv 0$, $g(x) = D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

$$21. f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$22. f(x) = \begin{cases} 1/n, & x = x_n \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \{x_n\} \end{cases}$$

23. (1) 易知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 与 $(0, +\infty)$ 上连续

且 $f(0+0) = 1 \neq f(0-0) = -1$, 于是 $x=0$ 是跳跃间断点

(2) 对区间 $[N, N+1)$, $N \in \mathbb{Z}$, 易知 $g(x)$ 在其上连续

$$\text{但 } \lim_{x \rightarrow N+1-0} g(x) = \lim_{x \rightarrow N+1-0} (x-N) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow N+1+0} g(x) = \lim_{x \rightarrow N+1+0} (x-N-1) = 0$$

于是 $x=N \in \mathbb{Z}$ 为跳跃间断点.

(3) 由(2)可知, 对于 $\forall N \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x \rightarrow N+0} f(g(x)) = 1, \lim_{x \rightarrow N-0} f(g(x)) = 1, f(g(N)) = 0$$

于是 $x=N \in \mathbb{Z}$ 为可去间断点. (课后答案给的是跳跃, 错误)

注: 尽管 $\lim_{x \rightarrow N+0} g(x) = 0$, 但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, 因此

$$\lim_{x \rightarrow N+0} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow N+0} g(x)) \text{ 的想法是不对的, 参考 9 题}$$

(4) 的注. 对于 $\forall 1 > \delta > 0$, $U^+(N, \delta) \ni x$, $g(x) > 0$, 于是

$$f(g(x)) = 1, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow N+0} f(g(x)) = 1.$$

(4) 易知 $g(f(x)) \equiv 0$

24. 证: (1) 对 $\forall x_0 \in (a, b)$, $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续

即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 即对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $x \in U(x_0, \delta) \cap (a, b)$

有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 由于 $||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

于是 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$, 则 $|f(x)|$ 在 (a, b) 上连续.

同理有 $\lim_{x \rightarrow a^+} |f(x)| = |f(a)|$, $\lim_{x \rightarrow b^-} |f(x)| = |f(b)|$.

于是 $|f(x)| \in C[a, b]$. (也可用定理 3.2.1 复合函数的连续性证)

(2) 法一: (课后答案提示的方法)

对于 $\forall x_0 \in (a, b)$, $f(x)$, $g(x)$ 均在 $x=x_0$ 处连续, 于是对于 (a, b) 内任意收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x_0)$.

此时 $\{f(x_n)\}$, $\{g(x_n)\}$ 也是数列, 根据习题二中 11. 题的结论, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{f(x_n), g(x_n)\} = \max\{f(x_0), g(x_0)\}$, 由于 $\{x_n\}$ 的任意性

可知 $\lim_{x \rightarrow x_0} \max\{f(x), g(x)\} = \max\{f(x_0), g(x_0)\}$.

对于端点处的情况同理可证.

综上可知 $\max\{f(x), g(x)\} \in C[a, b]$.

法二: $\max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$

由 (1) 与 20. 题结论可得.

(3) 同 (2), 注意 $\min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$

25. 证: (1) $0 \leq f(x)$, 于是 $\{a_n\}$ 有下界. $f(x) \leq x$, 于是 $a_{n+1} = f(a_n) \leq a_n$.

即 $\{a_n\}$ 单调下降, 由数列的单调收敛原理可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在.

(2) 由 (1) 可知 $l \geq 0$. 因为 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 于是

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(l)$. 又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = l$

于是 $f(l) = l$

(3) $0 \leq f(x) < x$ 是 $0 \leq f(x) \leq x$ 的充分条件, 于是此时 (1), (2) 依旧

成立. 若 $l \neq 0$, 则 $f(l) < l$ 与 $f(l) = l$ 矛盾. 于是 $l = 0$.

$$26. \text{解: } \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_p^x}{p} \right)^{\frac{1}{x}} = \left(1 + \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (a_i^x - 1) \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^p (a_i^x - 1)}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^p (a_i^x - 1)}{p \cdot x}$$

当 $\exists \delta > 0$, 使得 $x \in U^+(0, \delta)$ 时, $\sum_{i=1}^p (a_i^x - 1) \neq 0$, 则上式成立.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (a_i^x - 1) \right)^{\frac{p}{\sum_{i=1}^p (a_i^x - 1)}} = e$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{i=1}^p (a_i^x - 1)}{x} &= \frac{1}{p} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^p \frac{e^{x \ln a_i} - 1}{x} = \frac{1}{p} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^p \frac{\ln a_i (e^{x \ln a_i} - 1)}{\ln a_i \cdot x} \\ &= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \ln a_i = \ln \sqrt[p]{a_1 a_2 \dots a_p} \end{aligned}$$

利用9题(6)注中拓展的结论

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (a_i^x - 1) \right)^{\frac{p}{\sum_{i=1}^p (a_i^x - 1)}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^p (a_i^x - 1)}{p \cdot x} = e^{\ln \sqrt[p]{a_1 a_2 \dots a_p}} = \sqrt[p]{a_1 a_2 \dots a_p}$$

上述的 δ 在除去 $a_1 = a_2 = \dots = a_p = 1$ 的情况下总是存在的

否则 对于 $\forall \delta_0 > 0$, $\exists x_0 \in U^+(0, \delta_0)$, 使得 $\sum_{i=1}^p (a_i^{x_0} - 1) = 0$

则 $f(x) = \sum_{i=1}^p (a_i^x - 1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有无穷个零点

若有 $a_k = 1$, 则 $a_k^x - 1 \equiv 0 (x \in (0, +\infty))$, 于是 $f(x) - (a_k^x - 1) = f(x)$.

去除所有 $a_k = 1$ 的部分, 此时 $f(x) = \sum_{k=1}^{p'} (a_{i_k}^x - 1)$, $2 \leq p' \leq p$.

且存在 $a_{i_j} > 1$, 存在 $a_{i_l} < 1$ (否则单调无零点)

$$f(x) = 0, \text{ 即 } \sum_{j=1}^{m_1} (a_{i_j}^x - 1) + \sum_{l=1}^{m_2} (a_{i_l}^x - 1) = 0, \text{ 即 } \sum_{j=1}^{m_1} (a_{i_j}^x - 1) = -\sum_{l=1}^{m_2} (a_{i_l}^x - 1)$$

其中 $m_1 + m_2 = p'$, $m_1 \geq 1, m_2 \geq 1$. 而虽然等号左右都为 $(0, +\infty)$ 上的严格递增函数, 但凹凸性严格相反, 于是至多出现一个交点. 矛盾.

对于 $a_1 = a_2 = \dots = a_p = 1$, $\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_p^x}{p} \right)^{\frac{1}{x}} \equiv 1 (x > 0)$

也符合 $\sqrt[p]{a_1 a_2 \dots a_p}$.

$$\text{综上 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_p^x}{p} \right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt[p]{a_1 a_2 \dots a_p}$$

27. 证: (1) 设 $f(x) = x^3 + x + 1$, 易证 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续

$f(-1)f(1) < 0$, 于是 $\exists \xi \in (-1, 1)$, 使得 $f(\xi) = 0$

ξ 就为方程 $x^3 + x + 1 = 0$ 的一个实根.

(2) 对于 $I_k = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $f(x) = \tan x - x$ 在 I_k 上连续

且 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi - 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} + k\pi + 0} f(x) = -\infty$, 由连续函数的介值

定理可知 $\exists \xi_k \in I_k$ 使得 $f(\xi_k) = 0$. ξ_k 就是方程的一个根.

由于 $k \in \mathbb{Z}$, 于是方程有无穷多个根.

注: 书中定理 3.3.3 (介值定理) 中, 给定的条件是 $f(x) \in C[a, b]$

为闭区间, 对于 $f(x) \in C(a, b)$, 可能 $f(x)$ 在 (a, b) 上无最值.

但若 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$ 及 $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = B$ 存在, 则 $f(x)$ 可连续延拓

到 $[a, b]$, 即 $\tilde{f}(x) = \begin{cases} A, & x = a \\ f(x), & x \in (a, b) \\ B, & x = b \end{cases}$, 此时对于 $\tilde{f}(x)$ 又有书

中表述的介值定理, 若有一侧极限趋向无穷 (如 $-\infty$) 另一侧极限存在, 则只需延拓一侧, 延拓函数在半开半闭区间上有最大值而无下界, 此时对 $(-\infty, M)$ 也有介值定理. 其余情况同理可以进行讨论.

28. 证: 设 $x' = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $x'' = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

记 $m = \min_{x \in [x', x'']} \{f(x)\}$, $M = \max_{x \in [x', x'']} \{f(x)\}$

则 $m \leq \min\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\} \leq \max\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\} \leq M$

由于对 $\forall x \in I$, 有 $f(x) > 0$, 于是

$\min\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\} \leq \sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n)} \leq \max\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$

则 $m \leq \sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n)} \leq M$, 由介值定理可知 $\exists \xi \in [x', x'']$,

使得 $f(\xi) = \sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n)}$. 由于 $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$

于是 $[x', x''] \subseteq I$.

29. 证: 由序列极限的保序性可知, 对于 $\forall \eta \in (A, B)$, $\exists N_0 > 0$, 使得当 $n > N_0$ 时, 有 $f(x_n) < \eta < f(y_n)$. (此时也必有 $x_n \neq y_n$).

$f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 于是在 $[x_n, y_n]$ (或 $[y_n, x_n]$) 上连续.

由介值定理可知 $\exists z_n \in (x_n, y_n)$ (或 (y_n, x_n)) 使得 $f(z_n) = \eta$.

由于 $x_n, y_n \rightarrow b$ ($n \rightarrow \infty$), 于是 $z_n \rightarrow b$ ($n \rightarrow \infty$)

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \eta$.

注: 这里所运用的介值定理的形式如下

设 $f(x) \in C[a, b]$, 则对 $\forall \eta \in (f(a), f(b))$, $\exists \zeta \in (a, b)$

使得 $f(\zeta) = \eta$.

(这里默认 $f(a) \neq f(b)$, 否则如此表述的介值定理没有意义)

30. 证: 设 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(x) \in C[a, b]$.

由 $f([a, b]) \subset [a, b]$ 可知 $a \leq \min_{x \in [a, b]} \{f(x)\} \leq \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\} \leq b$

于是 $\min_{x \in [a, b]} \{g(x)\} \leq 0 \leq \max_{x \in [a, b]} \{g(x)\}$

则 $\exists c \in [a, b]$, 使得 $g(c) = 0$, 即 $f(c) = c$.

31. 证: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不变号, 不妨设 $f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$.

$|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上单调, 不妨设为单调上升.

即对于 $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ 且 $x_1 < x_2$, 有 $|f(x_1)| \leq |f(x_2)|$

由于 $|f(x)| = -f(x)$, 于是 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 即 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调下降.

其余情况同理. 总之 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不变号时若 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上

单调则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上也单调.

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上变号, 则 $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$, 使得 $f(x_1)f(x_2) < 0$

不妨设 $f(x_1) < 0, f(x_2) > 0$. 由零点存在定理可知 $\exists \zeta \in (x_1, x_2)$,

使得 $f(\zeta) = 0$, 于是对于 $|f(x)|$ 来说, $x_1 < \zeta, |f(x_1)| > |f(\zeta)| = 0$,

$\zeta < x_2, 0 = |f(\zeta)| < |f(x_2)|$, 则 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上不单调, 矛盾. 于

是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不变号.

综上所述得证.

32. 证: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不严格单调

则 $\exists x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$ 满足 $x_1 < x_2 < x_3$ 且 $(f(x_2) - f(x_1))(f(x_3) - f(x_2)) \leq 0$

由于 $x_1 \neq x_2 \neq x_3$, 于是 $f(x_2) - f(x_1) \neq 0$, $f(x_3) - f(x_2) \neq 0$.

则 $(f(x_2) - f(x_1))(f(x_3) - f(x_2)) < 0$

不妨设 $f(x_2) - f(x_1) < 0$, 则 $f(x_3) - f(x_2) > 0$

于是 $(f(x_2), f(x_1)) \cap (f(x_2), f(x_3)) = E \neq \emptyset$

取 $c \in E$, 由连续函数的介值定理可知

$\exists \xi' \in (x_1, x_2), \xi'' \in (x_2, x_3)$ 使得 $f(\xi') = c = f(\xi'')$

且 $\xi' < \xi''$, 矛盾. 于是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调.

33. 证: (1) 对于 $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ 且 $x_1 < x_2$

$$kx_2 - f(x_2) - kx_1 + f(x_1) = k(x_2 - x_1) + f(x_1) - f(x_2)$$

由题设得

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2| = k(x_2 - x_1)$$

$$\text{于是 } k(x_2 - x_1) + f(x_1) - f(x_2) \geq 0$$

即 $kx_2 - f(x_2) \geq kx_1 - f(x_1)$, 于是 $kx - f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调上升.

(2) 设 $g(x) = x - f(x)$.

$$0 < k < 1, \text{ 则 } \frac{|f(0)|}{1-k} \geq 0. \quad g\left(\frac{|f(0)|}{1-k}\right) = k\frac{|f(0)|}{1-k} - f\left(\frac{|f(0)|}{1-k}\right) + (1-k)\frac{|f(0)|}{1-k}$$

对于 $k\frac{|f(0)|}{1-k} - f\left(\frac{|f(0)|}{1-k}\right)$, 由 (1) 可知其 $\geq k \cdot 0 - f(0)$.

$$\text{于是 } g\left(\frac{|f(0)|}{1-k}\right) \geq -f(0) + |f(0)| \geq 0.$$

$$-\frac{|f(0)|}{1-k} \leq 0, \text{ 同理可得 } g\left(-\frac{|f(0)|}{1-k}\right) \leq 0.$$

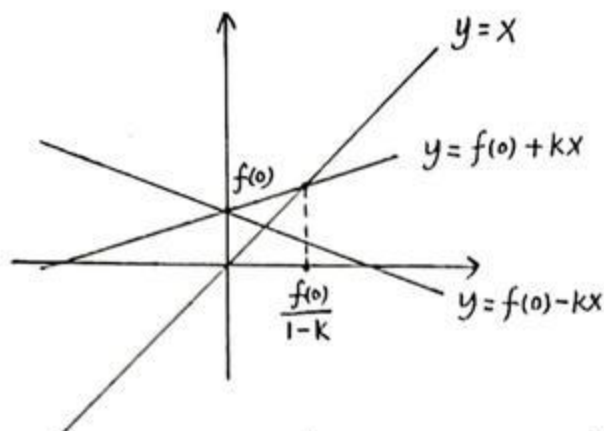
若 $f(0) = 0$, 则问题得证

若 $f(0) \neq 0$, 由上可知 $\exists c \in \left[-\frac{|f(0)|}{1-k}, \frac{|f(0)|}{1-k}\right]$, 使得 $g(c) = 0$

即 $c = f(c)$.

注: 对于构造 $g(x)$, 想法是自然的, 但对于找到解答中的点却不是那么直接, 这里给出一个提示, 供读者思考. 事实上这里给出的点已经是最佳的, 即不可再小.

提示:



思考时需要注意

$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$
而不是“=”

34. 证: 任取 $(-\infty, +\infty)$ 上一点 x_0 , 由 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ 可知, $\exists X > 0$,

当 $|x| > X$ 时, $f(x) > f(x_0)$. (此时必有 $X \geq |x_0|$)

对于闭区间 $[-X, X]$, 由连续函数的最值定理可知

$\exists \xi \in [-X, X]$ 使得 $f(\xi) \leq f(x)$ 对一切的 $x \in [-X, X]$ 成立

对于 $x \in \mathbb{R} \setminus [-X, X]$, $f(\xi) \leq f(x_0) < f(x)$, 于是 $x = \xi$ 为 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的最小值点.

35. 证: 充分性: 若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调上升

则 $M(x) = f(x)$, 于是 $Q(x) \equiv 1$ ($x \in [0, 1]$), 则 $Q(x)$ 连续

必要性: $Q(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续

由于 $M(x) = \max_{0 \leq t \leq x} f(t) \geq f(x)$, $\forall x \in [0, 1]$

则 $0 < \frac{f(x)}{M(x)} \leq 1$. 当 $f(x) = \max_{0 \leq t \leq x} f(t)$ 时, $\frac{f(x)}{M(x)} = 1$, 于是 $Q(x) = 1$.

当 $f(x) < \max_{0 \leq t \leq x} f(t)$ 时, $0 < \frac{f(x)}{M(x)} < 1$, 于是 $Q(x) = 0$

即 $Q(x) \in \{0, 1\}$, 若 $Q(x) = \{0, 1\}$, 由 $Q(x)$ 的连续性可知

对于 $\forall \eta \in (0, 1)$, $\exists x \in [0, 1]$, 使得 $Q(x) = \eta$. 矛盾.

于是 $Q(x) \neq \{0, 1\}$. 由 $Q(0) = 1$ 可知 $Q(x) = \{1\}$, 即 $Q(x) \equiv 1$

即 $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) = \max_{0 \leq t \leq x} f(t)$. 即 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调上升.

36. 证: 由于 $f(x) \in C[a, b]$, 则 $|f(x)| \in C[a, b]$.

根据最值定理, $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上存在最小值.

即 $\exists \xi \in [a, b]$, 使得 $|f(\xi)| = \min_{x \in [a, b]} \{|f(x)|\}$.

假设 $|f(\xi)| = c \neq 0$.

则由题设可得 $\exists \alpha \in [a, b]$, 使得

$$|f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |f(\xi)| = \frac{1}{2} c < c = \min_{x \in [a, b]} \{|f(x)|\}.$$

矛盾. 于是 $|f(\xi)| = 0$.

37. 证: (1) 注意到

$$\begin{aligned} |\cos \sqrt{x_1} - \cos \sqrt{x_2}| &= \left| -2 \sin \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{2} \sin \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{2} \right| \leq |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{|\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}|} \end{aligned}$$

于是对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 = \varepsilon > 0$, 当 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ 且

$|x_1 - x_2| < \delta_1$ 时, 有

$$|\cos \sqrt{x_1} - \cos \sqrt{x_2}| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{|\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}|} \leq |x_1 - x_2| < \delta = \varepsilon$$

因此 $\cos \sqrt{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续. 其次, 由 Cantor 定理,

$\cos \sqrt{x}$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 从而一致连续. 因此对于上述 $\varepsilon > 0$,

$\exists \delta_2 > 0$, 使得当 $x_1, x_2 \in [0, 2]$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta_2$ 时, 有

$$|\cos \sqrt{x_1} - \cos \sqrt{x_2}| < \varepsilon.$$

取 $\delta = \min \left\{ \delta_1, \delta_2, \frac{1}{2} \right\}$, 对任意的 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 当

$|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 必有 x_1, x_2 同时落在 $[0, 2]$ 或 $[1, +\infty)$ 上. 因

此, 由上所述, 有 $|\cos \sqrt{x_1} - \cos \sqrt{x_2}| < \varepsilon$.

因此 $\cos \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

(2) 注意到当 $n \geq 1$ 时,

$$\sqrt{2n\pi + \pi/6} - \sqrt{2n\pi} = \frac{\pi/6}{\sqrt{2n\pi + \pi/6} + \sqrt{2n\pi}} < \frac{\pi/6}{4n\pi + \pi/6} < \frac{1}{4n}$$

$\exists \varepsilon_0 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$, 对于 $\forall \delta > 0$, 当 $n > N = \left[\frac{1}{4\delta}\right] + 1 \in \mathbb{N}$ 时,

$\exists x_1 = \sqrt{2n\pi + \pi/6}$, $x_2 = \sqrt{2n\pi}$, 满足 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 且

$$|x_1 - x_2| < \frac{1}{4n} < \delta.$$

但 $|\cos x_1^2 - \cos x_2^2| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right| = \varepsilon_0$. 因此不一致连续.

38. 证: 注意到当 $n \geq 1$ 时,

$$\frac{1}{2n\pi - \pi/6} - \frac{1}{2n\pi} = \frac{\pi/6}{(2n\pi - \pi/6)(2n\pi)} < \frac{1}{2n}$$

$\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, 对于 $\forall \delta > 0$, 当 $n > N = \left[\frac{1}{2\delta}\right] + 1 \in \mathbb{N}$ 时,

$\exists x_1 = \frac{1}{2n\pi - \pi/6}$, $x_2 = \frac{1}{2n\pi}$, 满足 $x_1, x_2 \in (0, 1)$, 且

$$|x_1 - x_2| < \frac{1}{2n} < \delta.$$

但 $\left|\sin \frac{1}{x_1} - \sin \frac{1}{x_2}\right| = \varepsilon_0$. 因此 $\sin \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上不一致连续.

对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon > 0$, 当 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$

时, 有

$$\begin{aligned}\left|\sin\frac{1}{x_1}-\sin\frac{1}{x_2}\right| &= \left|2\cos\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}\sin\frac{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}}{2}\right| \leq \left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right| \\ &= \left|\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}\right| \leq |x_2-x_1| < \delta = \varepsilon\end{aligned}$$

于是 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续.

39. 证: 若 $f(x)$ 为常值函数, 则问题不证自明.

否则设 $f(x)$ 的最小正周期 $T > 0$. 则 $f(x) \in C[-T, T]$, 由Cantor定理可知, 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 且 $\delta \leq T$, 当 $x_1, x_2 \in [-T, T]$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

对于 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, $\exists k \in \mathbb{Z}$, 使得 $x = kT + r$, 其中 $0 \leq r < T$. 于是对于 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 对于 $x_1 = k_1T + r_1$, $x_2 = k_2T + r_2$, 有且仅有下列情况:

$x_1 = x_2$, 此时自然有 $|f(x_1) - f(x_2)| = 0 < \varepsilon$

$x_1 \neq x_2$, 不妨设 $x_1 < x_2$. 若 $k_1 = k_2$, 则 $0 \leq r_1 < r_2 < T$,

即 $r_1, r_2 \in [-T, T]$, 且 $|r_1 - r_2| < \delta$, 于是由上可得

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(r_1) - f(r_2)| < \varepsilon$$

若 $k_1 \neq k_2$, 由于 $\delta \leq T$, 必有 $k_1 = k_2 - 1$, 且 $0 \leq r_2 < r_1 < T$.

此时 $|T - r_1 + r_2| < \delta$, 且 $(-T + r_1) \in [-T, 0]$, $r_2 \in [0, T]$,

于是

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(-T + r_1) - f(r_2)| < \varepsilon.$$

综上所述 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

40. 证: 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X \geq a$, 当 $x_1, x_2 > X$ 时,

有 $|f(x_1) - A| < \varepsilon/2$, $|f(x_2) - A| < \varepsilon/2$. 则根据三角不等式可知此时 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

对于区间 $[a, X+1]$, 由 Cantor 定理可知 $\exists \delta > 0$, 且 $\delta \leq 1$,

使得当 $x_1, x_2 \in [a, X+1]$, 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

那么对于 $x_1, x_2 \in [a, +\infty)$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta \leq 1$ 时, x_1, x_2 一定同时落在 $[a, X+1]$ 或者 $(X, +\infty)$ 内, 由上述讨论可知此时有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

于是 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.

41. 证: 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$ 以及 40 题结论可知 $(f(x) - g(x))$

在 $[a, +\infty)$ 上一致连续, 又因为 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续,

因此 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.

(当两个一致连续的函数的和函数也一致连续, 这一结论通过一致连续的定义以及三角不等式是十分容易得到的)

42. 答: 尽管 $g(x)$ 有界, 但据已知条件并无法推断出 $f(x)g(x)$ 一致收敛. 事实上有一个十分经典的反例 $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$, $x \in [0, +\infty)$.

对于 $\forall \delta > 0$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 1}\pi - 2n\pi) = 0$, 于是 $\exists N \in \mathbb{N}$,

当 $n > N$ 时, 有 $x_1 = \sqrt{4n^2 + 1}\pi$, $x_2 = 2n\pi$, 满足 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$, 但是

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (f(\sqrt{4n^2 + 1}\pi) - f(2n\pi)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(\sqrt{4n^2 + 1}\pi) \\&= \pi \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 1} \sin(\sqrt{4n^2 + 1}\pi)) \\&= \pi \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 1} \sin(\sqrt{4n^2 + 1}\pi - 2n\pi)) \\&= \pi \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 1} \sin(\frac{\pi}{\sqrt{4n^2 + 1} + 2n})) \\&= \pi \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 1} \frac{\pi}{\sqrt{4n^2 + 1} + 2n}) = \frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

于是对于 $\varepsilon_0 = \frac{\pi^2}{2}$, 不满足一致连续的定义.

43. 解:

(1) 根据 $x \rightarrow 0$ 时 $\ln(1+x) \sim x$ 可知

$$x \rightarrow 0 \text{ 时 } \ln(1-2x^2) \sim -2x^2.$$

(2) 根据 $x \rightarrow 0$ 时 $e^x - 1 \sim x$ 可知

$$x \rightarrow 0 \text{ 时 } e^{x^2-x} \sim x^2 - x \sim x.$$

(3) 根据 $x \rightarrow 0$ 时 $(1+x)^\mu \sim \mu x$ 可知

$$x \rightarrow 0 \text{ 时 } \sqrt[n]{1+x} \sim \frac{1}{n}x.$$

(4) 由于 $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} = \sqrt[8]{x} \sqrt{x^{\frac{3}{4}} + \sqrt{x^{\frac{1}{2}} + 1}}$, 于是

$$x \rightarrow 0 \text{ 时 } \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[8]{x}.$$

44. 解:

(1) 由于

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 5x + 10^{100}}{2x^3} = 1$$

于是 $x \rightarrow \infty$ 时 $2x^3 - 5x + 10^{100} \sim 2x^3$.

(2) 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} = 1$$

于是 $x \rightarrow \infty$ 时 $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}$.

(3) 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + 10^{10}}{x^2 + 2x} \cdot \frac{2x}{10^{10}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 2 \cdot 10^{10}}{10^{10}x + 2 \cdot 10^{10}} = 1$$

于是 $x \rightarrow 0$ 时

$$\frac{x + 10^{10}}{x^2 + 2x} \sim \frac{10^{10}}{2x}.$$

(4) 首先来证明一个常见的等价无穷小关系

$x \rightarrow 0$ 时 $\arctan x \sim x$.

令 $t = \arctan x$, 则 $x = \tan t$, 且 $x \rightarrow 0$ 时 $t \rightarrow 0$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t} = 1$$

利用这一点可以得到 $x \rightarrow 0$ 时

$$\frac{\arctan x}{x^2} \sim \frac{x}{x^2} \sim \frac{1}{x}.$$

45. 证: 由题设可得

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)g_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)g_2(x) \frac{f_1(x)g_1(x)}{f_2(x)g_2(x)} = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)g_2(x)$$

46. 解:

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x \ln(1+3x)}{(1 - \cos 2\sqrt{x})^2} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{3x^2}{\left(\frac{1}{2}(2\sqrt{x})^2\right)^2} = \frac{3}{4}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (\sqrt{x^4 - 2} - x^2) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2}{\sqrt{x^4 - 2} + x^2} = -1$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 - 2\sin^2 \frac{ax}{2}\right)}{\ln \left(1 - 2\sin^2 \frac{bx}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{ax}{2}}{\sin^2 \frac{bx}{2}} = \frac{a^2}{b^2}$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{3^x - 4^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2^x - 1}{x} - \frac{3^x - 1}{x}}{\frac{3^x - 1}{x} - \frac{4^x - 1}{x}}$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln 2} - 1}{x} = \ln 2$$

其余同理, 则由极限的四则运算可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{3^x - 4^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2^x - 1}{x} - \frac{3^x - 1}{x}}{\frac{3^x - 1}{x} - \frac{4^x - 1}{x}} = \frac{\ln \frac{2}{3}}{\ln \frac{3}{4}}$$

第四章 导数与微分

习题四

1. 对于 $f(x)$, 取 $x_n = \frac{1}{n}$, 则 $x_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). 此时有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n}} = 1. \text{ 取 } y_n = \frac{\sqrt{2}}{n}, \text{ 则 } y_n \rightarrow 0 \text{ } (n \rightarrow \infty), \text{ 此时有}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\frac{\sqrt{2}}{n}) - f(0)}{\frac{\sqrt{2}}{n}} = -1. \text{ 由此可知 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \text{ 不存在, 即 } f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处不可导.}$$

对于 $g(x)$, 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{g(x) - g(0)}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^2}{x} \right| = 0$ 可知 $g(x)$ 在 $x=0$

处可导且 $g'(0) = 0$.

2. 证: 注意到
$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \frac{f(y_n) - f(x_0) - f(x_n) + f(x_0)}{y_n - x_n}$$

$$= \frac{y_n - x_0}{y_n - x_n} \cdot \frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0} - \frac{x_n - x_0}{y_n - x_n} \cdot \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \quad (1)$$

记 $\lambda_n = \frac{y_n - x_0}{y_n - x_n}$, 则 $-\frac{x_n - x_0}{y_n - x_n} = 1 - \lambda_n$ 且由题设可知 $0 < \lambda_n < 1$

则 $0 < 1 - \lambda_n < 1$, 于是 (1) 式可以写为

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \lambda_n \frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0} + (1 - \lambda_n) \cdot \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

由于 $f(x)$ 在点 $x_0 \in (a, b)$ 处可导, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

由序列极限与函数极限的关系, 可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(x_0), \text{ 于是对于 } \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},$$

当 $n > N$ 时, 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(x_0) \right| &\leq \lambda_n \left| \frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0} - f'(x_0) \right| \\ &\quad + (1 - \lambda_n) \left| \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} - f'(x_0) \right| \end{aligned}$$

$$< \lambda_n \varepsilon + (1 - \lambda_n) \varepsilon = \varepsilon$$

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(x_0)$$

注：这道题若采用书后提示的解法

$$\text{利用 } f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \quad (x \rightarrow x_0)$$

$$\text{则 } f(y_n) = f(x_0) + f'(x_0)(y_n - x_0) + o(y_n - x_0) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (1)$$

$$f(x_n) = f(x_0) + f'(x_0)(x_n - x_0) + o(x_n - x_0) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2)$$

$$(1) - (2) = f(y_n) - f(x_n) = f'(x_0)(y_n - x_n) + o(y_n - x_0) - o(x_n - x_0) \quad (n \rightarrow \infty)$$

此时存在一个问题，若 $o(y_n - x_0) - o(x_n - x_0) = o(y_n - x_n) \quad (n \rightarrow \infty)$

则问题得证，但我们并未学过高阶无穷小量之间的运算，关于它是否成立，下面将给出结论并证明。

△ 设 $f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x)$ 都是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量，且 $g_1(x) \neq 0$,

$$g_2(x) \neq 0, g_1 - g_2 \neq 0 \text{ (即 } g_1 \neq g_2), x \in U_0(x_0, \delta_0) \quad (\delta_0 > 0)$$

$$\text{若 } f_1(x) = o(g_1(x)) \quad (x \rightarrow x_0), f_2(x) = o(g_2(x)) \quad (x \rightarrow x_0)$$

$$(1) f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x)) \quad (x \rightarrow x_0)$$

证：利用高阶无穷小量定义与极限四则运算可证。

$$(2) \text{ 若 } g_1(x) \sim g_2(x) \quad (x \rightarrow x_0), \text{ 即 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \neq 1, \text{ 则 } f_1 - f_2 = o(g_1 - g_2)$$

$$\text{证：由条件可得 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x) - g_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)/g_1(x)}{1 - \frac{g_2(x)}{g_1(x)}} \text{ 由于 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \neq 1,$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{1 - \frac{g_2(x)}{g_1(x)}} = C < \infty, \text{ 由极限四则运算可知 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)/g_1(x)}{1 - \frac{g_2(x)}{g_1(x)}} = 0$$

$$\text{同理 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2(x)}{g_1(x) - g_2(x)} = 0, \text{ 于是 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) - f_2(x)}{g_1(x) - g_2(x)} = 0. \quad \square$$

$$(3) \text{ 若 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \neq -1, \text{ 则 } f_1 + f_2 = o(g_1 + g_2)$$

证：同(2)

$$\text{对于(2)，我们给出反例：若 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = 1, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g_1(x) - g_2(x)}{g_2(x)} = 0$$

$$\text{即 } g_1(x) - g_2(x) = o(g_2(x)), \text{ 同理有 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g_2(x) - g_1(x)}{g_1(x)} = 0, \text{ 即 } g_2 - g_1 = o(g_1)$$

$$\text{但 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g_2 - g_1 - g_1 + g_2}{g_1 - g_2} = -2.$$

在此题中，很容易得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - x_0}{x_n - x_0} \leq 0$ 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - x_0}{x_n - x_0} \neq 1$ ，可采用上述办法证明。

3. 证: $|f(0)| \leq |\sin 0|$, 于是 $|f(0)| = 0$

$$|f'(0)| = \left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = 1$$

Δ

(这个等号是依据上一章上补充的结论 f 在 x_0 连续, $g \rightarrow x_0$ ($t \rightarrow b$), 则 $\lim_{t \rightarrow b} f(g(t)) = f(\lim_{t \rightarrow b} g(t))$, 这里的 f 就是取绝对值函数)

4. 证: (1) 设 $f(x)$ 是定义在 I 上的一个偶函数, 则对于 $\forall x \in I$, 有 $f(x) = f(-x)$

$f(x)$ 可导, 于是对于 $\forall x_0 \in I$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(-x) - f(-x_0)}{x - x_0} = - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(-x) - f(-x_0)}{-x - (-x_0)} = -f'(x_0)$$

于是 $f'(x)$ 是定义在 I 上的奇函数

(2) 同 (1)

(3) 若 $g(x)$ 在其定义域 I 上为常值函数, 则 $g'(x) = 0$ ($x \in I$)
否则设 $T > 0$ 为 $g(x)$ 的最小正周期.

于是对于 $\forall x_0 \in I$, 有

$$g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x+T) - g(x_0+T)}{x+T - x_0 - T} = g'(x_0+T) \quad \square$$

5. (1) $x < 1$ 时, $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$

$1 < x < 2$ 时, $y = -(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$

$2 < x < 3$ 时, $y = -(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$

$3 < x$ 时, $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$

于是立马知道 $x=2$ 是可导点.

$$f'_-(1) = (x-2)^2(x-3)^3 + (x-1) \cdots \Big|_{x=1} = -8 \neq f'_+(1) = 8$$

$$f'_-(3) = (x-3) \cdots \Big|_{x=3} = 0 = f'_+(3) = (x-3) \cdots \Big|_{x=3}$$

(这里的省略号代表提出前面的公因式后所剩的式子)

于是 $x=1$ 处不可导, $x=3$ 处可导.

$$(2) x < -1 \text{ 时, } y = -x - 1$$

$$-1 < x < 0 \text{ 时, } y = \frac{1}{4}(x-1)(x+1)^2$$

$$0 < x < 1 \text{ 时, } y = \frac{1}{4}(x-1)(x+1)^2$$

$$1 < x \text{ 时, } y = x - 1$$

于是立即可知 $x=0$ 为可导点.

$$f'_-(-1) = -1 \neq f'_+(-1) = (x+1) \cdots \big|_{x=-1} = 0$$

$$f'_-(1) = \frac{1}{4}(x+1)^2 + (x-1) \cdots \big|_{x=1} = 1 = f'_+(1)$$

于是 $x=-1$ 处不可导, $x=1$ 为可导点.

6. 解: $f'(0)$ 存在, 于是对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x| < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0) \right| < \varepsilon. \quad \exists N_1 = \left[\frac{1}{\delta} \right] + 1 \in \mathbb{N}, \text{ 当 } n > N_1 \text{ 时, 有}$$

$$\frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n} < \delta, \quad k=1, 2, \dots, n. \text{ 此时 } \left| \frac{f(\frac{k}{n^2}) - f(0)}{\frac{k}{n^2}} - f'(0) \right| < \varepsilon$$

$$\text{由于 } \frac{k}{n^2} > 0, \text{ 于是 } \left| f(\frac{k}{n^2}) - f(0) - \frac{k}{n^2} f'(0) \right| < \frac{k}{n^2} \varepsilon.$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \left[f(\frac{k}{n^2}) - f(0) - \frac{k}{n^2} f'(0) \right] \right| &\leq \sum_{k=1}^n \left| f(\frac{k}{n^2}) - f(0) - \frac{k}{n^2} f'(0) \right| \\ &< \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \varepsilon = \frac{(n^2+n)}{2n^2} \varepsilon < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[f(\frac{k}{n^2}) - f(0) - \frac{k}{n^2} f'(0) \right] = 0$$

$$\text{由于 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} f'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+n)}{2n^2} f'(0) = \frac{1}{2} f'(0)$$

$$\text{利用极限的四运算可知 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[f(\frac{k}{n^2}) - f(0) \right] = \frac{1}{2} f'(0)$$

$$7. (1) \text{ 利用 6. 题可知其极限为 } \frac{1}{2} \sin'(0) = \frac{1}{2} \cos(0) = \frac{1}{2}$$

$$(2) (1 + \frac{1}{n^2})(1 + \frac{2}{n^2}) \cdots (1 + \frac{n}{n^2}) = e^{\ln(1 + \frac{1}{n^2}) + \ln(1 + \frac{2}{n^2}) + \cdots + \ln(1 + \frac{n}{n^2})}$$

$$\text{令 } f(x) = \ln(1+x), \text{ 则 } f(0) = 0, \text{ 于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n^2}) = \frac{1}{2} f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n f(\frac{k}{n^2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n^2})} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n^2})} = e^{\frac{1}{2}}.$$

8. 证: 首先 $P'_n(M)$ 存在, 于是求证 $P'_n(M) \geq 0 \Leftrightarrow$ 求证 $P'_{n+}(M) \geq 0$

$$\text{于是对于 } \lim_{x \rightarrow M+0} \frac{f(x) - f(M)}{x - M} = \lim_{x \rightarrow M+0} \frac{f(x)}{x - M} \quad (1)$$

假设 (1) < 0 , 由于 $x - M > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in U^+(M, \delta)$ 时 $f(x) < 0$. 任取 $\zeta \in U^+(M, \delta)$, 则 $f(\zeta) < 0$

由题设可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x) = +\infty$, 于是 $\exists X > \zeta$, 当 $x > X$ 时, 有 $f(x) > 0$. $P_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上都可导, 于是在 $(-\infty, +\infty)$ 上都连续. 由零点存在定理可知 $\exists M' > \zeta$ 使得 $P_n(M') = 0$. 此时 $M' > \zeta > M$. 矛盾. 于是 (1) ≥ 0 , 即 $P'_{n+}(M) \geq 0$
即 $P'_n(M) \geq 0$

9. 解: $f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{-(x-a)\varphi(x)}{x - a} = -\varphi(a)$

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{(x-a)\varphi(x)}{x - a} = \varphi(a)$$

于是 $\varphi(a) = 0$ 时, $f'_-(a) = f'_+(a)$, 即 $f(x)$ 在点 a 可导.

10. ~ 16. 均为普通计算, 请读者自己补充.

17. 证: 由复合函数的求导法则, 可得 $x=1$ 处有

$$\frac{d}{dx} f(x^2) = 2x f'(x^2) = 2f(x) f'(x) = \frac{d}{dx} f^2(x)$$

于是 $2f'(1) = 2f(1)f'(1)$, 若 $f'(1) \neq 0$, 则 $f(1) = 1$.

$f'(0) = 0$ 时上式显然成立.

18. 证: 对于 $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x) \sin ax| \leq |f(x)| = f(x)$

于是 $y = f(x) \sin ax$ 永远夹在两条振幅曲线 $y = \pm f(x)$ 之间

当 $x = (\frac{\pi}{2} + k\pi)\frac{1}{a}$ ($k \in \mathbb{Z}$) 时, $y = \begin{cases} f(x), & k \text{ 为偶} \\ -f(x), & k \text{ 为奇} \end{cases}$

此时 $y' = f'(x) \sin ax + af(x) \cos ax = \begin{cases} f'(x), & k \text{ 为偶} \\ -f'(x), & k \text{ 为奇} \end{cases}$

于是这些点与 $y = \pm f(x)$ 相切.

19. (1) $x > 0$, 于是 $y = x^x > 0$, 于是 $\ln y = x \ln x$

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{d}{dx} x \ln x = \ln x + 1$$

$$\therefore y' = y (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$$

(2)~(4) 同 (1) 可得

(5) $x > 0$, 于是 $y = x^{x^x} > 0$, 于是 $\ln y = x^x \ln x$

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{d}{dx} x^x \ln x = (x^x \ln x) (\ln x + 1) + x^{x-1}$$

$$\therefore y' = x^{x^x} [(x^x \ln x) (\ln x + 1) + x^{x-1}]$$

(6) 根据复合函数求导法则即可得

20. 根据复合函数、函数四则运算的导数进行计算.

21. 证: 由 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-b}{x-a} = A$ 可知 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)-b) = 0$, 即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

令 $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a \\ b, & x = a \end{cases}$, 则 $\tilde{f}(x)$ 在 $x=a$ 处可导.

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-b}{x-a} = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(a)}{x-a} = A \Leftrightarrow \tilde{f}'(a) = A$$

$$\text{又因为 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{f(x)}-e^b}{x-a} = e^b A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{\tilde{f}(x)}-e^{\tilde{f}(a)}}{x-a} = e^b A$$

$$\Leftrightarrow (e^{\tilde{f}(x)})'|_{x=a} = e^b A$$

$$\xleftrightarrow{\text{根据复合函数求导法则}} e^{\tilde{f}(a)} \tilde{f}'(a) = e^b A$$

$$\Leftrightarrow e^b \tilde{f}'(a) = e^b A$$

$$\xleftrightarrow{e^b \neq 0} \tilde{f}'(a) = A$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-b}{x-a} = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{f(x)}-e^b}{x-a} = e^b A$$

$$22. (1) \text{解: } y'(x) = \frac{(a \sin^3 t)'_t}{(a \cos^3 t)'_t} = \frac{3a \sin^2 t \cdot \cos t}{3a \cos^2 t \cdot (-\sin t)} = -\tan t$$

(2) 对于曲线上任意一点 $(x_0, y_0) = (a \cos^3 t_0, a \sin^3 t_0)$, 由(1)可知过该点的切线斜率为 $-\tan t_0$.

容易求得切线方程为 $y = (-\tan t_0) \cdot x + a(\sin^3 t_0 + \cos^2 t_0 \cdot \sin t_0)$

于是切线被坐标轴所截长度

$$\begin{aligned} L &= [a(\sin^3 t_0 + \cos^2 t_0 \cdot \sin t_0)]^2 + [a(\cos^3 t_0 + \sin^2 t_0 \cdot \cos t_0)]^2 \\ &= a^2 \cdot [\sin^2 t_0 (\sin^2 t_0 + \cos^2 t_0)^2] + a^2 [\cos^2 t_0 (\cos^2 t_0 + \sin^2 t_0)^2] \\ &= a^2 \end{aligned}$$

23, 24. 略. 基本方法同 22.

25. 证: 法一: 由图像可找到其几何关系 (略)

法二: 设极角为 θ , 切线与 x 轴正向的夹角为 α .
向径与切线的夹角为 β .

$$\text{于是 } \tan \alpha = \frac{\tan \theta + \frac{2a \sin \theta}{2a \cos \theta}}{1 - \tan \theta \cdot \frac{2a \sin \theta}{2a \cos \theta}} = \tan 2\theta$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \tan(\alpha - \theta) = \tan \beta$$

由于 $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$, 于是 $\theta = \beta$

$$26. \text{解: } dr = dr(t) = r'(t)dt = \frac{2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} dt$$

由于 $x'(t)dt = dx(t) = dx$, $y'(t)dt = dy(t) = dy$

$$\text{于是 } dr = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$d\theta = d\theta(t) = \theta'(t)dt = \frac{\frac{y'(t)x(t) - x'(t)y(t)}{x^2(t)}}{1 + \frac{y^2(t)}{x^2(t)}} \cdot dt$$

$$= \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

27. (1) 由隐函数求导法则可得 (即等式两边对 x 求导数)

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' - y - xy' = 0, \text{ 于是 } y' = \frac{3x^2 - y}{x - 3y^2}$$

$$(3) \cos x + 2\cos y \cdot (-\sin y) \cdot y' = 0$$

$$\text{于是 } y' = \frac{\cos x}{2\cos y \cdot \sin y} = \frac{\cos x}{\sin 2y}$$

(2), (4) 同样方法可求.

$$28. (1) \text{证: } (\sinh x)' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$\text{同理 } (\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\tanh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)' = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{4e^x \cdot e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\text{同理 } (\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

(2) 解: $y = \operatorname{arcsinh} x$, 则 $\sinh y = x$, 于是有

$$y' = (\operatorname{arcsinh} x)' = \frac{1}{(\sinh y)'} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 y}} \\ = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

同理, 分别令 $y = \operatorname{arcosh} x$, $\operatorname{artanh} x$, $\operatorname{arcoth} x$, 可得

$$(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{(\cosh y)'} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{(\tanh y)'} = \cosh^2 y = \frac{1}{1 - \tanh^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$(\operatorname{arcoth} x)' = \frac{1}{(\coth y)'} = -\sinh^2 y = \frac{1}{1 - \coth^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$(\operatorname{arsinh}(\tanh x))' = \frac{1}{\sqrt{1 + \tanh^2 x} \cdot \cosh^2 x} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 x + \sinh^2 x} \cdot \cosh x}$$

29. 解: $y=0$ 时 $xy=0=\lambda$ 无意义 ($x=0$ 时同理)

$$y>0 \text{ 时, } y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \text{ 于是 } y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\text{由 } xy=\lambda, \text{ 于是 } x \neq 0 \text{ 时 } y' = -\frac{\lambda}{x^2} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\text{即 } -\frac{xy}{x^2} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}} \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} = \frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\text{于是 } x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}, \text{ 此时 } y = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

由椭圆的对称性可知 $y<0$ 时有 $x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}, y = -\frac{b}{\sqrt{2}}$

$$\text{于是 } \lambda = \pm \frac{ab}{2}.$$

对于 $(x_1, y_1) = (\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$, 过该点切线的斜率为

$$y'_1 = -\frac{bx_1}{a\sqrt{a^2-x_1^2}} = -\frac{b}{a}, \text{ 于是该切线方程为 } y = -\frac{b}{a}x + \sqrt{2}b$$

其余三条切线方程同理可求.

30. 证: 对于曲线 $y=a^x$ 上任意一点 (x_0, a^{x_0}) .

过该点的切线斜率为 $k = a^{x_0} \ln a$

于是切线方程为 $y = (a^{x_0} \ln a)x + a^{x_0}(1 - x_0 \ln a)$

$$\text{当 } y=0 \text{ 时, } x = x_0 - \frac{1}{\ln a}$$

$$\text{于是题设中所求投影 } P = |x_0 - x_0 + \frac{1}{\ln a}| = |\frac{1}{\ln a}|$$

31. 常规计算, 略.

32. 同 26 题, 这里只展示 (3), 其余读者应自行补充.

$$(3) dy = dy(x) = y'(x)dx = \frac{\pm \cos(u(x)+v(x))}{\pm \sin(u(x)+v(x))} \cdot (u'(x)+v'(x))dx$$

注意到 $u'(x)dx = du(x) = du$, 同理 $v'(x)dx = dv$

$$\text{于是 } dy = \cot(u+v)(du+dv)$$

33. (1) 我们先来看一下利用微分估值的原理

由微分的定义, 对于 $y = f(x)$, 存在常数 A , 使得

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \rightarrow 0)$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处可微, 并称 $A\Delta x$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的微分.

$$\text{记 } dy = A\Delta x \text{ 或 } df(x_0) = A\Delta x$$

我们知道, A 其实就是 $f'(x_0)$, 也就是过点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线的斜率, 那么 $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + A\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \rightarrow 0)$ 也就是 $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \rightarrow 0)$

于是对于难以计算的 $f(y_0)$, 找到容易计算的 $f(x_0)$, 此时 $\Delta x = y_0 - x_0$, 那么 $f(y_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \rightarrow 0)$. 由 $o(\Delta x) \quad (\Delta x \rightarrow 0)$ 的意义可知, 所找的 x_0 越接近 y_0 , 则这一部分引起的误差越小, 那么 $f(y_0)_{\text{估}} = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ 越接近 $f(y_0)$.

取 $f(x) = \sqrt[3]{x}$, 令 $x_0 = 1$, $\Delta x = 1.02 - x_0 = 0.02$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad f(x_0) = 1, \quad f'(x_0) = \frac{1}{3}$$

$$\text{于是 } f(1.02) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x = 1 + \frac{1}{3} \times (0.02) \approx 1.0067$$

事实上 $\sqrt[3]{1.02} = 1.0066227\cdots$, 估算值已经很接近其真实值.

(2)~(6) 同理可计算.

34. 解: 当 $T = 1$ s 时, 设此时 $l = l_1$. 令 $\Delta l = -0.01$ cm

$$l_2 = l_1 + \Delta l, \text{ 于是 } T(l_2) \approx T(l_1) + T'(l_1)\Delta l$$

$$\text{其中 } T'(l_1) = \frac{\pi}{\sqrt{gl_1}}, \text{ 于是 } T(l_1) - T(l_2) \approx -T'(l_1)\Delta l$$

$$\text{由于 } 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} = 1, \text{ 于是 } T'(l_1) = \frac{2\pi^2}{9}$$

$$\text{于是 } T(l_1) - T(l_2) \approx \frac{2\pi^2}{9} \times (0.01) \approx 0.0002 \text{ s}$$

$$\text{一天 } 24 \text{ h 有 } 24 \times 60 \times 60 = 86400 \text{ s}$$

$$\text{于是每天快 } 86400 \times 0.0002 = 17.28 \text{ s}$$

$$35. f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x^3, & x < 0 \end{cases}, \text{于是 } f'_+(0) = 3x^2|_{x=0} = 0, \text{则 } f'(0) = 0 \\ f'_-(0) = -3x^2|_{x=0} = 0$$

$$f''_+(0) = 6x|_{x=0} = 0, f''_-(0) = -6x|_{x=0} = 0, \text{则 } f''(0) = 0$$

$$f'''_+(0) = 6, f'''_-(0) = -6, \text{则 } f'''(0) \text{ 不存在}$$

$$\text{于是 } f^{(n)}(0) \ (n \geq 3) \text{ 不存在.}$$

$$36. (1) y' = \frac{1}{a^x} \cdot a^x \ln a = \ln a$$

$$\text{于是 } y^{(n)}(x) = 0 \ (n \geq 2)$$

$$(2) \text{注意到 } y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

$$\text{于是 } y^{(n)}(x) = \left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} \\ = (-1)^n \cdot n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right]$$

$$(3) \text{根据 Leibniz 公式}$$

$$y^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\right)^{(n-k)} \cdot (1+x)^{(k)}$$

$$\text{由于 } (1+x)' = 1, (1+x)^{(n)} = 0 \ (n \geq 2)$$

$$\text{于是 } y^{(n)}(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\right)^{(n)} \cdot (1+x) + n \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\right)^{(n-1)} \\ = (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3^n} (1-x)^{-\frac{1}{3}-n} (1+x) \\ + n(-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-5)}{3^{n-1}} (1-x)^{-\frac{1}{3}-n+1}$$

$$(4) \text{利用公式 } \sin nx = n \sin x \left(1 - \frac{n^2-1}{3!} \sin^2 x + \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!} \sin^4 x - \cdots\right)$$

$$\text{于是 } \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x, \text{则 } \sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$$

$$\text{于是 } y^{(n)}(x) = \left(\frac{3}{4} \sin x\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{4} \sin 3x\right)^{(n)} \\ = \frac{3^n}{4} \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1^n}{4} \sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

35. 题这里的做法需要做一个说明, 初学者可以借助这个说明体会一些关于导数的基本问题.

对于 $g(x) = x^3 (x > 0)$, 它的导函数是 $g'(x) = 3x^2 (x > 0)$. 显然 $g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是连续的, 并且

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} g'(x) = 0$$

于是做一个连续延拓

$$\tilde{g}'(x) = \begin{cases} g'(x), & x \in (0, +\infty) \\ \lim_{x \rightarrow 0+0} g'(x) = 0, & x = 0 \end{cases}$$

并且 $\tilde{g}'(x) = 3x^2 (x \geq 0)$

到这一步后, 先来明确一些重要的问题:

(1) 回顾书中关于导函数的定义, 思考

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

与

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$$

之间的关系. 上一章中我们学习过

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$$

当且仅当 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续. 需要注意的是, 一个函数可导, 则这个函数一定连续, 但是这个函数的导函数不一定连续. 譬如下面这个经典的例子

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

对于 $x \neq 0$ 有

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

对于 $x = 0$ 按照导数定义

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right) = 0$$

于是

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

显然 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处并不连续, 并且 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处的左极限与右极限都不存在.

(2) $\tilde{g}'(0)$ 是否是 $\tilde{g}(x) = x^3 (x \geq 0)$ 在 $x = 0$ 处的导数, 原本要求的 $f'(0)$ 与 $\tilde{g}'(0)$ 是什么关系? 回答这个问题之前, 我们先来看一下

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x)$$

与

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0)$$

之间的关系. 同 (1), 如果 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 处右连续, 那么

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x) = f'(x_0 + 0) = f'(x_0)$$

由于 $f'(x_0)$ 存在的充要条件为 $f'_+(x_0)$ 与 $f'_-(x_0)$ 存在且相等, 于是

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x) = f'(x_0 + 0) = f'(x_0)$$

$$= f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

其次再回顾书中对于导函数的说明, 强调了是在开区间 (a, b) 上用以下导函数的定义式算出

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

如果是闭区间 (以 $[a, b]$ 为例说明), 那么当 $x = a$ 时, 其实上式是失效的, 因为 $\Delta x \rightarrow 0 - 0$ 时, $f(x + \Delta x)$ 是没有定义的, 也就是说, 在闭区间上可导, 其实对于端点处要求的是单侧导数存在, 于是对于闭区间的端点, 所讨论的“导数”其实是单侧导数. 因此对于闭区间 (以 $[a, b]$ 为例) 讨论的导函数其实是对 $f(x)$ 在 (a, b) 上的导函数 $f'(x)$ 做了一个延拓 (不一定连续), 即

$$\tilde{f}'(x) = \begin{cases} f'(x), & x \in (a, b) \\ f'_+(x), & x = a \end{cases}$$

我们接着对 $\tilde{g}(x) = x^3 (x \geq 0)$ 再做一个延拓

$$\tilde{\tilde{g}}(x) = x^3 (x \in (-\infty, +\infty))$$

那么有

$$\tilde{\tilde{g}}'(x) = 3x^2, x \in (-\infty, +\infty)$$

此时 $\tilde{\tilde{g}}'(0) = \tilde{\tilde{g}}'_+(0) = \tilde{\tilde{g}}'_-(0) = 0$

再由以上的讨论可知, 对于 $\tilde{g}(x) = x^3 (x \geq 0)$, 在 $x = 0$ 处讨论的应该是单侧导数, 而易知 $\tilde{\tilde{g}}'_+(0) = \tilde{g}'_+(0)$, 于是

$$\tilde{\tilde{g}}'_+(0) = \tilde{g}'_+(0) = 0 = \tilde{g}'(0)$$

也就是说, 我们一开始所做的连续开拓 $\tilde{g}'(0)$, 就是 $\tilde{g}(x) = x^3 (x \geq 0)$

在 $x = 0$ 处的右导数, 而 $\tilde{g}'_+(0)$ 也就是 $f'_+(x)$

同样地, 对于 $h(x) = -x^3 (x < 0)$, 首先 $h'(x) = -3x^2 (x < 0)$ 在定义域上都是连续的, 因此可以做一个连续延拓

$$\tilde{h}'(x) = \begin{cases} h'(x), & x < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0-0} h'(x) = 0, & x = 0 \end{cases} = -3x^2$$

于是 $\tilde{h}'(0)$ 就是 $\tilde{h}(x) = -x^3 (x \leq 0)$ 在 $x = 0$ 处的单侧导数 $\tilde{h}'_-(0)$, 而 $\tilde{h}(x) = -x^3 (x \leq 0)$ 在 $x = 0$ 处的单侧导数也就是要求的 $f(x)$ 在 $x = 0$

处的单侧导数 $f'_-(x)$, 这里要注意, 在解答中将 $f(x)$ 分为了两段, 即

$$f(x) = \begin{cases} \tilde{g}(x), & x \geq 0 \\ h(x), & x < 0 \end{cases}$$

如果仅仅看其中一段 $h(x) = -x^3 (x < 0)$, 那么此时 $x = 0$ 处连定义都没有, 又何来的导数或者单侧导数呢? 正是有了以上的讨论, 才得出

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} h'(x) = \tilde{h}'(0) = \tilde{h}'_-(0) = f'_-(x)$$

而由于

$$\tilde{h}'(x) = \begin{cases} h'(x), & x < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0-0} h'(x) = 0, & x = 0 \end{cases}$$

其实就是 $\tilde{h}'(x) = -3x^2 (x \leq 0)$, 因此取

$$\tilde{h}'(0) = -3x^2 (x = 0)$$

就可以了.

这里还有最后一个问题, 既然对于闭区间上的导函数, 其端点处本身就是做了一个取值为单侧导数的延拓, 那么直接求单侧导数不就可以了吗, 这里阐述的做法不就是多做了一些无用功了吗? 实际上这道题目最经典或者最常见的做法确实是直接用定义去求单侧导数 (以

$f'_-(x)$ 为例), 即

$$f'_-(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{-x^3 - 0}{x} = 0$$

同理 (在求出 $f'(0) = 0$ 后)

$$f'_-(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{-3x^2 - 0}{x} = 0$$

以此类推.

但是需要注意, 这里阐述的做法其实并没有去求这个极限, 回顾上文, 我们仅仅用到了 $h(x)$ 的导函数 $h'(x)$ 的连续性, 以及在端点处的单侧极限存在, 因此可以连续延拓, 并且延拓后的 $\tilde{h}'(x)$ 就是 $\tilde{h}(x)$ 的导数, 对于端点来说当然就是单侧导数. 或者从另一个方面来理解, 如果直接看 $(-\infty, +\infty)$ 上的 $\tilde{\tilde{g}}(x)$, 那么由于 $\tilde{\tilde{g}}'(x) = 3x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续性, 对于 $\tilde{\tilde{g}}(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的限制, 也就是 $\tilde{g}(x) = x^3 (x \geq 0)$, 在 $x = 0$ 处的右导数, 既可以理解为 $g'(x) = 3x^2 (x > 0)$ 的连续延拓

$$\tilde{g}'(x) = \begin{cases} g'(x), & x \in (0, +\infty) \\ g'_+(x), & x = 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处的取值, 也可以理解为 $\tilde{\tilde{g}}'(x) = 3x^2 (x \in (-\infty, +\infty))$ 的限制在 0 处的取值, 经过我们的讨论, 可以知道他们都是相等的.

$$(5) y' = e^x \sin x + e^x \cos x = \sqrt{2} e^x \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$\text{对于 } n=1, y^{(1)} = 2^{\frac{1}{2}} e^x \sin(x + \frac{\pi}{4}) \text{ 成立}$$

$$\text{假设对于 } n=k, y^{(k)} = 2^{\frac{k}{2}} e^x \sin(x + \frac{k\pi}{4}) \text{ 成立 } (k \geq 1)$$

$$\begin{aligned} \text{那么 } y^{(k+1)} &= 2^{\frac{k}{2}} e^x \sin(x + \frac{k\pi}{4}) + 2^{\frac{k}{2}} e^x \cos(x + \frac{k\pi}{4}) \\ &= 2^{\frac{k}{2}} e^x (\sin(x + \frac{k\pi}{4}) + \cos(x + \frac{k\pi}{4})) \\ &= 2^{\frac{k}{2}} \cdot e^x \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(x + \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) \\ &= 2^{\frac{k+1}{2}} e^x \sin(x + \frac{(k+1)\pi}{4}) \end{aligned}$$

$$\text{于是 } y^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin(x + \frac{n}{4} \pi)$$

$$(6) \text{注意到 } x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

$$\text{于是 } y = \frac{x^n - 1}{1-x} = \frac{x^n - 1}{1-x} + \frac{1}{1-x} = -(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) + \frac{1}{1-x}$$

$$\text{于是 } y^{(n)} = (\frac{1}{1-x})^{(n)} = -(\frac{1}{x-1})^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot n! \cdot \frac{1}{(x-1)^{n+1}}$$

$$\begin{aligned} (7) y &= \frac{x^n}{x^2-1} = \frac{x^n}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2} (\frac{x^n}{x-1} - \frac{x^n}{x+1}) \\ &= \frac{1}{2} (\frac{x^{n-1}}{x-1} + \frac{1}{x-1} + \frac{(-x)^{n-1}}{-x-1} \cdot (-1)^n + \frac{(-1)^n}{-x-1}) \end{aligned}$$

$$\text{其中 } (\frac{x^{n-1}}{x-1})^{(n)} = (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)^{(n)} = 0$$

$$(\frac{(-x)^{n-1}}{-x-1} \cdot (-1)^n)^{(n)} = (-1)^n \cdot ((-x)^{n-1} + (-x)^{n-2} + \dots + (-x) + 1)^{(n)} = 0$$

$$(\frac{1}{x-1})^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot (x-1)^{-1-n}$$

$$\begin{aligned} (\frac{(-1)^n}{-x-1})^{(n)} &= (-1)^{n+1} \cdot (\frac{1}{x+1})^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot (-1)^n \cdot n! \cdot (x+1)^{-1-n} \\ &= -n! (x+1)^{-1-n} \end{aligned}$$

$$\text{于是 } y^{(n)} = \frac{1}{2} (-1)^n \cdot n! \cdot (x-1)^{-1-n} - \frac{1}{2} n! (x+1)^{-1-n}$$

(8) 根据 Leibniz 公式,

$$y^{(n)} = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-k)} (\ln x)^{(k)} \\ = (-1)^n \cdot n! \cdot \frac{1}{x^{n+1}} \ln x + \sum_{k=1}^n C_n^k \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-k)} (\ln x)^{(k)}$$

$$\sum_{k=1}^n C_n^k \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-k)} (\ln x)^{(k)} \\ = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (-1)^{n-k} \cdot (n-k)! \cdot \frac{1}{x^{n-k+1}} \cdot (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n+1}}$$

$$= (-1)^n \cdot n! \cdot \frac{1}{x^{n+1}} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{(-1)}{k}$$

$$\text{于是 } y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot \frac{1}{x^{n+1}} \left(\ln x - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)$$

31. 证: 法一: 求出 y' , y'' , 代入即得证.

(为基础计算, 过程较为冗长, 略)

法二: 首先补充一知识点 $\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
(证明放在题后)

对于 $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{1+x^2} > 0$, 于是 $\ln y = m \ln(x + \sqrt{1+x^2})$
 $= m \cdot \operatorname{arcsinh} x$

对等式两边求导, 再由 28 题可得

$$y' \cdot \frac{1}{y} = \frac{m}{\sqrt{1+x^2}} \quad (1), \text{ 再求得 } \frac{y y'' - y'^2}{y^2} = -\frac{xm}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2)$$

由 (1), (2) 式可得

$$\frac{y''}{y} = \left(\frac{y'}{y}\right)^2 - \frac{xm}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m^2}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{y'}{y}$$

$$\text{于是 } (1+x^2)y'' + xy' = m^2 y$$

37. 补充: 对于 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, 令 $y = \sinh x$

$$\text{则 } y = \frac{1}{2} \left(\frac{(e^x)^2 - 1}{e^x} \right) \Rightarrow 2e^x y = (e^x)^2 - 1$$

$$\text{即 } (e^x)^2 - 2y \cdot e^x - 1 = 0, \text{ 已知 } y > 0, \text{ 令 } e^x = t,$$

则上式可视为关于 t 的二次方程 $t^2 - 2yt - 1 = 0$

$$\text{且 } \Delta = 4y^2 + 4 > 0$$

$$\text{于是 } t = e^x = \frac{2y \pm \sqrt{\Delta}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

$$\text{显然 } y - \sqrt{y^2 + 1} < 0 < e^x, \text{ 于是 } e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

$$\text{得 } x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

$$\text{于是 } \operatorname{arcsinh}(\sinh x) = \operatorname{arcsinh} y = x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

$$\text{则 } \operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

用同样的方法可求得 $\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

$$\text{对于 } \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \text{ 令 } y = \tanh x$$

$$\text{则 } y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1} \Rightarrow e^{2x} + 1 = \frac{2}{1-y} \Rightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$$

$$\text{于是 } 2x = \ln \frac{1+y}{1-y} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}$$

$$\operatorname{artanh}(\tanh x) = \operatorname{artanh} y = x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}$$

$$\text{于是 } \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$\text{同理有 } \operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$$

38. 证: 法一: 直接求导得到 $T_n'(x)$ 与 $T_n''(x)$ 代入即证.

法二: $\arccos(2^{n-1} T_n(x)) = n \arccos x$, 两边求导得

$$-\frac{2^{n-1} T_n'(x)}{\sqrt{1 - (2^{n-1} T_n(x))^2}} = -\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ 平方后移项可得}$$

$$2^{2n-2} (1-x^2) T_n'^2(x) = n^2 (1 - 2^{2n-2} T_n^2(x)), \text{ 再求导可得}$$

$$2^{2n-2} [(1-x^2) 2 T_n'(x) T_n''(x) - 2x T_n'^2(x)] = n^2 (-2^{2n-2} \cdot 2 T_n(x) T_n'(x))$$

$$\text{消去 } 2^{2n-2} \cdot 2 T_n'(x) \text{ 即为 } (1-x^2) T_n''(x) - x T_n'^2(x) + n^2 T_n(x) = 0$$

39. (1) 等式两边对 x 求导可得

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} \cdot y' = 0, \text{ 再次求导可得}$$

$$-\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} \cdot y'' - \frac{2}{9}y^{-\frac{4}{3}} \cdot y'^2 = 0$$

$$\begin{aligned}\text{于是 } y'' &= \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}y^{-1}y'^2 \\ &= \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

40. 解: $t \geq 0$ 时, $x = 2t + t = 3t \geq 0$

$$t < 0 \text{ 时, } x = 2t - t = t < 0$$

于是 $t \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0, t < 0 \Leftrightarrow x < 0$

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} \frac{16}{81}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \sin \frac{x}{3}, & x \geq 0 \\ 16x^4 - 9x^3 \sin x, & x < 0 \end{cases}$$

按照 35 题方法便可计算 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的各阶导数.

(后续过程冗长但基础, 略)

对于这道题, 有的同学可能会想采用参数式函数的求导法.

$$\text{当 } x \geq 0 \text{ 时, } t \geq 0, \text{ 于是 } \begin{cases} x = 3t \\ y = 16t^4 + 9t^3 \sin t \end{cases}$$

$$\text{于是 } f'_+(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{64t^3 + 27t^2 \sin t + 9t^3 \cos t}{3}$$

$$x=0 \Leftrightarrow t=0, \text{ 于是 } f'_+(0) = 0$$

$$\text{同样可求出 } f'_-(0) = 0 \text{ 于是 } f'(0) = 0$$

$$\text{但 } f''_+(x) \neq \frac{y''(t)}{x''(t)} \text{ 而是 } f''_+(x) = (y'(t)t'(x))'$$

$$= y''(t) \cdot t'^2(x) + y'(t) \cdot t''(x)$$

$$\text{由于 } t'(x) = \frac{1}{x'(t)} = \frac{1}{3} \text{ 于是 } t''(x) = 0, \text{ 则 } f''_+(x) = y''(t) \cdot t'^2(x)$$

对于 $f''_-(x)$ 同理.

还需要注意的是, $x(t)$ 与 $t(x)$ 是互为反函数, 但 $t'(x)$ 与 $x'(t)$

并不具有这样的关系, 因此 $t''(x) \neq \frac{1}{x''(t)}$.

41. 证:

(1) 当 $n=1$ 时, $y = \ln x$, $y' = \frac{1}{x} = \frac{(1-1)!}{x}$, 成立 ($0! = 1$)

假设 $n=k$ 时成立, 即 $y = x^{k-1} \ln x$, $y^{(k)} = \frac{(k-1)!}{x}$ ($k \geq 1$)

那么对于 $n=k+1$, 有

$$y = x^k \ln x, \quad y^{(k)} = (x \cdot x^{k-1} \ln x)^{(k)} = \sum_{i=0}^k C_k^i (x^{k-1} \ln x)^{(k-i)} (x)^{(i)}$$

由于 $(x)^{(j)} = 0$ ($j \geq 2$)

$$\text{于是 } y^{(k)} = (x^{k-1} \ln x)^k \cdot x + k \cdot (x^{k-1} \ln x)^{(k-1)}$$

$$= (k-1)! + k (x^{k-1} \ln x)^{(k-1)}$$

$$\text{因此 } y^{(k+1)} = k \cdot ((x^{k-1} \ln x)^{(k-1)})' = k \cdot \frac{(k-1)!}{x} = \frac{k!}{x}$$

成立, 由数学归纳法可知命题为真.

(2) 当 $n=1$ 时, $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} = (-1)^1 \cdot \frac{1! \cdot c^1}{(cx+d)^{1+1}} (bc-ad)$ 成立

假设 $n=k$ 时成立, 即 $y^{(k)} = (-1)^k \frac{k! c^{k-1}}{(cx+d)^{k+1}} (bc-ad)$ ($k \geq 1$)

那么对于 $n=k+1$, $y^{(k+1)} = (y^{(k)})'$

$$\text{即 } y^{(k+1)} = \frac{(-1)^k \cdot k! c^{k-1} \cdot (-k-1)}{(cx+d)^{k+2}} \cdot c \cdot (bc-ad)$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{(k+1)! c^k}{(cx+d)^{k+2}} (bc-ad)$$

成立, 于是由数学归纳法可知命题为真.

(3) 同上, 读者自行补充.

42. 证: 首先证明一个式子 $\frac{d^m}{dx^m} [\sin(\ln|x|)] = \frac{1}{x^m} \sum_{i=1}^m a_i \sin(\ln|x| + i\frac{\pi}{2})$ (1)

其中 a_i ($i=1, 2, \dots, m$) 为某些常数, ($x \neq 0$)

对于 $x < 0$

$$\begin{aligned} \text{当 } m=1 \text{ 时, } (\sin(\ln|x|))' &= (\sin(\ln(-x)))' = \frac{1}{x} \cos(\ln(-x)) \\ &= \frac{1}{x} \sin(\ln|x| + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

对于 $x > 0$

$$\text{当 } m=1 \text{ 时, 同上可证 } (\sin(\ln|x|))' = \frac{1}{x} \sin(\ln|x| + \frac{\pi}{2})$$

于是 $m=1$ 时, (1) 式成立

假设 $m=k$ 时, (1) 式成立 ($k \geq 1$)

对于 $m=k+1$ 时

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} [\sin(\ln|x|)] &= \left(\frac{1}{x^k} \sum_{i=1}^k a_i \sin(\ln|x| + i\frac{\pi}{2}) \right)' \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{x^k} a_i \sin(\ln|x| + i\frac{\pi}{2}) \right)' \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{由于 } \left(\frac{1}{x^k} a_i \sin(\ln|x| + i\frac{\pi}{2}) \right)' &= -k \frac{1}{x^{k+1}} a_i \sin(\ln|x| + i\frac{\pi}{2}) \\ &\quad + \frac{1}{x^{k+1}} a_i \cos(\ln|x| + i\frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x^{k+1}} \left(a_i \sin(\ln|x| + i\frac{\pi}{2}) + a_i \sin(\ln|x| + (i+1)\frac{\pi}{2}) \right)$$

$$\text{于是 (2) 式} = \frac{1}{x^{k+1}} \sum_{i=1}^{k+1} b_i \sin(\ln|x| + i\frac{\pi}{2})$$

其中 $b_1 = a_1$, $b_j = a_{j-1} + a_j$ ($j=2, 3, \dots, k$), $b_{k+1} = a_k$

于是 b_i ($i=1, 2, \dots, k+1$) 为某些常数.

由数学归纳法可知 (1) 式成立

$$\begin{aligned}
 \text{于是 } f^{(L)}(x) &= \sum_{m=0}^L C_L^m (x^n)^{(L-m)} (\sin(\ln|x|))^{(m)} \\
 &= \sum_{m=0}^L C_L^m \cdot \frac{n!}{(n-L+m)!} x^{n-L+m} \cdot \frac{1}{x^m} \sum_{i=1}^m a_i \sin(\ln|x| + i\frac{\pi}{2}) \\
 &= \sum_{m=0}^L C_L^m \cdot \frac{n!}{(n-L+m)!} x^{n-L} \sum_{i=1}^m a_i \sin(\ln|x| + i\frac{\pi}{2}) \quad (x \neq 0) \quad (3)
 \end{aligned}$$

若 $n=1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin(\ln|x|)$ 不存在

于是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导, 命题成立.

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^{n-1} \sin(\ln|x|)) = 0 = f'(0)$$

于是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有一阶导数

对于 $L=2, 3, \dots, n-1$

$$f^{(L)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(L-1)}(x) - f^{(L-1)}(0)}{x}, \text{ 由 } f'(0)=0 \text{ 可依次推出}$$

$$f^{(L)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-L} \sum_{m=0}^{L-1} C_{L-1}^m \cdot \frac{n!}{(n-L+1+m)!} \sum_{i=1}^m a_i \sin(\ln|x| + i\frac{\pi}{2}) = 0$$

对于 $L=n$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m \cdot \frac{n!}{(1+m)!} \sum_{i=1}^m a_i \sin(\ln|x| + i\frac{\pi}{2}) \quad (4)$$

上式发散, 于是 $f^{(n)}(0)$ 不存在

综上 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有直到 $n-1$ 阶导数且都为 0, n 阶导数不存在

(关于 (4) 式为何发散, 并不是简单的由 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\ln|x| + i\frac{\pi}{2})$ 发散就可

得出的, 因为 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 不存在, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 不存在, 但 $\lim_{x \rightarrow a} f+g$ 是可

能存在的, 这里提供一个思路供有兴趣的同学思考

提示: ① a_i 不全为零

② 函数极限的柯西收敛准则)

43. 证:

$$\begin{aligned}
 (1) \sum_{k=0}^n k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=1}^n k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
 &\stackrel{\text{令 } k-1=t}{=} n \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{t!(n-1-t)!} x^{t+1} (1-x)^{n-1-t} \\
 &= nx \sum_{t=0}^{n-1} C_{n-1}^t x^t (1-x)^{n-1-t} \\
 &= nx (x + 1-x)^{n-1} = nx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \sum_{k=0}^n k(k-1) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=2}^n k(k-1) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=2}^n \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
 &\stackrel{\text{令 } k-2=t}{=} n(n-1) \sum_{t=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{t!(n-2-t)!} x^{t+2} (1-x)^{n-2-t} \\
 &= n(n-1)x^2 \sum_{t=0}^{n-2} C_{n-2}^t x^t (1-x)^{n-2-t} \\
 &= n(n-1)x^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \sum_{k=0}^n (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^n (k(k-1) + k(1-2nx) + n^2x^2) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \text{ 由上可得} \\
 &= n(n-1)x^2 + (1-2nx)nx + n^2x^2 \\
 &= nx(1-x)
 \end{aligned}$$

44. 证: 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = m$, 于是对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$, 当 $|x| < \delta$ 时

$$m - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(2x) - f(x)}{x} < m + \frac{\varepsilon}{2}$$

对于 x , 构造数列 $x_n = \frac{x}{2^n}$, 则 $|x_n| < |x| < \delta$, 于是有

$$m - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(2x_n) - f(x_n)}{x_n} < m + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ 即}$$

$$\frac{1}{2^n} (m - \frac{\varepsilon}{2}) < \frac{f(\frac{x}{2^{n-1}}) - f(\frac{x}{2^n})}{\frac{x}{2^n}} < \frac{1}{2^n} (m + \frac{\varepsilon}{2})$$

将 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 代入后得到 n 个不等式, 相加得

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} (m - \frac{\varepsilon}{2}) < \frac{\sum_{k=1}^n [f(\frac{x}{2^{k-1}}) - f(\frac{x}{2^k})]}{x} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} (m + \frac{\varepsilon}{2})$$

$$\Rightarrow (1 - \frac{1}{2^n})(m - \frac{\varepsilon}{2}) < \frac{f(x) - f(\frac{x}{2^n})}{x} < (1 - \frac{1}{2^n})(m + \frac{\varepsilon}{2}) \quad (1)$$

当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$, $\frac{x}{2^n} \rightarrow 0$, 由于 f 在 $x=0$ 处连续

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{x}{2^n}) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{2^n}) = f(0)$$

于是 $n \rightarrow +\infty$ 时, 由(1)可得

$$m - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq m + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{即 } \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} - m \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = m, \text{ 即 } f'(0) = m$$

45. 解: $f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$, $(f^{-1})^{(1)}(y) = \frac{d(\frac{1}{f'(x)})}{dy}$

根据链锁法则, $\frac{d(\frac{1}{f'(x)})}{dy} = \frac{d(\frac{1}{f'(x)})}{dx} \cdot \frac{dx}{dy}$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}, \quad \frac{d(\frac{1}{f'(x)})}{dx} = -\frac{f''(x)}{f'^2(x)},$$

$$\text{于是 } (f^{-1})^{(2)}(y) = -\frac{f''(x)}{f'^3(x)}$$

同样地,

$$\begin{aligned}(f^{-1})^{(3)}(y) &= \frac{d\left(-\frac{f''(x)}{f'^3(x)}\right)}{dy} = \frac{d\left(-\frac{f''(x)}{f'^3(x)}\right)}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} \\&= \frac{-f'''(x)f'^3(x) + 3f'^2(x)f''^2(x)}{f'^6(x)} \cdot \frac{1}{f'(x)} \\&= -\frac{f'''(x)}{f'^4(x)} + \frac{3f''^2(x)}{f'^5(x)}\end{aligned}$$

第五章 导数的应用

习题五

1. 证:

这里将证明 a 为 $-\infty$, b 为有限实数, A 为 $+\infty$ 的情况.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +\infty$$

任取一点 $x_0 \in (-\infty, b)$, 记 $f(x_0) = \beta$

再设 $\alpha > \beta$, 于是对于 $\alpha \in \mathbb{R}$

$\exists X < 0$, 使得 $x < X$ 时有 $f(x) > \alpha$

$\exists \delta > 0$, 使得当 $x \in U^-(b, \delta)$ 时有 $f(x) > \alpha$

显然, 对于上述的 X, δ , 有 $X < x_0 < b - \delta$

于是, 任取 $x_1 \in (-\infty, X)$, $x_2 \in (b - \delta, b)$, 有

$$\min_{x \in [x_1, x_0]} \{f(x)\} \leq \beta = f(x_0) < \alpha < f(x_1) \leq \max_{x \in [x_1, x_0]} \{f(x)\}$$

$$\min_{x \in [x_0, x_2]} \{f(x)\} \leq \beta = f(x_0) < \alpha < f(x_2) \leq \max_{x \in [x_0, x_2]} \{f(x)\}$$

由于 $f(x)$ 在 $(-\infty, b)$ 上可导, 因而连续

于是 $f(x)$ 在 $[x_1, x_0]$ 上, $[x_0, x_2]$ 上连续.

由连续函数的介值定理, $\exists \eta' \in (x_1, x_0)$, $\eta'' \in (x_0, x_2)$

使得 $f(\eta') = \alpha = f(\eta'')$, 那么对于 $[\eta', \eta'']$, $f(x)$ 在

其上连续、可导, 于是 $\exists \xi \in (\eta', \eta'')$ 使得 $f'(\xi) = 0$

2. 证: 设 $F(x) = (x-a)^n (x-b)^n$, 那么对于 $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

$$F^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^k C_k^i [(x-a)^n]^{(k-i)} [(x-b)^n]^{(i)}, \text{ 不难看出}$$

$F^{(k)}(a) = F^{(k)}(b) = 0$. 从 $k=0$ 开始, 由 Rolle 微分中值

定理可知, $\exists \xi_{11} \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi_{11}) = 0$. 接着有

$\exists \xi_{21} \in (a, \xi_{11})$, $\exists \xi_{22} \in (\xi_{11}, b)$, 使得

$F''(\xi_{21}) = F''(\xi_{22}) = 0$, 依次类推, 可知 $\exists \xi_{n1} \dots \xi_{nn} \in (a, b)$

使得 $F^{(n)}(\xi_{n1}) = F^{(n)}(\xi_{n2}) = \dots = F^{(n)}(\xi_{nn}) = 0$

□

3. 证: 由 Rolle 微分中值定理可直接证明.

4. 证: 构造 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - ax - bx - cx$, $x \in [0, 1]$

于是 $f(0) = f(1) = 0$, 易知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, 于

是 $\exists \xi \in (0, 1)$ 使得 $f'(\xi) = 0$

$$\text{即 } 4a\xi^3 + 3b\xi^2 + 2c\xi = a + b + c \quad \square$$

5. 证: 由于 $e^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, 于是只需要证明

$L_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$ 有 n 个不同零点

首先证明一个极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$ ($n \in \mathbb{N}$ 为定值)

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ 且 $e^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

于是由 L'Hôpital 法则, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} nx^{n-1} e^{-x}$

同上, 应用 $(n-1)$ 次 L'Hôpital 法则, 有

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} n! e^{-x} = 0$ (虽然这里指出了分子趋于无穷, 但 L'Hôpital 法则是要求这点的)

对于 $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, 有

$$(x^n e^{-x})^{(k)} = \sum_{i=0}^k C_k^i (x^n)^{(k-i)} (e^{-x})^{(i)}$$

于是由上面证明的极限可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n e^{-x})^{(k)} = 0$

又因为 $x=0$ 时, $(x^n e^{-x})^{(k)} = 0$, 于是由 1. 题的

广义 Rolle 微分中值定理及 2. 题证明中的方法

可知 $(x^n e^{-x})^{(n)}$ 有 n 个不同的零点

即 $L_n(x)$ 有 n 个不同的零点.

6. 证: $(-1)^n \frac{1}{n!} e^{\frac{x^2}{2}} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, 于是只需证

$h_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} (e^{-\frac{x^2}{2}})$ 有 n 个不同零点.

注意到 $(e^{-\frac{x^2}{2}})^{(k)} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \pm\infty$), $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

于是同 5. 可证.

7. 证:

- (1) 由题设可得, $\exists M > 0$, 使得对于 $\forall x \in (a, b)$, 有 $|f'(x)| < M$
对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$, 当 $x', x'' \in (a, b)$ 且 $|x' - x''| < \delta$ 时
由于 $f(x)$ 在 (a, b) 上可导, 于是 (不妨设 $x' < x''$) $f(x)$ 在 $[x', x'']$
上可导, 因此 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'}$
于是 $|f(x'') - f(x')| = |f'(\xi)| \cdot |x'' - x'| < M \cdot \delta = \varepsilon$
于是 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续.

(2) 利用 Lagrange 微分中值定理

(3) 同 (2)

8. 证:

- 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = a$, 于是 $\exists X > 0$, 使得 $f(x)$ 在 $[X, +\infty)$ 上可导
于是对于 $\forall x \in [X, +\infty)$, $\forall T > 0$, 由 Lagrange 微分中值定理
 $\exists \xi_x \in (x, x+T)$, 使得 $f'(\xi_x) \cdot T = f(x+T) - f(x)$
显然有 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\xi_x \rightarrow +\infty$, 于是
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+T) - f(x)) = \lim_{\xi_x \rightarrow +\infty} f'(\xi_x) \cdot T = T \cdot a$$

9. 证:

- (1) 对于 $\sin x < x$ ($x > 0$) 只需证 $0 < x \leq 1$ 时成立

$x > 1$ 时自然有 $x > 1 \geq \sin x$

对 $\sin x$ 在 0 和 x 之间利用 Lagrange 微分中值定理
得 $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \cos(\theta x)$ ($\theta \in (0, 1)$)

对于 $0 < x \leq 1$, $\cos(\theta x) < 1$, 因此 $\sin x < x$.

对于 $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$, 设 $F(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ ($x > 0$)

$$F'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \quad (x > 0), \quad F'(0) = 0$$

$$F''(x) = -\sin x + x \quad (x > 0), \quad F''(0) = 0$$

由上可知 $F''(x) > 0$ ($x > 0$), 因此 $F'(x)$ 当 $x > 0$ 时严格递增

因此 $F'(x) > F'(0) = 0$, 于是 $F(x) > F(0) = 0$ ($x > 0$)

即 $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$ ($x > 0$).

(2)~(4) 利用单调性、中值定理等方法容易证明

(5) 对于 $x > 0$, 要证 $\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}$

即证 $(1+x)\ln(1+x) > \arctan x$

做此变形后问题较为容易

10. 证: 令 $F(x) = f(x) - g(x)$, 则 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导

且 $F'(x) > 0$, $F(a) = 0$

于是 $F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调递增

于是 $\forall x > a$, 有 $F(x) > F(a) = 0$

$\forall x < a$, 有 $F(a) = 0 > F(x)$ □

11. 证: 由于 $0 < a < b$, 于是 $\forall x \in [a, b]$ 都有 $x \neq 0$

由函数四则运算的导数可知 对于

$\frac{f(x)}{x}$, $\frac{f(x)}{x^2}$, $\frac{f(x)}{x^3}$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导

且在 (a, b) 内, $(x)'$, $(x^2)'$, $(x^3)'$ 均不为零

于是应用 Cauchy 微分中值定理, 有 $\exists \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (a, b)$

使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2} = \frac{f'(\xi_2)}{2\xi_2}$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3} = \frac{f'(\xi_3)}{3\xi_3^2}$$

$$\text{于是 } (b-a)f'(\xi_1) = (b^2-a^2)\frac{f'(\xi_2)}{2\xi_2} = (b^3-a^3)\frac{f'(\xi_3)}{3\xi_3^2}$$

由于 $b-a \neq 0$, 等式两边同乘 $\frac{1}{b-a}$ 即可得结果 □

12. 证: 任取 $x_0 \in (a, b)$, 因为 $f(x)$ 在 (a, b) 上可导, 不妨设 $f'(x_0) = \alpha$
 $f'(x)$ 在 (a, b) 上单调, 不妨设为单调递增.

于是 对于 $\forall x \in (a, x_0)$, 有 $f'(x) \leq f'(x_0) = \alpha$

对于 $\forall x \in (x_0, b)$, 有 $f'(x) \geq f'(x_0) = \alpha$

且 $f'(x)$ 在 (a, x_0) 上和 (x_0, b) 上都是单调递增的

于是 (有疑惑的同学可以回顾书上定理 3.1.8)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \inf \{f'(x) : x \in (x_0, b)\} \geq \alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \sup \{f'(x) : x \in (a, x_0)\} \leq \alpha$$

首先明确一点, $\alpha \leq \inf \{f'(x) : x \in (x_0, b)\} < +\infty$

这里由于 $f'(x)$ 的单调性, 显然有

$$\inf \{f'(x) : x \in (x_0, b)\} \leq f'(\frac{x_0+b}{2}) < +\infty$$

$$\text{同理 } -\infty < \sup \{f'(x) : x \in (a, x_0)\} \leq \alpha$$

因此, 我们可以设 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \alpha_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \alpha_2$ (α_1, α_2 为有限实数)

现在来证 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$

若 $\alpha_1 \neq \alpha$, $\alpha_2 \neq \alpha$, 则由前述可知 $\alpha_1 > \alpha > \alpha_2$, 由上下确界的定义, 有

$$\forall x_1 \in (x_0, b), \forall x_2 \in (a, x_0), f'(x_1) \geq \alpha_1 > \alpha > \alpha_2 \geq f'(x_2)$$

于是 $\forall x \in (a, b)$, 都有 $f'(x) \neq \frac{\alpha_1 + \alpha}{2}$ 且 $f'(x) \neq \frac{\alpha + \alpha_2}{2}$

再次利用 $f'(x)$ 的单调性, 有

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \inf \{f'(x) : x \in (a, x_0)\} \leq \sup \{f'(x) : x \in (a, x_0)\} = \alpha_2$$

(注: 此时 $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ 是有可能为 $-\infty$ 的, 下述的 $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$ 同样可为 $+\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) = \sup \{f'(x) : x \in (x_0, b)\} \geq \inf \{f'(x) : x \in (x_0, b)\} = \alpha_1$$

由 Darboux 定理, 介于 $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$ 之间的数 η , 都

存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \eta$, 分别取 $\eta = \frac{\alpha_1 + \alpha}{2}, \frac{\alpha + \alpha_2}{2}$,

则推出矛盾, 可知 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, 即 $f'(x)$ 在 x_0 处连续, 由 x_0 的任意性可知 $f'(x)$ 在 (a, b) 上连续.

(注: ① 这里的假设是假设了两个条件, 但最后都否掉了)

② Darboux 定理要求的是闭区间, 这里之所以能用是因为单调, 因而单侧广义极限存在, 回顾书中定理的证明, 同学们可自己将这种情况的 Darboux 定理推广出来)

13. 证: 法一:

由带Peano余项的Taylor公式

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2} h^2 + o_1(h^2) \quad (h \rightarrow 0)$$

$$f(a-h) = f(a) - f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2} h^2 + o_2(h^2) \quad (h \rightarrow 0)$$

$$\text{于是 } f(a+h) + f(a-h) - 2f(a) = f''(a)h^2 + o_1(h^2) + o_2(h^2) \quad (h \rightarrow 0)$$

$$\text{于是 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a)$$

法二: 设 $F(x) = f(a+x) + f(a-x) - 2f(a)$

$$G(x) = x^2$$

由于 $f(x)$ 在点 a 二阶可导, 即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x+a) - f'(a)}{x} = f''(a)$$

于是在 $x=a$ 的邻域内 $f'(x)$ 存在 (设为 $U(a, \delta)$)

则 $F(x)$ 在 $(-\delta, \delta)$ 上可导

取区间 $[0, h]$ 满足 $0 < |h| \leq \delta$ (对于 $h < 0$, $[0, h] = [h, 0]$)

于是 $F(x), G(x)$ 在 $[0, h]$ 上连续, 在 $(0, h)$ 上可导且 $G(x) \neq 0$
于Cauchy'微分中值定理

$$\frac{F(h) - F(0)}{G(h) - G(0)} = \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = \frac{f'(a+\xi) - f'(a-\xi)}{2\xi}$$

其中 $\xi \in (0, h)$, 于是 $h \rightarrow 0$ 时有 $\xi \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h) - F(0)}{G(h) - G(0)} &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f'(a+\xi) - f'(a-\xi)}{2\xi} \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f'(a+\xi) - f'(a) + f'(a) - f'(a-\xi)}{2\xi} \\ &= f''(a) \end{aligned}$$

$$\text{即 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a)$$

14. 证: 由题设得 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 因而在 $[a, c]$ 上可导
由 Lagrange 微分中值定理, $\exists \xi_1 \in (a, c)$, 使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{f(c)}{c - a} > 0$$

同理, $\exists \xi_2 \in (c, b)$ 使得

$$f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} = \frac{-f(c)}{b - c} < 0$$

由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 于是在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上二阶可导
对于 $f'(x)$ 应用 Lagrange 微分中值定理, 可知 $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2)$
使得 $f''(\xi) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0$

15. 证:

$$(1) \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}, \text{ 于是 } \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = 2\sqrt{x+\theta(x)}$$

$$\theta(x) = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) + 1}{4}, \quad x \geq 0, \text{ 则 } \theta'(x) = \frac{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}{4\sqrt{x^2+x}}, \quad x > 0$$

$$\text{由于 } 2x+1-2\sqrt{x^2+x} = 2\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2} - 2\sqrt{x^2+x} > 0, \quad x > 0$$

于是 $\theta(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单增

又因为 $\theta(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta(x) = \theta(0) = \frac{1}{4} \leq \theta(x), \quad x \in [0, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2} \geq \theta(x), \quad x \in [0, +\infty)$$

(2) 由上可得

16. 证: 法一:

设 k 为使下式成立的实数

$$f(b) - f(a) - \frac{1}{2}(b-a)[f'(a) + f'(b)] + \frac{1}{12}(b-a)^3 k = 0$$

问题是等价于证明 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$k = f^{(3)}(\xi)$$

$$\text{令 } F(x) = f(b) - f(x) - \frac{1}{2}(b-x)[f'(x) + f'(b)] + \frac{k}{12}(b-x)^3$$

则 $F(a) = F(b) = 0$, 根据 Rolle 微分中值定理

$\exists \xi_1 \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi_1) = 0$, 即

$$-f'(\xi_1) + \frac{1}{2}(f'(b) + f'(\xi_1)) - \frac{1}{2}(b-\xi_1)f''(\xi_1) - \frac{k}{4}(b-\xi_1)^2 = 0$$

$$\text{即 } -f'(\xi_1) + f'(b) - (b-\xi_1)f''(\xi_1) - \frac{k}{2}(b-\xi_1)^2 = 0$$

$$\text{即 } f'(b) = f'(\xi_1) + f''(\xi_1)(b-\xi_1) + \frac{k}{2}(b-\xi_1)^2$$

由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式可知

$$f'(b) = f'(\xi_1) + f''(\xi_1)(b-\xi_1) + \frac{f^{(3)}(\xi)}{2}(b-\xi_1)^2$$

其中 $\xi \in (\xi_1, b)$, 于是 $k = f^{(3)}(\xi)$ $\square$

法二:

$$\text{设 } F(x) = f(x) - f(a) - \frac{1}{2}(x-a)[f'(a) + f'(x)]$$

$$G(x) = \frac{1}{12}(x-a)^3$$

则 $F(x), G(x)$ 均在 $[a, b]$ 上三阶可导

$$\text{注意到 } F'(x) = f'(x) - \frac{1}{2}[f'(a) + f'(x)] - \frac{1}{2}(x-a)f''(x)$$

$$G'(x) = \frac{1}{4}(x-a)^2$$

$$\text{于是 } F'(a) = G'(a) = 0$$

由 Cauchy 微分中值定理

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{F'(c) - F'(a)}{G'(c) - G'(a)} = \frac{F''(\xi)}{G''(\xi)} = -f^{(3)}(\xi)$$

其中 $c \in (a, b)$, $\xi \in (a, c)$

$$\text{于是 } \frac{F(b)}{G(b)} = -f^{(3)}(\xi), \text{ 移项可得} \quad \square$$

17. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 确有 $\zeta \rightarrow 0$, 但 $\zeta \in (0, x)$, 在 $x \rightarrow 0$ 的过程中, ζ 可能只取某些特殊的值, 即 ζ 可能是按照一些“特殊路径”趋于零

例如取 $a_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, 则 $n \rightarrow \infty$ 时 $a_n \rightarrow 0$ 且 $\cos \frac{1}{a_n} \equiv 0$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{a_n} = 0$, 但 $\lim_{t \rightarrow 0} \cos \frac{1}{t}$ 不存在. 实际上在第三章我们学过

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \text{ 趋近于 } a \text{ 的数列 } \{x_n\}, \text{ 都有 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

这里再回顾 13. 题的解法二, 由于已经有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(a+x) - f'(a-x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(a+x) - f'(a) + f'(a) - f'(a-x)}{2x} = f''(a)$$

那么以任意方式趋近 0 的 ζ , 都有

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{f'(a+\zeta) - f'(a-\zeta)}{2\zeta} = f''(a)$$

18. 证: 任取 $\varepsilon > 0$, 例如取 $\varepsilon = 1$, 则对于 $\forall \delta > 0$

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 则对于 $M = \frac{2}{\delta} > 0$, $\exists X > 0$

当 $x > X$ 时, 有 $f'(x) > M$. 此时, 取 $x_1 > X$, 再令 $x_2 = x_1 + \frac{\delta}{2}$

则 $|x_2 - x_1| = \frac{\delta}{2} < \delta$, 但由 Lagrange 微分中值定理可知

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| = |f'(\zeta)|, \zeta \in (x_1, x_2)$$

$$\text{于是 } |f(x_2) - f(x_1)| = |x_2 - x_1| \cdot |f'(\zeta)| = \frac{\delta}{2} \cdot |f'(\zeta)| > \frac{\delta}{2} \cdot M = 1$$

因此 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上不连续

19. 证: $f'(x) = \ln x + 1 \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow +\infty)$

由 18. 可得

对于18题,这里再做一个延伸,我们先来证明在题目条件下有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

证:法一:应用 L'Hôpital 法则

法二:已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 则对于 $\forall M > 0, \exists A > 0$, 当 $x > A$ 时

有 $f'(x) > 2M$. 再由 Lagrange 微分中值定理可知

对 $x > 2A > 0, \exists \xi: A < \xi < x$, 使得

$$f(x) = f(A) + f'(\xi)(x - A)$$

$$\text{故 } \frac{f(x)}{x} = \frac{f(A)}{x} + f'(\xi) \cdot \frac{x-A}{x}, \text{ 由于 } x > 2A$$

$$\text{于是 } \frac{f(x)}{x} > \frac{f(A)}{x} + \frac{1}{2} f'(\xi) = \frac{f(A)}{x} + M$$

容易证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 这里不再叙述, 因此 $\exists x_0 > 0$

使得 $x > x_0$ 时 $f(x) > 0$, 于是取 $A' = \max\{A, x_0\}$

$$\text{由上述可知 } \frac{f(x)}{x} > \frac{f(A')}{x} + \frac{1}{2} f'(\xi) > M$$

其中 $x > 2A', \xi: A' < \xi < x$.

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

□

若已知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ 则利用 L'Hôpital 法则可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 也就是就若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

由18题可知, 此时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致连续.

那么, 一个自然的问题是, 若仅用 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (不要可导) 一个条件, 能否判断 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致连续.

分析: 之前已经知道例如 $f(x) = x^2$ 这样的函数在 $(0, +\infty)$ 上是不一致连续的, 而此时 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, 则意味着 $f(x)$ 是 $x \rightarrow +\infty$ 比 $g(x) = x$ 更高阶的无穷大量, 猜测 $f(x)$ 应当同 x^2 的情况相似, 是不一致连续的.

证明: 假设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致连续, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当

$$|x_1 - x_2| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

取 $\varepsilon_0 = 1$, 则 $\exists \delta_0 > 0$ 满足上述条件

任取 $x_0 \in (0, +\infty)$, 构造序列 $\{a_n\}$ 如下:

$$a_1 = x_0; a_i = a_{i-1} + \frac{\delta_0}{2}, i = 2, 3, \dots$$

$$\text{于是 } \{a_n\} \text{ 严格单调上升且 } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_0 + (n-1) \frac{\delta_0}{2}) = +\infty$$

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(a_n) - f(a_{n-1})}{a_n - a_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2[f(a_n) - f(a_{n-1})]}{\delta_0}$$

$$\text{由于 } |f(a_n) - f(a_{n-1})| < \varepsilon_0 = 1$$

$$\text{于是 } \left| \frac{2[f(a_n) - f(a_{n-1})]}{\delta_0} \right| < \frac{2}{\delta_0}$$

于是由 Bolzano-Weierstrass 定理可知 $\exists \{a_{n_k}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的子序列

$$\text{使得 } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2[f(a_{n_k}) - f(a_{n_{k-1}})]}{\delta_0} \text{ 存在 (注意是 } a_{n_k-1} \text{ 不是 } a_{n_{k-1}})$$

$$\text{则 } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(a_{n_k}) - f(a_{n_{k-1}})}{a_{n_k} - a_{n_{k-1}}} \text{ 存在, 此时依然有 } \{a_{n_k}\} \text{ 严格单调上}$$

升且趋于 $+\infty$, 于是由 Stolz 定理可知

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(a_{n_k})}{a_{n_k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(a_{n_k}) - f(a_{n_{k-1}})}{a_{n_k} - a_{n_{k-1}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\text{而 } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(a_{n_k})}{a_{n_k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(a_{n_k}) - f(a_{n_{k-1}})}{a_{n_k} - a_{n_{k-1}}} \leq \frac{2}{\delta_0}, \text{ 矛盾.}$$

于是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致连续.

20. 证: 由行列式的定义与三、四章的知识可知 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $F(a) = F(b) = 0$, 由 Rolle 微分中值定理可知 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$

若 $h(x) \equiv 1$, 则由上可知 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$(1) \quad F'(\xi) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \\ f'(\xi) & g'(\xi) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(b)g'(\xi) - f'(\xi)g(b) \\ -f(a)g'(\xi) + f'(\xi)g(a) \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{即 } g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a))$$

若 $g(b) - g(a) \neq 0$, $g'(x) \neq 0 (x \in (a, b))$

$$\text{则 } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{即 Cauchy 微分中值定理}$$

若 $h(x) \equiv 1$, $g(x) = x$, 由上有

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \quad \text{即 Lagrange 微分中值定理}$$

这里补充一知识点 (证明可自行补充或查阅高等代数教材)

设实数域上的 n 阶方阵, 其中 a_{ij} 为 (a, b) 内的可微函数.

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad \text{令 } A_i(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i1}(t) & \cdots & a'_{in}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

$$\text{则 } \frac{d}{dt} |A(t)| = \sum_{i=1}^n |A_i(t)|$$

由这个式子可得出 (1) 式

21. 证:

22. 证: 利用 Cauchy 微分中值定理, 很容易构造

23. 证: 由 Lagrange 微分中值定理 可知 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} = e^\xi$$

由三、四章的知识, $g(x) = e^x f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续在 (a, b) 内可导
于是 $\exists \eta \in (a, b)$, 使得

$$\frac{e^b f(b) - e^a f(a)}{b - a} = e^\eta [f(\eta) + f'(\eta)]$$

因为 $f(a) = f(b) = 1$, 于是

$$e^\eta [f(\eta) + f'(\eta)] = e^\xi, \text{ 即 } e^{\eta-\xi} [f(\eta) + f'(\eta)] = 1$$

24. 证: (1) 设 $f(x) = 2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$

$$\text{则 } f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\text{注意到 } \sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}} = \sqrt{\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}, \text{ 当 } |x| \geq 1 \text{ 时 } \sqrt{\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}} = -\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\text{于是 } |x| \geq 1 \text{ 时 } f'(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot 2 \cdot \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$$

$$f(1) = \pi, f(-1) = -\pi$$

$$\text{于是 } f(x) = \begin{cases} \pi, & x \geq 1 \\ -\pi, & x \leq -1 \end{cases} = \pi \operatorname{sgn} x \quad (|x| \geq 1)$$

$$(2) \text{ 令 } f(x) = 3 \arccos x - \arccos(3x-4x^3)$$

$$f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3-12x^2}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}, \text{ 当 } |x| < \frac{1}{2} \text{ 时, } f'(x) = 0$$

$$\text{提示: } 1-(3x-4x^3)^2 = (1-x^2) \cdot g(x)$$

用高代中的知识可求出 $g(x)$

$$\text{理由 } f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi, \text{ 可知 } f(x) = \pi \quad (|x| \leq \frac{1}{2})$$

25.

$$(1) (1 - \sin \frac{\pi}{2}x)' = -\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}x, \text{ 对于 } x \in U_0(1, \frac{1}{2}), -\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}x \neq 0$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\frac{\pi}{2} \cos(\frac{\pi}{2}x) \cdot \cos(x-1)}$$

$$\begin{aligned} \text{设 } x-1=t, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\frac{\pi}{2} \cos(\frac{\pi}{2}x) \cdot \cos(x-1)} \\ = \frac{2}{\pi} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}) \cdot \cos t} \\ = \frac{2}{\pi} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{-\sin(\frac{\pi}{2}t) \cdot \cos t} = -\frac{4}{\pi^2} \end{aligned}$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2}x} = -\frac{4}{\pi^2}$$

$$(2) (\frac{1}{\ln x})' = \frac{-1}{(\ln x)^2 \cdot x}, \text{ 当 } x > 1 \text{ 时, } \frac{1}{(\ln x)^2 \cdot x} \neq 0$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \arctan x) \ln x \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \arctan x}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x(\ln x)^2}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$\text{考察 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \quad ((x)' = 1 \neq 0)$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x(\ln x)^2}{1+x^2} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x} + x} = 0$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \arctan x) \ln x = 0$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}, \text{ 且 } [(x-1)\ln x]' = \ln x + 1 - \frac{1}{x} \text{ 在 } U_0(1, \frac{1}{2}) \text{ 上不为零}$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}}, \quad (\ln x + 1 - \frac{1}{x})' = \frac{x+1}{x^2} \text{ 在 } U_0(1, \frac{1}{2}) \text{ 上不为零}$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}) = \frac{1}{2}$$

注：下面凡是运用到 $0/0$ 型 L'Hôpital 法则时，为节省篇幅不再强调分母 $g(x)$ 的导函数 $g'(x)$ 在 $U_0(a, \delta)$ 上不为零，但同学们在平时做题一定要注意这点，以防错解。

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0+0} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{\sin x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0+0} \sin x \ln x}$$

$$\text{对于 } \lim_{x \rightarrow 0+0} \sin x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{(\sin x)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} -\frac{(\sin x)^2}{x \cos x} = 0$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow 0+0} x^{\sin x} = e^0 = 1$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)\ln(1+x) - x}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \right)$$

$(x \sin x)' = \sin x + x \cos x$ ，若 $\exists x_0 \in U_0(0, \frac{1}{2})$ ，使得

$\sin x + x \cos x = 0$ ，则 $x = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$ ，易知 $x = -\tan x$ 且 $x \in U_0(0, \frac{1}{2})$

时， $x = 0$ ，因此 $\forall x \in U_0(0, \frac{1}{2})$ ， $\sin x + x \cos x \neq 0$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x + x \cos x} \quad (\text{等价无穷小代换})$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x}$$

$$= 0$$

$$(8) \text{ 对于 } y = (1+x)^{\frac{1}{x}}, \ln y = \frac{1}{x} \ln(1+x)$$

$$\text{于是 } (\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{x^2} \ln(1+x)$$

$$y' = (1+x)^{\frac{1}{x}} \left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{x^2} \ln(1+x) \right]$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{x^2} \ln(1+x) \right]$$

$$\text{对于 } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{x^2} \ln(1+x) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2(1+x)^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{已知 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \text{ 因此 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = -\frac{e}{2}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(\frac{\pi}{2} - \arctan x)}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\frac{\pi}{2} - \arctan x)}{\ln x}}$$

$$\text{考察 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\frac{\pi}{2} - \arctan x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(1+x^2)(\arctan x - \frac{\pi}{2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-x^2)(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = -1$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0+0} \sin x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{-\sin^2 x}{x \cos x} = 0$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{(1 - \cos x) \ln(1 - \cos x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \ln(1 - \cos x)}$$

$$\text{考察 } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \ln(1 - \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\frac{1}{1 - \cos x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{1 - \cos x}}{\frac{-\sin x}{(1 - \cos x)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) = 0$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{1 - \cos x} = e^0 = 1$$

$$\begin{aligned}
 (12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x - x \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{\cos x - \cos x + x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x \cos^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \sin x \cos^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} (1 + \cos x + \cos^2 x)}{x^2 \cdot \cos^2 x} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x}}$$

考察 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{1}{x} = -1$, 于是 $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x e^x - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x + x e^x + \frac{1}{(1+x)^2}}{2} = \frac{3}{2}$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0 \quad (\text{直接运用夹逼收敛原理})$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{1+x^a}{1+x^b} \right)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{\frac{\ln(1+x^a) - \ln(1+x^b)}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln(1+x^a) - \ln(1+x^b)}{\ln x}}$$

考察 $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln(1+x^a) - \ln(1+x^b)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{1+x^a} \cdot a x^{a-1} - \frac{1}{1+x^b} b x^{b-1}}{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{a x^a}{1+x^a} - \frac{b x^b}{1+x^b} \right) = 0$$

于是 $\lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{1+x^a}{1+x^b} \right)^{\frac{1}{\ln x}} = e^0 = 1$

$$(17) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} (\tan x)^{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} e^{\tan 2x \ln \tan x} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} \tan 2x \ln \tan x}$$

考察 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} \tan 2x \ln \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} \frac{\ln \tan x}{\frac{1}{\tan 2x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} \frac{\frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{2}{\tan^2 2x \cdot \cos^2 2x}}$

$$= -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} \frac{\tan^2 2x \cdot \cos^2 2x}{2 \tan x \cos^2 x} = -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} \frac{\sin^2 2x}{2 \tan x \cos^2 x} = -1$$

于是 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} (\tan x)^{\tan 2x} = e^{-1}$

26. 证: 由 L. Hôpital 法则可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = b \quad (\text{注意 } \infty/\infty \text{ 型的洛必达法则只要求了分母趋于 } \infty)$$

若 $b \neq 0$, 则 $f(x)$ 与 $g(x) = x$ 是 $x \rightarrow +\infty$ 时的同阶无穷大量

则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上无界, 矛盾! 于是 $b = 0$

27. 证: 当 $x \neq 0$ 时, $\theta = \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)}$, $\exists \delta_0 > 0$, 使得

$$g'(x) = (x \ln(1+x))' = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}, \quad \forall x \in U_0(0, \delta_0), g'(x) \neq 0$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow 0} \theta = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x)\ln(1+x) + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{1+x} + \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} + 1} = \frac{1}{2}$$

(题目中的条件是由 $\frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{1+x - 1} = \frac{1}{1+\theta x}$, $0 < \theta < 1$ 得来的)

28. 证: $x \neq 0$ 时, $\theta = \sqrt{\frac{\arcsin^2 x - x^2}{x^2 \arcsin^2 x}}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 x - x^2}{x^2 \arcsin^2 x}}$

对于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 x - x^2}{x^2 \arcsin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 x - x^2}{x^4}$, $\exists \delta_0 > 0$, 使得

$\forall x \in U_0(0, \delta_0)$, $g'(x) = (x^4)' = 4x^3 \neq 0$ (下文同理)

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 x - x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2x}{4x^3} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x \sqrt{1-x^2}}{x^3 \sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{对于 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x \sqrt{1-x^2}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + x^2 + x^2}{x^2 \sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{由于 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1, \text{ 于是 } \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x \sqrt{1-x^2}}{x^3 \sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 x - x^2}{x^2 \arcsin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 x - x^2}{x^4} = \frac{1}{3}$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

29. 证: $f(x) = \frac{e^x f(x)}{e^x}$

由 L'Hôpital 法则有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(x) + e^x f'(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + f'(x)] = k$$

30. 证: $f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2$

$$+ \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + o_1((x-0)^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

于是 $f(x^2) = f(0) + f'(0)x^2 + \frac{f''(0)}{2!}x^4 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{2n} + o_1(x^{2n}) \quad (x^2 \rightarrow 0)$

$F(x) = f(x^2)$ 在实轴上也任意阶可导, 于是

$$F(x) = F(0) + F'(0)(x-0) + \frac{F''(0)}{2!}(x-0)^2 + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \dots + \frac{F^{(2n)}(0)}{(2n)!} + o_2((x-0)^{2n}) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\text{即 } f(x^2) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2!}x^2 + \frac{F'''(0)}{3!}x^3 + \frac{F^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots + \frac{F^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n} + o_2(x^{2n}) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$= f(0) + f'(0)x^2 + \frac{f''(0)}{2!}x^4 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{2n} + o_1(x^{2n}) \quad (x^2 \rightarrow 0)$$

由于 $\lim_{x^2 \rightarrow 0} \frac{o_1(x^{2n})}{x^{2n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o_1(x^{2n})}{x^{2n}} = 0$ 于是由 Taylor 公式的唯一性

必有 $F^{(2n+1)}(0) = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$ 且 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{F^{(2n)}(0)}{(2n)!}$

$n=0$ 时, 即 $f(0) = F(0)$ 成立

$$\text{于是 } F^{(2n+1)}(0) = 0, \quad \frac{F^{(2n)}(0)}{(2n)!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

注: 书中 P199 论述唯一性时余项 $R_n(x) = o((x-x_0)^n) \quad (x \rightarrow 0)$

也就是 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ 时, 必有 $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$

但单独地看 $o_1((x-x_0)^n) \quad (x \rightarrow 0)$, $o_2((x-x_0)^n) \quad (x \rightarrow 0)$

并不一定有 $o_1((x-x_0)^n) \quad (x \rightarrow 0) = o_2((x-x_0)^n) \quad (x \rightarrow 0)$

$$31. (1) \text{ 已知 } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\text{则 } \cos x^2 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{4k}}{(2k)!} + o(x^{4n}) \quad (x \rightarrow 0)$$

注：书中P200中 $\cos x$ 的Taylor公式中 $R_n(x) = o(x^{2n+1}) \quad (x \rightarrow 0)$

其实是写到了第 $2n+1$ 项，而 $(\cos(x))^{(2n+1)} = \cos(x + \frac{(2n+1)\pi}{2})$

$\cos(0 + n\pi + \frac{1}{2}\pi) = 0$ 。再者 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^{2n+1})}{x^{2n+1}} \cdot x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^{2n+1})}{x^{2n}} = 0$

也就是说 $o(x^{2n+1}) \quad (x \rightarrow 0)$ 本身也是 $o(x^{2n}) \quad (x \rightarrow 0)$ （反推不成立），其次，只展到第 $2n$ 项，那 $R_n(x)$ 本身也是 $o(x^{2n}) \quad (x \rightarrow 0)$

(2) ~ (4) 纯计算，可选做

32.

33.

$$(1) f(x) = a \sin x + \frac{1}{2} b \sin 2x - x, \quad f(0) = 0$$

$$\text{则 } f'(x) = a \cos x + b \cos 2x - 1, \quad f'(0) = a + b - 1$$

$$f''(x) = -a \sin x - 2b \sin 2x, \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -a \cos x - 4b \cos 2x, \quad f'''(0) = -a - 4b$$

$$f^{(4)}(x) = a \sin x + 8b \sin 2x, \quad f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = a \cos x + 16b \cos 2x, \quad f^{(5)}(0) = a + 16b$$

$$\text{则 } f(x) = (a+b-1)x + \frac{1}{6}(-a-4b)x^3 + \frac{1}{120}(a+16b)x^5 + o(x^5) \quad (x \rightarrow 0)$$

$f(x)$ 为 $x \rightarrow 0$ 时的5阶无穷小量，即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^5} = l \neq 0, \text{ 于是 } \begin{cases} a+b-1=0 \\ -a-4b=0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3}$$

$$\text{此时 } f(x) = -\frac{1}{30}x^5 + o(x^5) \quad (x \rightarrow 0), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^5} = -\frac{1}{30}$$

(2) 同(1)

34.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^6}{2} + o(x^6)}{(2x)^6} = \frac{1}{128}$$

$$\begin{aligned} (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 - 3x} - \sqrt{x^2 - 2x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(1 - \frac{3}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 - \frac{1}{x^2} + o_1\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1 + \frac{1}{x} - o_2\left(\frac{1}{x}\right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[-\frac{1}{x^2} + o_1\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x} - o_2\left(\frac{1}{x}\right) \right] \quad (1) \end{aligned}$$

注: $o_1\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ($\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$) 即 $o_1\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ($x \rightarrow \infty$), 同理 $o_2\left(\frac{1}{x}\right)$ ($x \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} \text{于是 } (1) &= -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{o_1\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} + 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{o_2\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{o\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{o\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\tan x/x)}{x^2}}$$

$$\text{对于 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\tan x/x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x/x) - \ln \cos x}{x^2}$$

$$\text{对于 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x/x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x - \frac{x^3}{6} + o_1(x^3)}{x}\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + o_2(x^2)\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{6} + o_2(x^2) + o_3(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{6}$$

注: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o_1(x^3)}{x \cdot x^2} = 0$ 于是 $\frac{o_1(x^3)}{x} = o_2(x^2)$ ($x \rightarrow 0$)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{6} + o_2(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{6}$, 于是 $o\left(-\frac{x^2}{6} + o_2(x^2)\right)$ ($x \rightarrow 0$) 是 x^2 的高

阶无穷小, 即 $o\left(-\frac{x^2}{6} + o_2(x^2)\right) = o_3(x^2)$ ($x \rightarrow 0$)

$$\text{对于 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2} + o_1(\sin^2 \frac{x}{2})}{x^2}$$

$$\text{由于 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o_1(\sin^2 \frac{x}{2})}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o_1(\sin^2 \frac{x}{2})}{x^2/4} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o_1(\sin^2 \frac{x}{2})}{x^2}$$

$$\text{于是 } o_1(\sin^2 \frac{x}{2}) = o_2(x^2) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\text{因此 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2} + o_1(\sin^2 \frac{x}{2})}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6} - (-\frac{1}{6})} = e^{\frac{1}{3}}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln(x \sin \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \{ x^2 \ln [x (\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o_1(\frac{1}{x^3}))] \}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} [x^2 \ln (1 - \frac{1}{6x^2} + x o_1(\frac{1}{x^3}))]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} [x^2 (-\frac{1}{6x^2} + x o_1(\frac{1}{x^3}) + o_2(-\frac{1}{6x^2} + x o_1(\frac{1}{x^3})))] \quad (1)$$

$$\text{易知 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{6x^2} + x o_1(\frac{1}{x^3})}{\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{6}$$

$$\text{于是 } o_2(-\frac{1}{6x^2} + x o_1(\frac{1}{x^3})) = o_3(\frac{1}{x^2}) \quad (x \rightarrow \infty)$$

$$\text{于是 (1) 式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{6x^2} + x o_1(\frac{1}{x^3}) + o_3(\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{6}$$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln(x \sin \frac{1}{x}) = -\frac{1}{6}$$

$$35. (1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^3 x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x - \frac{(3x)^3}{3!} + o_1(x^3)}{x^3} + \frac{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o_2(x^2)}{x^2} \right) \quad (1)$$

$$\text{已知 (1) 式} = 0, \text{即 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{x^2} - \frac{9}{2} + \frac{o_1(x^3)}{x^3} + \frac{f(0)}{x^2} + \frac{f'(0)}{x} + \frac{f''(0)}{2} + \frac{o_2(x^2)}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f'(0)}{x} + \frac{3+f(0)}{x^2} + \frac{f''(0)-9}{2} + \frac{o_1(x^3)}{x^3} + \frac{o_2(x^2)}{x^2} \right)$$

$$= 0$$

$$\text{于是 } f(0) = -3, f'(0) = 0, f''(0) = 9$$

注: 这里 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ 都是实数, 因此只存在这种情况.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{x^2} + \frac{f(x)}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{x^2} + \frac{f(0) + f'(0)x + f''(0) \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} \right) = \frac{9}{2}$$

$$36. (1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right) \right]} = e^3$$

即 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right) \right] = 3$ ，由于 $f'(0)$ 存在，于是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

若 $f(0) \neq 0$ ，设 $f(0) = a > 0$ ($a < 0$ 时同理)

则由 $\lim_{x \rightarrow 0-0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right) = -\infty$ 可知 $\exists \delta > 0$ ，使得 $x \in U^-(0, \delta)$ 时

$1 + x + \frac{f(x)}{x} < 0$ 则 $\ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)$ 此时无意义，则

$\lim_{x \rightarrow 0-0} \left[\frac{1}{x} \ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right) \right]$ 不存在，矛盾！

于是 $f(0) = 0$ ，于是 $1 + x + \frac{f(x)}{x} = 1 + x + \frac{f'(0)x + f''(0) \cdot \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x}$

$$= 1 + x + f'(0) + f''(0) \cdot \frac{x}{2} + \frac{o(x^2)}{x}$$

若 $f'(0) \neq 0$ ，则 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + f'(0) + f''(0) \cdot \frac{x}{2} + \frac{o(x^2)}{x} \right) \right)$

$$= \ln(1 + f'(0))$$

则要么无意义 ($f'(0) \leq -1$) 要么 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right) \right] = \pm \infty$ 。

矛盾！于是 $f'(0) = 0$ ，于是 $1 + x + \frac{f(x)}{x} = 1 + x + f''(0) \cdot \frac{x}{2} + \frac{o(x^2)}{x}$

于是 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \ln \left(1 + x + f''(0) \cdot \frac{x}{2} + \frac{o(x^2)}{x} \right) \right]$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + f''(0) \cdot \frac{x}{2} + \frac{o(x^2)}{x}}{x} = 1 + \frac{1}{2} f''(0)$ 于是 $o \left(x + f''(0) \cdot \frac{x}{2} + \frac{o(x^2)}{x} \right) = o(x)$ ($x \rightarrow 0$)

于是 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \ln \left(1 + x + f''(0) \cdot \frac{x}{2} + \frac{o(x^2)}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + f''(0) \cdot \frac{x}{2} + \frac{o(x^2)}{x}}{x} + \frac{o(x)}{x} \right)$

$$= 1 + \frac{1}{2} f''(0) = 3$$

则 $f(0) = f'(0) = 0$ ， $f''(0) = 4$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln(1 + \frac{f(x)}{x})} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} [\frac{1}{x} \ln(1 + \frac{f(x)}{x})]}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\frac{1}{x} \ln(1 + \frac{f(x)}{x})] = \lim_{x \rightarrow 0} [\frac{1}{x} \ln(1 + f''(0) \frac{x}{2} + \frac{o(x^2)}{x})]$$

$$\text{同(1)可知 } o(f''(0) \frac{x}{2} + \frac{o(x^2)}{x}) = o_2(x) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \lim_{x \rightarrow 0} [\frac{1}{x} \ln(1 + f''(0) \frac{x}{2} + \frac{o(x^2)}{x})] &= \lim_{x \rightarrow 0} (f''(0) \cdot \frac{1}{2} + \frac{o_2(x)}{x^2} + \frac{o_2(x)}{x}) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{因此 } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}} = e^2$$

37. 证: 很显然这里 $n \geq 1$, 且 A 指有限实数.

设 $g(x) = x^n$, 则对于 $\forall x \in U^+(\infty, |a|)$, $g^{(k)}(x) \neq 0$ ($k=1, 2, \dots, n$)

于是由 L'Hôpital 法则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} = 0$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) = 0$$

38. 证: 根据 $f(x)$ 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}h^2 f''(a+\theta_1 h), \quad 0 < \theta_1 < 1$$

$$\text{同样, } f'(a+\theta h) = f'(a) + \theta h f''(a+\theta_2 h), \quad 0 < \theta_2 < 1$$

注: 这里就是对 $f'(x)$ 作 Taylor 展开, $\theta h = \theta' \theta h$.

$$\begin{aligned} \text{于是 } f(a+h) - f(a) &= f'(a)h + \frac{1}{2}h^2 f''(a+\theta_1 h) \\ &= f'(a+\theta h)h = f'(a)h + \theta h^2 f''(a+\theta_2 h) \end{aligned}$$

$$\text{于是 } \frac{1}{2}h^2 f''(a+\theta_1 h) = \theta h^2 f''(a+\theta_2 h), \quad \exists \delta_1 > 0,$$

$$\text{当 } h \in U_+(0, \delta_1) \text{ 时, 有 } \frac{1}{2}f''(a+\theta_1 h) = \theta f''(a+\theta_2 h)$$

$$\text{于是 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2}f''(a+\theta_1 h) = \lim_{h \rightarrow 0} \theta f''(a+\theta_2 h)$$

$$\text{由于 } f''(x) \text{ 在 } U(a, \delta_2) \text{ 内连续, 于是 } \lim_{h \rightarrow 0} f''(a+\theta_1 h) = \lim_{h \rightarrow 0} f''(a+\theta_2 h)$$

$$= f''(a), \text{ 于是 } \frac{1}{2} = \lim_{h \rightarrow 0} \theta$$

39. 证:

$$(1) p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + 0$$

($\deg(p(x))=n$, 故 $p^{(n+1)}(x)=0$), 对于 $\forall x \in (a, +\infty)$, 易知

$p(x) > 0$, 于是 $p(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上无零点.

$$(2) p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

不妨设 $p(a) < 0$, 则

$$\operatorname{sgn}(p^{(k)}(a)) = \operatorname{sgn}((-1)^{k+1}), \quad k=1, 2, \dots, n$$

于是对于 $\forall x \in (-\infty, a)$

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right) = \operatorname{sgn}((-1)^{k+1}) = -1, \quad k=1, 2, \dots, n$$

于是 $\forall x \in (-\infty, a)$, $p(x) < 0$, 即在 $(-\infty, a)$ 上无零点

$p(a) > 0$ 时同理

40. 证: 必要性: 设 $x=a$ 是 $p(x)$ 的 k 重根

则 $p(x) = (x-a)^k G(x)$, 其中 $G(x)$ 是 $n-k$ 次多项式且 $(x-a) \nmid G(x)$

$$\text{于是 } p^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^j C_j^i [(x-a)^k]^{(j-i)} G^{(i)}(x) \quad (j=1, 2, \dots, k-1)$$

$$p(x) = (x-a)^k G(x) \text{ 显然有 } p(a) = 0$$

对于 $p^{(j)}(x) = (x-a)H(x)$ 其中 $H(x)$ 为 $n-j-1$ 阶多项式, $j=1, 2, \dots, k-1$

于是 $p^{(j)}(a) = 0$. 但 $p^{(k)}(x) = k!G(x) + (x-a)I(x)$ 其中

$I(x)$ 为 $n-k-1$ 次多项式, 于是 $p^{(k)}(a) = k!G(a)$, 由于 $(x-a) \nmid G(x)$

于是 $G(a) \neq 0$, 则 $p^{(k)}(a) \neq 0$

$$\text{充分性: } p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + p''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

由 $p^{(j)}(a) = 0$ ($j=0, 1, \dots, k-1$), $p^{(k)}(a) \neq 0$ 可知

$$p(x) = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= (x-a)^k \left(\frac{p^{(k)}(a)}{k!} + \frac{p^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (x-a) + \dots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^{n-k} \right) \textcircled{1}$$

由于 $p(x)$ 是 n 次多项式, 故 $p^{(n)}(x) \neq 0$, 则 $p^{(n)}(a) \neq 0$
 且 $p^{(k)}(a) \neq 0$, 于是 $\textcircled{1}$ 式 $= (x-a)^k G(x)$, $G(x)$ 为 $n-k$ 次多项式, 且
 $x-a \nmid G(x)$, 于是 $x=a$ 是 $p(x)$ 的 k 重根.

41. 证: 设 $G_n(x) = (x^2-1)^n = (x+1)^n (x-1)^n$

$$\text{则 } \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n = G_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k [(x+1)^n]^{(n-k)} [(x-1)^n]^{(k)}$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{n!}{k!} (x+1)^k \cdot \frac{n!}{(n-k)!} (x-1)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 \cdot n! (x+1)^k (x-1)^{n-k}$$

$$(1) \text{ 于是 } G_n^{(n)}(1) = (C_n^n)^2 \cdot n! \cdot (1+1)^n = 2^n \cdot n!$$

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n \cdot n!} G_n^{(n)}(1) = 1$$

$$(2) G_n^{(n)}(-1) = (C_n^0)^2 \cdot n! \cdot (-1-1)^n = (-1)^n 2^n \cdot n!$$

$$P_n(-1) = (-1)^n$$

$$(3) \text{ 当 } n \text{ 为奇数时, } G_n^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 \cdot n! \cdot (-1)^{n-k} \\ = n! \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 (-1)^{n-k} = 0$$

也就是 $G_{2n-1}^{(2n-1)}(0) = 0$, 即 $P_{2n-1}(0) = 0$

$$(4) \text{ 当 } n \text{ 为偶数时, } G_n^{(n)} = n! (C_n^{\frac{n}{2}})^2 (-1)^{\frac{n}{2}}$$

$$\text{即 } G_{2n}^{(2n)} = (2n)! (C_{2n}^n)^2 (-1)^n$$

$$P_{2n} = \frac{1}{2^{2n} (2n)!} \cdot (2n)! \cdot \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$$

42. 证:

(1) 显然 $P_0(x) = 1$, 由 $f'(x) = 2xe^{x^2}$ 可知 $P_1(x) = 2x$, 设 $P_{-1}(x) = 0$

$$\text{则 } P_1(x) = 2xP_0(x) + 2 \cdot 0 \cdot P_{-1}(x) = 2xP_0(x) + P_0'(x)$$

$$\begin{aligned} \text{由 } f''(x) = (4x^2 + 2)e^x \text{ 可知 } P_2(x) &= 4x^2 + 2 = 2xP_1(x) + 2 \cdot 1 \cdot P_0(x) \\ &= 2xP_1(x) + P_1'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{假设 } 1 \leq n \leq k \ (k \geq 2) \text{ 时, 都有 } P_n(x) &= 2xP_{n-1}(x) + 2(n-1)P_{n-2}(x) \\ &= 2xP_{n-1}(x) + P_{n-1}'(x) \end{aligned}$$

其中 P_n 为 n 次多项式.

$$\begin{aligned} \text{则当 } n = k+1 \text{ 时, } f^{(k+1)}(x) &= (P_k(x)e^{x^2})' = P_k'(x)e^{x^2} + 2xP_k(x)e^{x^2} \\ &= (2xP_k(x) + P_k'(x))e^{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_k'(x) &= (2xP_{k-1}(x) + 2(k-1)P_{k-2}(x))' \\ &= 2P_{k-1}(x) + 2xP_{k-1}'(x) + 2(k-1)P_{k-2}'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } 2xP_{k-1}'(x) + 2(k-1)P_{k-2}'(x) &= 2x \cdot 2(k-1)P_{k-2}(x) + 2(k-1)P_{k-2}'(x) \\ &= 2(k-1)[2xP_{k-2}(x) + P_{k-2}'(x)] \\ &= 2(k-1)P_{k-1} \end{aligned}$$

注: 这里正是因为设了 $P_{-1}(x)$, 将 $P_1(x)$ 包含进了通项公式的范围, 才能在假设 $1 \leq n \leq k \ (k \geq 2)$ 成立的条件下进行推演, 否则需求出 $P_3(x)$, 在假设 $2 \leq n \leq k \ (k \geq 3)$ 成立的条件下进行推演.

于是 $P_k'(x) = 2kP_{k-1}(x)$, 则 $2xP_k(x) + 2kP_{k-1}(x)$ 为 $k+1$ 次多项式

令 $P_{k+1} = 2xP_k(x) + 2kP_{k-1}(x)$, 则 P_{k+1} 也满足题设.

综上所述, 命题成立.

$$\begin{aligned} (2) \text{ 若 } n \text{ 为奇数, } P_n(0) &= 2(n-1)P_{n-2}(0) = 2(n-1) \cdot 2(n-3)P_{n-4}(0) = \dots \\ &= AP_1(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{若 } n \text{ 为偶数, 则 } P_n(0) &= 2(n-1) \cdot 2(n-3) \cdot 2(n-5) \dots 2(n-n+1)P_0(x) \\ &= 2^{\frac{n}{2}} \cdot (n-1)!! \end{aligned}$$

43. 证: 对于 $\forall x \in (0, +\infty)$

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2} f''(x) + \frac{1}{6} f'''(\xi_1), \quad \xi_1 \in (x, x+1) \quad ①$$

$$f(x+2) = f(x) + 2f'(x) + 2f''(x) + \frac{4}{3} f'''(\xi_2), \quad \xi_2 \in (x, x+2) \quad ②$$

$$② - 2①: f(x+2) - 2f(x+1) = -f(x) + f'(x) + \frac{4}{3} f'''(\xi_2) - \frac{1}{3} f'''(\xi_1)$$

$$\text{于是 } |f'''(x)| = |f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) - \frac{4}{3} f'''(\xi_2) + \frac{1}{3} f'''(\xi_1)|$$

$$\leq 4M_0 + \frac{5}{3} M_3$$

则 $f'''(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界

② - 4① 同理可证 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界.

44. 证:

$$(1) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+\theta x)^3}, \quad 0 < \theta < 1$$

$$\text{于是 } x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3(1+\theta x)^3}, \quad \text{由于 } 0 < x \leq 1, \text{ 则 } 0 < \frac{x^3}{3(1+\theta x)^3} < \frac{x^2}{2}$$

$$\text{则 } 0 < \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3(1+\theta x)^3} < \frac{x^2}{2}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可知 } 0 < \frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k}) < \frac{1}{2k^2}$$

$$\text{于是 } \sum_{k=1}^n [\frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k})] < \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

$$\text{由于 } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2$$

$$\text{则 } 0 < \sum_{k=1}^n [\frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k})] < 1, \text{ 且由 } 0 < \frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k}) \text{ 可知}$$

$$\sum_{k=1}^n [\frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k})] \text{ 随着 } n \text{ 单调上升 } (\sum_{k=1}^n [\frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k})] = a_n, \text{ 本质就是一个数列})$$

于是 $\sum_{k=1}^n [\frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k})]$ 单调有界, 则 $n \rightarrow +\infty$ 时, 极限存在.

45. 证: 对于 $\forall x \in [a, b]$, 有

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2, \text{ 由于 } f'(a) = 0$$

$$\text{则 } f(x) = f(a) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2, (\xi_1 \in (a, x)) \quad ①$$

$$\text{同理 } f(x) = f(b) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2, (\xi_2 \in (x, b)) \quad ②$$

取 $x = \frac{a+b}{2}$, 再 ② - ① 得

$$0 = f(b) - f(a) + \frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 - \frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$\frac{f''(\xi_1)}{2} - \frac{f''(\xi_2)}{2} = \frac{4}{(b-a)^2} [f(b) - f(a)]$$

$$\frac{|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|}{2} \geq \frac{|f''(\xi_1) - f''(\xi_2)|}{2} = \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$$

若 $f''(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) = 0$, 则取 $c = \xi_1$ 或 $c = \xi_2$, 必有其一满足

$$|f''(c)| = \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$$

若 $f''(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) \neq 0$

则 $f''(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) > 0$ 时

由 Darboux 定理可知 $\exists c \in [\xi_1, \xi_2] \in (a, b)$ 使得 $f''(c) = \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2}$

$$\text{此时 } |f''(c)| = \left| \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2} \right| = \frac{|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|}{2} \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$$

$f''(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) < 0$ 时

$$\text{由于 } \frac{|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|}{2} \leq \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}$$

则由 Darboux 定理可知 $\exists c \in [\xi_1, \xi_2] \in (a, b)$ 使得

$$|f''(c)| = \frac{|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|}{2} \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$$

46. 证: $\forall x \in [-1, 1]$, 有 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{f'''(\xi)}{6}x^3$

其中 $\xi \in (0, x)$, 由于 $f(0) = f'(0) = 0$, 则 $f(x) = \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{f'''(\xi)}{6}x^3$

$$\text{取 } x = \pm 1, \text{ 得 } 1 = f(1) = \frac{1}{2}f''(0) + \frac{f'''(\xi_1)}{6} \quad ①$$

$$0 = f(-1) = \frac{1}{2}f''(0) - \frac{f'''(\xi_2)}{6} \quad ②$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} : 1 = \frac{1}{6} f'''(\xi_1) + \frac{1}{6} f'''(\xi_2) \Rightarrow 3 = \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2}$$

由 Darboux 定理, $\exists \xi \in [\xi_1, \xi_2] \in (-1, 1)$ 使得

$$f'''(\xi) = \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2} = 3 \quad \square$$

事实上当 $f'''(\xi_1) \neq f'''(\xi_2)$ 时, 有 $\xi \in [\xi_1, \xi_2] \in (-1, 1)$ 使得

$$f'''(\xi) > \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2}$$

47.

$$(1) f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x+\theta h)}{2}h^2, 0 < \theta < 1 \quad \textcircled{1}$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x-\alpha h)}{2}h^2, 0 < \alpha < 1 \quad \textcircled{2}$$

(2) 对于 $\forall h > 0$, 由 (1) 中 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 得

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \frac{h^2}{2}[f''(x+\theta h) - f''(x-\alpha h)]$$

$$\text{则 } f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{h}{4}[f''(x-\alpha h) - f''(x+\theta h)]$$

$$|f'(x)| \leq \frac{|f(x+h)| + |f(x-h)|}{2h} + \frac{h}{4}[|f''(x-\alpha h)| + |f''(x+\theta h)|]$$

$$\leq \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2$$

$$(3)(4) \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2 \geq 2\sqrt{\frac{M_0 M_2}{2}} = 2\sqrt{M_0 M_2}$$

此时 "=" 成立当且仅当 $\frac{M_0}{h} = \frac{h}{2}M_2$, 即 $h = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$

若 $M_2 = 0$, 则 $f''(x) = 0$, 则 $f'(x) = C$ (C 为常数)

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = C$, 若 $C \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ 矛盾.

于是 $f'(x) = 0$, 则 $f(x) = l$ (l 为常数)

$$\text{此时自然有 } |f(x)| = 0 \leq \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2 = \frac{M_0}{h}$$

$$\text{以及 } |f'(x)| = 0 \leq \sqrt{2M_0 M_2} = 0$$

但 $M_0 \neq 0$ 时, 有 $\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{M_0}{h} = 0$, 但取不到最小值

48. 证: $\forall x, y \in (a, b)$, 当 $x \neq y$ 时, 有

$$0 \leq \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq k|x - y|$$

$$\text{则 } \lim_{y \rightarrow x} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq \lim_{y \rightarrow x} k|x - y| = 0$$

$$\text{于是 } \lim_{y \rightarrow x} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = 0 \text{ 则 } \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(x) = 0$$

对于 $x = a$ 和 $x = b$ (以 $x = a$ 为例)

$$0 \leq \lim_{y \rightarrow a^+} \left| \frac{f(a) - f(y)}{a - y} \right| \leq \lim_{y \rightarrow a^+} k|a - y| = 0$$

$$\text{于是 } f'_+(a) = 0, \text{ 同理 } f'_-(b) = 0$$

于是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上为常值函数

49. 证:

$$(1) \ln y = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right), x \in (0, +\infty)$$

$$\text{则 } y' \cdot \frac{1}{y} = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}, \text{ 于是 } y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \right]$$

已知 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > 0$, 设 $f(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$,

$x \in (0, +\infty)$, 则 $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{x(x+1)} < 0$, 于是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上

严格递减, 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 若 $\exists x_0 \in (0, +\infty)$

使得 $f(x_0) = 0$, 则 $\forall x \in (x_0, +\infty)$ 有 $f(x) < f(x_0) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 0$

矛盾! 于是 $f(x) > 0, \forall x \in (0, +\infty)$. 因此 $y' > 0, \forall x \in (0, +\infty)$

于是 y 在 $(0, +\infty)$ 上严格递增.

(2) 同 (1) 可证

(3) 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = e$ 及 (1)、(2) 可证.

50. 51. 基础计算. 略

52. 首先对于 $\forall p, q \in \mathbb{R}$, 都有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - px + q) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - px + q) = +\infty$

设 $f(x) = x^3 - px + q$, 则 $f'(x) = 3x^2 - p$. 若 $p < 0$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单增, 此时只有-实根, 若 $p = 0$, 易知只有-实根 $x = \sqrt[3]{-q}$. 于是 $p > 0$.

$p > 0$ 时, 易知 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{\sqrt{3p}}{3})$ 上恒正, 在 $(-\frac{\sqrt{3p}}{3}, \frac{\sqrt{3p}}{3})$ 上恒负, 在 $(\frac{\sqrt{3p}}{3}, +\infty)$ 上恒正, 于是 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{\sqrt{3p}}{3})$ 上严格递增, 在 $(-\frac{\sqrt{3p}}{3}, \frac{\sqrt{3p}}{3})$ 上严格递减, 在 $(\frac{\sqrt{3p}}{3}, +\infty)$ 上严格递增, 则若 $f(-\frac{\sqrt{3p}}{3}) < 0$, $f(x)$ 仅在 $(\frac{\sqrt{3p}}{3}, +\infty)$ 上有-零点.

若 $f(-\frac{\sqrt{3p}}{3}) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $(\frac{\sqrt{3p}}{3}, +\infty)$ 上有-零点, 共两零点. 于是 $f(-\frac{\sqrt{3p}}{3}) > 0$, 同理有 $f(\frac{\sqrt{3p}}{3}) < 0$

$$\begin{aligned} \text{即 } \int \frac{2p\sqrt{3p}}{9} + q > 0 &\Rightarrow \int \frac{2p\sqrt{3p}}{9} + q > 0 \quad \text{①} \\ \left\{ -\frac{2p\sqrt{3p}}{9} + q < 0 \right. &\quad \left\{ \frac{2p\sqrt{3p}}{9} - q > 0 \quad \text{②} \right. \end{aligned}$$

$$\text{①} \times \text{②} \text{ 式得 } \frac{4p^3}{27} - q^2 > 0 \text{ 即 } \frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4} > 0$$

綜上方程 $x^3 - px + q = 0$ 有三个不同实根的条件是 $p > 0$ 且 $\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4} > 0$.

53. 首先 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - mx) = -\infty$, 设 $f(x) = \ln x - mx$, $x \in (0, +\infty)$

则 $f'(x) = \frac{1}{x} - m$, 若 $m \leq 0$, 则 $f'(x) > 0$ ($\forall x \in (0, +\infty)$), 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格递增, 此时 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 于是仅有一个零点. 因此 $m > 0$. 此时 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -m < 0$

于是 $f'(x) = 0$ 时有 $x = \frac{1}{m}$, 则 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{m})$ 上严格递增, 在 $(\frac{1}{m}, +\infty)$ 上严格递减, 由于此时 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, 于是当且仅当 $f(\frac{1}{m}) > 0$ 时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两零点, 即 $\ln \frac{1}{m} > 1$, 即 $m < \frac{1}{e}$. 綜上, $0 < m < \frac{1}{e}$.

54. 证:

(1) 设 $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in (a, b)$, 则 $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = 0$

则 $h(x) \equiv C$, 即 $f(x) = Cg(x)$

(2) 设 $x = \alpha_1, x = \alpha_2$ 是 $f(x) = 0$ 的两个不同实根

即 $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = 0$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$ (不妨设 $\alpha_1 < \alpha_2$)

$$F(\alpha_1) = f(\alpha_1)g'(\alpha_1) - f'(\alpha_1)g(\alpha_1) = -f'(\alpha_1)g(\alpha_1) > 0$$

则 $g(\alpha_1) \neq 0$, 同理有 $g(\alpha_2) \neq 0$

假设 $g(x) \neq 0, \forall x \in (\alpha_1, \alpha_2)$

设 $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in [\alpha_1, \alpha_2]$, 则 $h(\alpha_1) = h(\alpha_2) = 0$

由 Rolle 微分中值定理可知 $\exists \xi \in (\alpha_1, \alpha_2)$ 使得

$$h'(\xi) = \frac{-F(\xi)}{g^2(\xi)} = 0 \text{ 则 } F(\xi) = 0 \text{ 矛盾!}$$

于是 $\exists x_0 \in (\alpha_1, \alpha_2)$ 使得 $g(x_0) = 0$

55. 证:

(1)、(2) 略

(3) 设 $f(x) = x^p + (1-x)^p, x \in [0, 1]$, 则 $f'(x) = p[x^{p-1} - (1-x)^{p-1}]$

由于 $p > 1$, 则 $p-1 > 0$, 于是 $f'(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2})$ 上恒负, 在 $(\frac{1}{2}, 1]$ 上

恒正, $f'(\frac{1}{2}) = 0$, 于是 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^{p-1}}$ 是严格极小值, 也是 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最小值. 因此 $\frac{1}{2^{p-1}} \leq f(x)$

由于 $f(1) = f(0) = 1$, 故 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 1

因此 $\frac{1}{2^{p-1}} \leq f(x) \leq 1$.

56. 证: 设 $g(x) = e^{-x}f(x), x \in [0, +\infty)$, 由于 $e^{-x} > 0, f(x) \geq 0$

于是 $g(x) \geq 0$. $g'(x) = e^{-x}[f'(x) - f(x)] \leq 0$ 于是 $g(x)$ 在

$(0, +\infty)$ 上单调递减, 由于 $g(0) = 0$, 于是在 $[0, +\infty)$ 上

$g(x) \leq 0$, 则 $0 \leq g(x) \leq 0$, 即 $g(x) = 0$, 由 $e^{-x} > 0$ 可知

$f(x) = 0, x \in [0, +\infty)$

57. 证:

(1) 假设 $f(x)$ 在 $x = \eta \in (a, b)$ 处取得正的最大值

则 $\exists \delta = \min\{\eta - a, b - \eta\}$, 使得 $f(x)$ 在 $U_0(\eta, \delta)$ 内恒有

$f(x) \leq f(\eta)$, 则 $x = \eta$ 是 $f(x)$ 的一个极值点, 因此 $f'(\eta) = 0$

于是 $f''(\eta) + c(\eta)f(\eta) = 0$, 由于 $c(\eta) < 0$, $f(\eta) > 0$

于是 $f''(\eta) > 0$, 则 $x = \eta$ 是 $f(x)$ 的严格极小值点, 矛盾!

故 $f(x)$ 不能在 (a, b) 内取得正的最大值

负的最小值同理可证.

(2) 若 $\exists x_0 \in [a, b]$, 使得 $f(x_0) \neq 0$

由于 $f(a) = f(b) = 0$, 于是 $x_0 \in (a, b)$

若 $f(x_0) > 0$, 由 (1) 可知 $f(x_0)$ 不是 (a, b) 内的最大值

由于 $f(a) = f(b) = 0$, 且 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 于是 $\exists \eta \in [a, b]$

使得 $\forall x \in [a, b]$ 都有 $f(x) \leq f(\eta)$, 于是 $f(\eta) \geq f(x_0) > 0$

则 $\eta \neq a$ 且 $\eta \neq b$, 即 $\eta \in (a, b)$, 且 $f(\eta)$ 为 (a, b) 内正

的最大值, 矛盾! 于是 $f(x_0) > 0$ 不成立.

同理 $f(x_0) < 0$ 不成立. 则与 $f(x_0) \neq 0$ 矛盾.

于是 $\forall x \in (a, b)$, 都有 $f(x) = 0$

于是 $f(x) \equiv 0, x \in [a, b]$.

58. 证: $\forall x_1, x_2 \in [a, b], \forall t \in (0, 1)$

$$tF(x_1) + (1-t)F(x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \geq f(tx_1 + (1-t)x_2)$$

$$tF(x_1) + (1-t)F(x_2) \geq tg(x_1) + (1-t)g(x_2) \geq g(tx_1 + (1-t)x_2)$$

$$\text{于是 } tF(x_1) + (1-t)F(x_2) \geq \max\{f(tx_1 + (1-t)x_2), g(tx_1 + (1-t)x_2)\}$$

$$= F(tx_1 + (1-t)x_2)$$

则 $F(x)$ 为 $[a, b]$ 上的凸函数.

59. 证:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2\Delta x^2 \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 1 > 0$$

$$\text{当 } x \neq 0 \text{ 时, } f'(x) = 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}$$

由于 $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} f'(x) = 3$, $\underline{\lim}_{x \rightarrow 0} f'(x) = -1$, 可知在 $x=0$ 的任何邻域内

$f'(x)$ 都变号, 即 $f(x)$ 不单调上升.

60. 证:

(1) 对于 $\forall \delta > 0$, $\forall x \in U_0(0, \delta)$, 易知 $x^2(2 + \sin \frac{1}{x}) \geq x^2 > 0$

于是 $f(x) < 2 = f(0)$, 因此 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

$$(2) \text{ 当 } x \neq 0 \text{ 时, } f'(x) = -4x - 2x \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}$$

$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0+0} f'(x) = 1$, $\underline{\lim}_{x \rightarrow 0+0} f'(x) = -1$ 于是 $f(x)$ 在 $x=0$ 的右侧不单调下降

$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0-0} f'(x) = 1$, $\underline{\lim}_{x \rightarrow 0-0} f'(x) = -1$ 于是 $f(x)$ 在 $x=0$ 的左侧不单调上升

61. 证: $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $\forall t \in (0, 1)$

$$g(f(tx_1 + (1-t)x_2)) \leq g(tf(x_1) + (1-t)f(x_2))$$

$$\leq tg(f(x_1)) + (1-t)g(f(x_2)) \quad \square$$

62. 设 $f(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$

$$\text{则 } f''(x) = 12a_0x^2 + 6a_1x + 2a_2$$

$$f(x) \text{ 是凸函数} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$$

于是 $a_0 > 0$ 且 $\Delta \leq 0$, 即 $3a_1^2 - 8a_0a_2 \leq 0$

$$63. \text{证: } (\ln f(x))'' \geq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) \\ f'(x) & f''(x) \end{vmatrix} \geq 0$$

64. 证:

(1) 设 $f(x) = x^p, x \geq 0$, 其中 $p > 1$

$$\text{则 } f'(x) = p(p-1)x^{p-2} \geq 0 \quad (x \geq 0)$$

则 $f(x)$ 为 $[0, +\infty)$ 上的凸函数

$$\begin{aligned}\text{因此 } \frac{1}{2}f(|a|) + \frac{1}{2}f(|b|) &\geq f\left(\frac{1}{2}|a| + \frac{1}{2}|b|\right) \\ &= \frac{1}{2^p}(|a| + |b|)^p\end{aligned}$$

$$\text{即 } |a|^p + |b|^p \geq \frac{1}{2^{p-1}}(|a| + |b|)^p$$

(2) 设 $h(x) = x^p, x \geq 0$, 其中 $0 < p < 1$, 同 (1) 得证.

65. 证:

$$\begin{aligned}(1) f'(x) &= f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \frac{f'''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}, \quad 0 < \theta < 1, \forall x \in (a, b)\end{aligned}$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数 } (n > 2), \text{ 则 } f'(x) = \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

$x \neq x_0$ 时有 $(x-x_0)^{n-1} > 0$, 又因为 $\forall x \in (a, b), f^{(n)}(x) > 0$

于是 $x \neq x_0$ 时 $f'(x) > 0$, 因此 $f(x)$ 在 (a, b) 上严格单增

(定理 5.4.1 注)

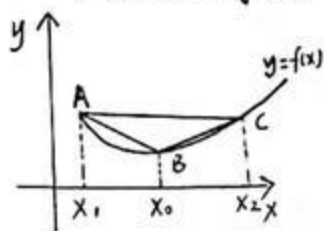
$$\begin{aligned}(2) f''(x) &= f''(x_0) + f'''(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(4)}(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-3)!}(x-x_0)^{n-3} \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}, \quad 0 < \theta < 1, \forall x \in (a, b)\end{aligned}$$

同上, 再由定理 5.4.5 可知 $f(x)$ 在 (a, b) 上严格凸.

66. 证: $\forall x_0 \in (a, b), \exists x_1, x_2 \in (a, b)$ 使得 $x_1 < x_0 < x_2$
 书中已证明 $f(x)$ 是 (a, b) 上的凸函数 (P219) (i)

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \quad (ii) \quad k_{AB} \leq k_{BC}$$

下面证明 (i) $\Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (iii) $k_{AB} \leq k_{AC}$



$$\Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \quad (iv) \quad k_{AC} \leq k_{BC}$$

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): 首先由 (i) 可知对于 $x_1 < x_2$, (i) 等价于

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \quad (1) \quad 0 < t < 1$$

而 (iii) 中不等式两侧乘以 $x_0 - x_1$ 有

$$f(x_0) - f(x_1) \leq \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} [f(x_2) - f(x_1)], \text{移项可得}$$

$$f(x_0) \leq \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) + \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} f(x_1) \quad (2)$$

令 $t = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}$, 则 $1-t = \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}$, 此时 $0 < t < 1$, 且

$$tx_1 + (1-t)x_2 = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} x_1 + \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} x_2 = x_0$$

从而 (i) $\Leftrightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (iii)

反之, 由于 $x_1 < x_0 < x_2$, $\exists t \in (0, 1)$ 使得 $x_0 = tx_1 + (1-t)x_2$

则 $t = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}$, 从而 (iii) $\Leftrightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) $\Leftrightarrow$ (i)

同理 (i) $\Leftrightarrow$ (iii), 同理可证 (i) $\Leftrightarrow$ (iv)

从而由上可得 $\forall x_0 \in (a, b)$, 过 x_0 的弦的斜率 $k(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

是 x 的增函数 (一)

以及, (a, b) 上任意四点 $s < t < u < v$ 有 $\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}$ (二)

有了以上结论, 对于 $\forall x_0 \in (a, b)$ 有

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}, \text{由 (一) 可知 } \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \text{ 随着 } x_1 \text{ 单增}$$

由单调有界可知 $\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ 存在

$$\text{即 } f'_-(x_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

同理 $\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$ 随着 x_2 单增, 则

$$f'_-(x_0) \leq \lim_{x_2 \rightarrow x_0} \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} = f'_+(x_0)$$

由于 $f'_-(x_0), f'_+(x_0)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 x_0 处左、右连续, 即连续

由 (二) 可知对于 $\forall \xi_1, \xi_2 \in (a, b)$ 且 $\xi_1 < \xi_2$

$\exists \delta = \frac{\xi_2 - \xi_1}{3} > 0$, 当 $\forall \eta_1 \in U^+(\xi_1, \delta), \forall \eta_2 \in U^+(\xi_2, \delta)$, (即 $\eta_1 < \eta_2$)

$$\text{有 } \frac{f(\eta_1) - f(\xi_1)}{\eta_1 - \xi_1} \leq \frac{f(\eta_2) - f(\xi_2)}{\eta_2 - \xi_2}, \text{ 两边取极限}$$

$$\text{有 } f'_+(\xi_1) = \lim_{\eta_1 \rightarrow \xi_1} \frac{f(\eta_1) - f(\xi_1)}{\eta_1 - \xi_1} \leq \lim_{\eta_2 \rightarrow \xi_2} \frac{f(\eta_2) - f(\xi_2)}{\eta_2 - \xi_2} = f'_+(\xi_2)$$

则 $f'_+(x)$ 在 (a, b) 上单增, 同理有 $f'_-(x)$ 在 (a, b) 上单增

综上, 题目得证.

注: 题中所证结论均可以按同样方法推广到任意的定义在 I 上的凸函数, 在端点处需要再加处理, 在开区间上则无需修改.

67-69. 略.

第六章 不定积分

习题六

1. 证: $dF(x) = f(x)dx$

由一阶微分形式不变性

$$dF(ax+b) = f(ax+b) d(ax+b) = af(ax+b) dx$$

因此,再由不定积分的线性性质

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

2. (1) 原式 $= \sqrt{2} \int x^{\frac{1}{2}} dx + \sqrt[3]{3} \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt[3]{3}}{4} x^{\frac{4}{3}} + C$

(2) 原式 $= \int dx + \int x^{-\frac{5}{4}} dx = x - 4x^{-\frac{1}{4}} + C$

(3) 原式 $= \frac{1}{\ln 3} (3^{x+1} - 3^{-x}) + \frac{1}{3} e^x + C$

(4) 原式 $= \int (\frac{1}{\cos^2 x} + 1) dx = \tan x + x + C$

(5) 原式 $= \int (\frac{1+x+(1-x)v}{\sqrt{1-x^2}}) dx = \int \frac{1+v}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{x(1-v)}{\sqrt{1-x^2}} dx$

由于 $\int \frac{x(1-v)}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1-v}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) = (v-1)\sqrt{1-x^2} + C$

于是原式 $= (1+v) \arcsin x + (v-1)\sqrt{1-x^2} + C$

(6) 原式 $= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int (\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}) dx = -(\cot x + \tan x) + C$

(7) 原式 $= \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} dx = \int \operatorname{sgn}(\sin x - \cos x) \cdot (\sin x - \cos x) dx$
 $= -(\cos x + \sin x) \operatorname{sgn}(\sin x - \cos x) + C$

(8) 原式 $= \frac{1}{2} (x^2 + x|x|) + C$

(9) 原式 $= x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x) + C = \begin{cases} x + C, & x \in (2k\pi, 2k\pi + \pi) \\ -x + C, & x \in (2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi), k \in \mathbb{Z} \\ 0, & x = k\pi \end{cases}$

注:涉及到绝对值,正负性,通常表示方法不唯一

(10) 原式 $= [x] \cdot x + C = kx + C, x \in [k, k+1), k \in \mathbb{Z}$.

3.

(1) 令 $3-5x=u$, 则 $du=-5dx$, 于是

$$\int \frac{2dx}{3-5x} = \int \frac{2}{u} \cdot (-\frac{1}{5}) du = -\frac{2}{5} \ln|u| + C = -\frac{2}{5} \ln|3-5x| + C$$

(2) 原式 $= \int \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-\frac{x^2}{2}}} dx$, 令 $\frac{x}{\sqrt{2}} = u$, 则 $du = \frac{1}{\sqrt{2}} dx$, 于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-\frac{x^2}{2}}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \arcsin u + C = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

(3) 原式 $= -\int [\frac{1}{3}(1-3x)^3 \sqrt{1-3x} - \frac{1}{3} \sqrt{1-3x}] dx$

令 $1-3x=u$, 则 $du=-3dx$, 于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int [\frac{1}{9} u^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{9} u^{\frac{1}{3}}] du = \frac{1}{21} u^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{12} u^{\frac{4}{3}} + C \\ &= \frac{1}{21} (1-3x)^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{12} (1-3x)^{\frac{4}{3}} + C \end{aligned}$$

(4) 由于 $1+\sin x = 1 + \cos(\frac{\pi}{2}-x) = 2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})$

令 $u = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$, 则 $du = -\frac{1}{2} dx$, 于是

$$\text{原式} = -\int \frac{1}{\cos^2 u} du = -\tan u + C = -\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) + C$$

(5) 令 $u=1+x^2$, 则 $du=2xdx$, 于是

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \int u^5 du = \frac{1}{12} u^6 + C = \frac{1}{12} (1+x^2)^6 + C$$

(6) 令 $u=1-x^2$, 则 $du=-2xdx$, 于是

$$\text{原式} = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\sqrt{u} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

(7) 注意到 $4+x^4 = 4(1+(\frac{x^2}{2})^2)$, 令 $\frac{x^2}{2} = u$, 则 $du = x dx$

$$\text{则原式} = \frac{1}{4} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{4} \arctan u + C = \frac{1}{4} \arctan \frac{x^2}{2} + C$$

(8) 令 $u=e^x+1$, 则 $du=e^x dx$, 于是

$$\text{原式} = \int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln(e^x+1) + C$$

(9) 令 $u = \sqrt{x}$, 则 $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$, 于是

$$\text{原式} = 2 \int \frac{du}{1+u^2} = 2 \arctan u + C = 2 \arctan \sqrt{x} + C$$

(10) 令 $u = \sqrt{x^2-1}$, 则 $du = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$, 于是

$$\text{原式} = \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + C = \arctan \sqrt{x^2-1} + C$$

(11) 利用积化和差公式, 有

$$\text{原式} = -\frac{1}{2} \int [\cos 4x - \cos 2x] dx = -\frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$(12) \text{原式} = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

(13) 由于 $\cos x dx = d \sin x$, 于是

$$\text{原式} = \int \frac{2 \sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} d \sin x, \text{ 令 } u = \sin x, \text{ 则原式} = \int \frac{2u}{\sqrt{1+u^2}} du$$

$$\text{令 } 1+u^2 = v, \text{ 则 } dv = 2u du, \text{ 于是原式} = \int \frac{dv}{\sqrt{v}} = 2\sqrt{v} + C \\ = 2\sqrt{1+\sin^2 x} + C$$

$$(14) \text{同}(13), \text{原式} = \int \frac{\sin x}{\sqrt{b^2 + (a^2-b^2)\sin^2 x}} d \sin x, \text{ 令 } b^2 + (a^2-b^2)\sin^2 x = u$$

则 $du = 2(a^2-b^2)\sin x d \sin x$, 于是

$$\text{原式} = \frac{1}{2(a^2-b^2)} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{(a^2-b^2)} \sqrt{u} + C = \frac{\sqrt{b^2 + (a^2-b^2)\sin^2 x}}{a^2-b^2} + C$$

$$(15) \text{令 } x = a \sin t, |t| < \frac{\pi}{2}, \text{ 则原式} = \int \frac{a \cos^2 t}{\sin t} dt = a \int \frac{dt}{\sin t} - a \int \sin t dt$$

$$\text{易知 } -a \int \sin t dt = a \cos t + C = \sqrt{a^2-x^2} + C$$

$$\text{对于 } a \int \frac{dt}{\sin t} = a \int \frac{\sin t dt}{\sin^2 t} = -a \int \frac{d \cos t}{1-\cos^2 t} = -\frac{a}{2} \ln \left| \frac{1+\cos t}{1-\cos t} \right| + C$$

$$\text{由于 } \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos t}{1-\cos t} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(a+\sqrt{a^2-x^2})^2}{x^2} \right| = \ln \left| \frac{a}{x} + \sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2 - 1} \right|$$

$$\text{因此原式} = \sqrt{a^2-x^2} - a \ln \left| \frac{a}{x} + \sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2 - 1} \right| + C$$

(16) 令 $u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 则 $du = \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, 于是

$$\text{原式} = \int \frac{(1+x^2) dx}{x^2 (1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$$

(17) 令 $x = a \tan t$, $|t| < \frac{\pi}{2}$, 则 $dx = \frac{a dt}{\cos^2 t}$, 于是

$$\text{原式} = \int \frac{a}{a^3 \cos^2 t \sqrt{(1+\tan^2 t)^3}} dt = \int \frac{\cos t}{a^2} dt = \frac{\sin t}{a^2} + C$$

由 $x = \frac{\sqrt{x^2+a^2} \cdot t}{a}$ 可知原式 $= \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2+a^2}} + C$

(18) 原式 $= \int \frac{\sqrt{x} x}{\sqrt{x} (1+\sqrt{x})} dx = 2 \int \frac{\sqrt{x} x}{1+\sqrt{x}} d\sqrt{x}$

由于 $\frac{\sqrt{x} x}{1+\sqrt{x}} = \frac{x(\sqrt{x}+1)-x}{1+\sqrt{x}} = x + \frac{1-x-1}{1+\sqrt{x}} = x + 1 - \sqrt{x} - \frac{1}{1+\sqrt{x}}$

于是原式 $= 2 \int (x + 1 - \sqrt{x} - \frac{1}{1+\sqrt{x}}) d\sqrt{x} = \frac{2}{3} \sqrt{x}^3 + 2\sqrt{x} - \sqrt{x}^2 - 2 \ln(1+\sqrt{x}) + C$

(最后一步有困难的同学可以作一个 $\sqrt{x} = u$ 的换元)

(19) 原式 $= \int \frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}} dx = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} + \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$

由于 $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} = \arcsin \frac{x}{2} + C$

$$\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{d(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} = -\sqrt{4-x^2} + C$$

因此, 原式 $= 2 \arcsin \frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2} + C$

(20) 令 $u = \sqrt{4-x^2}$, 则 $du = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} dx$, 于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{du}{-x^2} = \int \frac{du}{u^2-4} = -\int \frac{du}{2^2-u^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2-u}{2+u} \right| + C \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{2+\sqrt{4-x^2}} \right| + C \end{aligned}$$

$$4. (1) \int \ln(1+x^2) dx = x \ln(1+x^2) - \int x d \ln(1+x^2) \\ = x \ln(1+x^2) - 2 \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x + C$$

$$(2) \int x e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} \int x d e^{-3x} = -\frac{1}{3} (x e^{-3x} - \int e^{-3x} dx) \\ = -\frac{1}{3} x e^{-3x} - \frac{1}{9} e^{-3x} + C$$

$$(3) \int x \cos nx dx = \frac{1}{n} \int x d \sin nx = \frac{1}{n} (x \sin nx - \int \sin nx dx) \\ = \frac{1}{n} x \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx + C$$

$$(4) \int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \\ = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$(5) \int \frac{x}{\sin^2 x} dx = - \int x d \cot x = - (x \cot x - \int \cot x dx)$$

$$\text{由于 } \int \cot x dx = \int \frac{1}{\sin x} d \sin x = \ln |\sin x| + C$$

$$\text{于是 } \int \frac{x}{\sin^2 x} dx = -x \cot x + \ln |\sin x| + C$$

$$(6) \int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{\arctan x}{x^2} dx - \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$$

$$\text{易知 } \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \int \arctan x d \arctan x = \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C$$

$$\text{对于 } \int \frac{\arctan x}{x^2} dx = - \int \arctan x d \frac{1}{x} = - \left(\frac{\arctan x}{x} - \int \frac{dx}{x(1+x^2)} \right)$$

$$\text{令 } x = \tan t, |t| < \frac{\pi}{2}, \text{ 则 } \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \frac{dt}{\tan t} = \int \frac{d \sin t}{\sin t} = \ln |\sin t| + C$$

$$\text{由 } x = \tan t \text{ 可知 } \sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{于是原式} = - \frac{\arctan x}{x} + \ln \left| \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right| + \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C$$

$$(7) \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \int \frac{d e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} - \int e^{\arctan x} d \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

$$\text{由于 } \int e^{\arctan x} d \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} = - \int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx = - \int \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} d e^{\arctan x}$$

$$= - \left(\frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} - \int e^{\arctan x} d \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} \right)$$

$$= - \left(\frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{1/2}} - \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx \right)$$

$$\text{于是 } \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{1/2}} + \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{1/2}} - \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$$

$$\text{则 } \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \frac{(1+x)}{2} \cdot \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{1/2}} + C$$

$$(8) \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$\text{易知 } \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\text{对于 } \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}, \text{ 令 } x = \tan t, |t| < \frac{\pi}{2}, \text{ 则}$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int (\cos 2t + 1) dt = \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{t}{2} + C$$

$$t = \arctan x, \sin 2t = 2 \sin t \cos t = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$\text{于是原式} = \frac{1}{2} \left(\arctan x - \frac{x}{1+x^2} \right) + C$$

$$(9) \int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$$

$$= x \sin(\ln x) - [x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx]$$

$$\text{于是 } \int \sin(\ln x) dx = \frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$$

$$(10) \int e^x \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int e^x (\cos 2x + 1) dx = \frac{1}{2} \int e^x dx + \frac{1}{2} \int e^x \cos 2x dx$$

$$\text{由于 } \int e^x \cos 2x dx = e^x \cos 2x + 2 \int e^x \sin 2x dx$$

$$= e^x \cos 2x + 2 e^x \sin 2x - 4 \int e^x \cos 2x dx$$

$$\text{于是 } \int e^x \cos 2x dx = \frac{e^x}{5} (\cos 2x + 2 \sin 2x)$$

$$\text{则原式} = e^x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cos 2x + \frac{1}{5} \sin 2x \right) + C$$

5.

$$\begin{aligned} (1) \int x^m \ln^n x dx &= \frac{1}{m+1} \int \ln^n x dx^{m+1} = \frac{1}{m+1} (x^{m+1} \ln^n x - \int x^{m+1} d \ln^n x) \\ &= \frac{1}{m+1} (x^{m+1} \ln^n x - n \int x^m \ln^{n-1} x dx) \end{aligned}$$

$$\text{即 } I_n = \frac{1}{m+1} x^{m+1} \ln^n x - \frac{n}{m+1} I_{n-1}$$

$$(2) \int x^n e^{-x} dx = - \int x^n d e^{-x} = - (x^n e^{-x} - n \int x^{n-1} e^{-x} dx)$$

$$\text{即 } I_n = -x^n e^{-x} + n I_{n-1}$$

$$(3) \int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int x^{n-1} d \sqrt{1-x^2} = -x^{n-1} \sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2} dx^{n-1}$$

$$\text{由于 } \int \sqrt{1-x^2} dx^{n-1} = (n-1) \int \frac{x^{n-2} (1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx = (n-1) \left[\int \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx \right]$$

$$\text{于是 } n I_n = -x^{n-1} \sqrt{1-x^2} + (n-1) I_{n-2}$$

$$\text{即 } I_n = -\frac{1}{n} x^{n-1} \sqrt{1-x^2} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$(4) I_n = \int \frac{1}{x^{n+1}} d \sqrt{1+x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}} - \int \sqrt{1+x^2} dx^{-n-1} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}} + (n+1) \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+2}} dx$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}} + (n+1) \left[\int \frac{dx}{x^{n+2} \sqrt{1+x^2}} + \int \frac{dx}{x^n \sqrt{1+x^2}} \right]$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}} + (n+1) (I_{n+2} + I_n)$$

$$\text{于是 } I_{n+2} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{(n+1)x^{n+1}} - \frac{n}{n+1} I_n$$

$$\text{即 } I_n = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$$

$$6. (1) \text{ 设 } \frac{2x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}, \text{ 比较系数可得}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+C=2 \\ A-B-C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=1 \end{cases}, \text{ 于是 } I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{x+1} + C$$

(2) 设 $\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(1+x^2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{1+x^2} + \frac{Dx+E}{(1+x^2)^2}$ 比较系数, 有

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2B+C=0 \\ 2A+B-2C+D=2 \\ -2B+C-2D+E=2 \\ A-2C-2E=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-2 \\ D=-3 \\ E=-4 \end{cases}$$

于是 $I = \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{x}{1+x^2} dx - 2 \int \frac{dx}{1+x^2} - 3 \int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx - 4 \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

$$= \ln|x-2| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - 2\arctan x + \frac{3}{2(1+x^2)} - \frac{2x}{x^2+1} - 2\arctan x + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{(x-2)^2}{1+x^2} - 4\arctan x + \frac{3-4x}{2(x^2+1)} + C$$

注意: $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ 可参考书中 p258 eg. 6.26

书后答案其中一项为 $-\frac{3x^2}{2(1+x^2)}$, 是由于 $\frac{3}{2(1+x^2)} = \frac{3(1+x^2)-3x^2}{2(1+x^2)}$

$= \frac{3}{2} - \frac{3x^2}{2(1+x^2)}$ 而求导后常数项为零, 于是两者都为

$-3 \int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$ 的结果, 也可理解为不定积分中“C”作用的结果.

(3) 由 $\mathbb{R}$ 上多项式的除法可知 $x^2-x+1 = (\frac{1}{2}x-\frac{3}{4})(2x+1) + \frac{7}{4}$

于是 $I = \frac{1}{2} \int x dx - \frac{3}{4} \int dx + \frac{7}{4} \int \frac{dx}{2x+1}$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{7}{8} \ln|2x+1| + C$$

(4) 令 $z=x+1$, 则 $x=z-1$, $dx=dz$, 于是

$$\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2} dx = 3 \int \frac{z}{(z^2+1)^2} dz + 2 \int \frac{dz}{(z^2+1)^2}$$

$$= -\frac{3}{2(z^2+1)} + \frac{z}{z^2+1} + \arctan z + C$$

$$= \frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)} + \arctan(x+1) + C$$

(5) 由 $\mathbb{R}$ 上的因式分解 $x^3+2x^2-x-2 = (x+1)(x+2)(x-1)$

之后同 (1) 可解

(6) 法一: 由 $\mathbb{R}$ 上的因式分解 $x(x^3+2) = x(x+\sqrt[3]{2})(x^2-\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{2}^2)$

同 (1), (4) 可解

法二: $\int \frac{dx}{x(x^3+2)} = \frac{1}{3} \int \frac{dx^3}{x^3(x^3+2)}$, 令 $x^3 = u$, 则

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{3} \int \frac{du}{u(u+2)} = \frac{1}{6} \left[\int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u+2} \right] \\ &= \frac{1}{6} (\ln|u| - \ln|u+2|) + C \\ &= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x^3}{x^3+2} \right| + C\end{aligned}$$

(7) 同 (1) 可解, 过程繁琐, 但本质并无改变

(8) $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$

令 $\frac{x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$, 比较系数可得

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=1 \\ A-C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1/3 \\ B=-1/3 \\ C=1/3 \end{cases}$$

$$\text{于是 } I = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3} \int \frac{-x+1}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{3} \left[\ln|x-1| + \int \frac{-x+1}{x^2+x+1} dx \right]$$

令 $z = x + \frac{1}{2}$, 则 $x = z - \frac{1}{2}$, $dx = dz$, 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{-x+1}{x^2+x+1} dx &= - \int \frac{z}{z^2+\frac{3}{4}} dz + \frac{3}{2} \int \frac{1}{z^2+\frac{3}{4}} dz \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d(z^2+\frac{3}{4})}{z^2+\frac{3}{4}} + \sqrt{3} \int \frac{d\frac{2}{\sqrt{3}}z}{1+(\frac{2}{\sqrt{3}}z)^2} \\ &= -\frac{1}{2} \ln(z^2+\frac{3}{4}) + \sqrt{3} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}}z + C\end{aligned}$$

$$\text{则原式} = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

7.

$$(1) R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos x} = -\frac{1}{\sin^2 x (-\cos x)} = -R(\sin x, -\cos x)$$

根据书中P264-265所述内容, 令 $t = \sin x$, 实际上这里很容易

看出 $\frac{1}{\sin^2 x \cos x} = \frac{\cos x}{\sin^2 x (1 - \sin^2 x)}$, 于是

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = \int \frac{d \sin x}{\sin^2 x (1 - \sin^2 x)} = \int \frac{dt}{t^2 (1 - t^2)}, \text{ 或者直接由 } dt = \cos x dx$$

于是 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dt}{t^2 (1 - t^2)}$. 这里想说明的是,

根据书中所述的方法不加思考的去解题或许是最“直接”的, 但不一定是最有效的, 同学们一定要根据具体题目具体思考.

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{t^2 (1 - t^2)} &= \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{1 - t^2} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C \\ &= -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C \end{aligned}$$

$$(2) \int \frac{dx}{\cos^2 x \sin x} = -\int \frac{d \cos x}{\cos^2 x (1 - \cos^2 x)} = \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right| + C$$

注: $-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right| = \ln \sqrt{\left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right|}$

而 $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \cdot \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 - \cos x)} = 1$

即 $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{(1 - \cos x)^2}{1 - \cos^2 x} = \frac{(1 - \cos x)^2}{\sin^2 x}$

于是 $-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right| = \ln |\csc x - \cot x|$, 即书后答案.

$$(3) \int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \cos^2 x} dx = -\int \frac{d(1 + \cos^2 x)}{1 + \cos^2 x}$$

$$= -\ln |1 + \cos^2 x| + C$$

$$(4) \int \sin 5x \sin 3x dx = -\frac{1}{2} \left(\int \cos 8x dx - \int \cos 2x dx \right) \\ = -\frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$(5) \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x} + 1 - 1 \right) dx = 2 \int \frac{dx}{1+\cos^2 x} - \int dx$$

易知 $-\int dx = -x + C$

对于 $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x (2 + \tan^2 x)} = \int \frac{d \tan x}{2 + \tan^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d \frac{\tan x}{\sqrt{2}}}{1 + \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right)^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) + C$$

因此, 原式 $= \sqrt{2} \arctan \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) - x + C$

$$(6) \int \frac{(-\sin^4 x)(-\sin x)}{\cos^4 x} dx = - \int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^4 x} d \cos x \\ = - \left[\int \left(\frac{1}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x} + 1 \right) d \cos x \right] \\ = \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x + C$$

$$(7) \int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{d \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2} + C$$

$$(8) \int \frac{1+\sin x}{1-\sin x} dx = \int \left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + 1 - 1 \right) dx = 2 \int \frac{dx}{1-\sin x} - \int dx$$

易知 $-\int dx = -x + C$

对于 $\int \frac{dx}{1-\sin x} = \int \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

$$= \tan x + C - \int \frac{d \cos x}{\cos^2 x}$$

$$= \tan x + \frac{1}{\cos x} + C$$

于是, 原式 $= 2 \tan x + \frac{2}{\cos x} - x + C$

(9) 分析: 注意到分母是 $a\sin x + b\cos x$, 若能在分子上凑出 $a\cos x - b\sin x$ 则可由 $(a\cos x - b\sin x)dx = d(a\sin x + b\cos x)$ 作为突破口解题

$$\frac{\sin x}{a\sin x + b\cos x} = \frac{a^2\sin x + b^2\sin x}{(a^2+b^2)(a\sin x + b\cos x)} = \frac{a^2\sin x + b(b\sin x - a\cos x) + ab\cos x}{(a^2+b^2)(a\sin x + b\cos x)}$$

$$= \frac{a(a\sin x + b\cos x) - b(a\cos x - b\sin x)}{(a^2+b^2)(a\sin x + b\cos x)}$$

于是 $\int \frac{\sin x}{a\sin x + b\cos x} dx = \frac{a}{a^2+b^2} \int dx - \frac{b}{a^2+b^2} \int \frac{d(a\sin x + b\cos x)}{a\sin x + b\cos x}$

$$= \frac{1}{a^2+b^2} (a - b \ln |a\sin x + b\cos x|) + C$$

(10) $\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x + 2} dx = \frac{1}{2} \left(\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x + 2} dx + \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x - \cos x + 2} dx \right)$

$$= \frac{1}{2} \left[\int \frac{d(\sin x - \cos x + 2)}{\sin x - \cos x + 2} + \int dx - 2 \int \frac{dx}{\sin x - \cos x + 2} \right]$$

易知 $\int \frac{d(\sin x - \cos x + 2)}{\sin x - \cos x + 2} + \int dx = \ln |\sin x - \cos x + 2| + x + C$

对于 $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x + 2}$, 令 $\tan \frac{x}{2} = t$, 则 $dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx$

则 $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x + 2} = 2 \int \frac{dx}{(2\tan \frac{x}{2} + 1 + 3\tan^2 \frac{x}{2}) \cdot 2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2}}$

$$= 2 \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 1} = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{1}{3}}$$

由有理函数的不定积分可知

$$\int \frac{dt}{t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{1}{3}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \frac{3t+1}{\sqrt{2}} + C$$

于是原式 $= \frac{1}{2} \ln |\sin x - \cos x + 2| + \frac{x}{2} - \sqrt{2} \arctan \frac{3\tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{2}} + C$

8.

$$\begin{aligned}
 (1) \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}+1} dx &= \int \frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{4}})} dx = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{4}}} - \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{1}{2}}+1)} \\
 &= \frac{4}{3} \left(\int dx^{\frac{1}{4}} - \int \frac{d(x^{\frac{1}{2}}+1)}{x^{\frac{1}{4}}+1} \right) \\
 &= \frac{4}{3} \left(x^{\frac{3}{4}} - \ln|x^{\frac{1}{4}}+1| \right) + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} &= \int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} dx \\
 \text{易知 } \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \sqrt{x} + C \quad \frac{1}{2} \int dx = \frac{x}{2} + C
 \end{aligned}$$

$$\text{对于 } \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} dx = \int \sqrt{x+1} d\sqrt{x}, \text{ 令 } \sqrt{x}=t, \text{ 则 } \int \sqrt{x+1} d\sqrt{x} = \int \sqrt{t+1} dt \quad ①$$

△ 延伸: 求 $\int \sqrt{a^2+x^2} dx = I \quad (x>0)$

$$\text{令 } x = a \tan \theta, \text{ 则 } dx = a \sec^2 \theta d\theta \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$

$$\text{于是 } I = \int \sqrt{a^2+a^2 \tan^2 \theta} \cdot a \sec^2 \theta d\theta = \int (a \sec \theta) \cdot (a \sec^2 \theta) d\theta = a^2 \int \sec^3 \theta d\theta$$

$$\text{令 } I' = \int \sec^3 \theta d\theta = \int \sec \theta d \tan \theta = \sec \theta \tan \theta - \int \tan \theta d \sec \theta$$

$$= \sec \theta \tan \theta - \int \tan^2 \theta \sec \theta d\theta$$

$$= \sec \theta \tan \theta - \int (\sec^2 \theta - 1) \sec \theta d\theta$$

$$= \sec \theta \tan \theta - I' + \int \sec \theta d\theta$$

$$\text{则 } 2I' = \sec \theta \tan \theta + \int \sec \theta d\theta$$

对于 $\int \sec \theta d\theta$ 可令 $\sin \theta = t$ 转化为有理函数, 或者注意到

$$d \sec \theta = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta, \quad d \tan \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \quad \text{且} \quad \sec \theta + \tan \theta = \frac{1+\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\text{于是 } \int \sec \theta d\theta = \int \frac{d(\sec \theta + \tan \theta)}{\sec \theta + \tan \theta} = \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C$$

$$\text{因此 } I' = \frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta + \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C$$

$$\text{于是 } I = a^2 I', \text{ 由 } x = a \tan \theta \text{ 可知 } \tan \theta = \frac{x}{a}, \quad \sec \theta = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$$

$$\text{则 } I = \frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{a^2+x^2}| - \frac{a^2}{2} \ln |a| + C$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{a^2+x^2}| + C$$

□

有了延伸的结论, 可知①式 $= \frac{t}{2} \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \ln |t + \sqrt{1+t^2}| + C$
 $= \frac{1}{2} \sqrt{x(1+x)} + \frac{1}{2} \ln |\sqrt{x} + \sqrt{1+x}| + C$

于是 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{x(1+x)} - \frac{1}{2} \ln |\sqrt{x} + \sqrt{x+1}| + C$

(3) 令 $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = t$, 则 $dt = -\frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$, 于是

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}} = -\int (t^2+1) dt = -\frac{1}{3} t^3 - t + C = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} (2 + \frac{1}{x^2}) + C$$

(4) 令 $\frac{1}{x} = t$ 则 $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2} dt$, $\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{\frac{t^2+t+1}{t^2}} = \operatorname{sgn} t \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t}$

于是 $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2+x+1}} = -\operatorname{sgn} t \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}$

由于 $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} = \int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}} = \ln(t+\frac{1}{2} + \sqrt{t^2+t+1}) + C$
 $= \ln(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \operatorname{sgn} x \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}) + C$

于是当 $x > 0$ 时, $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2+x+1}} = -\ln(\frac{1+\sqrt{x^2+x+1}}{x} + \frac{1}{2}) + C$

当 $x < 0$ 时, $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2+x+1}} = \ln(\frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x} + \frac{1}{2}) + C$
 $= \ln(\frac{2+x-2\sqrt{x^2+x+1}}{2x}) + C$

$$= \ln(-\frac{3}{4} \cdot \frac{2x}{2+x+2\sqrt{x^2+x+1}}) + C$$

$$= -\ln(-\frac{4}{3} \cdot \frac{2+x+2\sqrt{x^2+x+1}}{2x}) - \ln \frac{3}{4} + C'$$

$$= -\ln(-\frac{2+x+2\sqrt{x^2+x+1}}{2x}) + C'$$

因此原式 $= -\ln |\frac{1+\sqrt{1+x+x^2}}{x} + \frac{1}{2}| + C$

(5) 令 $\frac{1}{x+1} = t$, 则 $x+1 = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2} dt$, $\sqrt{x^2+4x+5} = \operatorname{sgn} t \frac{\sqrt{2t^2+2t+1}}{t}$

于是 $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+5}} = -\operatorname{sgn} t \int \frac{dt}{\sqrt{2t^2+2t+1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sgn} t \int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}}$

同(4)可得原式 $= -\frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{x+3}{2(x+1)} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^2 + 1} \right| + C$

(6) 补充: 欧拉代换 (多用于解决分母上有两项相加的问题)

(1) 若 $a > 0$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm \sqrt{a}x + z$

(2) 若 $c > 0$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = xz \pm \sqrt{c}$

(3) $\sqrt{a(x-c_1)(x-c_2)} = z(x-c_1)$

这里设 $\sqrt{x^2+x+1} = z-x$, 则 $x = \frac{z^2-1}{1+2z}$

$dx = \frac{2(z^2+z+1)}{(1+2z)^2} dz$, $\sqrt{x^2+x+1} = \frac{z^2+z+1}{1+2z}$

于是 $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{2} \int \frac{z^2+z+1}{z(z+\frac{1}{2})^2} dz = \frac{1}{2} \int \left[\frac{4}{z} - \frac{3}{z+\frac{1}{2}} - \frac{3}{2(z+\frac{1}{2})^2} \right] dz$

$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z^4}{|z+\frac{1}{2}|^3} \right| + \frac{3}{4(z+\frac{1}{2})} + C_1 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{8}$

$= \frac{1}{2} \ln \frac{z^4}{|2z+1|^3} + \frac{3}{2(2z+1)} + C$, 其中 $z = x + \sqrt{x^2+x+1}$

(7) 设 $x = \sin \theta$, $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, 则 $dx = \cos \theta d\theta$

$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \int \cos \theta \sqrt{\frac{1-\sin \theta}{1+\sin \theta}} d\theta = \int \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cdot \sqrt{\frac{1-\sin \theta}{1+\sin \theta}} d\theta$

$= \int (1-\sin \theta) d\theta = \theta + \cos \theta + C$

$= \arcsin x + \cos(\arcsin x) + C$

(8) 令 $\frac{1}{x} = t$, 同(4)、(5)可解

(9) 设 $\sqrt{\tan x} = t$, 则 $\tan x = t^2$, 两边微分得 $\sec^2 x dx = 2t dt$

由于 $\sec^2 x = \tan^2 x + 1 = t^4 + 1$, 于是 $(t^4+1)dx = 2t dt$

于是 $\int \sqrt{\tan x} dx = \int \frac{2t^2}{t^4+1} dt$ 这里可利用有理函数不定积分的

方法, 先将 t^4+1 分解为 $\mathbb{R}$ 上不可约多项式的乘积, 再利用待定系数法将 $\frac{2t^2}{t^4+1}$ 写为最简真分式的和, 最后求出积分.

这里给出另一种较为巧妙的方法.

$$\int \frac{2t^2}{t^4+1} dt = \int \frac{2}{t^2+\frac{1}{t^2}} dt, \text{ 由于 } t^2+\frac{1}{t^2} = (t+\frac{1}{t})^2-2 = (t-\frac{1}{t})^2+2$$

$$\text{且 } (t+\frac{1}{t})' = 1-\frac{1}{t^2}, (t-\frac{1}{t})' = 1+\frac{1}{t^2}, \text{ 于是}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{t^2+\frac{1}{t^2}} dt &= \int \frac{1-\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}} dt + \int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}} dt \\ &= \int \frac{1-\frac{1}{t^2}}{(t+\frac{1}{t})^2-2} dt + \int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{(t-\frac{1}{t})^2+2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{设 } t+\frac{1}{t} &= u \\ \text{设 } t-\frac{1}{t} &= v \end{aligned} \quad \int \frac{du}{u^2-2} + \int \frac{dv}{v^2+2}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u} \right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{v}{\sqrt{2}} + C$$

$$u = t + \frac{1}{t} = \sqrt{\tan x} + \frac{1}{\sqrt{\tan x}}, \quad v = t - \frac{1}{t} = \sqrt{\tan x} - \frac{1}{\sqrt{\tan x}}$$

$$\text{于是 } \int \sqrt{\tan x} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{\tan x - \sqrt{2} \tan x + 1}{\tan x + \sqrt{2} \tan x + 1} \right| + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{\tan x - 1}{\sqrt{2} \tan x} + C$$

$$\text{注意: 设 } \arctan A = \theta \quad (A \neq 0), \text{ 则 } \arctan \frac{1}{A} = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\text{则 } \arctan(-\frac{1}{A}) = \theta - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{于是 } \arctan \frac{\tan x - 1}{\sqrt{2} \tan x} = \arctan \frac{\sqrt{2} \tan x}{1 - \tan x} + \frac{\pi}{2}$$

因此书后答案也正确。

$$(10) \text{ 令 } \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} = \frac{1}{t}, \text{ 则 } x = 2 - \frac{4}{t^2+1}, \quad dx = \frac{12t^2}{(t^2+1)^2} dt, \quad (2-x)^2 = \frac{16}{(t^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \int \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{dx}{(2-x)^2} &= \int \frac{1}{t} \cdot \frac{12t^2}{(t^2+1)^2} \cdot \frac{(t^2+1)^2}{16} dt = \frac{3}{4} \int t dt \\ &= \frac{3}{8} t^2 + C \\ &= \frac{3}{8} \sqrt{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C \end{aligned}$$