习题 7.

1. 作 $f(t)=\alpha+\beta t$ 的分割 将 $[0,T]$ n 等分 $\Delta: 0=x_0<x_1<\cdots<x_n=T$

在区间 $[\frac{i-1}{n}T, \frac{i}{n}T]$ 上任取 ξ_i 作和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n})T = \frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n}(\alpha+\beta\xi_i)$

由于 $\frac{i-1}{n}T \le \xi_i \le \frac{i}{n}T$ 且 $f(x)$ 在 $[0,T]$ 单调，不妨设 $f(x)$ 单增

故有 $m_i=\alpha+\beta\frac{i-1}{n}T \le \alpha+\beta\xi_i \le \alpha+\beta\frac{i}{n}T = M_i$

$\lim_{n\to\infty} \frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n}(\alpha+\beta\frac{i-1}{n}T) = \lim_{n\to\infty}\frac{T}{n}(n\alpha+\beta\frac{n-1}{2}T) = \alpha T+\frac{1}{2}\beta T^2$

$\lim_{n\to\infty} \frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n}(\alpha+\beta\frac{i}{n}T) = \lim_{n\to\infty}\frac{T}{n}(n\alpha+\beta\frac{n+1}{2}T) = \alpha T+\frac{1}{2}\beta T^2$

由夹逼收敛原理 $\lim_{n\to\infty}\frac{T}{n}(\alpha+\beta\xi_i) = \alpha T+\frac{1}{2}\beta T^2$ 故 $\int_0^T(\alpha+\beta t)dt = \alpha T+\frac{1}{2}\beta T^2$

2. 证明：反证法：假设定积分不唯一，不妨设 $\int_a^b f(x)dx = I_1$ $\int_a^b f(x)dx = I_2$

不妨令 $I_1<I_2$ 令 $\varepsilon=\frac{I_2-I_1}{2}$

由 $\left.\begin{array}{l}\int_a^b f(x)dx=I_1 \\ \int_a^b f(x)dx=I_2\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} I_1-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i<\varepsilon+I_1 \\ I_2-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i<\varepsilon+I_2\end{array}$ $\Rightarrow \frac{I_1+I_2}{2}<\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i<\frac{I_1+I_2}{2}$ 矛盾

$\Rightarrow$ 定积分唯一

3. (1) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}) = \int_0^1\frac{1}{1+x}dx = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n(n+1)\cdots(2n-1)}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}[\ln\frac{n}{n}+\ln(1+\frac{1}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n-1}{n})]}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln 1+\ln(1+\frac{1}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n-1}{n})] = \int_0^1\ln(1+x)dx = [(x+1)\ln(1+x)-x]\Big|_0^1 = 2\ln 2-1$

$\Rightarrow$ 原式 $= e^{2\ln 2-1} = \frac{4}{e}$

(3) $2\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2+\sin\frac{k}{n}\cdot 2\pi) = 2\pi\int_0^1(2+\sin 2\pi x)dx = 2\pi(2x-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x)\Big|_0^1 = 4\pi$

4. 由 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^\alpha}=1 \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}$ 当 $n>N$ 时 有 $|\frac{a_n}{n^\alpha}-1|<\varepsilon$

$\Rightarrow (1-\varepsilon)n^\alpha < a_n < (\varepsilon+1)n^\alpha$ 而 $\{a_n\}$ 前 N 项不影响极限

$\Rightarrow$ 不妨令 $a_1=1^\alpha(1+\varepsilon)$ $a_2=2^\alpha(1+\varepsilon)$ $\cdots$ $a_N=N^\alpha(1+\varepsilon)$

$\frac{1}{n}\{[(\frac{1}{n})^\alpha+(\frac{2}{n})^\alpha+\cdots+(\frac{N}{n})^\alpha](1+\varepsilon)+[(\frac{N+1}{n})^\alpha+(\frac{N+2}{n})^\alpha+\cdots+(\frac{n}{n})^\alpha](1-\varepsilon)\} < \frac{1}{n}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n^\alpha}$

$\frac{1}{n}[(\frac{1}{n})^\alpha+(\frac{2}{n})^\alpha+\cdots+(\frac{n}{n})^\alpha](1-\varepsilon)$ $\frac{1}{n}[(\frac{1}{n})^\alpha+(\frac{2}{n})^\alpha+\cdots+(\frac{n}{n})^\alpha](1+\varepsilon)$

对两侧取极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(\frac{1}{n})^\alpha+(\frac{2}{n})^\alpha+\cdots+(\frac{n}{n})^\alpha](1-\varepsilon) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(\frac{1}{n})^\alpha+(\frac{2}{n})^\alpha+\cdots+(\frac{n}{n})^\alpha](1+\varepsilon)$

$= \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}$

5. 证明：对区间 $[a,b]$ 作分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ $\lambda(\Delta)=\max\{\Delta x_i\}$ $\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$

$g(x)$ 在这个分割上的任意黎曼和为 $\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$

$f(x)$ 在这个分割下以同样取值的黎曼和为 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

由 $f(x)\in R[a,b]$ 不妨设 $\int_a^b f(x)dx = I$

即 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ 当 $\lambda(\Delta)<\delta$ 时 有 $|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I|<\varepsilon$.

$|\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i - I| = |\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I|$

$\le |\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i| + |\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I|$

$\le |\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i| + \varepsilon/2$ 设 $m=\inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$ $M=\sup_{x\in[a,b]}\{g(x)\}$

由 $g(x)$ 与 $f(x)$ 只在有限点不同 $\Rightarrow$ 不妨设这些点在 $[x_0,x_1]\cdots[x_{s-1},x_s]$ 上.

取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2(M-m)s}$

$|\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i| = |\sum_{i=1}^{n}[g(\xi_i)-f(\xi_i)]\Delta x_i| \le (M-m)\sum_{i=1}^{s}\Delta x_i \le (M-m)\cdot s\delta < \varepsilon/2$

故 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta=\frac{\varepsilon}{2(M-m)s}$ 当 $\lambda(\Delta)<\delta$ 时有

$|\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i - I| \le |\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i| + \varepsilon/2 = \varepsilon$

故 $\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i = I$ 故 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

6. 必要性显然

充分性：先证 $f(x)$ 有界 反证法：假设 $f(x)$ 无界

对题目所给的分割 $\exists\, 1\le i_0\le n$ s.t. $f(x)$ 在 $[x_{i_0-1},x_{i_0}]$ 上无界

对每个 $i\ (1\le i\le n, i\ne i_0)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上取 ξ_i 作和式 $\sum_{i=1, i\ne i_0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \triangleq M_1$

$\forall M>0$ 由 $f(x)$ 在 $[x_{i_0-1},x_{i_0}]$ 无界，故 $[x_{i_0-1},x_{i_0}]$ 可取 ξ_{i_0} s.t. $|f(\xi_{i_0})| > \frac{M+|M_1|}{\Delta x_{i_0}}$

$\Rightarrow |\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i| = |\sum_{i=1, i\ne i_0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0}| \ge |f(\xi_{i_0})|\Delta x_{i_0} - |M_1| > M$ 与条件矛盾！

$\Rightarrow f(x)$ 有界（目的是使区间内上下确界能取到）

由题意 $\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 都有 $|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I|<\varepsilon$

不妨取 $M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$，由于 $f(x)$ 有界，一定存在 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ s.t. $f(\xi_i)=M_i \Rightarrow I-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i<I+\varepsilon$ ①

取 $m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\} \Rightarrow$ 同理可得 $I-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i<I+\varepsilon$ ②

①-② 得 $-2\varepsilon<\sum_{i=1}^{n}[M_i-m_i]\Delta x_i<2\varepsilon$

故 $\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i<2\varepsilon \Rightarrow f(x)\in R[a,b]$

7. ($\Rightarrow$) 由 $f(x)\in R[a,b] \Rightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists$ 对区间 $[a,b]$ 的分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

记 $w_i=\sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]}\{|f(x')-f(x'')|\}$ 有 $\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i<\varepsilon$

记 $w_{i(+)}=\sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]}\{|f^+(x')-f^+(x'')|\}$ 而 $\sum_{i=1}^{n}w_{i(+)}\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i<\varepsilon$

同理可得 $\sum_{i=1}^{n}w_{i(-)}\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i<\varepsilon$

故 $f^+(x)\in R[a,b]$ $f^-(x)\in R[a,b]$

($\Leftarrow$) 由 $f^+(x)\in R[a,b]$ $f^-(x)\in R[a,b]$

由定积分的线性性质 $f(x)=f^+(x)-f^-(x)\in R[a,b]$

8. $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 当 $\lambda(\Delta)<\delta$ 时有

$|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)g(x)dx|$

$= |\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i - I|$

$\le |\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i| + |\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i - I|$

$\le |\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(\eta_i)-g(\xi_i)]\Delta x_i| + \varepsilon/2$

$\le |\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)w_i\Delta x_i| + \varepsilon/2$ $w_i=\sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]}\{g(x')-g(x'')\}$

由 $f(x)\in R[a,b] \Rightarrow |f(x)|\le M$

由 $g(x)\in R[a,b] \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i\le\frac{\varepsilon}{2M}$

故 $|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)g(x)dx| \le |\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)w_i\Delta x_i| + \varepsilon/2 \le M\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i + \varepsilon/2 \le M\frac{\varepsilon}{2M} + \varepsilon/2 = \varepsilon$

故 $\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)g(x)dx$

9. (1) $f(x)\in R[a,b] \Rightarrow |f(x)|\le M$

由 $f(x)\in R[a,b]$ 对区间 $[a,b]$ 进行分割：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

$m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$ $M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$ $w_i=M_i-m_i$ 由 $f(x)\in R[a,b] \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i<\varepsilon\cdot\alpha^2$

对 $\frac{1}{f(x)}$ 的区间 $[a,b]$ 同样分割

由题意 $f(x)>0$ 恒成立 $m_i'=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{\frac{1}{f(x)}\}=\frac{1}{M_i}$ $M_i'=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{\frac{1}{f(x)}\}=\frac{1}{m_i}$

$\sum_{i=1}^{n}(M_i'-m_i')\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{M_i-m_i}{M_im_i}\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n}\frac{M_i-m_i}{\alpha^2}\Delta x_i < \frac{1}{\alpha^2}\cdot\alpha^2\varepsilon = \varepsilon$

$\Rightarrow \frac{1}{f(x)}\in R[a,b]$

习题7.

1. 作 $f(t)=\alpha+\beta t$ 的分割 将 $[0,T]$ n等分 $\Delta: 0=x_0<x_1<\cdots<x_n=T$

在区间 $[\frac{i-1}{n}T,\frac{i}{n}T]$ 上任取 ξ_i 作和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\frac{i}{n}T-\frac{i-1}{n}T)=\frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n}(\alpha+\beta\xi_i)$

由于 $\frac{i-1}{n}T\le\xi_i\le\frac{i}{n}T$ 且 $f(x)$ 在 $[0,T]$ 单调，不妨设 $f(x)$ 单增

故有 $m_i=\alpha+\beta\frac{i-1}{n}T\le\alpha+\beta\xi_i\le\alpha+\beta\frac{i}{n}T=M_i$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n}(\alpha+\beta\frac{i-1}{n}T)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{T}{n}(n\alpha+\beta\frac{n-1}{2}T)=\alpha T+\frac{1}{2}\beta T^2$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n}(\alpha+\beta\frac{i}{n}T)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{T}{n}(n\alpha+\beta\frac{n+1}{2}T)=\alpha T+\frac{1}{2}\beta T^2$

由夹逼收敛原理 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{T}{n}(\alpha+\beta\xi_i)=\alpha T+\frac{1}{2}\beta T^2$ 故 $\int_0^T(\alpha+\beta t)dt=\alpha T+\frac{1}{2}\beta T^2$

2. 证明：反证法：假设定积分不唯一，不妨设 $\int_a^b f(x)dx=I_1$，$\int_a^b f(x)dx=I_2$

不妨令 $I_1<I_2$ 令 $\varepsilon=\frac{I_2-I_1}{2}$

由 $\left.\begin{array}{l}\int_a^b f(x)dx=I_1\\ \int_a^b f(x)dx=I_2\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}I_1-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i<\varepsilon+I_1\\ I_2-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i<\varepsilon+I_2\end{array}$ $\Rightarrow \frac{I_1+I_2}{2}<\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i<\frac{I_1+I_2}{2}$ 矛盾

$\Rightarrow$ 定积分唯一

3. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}})=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n(n+1)\cdots(2n-1)}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}[\ln\frac{n}{n}+\ln(1+\frac{1}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n-1}{n})]}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln 1+\ln(1+\frac{1}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n-1}{n})]=\int_0^1\ln(1+x)dx=[(x+1)\ln(1+x)-x]\Big|_0^1=2\ln 2-1$

$\Rightarrow$ 原式 $=e^{2\ln 2-1}=\frac{4}{e}$

(3) $2\pi\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2+\sin\frac{i}{n}\cdot 2\pi)=2\pi\int_0^1(2+\sin 2\pi x)dx=2\pi(2x-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x)\Big|_0^1=4\pi$

4. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^\alpha}=1\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in N$ 当 $n>N$ 时 有 $|\frac{a_n}{n^\alpha}-1|<\varepsilon$

$\Rightarrow(1-\varepsilon)n^\alpha<a_n<(\varepsilon+1)n^\alpha$ 而 $\{a_n\}$ 前N项不影响极限

$\Rightarrow$ 不妨令 $a_1=1^\alpha(1+\varepsilon)$ $a_2=2^\alpha(1+\varepsilon)\cdots a_N=N^\alpha(1+\varepsilon)$

$\frac{1}{n}\{[(\frac{1}{n})^\alpha+(\frac{2}{n})^\alpha+\cdots+(\frac{N}{n})^\alpha](1+\varepsilon)+[(\frac{N+1}{n})^\alpha+(\frac{N+2}{n})^\alpha+\cdots+(\frac{n}{n})^\alpha](1-\varepsilon)\}<\frac{1}{n}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n^\alpha}$

$\frac{1}{n}[(\frac{1}{n})^\alpha+(\frac{2}{n})^\alpha+\cdots+(\frac{n}{n})^\alpha](1-\varepsilon)$ $\qquad\frac{1}{n}[(\frac{1}{n})^\alpha+(\frac{2}{n})^\alpha+\cdots+(\frac{n}{n})^\alpha](1+\varepsilon)$

对两侧取极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(\frac{1}{n})^\alpha+(\frac{2}{n})^\alpha+\cdots+(\frac{n}{n})^\alpha](1-\varepsilon)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(\frac{1}{n})^\alpha+(\frac{2}{n})^\alpha+\cdots+(\frac{n}{n})^\alpha](1+\varepsilon)$

$=\int_0^1 x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^1=\frac{1}{\alpha+1}$

5. 证明：对区间 $[a,b]$ 作分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ $\lambda(\Delta)=\max\{\Delta x_i\}$ $\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$

$g(x)$ 在这个分割上的任意黎曼和为 $\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i$

$f(x)$ 在这个分割下以同样取值的黎曼和为 $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$

由 $f(x)\in R[a,b]$ 不妨设 $\int_a^b f(x)dx=I$

即 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ 当 $\lambda(\Delta)<\delta$ 时 有 $|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-I|<\varepsilon$.

$|\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i-I|=|\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-I|$

$\le|\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i|+|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-I|$

$\le|\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i|+\varepsilon/2$ 设 $m=\inf\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$ $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}\{g(x)\}$

由 $g(x)$ 与 $f(x)$ 只在有限点不同 $\Rightarrow$ 不妨设这些点在 $[x_0,x_1]\cdots[x_{s-1},x_s]$ 上.

取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2(M-m)s}$

$|\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i|=|\sum_{i=1}^{n}[g(\xi_i)-f(\xi_i)]\Delta x_i|\le(M-m)\sum_{i=1}^{s}\Delta x_i\le(M-m)\cdot s\delta<\varepsilon/2$

故 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta=\frac{\varepsilon}{2(M-m)s}$ 当 $\lambda(\Delta)<\delta$ 时有

$|\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i-I|\le|\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i|+\varepsilon/2=\varepsilon$

故 $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i=I$ 故 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$.

6. 必要性显然

充分性：先证 $f(x)$ 有界 反证法：假设 $f(x)$ 无界

对题目所给的分割 $\exists 1\le i_0\le n$ s.t. $f(x)$ 在 $[x_{i_0-1},x_{i_0}]$ 上无界

对每个 $i(1\le i\le n, i\ne i_0)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上取 ξ_i 作和式 $\sum_{i=1,i\ne i_0}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\triangleq M_1$

$\forall M>0$ 由 $f(x)$ 在 $[x_{i_0-1},x_{i_0}]$ 无界，故 $[x_{i_0-1},x_{i_0}]$ 可取 ξ_{i_0} s.t. $|f(\xi_{i_0})|>\frac{M+|M_1|}{\Delta x_{i_0}}$

$\Rightarrow|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i|=|\sum_{i=1,i\ne i_0}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i+f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0}|\ge|f(\xi_{i_0})|\Delta x_{i_0}-|M_1|>M$ 与条件矛盾！

$\Rightarrow f(x)$ 有界（目的是使区间内上下确界能取到）

由题意 $\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 都有 $|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-I|<\varepsilon$

不妨取 $M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$，由于 $f(x)$ 有界，一定存在 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ s.t. $f(\xi_i)=M_i\Rightarrow I-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i<I+\varepsilon$ ①

取 $m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}\Rightarrow$ 同理可得 $I-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i<I+\varepsilon$ ②

①-② 得 $-2\varepsilon<\sum_{i=1}^{n}[M_i-m_i]\Delta x_i<2\varepsilon$

故 $\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i<2\varepsilon\Rightarrow f(x)\in R[a,b]$

7. $(\Rightarrow)$ 由 $f(x)\in R[a,b]\Rightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 对区间 $[a,b]$ 的分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

记 $w_i=\sup\limits_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]}\{|f(x')-f(x'')|\}$ 有 $\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i<\varepsilon$

记 $w_{i(+)}=\sup\limits_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]}\{|f^+(x')-f^+(x'')|\}$ 而 $\sum_{i=1}^{n}w_{i(+)}\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i<\varepsilon$

同理可得 $\sum_{i=1}^{n}w_{i(-)}\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i<\varepsilon$

故 $f^+(x)\in R[a,b]$ $f^-(x)\in R[a,b]$

$(\Leftarrow)$ 由 $f^+(x)\in R[a,b]$ $f^-(x)\in R[a,b]$

由定积分的线性性质 $f(x)=f^+(x)-f^-(x)\in R[a,b]$

8. $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 当 $\lambda(\Delta)<\delta$ 时有

$|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i-\int_a^b f(x)g(x)dx|$

$=|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i-I|$

$\le|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i|+|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i-I|$

$\le|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)[g(\eta_i)-g(\xi_i)]\Delta x_i|+\varepsilon/2$

$\le|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)w_i\Delta x_i|+\varepsilon/2$ $\qquad w_i=\sup\limits_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]}\{g(x')-g(x'')\}$

由 $f(x)\in R[a,b]\Rightarrow|f(x)|\le M$

由 $g(x)\in R[a,b]\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i\le\frac{\varepsilon}{2M}$

故 $|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i-\int_a^b f(x)g(x)dx|\le|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)w_i\Delta x_i|+\varepsilon/2\le M\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i+\varepsilon/2\le M\frac{\varepsilon}{2M}+\varepsilon/2=\varepsilon$

故 $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)g(x)dx$

9. (1) $f(x)\in R[a,b]\Rightarrow|f(x)|\le M$

由 $f(x)\in R[a,b]$ 对区间 $[a,b]$ 进行分割：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

$m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$ $\quad M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$ $\quad w_i=M_i-m_i$ 由 $f(x)\in R[a,b]\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i<\varepsilon\cdot\alpha^2$.

对 $\frac{1}{f(x)}$ 的区间 $[a,b]$ 同样分割

由题意 $f(x)>0$ 恒成立 $m_i'=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{\frac{1}{f(x)}\}=\frac{1}{M_i}$ $\quad M_i'=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{\frac{1}{f(x)}\}=\frac{1}{m_i}$

$\sum_{i=1}^{n}(M_i'-m_i')\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{M_i-m_i}{M_im_i}\Delta x_i<\sum_{i=1}^{n}\frac{M_i-m_i}{\alpha^2}\Delta x_i<\frac{1}{\alpha^2}\cdot\alpha^2\cdot\varepsilon=\varepsilon$

$\Rightarrow\frac{1}{f(x)}\in R[a,b]$

9. (2) 由 $f(x)\in R[a,b]$，对 $f(x)$ 进行一个划分 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 令 $m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$ $M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$

$w_i=M_i-m_i \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} w_i\Delta x_i < \varepsilon\cdot 2\alpha$.

先证明 $\varphi(x)=\ln x-\frac{x-1}{x+1}<0 \quad (x\geq 1)$

$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}<0 \Rightarrow \varphi(x)$ 单减 $\Rightarrow \varphi(x)\leq\varphi(1)=0 \Rightarrow \ln x\leq\frac{x-1}{x+1}$

对 $\ln f(x)$ 进行相同划分 $m_i'=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{\ln f(x)\}$ $M_i'=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{\ln f(x)\}$

$w_i'=M_i'-m_i'=\ln M_i-\ln m_i=\ln\frac{M_i}{m_i} \xrightarrow{(\frac{M_i}{m_i}\geq 1)} \leq \frac{\frac{M_i}{m_i}-1}{\frac{M_i}{m_i}+1}=\frac{M_i-m_i}{M_i+m_i}\leq\frac{w_i}{2\alpha}$

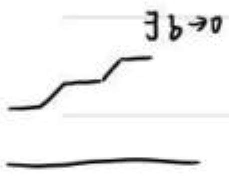
$\sum\limits_{i=1}^{n} w_i'\Delta x_i \leq \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{w_i}{2\alpha}\cdot\Delta x_i \leq \frac{1}{2\alpha}\sum\limits_{i=1}^{n} w_i\Delta x_i \leq \frac{1}{2\alpha}\cdot 2\alpha\varepsilon = \varepsilon$

10. 必要性：由 $f(x)\in R[a,b]$ 对 $f(x)$ 进行一个分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

令 $w_i=\sup\limits_{x_1,x_2\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x_1)-f(x_2)\}$ $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i\Delta x_i<\varepsilon$

令 $m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$ $M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$

$\exists\delta>0$



$x\in[x_{i-1}+\delta, x_i-\delta]$ 令 $g(x)=m_i$

① $m_i>m_{i+1}$ 则 $x\in[x_i,x_i+\delta)$ $g(x)=m_{i+1}$，作折线连接 $(x_i-\delta,m_i)$ 和 (x_i,m_{i+1})

② $m_i\leq m_{i+1}$ 则 $x\in(x_i-\delta,x_i]$ $g(x)=m_i$，作折线连接 (x_i,m_i) 和 $(x_i+\delta,m_{i+1})$

同理构造 $h(x)$ $x\in[x_{i-1}+\delta,x_i-\delta]$ 令 $h(x)=M_i$

① $M_i\leq M_{i+1}$ 则 $x\in[x_i,x_i+\delta)$ $h(x)=M_{i+1}$，作折线连接 $(x_i-\delta,M_i)$ 和 (x_i,M_{i+1})

② $M_i>M_{i+1}$ 则 $x\in(x_i-\delta,x_i]$ $h(x)=M_i$，作折线连接 (x_i,M_i) 和 $(x_i+\delta,M_{i+1})$

易得 $g(x)\leq f(x)\leq h(x) \quad \forall x\in[a,b]$

$h(x)-g(x)=w_i \quad (x\in[x_{i-1},x_i])$ 设 $H(x)=h(x)-g(x)$，则 $H(x)$ 为阶梯函数

$\Rightarrow H(x)$ 可积 由定积分几何意义 $\int_a^b(h(x)-g(x))dx=\sum\limits_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i<\varepsilon$

故满足 (2) 即存在 $g(x)$ 和 $h(x)$ 满足 (1),(2)

充分性：由题意存在 $h(x)$、$g(x)$

由 $h(x)$、$g(x)$ 连续 $\Rightarrow h(x)\in R[a,b]$ $g(x)\in R[a,b]$

因 $\int_a^b(h(x)-g(x))dx<\varepsilon$ 由 ε 任意性 $\Rightarrow \int_a^b h(x)dx=\int_a^b g(x)dx$

由 $g(x)\leq f(x)\leq h(x) \Rightarrow \int_a^b g(x)dx\leq\underline{\int_a^b} f(x)dx\leq\overline{\int_a^b} f(x)dx\leq\int_a^b h(x)dx$

$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f(x)dx=\underline{\int_a^b} f(x)dx=\int_a^b g(x)dx \Rightarrow f(x)\in R[a,b]$

11. 已知 $f\in C[A,B]\Rightarrow f$ 在 $[A,B]$ 一致连续

$\forall\varepsilon>0,\forall\sigma>0,\exists\delta>0$ 对 $\forall x',x''\in[A,B]$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时 有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon/2$

由 $g\in R[a,b]$ 对上述 δ,σ $\exists[a,b]$ 的分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ s.t. $w_i(g)\geq\delta$ 区间长度 $<\sigma$

若在 $[x_{i-1},x_i]$ 上 $w_i(g)<\delta$ 则 $\forall x',x''\in[x_{i-1},x_i]$ 有 $|g(x')-g(x'')|<\delta$

则有 $|f(g(x'))-f(g(x''))|<\varepsilon/2 \Rightarrow w_i(f\circ g)\leq\varepsilon/2<\varepsilon$

于是 $w_i(f\circ g)\geq\varepsilon$ 对应区间总长度 $<\sigma \Rightarrow f\circ g\in R[a,b]$

由 $f(x)\in R[a,b]$

12. 记 $[a,b]$ 的一个分划中一个闭区间为 I_1 s.t. $f(x)$ 在 I_1 上振幅小于 1 ($\varepsilon=1,\delta=\frac{b-a}{2}$)

将 I_1 三等分，$f(x)$ 在三等分中间那段仍可积

存在中间这段分划中一个闭区间 I_2 s.t. $f(x)$ 在 I_2 上振幅小于 $1/2$

将 I_2 三等分，$f(x)$ 在三等分中间那段仍可积

归纳 ① $I_1\supset I_2\supset\cdots\supset\cdots$

② $d(I_n)\leq\frac{b-a}{3^n}\xrightarrow{n\to\infty}0$

由闭区间套定理 $\exists x_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n\neq\varnothing$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists N_0>0$ s.t. $\frac{1}{N_0}<\varepsilon$ 令 $I_{N_0}=[\alpha,\beta]$ 则 $x_0\neq\alpha$, $x_0\neq\beta$

取 $\delta=\min\{x-\alpha,\beta-x\}$ 当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset[\alpha,\beta]=I_{N_0}$ 有 $|f(x)-f(x_0)|\leq w_{N_0}(f)\leq\frac{1}{N_0}<\varepsilon$

13.

14. $\forall[a,b]$ 若 $0\notin[a,b]$ 则 $x=\frac{1}{\pi+2k\pi}$ 为间断点 $(k\in N)$

$[a,b]$ 中只含有限个间断点，且 $f(x)$ 有界 $\Rightarrow f(x)\in R[a,b]$

若 $0\in[a,b]$ $[a,b]$ 中仍只含有有限个间断点 $\Rightarrow f(x)\in R[a,b]$

故 $f(x)$ 在任何区间上可积

15. 由 $f(x)\in R[a,b]$ 对 $f(x)$ 进行分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

由 $f(x)>0 \Rightarrow \xi(\Delta)=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i>0$ $(m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\})$

由 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0}\xi(\Delta)\geq 0$

下证 "=" 不成立 当 $f(x)>0$ $\int_a^b f(x)dx=0 \Rightarrow f(x)\equiv 0$ 与 $f(x)>0$ 矛盾

故 $\int_a^b f(x)dx>0$

由 T12 $\exists x_0\in[a,b]$ s.t. $f(x)$ 在 x_0 处连续 显然 $f(x_0)>0$

$\exists[c,d]\subset[a,b]$ 使 $f(x)\geq\frac{f(x_0)}{2}$ $x\in[c,d]$

有 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx$

$\geq\int_a^c 0dx+\int_c^d\frac{f(x_0)}{2}dx+\int_d^b 0dx$

$=\frac{f(x_0)}{2}(d-c)>0$

令 $\delta=\frac{\varepsilon}{2m}$ 当 $|h-0|<\delta$ 时

16. $\int_a^b[f(x+h)-f(x)]dx=\int_a^b f(x+h)dx-\int_a^b f(x)dx=\int_{a+h}^{b+h}f(x)dx-\int_a^b f(x)dx$

$=\int_{a+h}^{a}f(x)dx+\int_a^b f(x)dx+\int_b^{b+h}f(x)dx-\int_a^b f(x)dx$

$=\int_{a+h}^{a}f(x)dx+\int_b^{b+h}f(x)dx$

由 $f(x)$ 可积 $\Rightarrow -\varepsilon<-m\cdot 2\delta<\int_{a+h}^{a}f(x)dx+\int_b^{b+h}f(x)dx<\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx$

由 $f(x)$ 可积 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sum w_i\Delta x_i=0 \Rightarrow n\to\infty$ $\sum w_i\Delta x_i<\varepsilon$

$\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx=\int_{x_0}^{x_1}|f(x+h)-f(x)|dx+\int_{x_1}^{x_2}|f(x+h)-f(x)|dx+\cdots+\int_{x_{n-1}}^{x_n}|f(x+h)-f(x)|dx$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x+h)-f(x)|dx\leq\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}w_i dx=\sum\limits_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i<\varepsilon$

故 $-\varepsilon<\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx<\varepsilon$

故 $\lim\limits_{h\to 0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx=0$

17. (1) $\int_0^{2\pi}x(\sin x)^{2n+1}dx=\int_0^{\pi}x(\sin x)^{2n+1}dx+\int_{\pi}^{2\pi}x(\sin x)^{2n+1}dx$

$=\int_0^{\pi}x(\sin x)^{2n+1}dx-\int_0^{\pi}(t+\pi)(\sin t)^{2n+1}dt$

$=-\pi\int_0^{\pi}(\sin t)^{2n+1}dt<0$

(2) $\int_{-1}^{1}e^{-x}\sin x\,dx$

$=\int_{-1}^{0}e^{-x}\sin x\,dx+\int_0^1 e^{-x}\sin x\,dx$

$=-\int_1^0 e^{t}\sin t\,dt+\int_0^1 e^{-x}\sin x\,dx$

$=\int_0^1 e^{x}\sin x\,dx+\int_0^1 e^{-x}\sin x\,dx>0$

(3) $\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx$

$=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\int_0^{\pi}\frac{\sin(t+\pi)}{t+\pi}dt$

$=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx-\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x+\pi}dx$

$=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin x}{x(x+\pi)}dx>0$

9.(2) 由 $f(x)\in R[a,b]$，对 $f(x)$ 进行一个划分 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 令 $m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$ $M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$

$w_i=M_i-m_i \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} w_i\Delta x_i < \varepsilon\cdot 2\alpha$.

先证明 $\varphi(x)=\ln x-\frac{x-1}{x+1}<0 \quad (x\geq 1)$

$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}<0 \Rightarrow \varphi(x)$ 单减 $\Rightarrow \varphi(x)\leq\varphi(1)=0 \Rightarrow \ln x\leq\frac{x-1}{x+1}$

对 $\ln f(x)$ 进行相同划分 $m_i'=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{\ln f(x)\}$ $M_i'=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{\ln f(x)\}$

$w_i'=M_i'-m_i'=\ln M_i-\ln m_i=\ln\frac{M_i}{m_i} \xrightarrow{(\frac{M_i}{m_i}\geq 1)} \leq \frac{\frac{M_i}{m_i}-1}{\frac{M_i}{m_i}+1}=\frac{M_i-m_i}{M_i+m_i}\leq\frac{w_i}{2\alpha}$

$\sum\limits_{i=1}^{n} w_i'\Delta x_i \leq \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{w_i}{2\alpha}\cdot\Delta x_i \leq \frac{1}{2\alpha}\sum\limits_{i=1}^{n} w_i\Delta x_i \leq \frac{1}{2\alpha}\cdot 2\alpha\varepsilon=\varepsilon$

10. 必要性：由 $f(x)\in R[a,b]$ 对 $f(x)$ 进行一个分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

令 $w_i=\sup\limits_{x_1,x_2\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x_1)-f(x_2)\}$ $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i\Delta x_i<\varepsilon$

令 $m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$ $M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$

$\exists\delta>0$

$x\in[x_{i-1}+\delta, x_i-\delta]$ 令 $g(x)=m_i$

① $m_i>m_{i+1}$ 则 $x\in[x_i,x_i+\delta)$ $g(x)=m_{i+1}$，作折线连接 $(x_i-\delta,m_i)$ 和 (x_i,m_{i+1})

② $m_i\leq m_{i+1}$ 则 $x\in(x_i-\delta,x_i]$ $g(x)=m_i$，作折线连接 (x_i,m_i) 和 $(x_i+\delta,m_{i+1})$

同理构造 $h(x)$ $x\in[x_{i-1}+\delta,x_i-\delta]$ 令 $h(x)=M_i$

① $M_i\leq M_{i+1}$ 则 $x\in[x_i,x_i+\delta)$ $h(x)=M_{i+1}$，作折线连接 $(x_i-\delta,M_i)$ 和 (x_i,M_{i+1})

② $M_i>M_{i+1}$ 则 $x\in(x_i-\delta,x_i]$ $h(x)=M_i$，作折线连接 (x_i,M_i) 和 $(x_i+\delta,M_{i+1})$

易得 $g(x)\leq f(x)\leq h(x) \quad \forall x\in[a,b]$

$h(x)-g(x)=w_i \quad (x\in[x_{i-1},x_i])$ 设 $H(x)=h(x)-g(x)$，则 $H(x)$ 为阶梯函数

$\Rightarrow H(x)$ 可积 由定积分几何意义 $\int_a^b(h(x)-g(x))dx=\sum\limits_{i=1}^{n} w_i\Delta x_i<\varepsilon$

故满足(2) 即存在 $g(x)$ 和 $h(x)$ 满足(1),(2)

充分性：由题意存在 $h(x)$、$g(x)$

由 $h(x)$、$g(x)$ 连续 $\Rightarrow h(x)\in R[a,b]$ $g(x)\in R[a,b]$

因 $\int_a^b(h(x)-g(x))dx<\varepsilon$ 由 ε 任意性 $\Rightarrow \int_a^b h(x)dx=\int_a^b g(x)dx$

由 $g(x)\leq f(x)\leq h(x) \Rightarrow \int_a^b g(x)dx\leq\underline{\int_a^b}f(x)dx\leq\overline{\int_a^b}f(x)dx\leq\int_a^b h(x)dx$

$\Rightarrow \overline{\int_a^b}f(x)dx=\underline{\int_a^b}f(x)dx=\int_a^b g(x)dx \Rightarrow f(x)\in R[a,b]$

11. 已知 $f\in C[A,B] \Rightarrow f$ 在 $[A,B]$ 一致连续

$\forall\varepsilon>0, \forall\delta>0, \exists\delta>0$ 对 $\forall x',x''\in[A,B]$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时 有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon/2$

由 $g\in R[a,b]$ 对上述 δ,δ $\exists[a,b]$ 的分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ s.t. $w_i(g)\geq\delta$ 区间长度 $<\delta$

若在 $[x_{i-1},x_i]$ 上 $w_i(g)<\delta$ 则 $\forall x',x''\in[x_{i-1},x_i]$ 有 $|g(x')-g(x'')|<\delta$

则有 $|f\circ g(x')-f\circ g(x'')|<\varepsilon/2 \Rightarrow w_i(f\circ g)\leq\varepsilon/2<\varepsilon$

于是 $w_i(f\circ g)\geq\varepsilon$ 对应区间总长度 $<\delta \Rightarrow f\circ g\in R[a,b]$

由 $f(x)\in R[a,b]$

12. 记 $[a,b]$ 的一个分划中一个闭区间为 I_1 s.t. $f(x)$ 在 I_1 上振幅小于 1 $(\varepsilon=1, \delta=\frac{b-a}{2})$

将 I_1 三等分，$f(x)$ 在三等分中间那段仍可积

存在中间这段分划中一个闭区间 I_2 s.t. $f(x)$ 在 I_2 上振幅小于 $1/2$

将 I_2 三等分，$f(x)$ 在三等分中间那段仍可积

归纳 ① $I_1\supset I_2\supset\cdots\supset\cdots$

② $d(I_n)\leq\frac{b-a}{3^n}\xrightarrow{n\to\infty}0$

由闭区间套定理 $\exists x_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n\neq\phi$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists N_0>0$ s.t. $\frac{1}{N_0}<\varepsilon$ 令 $I_{N_0}=[\alpha,\beta]$ 则 $x_0\neq\alpha, x_0\neq\beta$

取 $\delta=\min\{x-\alpha,\beta-x\}$ 当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset[\alpha,\beta]=I_{N_0}$ 有 $|f(x)-f(x_0)|\leq w_{N_0}(f)\leq\frac{1}{N_0}<\varepsilon$

13.

14. $\forall[a,b]$ 若 $0\notin[a,b]$ 则 $x=\frac{1}{\pi+2k\pi}$ 为间断点 $(k\in N)$

$[a,b]$ 中只含有限个间断点，且 $f(x)$ 有界 $\Rightarrow f(x)\in R[a,b]$

若 $0\in[a,b]$ $[a,b]$ 中仍只含有有限个间断点 $\Rightarrow f(x)\in R[a,b]$

故 $f(x)$ 在任何区间上可积

15. 由 $f(x)\in R[a,b]$ 对 $f(x)$ 进行分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

由 $f(x)>0 \Rightarrow \xi(\Delta)=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i>0$ $(m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\})$

由 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0}\xi(\Delta)\geq 0$

下证"="不成立 当 $f(x)>0$ $\int_a^b f(x)dx=0 \Rightarrow f(x)\equiv 0$ 与 $f(x)>0$ 矛盾

故 $\int_a^b f(x)dx>0$

由 T12 $\exists x_0\in[a,b]$ s.t. $f(x)$ 在 x_0 处连续 显然 $f(x_0)>0$

$\exists[c,d]\subset[a,b]$ 使 $f(x)\geq\frac{f(x_0)}{2}$ $x\in[c,d]$

有 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx$

$\geq\int_a^c 0dx+\int_c^d\frac{f(x_0)}{2}dx+\int_d^b 0dx$

$=\frac{f(x_0)}{2}(a-c)>0$

令 $\delta=\frac{\varepsilon}{2m}$ 当 $|h-0|<\delta$ 时

16. $\int_a^b[f(x+h)-f(x)]dx=\int_a^b f(x+h)dx-\int_a^b f(x)dx=\int_{a+h}^{b+h}f(x)dx-\int_a^b f(x)dx$

$=\int_{a+h}^a f(x)dx+\int_a^b f(x)dx+\int_b^{b+h}f(x)dx-\int_a^b f(x)dx$

$=\int_{a+h}^a f(x)dx+\int_b^{b+h}f(x)dx$

由 $f(x)$ 可积 $\Rightarrow \underset{-\varepsilon}{\cancel{-m\cdot 2\delta}}<\int_{a+h}^a f(x)dx+\int_b^{b+h}f(x)dx<\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx$

由 $f(x)$ 可积 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sum w_i\Delta x_i=0 \Rightarrow n\to\infty$ $\sum w_i\Delta x_i<\varepsilon$

$\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx=\int_{x_0}^{x_1}|f(x+h)-f(x)|dx+\int_{x_1}^{x_2}|f(x+h)-f(x)|dx+\cdots+\int_{x_{n-1}}^{x_n}|f(x+h)-f(x)|dx$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x+h)-f(x)|dx\leq\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}w_i dx=\sum\limits_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i<\varepsilon$

故 $-\varepsilon<\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx<\varepsilon$

故 $\lim\limits_{h\to 0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx=0$

17.(1) $\int_0^{2\pi}x(\sin x)^{2n+1}dx=\int_0^{\pi}x(\sin x)^{2n+1}dx+\int_{\pi}^{2\pi}x(\sin x)^{2n+1}dx$

$=\int_0^{\pi}x(\sin x)^{2n+1}dx-\int_0^{\pi}(t+\pi)(\sin t)^{2n+1}dt$

$=-\pi\int_0^{\pi}(\sin t)^{2n+1}dt<0$

(2) $\int_{-1}^{1}e^{-x}\sin x dx$

$=\int_{-1}^{0}e^{-x}\sin x dx+\int_0^1 e^{-x}\sin x dx$

$=-\int_1^0 e^{t}\sin t dt+\int_0^1 e^{-x}\sin x dx$

$=\int_0^1 e^{x}\sin x dx+\int_0^1 e^{-x}\sin x dx>0$

(3) $\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx$

$=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\int_0^{\pi}\frac{\sin(t+\pi)}{t+\pi}dt$

$=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx-\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x+\pi}dx$

$=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin x}{x(x+\pi)}dx>0$

18. $A \triangleq \int_a^b f^2(x)dx \geq 0 \quad B \triangleq \int_a^b g^2(x)dx \geq 0 \quad C \triangleq \int_a^b |f(x)||g(x)|dx \geq 0$

$0 \leq \int_a^b [t|f(x)|+|g(x)|]^2 dx = \int_a^b t^2 f^2(x)dx + 2\int_a^b t|f(x)||g(x)|dx + \int_a^b g^2(x)dx$

$At^2+2Ct+B \geq 0$ 恒成立 $\Rightarrow 4C^2-4AB \leq 0$

$\Rightarrow C \leq \sqrt{A}\cdot\sqrt{B} \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)||g(x)|dx \leq \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_a^b g^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}$

19. (1) $\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = \int_{-1}^0 (1-x^2)^n dx + \int_0^1 (1-x^2)^n dx$

$= 2\int_0^1 (1-x^2)^n dx$

$\forall \varepsilon>0\ (\varepsilon<1)\quad 1-\frac{\varepsilon^2}{16}<1\quad \exists N>0$ 当 $n>N$ 时 $(1-\frac{\varepsilon^2}{16})^n < \varepsilon/4$

$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\varepsilon/4} (1-x^2)^n dx + \int_{\varepsilon/4}^1 (1-x^2)^n dx$

$\leq \int_0^{\varepsilon/4} 1\cdot dx + \int_{\varepsilon/4}^1 (1-\frac{\varepsilon^2}{16})^n dx \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/4(1-\varepsilon/4) < \varepsilon/2$

故 $\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = 0$

※ (2) $\lim_{n\to\infty} \frac{\int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^n dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2) dx} = f(0)$

$\forall \delta>0 \quad 0 \leq \frac{\int_\delta^1 (1-x^2)^n dx}{\int_0^\delta (1-x^2)^n dx} \leq \frac{\int_\delta^1 (1-x^2)^n dx}{\int_0^{\delta/2} (1-x^2)^n dx} \leq \frac{(1-\delta^2)^n(1-\delta)}{[1-(\frac{\delta}{2})^2]^n(1-\delta/2)}$

$= \frac{(1-\delta)}{(1-\frac{\delta}{2})}\Big(\underbrace{\frac{1-\delta^2}{1-\frac{\delta^2}{4}}}_{<1}\Big)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ 同理 $\frac{\int_\delta^1 |f(x)|(1-x^2)^n dx}{\int_0^\delta (1-x^2)^n dx} \to 0$

记 $a(\delta,n) = \frac{\int_{-1}^{-\delta} f(x)(1-x^2)^n dx}{\int_{-\delta}^\delta (1-x^2)^n dx} \to 0 \quad b(\delta,n) = \frac{\int_\delta^1 f(x)(1-x^2)^n dx}{\int_{-\delta}^\delta (1-x^2)^n dx} \to 0$

$c(\delta,n) = \frac{\int_\delta^1 (1-x^2)^n dx}{\int_{-\delta}^\delta (1-x^2)^n dx} \to 0 \quad x(\delta,n) = \frac{\int_{-\delta}^\delta f(x)(1-x^2)^n dx}{\int_{-\delta}^\delta (1-x^2)^n dx}$

原式 $= \frac{a(\delta,n)+x(\delta,n)+b(\delta,n)}{1+2c(\delta,n)}$

$|$原式$-f(0)| = \left|\frac{a(\delta,n)+x(\delta,n)+b(\delta,n)-f(0)-2c(\delta,n)f(0)}{1+2c(\delta,n)}\right|$

$\leq |a(\delta,n)|+|b(\delta,n)|+2|c(\delta,n)||f(0)|+|x(\delta,n)-f(0)|$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_0>0$ 当 $x\in(0,\delta_0)$ 时 $|f(x)-f(0)|<\varepsilon/4$

此时 $|x(\delta_0,n)-f(0)| \leq \frac{\int_{-\delta}^\delta |f(x)-f(0)|(1-x^2)^n dx}{\int_{-\delta}^\delta (1-x^2)^n dx} \leq \varepsilon/4$

故 $\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^n dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} = f(0)$

20. $\int_0^x f(t)dt = -\int_1^x f(t)dt \Rightarrow f(x) = -f(x)$

$\Rightarrow f(x) \equiv 0$

21. (1) $\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \xlongequal{\text{由第一积分中值}} |f(\xi)|$

$\int_a^b |f'(x)|dx \geq \int_\xi^x |f'(x)|dx \geq \left|\int_\xi^x f'(x)dx\right| = |f(x)-f(\xi)| \geq |f(x)|-|f(\xi)|$

故 $|f(x)| \leq \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| + \int_a^b |f'(x)|dx$

(2) 若 $f(a)\neq f(b)$ 则 f 在 $[a,b]$ 上最大值 M 与最小值 m，满足 $m<M$

令 $x_1, x_2 \in [a,b]$ 使 $m=f(x_1)\quad M=f(x_2)$

有 $f(x_1)<f(\xi)<f(x_2)$ 有 $\quad |f(x_2)| \leq |f(\xi)|+|f(x_2)-f(\xi)| < |f(\xi)|+|f(x_2)-f(x_1)|$

$\leq \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| + \int_a^b |f'(x)|dx$

$|f(x_1)| \leq |f(\xi)|+|f(x_1)-f(\xi)| < |f(\xi)|+|f(x_1)-f(x_2)|$

$\leq \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| + \int_a^b |f'(x)|dx$

$\forall x\in[a,b] \quad |f(x)| \leq \max\{|f(x_1)|,|f(x_2)|\} < \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| + \int_a^b |f'(x)|dx$

由 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$，$f'(0)$ 存在 $\Rightarrow \int_0^x f(t)dt$ 可导

22. 由 $\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{2}xf(x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}xf'(x)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}xf'(x)=0 \Rightarrow f(x)-xf'(x)=0 \Rightarrow (\frac{f(x)}{x})'=0 \quad (x\neq 0)$

故 $\frac{f(x)}{x}=c \Rightarrow \quad f(x)\equiv cx \quad (x\neq 0)$

由 $f'(0)$ 存在 $\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 故 $f(0)=\lim_{x\to 0} cx = 0$

即 $f(x)\equiv cx \quad (x\neq 0)$

23. $P_n'(x)$ 是 $n-1$ 阶多项式 $\Rightarrow P_n'(x)$ 在 (a,b) 内零点不超过 $n-1$ 个

若 $P_n'(x)$ 在 (a,b) 内没有零点 $\Rightarrow P_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号

$\int_a^b |P_n'(x)|dx = \left|\int_a^b P_n'(x)dx\right| = |P_n(b)-P_n(a)| \leq 2M \leq 2nM. \quad M=\max_{a\leq x\leq b}\{|P_n(x)|\}$

若 $P_n'(x)$ 在 (a,b) 内有零点 设为 $(a<)x_1<x_2<\cdots<x_m(<b) \quad (x_0=a,\ x_{m+1}=b)$

则 $1\leq m\leq n-1$ 且 $P_n'(x)$ 在每个小区间内 $[x_{i-1},x_i]$ 上不变号

$\int_a^b |P_n'(x)|dx = \sum_{i=1}^{m+1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|P_n'(x)|dx = \sum_{i=1}^{m+1}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}P_n'(x)dx\right| = \sum_{i=1}^{m+1}|P_n(x_i)-P(x_{i-1})|$

$\leq \sum_{i=1}^{m+1} 2M = (m+1)\cdot 2M \leq 2n\cdot M$

24. (1) $\int_a^b xf(x)f'(x)dx = \int_a^b xf(x)\,df(x) = xf^2(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)(f(x)+xf'(x))dx$

$= 0-\int_a^b f^2(x)dx - \int_a^b xf(x)f'(x)dx$

$\Rightarrow \int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx$

(2) $\int_a^b [f'(x)]^2dx\int_a^b [xf(x)]^2dx \leq \left|\int_a^b xf(x)f'(x)dx\right| = \frac{1}{4}.$

25. (1) $\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}} \xlongequal{\text{洛必达}} \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x} = 0$

(2) $\lim_{x\to 0+0}\frac{\int_0^x (\sin t)^\alpha dt}{x^{1+\alpha}} \xlongequal{\text{洛必达}} \lim_{x\to 0+0}\frac{(\sin x)^\alpha}{(1+\alpha)x^\alpha} = \lim_{x\to 0+0}\frac{x^\alpha}{(1+\alpha)x^\alpha} = \frac{1}{1+\alpha}$

(3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{t^\alpha}dt}{x^{1-\alpha}e^{x^\alpha}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^\alpha}}{(1-\alpha)x^{-\alpha}e^{x^\alpha}+x^{1-\alpha}e^{x^\alpha}\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(1-\alpha)x^{-\alpha}+\alpha} = \frac{1}{\alpha}$

26. (1) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$

(2) $\int_0^2 |1-x^2|dx = \int_0^1(1-x^2)dx - \int_1^2(1-x^2)dx = (x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^1 + (\frac{1}{3}x^3-x)\Big|_1^2 = 1-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+1 = 2$

(3) $\int_0^a \arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx = x\cdot\arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\Big|_0^a - \int_0^a x\cdot\frac{1}{1+\frac{a-x}{a+x}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\cdot\frac{-(a+x)-(a-x)}{(a+x)^2}dx$

$= -\int_0^a x\cdot\frac{a+x}{2a}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\frac{-2a}{(x+a)^2}dx = \int_0^a \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

$= -\frac{1}{4}\int_0^a \frac{d(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}\Big|_0^a = \frac{a}{2}$

(4) $\int_0^1 \sqrt[n]{x}\,dx = \frac{n}{n+1}(x)^{\frac{n+1}{n}}\Big|_0^1 = \frac{n}{n+1}$

(5) $\int_0^a \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx = \int_0^a \frac{a-x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \xlongequal{x=a\sin\theta} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a-a\sin\theta}{a\cos\theta}\cdot a\cos\theta\, d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(a-a\sin\theta)d\theta = (a\theta+a\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a\frac{\pi}{2}-a$

(6) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx \xlongequal{t=\sqrt{1-x}} \int_1^0 (1-t^2)t\,d(1-t^2) = \int_1^0(1-t^2)t(-2t)dt = \int_1^0(2t^4-2t^2)dt$

$= \frac{2}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3\Big|_1^0 = \frac{4}{15}$

(7) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx \xlongequal{x=a\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\, a\cos t\cdot a\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}a^4(2\sin t\cos t)^2dt$

$= \frac{1}{4}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2t)^2dt = \frac{1}{4}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}dt$

$= \frac{1}{4}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}dt - \frac{1}{16}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 4t}{2}d(4t)$

$= \frac{1}{8}a^4x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{32}a^4\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{16}a^4$

(8) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx \xlongequal{t=\arcsin\sqrt{x}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{t}{\sqrt{(\sin t)^2[1-(\sin t)^2]}}d(\sin t)^2$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 2t\,dt = t^2\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi^2}{36} = \frac{5}{144}\pi^2$

(9) $\int_0^1 \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x)$

$= \ln(1+\sqrt{2}) - \int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln(1+\sqrt{2})\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}}$

$= \ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}+1$

18. $A \triangleq \int_a^b f^2(x)dx \geq 0 \quad B \triangleq \int_a^b g^2(x)dx \geq 0 \quad C \triangleq \int_a^b |f(x)||g(x)|dx \geq 0$

$0 \leq \int_a^b [t|f(x)|+|g(x)|]^2 dx = \int_a^b t^2 f^2(x)\,dx + 2\int_a^b t|f(x)||g(x)|dx + \int_a^b g^2(x)dx$

$At^2+2Ct+B \geq 0$ 恒成立 $\Rightarrow 4C^2-4AB \leq 0$

$\Rightarrow C \leq \sqrt{A}\cdot\sqrt{B} \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)g(x)\right|dx \leq \int_a^b |f(x)||g(x)|\,dx \leq \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_a^b g^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}$

19. (1) $\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = \int_{-1}^0 (1-x^2)^n dx + \int_0^1 (1-x^2)^n dx$

$= 2\int_0^1 (1-x^2)^n dx$

$\forall \varepsilon>0\ (\varepsilon<1)\quad 1-\frac{\varepsilon^2}{16}<1 \quad \exists N>0$ 当 $n>N$ 时 $(1-\frac{\varepsilon^2}{16})^n < \varepsilon/4$

$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\varepsilon}{4}} (1-x^2)^n dx + \int_{\varepsilon/4}^1 (1-x^2)^n dx$

$\leq \int_0^{\varepsilon/4} 1\cdot dx + \int_{\varepsilon/4}^1 (1-\frac{\varepsilon^2}{16})^n dx \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/4(1-\varepsilon/4) < \varepsilon/2$

故 $\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = 0$

※ (2) $\lim_{n\to\infty} \frac{\int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^n dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)\,dx} = f(0)$

$\forall \delta>0 \quad 0 \leq \frac{\int_\delta^1 (1-x^2)^n dx}{\int_0^\delta (1-x^2)^n dx} \leq \frac{\int_\delta^1 (1-x^2)^n dx}{\int_0^{\delta/2} (1-x^2)^n dx} \leq \frac{(1-\delta^2)^n(1-\delta)}{[1-(\frac{\delta}{2})^2]^n(1-\delta/2)}$

$= \frac{(1-\delta)}{(1-\frac{\delta}{2})}\underbrace{\left(\frac{1-\delta^2}{1-\frac{\delta^2}{4}}\right)}_{<1}^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ 同理 $\frac{\int_\delta^1 |f(x)|(1-x^2)^n dx}{\int_0^\delta (1-x^2)^n dx} \to 0$

记 $a(\delta,n) = \frac{\int_{-1}^{\delta} f(x)(1-x^2)^n dx}{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n dx} \to 0 \quad b(\delta,n) = \frac{\int_\delta^1 f(x)(1-x^2)^n dx}{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n dx} \to 0$

$c(\delta,n) = \frac{\int_\delta^1 (1-x^2)^n dx}{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n dx} \to 0 \quad x(\delta,n) = \frac{\int_{-\delta}^{\delta} f(x)(1-x^2)^n dx}{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n dx}$

原式 $= \frac{a(\delta,n)+x(\delta,n)+b(\delta,n)}{1+2c(\delta,n)}$

$|原式 - f(0)| = \left|\frac{a(\delta,n)+x(\delta,n)+b(\delta,n)-f(0)-2c(\delta,n)f(0)}{1+2c(\delta,n)}\right|$

$\leq |a(\delta,n)|+|b(\delta,n)|+2|c(\delta,n)||f(0)|+|x(\delta,n)-f(0)|$

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta_0>0$ 当 $x\in(0,\delta_0)$ 时 $\quad |f(x)-f(0)|<\varepsilon/4$

此时 $|x(\delta_0,n)-f(0)| \leq \frac{\int_{-\delta}^{\delta} |f(x)-f(0)|(1-x^2)^n dx}{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n dx} \leq \varepsilon/4$

故 $\lim_{n\to\infty} \frac{\int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^n dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} = f(0)$

20. $\int_0^x f(t)dt = -\int_1^x f(t)dt \Rightarrow f(x) = -f(x)$

$\Rightarrow f(x) \equiv 0$

21. (1) $\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \xlongequal{\text{由第一积分中值}} |f(\xi)|$

$\int_a^b |f'(x)|dx \geq \int_\xi^x |f'(x)|\,dx \geq \left|\int_\xi^x f'(x)dx\right| = |f(x)-f(\xi)| \geq |f(x)|-|f(\xi)|$

故 $|f(x)| \leq \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| + \int_a^b |f'(x)|dx$

(2) 若 $f(a)\neq f(b)$ 则 f 在 $[a,b]$ 上最大值 M 与最小值 m，满足 $m<M$

令 $x_1, x_2 \in [a,b]$ 使 $m=f(x_1) \quad M=f(x_2)$

有 $f(x_1)<f(\xi)<f(x_2)$ 有 $\quad |f(x_2)| \leq |f(\xi)|+|f(x_2)-f(\xi)| < |f(\xi)|+|f(x_2)-f(x_1)|$

$\leq \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| + \int_a^b |f'(x)|dx$

$|f(x_1)| \leq |f(\xi)|+|f(x_1)-f(\xi)| < |f(\xi)|+|f(x_1)-f(x_2)|$

$\leq \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| + \int_a^b |f'(x)|dx$

$\forall x\in[a,b] \quad |f(x)| \leq \max\{|f(x_1)|,|f(x_2)|\} < \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| + \int_a^b |f'(x)|dx$

由 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$，$f'(0)$ 存在 $\Rightarrow \int_0^x f(t)dt$ 可导

22. 由 $\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{2}xf(x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}xf'(x)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}xf'(x)=0 \Rightarrow f(x)-xf'(x)=0 \Rightarrow (\frac{f(x)}{x})'=0 \quad (x\neq 0)$

故 $\frac{f(x)}{x}=c \Rightarrow \quad f(x)\equiv cx \quad (x\neq 0)$

由 $f'(0)$ 存在 $\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 故 $f(0)=\lim_{x\to 0} cx = 0$

即 $f(x)\equiv cx \quad (x\neq 0)$

23. $P_n'(x)$ 是 $n-1$ 阶多项式 $\Rightarrow P_n'(x)$ 在 (a,b) 内零点不超过 $n-1$ 个

若 $P_n'(x)$ 在 (a,b) 内没有零点 $\Rightarrow P_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号

$\int_a^b |P_n'(x)|dx = \left|\int_a^b P_n'(x)dx\right| = |P_n(b)-P_n(a)| \leq 2M \leq 2nM. \quad M=\max_{a\leq x\leq b}\{|P_n(x)|\}$

若 $P_n'(x)$ 在 (a,b) 内有零点 设为 $(a<)x_1<x_2<\cdots<x_m(<b) \quad (x_0=a,\ x_{m+1}=b)$

则 $1\leq m\leq n-1$ 且 $P_n'(x)$ 在每个小区间内 $[x_{i-1},x_i]$ 上不变号

$\int_a^b |P_n'(x)|dx = \sum_{i=1}^{m+1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|P_n'(x)|dx = \sum_{i=1}^{m+1}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}P_n'(x)dx\right| = \sum_{i=1}^{m+1}|P_n(x_i)-P(x_{i-1})|$

$\leq \sum_{i=1}^{m+1} 2M = (m+1)\cdot 2M \leq 2n\cdot M$

24. (1) $\int_a^b xf(x)f'(x)dx = \int_a^b xf(x)\,df(x) = xf^2(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)(f(x)+xf'(x))dx$

$= 0-\int_a^b f^2(x)dx - \int_a^b xf(x)f'(x)dx$

$\Rightarrow \int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx$

(2) $\int_a^b [f'(x)]^2dx\int_a^b [xf(x)]^2dx \leq \left|\int_a^b xf(x)f'(x)dx\right| = \frac{1}{4}.$

25. (1) $\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}} \xlongequal{\text{洛必达}} \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x} = 0.$

(2) $\lim_{x\to 0+0}\frac{\int_0^x (\sin t)^\alpha dt}{x^{1+\alpha}} \xlongequal{\text{洛必达}} \lim_{x\to 0+0}\frac{(\sin x)^\alpha}{(1+\alpha)x^\alpha} = \lim_{x\to 0+0}\frac{x^\alpha}{(1+\alpha)x^\alpha} = \frac{1}{1+\alpha}$

(3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{t^\alpha}dt}{x^{1-\alpha}e^{x^\alpha}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^\alpha}}{(1-\alpha)x^{-\alpha}e^{x^\alpha}+x^{1-\alpha}e^{x^\alpha}\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(1-\alpha)x^{-\alpha}+\alpha} = \frac{1}{\alpha}$

26. (1) $\int_{-1}^1\frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$

(2) $\int_0^2|1-x^2|dx = \int_0^1(1-x^2)dx - \int_1^2(1-x^2)dx = (x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^1 + (\frac{1}{3}x^3-x)\Big|_1^2 = 1-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+1 = 2$

(3) $\int_0^a \arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx = x\cdot\arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\Big|_0^a - \int_0^a x\cdot\frac{1}{1+\frac{a-x}{a+x}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\cdot\frac{-(a+x)-(a-x)}{(a+x)^2}dx$

$= -\int_0^a x\cdot\frac{\cancel{a+x}}{\cancel{2a}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\frac{\cancel{-2a}}{(x+a)^{\cancel{2}}}dx = \int_0^a\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

$= -\frac{1}{4}\int_0^a\frac{d(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}\Big|_0^a = \frac{a}{2}$

(4) $\int_0^1\sqrt[n]{x}\,dx = \frac{n}{n+1}(x)^{\frac{n+1}{n}}\Big|_0^1 = \frac{n}{n+1}$

(5) $\int_0^a\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx = \int_0^a\frac{a-x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \xlongequal{x=a\sin\theta} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a-a\sin\theta}{a\cos\theta}\cdot a\cos\theta\,d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(a-a\sin\theta)d\theta = (a\theta+a\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a\frac{\pi}{2}-a$

(6) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx \xlongequal{t=\sqrt{1-x}} \int_1^0(1-t^2)t\,d(1-t^2) = \int_1^0(1-t^2)t(-2t)dt = \int_1^0(2t^4-2t^2)dt$

$= \frac{2}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3\Big|_1^0 = \frac{4}{15}$

(7) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx \xlongequal{x=a\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\,a\cos t\cdot a\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}a^4(2\sin t\cos t)^2dt$

$= \frac{1}{4}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2t)^2dt = \frac{1}{4}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}dt$

$= \frac{1}{4}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}dt - \frac{1}{16}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 4t}{2}d(4t)$

$= \frac{1}{8}a^4x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{32}a^4\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{16}a^4$

(8) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx \xlongequal{t=\arcsin\sqrt{x}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{t}{\sqrt{(\sin t)^2[1-(\sin t)^2]}}d(\sin t)^2$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}2t\,dt = t^2\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi^2}{36} = \frac{5}{144}\pi^2$

(9) $\int_0^1\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x)$

$= \ln(1+\sqrt{2})-\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln(1+\sqrt{2})\ \frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}}$

$= \ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}+1$

(10) $\int_0^1 x^2 e^{\sqrt{x}} dx \overset{t=\sqrt{x}}{=} \int_0^1 t^4 e^t dt^2 = 2\int_0^1 t^5 e^t dt = -88e+240$.

$\int_0^1 t^5 e^t dt = \int_0^1 t^5 de^t = t^5 e^t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t \cdot 5t^4 = e - \int_0^1 e^t \cdot 5t^4 dt = -44e+120$

$\int_0^1 t^4 e^t dt = \int_0^1 t^4 de^t = t^4 e^t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t \cdot 4t^3 = e - \int_0^1 e^t \cdot 4t^3 dt = 9e-24$

$\int_0^1 e^t t^3 dt = \int_0^1 t^3 de^t = t^3 e^t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t \cdot 3t^2 dt = e - \int_0^1 e^t \cdot 3t^2 dt = 6-2e$

$\int_0^1 e^t t^2 dt = \int_0^1 t^2 de^t = t^2 e^t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t \cdot 2t\, dt = e - \int_0^1 e^t \cdot 2t\, dt = e-2$

$\int_0^1 e^t t\, dt = \int_0^1 t\, de^t = te^t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt = te^t\Big|_0^1 - e^t\Big|_0^1 = 1$

原式 $= -88e+240$

(11) $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx = \frac{1}{m}\int_0^1 (1-x)^{n-1} dx^m = \frac{1}{m}(1-x)^{n-1} x^m\Big|_0^1 + \frac{1}{m}\int_0^1 x^m \cdot (n-1)\cdot(1-x)^{n-2} dx$

$= \frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m \cdot (1-x)^{n-2} dx = \frac{n-1}{m}\int_0^1 \frac{1}{m+1}(1-x)^{n-2} dx^{m+1} = \frac{n-1}{m(m+1)}\int_0^1 x^{m+1}(n-2)(1-x)^{n-3} dx$

$= \cdots = \frac{(n-1)(n-2)\cdots 1}{m(m+1)\cdots(m+n-2)}\int_0^1 x^{m+n-2} dx = \frac{(n-1)!}{m(m+1)\cdots(m+n-1)}$

(12) $\int_0^2 \operatorname{sgn}(1-x) dx = 0$

(13) $\int_1^{1+n} \ln[x] dx = \int_1^2 \ln 1\, dx + \int_2^3 \ln 2\, dx + \cdots + \int_n^{1+n} \ln n\, dx = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n = \ln n!$

(14) $\underbrace{\int_0^1 \tan^{2n} x\, dx}_{I_n} = \int_0^1 \tan^{2n-2} x \cdot \tan^2 x\, dx = \int_0^1 \tan^{2n-2} x(\sec^2 x - 1) dx$

$= \int_0^1 \tan^{2n-2} x\, d(\tan x) - \underbrace{\int_0^1 \tan^{2n-2} x\, dx}_{I_{n-1}}$

$= \frac{1}{2n-1}\tan^{2n-1} x\Big|_0^1 - I_{n-1}$

$= \frac{1}{2n-1}(\tan 1)^{2n-1} - I_{n-1}$

由递推式 原式 $= \frac{(\tan 1)^{2n-1}}{2n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\tan 1)^{2k-1}}{2k-1} - 1$

(15) $\int_0^\pi x^2 \operatorname{sgn}(\cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3}x^3\Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi = -\frac{1}{4}\pi^3$

(16) $\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = \int_0^1 \frac{1}{m+1}(\ln x)^n dx^{m+1} = \frac{1}{m+1}(\ln x)^n x^{m+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{m+1} x^{m+1} \cdot n(\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} dx$

$= \frac{1}{m+1}(\ln x)^n x^{m+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{n}{m+1} x^m (\ln x)^{n-1} dx$

$= -\int_0^1 \frac{n}{m+1} \cdot \frac{1}{m+1}(\ln x)^{n-1} d x^{m+1}$

$= \frac{n}{(m+1)^2}(\ln x)^{n-1} \cdot x^{m+1}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{n}{(m+1)^2} x^{m+1} \cdot (n-1)(\ln x)^{n-2} \cdot \frac{1}{x} dx$

$= \int_0^1 \frac{n(n-1)}{(m+1)^2} x^m (\ln x)^{n-2} dx = \cdots = (-1)^n \int_0^1 \frac{n!}{(m+1)^n} x^m dx = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}$

27. (1) $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^1 x\, dx + \int_{-1}^0 2x\, dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 + x^2\Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{2}$

(2) $\int_0^{8\pi} |\sin x| dx = 8\int_0^\pi \sin x\, dx = -8\cos x\Big|_0^\pi = 16$

28. 令 $T = 2n\pi + m \quad (0 \le m < 2\pi)$

$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x) dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n\pi+m}\int_0^{2n\pi+m} f(x) dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2n\pi+m}\int_0^m f(x) dx + \frac{1}{2n\pi+m} n\int_0^{2\pi} f(x) dx\right]$

$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) dx$

29. (1) $[0, \frac{\pi}{2}]$: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx \overset{x=\frac{\pi}{2}+t}{=\!=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos x) dx$ 偷 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$

$\overset{t=2\pi-x}{=\!=} \int_{2\pi}^{\frac{3}{2}\pi} f(\cos x) d(-x) = \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} f(\cos x) dx$

$[\frac{\pi}{2}, \pi]$: $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(\sin x) dx \overset{x=\frac{\pi}{2}+t}{=\!=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$

$[\pi, \frac{3}{2}\pi]$: $\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} f(\sin x) dx \overset{x=\frac{\pi}{2}+t}{=\!=} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(\cos x) dx$

$[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$: $\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} f(\sin x) dx \overset{x=\frac{\pi}{2}+t}{=\!=} \int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} f(\cos x) dx$

故 $\int_0^{2\pi} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(\cos x) dx + \int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} f(\cos x) dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} f(\cos x) dx$

$= \int_0^{2\pi} f(\cos x) dx$

(2) $\int_0^\pi x f(\sin x) dx \overset{t=\pi-x}{=\!=} \int_0^\pi (\pi-t) f(\sin t) dt = \int_0^\pi \pi f(\sin x) dx - \int_0^\pi x f(\sin x) dx$

$\to \int_0^\pi x f(\sin x) = \frac{1}{2}\pi\int_0^\pi f(\sin x) dx$

不妨设 $g(x) \ge 0$

显然 $g(x) = 0$ 或 $M = m$ 时该命题显然成立

30. $M = \sup\{f(x)\}$ $m = \inf\{f(x)\}$

① $m < \frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} < M$ 时 由连续函数介值定理 $\exists \xi \in (a,b)$ 满足 $\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi)\int_a^b g(x) dx$

② $\frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = m \Rightarrow \int_a^b [f(x)-m] g(x) dx = 0$ 由于 $f(x)-m$ 与 $g(x)$ 都是 $[a,b]$ 连续函数(非负)

故 $(f(x)-m) g(x) \equiv 0$ 而 $g(x)$ 不恒为0 $\Rightarrow \exists (\alpha,\beta) \subset [a,b]$ $g(x) > 0$ $f(x) \equiv m$

故 $\exists \xi \in (\alpha,\beta) \subset (a,b)$ s.t. $\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi)\int_a^b g(x) dx$

③ 同理 $\frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = M$ 也成立.

31. 证明: 存在性: 由第一中值定理 $\exists \xi_x > 0$ s.t. $\int_0^x e^{t^2} dt = e^{\xi_x^2}\int_0^x 1 \cdot dt = x e^{\xi_x^2}$

唯一性: 反证法: 假设存在 η_x 也使 $\int_0^x e^{t^2} dt = x e^{\eta_x^2}$ ①

又 $\int_0^x e^{t^2} dt = x e^{\xi_x^2}$ ② ①-② $0 = x[e^{\eta_x^2} - e^{\xi_x^2}] \Rightarrow \eta_x = \xi_x$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\xi_x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\int_0^x e^{t^2} dt - \ln x}{x^2} \overset{H'}{=\!=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^{x^2}}{\int_0^x e^{t^2} dt} - \frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x e^{x^2} - \int_0^x e^{t^2} dt}{2x^2\int_0^x e^{t^2} dt}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} - e^{x^2}}{4x\int_0^x e^{t^2} dt + 2x^2 e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 + \frac{2\int_0^x e^{t^2} dt}{x e^{x^2}}} = \frac{1}{1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{2\int_0^x e^{t^2} dt}{x e^{x^2}}}$

$= \frac{1}{1 + \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{x^2}}{x e^{x^2}}} = 1$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\xi_x}{x} = 1$

32. (1) $\exists \xi \in [0,1]$ 有 $\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x}} dx = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \frac{1}{1+\alpha}$

又 $\frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \le 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}(1+\alpha)} \le \int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x}} dx \le \frac{1}{(1+\alpha)}$

(2) $\exists \xi \in [0, \frac{\pi}{4}]$ 有 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\, dx}{1+x^2\tan^2 x} = \frac{1}{1+\xi^2\tan^2\xi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\, dx$

又 $\frac{16}{16+\pi^2} < \frac{1}{1+\xi^2\tan^2\xi} < 1$ 故 $\frac{\pi^2}{64} < \frac{16}{16+\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{32} < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\, dx}{1+x^2\tan^2 x} < \frac{\pi^2}{32}$

33. (1) 令 $f(x) = \frac{1}{x} > 0$ 单减 即 $\exists \xi \in [a,b]$ s.t. $\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx = f(a)\int_a^\xi \sin x\, dx = \frac{1}{a}\int_a^\xi \sin x\, dx$

故 $\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx\right| = \frac{1}{a}\left|\int_a^\xi \sin x\, dx\right| = \frac{1}{a}\left|\cos x\Big|_a^\xi\right| \le \frac{2}{a}$

(2) 令 $t = x^2$ $\int_a^b \sin x^2 dx = \int_a^b \sin t \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}} dt$

$\left|\int_a^b \sin x^2 dx\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx\right| \Rightarrow$ 令 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ 单减

即 $\exists \xi \in [a,b]$ s.t. $\int_a^b \sin^2 dx = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a}\int_{a^2}^\xi \sin x\, dx$

故 $\left|\int_a^b \sin x^2 dx\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a}\left|\int_{a^2}^{b^2} \sin x\, dx\right| \le \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a}\int_{a^2}^\xi \sin x\, dx = \frac{1}{2a}|\cos x|\Big|_{a^2}^\xi \le \frac{1}{a}$

34. (1) ① $f(x) \ge 0$ 由第二中值定理 $\exists \xi \in [-\pi, \pi]$ s.t. $\int_{-\pi}^\pi f(x) \sin 2nx\, dx = f(-\pi)\int_{-\pi}^\xi \sin 2nx\, dx$

故 $\int_{-\pi}^\pi f(x) \sin 2nx\, dx = f(-\pi)\left(-\frac{1}{2n}\cos 2nx\right)\Big|_{-\pi}^\xi = f(-\pi)\left(-\frac{1}{2n}\cos 2n\xi + \frac{1}{2n}\right) \ge 0$

② $f(x) < 0$ 则 $\int_{-\pi}^\pi [f(x) - f(\pi)] \sin 2n\pi x\, dx$. $f(x) - f(\pi) \ge 0$

由第二中值定理 $\exists \xi \in [-\pi, \pi]$ s.t. $\int_{-\pi}^\pi [f(x) - f(\pi)] \sin 2nx\, dx = [f(-\pi) - f(\pi)]\int_{-\pi}^\xi \sin 2nx\, dx$

同理 $\int_{-\pi}^\pi [f(x) - f(\pi)] \sin 2nx\, dx = [f(-\pi) - f(\pi)]\left(-\frac{1}{2n}\cos 2nx\right)\Big|_{-\pi}^\xi \ge 0$

而 $f(\pi)\int_{-\pi}^\pi \sin 2nx\, dx = f(\pi)\left(-\frac{1}{2n}\right)\cos 2nx\Big|_{-\pi}^\pi = 0$

故 $\int_{-\pi}^\pi f(x) \sin 2n\pi x\, dx \ge 0$

(2) 同理可得

35. 由 $M = \sup_{a \le x \le b}\{f(x)\}$ 则 $\exists [c,d] \subset [a,b]$ s.t. $\int_a^b f^n(x) dx \ge \int_c^d f^n(x) dx \ge (M-\varepsilon)^n (d-c)$

故 $[(M-\varepsilon)^n (d-c)]^{\frac{1}{n}} < \left[\int_a^b f^n(x) dx\right]^{\frac{1}{n}} < M(b-a)^{\frac{1}{n}}$

由夹逼收敛定理 $\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b f^n(x) dx\right]^{\frac{1}{n}} = M$

(10) $\int_0^1 x^2 e^{\sqrt{x}}dx \xlongequal{t=\sqrt{x}} \int_0^1 t^4 e^t dt^2 = 2\int_0^1 t^5 e^t dt = -88e+240$.

$\int_0^1 t^5 e^t dt = \int_0^1 t^5 de^t = t^5e^t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t\cdot 5t^4 = e - \int_0^1 e^t\cdot 5t^4 dt = -44e+120$

$\int_0^1 t^4 e^t dt = \int_0^1 t^4 de^t = t^4 e^t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t\cdot 4t^3 = e - \int_0^1 e^t\cdot 4t^3 dt = 9e-24$

$\int_0^1 e^t t^3 dt = \int_0^1 t^3 de^t = t^3e^t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t\cdot 3t^2 dt = e - \int_0^1 e^t\cdot 3t^2 dt = 6-2e$

$\int_0^1 e^t t^2 dt = \int_0^1 t^2 de^t = t^2e^t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t\cdot 2t\, dt = e - \int_0^1 e^t\cdot 2t\, dt = e-2$

$\int_0^1 e^t t\, dt = \int_0^1 t\, de^t = te^t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt = te^t\Big|_0^1 - e^t\Big|_0^1 = 1$

原式 $=-88e+240$

(11) $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx = \frac1m\int_0^1(1-x)^{n-1}dx^m = \frac1m(1-x)^{n-1}\cdot x^m\Big|_0^1 + \frac1m\int_0^1 x^m\cdot(n-1)\cdot(1-x)^{n-2}dx$

$= \frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m\cdot(1-x)^{n-2}dx = \frac{n-1}{m}\int_0^1\frac{1}{m+1}(1-x)^{n-2}dx^{m+1} = \frac{n-1}{m(m+1)}\int_0^1 x^{m+1}(n-2)(1-x)^{n-3}dx$

$= \cdots = \frac{(n-1)(n-2)\cdots 1}{m(m+1)\cdots(m+n-2)}\int_0^1 x^{m+n-2}dx = \frac{(n-1)!}{m(m+1)\cdots(m+n-1)}$

(12) $\int_0^2 \operatorname{sgn}(1-x)dx = 0$

(13) $\int_1^{1+n}\ln[x]dx = \int_1^2\ln 1\,dx + \int_2^3 \ln 2\,dx + \cdots + \int_n^{1+n}\ln n\,dx = \ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n = \ln n!$

(14) $\underbrace{\int_0^1 \tan^{2n}x\,dx}_{I_n} = \int_0^1\tan^{2n-2}x\cdot\tan^2x\,dx = \int_0^1\tan^{2n-2}x(\sec^2x-1)dx$

$= \int_0^1\tan^{2n-2}x\,d(\tan x) - \underbrace{\int_0^1\tan^{2n-2}x\,dx}_{I_{n-1}}$

$= \frac{1}{2n-1}\tan^{2n-1}x\Big|_0^1 - I_{n-1}$

$= \frac{1}{2n-1}(\tan 1)^{2n-1} - I_{n-1}$

由递推式 原式 $= \frac{(\tan 1)^{2n-1}}{2n-1} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(\tan 1)^{2k-1}}{2k-1} - 1$

(15) $\int_0^\pi x^2\operatorname{sgn}(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x^2dx = \frac13x^3\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac13x^3\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac14\pi^3$

(16) $\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx = \int_0^1\frac{1}{m+1}(\ln x)^n dx^{m+1} = \frac{1}{m+1}(\ln x)^n x^{m+1}\Big|_0^1 - \int_0^1\frac{1}{m+1}x^{m+1}\cdot n(\ln x)^{n-1}\cdot\frac1x dx$

$= \frac{1}{m+1}(\ln x)^n x^{m+1}\Big|_0^1 - \int_0^1\frac{n}{m+1}x^m(\ln x)^{n-1}dx$

$= -\int_0^1\frac{n}{m+1}\cdot\frac{1}{m+1}(\ln x)^{n-1}dx^{m+1}$

$= \frac{n}{(m+1)^2}(\ln x)^{n-1}\cdot x^{m+1}\Big|_0^1 + \int_0^1\frac{n}{(m+1)^2}x^{m+1}\cdot(n-1)(\ln x)^{n-2}\cdot\frac1x dx$

$= \int_0^1\frac{n(n-1)}{(m+1)^2}x^m(\ln x)^{n-2}dx = \cdots = (-1)^n\int_0^1\frac{n!}{(m+1)^n}x^m dx = (-1)^n\frac{n!}{(m+1)^{n+1}}$

27. (1) $\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_0^1 x\,dx + \int_{-1}^0 2x\,dx = \frac12x^2\Big|_0^1 + x^2\Big|_{-1}^0 = -\frac12$

(2) $\int_0^{8\pi}|\sin x|dx = 8\int_0^\pi\sin x\,dx = -8\cos x\Big|_0^\pi = 16$

28. 令 $T = 2n\pi+m$ $(0\le m<2\pi)$

$\lim_{T\to\infty}\frac1T\int_0^T f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\pi+m}\int_0^{2n\pi+m}f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2n\pi+m}\int_0^m f(x)dx + \frac{1}{2n\pi+m}n\int_0^{2\pi}f(x)dx\right]$

$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx$

29. (1) $[0,\frac{\pi}{2}]$: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}+t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos x)dx \overset{偶}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$

$\xlongequal{t=2\pi-x} \int_{2\pi}^{\frac32\pi}f(\cos x)d(-x) = \int_{\frac32\pi}^{2\pi}f(\cos x)dx$

$[\frac{\pi}{2},\pi]$: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(\sin x)dx \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}+t} \int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$

$[\pi,\frac32\pi]$: $\int_\pi^{\frac32\pi}f(\sin x)dx \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}+t} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(\cos x)dx$

$[\frac32\pi,2\pi]$: $\int_{\frac32\pi}^{2\pi}f(\sin x)dx \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}+t} \int_\pi^{\frac32\pi}f(\cos x)dx$

故 $\int_0^{2\pi}f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(\cos x)dx + \int_\pi^{\frac32\pi}f(\cos x)dx + \int_{\frac32\pi}^{2\pi}f(\cos x)dx$

$= \int_0^{2\pi}f(\cos x)dx$

(2) $\int_0^\pi xf(\sin x)dx \xlongequal{t=\pi-x} \int_0^\pi(\pi-t)f(\sin t)dt = \int_0^\pi\pi f(\sin x)dx - \int_0^\pi xf(\sin x)dx$

$\Rightarrow \int_0^\pi xf(\sin x) = \frac12\pi\int_0^\pi f(\sin x)dx$

不妨设 $g(x)\ge0$

显然 $g(x)\equiv0$ 或 $M=m$ 时该命题显然成立

30. $M=\sup\{f(x)\}$ $m=\inf\{f(x)\}$

① $m<\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}<M$ 时 由连续函数介值定理 ∃ξ∈(a,b) 满足 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

② $\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}=m \Rightarrow \int_a^b[f(x)-m]g(x)dx=0$ 由于 $f(x)-m$ 与 $g(x)$ 都是 $[a,b]$ 连续函数(非负)

故 $(f(x)-m)g(x)\equiv0$ 而 $g(x)$ 不恒为0 $\Rightarrow \exists(\alpha,\beta)\subset[a,b]$ $g(x)>0$ $f(x)\equiv m$

故 ∃ξ∈(α,β)⊂(a,b) s.t. $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

③ 同理 $\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}=M$ 也成立.

31. 证明: 存在性: 由第一中值定理 $\exists\xi_x>0$ s.t. $\int_0^x e^{t^2}dt = e^{\xi_x^2}\int_0^x 1\cdot dt = xe^{\xi_x^2}$

唯一性: 反证法: 假设存在 η_x 也使 $\int_0^x e^{t^2}dt = xe^{\eta_x^2}$ ①

又 $\int_0^x e^{t^2}dt = xe^{\xi_x^2}$ ② ①-② $0=x[e^{\eta_x^2}-e^{\xi_x^2}] \Rightarrow \eta_x=\xi_x$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\xi_x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\int_0^x e^{t^2}dt-\ln x}{x^2} \xlongequal{H'} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^{x^2}}{\int_0^x e^{t^2}dt}-\frac1x}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{x^2}-\int_0^x e^{t^2}dt}{2x^2\int_0^x e^{t^2}dt}$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}-e^{x^2}}{4x\int_0^x e^{t^2}dt+2x^2e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}} = \frac{1}{1+\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}}$

$= \frac{1}{1+\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{x^2}}{xe^{x^2}}} = 1$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\xi_x}{x}=1$

32. (1) ∃ξ∈[0,1] 有 $\int_0^1\frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x}}dx = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}\frac{1}{1+\alpha}$

又 $\frac{1}{\sqrt2}\le\frac{1}{\sqrt{1+\xi}}\le1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt2(1+\alpha)}\le\int_0^1\frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x}}dx\le\frac{1}{(1+\alpha)}$

(2) ∃ξ∈[0,π/4] 有 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^2\tan^2x} = \frac{1}{1+\xi^2\tan^2\xi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\,dx$

又 $\frac{16}{16+\pi^2}<\frac{1}{1+\xi^2\tan^2\xi}<1$ 故 $\frac{\pi^2}{64}<\frac{16}{16+\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{32}<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{1+x^2\tan^2x}<\frac{\pi^2}{32}$

33. (1) 令 $f(x)=\frac1x>0$ 单减 即 ∃ξ∈[a,b] s.t. $\int_a^b\frac{\sin x}{x}dx = f(a)\int_a^\xi\sin x\,dx = \frac1a\int_a^\xi\sin x\,dx$

故 $\left|\int_a^b\frac{\sin x}{x}dx\right| = \frac1a\left|\int_a^\xi\sin x\,dx\right| = \frac1a\left|\cos x\Big|_a^\xi\right| \le \frac2a$

(2) 令 $t=x^2$ $\int_a^b\sin x^2dx = \int_a^b\sin t\cdot\frac12\frac{1}{\sqrt t}dt$

$\left|\int_a^b\sin x^2dx\right| = \frac12\left|\int_{a^2}^{b^2}\frac{\sin x}{\sqrt x}dx\right| \Rightarrow$ 令 $f(x)=\frac{1}{\sqrt x}>0$ 单减

即 ∃ξ∈[a,b] s.t. $\int_a^b\sin^2dx = \frac12\int_{a^2}^{b^2}\frac{\sin x}{\sqrt x}dx = \frac12\cdot\frac1a\int_{a^2}^{\xi}\sin x\,dx$

故 $\left|\int_a^b\sin x^2dx\right| = \frac12\cdot\frac1a\left|\int_{a^2}^{b^2}\sin x\,dx\right| \le \frac12\cdot\frac1a\int_{a^2}^{\xi}\sin x\,dx = \frac{1}{2a}|\cos x|\Big|_{a^2}^{\xi} \le \frac1a$

34. (1) ① $f(x)\ge0$ 由第二中值定理 ∃ξ∈[-π,π] s.t. $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 2nx\,dx = f(-\pi)\int_{-\pi}^{\xi}\sin 2nx\,dx$

故 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 2nx\,dx = f(\pi)(\frac{1}{2n}\cos 2nx)\Big|_{-\pi}^{\xi} = f(\pi)(-\frac{1}{2n}\cos 2n\xi+\frac{1}{2n})\ge0$

② $f(x)<0$ 则 $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-f(\pi)]\sin 2n\pi x\,dx$. $f(x)-f(\pi)\ge0$

由第二中值定理 ∃ξ∈[-π,π] s.t. $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-f(\pi)]\sin 2nx\,dx = [f(-\pi)-f(\pi)]\int_{-\pi}^{\xi}\sin 2nx\,dx$

同理 $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-f(\pi)]\sin 2nx\,dx = [f(-\pi)-f(\pi)](-\frac{1}{2n}\cos 2nx)\Big|_{-\pi}^{\xi}\ge0$

而 $f(\pi)\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2nx\,dx = f(\pi)(-\frac{1}{2n})\cos 2nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$

故 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 2n\pi x\,dx\ge0$

(2) 同理可得

35. 由 $M=\sup_{a\le x\le b}\{f(x)\}$ 则 ∃[c,d]⊂[a,b] s.t. $\int_a^b f^n(x)dx \ge \int_c^d f^n(x)dx \ge (M-\varepsilon)^n(d-c)$

故 $[(M-\varepsilon)^n(d-c)]^{\frac1n} < \left[\int_a^b f^n(x)dx\right]^{\frac1n} < M(b-a)^{\frac1n}$

由夹逼收敛定理 $\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b f^n(x)dx\right]^{\frac1n} = M$

36. $f(1)=2\int_0^{\frac12}e^{1-x}f(x)dx$ 由第一中值定理 $\exists\xi\in[0,\frac12]$ $2\cdot e^{1-\xi}f(\xi)\times\frac12=\frac{ef(\xi)}{e^\xi}$

设 $g(x)=\frac{ef(x)}{e^x}$ $g(1)=\frac{ef(1)}{e^1}$ $g(\xi)=\frac{ef(\xi)}{e^\xi}$

由罗尔微分中值定理 $\exists\eta\in(\xi,1)$ 有 $g'(\eta)=0$

即 $g'(\eta)=\frac{ef'(\eta)-ef(\eta)}{e^\eta}=0\Rightarrow f'(\eta)=f(\eta)$

故存在 $\xi\in(0,1)$ s.t. $f(\xi)=f'(\xi)$

37. 因为 $f(x)$ 单调 由第二中值定理

$\exists\xi\in[a,b]$ s.t. $\int_a^b f(x)g(\lambda x)dx=f(a)\int_a^\xi g(\lambda x)dx+f(b)\int_\xi^b g(\lambda x)dx$

$=\frac1\lambda f(a)\int_{\lambda a}^{\lambda\xi}g(x)dx+\frac1\lambda f(b)\int_{\lambda\xi}^{\lambda b}g(x)dx$ ①

令 $\lambda\xi=\lambda a+n_1T+t_1$ $\lambda b=\lambda\xi+n_2T+t_2$ $(0\le t_1,t_2<T)$

则 ①式 $=\frac1\lambda f(a)[n_1\int_0^T g(x)dx+\int_{\lambda a}^{\lambda a+t_1}g(x)dx]+\frac1\lambda f(b)[n_2\int_0^T g(x)dx+\int_{\lambda\xi}^{\lambda\xi+t_2}g(x)dx]$

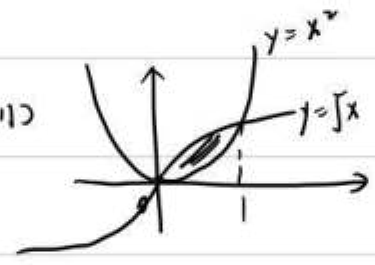
由 $\int_0^T g(x)dx=0\Rightarrow$ ①式 $=\frac1\lambda f(a)\int_0^{t_1}g(x)dx+\frac1\lambda f(b)\int_0^{t_2}g(x)dx$ $|①式|\le|\frac1\lambda f(a)||\int_{\lambda a}^{\lambda a+t_1}g(x)dx|+|\frac1\lambda f(b)||\int_{\lambda\xi}^{\lambda\xi+t_2}g(x)dx|$

$\le|\frac1\lambda f(a)|\int_{\lambda a}^{\lambda a+t_1}|g(x)|dx+|\frac1\lambda f(b)|\int_{\lambda\xi}^{\lambda\xi+t_2}|g(x)|dx$

故 $\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)dx=\lim_{\lambda\to\infty}[\frac1\lambda f(a)\int_0^{t_1}g(x)dx+\frac1\lambda f(b)\int_0^{t_2}g(x)dx]=0$ $\le(|\frac1\lambda f(a)|+|\frac1\lambda f(b)|)\int_0^T|g(x)|dx\to0$

与ξ,λ无关

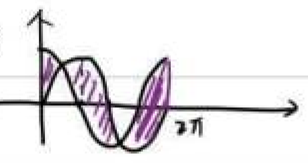
38.(1)



$S=\int_0^1(\sqrt x-x^2)dx$

$=\frac23x^{\frac32}-\frac13x^3|_0^1=\frac13$

(2)



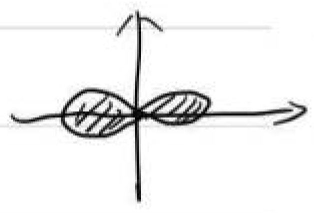
$S=\int_0^{\frac\pi4}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac\pi4}^{\frac54\pi}(\sin x-\cos x)dx+\int_{\frac54\pi}^{2\pi}(\cos x-\sin x)dx$

$=(\sin x+\cos x)|_0^{\frac\pi4}+(\sin x+\cos x)|_{\frac54\pi}^{2\pi}+(-\cos x-\sin x)|_{\frac\pi4}^{\frac54\pi}$

$=\frac{\sqrt2}2+\frac{\sqrt2}2-0-1+0+1+\frac{\sqrt2}2+\frac{\sqrt2}2+\frac{\sqrt2}2+\frac{\sqrt2}2+\frac{\sqrt2}2+\frac{\sqrt2}2$

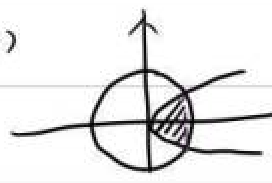
$=4\sqrt2$

(3) 中心对称 $S=4\cdot\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx=4\int_0^1\frac12\sqrt{1-x^2}dx^2$



$=-2\int_0^1\sqrt{1-x^2}d(1-x^2)=-\frac23\times2(1-x^2)^{\frac32}|_0^1=\frac43$

(4)



$\begin{cases}y^2=x\\x^2+y^2=1\end{cases}\Rightarrow x=\frac{-1+\sqrt5}2$

$\int\sqrt{1-x^2}dx\xlongequal[t\in[0,\frac\pi2]]{x=\sin t}\int\cos^2x\,dx=\int\frac{\cos2x+1}2dx=\frac14\sin2x+\frac12x+C$

故 $S=2\int_0^{\frac{-1+\sqrt5}2}\sqrt x\,dx+2\int_{\frac{-1+\sqrt5}2}^1\sqrt{1-x^2}dx$

$=2\cdot\frac23\cdot x^{\frac32}|_0^{\frac{-1+\sqrt5}2}+2(\frac14\sin2x+\frac12x)|_{\arcsin\frac{-1+\sqrt5}2}^{\frac\pi2}$

$=\frac43(\frac{\sqrt5-1}2)^{\frac32}+\frac\pi2-\arcsin\frac{-1+\sqrt5}2-\frac12\sin(2\arcsin\frac{-1+\sqrt5}2)$

39. 令 $f(x)=x^{p-1}$ $f(0)=0$ 且 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单增

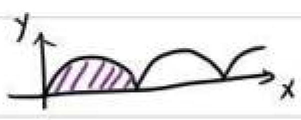
$\int_0^a x^{p-1}dx+\int_0^b y^{\frac1{p-1}}dy=\frac{a^p}p+\frac{p-1}p y^{\frac p{p-1}}|_0^b=\frac{a^p}p+\frac{p-1}pb^{\frac p{p-1}}$

由 $\frac1p+\frac1q=1\Rightarrow\frac1q=\frac{p-1}p\Rightarrow\frac{a^p}p+\frac{b^q}q=\int_0^a x^{p-1}dx+\int_0^b y^{\frac1{p-1}}dy$

由 Young 不等式 $ab\le\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy=\frac{a^p}p+\frac{b^q}q$

"=" $\Leftrightarrow$ $b=f(a)=a^{p-1}$

40.(1) 旋轮线



$S=\int_0^{2\pi}y(t)dx(t)=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt$

$=\int_0^{2\pi}a^2(1-2\cos t+\cos^2t)dt$

$=a^2[t|_0^{2\pi}-2\sin t|_0^{2\pi}+(\frac12t+\frac14\sin2t)|_0^{2\pi}]$

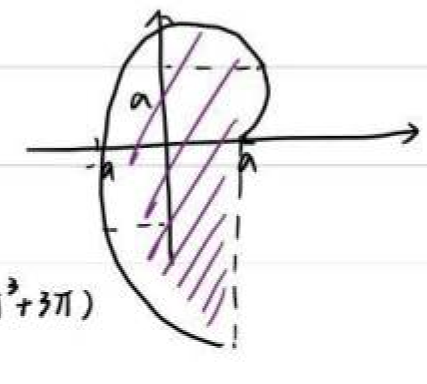
$=2\pi a^2+\pi a^2=3\pi a^2$

(2) $x'(t)=a(-\sin t+\sin t+t\cos t)=at\cos t$

$[0,\frac\pi2]$ $x'(t)>0\Rightarrow x(t)\uparrow$ $t=0$ $x=a$ $y=0$; $t=\frac\pi2$ $x=\frac\pi2a$ $y=a$

$[\frac\pi2,\frac32\pi]$ $x'(t)<0\Rightarrow x(t)\downarrow$ $t=\frac32\pi$ $x=-\frac32\pi a$ $y=-a$

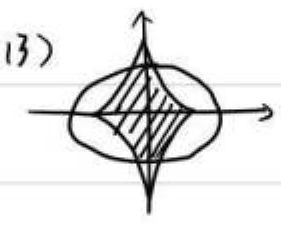
$[\frac32\pi,2\pi]$ $x'(t)>0\Rightarrow x(t)\uparrow$ $t=2\pi$ $x=a$ $y=-2\pi a$



$S=\int_0^{2\pi}a(\sin t-t\cos t)at\cos t\,dt$

$=a^2(\frac16t^3+\frac14t^2\sin2t+\frac14t\cos2t-\frac18\sin2t)|_0^{2\pi}=\frac{a^2}3(4\pi^3+3\pi)$

(3)



$S=4\int_0^{\frac\pi2}\frac{c^2}b\sin^3t\cdot\frac{3c^2}a\cos^2t\sin t\,dt$

$=\frac{12c^4}{ab}\int_0^{\frac\pi2}\sin^4t\cos^2t\,dt$

$=\frac{3c^4}{ab}\int_0^{\frac\pi2}\sin^22t\frac{1-\cos2t}2dt$

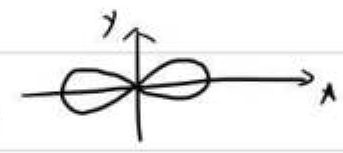
$=\frac{3c^4}{ab}\int_0^{\frac\pi2}\frac12\sin^22t\,dt-\frac{3c^4}{ab}\int_0^{\frac\pi2}\frac{\sin^22t\cos2t}2dt$

$=\frac{3c^4}{ab}\int_0^{\frac\pi2}\frac14(1-\cos4t)dt-\frac{3c^4}{4ab}\int_0^{\frac\pi2}\sin^22t\,d\sin2t$

$=-\frac{3c^4}{16ab}\sin4t|_0^{\frac\pi2}+\frac{3c^4}{4ab}t|_0^{\frac\pi2}-\frac{3c^4}{4ab}\cdot\frac13\sin^32t|_0^{\frac\pi2}$

$=\frac{3\pi c^4}{8ab}$

41.(1)

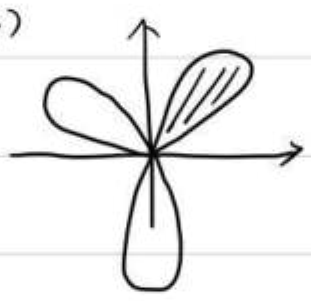


$S=4\int_0^{\frac\pi4}\frac12a^2\cos2\theta\,d\theta$

$=2\int_0^{\frac\pi4}a^2\cdot\frac12\cos2\theta\,d2\theta$

$=a^2\sin2\theta|_0^{\frac\pi4}=a^2$

(2)



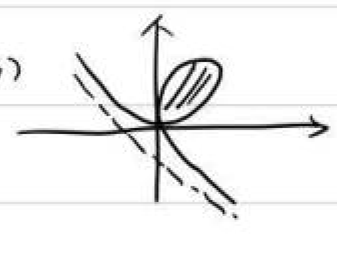
$S=3\int_0^{\frac\pi3}\frac12a^2\sin^23\theta\,d\theta$

$=3a^2\int_0^{\frac\pi3}\frac12\cdot\frac12(1-\cos6\theta)d\theta$

$=(\frac34\theta|_0^{\frac\pi3}-\frac18\sin6\theta|_0^{\frac\pi3})a^2$

$=\frac\pi4a^2$

(3)



$S=\int_0^{\frac\pi2}\frac12\cdot\frac{9a^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^6\theta+\cos^6\theta+2\sin^3\theta\cos^3\theta}d\theta$

$=\int_0^{\frac\pi2}\frac{9a^2}2\frac{\tan^2\theta\sec^2\theta}{(\tan^3\theta+1)^2}d\theta$

$=-\frac{3a^2}2\frac1{\tan^3\theta+1}|_0^{\frac\pi2}=\frac32a^2$

42.(1) $x=\sin^3t$ $y=\cos^3t$

$S=4\int_0^{\frac\pi2}\cos^3t\cdot3\sin^2t\cdot\cos t\,dt=12\int_0^{\frac\pi2}\cos^4t\sin^2t\,dt$

$=3\int_0^{\frac\pi2}\cos^2t\cdot\sin^22t\,dt=3\int_0^{\frac\pi2}\frac{\cos2t+1}2\sin^22t\,dt$

$=\frac32\int_0^{\frac\pi2}\frac12\sin^22t\,d\sin2t+\frac32\int_0^{\frac\pi2}\sin^22t\,dt$

$=\frac34\times\frac13\sin^32t|_0^{\frac\pi2}+\frac34t|_0^{\frac\pi2}-\frac34\times\frac14\sin4t|_0^{\frac\pi2}$

$=\frac38\pi$

(2) $x=r\cos\theta$ $y=r\sin\theta$

$x^4+y^4=x^2+y^2\Rightarrow r^4\sin^4\theta+r^4\cos^4\theta=r^2\Rightarrow r^2=\frac1{\cos^4\theta+\sin^4\theta}$

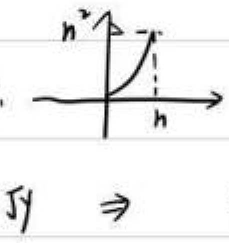
$S=\frac12\int_0^{2\pi}\frac1{\cos^4\theta+\sin^4\theta}d\theta=\frac12\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}d\theta=\frac12\int_0^{2\pi}\frac{\tan^2\theta\sec^2\theta+\sec^2\theta}{1+\tan^4\theta}d\theta$

$=\frac12\int_0^{2\pi}\frac{\tan^2\theta+1}{\tan^4\theta+1}d\tan\theta=2\int_0^{\frac\pi2}\frac{d(\tan\theta-\frac1{\tan\theta})}{(\tan\theta-\frac1{\tan\theta})^2+2}$

$=2\cdot\frac1{\sqrt2}\arctan\frac1{\sqrt2}(\tan\theta-\frac1{\tan\theta})|_0^{\frac\pi2}=\sqrt2\pi$

(3)(4)(5) 同理.

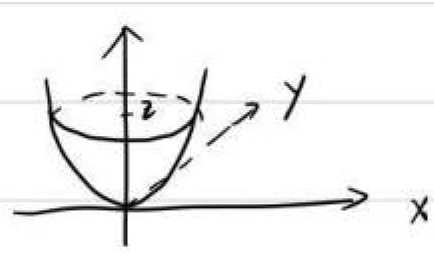
43.



绕x轴 $V=\pi\int_0^h x^4dx=\frac15\pi x^5|_0^h=\frac15\pi h^5$

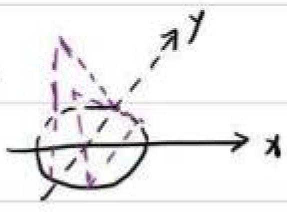
$x=\sqrt y$ $\Rightarrow$ 绕y轴 $V=\pi\int_0^{h^2}y\,dy=\frac12\pi y^2|_0^{h^2}=\frac\pi2h^4$

44. $\frac{x^2}{a^2z}+\frac{y^2}{b^2z}=1$ $S=\pi a\sqrt z\cdot b\sqrt z=abz\pi$



$V=\int_0^h S\,dz=\int_0^h ab\pi z\,dz=\frac12ab\pi z^2|_0^h=\frac12ab\pi h^2$

45.



$V=\int_{-1}^1\underbrace{2\sqrt{1-x^2}}_{底}\cdot\underbrace{\sqrt3\sqrt{1-x^2}}_{高}\cdot\frac12dx$

$=\sqrt3\int_{-1}^1(1-x^2)dx=2\sqrt3-\frac{\sqrt3}3x^3|_{-1}^1=\frac43\sqrt3$

36. $f(1)=2\int_0^{\frac12} e^{1-x}f(x)dx \xlongequal[\exists \xi\in[0,\frac12]]{\text{由第一中值定理}} 2\cdot e^{1-\xi}f(\xi)\times\frac12=\frac{ef(\xi)}{e^{\xi}}$

设 $g(x)=\frac{ef(x)}{e^x}$ $g(1)=\frac{ef(1)}{e^1}$ $g(\xi)=\frac{ef(\xi)}{e^{\xi}}$

由罗尔微分中值定理 $\exists\eta\in(\xi,1)$ 有 $g'(\eta)=0$

即 $g'(\eta)=\frac{ef'(\eta)-ef(\eta)}{e^{\eta}}=0\Rightarrow f'(\eta)=f(\eta)$

故存在 $\xi\in(0,1)$ s.t. $f(\xi)=f'(\xi)$

37. 因为 $f(x)$ 单调 由第二中值定理

$\exists\xi\in[a,b]$ s.t. $\int_a^b f(x)g(\lambda x)dx=f(a)\int_a^{\xi}g(\lambda x)dx+f(b)\int_{\xi}^{b}g(\lambda x)dx$

$=\frac1\lambda f(a)\int_{\lambda a}^{\lambda\xi}g(x)dx+\frac1\lambda f(b)\int_{\lambda\xi}^{\lambda b}g(x)dx$ ①

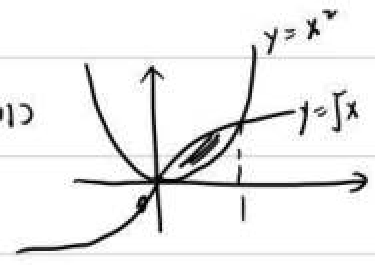
令 $\lambda\xi=\lambda a+n_1T+l_1$ $\lambda b=\lambda\xi+n_2T+l_2$ $(0\le l_1,l_2<T)$

则 ①式 $=\frac1\lambda f(a)\left[n_1\int_0^T g(x)dx+\int_{\lambda a}^{\lambda a+l_1}g(x)dx\right]+\frac1\lambda f(b)\left[n_2\int_0^T g(x)dx+\int_{\lambda\xi}^{\lambda\xi+l_2}g(x)dx\right]$

由 $\int_0^T g(x)dx=0\Rightarrow$ ①式 $=\frac1\lambda f(a)\int_0^{l_1}g(x)dx+\frac1\lambda f(b)\int_0^{l_2}g(x)dx$ $|①式|\le|\frac1\lambda f(a)|\left|\int_{\lambda a}^{\lambda a+l_1}g(x)dx\right|+|\frac1\lambda f(b)|\left|\int_{\lambda\xi}^{\lambda\xi+l_2}g(x)dx\right|$

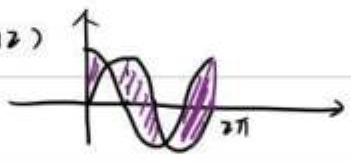
$\le|\frac1\lambda f(a)|\int_{\lambda a}^{\lambda a+l_1}|g(x)|dx+|\frac1\lambda f(b)|\int_{\lambda\xi}^{\lambda\xi+l_2}|g(x)|dx$

故 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)dx=\lim\limits_{\lambda\to\infty}\left[\frac1\lambda f(a)\int_0^{l_1}g(x)dx+\frac1\lambda f(b)\int_0^{l_2}g(x)dx\right]=0$ $\le\left(|\frac1\lambda f(a)|+|\frac1\lambda f(b)|\right)\underbrace{\int_0^T|g(x)|dx}_{\text{与}\xi,\lambda\text{无关}}\to0$

38. (1) 

$S=\int_0^1(\sqrt x-x^2)dx$

$=\frac23x^{\frac32}-\frac13x^3\Big|_0^1=\frac13$

(2) 

$S=\int_0^{\frac\pi4}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac\pi4}^{\frac54\pi}(\sin x-\cos x)dx+\int_{\frac54\pi}^{2\pi}(\cos x-\sin x)dx$

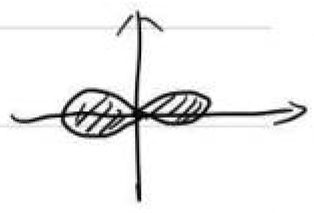
$=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac\pi4}+(\sin x+\cos x)\Big|_{\frac54\pi}^{2\pi}+(-\cos x-\sin x)\Big|_{\frac\pi4}^{\frac54\pi}$

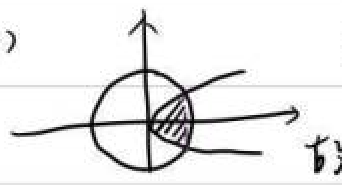
$=\frac{\sqrt2}2+\frac{\sqrt2}2-0-1+0+1+\frac{\sqrt2}2+\frac{\sqrt2}2+\frac{\sqrt2}2+\frac{\sqrt2}2+\frac{\sqrt2}2+\frac{\sqrt2}2$

$=4\sqrt2$

(3) 中心对称 $S=4\cdot\int_0^1x\sqrt{1-x^2}dx=4\int_0^1\frac12\sqrt{1-x^2}dx^2$

$=-2\int_0^1\sqrt{1-x^2}d(1-x^2)=-\frac23\times2(1-x^2)^{\frac32}\Big|_0^1=\frac43$



(4) 

$\begin{cases}y^2=x\\x^2+y^2=1\end{cases}\Rightarrow x=\frac{-1+\sqrt5}2$

故 $S=2\int_0^{\frac{-1+\sqrt5}2}\sqrt x\,dx+2\int_{\frac{-1+\sqrt5}2}^1\sqrt{1-x^2}\,dx$

$=2\cdot\frac23\cdot x^{\frac32}\Big|_0^{\frac{-1+\sqrt5}2}+2(-\frac14\sin2x+\frac x2)\Big|_{\arcsin\frac{-1+\sqrt5}2}^{\frac\pi2}$

$=\frac43\left(\frac{\sqrt5-1}2\right)^{\frac32}+\frac\pi2-\arcsin\frac{-1+\sqrt5}2-\frac12\sin\left(2\arcsin\frac{-1+\sqrt5}2\right)$

$\int\sqrt{1-x^2}dx\ \xlongequal[t\in[0,\frac\pi2]]{x=\sin t}\ \int\cos^2x\,dx=\int\frac{\cos2x+1}2dx$

$=\frac14\sin2x+\frac12x+C$

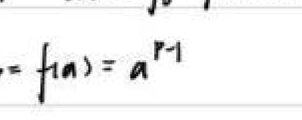
39. 令 $f(x)=x^{p-1}$ $f(0)=0$ 且 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单增

$\int_0^a x^{p-1}dx+\int_0^b y^{\frac1{p-1}}dy=\frac{a^p}p+\frac{p-1}p y^{\frac p{p-1}}dy=\frac{a^p}p+\frac{p-1}pb^{\frac p{p-1}}$

由 $\frac1p+\frac1q=1\Rightarrow\frac1q=\frac{p-1}p\Rightarrow\frac{a^p}p+\frac{b^q}q=\int_0^a x^{p-1}dx+\int_0^b y^{\frac1{p-1}}dy$

由 Young 不等式 $ab\le\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy=\frac{a^p}p+\frac{b^q}q$

"=" $\Leftrightarrow$ $b=f(a)=a^{p-1}$

40. (1) 旋轮线 

$S=\int_0^{2\pi}y(t)dx(t)=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt$

$=\int_0^{2\pi}a^2(1-2\cos t+\cos^2t)dt$

$=a^2\left[t\Big|_0^{2\pi}-2\sin t\Big|_0^{2\pi}+(\frac12t+\frac14\sin2t)\Big|_0^{2\pi}\right]$

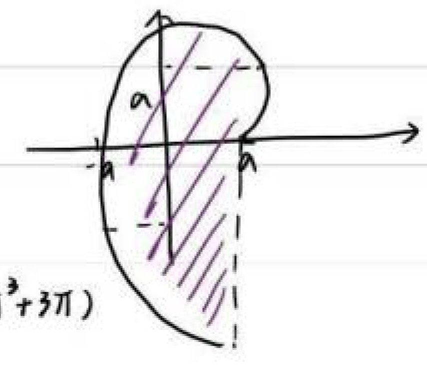
$=2\pi a^2+\pi a^2=3\pi a^2$

(2) $x'(t)=a(-\sin t+\sin t+t\cos t)=at\cos t$

$[0,\frac\pi2]$ $x'(t)>0\Rightarrow x(t)\uparrow$ $t=0$ $x=a$ $y=0$; $t=\frac\pi2$ $x=\frac\pi2a$ $y=a$

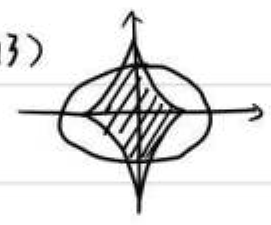
$[\frac\pi2,\frac32\pi]$ $x'(t)<0\Rightarrow x(t)\downarrow$ $t=\frac32\pi$ $x=-\frac32\pi a$ $y=-a$

$[\frac32\pi,2\pi]$ $x'(t)>0\Rightarrow x(t)\uparrow$ $t=2\pi$ $x=a$ $y=-2\pi a$



$S=\int_0^{2\pi}a(\sin t-t\cos t)\,at\cos t\,dt$

$=a^2(\frac16t^3+\frac14t^2\sin2t+\frac14t\cos2t-\frac18\sin2t)\Big|_0^{2\pi}=\frac{a^2}3(4\pi^3+3\pi)$

(3) 

$S=4\int_0^{\frac\pi2}\frac{c^2}b\sin^3t\cdot\frac{3c^2}a\cos^2t\sin t\,dt$

$=\frac{12c^4}{ab}\int_0^{\frac\pi2}\sin^4t\cos^2t\,dt$

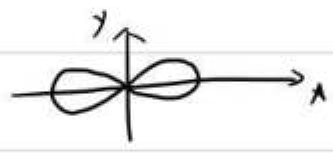
$=\frac{3c^4}{ab}\int_0^{\frac\pi2}\sin^22t\,\frac{1-\cos2t}2dt$

$=\frac{3c^4}{ab}\int_0^{\frac\pi2}\frac12\sin^22t\,dt-\frac{3c^4}{ab}\int_0^{\frac\pi2}\frac{\sin^22t\cos2t}2dt$

$=\frac{3c^4}{ab}\int_0^{\frac\pi2}\frac14(1-\cos4t)dt-\frac{3c^4}{4ab}\int_0^{\frac\pi2}\sin^22t\,d\sin2t$

$=-\frac{3c^4}{16ab}\sin4t\Big|_0^{\frac\pi2}+\frac{3c^4}{4ab}t\Big|_0^{\frac\pi2}-\frac{3c^4}{4ab}\cdot\frac13\sin^32t\Big|_0^{\frac\pi2}$

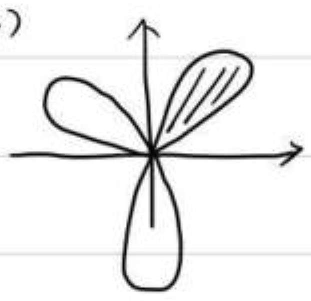
$=\frac{3\pi c^4}{8ab}$

41. (1) 

$S=4\int_0^{\frac\pi4}\frac12a^2\cos2\theta\,d\theta$

$=2\int_0^{\frac\pi4}a^2\cdot\frac12\cos2\theta\,d2\theta$

$=a^2\sin2\theta\Big|_0^{\frac\pi4}=a^2$

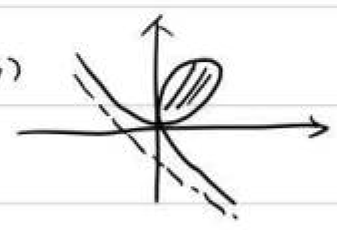
(2) 

$S=3\int_0^{\frac\pi3}\frac12a^2\sin^23\theta\,d\theta$

$=3a^2\int_0^{\frac\pi3}\frac12\cdot\frac12(1-\cos6\theta)d\theta$

$=\left(\frac34x\Big|_0^{\frac\pi3}-\frac18\sin6\theta\Big|_0^{\frac\pi3}\right)a^2$

$=\frac\pi4a^2$

(3) 

$S=\int_0^{\frac\pi2}\frac12\cdot\frac{9a^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^6\theta+\cos^6\theta+2\sin^3\theta\cos^3\theta}d\theta$

$=\int_0^{\frac\pi2}\frac{9a^2}2\frac{\tan^2\theta\sec^2\theta}{(\tan^3\theta+1)^2}d\theta$

$=-\frac{3a^2}2\frac1{\tan^3\theta+1}\Big|_0^{\frac\pi2}=\frac32a^2$

42. (1) $x=\sin^3t$ $y=\cos^3t$

$S=4\int_0^{\frac\pi2}\cos^3t\cdot3\sin^2t\cdot\cos t\,dt=12\int_0^{\frac\pi2}\cos^4t\sin^2t\,dt$

$=3\int_0^{\frac\pi2}\cos^2t\cdot\sin^22t\,dt=3\int_0^{\frac\pi2}\frac{\cos2t+1}2\sin^22t\,dt$

$=\frac32\int_0^{\frac\pi2}\frac12\sin^22t\,d\sin2t+\frac32\int_0^{\frac\pi2}\sin^22t\,dt$

$=\frac34\times\frac13\sin^32t\Big|_0^{\frac\pi2}+\frac34t\Big|_0^{\frac\pi2}-\frac34\times\frac14\sin4t\Big|_0^{\frac\pi2}$

$=\frac38\pi$

(2) $x=r\cos\theta$ $y=r\sin\theta$

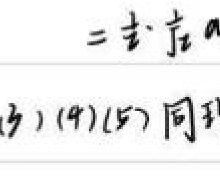
$x^4+y^4=x^2+y^2\Rightarrow r^4\sin^4\theta+r^4\cos^4\theta=r^2\Rightarrow r^2=\frac1{\cos^4\theta+\sin^4\theta}$

$S=\frac12\int_0^{2\pi}\frac1{\cos^4\theta+\sin^4\theta}d\theta=\frac12\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}d\theta=\frac12\int_0^{2\pi}\frac{\tan^2\theta\sec^2\theta+\sec^2\theta}{1+\tan^4\theta}d\theta$

$=\frac12\int_0^{2\pi}\frac{\tan^2\theta+1}{\tan^4\theta+1}d\tan\theta=2\int_0^{\frac\pi2}\frac{d(\tan\theta-\frac1{\tan\theta})}{(\tan\theta-\frac1{\tan\theta})^2+2}$

$=4\cdot\frac1{\sqrt2}\arctan\frac1{\sqrt2}(\tan\theta-\frac1{\tan\theta})\Big|_0^{\frac\pi2}=\sqrt2\pi$

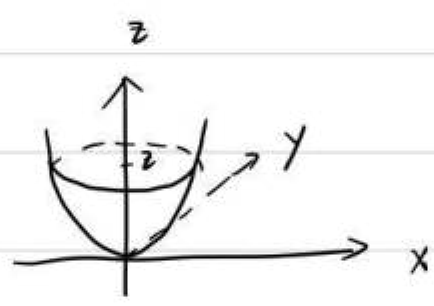
(3)(4)(5) 同理.

43. 

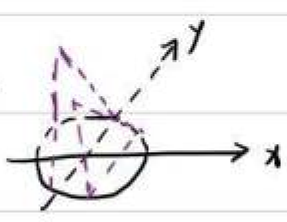
绕x轴 $V=\pi\int_0^h x^4dx=\frac15x^5\Big|_0^h=\frac15\pi h^5$

$x=\sqrt y$ $\Rightarrow$ 绕y轴 $V=\pi\int_0^{h^2}y\,dy=\frac12\pi y^2\Big|_0^{h^2}=\frac\pi2h^4$

44. $\frac{x^2}{a^2z}+\frac{y^2}{b^2z}=1$ $S=\pi a\sqrt z\cdot b\sqrt z=abz\pi$



$V=\int_0^h S\,dz=\int_0^h ab\pi z\,dz=\frac12ab\pi z^2\Big|_0^h=\frac12ab\pi h^2$

45. 

$V=\int_{-1}^1\underbrace{2\sqrt{1-x^2}}_{\text{底}}\cdot\underbrace{\sqrt3\sqrt{1-x^2}}_{\text{高}}\cdot\frac12dx$

$=\sqrt3\int_{-1}^1(1-x^2)dx=2\sqrt3-\frac{\sqrt3}3x^3\Big|_{-1}^1=\frac43\sqrt3$

习题八

1.(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=-\int_1^{+\infty}\ln x\,d\frac{1}{1+x}=-\frac{\ln x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x)x}dx=\ln\frac{x}{x+1}\Big|_1^{+\infty}=\ln 2$

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{\frac32}}=\frac12\int_0^{+\infty}\frac{d(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^{\frac32}}\overset{t=x^2+a^2}{=\!=}\frac12\int_{a^2}^{+\infty}\frac{dt}{t^{\frac32}}=\frac12\times(-2)\frac{1}{t^{\frac12}}\Big|_{a^2}^{+\infty}=\frac{1}{|a|}$

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac1x+(\frac1x)^2}}=\int_1^{+\infty}\frac{d(\frac1x)}{\sqrt{1+\frac1x+(\frac1x)^2}}\overset{t=\frac1x}{=\!=}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+t+t^2}}=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(t+\frac12)^2+\frac34}}\overset{m=\frac{2}{\sqrt3}(t+\frac12)}{=\!=}\int_{\frac{1}{\sqrt3}}^{\sqrt3}\frac{\frac{\sqrt3}{2}dm}{\frac{\sqrt3}{2}\sqrt{m^2+1}}$

$=\frac{2}{\sqrt3}\ln(m+\sqrt{m^2+1})\Big|_{\frac{1}{\sqrt3}}^{\sqrt3}=\ln(2+\sqrt3)-\frac12\ln3$ (Tips: $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$)

(4) $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx=-\int_1^{+\infty}\arctan x\,d\frac1x=-\frac{\arctan x}{x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)}=\frac{\pi}{4}+\frac12\int_1^{+\infty}\frac{dx^2}{x^2(1+x^2)}$

$=\frac{\pi}{4}+\frac12\ln\frac{x^2}{1+x^2}\Big|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{4}+\frac12\ln2$

(5) $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\frac{x}{(1+x^2)^n}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2nx^2}{(1+x^2)^{n+1}}dx=2n\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}dx-2n\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}dx=2nI_n-2nI_{n+1}$

$(2n-1)I_n=2nI_{n+1}$ $\quad I_1=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow I_n=\frac{2n-3}{2n-2}\times\frac{2n-5}{2n-4}\times\cdots\times\frac12 I_1=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2}\ (n\geq2)\Rightarrow I_n=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & n=1\\ \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2} & n\geq2\end{cases}$

2.(1) $\exists\varepsilon_0=\frac{\sqrt2-1}{2(1+e^{-\frac{\pi}{4}})}$ $\forall M>0$ $\exists x'=\frac{\pi}{4}+2[M+1]\pi,\ x''=\frac{\pi}{3}+2[M+1]\pi>M$

$\left|\int_{x'}^{x''}\frac{\sin x}{1+e^{-x}}dx\right|=\left|\int_{\frac{\pi}{4}+2[M+1]\pi}^{\frac{\pi}{3}+2[M+1]\pi}\frac{\sin x}{1+e^{-x}}dx\right|>\left|\frac{1}{1+e^{-\frac{\pi}{4}}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx\right|=\frac{\sqrt2-1}{2(1+e^{-\frac{\pi}{4}})}=\varepsilon_0$

由柯西准则 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{1+e^{-x}}dx$ 发散

(2) $x\to+\infty$ 时 $\frac{x^2+100x+1000}{x^4-x^3+1}>0$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+100x+1000}{x^4-x^3+1}}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{100}{x}+\frac{1000}{x^2}}{1-\frac1x+\frac{1}{x^4}}=1$

而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛 由比较原则 $\int_1^{+\infty}\frac{x^2+100x+1000}{x^4-x^3+1}dx$ 收敛

$\int_0^{+\infty}\frac{x^2+100x+1000}{x^4-x^3+1}dx=\underbrace{\int_0^1\frac{x^2+100x+1000}{x^4-x^3+1}dx}_{\triangleq I_1}+\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{x^2+100x+1000}{x^4-x^3+1}dx}_{\triangleq I_2}$

I_1 定积分，I_2 收敛 $\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{x^2+100x+1000}{x^4-x^3+1}dx$ 收敛

(3) $p=1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^6x}{x}dx=\int_1^{+\infty}\ln^6x\,d\ln x=\frac17\ln^7x\Big|_1^{+\infty}=+\infty$ 发散

$0<p<1$ 时 $\frac{\ln^6x}{x^p}>\frac{\ln^6x}{x}$ 由比较原则 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln^6x}{x^p}dx$ 发散

$p>1$ 时 设 $p>q>1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^6x}{x^p}\Big/\frac{1}{x^q}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^{\frac{p-q}{6}}}\right)^6$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{p-q}{6}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{p-q}{6}x^{\frac{p-q}{6}}}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^6x}{x^p}=0$

而 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^q}dx$ 收敛 由比较原则 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^6x}{x^p}dx$ 收敛

故 $0<p\leq1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^6x}{x^p}dx$ 发散；$p>1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^6x}{x^p}dx$ 收敛

(4) $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q}dx=\int_0^1\frac{x^p}{1+x^q}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q}dx\triangleq I_1+I_2$ $\quad I_1$ 为定积分

对于 I_2:

$q-p>1$ 时 $\frac{x^p}{1+x^q}<\frac{x^p}{x^q}=\frac{1}{x^{q-p}}$ 而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{q-p}}dx$ 收敛 由比较原则 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q}dx$ 收敛

$q-p\leq1$ 时 即 $p\geq q-1$ $\frac{x^p}{1+x^q}\geq\frac{x^{q-1}}{1+x^q}=\frac{1}{x+x^{1-q}}$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+x^{1-q}}\Big/\frac1x=1$

而 $\int_1^{+\infty}\frac1x dx$ 发散 由比较原则 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q}dx$ 发散

故 $q-p>1$ $\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q}dx$ 收敛；$q-p\leq1$ $\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q}dx$ 发散

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\sqrt x}}dx=\int_0^1\frac{x^\alpha}{e^{\sqrt x}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\sqrt x}}dx\triangleq I_1+I_2$ (I_1是定积分)

对 I_2: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\sqrt x}}\Big/\frac{1}{x^2}=0$ 而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛 $\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\sqrt x}}dx$ 收敛 故 $\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\sqrt x}}dx$ 收敛

(6) $\alpha=1$ 时 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(1-\cos\frac1x)}{\frac1x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\frac{1}{2x^2}}{\frac1x}=\frac12$ $\quad\int_1^{+\infty}\frac1x dx$ 发散 $\Rightarrow\int_1^{+\infty}x(1-\cos\frac1x)dx$ 发散

$0<\alpha<1$ 时 $x(1-\cos\frac1x)^\alpha>x(1-\cos\frac1x)$ ($x\to+\infty$时) $\Rightarrow\int_1^{+\infty}x(1-\cos\frac1x)^\alpha dx$ 发散

$\alpha>1$ 时 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(1-\cos\frac1x)^\alpha}{(\frac1x)^\alpha}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cdot(\frac{1}{2x^2})^\alpha}{(\frac1x)^\alpha}=0$ $\quad\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$ 收敛 $\Rightarrow\int_1^{+\infty}x(1-\cos\frac1x)^\alpha dx$ 收敛

$\Rightarrow 0<\alpha\leq1$ 时 $\int_1^{+\infty}x(1-\cos\frac1x)^\alpha dx$ 发散；$\alpha>1$ 时 $\int_1^{+\infty}x(1-\cos\frac1x)^\alpha dx$ 收敛

(7) $\ln(\cos\frac1x+\sin^p\frac1x)=\ln(1-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})+\frac{1}{x^p}+o(\frac{1}{x^p}))=-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^p}+o(\frac{1}{x^2})+o(-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^p}+o(\frac{1}{x^q}))$

$=-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^p}+o(\frac{1}{x^q})$ $\quad q=\min\{2,p\}$ $\quad\int_1^{+\infty}-\frac{1}{2x^2}dx$ 收敛

① $p\leq1$ 时 $\int_1^{+\infty}[\frac{1}{x^p}+o(\frac{1}{x^p})]dx$ 发散 $\Rightarrow\int_1^{+\infty}\ln(\cos\frac1x+\sin^p\frac1x)dx$ 发散

② $p>1$ 时 $\int_1^{+\infty}[\frac{1}{x^p}+o(\frac{1}{x^p})]dx$ 收敛 $\Rightarrow\int_1^{+\infty}\ln(\cos\frac1x+\sin^p\frac1x)dx$ 收敛

3.(1) $\int_2^{+\infty}\sin x\,dx=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_2^x\sin x\,dx=\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos2-\cos x)\leq2$

$\frac1x$ 单调 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac1x=0\Rightarrow\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛

$\frac{1}{\ln x}$ 单调 $\frac{1}{\ln x}\in(0,\frac{1}{\ln2}]\Rightarrow\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln x}dx$ 收敛

($x\to+\infty$) $\left|\frac{\sin x}{x\ln x}\right|\geq\frac{\sin^2x}{x\ln x}=\frac{1}{2x\ln x}-\frac{\cos2x}{2x\ln x}$ 同理可得 $\int_2^{+\infty}\frac{\cos2x}{2x\ln x}dx$ 收敛

$\int_2^{+\infty}\frac{1}{2x\ln x}dx=\int_2^{+\infty}\frac{1}{2\ln x}d\ln x=\frac12\ln\ln x\Big|_2^{+\infty}=+\infty$ 发散 $\Rightarrow\int_2^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x\ln x}\right|dx$ 发散

$\Rightarrow\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln x}dx$ 条件收敛

(2) $\int_1^{+\infty}\cos x\,dx=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x\cos x\,dx=\lim\limits_{x\to+\infty}|\sin x-\sin1|\leq2$

$\frac{1}{x^\alpha}$ 单调 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha}=0$ $(\alpha>0)\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ 收敛

① $\alpha>1$ $\left|\frac{\cos x}{x^\alpha}\right|\leq\frac{1}{x^\alpha}$ $\quad\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$ 收敛 $\Rightarrow\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x^\alpha}\right|dx$ 收敛

② $0<\alpha<1$ $\left|\frac{\cos x}{x^\alpha}\right|\geq\frac{\cos^2x}{x^\alpha}=\frac{\cos2x}{x^\alpha}+\frac{1}{2x^\alpha}$ 同理 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos2x}{x^\alpha}dx$ 收敛

而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^\alpha}dx$ 发散 $\Rightarrow\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos2x}{x^\alpha}\right|dx$ 发散

故 $\alpha>1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ 绝对收敛；$0<\alpha<1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ 条件收敛

(3) ① $\alpha>1$ 时 $\left|\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}\right|\leq\frac{1}{x^\alpha-1}$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^\alpha-1}}{\frac{1}{x^\alpha}}=1$ $\quad\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$ 收敛 $\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}dx$ 绝对收敛

② $0<\alpha\leq1$ 时 $\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}=\frac{\sin x}{x^\alpha}-\frac{\sin^2x}{x^\alpha(x^\alpha+\sin x)}$ $\quad\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ 收敛

$\frac{\sin^2x}{x^\alpha(x^\alpha+\sin x)}\geq\frac{1-\cos2x}{2x^\alpha(x^\alpha+1)}=\frac{1}{2x^\alpha(x^\alpha+1)}-\frac{\cos2x}{2x^\alpha(x^\alpha+1)}$

(i) $0<\alpha\leq\frac12$ 时 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2x^\alpha(x^\alpha+1)}}{\frac{1}{x^{2\alpha}}}=\frac12$ $\quad\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{2\alpha}}dx$ 发散 $\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^\alpha(x^\alpha+1)}dx$ 发散

$\left|\int_1^{+\infty}\cos2x\,dx\right|\leq2$ $\quad\frac{1}{2x^\alpha(x^\alpha+1)}$ 单调 $(x\to+\infty)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^\alpha(x^\alpha+1)}=0\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{\cos2x}{2x^\alpha(x^\alpha+1)}dx$ 收敛

$\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}dx$ 发散

(ii) $\frac12<\alpha\leq1$ 时 $\frac{\sin^2x}{x^\alpha(x^\alpha+\sin x)}\leq\frac{1}{x^\alpha(x^\alpha-1)}\sim\frac{1}{x^{2\alpha}}$ $\quad\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{2\alpha}}dx$ 收敛 $\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}dx$ 收敛

$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}\right|\geq\frac{\sin^2x}{x^\alpha+1}=\frac{1-\cos2x}{2(x^\alpha+1)}=\frac{1}{2(x^\alpha+1)}-\frac{\cos2x}{2(x^\alpha+1)}$

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2(x^\alpha+1)}dx$ 发散 $\quad\int_1^{+\infty}\frac{\cos2x}{2(x^\alpha+1)}dx$ 收敛 $\Rightarrow\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}\right|dx$ 发散

故 $\alpha>1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}dx$ 绝对收敛；$\frac12<\alpha\leq1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}dx$ 条件收敛；$0<\alpha\leq\frac12$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}dx$ 发散

(4) $\sin(\frac{\sin x}{x})=\frac{\sin x}{x}-\frac16(\frac{\sin x}{x})^3+o(\frac{1}{x^3})=\frac{\sin x}{x}+o(\frac{1}{x^2})$

$\left|\int_1^{+\infty}\sin x\,dx\right|\leq2$ $\quad\frac1x$ 单调 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac1x=0\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛 $\quad\int_1^{+\infty}o(\frac{1}{x^2})dx$ 收敛

$\Rightarrow\int_1^{+\infty}\sin(\frac{\sin x}{x})dx$ 收敛 $\quad$ 而 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ 发散 $\Rightarrow\int_1^{+\infty}\sin(\frac{\sin x}{x})dx$ 条件收敛

4.(1) $\left|\int_0^{+\infty}\cos x\,dx\right|\leq2$ $\quad\frac{1}{1+x}$ 单调 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x}=0\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x}dx$ 收敛

$\left|\frac{\cos x}{1+x}\right|\geq\frac{\cos^2x}{1+x}=\frac{\cos2x+1}{1+x}$ 同理 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos2x}{1+x}dx$ 收敛 $\quad\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x}dx$ 发散 $\Rightarrow\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{1+x}\right|dx$ 发散

$\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x}dx$ 条件收敛

$\left|\frac{\sin x}{(1+x)^2}\right|\leq\frac{1}{(1+x)^2}$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}+\frac2x+1}=1$ $\quad\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛

$\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{(1+x)^2}dx$ 绝对收敛

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x}d\sin x=\frac{\sin x}{1+x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{(1+x)^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{(1+x)^2}dx$

5. ($\Rightarrow$) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow\forall c\in R$ 有 $\int_{-\infty}^c f(x)dx,\ \int_c^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

即 $\exists M_1$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists N_1>0$ 当 $x_1>N_1$ 有 $\left|\int_{-x_1}^c f(x)dx-M_1\right|<\varepsilon/2$

$\exists M_2$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists N_2>0$ 当 $x_2>N_2$ 有 $\left|\int_c^{x_2}f(x)dx-M_2\right|<\varepsilon/2$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$ $\quad M=M_1+M_2$ 当 $x>N$ 时

$\left|\int_{-x}^x f(x)dx-M\right|=\left|\int_{-x}^c f(x)dx+\int_c^x f(x)dx-M_1-M_2\right|\leq\left|\int_{-x}^c f(x)dx-M_1\right|+\left|\int_c^x f(x)dx-M_2\right|$

$\overset{f(x)\text{非负}}{\leq}\left|\int_{-x_1}^c f(x)dx-M_1\right|+\left|\int_c^{x_2}f(x)dx-M_2\right|<\varepsilon$ 即 V.P. $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

($\Leftarrow$) 由 V.P. $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow\lim\limits_{A\to+\infty}F(A)=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^A f(x)dx$ 存在且有限

由 Cauchy 准则 $\forall\varepsilon>0$ $\exists A_0>0$ 当 $A',A''>A_0$ 时 有 $|F(A')-F(A'')|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0$ 当 $A_2>A_1>A_0$ $\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x)dx\right|<\left|\int_{-A_2}^{A_2}f(x)dx-\int_{-A_1}^{A_1}f(x)dx\right|=|F(A_2)-F(A_1)|<\varepsilon\Rightarrow\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

同理可证 $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ 收敛 故 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

6. 换元积分上下限错误

8. $\int_0^{+\infty}g(f(x))dx=\int_0^{+\infty}\frac{f'(x)g(f(x))}{f'(x)}dx$ $\quad\int_0^{+\infty}f'(x)g(f(x))dx=\int_0^{+\infty}g(f(x))df(x)$

而 $\exists M>0$ s.t. $\forall X>0$ 有 $\left|\int_0^X g(x)dx\right|\leq M\Rightarrow\left|\int_0^{+\infty}f'(x)g(f(x))dx\right|\leq M$

$\frac{1}{f'(x)}$ 单调 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f'(x)}=0\Rightarrow\int_0^{+\infty}g(f(x))dx$ 收敛

习题八

1.(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx = -\int_1^{+\infty}\ln x\, d\frac{1}{1+x} = -\frac{\ln x}{1+x}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x)x}dx = \ln\frac{x}{x+1}\Big|_1^{+\infty} = \ln 2$

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{\frac32}} = \frac12\int_0^{+\infty}\frac{d(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^{\frac32}} \xlongequal{t=x^2+a^2} \frac12\int_{a^2}^{+\infty}\frac{dt}{t^{\frac32}} = \frac12\times(-2)\frac{1}{t^{\frac12}}\Big|_{a^2}^{+\infty} = \frac{1}{|a|}$

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac1x+(\frac1x)^2}} = \int_1^{+\infty}\frac{d(\frac1x)}{\sqrt{1+\frac1x+(\frac1x)^2}} \xlongequal{t=\frac1x} \int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+t+t^2}} = \int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(t+\frac12)^2+\frac34}} \xlongequal{m=\frac{2}{\sqrt3}(t+\frac12)} \int_{\frac{1}{\sqrt3}}^{\sqrt3}\frac{\frac{\sqrt3}{2}dm}{\frac{\sqrt3}{2}\sqrt{m^2+1}}$

$= \frac{2}{\sqrt3}\ln(m+\sqrt{m^2+1})\Big|_{\frac{1}{\sqrt3}}^{\sqrt3} = \ln(2+\sqrt3)-\frac12\ln3$ (Tips: $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$)

(4) $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx = -\int_1^{+\infty}\arctan x\, d\frac1x = -\frac{\arctan x}{x}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{\pi}{4}+\frac12\int_1^{+\infty}\frac{dx^2}{x^2(1+x^2)}$

$= \frac{\pi}{4}+\frac12\ln\frac{x^2}{1+x^2}\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4}+\frac12\ln2$

(5) $I_n = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{(1+x^2)^n}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{2nx^2}{(1+x^2)^{n+1}}dx = 2n\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}dx - 2n\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}dx = 2nI_n - 2nI_{n+1}$

$(2n-1)I_n = 2nI_{n+1}$ $\quad I_1 = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow I_n = \frac{2n-3}{2n-2}\times\frac{2n-5}{2n-4}\times\cdots\times\frac12 I_1 = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2}\ (n\ge2) \Rightarrow I_n = \begin{cases}\frac{\pi}{2} & n=1\\ \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2} & n\ge2\end{cases}$

2.(1) $\exists\varepsilon_0=\frac{\sqrt2-1}{2(1+e^{-\frac{\pi}{3}})}$ $\forall M>0$ $\exists x'=\frac{\pi}{4}+2[M+1]\pi,\ x''=\frac{\pi}{3}+2[M+1]\pi>M$

$\left|\int_{x'}^{x''}\frac{\sin x}{1+e^{-x}}dx\right| = \left|\int_{\frac{\pi}{4}+2[M+1]\pi}^{\frac{\pi}{3}+2[M+1]\pi}\frac{\sin x}{1+e^{-x}}dx\right| > \left|\frac{1}{1+e^{-\frac{\pi}{3}}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx\right| = \frac{\sqrt2-1}{2(1+e^{-\frac{\pi}{3}})} = \varepsilon_0$

由柯西准则 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{1+e^{-x}}dx$ 发散

(2) $x\to+\infty$ 时 $\frac{x^2+100x+1000}{x^4-x^3+1}>0$ $\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+100x+1000}{x^4-x^3+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{100}{x}+\frac{1000}{x^2}}{1-\frac1x+\frac{1}{x^4}} = 1$

而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛 由比较原则 $\int_1^{+\infty}\frac{x^2+100x+1000}{x^4-x^3+1}dx$ 收敛

$\int_0^{+\infty}\frac{x^2+100x+1000}{x^4-x^3+1}dx = \underbrace{\int_0^1\frac{x^2+100x+1000}{x^4-x^3+1}dx}_{\triangleq I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{x^2+100x+1000}{x^4-x^3+1}dx}_{\triangleq I_2}$

I_1 定积分，I_2 收敛 $\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{x^2+100x+1000}{x^4-x^3+1}dx$ 收敛

(3) $p=1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^6 x}{x}dx = \int_1^{+\infty}\ln^6 x\,d\ln x = \frac17\ln^7 x\Big|_1^{+\infty} = +\infty$ 发散

$0<p<1$ 时 $\frac{\ln^6 x}{x^p} > \frac{\ln^6 x}{x}$ 由比较原则 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln^6 x}{x^p}dx$ 发散

$p>1$ 时 设 $p>q>1$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^6 x}{x^p}\Big/\frac{1}{x^q} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^{\frac{p-q}{6}}}\right)^6$

而 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{p-q}{6}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{p-q}{6}x^{\frac{p-q}{6}}} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^6 x}{x^p} = 0$

而 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^q}dx$ 收敛 由比较原则 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^6 x}{x^p}dx$ 收敛

故 $0<p\le1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^6 x}{x^p}dx$ 发散；$p>1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^6 x}{x^p}dx$ 收敛

(4) $I = \int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q}dx = \int_0^1\frac{x^p}{1+x^q}dx + \int_1^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q}dx \triangleq I_1+I_2$ $\quad I_1$ 为定积分

对于 I_2：

$q-p>1$ 时 $\frac{x^p}{1+x^q} < \frac{x^p}{x^q} = \frac{1}{x^{q-p}}$ 而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{q-p}}dx$ 收敛 由比较原则 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q}dx$ 收敛

$q-p\le1$ 时 即 $p\ge q-1$ $\frac{x^p}{1+x^q} \ge \frac{x^{q-1}}{1+x^q} = \frac{1}{x+x^{1-q}}$ $\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+x^{1-q}}\Big/\frac1x = 1$

而 $\int_1^{+\infty}\frac1x dx$ 发散 由比较原则 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q}dx$ 发散

故 $q-p>1$ $\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q}dx$ 收敛；$q-p\le1$ $\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q}dx$ 发散

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}}dx = \int_0^1\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}}dx + \int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}}dx \triangleq I_1+I_2$ (I_1 是定积分)

对 I_2：$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}}\Big/\frac{1}{x^2} = 0$ 而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}}dx$ 收敛 故 $\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}}dx$ 收敛

(6) $\alpha=1$ 时 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x(1-\cos\frac1x)}{\frac1x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\frac12\frac{1}{x^2}}{\frac1x} = \frac12$ $\quad \int_1^{+\infty}\frac1x dx$ 发散 $\Rightarrow \int_1^{+\infty}x(1-\cos\frac1x)dx$ 发散

$0<\alpha<1$ 时 $x(1-\cos\frac1x)^\alpha > x(1-\cos\frac1x)$ ($x\to+\infty$ 时) $\Rightarrow \int_1^{+\infty}x(1-\cos\frac1x)^\alpha dx$ 发散

$\alpha>1$ 时 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x(1-\cos\frac1x)^\alpha}{(\frac1x)^\alpha} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot(\frac{1}{2x^2})^\alpha}{(\frac1x)^\alpha} = 0$ $\quad \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_1^{+\infty}x(1-\cos\frac1x)^\alpha dx$ 收敛

$\Rightarrow 0<\alpha\le1$ 时 $\int_1^{+\infty}x(1-\cos\frac1x)^\alpha dx$ 发散；$\alpha>1$ 时 $\int_1^{+\infty}x(1-\cos\frac1x)^\alpha dx$ 收敛

(7) $\ln(\cos\frac1x+\sin^p\frac1x) = \ln(1-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})+\frac{1}{x^p}+o(\frac{1}{x^p})) = -\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^p}+o(\frac{1}{x^q})+o(-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^p}+o(\frac{1}{x^q}))$

$= -\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^p}+o(\frac{1}{x^q})$ $\quad q=\min\{2,p\}$ $\quad \int_1^{+\infty}-\frac{1}{2x^2}dx$ 收敛

① $p\le1$ 时 $\int_1^{+\infty}[\frac{1}{x^p}+o(\frac{1}{x^q})]dx$ 发散 $\Rightarrow \int_1^{+\infty}\ln(\cos\frac1x+\sin^p\frac1x)dx$ 发散

② $p>1$ 时 $\int_1^{+\infty}[\frac{1}{x^p}+o(\frac{1}{x^q})]dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_1^{+\infty}\ln(\cos\frac1x+\sin^p\frac1x)dx$ 收敛

3.(1) $\int_2^{+\infty}\sin x\,dx = \lim_{x\to+\infty}\int_2^x\sin x\,dx = \lim_{x\to+\infty}(\cos2-\cos x)\le2$

$\frac1x$ 单调 $\lim_{x\to+\infty}\frac1x=0 \Rightarrow \int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛

$\frac{1}{\ln x}$ 单调 $\frac{1}{\ln x}\in(0,\frac{1}{\ln2}]$ $\Rightarrow \int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln x}dx$ 收敛

$(x\to+\infty)$ $\left|\frac{\sin x}{x\ln x}\right| \ge \frac{\sin^2 x}{x\ln x} = \frac{1}{2x\ln x}-\frac{\cos2x}{2x\ln x}$ 同理可得 $\int_2^{+\infty}\frac{\cos2x}{2x\ln x}dx$ 收敛

$\int_2^{+\infty}\frac{1}{2x\ln x}dx = \int_2^{+\infty}\frac{1}{2\ln x}d\ln x = \frac12\ln\ln x\Big|_2^{+\infty} = +\infty$ 发散 $\Rightarrow \int_2^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x\ln x}\right|dx$ 发散

$\Rightarrow \int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln x}dx$ 条件收敛

(2) $\int_1^{+\infty}\cos x\,dx = \lim_{x\to+\infty}\int_1^x\cos x\,dx = \lim_{x\to+\infty}|\sin x-\sin1|\le2$

$\frac{1}{x^\alpha}$ 单调 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha}=0$ $(\alpha>0) \Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ 收敛

① $\alpha>1$ $\left|\frac{\cos x}{x^\alpha}\right| \le \frac{1}{x^\alpha}$ $\quad \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x^\alpha}\right|dx$ 收敛

② $0<\alpha<1$ $\left|\frac{\cos x}{x^\alpha}\right| \ge \frac{\cos^2 x}{x^\alpha} = \frac{\cos2x}{x^\alpha}+\frac{1}{2x^\alpha}$ 同理 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos2x}{x^\alpha}dx$ 收敛

而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^\alpha}dx$ 发散 $\Rightarrow \int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos2x}{x^\alpha}\right|dx$ 发散

故 $\alpha>1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ 绝对收敛；$0<\alpha<1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ 条件收敛

(3) ① $\alpha>1$ 时 $\left|\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}\right| \le \frac{1}{x^\alpha-1}$ $\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^\alpha-1}}{\frac{1}{x^\alpha}} = 1$ $\quad \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}dx$ 绝对收敛

② $0<\alpha\le1$ 时 $\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x} = \frac{\sin x}{x^\alpha}-\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha+\sin x)}$ $\quad \int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ 收敛

$\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha+\sin x)} \ge \frac{1-\cos2x}{2x^\alpha(x^\alpha+1)} = \frac{1}{2x^\alpha(x^\alpha+1)}-\frac{\cos2x}{2x^\alpha(x^\alpha+1)}$

i) $0<\alpha\le\frac12$ 时 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2x^\alpha(x^\alpha+1)}}{\frac{1}{x^{2\alpha}}} = \frac12$ $\quad \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{2\alpha}}dx$ 发散 $\Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^\alpha(x^\alpha+1)}dx$ 发散

$\left|\int_1^{+\infty}\cos2x\,dx\right|\le2$ $\quad \frac{1}{2x^\alpha(x^\alpha+1)}$ 单调 $(x\to+\infty)$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^\alpha(x^\alpha+1)} = 0 \Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{\cos2x}{2x^\alpha(x^\alpha+1)}dx$ 收敛

$\Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}dx$ 发散

ii) $\frac12<\alpha\le1$ 时 $\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha+\sin x)} \le \frac{1}{x^\alpha(x^\alpha-1)} \sim \frac{1}{x^{2\alpha}}$ $\quad \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{2\alpha}}dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}dx$ 收敛

$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}\right| \ge \frac{\sin^2 x}{x^\alpha+1} = \frac{1-\cos2x}{2(x^\alpha+1)} = \frac{1}{2(x^\alpha+1)}-\frac{\cos2x}{2(x^\alpha+1)}$

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2(x^\alpha+1)}dx$ 发散 $\quad \int_1^{+\infty}\frac{\cos2x}{2(x^\alpha+1)}dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}\right|dx$ 发散

故 $\alpha>1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}dx$ 绝对收敛；$\frac12<\alpha\le1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}dx$ 条件收敛；$0<\alpha\le\frac12$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}dx$ 发散

(4) $\sin(\frac{\sin x}{x}) = \frac{\sin x}{x}-\frac16(\frac{\sin x}{x})^3+o(\frac{1}{x^3}) = \frac{\sin x}{x}+o(\frac{1}{x^2})$

$\left|\int_1^{+\infty}\sin x\,dx\right|\le2$ $\quad \frac1x$ 单调 $\lim_{x\to+\infty}\frac1x=0 \Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛 $\quad \int_1^{+\infty}o(\frac{1}{x^2})dx$ 收敛

$\Rightarrow \int_1^{+\infty}\sin(\frac{\sin x}{x})dx$ 收敛 而 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ 发散 $\Rightarrow \int_1^{+\infty}\sin(\frac{\sin x}{x})dx$ 条件收敛

4.(1) $\left|\int_0^{+\infty}\cos x\,dx\right|\le2$ $\quad \frac{1}{1+x}$ 单调 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x}=0 \Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x}dx$ 收敛

$\left|\frac{\cos x}{1+x}\right| \ge \frac{\cos^2 x}{1+x} = \frac{\cos2x+1}{1+x}$ 同理 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos2x}{1+x}dx$ 收敛 $\quad \int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x}dx$ 发散 $\Rightarrow \int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{1+x}\right|dx$ 发散

$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x}dx$ 条件收敛

$\left|\frac{\sin x}{(1+x)^2}\right| \le \frac{1}{(1+x)^2}$ $\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}+\frac2x+1} = 1$ $\quad \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛

$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{(1+x)^2}dx$ 绝对收敛

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x}dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x}d\sin x = \frac{\sin x}{1+x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{(1+x)^2}dx = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{(1+x)^2}dx$

5. (⇒) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \forall c\in R$ 有 $\int_{-\infty}^c f(x)dx$，$\int_c^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

即 $\exists M_1$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists N_1>0$ 当 $x_1>N_1$ 有 $\left|\int_{-x_1}^c f(x)dx-M_1\right|<\varepsilon/2$

$\exists M_2$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists N_2>0$ 当 $x_2>N_2$ 有 $\left|\int_c^{x_2}f(x)dx-M_2\right|<\varepsilon/2$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$ $\quad M=M_1+M_2$ 当 $x>N$ 时

$\left|\int_{-x}^x f(x)dx-M\right| = \left|\int_{-x}^c f(x)dx+\int_c^x f(x)dx-M_1-M_2\right| \le \left|\int_{-x}^c f(x)dx-M_1\right|+\left|\int_c^x f(x)dx-M_2\right|$

$\overset{f(x)非负}{\le} \left|\int_{-x_1}^c f(x)dx-M_1\right|+\left|\int_c^{x_2}f(x)dx-M_2\right| < \varepsilon$ 即 V.P. $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

(⇐) 由 V.P. $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{A\to+\infty}F(A) = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^A f(x)dx$ 存在且有限

由 Cauchy 准则 $\forall\varepsilon>0$ $\exists A_0>0$ 当 $A',A''>A_0$ 时 有 $|F(A')-F(A'')|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0$ 当 $A_2>A_1>A_0$ $\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x)dx\right| < \left|\int_{-A_2}^{A_2}f(x)dx-\int_{-A_1}^{A_1}f(x)dx\right| = |F(A_2)-F(A_1)|<\varepsilon \Rightarrow \int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

同理可证 $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ 收敛 故 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

6. 换元积分上下限错误

8. $\int_0^{+\infty}g(f(x))dx = \int_0^{+\infty}\frac{f'(x)g(f(x))}{f'(x)}dx$ $\quad \int_0^{+\infty}f'(x)g(f(x))dx = \int_0^{+\infty}g(f(x))df(x)$

而 $\exists M>0$ s.t. $\forall X>0$ 有 $\left|\int_0^X g(x)dx\right|\le M \Rightarrow \left|\int_0^{+\infty}f'(x)g(f(x))dx\right|\le M$

$\frac{1}{f'(x)}$ 单调 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f'(x)}=0 \Rightarrow \int_0^{+\infty}g(f(x))dx$ 收敛

9. $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^{2n\pi+m} f(x)dx = \int_1^{2\pi} f(x)dx + \int_{2\pi}^{2n\pi} f(x)dx + \lim\limits_{n\to+\infty}\int_{2n\pi}^{2n\pi+m} f(x)dx$

$= \int_1^{2\pi} f(x)dx + \int_0^m f(x)dx + (n-1)\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_1^{2\pi} f(x)dx + \int_0^m f(x)dx \quad (0\le m<2\pi)$

由 $f(x)$ 连续 $\Rightarrow f(x)\in R[1,2\pi]$，$f(x)\in R[0,m] \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx = C \triangleq \int_1^{2\pi} f(x)dx + \int_0^m f(x)dx$（$C$ 为常数）

故 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 有界 而 $x^{-\alpha}$ 单调 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\alpha}=0 \Rightarrow \int_1^{+\infty} x^{-\alpha} f(x)dx$ 收敛

10. 反证法：假设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ne 0$ 即 $\exists \varepsilon_0>0$ $\forall X>0$ $\exists x_0>X$ 有 $|f(x_0)|\ge \varepsilon_0/\delta$

由 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续 对上述 ε_0 $\exists\delta>0$ 当 $|x-x_0|<\delta$ 时 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon_0/\delta$

$|f(x)| = |f(x)-f(x_0)+f(x_0)| \ge |f(x_0)| - |f(x)-f(x_0)| > \varepsilon_0/\delta$

$\forall x\in[x_0, x_0+\delta]$ $f(x)$ 与 $f(x_0)$ 同号，否则 $|f(x)-f(x_0)| = |f(x_0)|+|f(x_0)| > \varepsilon_0/2$ 矛盾.

不妨设 $f(x), f(x_0)>0$ 则 $f(x)\ge \varepsilon_0/\delta$

对上述 ε_0，$\forall X>0$ 当 $x_0>X$ 时 有 $\left|\int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x)dx\right| \ge \varepsilon_0/\delta\cdot\delta = \varepsilon_0$

由柯西收敛准则 $\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)dx$ 发散 矛盾 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

11. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调递增，先证 $f(x)\le 0$ 反证法：假设 $\exists x_0$ s.t. $f(x_0)>0$

则当 $x>x_0$ 时 $f(x)\ge f(x_0)>0$ $\int_a^{+\infty} f(x_0)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散 矛盾!

由 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \forall\varepsilon>0$ $\exists N>a$ 当 $x', x''>N$ 有 $\left|\int_{x'}^{x''} f(t)dt\right|<\varepsilon$

当 $x>N$ 有 $|f(x)x| \le \left|\int_x^{2x} f(t)dt\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$

12. $I(s)=\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{e^{s_0x}}\cdot\frac{1}{e^{(s-s_0)x}}dx$ 由题意 $\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{e^{s_0x}}dx$ 收敛

$\frac{1}{e^{(s-s_0)x}}$ 单调 $0<\frac{1}{e^{(s-s_0)x}}<1 \Rightarrow I(s)$ 在 $s>s_0$ 时也收敛

13. 设 $f^+(x)=\begin{cases} f(x) & f(x)>0\\ 0 & f(x)\le 0\end{cases}$ $\quad f^-(x)=\begin{cases} f(x) & f(x)<0\\ 0 & f(x)\ge 0\end{cases}$

$\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 条件收敛 $\Rightarrow \int_0^{+\infty} f^-(x)dx$ $\int_0^{+\infty} f^+(x)dx$ 发散

$f(x)>0$ 时 $|g(x)|\ge g(x)\ge f^+(x)$ $\quad f(x)\le 0$ 时 $|g(x)|\ge 0 = f^+(x) \Rightarrow \forall x$ 有 $|g(x)|\ge f^+(x)$

由比较原则 $\int_0^{+\infty}|g(x)|dx$ 发散

14. (1) $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} \xlongequal{t=\sqrt{1-x}} \int_1^0 \frac{-2t\,dt}{(t^2+1)t} = \int_0^1 \frac{2dt}{t^2+1} = 2\arctan t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$

(2) 被积函数有2个瑕点 ±1 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim\limits_{b\to0+0}\left(\arcsin x\Big|_{-1+b}^0 + \arcsin x\Big|_0^{1-b}\right) = \pi$

(3) $\int_0^1 x\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx \xlongequal{x=(\sin t)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^2\frac{\sin t}{\cos t}2\sin t\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^4 t\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 dt$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}(\cos^2 2t - 2\cos 2t + 1)dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{8}(\cos 4t+1)dt - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos 2t\,dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}dt = \frac{3}{8}\pi$

(4) $\int_0^1 x^n\ln^n x\,dx = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \ln^n x\,dx^{n+1} = \frac{1}{n+1}\ln^n x\cdot x^{n+1}\Big|_0^1 - \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^n\ln^{n-1}x\,dx = -\frac{n}{(n+1)^2}\int_0^1 \ln^{n-1}x\,dx^{n+1}$

$= \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\int_0^1 x^n\ln^{n-2}dx = \cdots = (-1)^n\frac{n(n-1)\cdots1}{(n+1)^n}\int_0^1 x^n dx = (-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$

(5) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = 2\int_0^1 \ln x\,dx^{\frac{1}{2}} = 2\ln x\cdot x^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{x}dx = -4x^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1 = -4$

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan x}\,dx \xlongequal{t=\sqrt{\tan x}} \int_0^{+\infty} t\,d\arctan t^2 = \int_0^{+\infty}\frac{2t^2}{1+t^4}dt = \int_0^{+\infty}\frac{t^2+1+t^2-1}{1+t^4}dt = \int_0^{+\infty}\frac{t^2+1}{t^4+1}dt + \int_0^{+\infty}\frac{t^2-1}{t^4+1}dt$

$= \int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{t^2}+1}{t^2+\frac{1}{t^2}}dt + \int_0^{+\infty}\frac{1-\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}dt = \int_0^{+\infty}\frac{d(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+2} + \int_0^{+\infty}\frac{d(t+\frac{1}{t})}{(t+\frac{1}{t})^2-2}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}(t-\frac{1}{t})\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{t+\frac{1}{t}-\sqrt{2}}{t+\frac{1}{t}+\sqrt{2}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

15. (1) $x=0, x=\pi$ 为瑕点 且当 $x\in(0,\delta]\cup[\pi-\delta,\pi)$ 时 $\frac{1}{\sin x}\ge 0$

当 $x\in(0,\delta]\cup[\pi-\delta,\pi)$ 时 $\frac{1}{\sin x}\ge\frac{1}{x}$ 而 $\int_0^{\pi}\frac{1}{x}dx$ 发散 $\Rightarrow \int_0^{\pi}\frac{1}{\sin x}dx$ 发散

(2) $x=0, x=\frac{\pi}{2}$ 为瑕点 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^\alpha x\cos^\beta x} = \int_0^1\frac{1}{\sin^\alpha x\cos^\beta x}dx + \int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^\alpha x\cos^\beta x}dx$

$\lim\limits_{x\to0+0}\frac{\frac{1}{\sin^\alpha x\cos^\beta x}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim\limits_{x\to0+0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^\alpha\frac{1}{\cos^\beta x}=1$ 而 $\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}dx\begin{cases}\alpha\ge1 & 时发散\\ \alpha<1 & 时收敛\end{cases} \Rightarrow \int_0^1\frac{1}{\sin^\alpha x\cos^\beta x}dx\begin{cases}\alpha\ge1 & 时发散\\ \alpha<1 & 时收敛\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{1}{\sin^\alpha x\cos^\beta x}}{\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^\beta}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}\right)^\beta\frac{1}{\sin^\alpha x}=1$ 而 $\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^\beta}dx\begin{cases}\beta\ge1 & 时发散\\ \beta<1 & 时收敛\end{cases} \Rightarrow \int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^\alpha x\cos^\beta x}dx\begin{cases}\beta\ge1 & 时发散\\ \beta<1 & 时收敛\end{cases}$

故 $\alpha<1, \beta<1$ 时 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^\alpha x\cos^\beta x}dx$ 收敛 其余情况发散.

(3) $\int_0^{\frac{1}{e}}[\ln(\ln\frac{1}{x})]^p dx \xlongequal{t=\ln\frac{1}{x}} \int_{\ln2}^{+\infty}\frac{(\ln t)^p}{e^t}dt = \int_{\ln2}^1\frac{(\ln t)^p}{e^t}dt + \int_1^{+\infty}\frac{(\ln t)^p}{e^t}dt \triangleq I_1+I_2$ （I_1 是定积分）

$\frac{(\ln t)^p}{e^t}\le\frac{(\frac{1}{e}t)^p}{e^t}$ 而 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{(\frac{1}{e}t)^p}{e^t}\Big/\frac{1}{t^2}=0$ 而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ 收敛 $\Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{(\frac{1}{e}t)^p}{e^t}dt$ 收敛

$\Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{(\ln t)^p}{e^t}$ 收敛 $\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{e}}[\ln(\ln\frac{1}{x})]^p dx$ 收敛

(4) $\int_{-1}^1\frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^1\sin\frac{1}{x^2}d\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^0\sin\frac{1}{x^2}dx - \frac{1}{2}\int_0^1\sin\frac{1}{x^2}dx$

$\xlongequal{t=\frac{1}{x^2}} -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+\infty}\sin t\,dt + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\sin t\,dt = \frac{1}{2}\left(\cos t\Big|_{-1}^{+\infty} - \cos t\Big|_1^{+\infty}\right)$

而 $\lim\limits_{t\to+\infty}\cos t$ 不存在 $\Rightarrow \int_{-1}^1\frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx$ 发散

(5) $\int_0^1\frac{\sin\frac{1}{x}\,dx}{x^{\frac{1}{2}}\ln(1+\frac{1}{x})} \xlongequal{t=\frac{1}{x}} \int_1^{+\infty}\frac{\sin t\,dt}{t^{\frac{3}{2}}\ln(1+t)}dt$ $\quad\left|\int_1^{+\infty}\sin t\,dt\right|\le 2$

$[t^{\frac{3}{2}}\ln(1+t)]'\ge0 \Rightarrow \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}\ln(1+t)}$ 单调 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}\ln(1+t)}=0 \Rightarrow \int_0^1\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^{\frac{1}{2}}\ln(1+\frac{1}{x})}dx$ 收敛

(6) $\int_0^1 x^p(\ln\frac{1}{x})^q dx = \int_1^{+\infty}\frac{(\ln t)^q}{t^{p+2}}dt \Rightarrow p>-1$ 时 $\int_0^1 x^p(\ln\frac{1}{x})^q dx$ 收敛，其余情况发散

(7) $\int_0^1\frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^2}}dx \xlongequal{x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin t)^\alpha}{\cos t}\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^\alpha dt$ $\quad\alpha\ge0$ 时定积分

$\alpha<0$ 时 $x=0$ 是瑕点 $\lim\limits_{x\to0+0}\frac{\frac{1}{\sin^{-\alpha}x}}{(\frac{1}{x})^{-\alpha}}=1$ $\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x^\alpha}dx\begin{cases}\alpha\le-1 & 时发散\\ \alpha>-1 & 时收敛\end{cases}$

$\Rightarrow -1<\alpha<0$ 时 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha x\,dx$ 收敛 综上 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^\alpha dt$ 在 $\alpha>-1$ 时收敛，$\alpha\le-1$ 时发散

16. (1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x^p}dx = \int_0^1\frac{\sin\alpha x}{x^p}dx + \int_1^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x^p}dx$

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x^p}dx$，$\left|\int_1^{+\infty}\sin\alpha x\,dx\right|\le2$ $\frac{1}{x^p}$ 单调 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0 \Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x^p}dx$ 收敛

$\int_0^1\frac{\sin\alpha x}{x^p}dx$：① $\alpha=0$ 时 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x^p}dx=0$ 收敛

② $\alpha\ne0$ 时 $\frac{\sin\alpha x}{x^p}$ 在 $(0,1]$ 不变号 $\lim\limits_{x\to0+0}\frac{\sin\alpha x}{x^p}\Big/\frac{1}{x^{p-1}}=\alpha$

而 $\int_0^1\frac{1}{x^{p-1}}dx\begin{cases}p\ge2 & 发散\\ p<2 & 收敛\end{cases} \Rightarrow \int_0^1\frac{\sin\alpha x}{x^p}dx\begin{cases}p\ge2 & 发散\\ p<2 & 收敛\end{cases}$

综上 $\alpha=0$ 时或 $p<2$ 时收敛，$p\ge2$ 发散

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{x|\ln x|^\alpha}{x^2+1}dx = \int_0^1\frac{x|\ln x|^\alpha}{x^2+1}dx + \int_1^{+\infty}\frac{x|\ln x|^\alpha}{x^2+1}dx = \int_0^1\frac{|\ln x|^\alpha}{x+\frac{1}{x}}dx + \int_1^{+\infty}\frac{x|\ln x|^\alpha}{x^2+1}dx = \int_1^{+\infty}\frac{(\ln t)^\alpha}{t(t^2+1)}dt + \int_1^{+\infty}\frac{x|\ln x|^\alpha}{x^2+1}dx$

$= \int_1^{+\infty}(t+\frac{1}{t})\frac{(\ln t)^\alpha}{t^2+1}dt = \int_1^{+\infty}\frac{(\ln t)^\alpha}{t}dt = \int_1^{+\infty}(\ln t)^\alpha d\ln t = \begin{cases}\frac{1}{\alpha+1}\ln t\Big|_1^{+\infty}=+\infty & \alpha\ne-1\\ \ln\ln t\Big|_1^{+\infty}=+\infty & \alpha=-1\end{cases}$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{x|\ln x|^\alpha}{x^2+1}dx$ 发散

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{(e^{\frac{1}{x}}-1)^\alpha}{[\ln(1+\frac{1}{x})]^\beta}dx = \int_0^1\frac{(e^t-1)^\alpha}{[\ln(1+t)]^\beta}\frac{1}{t^2}dt$ $\quad t=0$ 是瑕点 $\lim\limits_{t\to0+0}\frac{(e^t-1)^\alpha}{[\ln(1+t)]^\beta}\frac{1}{t^2}\Big/\frac{1}{t^{\beta+2-\alpha}}=1$

$\beta-\alpha+2\ge1$ 时 即 $\beta-\alpha\ge-1$ $\int_0^1\frac{1}{t^{\beta-\alpha+2}}dt$ 发散 $\Rightarrow \int_0^1\frac{(e^t-1)^\alpha}{[\ln(1+t)]^\beta}\frac{1}{t^2}dt$ 发散

$\beta-\alpha+2<1$ 时 即 $\beta-\alpha\le-1$ $\int_0^1\frac{1}{t^{\beta-\alpha+2}}dt$ 收敛 $\Rightarrow \int_0^1\frac{(e^t-1)^\alpha}{[\ln(1+t)]^\beta}\frac{1}{t^2}dt$ 收敛

(4) $\int_0^{+\infty}x\sin e^x dx \xlongequal{t=e^x} \int_1^{+\infty}\frac{\ln t\sin t}{t}dt$ $\quad\left|\int_1^{+\infty}\sin t\,dt\right|\le2$

$t\to+\infty$ 时 $\frac{\ln t}{t}$ 单调 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0 \Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{\ln t\sin t}{t}dt$ 收敛 $\Rightarrow \int_0^{+\infty}x\sin e^x dx$ 收敛

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}dx = \int_0^1\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}dx + \int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}dx = \int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^{2-p}}dx + \int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}dx$

① $0<p\le1$ 时 $\quad\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}dx = \int_1^{+\infty}\frac{(1-\frac{1}{x^2})\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p-x^{p-2}}dx$

$\left|\int_1^{+\infty}(1-\frac{1}{x^2})\sin(x+\frac{1}{x})dx\right| = \left|\int_1^{+\infty}\sin(x+\frac{1}{x})d(x+\frac{1}{x})\right|\le2$

设 $h(x)=x^p-x^{p-2}$ $\quad h'(x)=px^{p-1}-(p-2)x^{p-3}=x^{p-3}(px^2-(p-2))>0$ $(x\to+\infty) \Rightarrow h(x)$ 单调↑

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{h(x)}=0 \Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}dx$ 收敛

② $p>1$ 时 $\quad\left|\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\right|\le\frac{1}{x^p}$ 而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}dx$ 绝对收敛

③ $p\le0$ 易知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}dx$ 发散

对于 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^{2-p}}dx$ ① $0<2-p\le1$ 即 $1\le p<2$ 时 收敛

② $p<1$ 时 绝对收敛

③ $p\ge2$ 时 发散

故 $0<p<2$ 时 原积分收敛，其余情况发散

17. (1) ① $q=1$ 时 $\int_0^{+\infty}|\ln x|^p\frac{\sin x}{x^q}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 + \int_1^2 + \int_2^{+\infty} \triangleq I_1+I_2+I_3+I_4$

I_1：$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{\sin x}{x}|\ln x|^p}{\sqrt{x}}=0$ $\quad\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{x}\,dx$ 定积分 $\Rightarrow I_1$ 收敛

I_4：$\left|\int_2^{+\infty}\sin x\,dx\right|\le2$ $\quad\frac{|\ln x|^p}{x}\downarrow$ $(x\to+\infty)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|\ln x|^p}{x}=0 \Rightarrow I_4$ 收敛

I_2, I_3 $\quad|\ln x|^p = |\ln(1+x-1)|^p \sim |x-1|^p \Rightarrow p>-1$ 时收敛 $p\le-1$ 时发散

② 同理讨论 $q<0$ $\quad 0<q<1$

$1<q<2$ $\quad q\ge2$

9. $\int_1^{+\infty}f(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\int_1^{2n\pi+m}f(x)dx=\int_1^{2\pi}f(x)dx+\int_{2\pi}^{2n\pi}f(x)dx+\lim_{n\to+\infty}\int_{2n\pi}^{2n\pi+m}f(x)dx$

$=\int_1^{2\pi}f(x)dx+\int_0^m f(x)dx+(n-1)\int_0^{2\pi}f(x)dx=\int_1^{2\pi}f(x)dx+\int_0^m f(x)dx \quad (0\le m<2\pi)$

由 $f(x)$ 连续 $\Rightarrow f(x)\in R[1,2\pi]$, $f(x)\in R[0,m] \Rightarrow \int_1^{+\infty}f(x)dx=C\triangleq\int_1^{2\pi}f(x)dx+\int_0^m f(x)dx$ (C为常数)

故 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 有界 而 $x^{-\alpha}$ 单调 $\lim_{x\to+\infty}x^{-\alpha}=0 \Rightarrow \int_1^{+\infty}x^{-\alpha}f(x)dx$ 收敛

10. 反证法：假设 $\lim_{x\to+\infty}f(x)\neq0$ 即 $\exists\varepsilon_0>0$ $\forall X>0$ $\exists x_0>X$ 有 $|f(x_0)|\ge\varepsilon_0$

由 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续 对上述 ε_0 $\exists\delta>0$ 当 $|x-x_0|<\delta$ 时 $|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon_0}{2}$

$|f(x)|=|f(x)-f(x_0)+f(x_0)|\ge|f(x_0)|-|f(x)-f(x_0)|>\frac{\varepsilon_0}{2}$

$\forall x\in[x_0,x_0+\delta]$ $f(x)$ 与 $f(x_0)$ 同号，否则 $|f(x)-f(x_0)|=|f(x)|+|f(x_0)|>\frac{\varepsilon_0}{2}$ 矛盾

不妨设 $f(x),f(x_0)>0$ 则 $f(x)\ge\frac{\varepsilon_0}{2}$

对上述 ε_0, $\forall X>0$ 当 $x_0>X$ 时 有 $\left|\int_{x_0}^{x_0+\delta}f(x)dx\right|\ge\frac{\varepsilon_0}{2}\cdot\delta=\varepsilon_1$

由柯西收敛准则 $\Rightarrow \int_0^{+\infty}f(x)dx$ 发散 矛盾 $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

11. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调递增，先证 $f(x)\le0$ 反证法：假设 $\exists x_0$ s.t. $f(x_0)>0$

则当 $x>x_0$ 时 $f(x)\ge f(x_0)>0$ $\int_a^{+\infty}f(x_0)dx$ 发散 $\Rightarrow\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散 矛盾！

由 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow\forall\varepsilon>0$ $\exists N>a$ 当 $x',x''>N$ 有 $\left|\int_{x'}^{x''}f(t)dt\right|<\varepsilon$

当 $x>N$ 有 $|f(x)x|\le\left|\int_x^{2x}f(t)dt\right|<\varepsilon\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0$

12. $I(s)=\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{e^{s_0x}}\cdot\frac{1}{e^{(s-s_0)x}}dx$ 由题意 $\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{e^{s_0x}}dx$ 收敛

$e^{(s-s_0)x}$ 单调 $0<\frac{1}{e^{(s-s_0)x}}<1\Rightarrow I(s)$ 在 $s>s_0$ 时也收敛

13. 设 $f^+(x)=\begin{cases}f(x) & f(x)>0\\0 & f(x)\le0\end{cases}$ $\quad f^-(x)=\begin{cases}f(x) & f(x)<0\\0 & f(x)\ge0\end{cases}$

$\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 条件收敛 $\Rightarrow\int_0^{+\infty}f^-(x)dx$ $\int_0^{+\infty}f^+(x)dx$ 发散

$f(x)>0$ 时 $|g(x)|\ge g(x)\ge f^+(x)$ $\quad f(x)\le0$ 时 $|g(x)|\ge0=f^+(x)\Rightarrow\forall x$ 有 $|g(x)|\ge f^+(x)$

由比较原则 $\int_0^{+\infty}|g(x)|dx$ 发散

14.(1) $\int_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}\xlongequal{t=\sqrt{1-x}}\int_1^0\frac{-2tdt}{(t^2+1)t}=\int_0^1\frac{2dt}{t^2+1}=2\arctan t\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$

(2) 被积函数有2个瑕点 ±1 $\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^0\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{\delta\to0}\left(\arcsin x\Big|_{-1+\delta}^0+\arcsin x\Big|_0^{1-\delta}\right)=\pi$

(3) $\int_0^1x\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx\xlongequal{x=(\sin t)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^2\frac{\sin t}{\cos t}2\sin t\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^4t\,dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos2t}{2}\right)^2dt$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac14(\cos^22t-2\cos2t+1)dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac18(\cos4t+1)dt-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac12\cos2t\,dt+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac14dt=\frac38\pi$

(4) $\int_0^1x^n\ln^nx\,dx=\frac{1}{n+1}\int_0^1\ln^nx\,dx^{n+1}=\frac{1}{n+1}\ln^nx\cdot x^{n+1}\Big|_0^1-\frac{n}{n+1}\int_0^1x^n\ln^{n-1}x\,dx=-\frac{n}{(n+1)^2}\int_0^1\ln^{n-1}x\,dx^{n+1}$

$=\frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\int_0^1x^n\ln^{n-2}x\,dx=\cdots=(-1)^n\frac{n(n-1)\cdots1}{(n+1)^n}\int_0^1x^ndx=(-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$

(5) $\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=2\int_0^1\ln x\,dx^{\frac12}=2\ln x\cdot x^{\frac12}\Big|_0^1-2\int_0^1x^{\frac12}\frac1x dx=-4x^{\frac12}\Big|_0^1=-4$

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan x}\,dx\xlongequal{t=\sqrt{\tan x}}\int_0^{+\infty}t\,d\arctan t^2=\int_0^{+\infty}\frac{2t^2}{1+t^4}dt=\int_0^{+\infty}\frac{t^2+1+t^2-1}{1+t^4}dt=\int_0^{+\infty}\frac{t^2+1}{t^4+1}dt+\int_0^{+\infty}\frac{t^2-1}{t^4+1}dt$

$=\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{t^2}+1}{t^2+\frac{1}{t^2}}dt+\int_0^{+\infty}\frac{1-\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}dt=\int_0^{+\infty}\frac{d(t-\frac1t)}{(t-\frac1t)^2+2}+\int_0^{+\infty}\frac{d(t+\frac1t)}{(t+\frac1t)^2-2}$

$=\frac{1}{\sqrt2}\arctan\frac{1}{\sqrt2}(t-\frac1t)\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2\sqrt2}\ln\frac{t+\frac1t-\sqrt2}{t+\frac1t+\sqrt2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt2}$

15.(1) $x=0$, $x=\pi$ 为瑕点 且当 $x\in(0,\delta]\cup[\pi-\delta,\pi)$ 时 $\frac{1}{\sin x}\ge0$

当 $x\in(0,\delta]\cup[\pi-\delta,\pi)$ 时 $\frac{1}{\sin x}\ge\frac1x$ 而 $\int_0^\pi\frac1x dx$ 发散 $\Rightarrow\int_0^\pi\frac{1}{\sin x}dx$ 发散

(2) $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ 为瑕点 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^\alpha x\cos^\beta x}=\int_0^1\frac{1}{\sin^\alpha x\cos^\beta x}dx+\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^\alpha x\cos^\beta x}dx$

$\lim_{x\to0+0}\frac{\frac{1}{\sin^\alpha x\cos^\beta x}}{\frac{1}{x^\alpha}}=\lim_{x\to0+0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^\alpha\frac{1}{\cos^\beta x}=1$ 而 $\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}dx$ $\begin{cases}\alpha\ge1 & 时发散\\\alpha<1 & 时收敛\end{cases}\Rightarrow\int_0^1\frac{1}{\sin^\alpha x\cos^\beta x}dx$ $\begin{cases}\alpha\ge1 & 时发散\\\alpha<1 & 时收敛\end{cases}$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{1}{\sin^\alpha x\cos^\beta x}}{\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^\beta}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}\right)^\beta\frac{1}{\sin^\alpha x}=1$ 而 $\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^\beta}dx$ $\begin{cases}\beta\ge1 & 时发散\\\beta<1 & 时收敛\end{cases}\Rightarrow\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^\alpha x\cos^\beta x}dx$ $\begin{cases}\beta\ge1 & 时发散\\\beta<1 & 时收敛\end{cases}$

故 $\alpha<1,\beta<1$ 时 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^\alpha x\cos^\beta x}dx$ 收敛 其余情况发散.

(3) $\int_0^{\frac12}[\ln(\ln\frac1x)]^pdx\xlongequal{t=\ln\frac1x}\int_{\ln2}^{+\infty}\frac{(\ln t)^p}{e^t}dt=\int_{\ln2}^1\frac{(\ln t)^p}{e^t}dt+\int_1^{+\infty}\frac{(\ln t)^p}{e^t}dt\triangleq I_1+I_2$ (I_1是定积分)

$\frac{(\ln t)^p}{e^t}\le\frac{(\frac12t)^p}{e^t}$ 而 $\lim_{t\to+\infty}\frac{(\frac12t)^p}{e^t}\Big/\frac{1}{t^2}=0$ 而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ 收敛 $\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{(\frac12t)^p}{e^t}dt$ 收敛

$\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{(\ln t)^p}{e^t}$ 收敛 $\Rightarrow\int_0^{\frac12}[\ln(\ln\frac1x)]^pdx$ 收敛

(4) $\int_{-1}^1\frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx=-\frac12\int_{-1}^1\sin\frac{1}{x^2}d\frac{1}{x^2}=-\frac12\int_{-1}^0\sin\frac{1}{x^2}dx-\frac12\int_0^1\sin\frac{1}{x^2}dx$

$\xlongequal{t=\frac{1}{x^2}}-\frac12\int_{-1}^{+\infty}\sin t\,dt+\frac12\int_1^{+\infty}\sin t\,dt=\frac12\left(\cos t\Big|_{-1}^{+\infty}-\cos t\Big|_1^{+\infty}\right)$

而 $\lim_{t\to+\infty}\cos t$ 不存在 $\Rightarrow\int_{-1}^1\frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx$ 发散

(5) $\int_0^1\frac{\sin\frac1x dx}{x^{\frac12}\ln(1+\frac1x)}\xlongequal{t=\frac1x}\int_1^{+\infty}\frac{\sin t\,dt}{t^{\frac12}\ln(1+t)}dt$ $\quad\left|\int_1^{+\infty}\sin t\,dt\right|\le2$

$[t^{\frac12}\ln(1+t)]'\ge0\Rightarrow\frac{1}{t^{\frac12}\ln(1+t)}$ 单调 $\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^{\frac12}\ln(1+t)}=0\Rightarrow\int_0^1\frac{\sin\frac1x}{x^{\frac12}\ln(1+\frac1x)}dx$ 收敛

(6) $\int_0^1x^p(\ln\frac1x)^qdx=\int_1^{+\infty}\frac{(\ln t)^q}{t^{p+2}}dt\Rightarrow p>-1$ 时 $\int_0^1x^p(\ln\frac1x)^qdx$ 收敛，其余情况发散

(7) $\int_0^1\frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^2}}dx\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin t)^\alpha}{\cos t}\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^\alpha dt$ $\quad\alpha\ge0$ 时定积分

$\alpha<0$ 时 $x=0$ 是瑕点 $\lim_{x\to0+0}\frac{\frac{1}{\sin^{-\alpha}x}}{(\frac1x)^{-\alpha}}=1$ $\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x^\alpha}dx$ $\begin{cases}\alpha\le-1 & 时发散\\\alpha>-1 & 时收敛\end{cases}$

$\Rightarrow-1<\alpha<0$ 时 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha x\,dx$ 收敛 综上 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^\alpha dt$ 在 $\alpha>-1$ 时收敛，$\alpha\le-1$ 时发散

16.(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x^p}dx=\int_0^1\frac{\sin\alpha x}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x^p}dx$

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x^p}dx$, $\left|\int_1^{+\infty}\sin\alpha x\,dx\right|\le2$ $\quad\frac{1}{x^p}$ 单调 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x^p}dx$ 收敛

$\int_0^1\frac{\sin\alpha x}{x^p}dx$: ① $\alpha=0$ 时 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x^p}dx=0$ 收敛

② $\alpha\neq0$ 时 $\frac{\sin\alpha x}{x^p}$ 在 $(0,\delta)$ 不变号 $\lim_{x\to0+0}\frac{\sin\alpha x}{x^p}\Big/\frac{1}{x^{p-1}}=\alpha$

而 $\int_0^1\frac{1}{x^{p-1}}dx$ $\begin{cases}p\ge2 & 发散\\p<2 & 收敛\end{cases}\Rightarrow\int_0^1\frac{\sin\alpha x}{x^p}dx$ $\begin{cases}p\ge2 & 发散\\p<2 & 收敛\end{cases}$

综上 $\alpha=0$ 时或 $p<2$ 时收敛，$p\ge2$ 发散

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{x|\ln x|^\alpha}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x|\ln x|^\alpha}{x^2+1}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x|\ln x|^\alpha}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{|\ln x|^\alpha}{x+\frac1x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x|\ln x|^\alpha}{x^2+1}dx=\int_1^{+\infty}\frac{|\ln t|^\alpha}{t(t^2+1)}dt+\int_1^{+\infty}\frac{x|\ln x|^\alpha}{x^2+1}dx$

$=\int_1^{+\infty}(t+\frac1t)\frac{(\ln t)^\alpha}{t^2+1}dt=\int_1^{+\infty}\frac{(\ln t)^\alpha}{t}dt=\int_1^{+\infty}(\ln t)^\alpha d\ln t=\begin{cases}\frac{1}{\alpha+1}\ln t\Big|_1^{+\infty}=+\infty & \alpha\neq-1\\\ln\ln t\Big|_1^{+\infty}=+\infty & \alpha=-1\end{cases}$

$\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{x|\ln x|^\alpha}{x^2+1}dx$ 发散

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{(e^{\frac1x}-1)^\alpha}{[\ln(1+\frac1x)]^\beta}dx=\int_0^1\frac{(e^t-1)^\alpha}{[\ln(1+t)]^\beta}\frac{1}{t^2}dt$ $\quad t=0$ 是瑕点 $\lim_{t\to0+0}\frac{(e^t-1)^\alpha}{[\ln(1+t)]^\beta}\frac{1}{t^2}\Big/\frac{1}{t^{\beta-\alpha+2}}=1$

$\beta-\alpha+2\ge1$ 时 即 $\beta-\alpha\ge-1$ $\int_0^1\frac{1}{t^{\beta-\alpha+2}}dt$ 发散 $\Rightarrow\int_0^1\frac{(e^t-1)^\alpha}{[\ln(1+t)]^\beta}\frac{1}{t^2}dt$ 发散

$\beta-\alpha+2<1$ 时 即 $\beta-\alpha<-1$ $\int_0^1\frac{1}{t^{\beta-\alpha+2}}dt$ 收敛 $\Rightarrow\int_0^1\frac{(e^t-1)^\alpha}{[\ln(1+t)]^\beta}\frac{1}{t^2}dt$ 收敛

(4) $\int_0^{+\infty}x\sin e^xdx\xlongequal{t=e^x}\int_1^{+\infty}\frac{\ln t\sin t}{t}dt$ $\quad\left|\int_1^{+\infty}\sin t\,dt\right|\le2$

$t\to+\infty$ 时 $\frac{\ln t}{t}$ 单调 $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{\ln t\sin t}{t}dt$ 收敛 $\Rightarrow\int_0^{+\infty}x\sin e^xdx$ 收敛

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac1x)}{x^p}dx=\int_0^1\frac{\sin(x+\frac1x)}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac1x)}{x^p}dx=\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac1x)}{x^{2-p}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac1x)}{x^p}dx$

① $0<p\le1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac1x)}{x^p}dx=\int_1^{+\infty}\frac{(1-\frac{1}{x^2})\sin(x+\frac1x)}{x^p-x^{p-2}}dx$

$\left|\int_1^{+\infty}(1-\frac{1}{x^2})\sin(x+\frac1x)dx\right|=\left|\int_1^{+\infty}\sin(x+\frac1x)d(x+\frac1x)\right|\le2$

设 $h(x)=x^p-x^{p-2}$ $\quad h'(x)=px^{p-1}-(p-2)x^{p-3}=x^{p-3}(px^2-(p-2))>0$ $(x\to+\infty)\Rightarrow h(x)$ 单调↑

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{h(x)}=0\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac1x)}{x^p}dx$ 收敛

② $p>1$ 时 $\left|\frac{\sin(x+\frac1x)}{x^p}\right|\le\frac{1}{x^p}$ 而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 收敛 $\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac1x)}{x^p}dx$ 绝对收敛

③ $p\le0$ 易知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac1x)}{x^p}dx$ 发散

对于 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac1x)}{x^{2-p}}dx$ ① $0<2-p\le1$ 即 $1\le p<2$ 时收敛

② $p<1$ 时 绝对收敛

③ $p\ge2$ 时 发散

故 $0<p<2$ 时 原积分收敛，其余情况发散

17.(1) ① $q=1$ 时 $\int_0^{+\infty}|\ln x|^p\frac{\sin x}{x^q}dx=\int_0^{\frac12}+\int_{\frac12}^1+\int_1^2+\int_2^{+\infty}\triangleq I_1+I_2+I_3+I_4$

I_1: $\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\sin x}{x}|\ln x|^p}{\sqrt{x}}=0$ $\quad\int_0^{\frac12}\sqrt{x}\,dx$ 定积分 $\Rightarrow I_1$ 收敛

I_4: $\left|\int_2^{+\infty}\sin x\,dx\right|\le2$ $\quad\frac{|\ln x|^p}{x}\downarrow$ $(x\to+\infty)$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{|\ln x|^p}{x}=0\Rightarrow I_4$ 收敛

I_2,I_3 $\quad|\ln x|^p=|\ln(1+x-1)|^p\sim|x-1|^p\Rightarrow p>-1$ 时收敛 $p\le-1$ 时发散

② 同理讨论 $q<0$ $\quad 0<q<1$

$1<q<2$ $\quad q\ge2$

(2) $\int_0^{+\infty}\sin(x^p)dx=\int_0^1\sin(x^p)dx+\int_1^{+\infty}\sin(x^p)dx \triangleq I_1+I_2$

I_1: $p>0$时 I_1是定积分 $p<0$时 $x=0$是瑕点 $I_1=\int_0^1\frac{px^{p-1}\sin(x^p)dx}{px^{p-1}}$ $\left|\int_0^1 px^{p-1}\sin(x^p)dx\right|=\left|\int_0^1\sin(x^p)dx^p\right|\le 2$

px^{p-1}单调 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{px^{p-1}}=0 \Rightarrow I_1$收敛

I_2: $I_2=\int_1^{+\infty}\frac{px^{p-1}\sin(x^p)dx}{px^{p-1}}$ $\left|\int_1^{+\infty}px^{p-1}\sin(x^p)dx\right|=\left|\int_1^{+\infty}\sin(x^p)dx^p\right|\le 2$

$p>1$时 $\frac{1}{px^{p-1}}$单减 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{px^{p-1}}=0 \Rightarrow I_2$收敛

$\int_1^{+\infty}\frac{px^{p}\sin(x^p)dx}{px^{p-1}}=\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\,dx}{px^{\frac{p-1}{p}}}$ $\left|\frac{\sin x}{px^{\frac{p-1}{p}}}\right|\ge\frac{\sin^2x}{px^{\frac{p-1}{p}}}=\frac{1}{2px^{\frac{p-1}{p}}}-\frac{\cos 2x}{2px^{\frac{p-1}{p}}}$ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2px^{\frac{p-1}{p}}}dx$发散 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2px^{\frac{p-1}{p}}}dx$收敛

$\Rightarrow\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{px^{\frac{p-1}{p}}}\right|dx$发散 $\Rightarrow$ 原积分条件收敛

$p<-1$时 $\left|\frac{\sin x}{px^{\frac{p-1}{p}}}\right|\le\frac{1}{px^{1-\frac1p}}$ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{px^{1-\frac1p}}dx$收敛 $\Rightarrow$ 原积分绝对收敛

$-1\le p<0$ 对于 $\frac{\sin x}{px^{1-\frac1p}}$ $\exists\varepsilon_0=\frac{1}{p(\frac{\pi}{3}+2n\pi M)^{1-\frac1p}}(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3})$ $\forall M>0$ $x'=\frac{\pi}{3}+2n\pi M$ $x''=\frac{2\pi}{3}+2n\pi M$ $\left|\int_{x'}^{x''}\frac{\sin x}{px^{1-\frac1p}}dx\right|>\frac{1}{p(\frac{\pi}{3}+2n\pi M)^{1-\frac1p}}(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3})=\varepsilon_0$

由柯西准则 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{px^{1-\frac1p}}dx$发散 同理可证 $0<p\le1$时发散

综上 $p>1$时原积分条件收敛 $p<-1$时绝对收敛 $-1\le p\le1$时发散

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-x}dx=\int_0^1\frac{\sin x}{x}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-x}dx$

对 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-x}dx$: 易知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$收敛 e^{-x}单调有界 $\Rightarrow$ 收敛

$\left|\frac{\sin x}{x}e^{-x}\right|\le\frac{1}{xe^x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{xe^x}}{\frac{1}{x^2}}=0$ 而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$收敛 $\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{1}{xe^x}dx$收敛 $\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-x}dx$绝对收敛

对 $\int_0^1\frac{\sin x}{x}e^{-x}$ $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}e^{-x}=1$ $x=0$不是瑕点 $\Rightarrow\int_0^1\frac{\sin x}{x}e^{-x}dx$定积分

$\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-x}dx$绝对收敛

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\sin x}{1+x^\beta}dx=\int_0^1\frac{x^\alpha\sin x}{1+x^\beta}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha\sin x}{1+x^\beta}dx\triangleq I_1+I_2$

考虑 $\beta\ge0$

I_1: $\alpha<0$时 $x=0$是瑕点 $\frac{x^\alpha\sin x}{1+x^\beta}=\frac{x^{\alpha+1}}{1+x^\beta}\frac{\sin x}{x}$ $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{x^\alpha\sin x}{1+x^\beta}}{\frac{1}{x^{-1-\alpha}}}=\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{\sin x}{x}\frac{1}{1+x^\beta})=1$

$\Rightarrow\alpha>-2$时 $\int_0^1\frac{1}{x^{-1-\alpha}}dx$收敛(绝对收敛)

I_2: ① $\alpha\ge\beta$ $\exists\varepsilon_0=\frac{\sqrt2}{6}$ $\forall M>0$ $\exists x'=2[M+1]\pi+\frac{\pi}{4}$ $x''=2[M+1]\pi+\frac{\pi}{2}$ $\left|\int_{x'}^{x''}\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\sin x\,dx\right|>\frac13\left|\int_{x'}^{x''}\sin x\,dx\right|=\frac{\sqrt2}{6}$

由柯西收敛准则 $\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha\sin x}{1+x^\beta}dx$发散

② $\alpha<\beta-1$ $\left|\frac{x^\alpha\sin x}{1+x^\beta}\right|\le\frac{1}{x^{\beta-\alpha}}$ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\beta-\alpha}}dx$收敛 $\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha\sin x}{1+x^\beta}dx$绝对收敛

③ $\beta-1\le\alpha<\beta$ $\exists M>1$ 当 $x>M$时 $\frac{x^{\alpha+1}}{1+x^\beta}>\frac13$

$\int_M^{+\infty}\frac{x^\alpha|\sin x|}{1+x^\beta}dx=\int_M^{+\infty}\left(\frac{x^{\alpha+1}}{1+x^\beta}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\right)dx\ge\frac13\int_M^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx=+\infty\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha|\sin x|}{1+x^\beta}dx$发散

$\beta=0$时 $-1\le\alpha<0\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha\sin x}{1+x^\beta}dx=\frac12\int_1^{+\infty}x^\alpha\sin x\,dx$ 收敛

$\beta>0$时 $\left(\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\right)'=\frac{x^{\alpha-1}(\alpha-(\beta-\alpha)x^\beta)}{(1+x^\beta)^2}\underset{(x\to+\infty)}{<0}\Rightarrow\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}$单$\downarrow\to0$ $\left|\int_1^{x}\sin x\,dx\right|\le2\Rightarrow I_2$收敛

即 I_2条件收敛 同理可证 $\beta<0$情况

$\beta\ge0\begin{cases}\alpha>-2 且 \beta>\alpha+1 绝对收敛\\ \alpha>-2 且 \alpha<\beta\le\alpha+1 条件收敛\end{cases}$ $\beta<0\begin{cases}\alpha-\beta>-2 且 \alpha<-1 绝对收敛\\ \alpha-\beta>-2 且 -1\le\alpha<0 条件收敛\end{cases}$

18. (1) $\overset{I_n}{\overset{\parallel}{\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}dx}}=-\int_0^{+\infty}x^nde^{-x}=-x^ne^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}nx^{n-1}e^{-x}dx=nI_{n-1}$

$I_1=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=-\int_0^{+\infty}xde^{-x}=-xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1\Rightarrow I_n=n!$

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^{1+n}}dx=\int_1^{+\infty}-\frac1n\ln x\,d\frac{1}{x^n}=-\frac1n\frac{1}{x^n}\ln x\Big|_1^{+\infty}+\frac1n\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{n+1}}dx=-\frac1n\cdot\frac1n\frac{1}{x^n}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{n^2}$

19. $\int_a^bg(x)\sin\frac{1}{x-a}dx=\int_a^bg(x)(x-a)^2\frac{\sin\frac{1}{x-a}}{(x-a)^2}dx$

$\forall\delta>0$ 有 $\left|\int_{a+\delta}^b\frac{1}{(x-a)^2}\sin\frac{1}{x-a}dx\right|=\left|\int_{a+\delta}^b\sin\frac{1}{x-a}d\frac{1}{x-a}\right|\le2$

而 $g(x)(x-a)^2$在$(a,b]$单调 $\lim\limits_{x\to a^+}g(x)(x-a)^2=0$ 则 $\int_a^bg(x)\sin\frac{1}{x-a}dx$收敛

20. $\int_0^1x^sf(x)dx=\int_0^1x^{s_0}f(x)\cdot x^{s-s_0}dx$

而 $\int_0^1x^{s_0}f(x)dx$ 收敛 由$s>s_0\Rightarrow x^{s-s_0}$单$\uparrow$ $0<x^{s-s_0}<1$

由A判别法 $\int_0^1x^sf(x)dx$ 对$\forall s>s_0$都收敛

21. 设 $f(x)$在$(0,1]$内是单减 设 $f(x)\ge0$

由 $\int_0^1f(x)dx$存在 则将$[0,1]$ n等分 $\int_0^1f(x)dx=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_{\frac kn}^{\frac{k+1}{n}}f(x)dx<\int_0^{\frac1n}f(x)dx+\sum\limits_{k=1}^{n-1}f(\frac kn)\frac1n<\int_0^{\frac1n}f(x)dx+\sum\limits_{k=1}^{n}f(\frac kn)\frac1n$

而 $\int_0^1f(x)dx>\sum\limits_{k=1}^{n}f(\frac kn)\frac1n\Rightarrow0<\int_0^1f(x)dx-\frac1n\sum\limits_{k=1}^{n}f(\frac kn)<\int_0^{\frac1n}f(x)dx$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac1n}f(x)dx=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac1n\sum\limits_{k=1}^nf(\frac kn)=\int_0^1f(x)dx$

若 $f(x)$不恒正 取 $\varphi(x)=f(x)-f(1)\ge0$ 同理 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac1n\sum\limits_{k=1}^n[f(\frac kn)-f(1)]=\int_0^1[f(x)-f(1)]dx$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac1n\sum\limits_{k=1}^nf(\frac kn)=\int_0^1f(x)dx$ 不能去掉单调

22. 先证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 设$f(x)$在$[a,+\infty)$单增 设存在x_0 s.t. $f(x_0)>0$ 则当$x\ge x_0$时 $f(x)>f(x_0)$

而 $\int_a^{+\infty}f(x_0)dx$发散 $\Rightarrow\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散 矛盾 $\Rightarrow f(x)\le0$ 由单调有界定理 $\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

$\left|\int_a^{+\infty}\sin\lambda x\,d(\lambda x)\right|\le2\Rightarrow\int_a^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\,d(\lambda x)$收敛 不妨令 $\int_a^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\,d(\lambda x)=M$

$\Rightarrow\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\,dx=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac1\lambda\int_a^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\,d(\lambda x)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac1\lambda M=0$

23. (1) $\int_m^M\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_m^M\frac{f(ax)}{x}dx-\int_m^M\frac{f(bx)}{x}dx=\int_{am}^{aM}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{bm}^{bM}\frac{f(x)}{x}dx$

$(M,m>0)$ $=\int_{am}^{bm}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{aM}^{bM}\frac{f(x)}{x}dx$

由 $f(x)$连续 $\frac1x\in R[am,bm]$ $\frac1x\in R[aM,bM]$ 且 $\frac1x>0$ $\exists\xi\in[am,bm],\eta\in[aM,bM]$

有 $\int_{am}^{bm}\frac{f(x)}{x}dx=f(\xi)\int_{am}^{bm}\frac1xdx$ $\int_{aM}^{bM}\frac{f(x)}{x}dx=f(\eta)\int_{aM}^{bM}\frac1xdx$

令 $m\to0^+$, $M\to+\infty$ 原式$=[f(0)-\alpha]\ln\frac ba$

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$收敛 $\Rightarrow\forall\varepsilon>0$ $\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}dx=\int_{\varepsilon a}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$

$\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_{\varepsilon a}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{\varepsilon b}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx=\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b}\frac{f(x)}{x}dx=\int_a^b\frac{f(\varepsilon x)}{x}dx=f(\varepsilon\xi)\int_a^b\frac1xdx$ $(a<\xi<b)$

$\varepsilon\to0^+\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\int_a^b\frac1xdx=f(0)\ln\frac ba$

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx=\int_0^1\frac{f(x)}{x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$

$\int_\varepsilon^1\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_{\varepsilon a}^a\frac{f(x)}{x}dx-\int_{\varepsilon b}^b\frac{f(x)}{x}dx=\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b}\frac{f(x)}{x}dx-\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx$

$=f(\xi_1)\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b}\frac1xdx-\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx$ 由 $\int_0^1\frac{f(x)}{x}dx$收敛 $\Rightarrow$ 令$\varepsilon\to0$ $\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b}\frac1xdx=0$

$=-\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx$ $(\varepsilon a<\xi_1<\varepsilon b)$

$\int_1^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_a^{\eta a}\frac{f(x)}{x}dx-\int_b^{\eta b}\frac{f(x)}{x}dx=\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx-\int_{\eta a}^{\eta b}\frac{f(x)}{x}dx=\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx-f(\xi_2)\int_{\eta a}^{\eta b}\frac1xdx$

$(\eta a<\xi_2<\eta b)$ $\eta\to+\infty$ $\lim\limits_{\eta\to+\infty}f(\xi_2)\int_{\eta a}^{\eta b}\frac1xdx=\alpha\ln\frac ab$

$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=-\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx+\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx+\alpha\ln\frac ab=\alpha\ln\frac ab$

(4) $\cos ax\in C[0,+\infty)$ 易知 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$收敛 (D判别法) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx=\ln\frac ba$

$e^{-x}\in C[0,+\infty)$ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^x x}dx$收敛 ($\because\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x x}\Big/\frac{1}{x^2}=0$ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$收敛)

$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\ln\frac ba$

24. 由$g(x)$连续的周期函数 $\Rightarrow\exists M>0$ s.t. $|g(x)|\le M$

$(\Rightarrow)$ $f(x)$单调$+\int_0^{+\infty}f(x)dx$收敛(由T22) $\Rightarrow f(x)$不变号 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

由 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$收敛 $\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists M>0$ 当$x',x''>M$有 $\left|\int_{x'}^{x''}f(x)dx\right|<\varepsilon/M$

$\left|\int_{x'}^{x''}f(x)|g(x)|dx\right|\le\left||g(\xi)|\int_{x'}^{x''}f(x)dx\right|\le M\cdot\varepsilon/M=\varepsilon\Rightarrow\int_0^{+\infty}f(x)|g(x)|dx$收敛

$(\Leftarrow)$ 同理可证

25. 不一定 $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^{\frac12}}dx$收敛 而 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^{\frac12}}dx$发散 ($\because\frac{\sin^2x}{x^{\frac12}}=\overset{发}{\frac{1}{2x^{\frac12}}}-\overset{收}{\frac{\cos2x}{2x^{\frac12}}}$)

26. 由 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$存在 不妨设 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=A$ $\forall\varepsilon'>0$ $\exists\delta>0$ 当$0<x<\delta$时有$A-\varepsilon'<f(x)<A+\varepsilon'$

$\forall\varepsilon=|2\varepsilon'\ln\frac ba|>0$ $\exists\delta>0$ 当 $0<\delta'<\delta''<\delta$时

$\left|\int_{\delta'}^{\delta''}\frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx\right|=\left|\int_{\delta'b}^{\delta''b}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{\delta'a}^{\delta''a}\frac{f(x)}{x}dx\right|=\left|\int_{\delta''a}^{\delta''b}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{\delta'a}^{\delta'b}\frac{f(x)}{x}dx\right|$

$\le\left|\int_{\delta''a}^{\delta''b}(A+\varepsilon')\frac1xdx-\int_{\delta'a}^{\delta'b}(A-\varepsilon')\frac1xdx\right|=\left|2\varepsilon'\ln\frac ba\right|=\varepsilon$

由柯西准则 $\int_0^{\delta}\frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx$收敛

(2) $\int_0^{+\infty}\sin(x^p)dx=\int_0^1\sin(x^p)dx+\int_1^{+\infty}\sin(x^p)dx \triangleq I_1+I_2$

I_1: $p>0$ 时 I_1 是定积分 $p<0$ 时 $x=0$ 是瑕点 $I_1=\int_0^1\frac{px^{p-1}\sin(x^p)dx}{px^{p-1}}$ $\left|\int_0^1 px^{p-1}\sin(x^p)dx\right|=\left|\int_0^1\sin(x^p)dx^p\right|\le 2$

px^{p-1} 单调 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{px^{p-1}}=0\Rightarrow I_1$ 收敛

I_2: $I_2=\int_1^{+\infty}\frac{px^{p-1}\sin(x^p)dx}{px^{p-1}}$ $\left|\int_1^{+\infty}px^{p-1}\sin(x^p)dx\right|=\left|\int_1^{+\infty}\sin(x^p)dx^p\right|\le 2$

$p>1$ 时 $\frac{1}{px^{p-1}}$ 单减 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{px^{p-1}}=0\Rightarrow I_2$ 收敛

$\int_1^{+\infty}\frac{px^{p-1}\sin(x^p)dx}{px^{p-1}}=\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\,dx}{px^{\frac{p-1}{p}}}$ $\left|\frac{\sin x}{px^{\frac{p-1}{p}}}\right|\ge\frac{\sin^2x}{px^{\frac{p-1}{p}}}=\frac{1}{2px^{\frac{p-1}{p}}}-\frac{\cos2x}{2px^{\frac{p-1}{p}}}$ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2px^{\frac{p-1}{p}}}dx$ 发散 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos2x}{2px^{\frac{p-1}{p}}}dx$ 收敛

$\Rightarrow\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{px^{\frac{p-1}{p}}}\right|dx$ 发散 ⇒ 原积分条件收敛

$p<-1$ 时 $\left|\frac{\sin x}{px^{\frac{p-1}{p}}}\right|\le\frac{1}{px^{1-\frac1p}}$ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{px^{1-\frac1p}}dx$ 收敛 ⇒ 原积分绝对收敛

$-1\le p<0$ 对于 $\frac{\sin x}{px^{1-\frac1p}}$ $\exists\varepsilon_0=\frac{1}{p(\frac{\pi}{2}+2n\pi)^{1-\frac1p}}(\frac{\sqrt2}{2}-\frac12)$ $\forall M>0$ $x'=\frac{\pi}{4}+2n\pi$ $x''=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ $\left|\int_{x'}^{x''}\frac{\sin x}{px^{1-\frac1p}}dx\right|>\frac{1}{p(\frac{\pi}{2}+2n\pi)^{1-\frac1p}}(\frac{\sqrt2}{2}-\frac12)=\varepsilon_0$

由柯西准则 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{px^{1-\frac1p}}dx$ 发散 同理可证 $0<p\le1$ 时 发散

综上 $p>1$ 时 原积分条件收敛 $p<-1$ 时绝对收敛 $-1\le p\le1$ 时发散

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-x}dx=\int_0^1\frac{\sin x}{x}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-x}dx$

对 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-x}dx$: 易知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛 e^{-x} 单调有界 ⇒ 收敛

$\left|\frac{\sin x}{x}e^{-x}\right|\le\frac{1}{xe^x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{xe^x}}{\frac{1}{x^2}}=0$ 而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛 ⇒ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{xe^x}dx$ 收敛 ⇒ $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-x}dx$ 绝对收敛

对 $\int_0^1\frac{\sin x}{x}e^{-x}$ $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}e^{-x}=1$ $x=0$ 不是瑕点 ⇒ $\int_0^1\frac{\sin x}{x}e^{-x}dx$ 定积分

⇒ $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-x}dx$ 绝对收敛

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\sin x}{1+x^\beta}dx=\int_0^1\frac{x^\alpha\sin x}{1+x^\beta}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha\sin x}{1+x^\beta}dx\triangleq I_1+I_2$

考虑 $\beta>0$

I_1: $\alpha<0$ 时 $x=0$ 是瑕点 $\frac{x^\alpha\sin x}{1+x^\beta}=\frac{x^{\alpha+1}}{1+x^\beta}\frac{\sin x}{x}$ $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{x^\alpha\sin x}{1+x^\beta}}{\frac{1}{x^{-1-\alpha}}}=\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{\sin x}{x}\frac{1}{1+x^\beta})=1$

⇒ $\alpha>-2$ 时 $\int_0^1\frac{1}{x^{-1-\alpha}}dx$ 收敛（绝对收敛）

I_2: ① $\alpha\ge\beta$ $\exists\varepsilon_0=\frac{\sqrt2}{6}$ $\forall M>0$ $\exists x'=2[M+1]\pi+\frac{\pi}{4}$ $x''=2[M+1]\pi+\frac{\pi}{2}$ $\left|\int_{x'}^{x''}\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\sin x\,dx\right|>\frac13\left|\int_{x'}^{x''}\sin x\,dx\right|=\frac{\sqrt2}{6}$

由柯西收敛准则 $\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha\sin x}{1+x^\beta}dx$ 发散

② $\alpha<\beta-1$ $\left|\frac{x^\alpha\sin x}{1+x^\beta}\right|\le\frac{1}{x^{\beta-\alpha}}$ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\beta-\alpha}}dx$ 收敛 ⇒ $\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha\sin x}{1+x^\beta}dx$ 绝对收敛

③ $\beta-1\le\alpha<\beta$ $\exists M>1$ 当 $x>M$ 时 $\frac{x^{\alpha+1}}{1+x^\beta}>\frac13$

$\int_M^{+\infty}\frac{x^\alpha|\sin x|}{1+x^\beta}dx=\int_M^{+\infty}\left(\frac{x^{\alpha+1}}{1+x^\beta}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\right)dx\ge\frac13\int_M^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx=+\infty\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha|\sin x|}{1+x^\beta}dx$ 发散

$\beta=0$ 时 $-1\le\alpha<0\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha\sin x}{1+x^\beta}dx=\frac12\int_1^{+\infty}x^\alpha\sin x\,dx$ 收敛

$\beta>0$ 时 $\left(\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\right)'=\frac{x^{\alpha-1}(\alpha-(\beta-\alpha)x^\beta)}{(1+x^\beta)^2}\underset{(x\to+\infty)}{<0}\Rightarrow\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}$ 单↓ $\to0$ $\left|\int_1^x\sin x\,dx\right|\le2$ ⇒ I_2 收敛

即 I_2 条件收敛 同理可证 $\beta<0$ 情况

$\beta>0\begin{cases}\alpha>-2 \text{ 且 } \beta>\alpha+1 & \text{绝对收敛}\\ \alpha>-2 \text{ 且 } \alpha<\beta<\alpha+1 & \text{条件收敛}\end{cases}$ $\beta<0\begin{cases}\alpha-\beta>-2 \text{ 且 } \alpha<-1 & \text{绝对收敛}\\ \alpha-\beta>-2 \text{ 且 } -1\le\alpha<0 & \text{条件收敛}\end{cases}$

18. (1) $\overset{I_n}{\overset{\parallel}{\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}dx}}=-\int_0^{+\infty}x^nde^{-x}=-x^ne^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}nx^{n-1}e^{-x}dx=nI_{n-1}$

$I_1=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=-\int_0^{+\infty}x\,de^{-x}=-xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1\Rightarrow I_n=n!$

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^{n+1}}dx=\int_1^{+\infty}-\frac1n\ln x\,d\frac{1}{x^n}=-\frac1n\frac{1}{x^n}\ln x\Big|_1^{+\infty}+\frac1n\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{n+1}}dx=-\frac1n\cdot\frac1n\frac{1}{x^n}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{n^2}$

19. $\int_a^bg(x)\sin\frac{1}{x-a}dx=\int_a^bg(x)(x-a)^2\frac{\sin\frac{1}{x-a}}{(x-a)^2}dx$

$\forall\delta>0$ 有 $\left|\int_{a+\delta}^b\frac{1}{(x-a)^2}\sin\frac{1}{x-a}dx\right|=\left|\int_{a+\delta}^b\sin\frac{1}{x-a}d\frac{1}{x-a}\right|\le2$

而 $g(x)(x-a)^2$ 在 $(a,b]$ 单调 $\lim\limits_{x\to a^+}g(x)(x-a)^2=0$ 则 $\int_a^bg(x)\sin\frac{1}{x-a}dx$ 收敛

20. $\int_0^1x^sf(x)dx=\int_0^1x^{s_0}f(x)\cdot x^{s-s_0}dx$

而 $\int_0^1x^{s_0}f(x)dx$ 收敛 由 $s>s_0\Rightarrow x^{s-s_0}$ 单↑ $0<x^{s-s_0}<1$

由A判别法 $\int_0^1x^sf(x)dx$ 对 $\forall s>s_0$ 都收敛

21. 设 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 内是单减 设 $f(x)\ge0$

由 $\int_0^1f(x)dx$ 存在 则将 $[0,1]$ n等分 $\int_0^1f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac kn}^{\frac{k+1}{n}}f(x)dx<\int_0^{\frac1n}f(x)dx+\sum_{k=1}^{n-1}f(\frac kn)\frac1n<\int_0^{\frac1n}f(x)dx+\sum_{k=1}^{n}f(\frac kn)\frac1n$

而 $\int_0^1f(x)dx>\sum_{k=1}^nf(\frac kn)\frac1n\Rightarrow0<\int_0^1f(x)dx-\frac1n\sum_{k=1}^nf(\frac kn)<\int_0^{\frac1n}f(x)dx$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac1n}f(x)dx=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac1n\sum_{k=1}^nf(\frac kn)=\int_0^1f(x)dx$

若 $f(x)$ 不恒正 取 $\varphi(x)=f(x)-f(1)\ge0$ 同理 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac1n\sum_{k=1}^n[f(\frac kn)-f(1)]=\int_0^1[f(x)-f(1)]dx$

⇒ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac1n\sum_{k=1}^nf(\frac kn)=\int_0^1f(x)dx$ 不能去掉单调

22. 先证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单增 设存在 x_0 s.t. $f(x_0)>0$ 则当 $x>x_0$ 时 $f(x)>f(x_0)$

而 $\int_a^{+\infty}f(x_0)dx$ 发散 ⇒ $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散 矛盾 ⇒ $f(x)\le0$ 由单调有界定理 ⇒ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

$\left|\int_a^{+\infty}\sin\lambda x\,d(\lambda x)\right|\le2$ ⇒ $\int_a^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\,d(\lambda x)$ 收敛 不妨令 $\int_a^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\,d(\lambda x)=M$

⇒ $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\,dx=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac1\lambda\int_a^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\,d(\lambda x)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac1\lambda M=0$

23. (1) $\int_m^M\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_m^M\frac{f(ax)}{x}dx-\int_m^M\frac{f(bx)}{x}dx=\int_{am}^{aM}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{bm}^{bM}\frac{f(x)}{x}dx$

$(M,m>0)$ $=\int_{am}^{bm}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{aM}^{bM}\frac{f(x)}{x}dx$

由 $f(x)$ 连续 $\frac1x\in R[am,bm]$ $\frac1x\in R[aM,bM]$ 且 $\frac1x>0$ $\exists\xi\in[am,bm],\eta\in[aM,bM]$

有 $\int_{am}^{bm}\frac{f(x)}{x}dx=f(\xi)\int_{am}^{bm}\frac1xdx$ $\int_{aM}^{bM}\frac{f(x)}{x}dx=f(\eta)\int_{aM}^{bM}\frac1xdx$

令 $m\to0^+,M\to+\infty$ 原式 $=[f(0)-\alpha]\ln\frac ba$

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛 ⇒ $\forall\varepsilon>0$ $\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}dx=\int_{\varepsilon a}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$

$\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_{\varepsilon a}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{\varepsilon b}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx=\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b}\frac{f(x)}{x}dx=\int_a^b\frac{f(\varepsilon x)}{x}dx=f(\varepsilon\xi)\int_a^b\frac1xdx$ $(a<\xi<b)$

$\varepsilon\to0^+\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\int_a^b\frac1xdx=f(0)\ln\frac ba$

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx=\int_0^1\frac{f(x)}{x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$

$\int_\varepsilon^1\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_{\varepsilon a}^a\frac{f(x)}{x}dx-\int_{\varepsilon b}^b\frac{f(x)}{x}dx=\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b}\frac{f(x)}{x}dx-\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx$

$=f(\xi_1)\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b}\frac1xdx-\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx$ 由 $\int_0^1\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛 ⇒ 令 $\varepsilon\to0$ $\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b}\frac1xdx=0$

$=-\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx$ $(\varepsilon a<\xi_1<\varepsilon b)$

$\int_1^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_a^{\eta a}\frac{f(x)}{x}dx-\int_b^{\eta b}\frac{f(x)}{x}dx=\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx-\int_{\eta a}^{\eta b}\frac{f(x)}{x}dx=\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx-f(\xi_2)\int_{\eta a}^{\eta b}\frac1xdx$

$(\eta a<\xi_2<\eta b)$ $\eta\to+\infty$ $\lim\limits_{\eta\to+\infty}f(\xi_2)\int_{\eta a}^{\eta b}\frac1xdx=\alpha\ln\frac ab$

$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=-\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx+\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx+\alpha\ln\frac ab=\alpha\ln\frac ab$

(4) $\cos ax\in C[0,+\infty)$ 易知 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$ 收敛 (D判别法) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx=\ln\frac ba$

$e^{-x}\in C[0,+\infty)$ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^x x}dx$ 收敛 (∵ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x\cdot x}\Big/\frac{1}{x^2}=0$ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛)

$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\ln\frac ba$

24. 由 $g(x)$ 连续的周期函数 ⇒ $\exists M>0$ s.t. $|g(x)|\le M$

(⇒) $f(x)$ 单调 + $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛 (由T22) ⇒ $f(x)$ 不变号 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

由 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛 ⇒ $\forall\varepsilon>0$, $\exists M>0$ 当 $x',x''>M$ 有 $\left|\int_{x'}^{x''}f(x)dx\right|<\varepsilon/M$

$\left|\int_{x'}^{x''}f(x)|g(x)|dx\right|\le\left||g(\xi)|\int_{x'}^{x''}f(x)dx\right|\le M\cdot\varepsilon/M=\varepsilon\Rightarrow\int_0^{+\infty}f(x)|g(x)|dx$ 收敛

(⇐) 同理可证

25. 不一定 $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^{\frac12}}dx$ 收敛 而 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^{\frac12}}dx$ 发散 (∵ $\frac{\sin^2x}{x^{\frac12}}=\frac{1}{2x^{\frac12}}\overset{\text{发}}{\uparrow}-\frac{\cos2x}{2x^{\frac12}}\overset{\text{收}}{\uparrow}$)

26. 由 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 存在 不妨设 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=A$ $\forall\varepsilon'>0$ $\exists\delta>0$ 当 $0<x<\delta$ 时有 $A-\varepsilon'<f(x)<A+\varepsilon'$

$\forall\varepsilon=|2\varepsilon'\ln\frac ba|>0$ $\exists\delta>0$ 当 $0<\delta'<\delta''<\delta$ 时

$\left|\int_{\delta'}^{\delta''}\frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx\right|=\left|\int_{\delta'b}^{\delta''b}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{\delta'a}^{\delta''a}\frac{f(x)}{x}dx\right|=\left|\int_{\delta''a}^{\delta''b}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{\delta'a}^{\delta'b}\frac{f(x)}{x}dx\right|$

$\le\left|\int_{\delta''a}^{\delta''b}(A+\varepsilon')\frac1xdx-\int_{\delta'a}^{\delta'b}(A-\varepsilon')\frac1xdx\right|=|2\varepsilon'\ln\frac ba|=\varepsilon$

由柯西准则 $\int_0^{\delta}\frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx$ 收敛

习题九

1.(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac12\left(1-\frac13+\frac13-\frac15+\cdots-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac12 \Rightarrow$ 收敛

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt k}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt2}+\cdots-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1\Rightarrow$ 收敛

(3) $S_n=\frac13+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{n}{3^n}$

$\frac13S_n=\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{n-1}{3^n}+\frac{n}{3^{n+1}}$

$\Rightarrow \frac23S_n=\frac13+\frac1{3^2}+\cdots+\frac1{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac12-\frac{1}{2\cdot3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}$

$\Rightarrow S_n=\frac34-\frac32\left(\frac{1}{2\cdot3^n}+\frac{n}{3^{n+1}}\right)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac34\Rightarrow$ 收敛

(4) $S_n=\frac{2^x-2^{nx}\cdot2^x}{1-2^x}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{2^x}{1-2^x}\Rightarrow$ 收敛 $(x<0)$

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac12+\cdots+\frac1n}}{\frac{1}{\ln n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{c+\ln n+\alpha_n}}{\frac{1}{\ln n}}=1\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{\frac{1}{1+\frac12+\cdots+\frac1n}}}{1/\sqrt[n]{\ln n}}=1$

$\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}\geq\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$ 发散 $\Rightarrow$ 原级数发散

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{4}{2n^2+1}\right)^{-\frac{2n^2+1}{4}\times\left(-\frac{4n^2}{2n^2+1}\right)}=e^{-2}\neq0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2}$ 发散

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\ln(1+1/n)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\left(\frac1n+o\left(\frac1n\right)\right)}=1\neq0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\ln(1+1/n)}$ 发散

(8) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=e\neq0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ 发散

2.(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^\alpha}{2^{pn}}}=\frac{1}{2^p}<1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^\alpha}{2^{pn}}$ 收敛

(2) $\frac{2+(-1)^n}{n^2}<\frac{3}{n^2}$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2+(-1)^n}{n^2}$ 收敛

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^{1+\frac1n}}}{\frac1n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac1n$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{1+\frac1n}}$ 发散

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^k}{(1+1/n)^{\frac{3n}{2}}}\Big/n^k=e^{-\frac32}$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^k$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^k}{(1+1/n)^{\frac{3n}{2}}}$ 发散

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)=0<1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$ 收敛

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{(1+1/n)^n}{e}\right]^n=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{n\ln\frac{(1+\frac1n)^n}{e}}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{n^2\ln(1+\frac1n)-n\ln e}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{\ln(1+\frac1n)-\frac1n}{\frac{1}{n^2}}}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{\frac1n-\frac{1}{2n^2}-\frac1n}{\frac{1}{n^2}}}=e^{-\frac12}\neq0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^k}{(1+1/n)^{\frac{3n}{2}}}$ 发散

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac1n)\tan\frac2n}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac1n\cdot\frac2n}{\frac{1}{n^2}}=2$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(1+1/n)}{e}\right]^n$ 收敛

(8) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac1n}=\ln a$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac1n$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{a}-1)$ 发散

(9) $\left(1+\frac1n\right)^n=e^{n\ln(1+\frac1n)}=e^{n\left(\frac1n-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}=e^{1-\frac{1}{2n}+o(\frac1n)}=e\cdot e^{-\frac{1}{2n}+o(\frac1n)}=e-\frac{e}{2n}+o\left(\frac1n\right)\ (n\to+\infty)$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\left(1+\frac1n\right)^n-e\right]=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[-\frac{e}{2n}+o\left(\frac1n\right)\right]$ 发散

(10) $\frac{1}{2^{\sqrt n}}$ 单减 $\to0$ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2^{\sqrt x}}dx=\int_1^{+\infty}\frac{t}{2^{t-1}}dt$ 而 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{2^{t-1}}\Big/\frac{1}{t^2}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^3}{2^{t-1}}=0$ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ 收敛

$\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{t}{2^{t-1}}dt$ 收敛 $\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{1}{2^{\sqrt x}}dx$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{\sqrt n}}$ 收敛

(11) $a>1$ 时 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a^n}{1+a^{kn}}\Big/\frac{1}{a^{(k-1)n}}=1$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^{(k-1)n}}$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{1+a^{kn}}$ 收敛

$a=1$ 时 $\frac{a^n}{1+a^{kn}}=\frac12$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{1+a^{kn}}$ 发散

$0<a<1$ 时 $\frac{a^n}{1+a^{kn}}<a^n$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a^n$ 收敛

$\Rightarrow a=1$ 时 级数发散，$a>1$ 或 $0<a<1$ 时级数收敛

(12) $n^p(\sqrt{n+1}-2\sqrt n+\sqrt{n-1})=n^{p+\frac12}\left(\sqrt{1+\frac1n}+\sqrt{1-\frac1n}-2\right)=n^{p+\frac12}\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$=-n^{p+\frac12}\left(\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=-n^{p-\frac32}\left(\frac14+o(1)\right)\sim-n^{p-\frac32}\quad(n\to+\infty)$

当 $\frac32-p>1$ 即 $p<\frac12$ 时 原级数收敛 $p\geq\frac12$ 时原级数发散

(13) $n^p\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt n}\right)=n^{p-\frac12}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n-1}}-1\right)=n^{p-\frac12}\left[\frac{1}{n-1}-\frac18\frac{1}{(n-1)^2}+o\left(\left(\frac{1}{n-1}\right)^2\right)\right]\quad(n\to+\infty)$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{p-\frac12}\left[\frac{1}{n-1}-\frac18\frac{1}{(n-1)^2}+o\left(\left(\frac{1}{n-1}\right)^2\right)\right]}{n^{p-\frac32}}=1$ 当 $\frac32-p>1$ 即 $p<\frac12$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^{p-\frac32}$ 收敛，$p\geq\frac12$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^{p-\frac32}$ 发散

故 $p<\frac12$ 时原级数收敛，$p\geq\frac12$ 时原级数发散

(14) ① $\alpha>1$ 时 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{e^{-n^\alpha}}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-n^{\alpha-1}}=0<1\Rightarrow$ 收敛

② $0<\alpha\leq1$ 时 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^{-n^\alpha}}{\frac{1}{n^2}}=0$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=2}^{+\infty}e^{-n^\alpha}$ 收敛

$\Rightarrow\sum\limits_{n=2}^{+\infty}e^{-n^\alpha}$ 收敛

(15) $\alpha^{\ln n}=n^{\ln\alpha}$ ① $\ln\alpha>1$ 即 $\alpha>e$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\ln\alpha}}$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\alpha^{\ln n}}$ 收敛

② $\alpha\leq e$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\ln\alpha}}$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\alpha^{\ln n}}$ 发散

(16) 设 $g(x)=(\ln x)^2-x$ $g'(x)=2\ln x\cdot\frac1x-1$ $g''(x)=\frac{2}{x^2}(1-\ln x)\Rightarrow g'(x)$ 在 $(4,+\infty)\downarrow$

$g'(x)\leq g'(4)<0\Rightarrow g(x)$ 单减 $g(x)<g(4)<0\Rightarrow(\ln x)^2<x$

$\Rightarrow\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}=\frac{1}{e^{(\ln\ln n)^2}}\geq\frac{1}{e^{\ln n}}=\frac1n$ 而 $\sum\limits_{n=4}^{+\infty}\frac1n$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=4}^{+\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$ 发散

(17) $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left\{\left[\frac{(2n)!!}{(2n+3)!!}\Big/\frac{(2n+2)!!}{(2n+5)!!}\right]^p-1\right\}=\lim\limits_{n\to+\infty}n\left[\left(\frac{2n+5}{2n+2}\right)^p-1\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac1x\left[\left(\frac{2+5x}{2+2x}\right)^p-1\right]=\lim\limits_{x\to0}p\left(\frac{2+5x}{2+2x}\right)^{p-1}\frac{6}{(2+2x)^2}=\frac32p$

① 当 $\frac32p>1$ 时 即 $p>\frac23$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n+3)!!}\right]^p$ 收敛

② $0<p<\frac23$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n+3)!!}\right]^p$ 发散

③ $p=\frac23$ 时

(18) $1-n\sin\frac1n=1-n\left(\frac1n-\frac{1}{3!}\left(\frac1n\right)^3+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)=\frac{1}{6n^2}-o\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(n\to\infty)$

$\frac{1-n\sin\frac1n}{n^\alpha}=\frac{\frac{1}{6n^2}-o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{n^\alpha}=\frac{1}{6n^{\alpha+2}}-o\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right)$

$\alpha+2>1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1-n\sin\frac1n}{n^\alpha}$ 收敛

3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛 $\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$ $\forall\varepsilon>0$ 由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛 a_n 单调递减 $\exists N>0$ 使 $n>N$ 时

有 $0\leq(n-N)a_n\leq a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_n<\frac{\varepsilon}{2}$

固定上述 N，由 $\lim\limits_{n\to+\infty}Na_n=0\Rightarrow\exists M>N$，使 $n>M$ 时有 $Na_n<\frac{\varepsilon}{2}$

$n>M$ 时有 $0\leq na_n=(n-N)a_n+Na_n<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

4. $|a_nb_n|\leq\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^2$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n^2$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 绝对收敛

5. $f\left(\frac1n\right)=f(0)+f'(0)\cdot\frac1n+\frac12f''(0)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$(\Leftarrow)$ 由 $f(0)=f'(0)=0\Rightarrow f\left(\frac1n\right)=\frac12f''(0)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ 而 $f''(0)$ 存在 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f\left(\frac1n\right)$ 收敛

$(\Rightarrow)$ 反证法：假设 $f'(0)\neq0$ 令 $f'(0)=a$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f(\frac1n)}{\frac1n}=f'(0)=a$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac1n$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f\left(\frac1n\right)$ 收敛

6. $\sqrt{a_na_{n+1}}\leq\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 收敛

a_n 单调 $\Rightarrow$ 不妨设 a_n 单增 $a_n\leq\sqrt{a_na_{n+1}}\leq a_{n+1}\to$ 两个级数同敛散

7.(1) 由题意 $\{S_n\}$ 单增 $\to+\infty$

$\exists\varepsilon_0=\frac12$ $\forall N\in\mathbb{N}$ $\exists n_0=N+1$ 而 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$ 故 $\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{S_{N+1}}{S_{N+p}}=0$ 由极限保号性 $\exists p_0$ s.t. $\frac{S_{N+1}}{S_{N+p_0}}<\frac12$

$\left|\frac{a_{N+1}}{S_{N+1}}+\frac{a_{N+2}}{S_{N+2}}+\cdots+\frac{a_{N+p}}{S_{N+p}}\right|\geq\frac{\sum\limits_{i=N+2}^{N+p}a_i}{S_{N+p}}=\frac{S_{N+p}-S_{N+1}}{S_{N+p}}=1-\frac{S_{N+1}}{S_{N+p}}>\frac12=\varepsilon_0$

由柯西收敛 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 发散

(2) $\frac{a_n}{S_n^2}<\frac{a_n}{S_nS_{n-1}}=\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}$ 而 $T_n=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_n}\right)=\frac{1}{S_1}$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛

(3) ① a_n 无界 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{1+a_n}=1\neq0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 发散

② a_n 有界 不妨设 $a_n\leq M\Rightarrow\frac{a_n}{1+a_n}\geq\frac{a_n}{1+M}$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{1+M}$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 发散

(4) $\frac{a_n}{1+n^2a_n}\leq\frac{a_n}{n^2a_n}=\frac{1}{n^2}$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$ 收敛

同 7 (1)

8. 记 $S=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ $r_n=S-\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_n\ (n=1,2\cdots)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_k=S\Rightarrow\{r_n\}$ 单减 $\to0$

$\exists\varepsilon_0=\frac12$ $\forall N\in\mathbb{N}$ $\exists n_0=N+1$ 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}r_n=0\Rightarrow\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{r_{N+p}}{r_{N+1}}=0$ 由极限保号性 $\exists p_0$ s.t. $\frac{r_{N+p_0}}{r_{N+1}}<\frac12$

$\left|\frac{a_{N+1}}{r_{N+1}}+\cdots+\frac{a_{N+p}}{r_{N+p}}\right|\geq\frac{\sum\limits_{k=N+1}^{N+p}a_k}{r_{N+1}}=\frac{r_{N+1}-r_{N+p}}{r_{N+1}}=1-\frac{r_{N+p}}{r_{N+1}}>\frac12=\varepsilon_0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{r_n}$ 发散

9. $\begin{cases}\frac{a_n}{a_1}=\frac{a_n}{a_{n-1}}\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\cdots\times\frac{a_2}{a_1}\\ \frac{b_n}{b_1}=\frac{b_n}{b_{n-1}}\times\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\times\cdots\times\frac{b_2}{b_1}\end{cases}$ 由 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\frac{b_{n+1}}{b_n}\Rightarrow\frac{a_n}{a_1}\leq\frac{b_n}{b_1}\Rightarrow a_n\leq\frac{b_1}{a_1}b_n$

而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛

10.(1) ① $p>1$ 时 $\left|\frac{(-1)^{[\sqrt n]}}{n^p}\right|=\frac{1}{n^p}$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt n]}}{n^p}$ 绝对收敛

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt n]}}{n^p}=-\left(\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{8^p}\right)+\cdots=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{(k^2)^p}+\frac{1}{(k^2+1)^p}+\cdots+\frac{1}{(k^2+2k)^p}\right]$

② $p=1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt n]}}{n^p}=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{k^2}+\cdots+\frac{1}{k^2+k}+\cdots+\frac{1}{k^2+2k}\right]$

$\frac{2}{k+1}=k\cdot\frac{1}{k^2+k}+(k+1)\frac{1}{(k+1)^2}<\overbrace{\underbrace{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots}_{k\text{项}}+\underbrace{\frac{1}{k^2+k}+\cdots+\frac{1}{k^2+2k}}_{k+1\text{项}}}^{=d_k}<\frac{k}{k^2}+\frac{k+1}{k(k+1)}=\frac2k$

$k\to+\infty$ $d_k\to0$ d_k 单减 由莱布尼茨判别法 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt n]}}{n}$ 收敛

③ $0<p<1$ 时 见下页

习题九

1、(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac12\left(1-\frac13+\frac13-\frac15+\cdots-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac12 \Rightarrow$ 收敛

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt k}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt2}+\cdots-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1\Rightarrow$ 收敛

(3) $S_n=\frac13+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{n}{3^n}$

$\frac13 S_n=\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{n-1}{3^n}+\frac{n}{3^{n+1}}$

$\Rightarrow \frac23 S_n=\frac13+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac12-\frac{1}{2\cdot3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}$

$\Rightarrow S_n=\frac34-\frac32\left(\frac{1}{2\cdot3^n}+\frac{n}{3^{n+1}}\right)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac34 \Rightarrow$ 收敛

(4) $S_n=\frac{2^x-2^{nx}\cdot2^x}{1-2^x}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{2^x}{1-2^x}\Rightarrow$ 收敛 $(x<0)$

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac12+\cdots+\frac1n}}{\frac{1}{\ln n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{C+\ln n+\alpha_n}}{\frac{1}{\ln n}}=1\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{\frac{1}{1+\frac12+\cdots+\frac1n}}}{1/\sqrt[n]{\ln n}}=1$

$\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}\geq\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$ 发散 $\Rightarrow$ 原级数发散

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{4}{2n^2+1}\right)^{-\frac{2n^2+1}{4}\times\left(-\frac{4n^2}{2n^2+1}\right)}=e^{-2}\neq0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2}$ 发散

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\ln(1+1/n)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\left(\frac1n+o\left(\frac1n\right)\right)}=1\neq0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\ln(1+1/n)}$ 发散

(8) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=e\neq0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ 发散

2、(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^\alpha}{2^{pn}}}=\frac{1}{2^p}<1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^\alpha}{2^{pn}}$ 收敛

(2) $\frac{2+(-1)^n}{n^2}<\frac{3}{n^2}$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2+(-1)^n}{n^2}$ 收敛

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^{1+\frac1n}}}{\frac1n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac1n$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{1+\frac1n}}$ 发散

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^k}{(1+1/n)^{n^2}}\Big/n^k=e^{-\frac12}$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^k$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^k}{(1+1/n)^{n^2}}$ 发散

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)=0<1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$ 收敛

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{(1+1/n)^n}{e}\right]^n=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{n\ln\frac{(1+\frac1n)^n}{e}}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{n^2\ln(1+\frac1n)-n\ln e}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{\ln(1+\frac1n)-\frac1n}{\frac{1}{n^2}}}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{\frac1n-\frac{1}{2n^2}-\frac1n}{\frac{1}{n^2}}}=e^{-\frac12}\neq0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^k}{(1+1/n)^{n^2}}$ 发散

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac1n)\tan\frac2n}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac1n\cdot\frac2n}{\frac{1}{n^2}}=2$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(1+1/n)^n}{e}\right]^n$ 收敛

(8) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac1n}=\ln a$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac1n$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{a}-1)$ 发散

(9) $\left(1+\frac1n\right)^n=e^{n\ln(1+\frac1n)}=e^{n\left(\frac1n-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}=e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac1n\right)}=e\cdot e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac1n\right)}=e-\frac{e}{2n}+o\left(\frac1n\right)$ $(n\to+\infty)$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\left(1+\frac1n\right)^n-e\right]=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[-\frac{e}{2n}+o\left(\frac1n\right)\right]$ 发散

(10) $\frac{1}{2^{\sqrt n}}$ 单减→0 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2^{\sqrt x}}dx=\int_1^{+\infty}\frac{t}{2^{t-1}}dt$ 而 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{2^{t-1}}\Big/\frac{1}{t^2}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^3}{2^{t-1}}=0$ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ 收敛

$\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{t}{2^{t-1}}dt$ 收敛 $\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{1}{2^{\sqrt x}}dx$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{\sqrt n}}$ 收敛

(11) $a>1$ 时 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a^n}{1+a^{kn}}\Big/\frac{1}{a^{(k-1)n}}=1$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^{(k-1)n}}$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{1+a^{kn}}$ 收敛

$a=1$ 时 $\frac{a^n}{1+a^{kn}}=\frac12$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{1+a^{kn}}$ 发散

$0<a<1$ 时 $\frac{a^n}{1+a^{kn}}<a^n$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a^n$ 收敛

$\Rightarrow a=1$ 时 级数发散，$a>1$ 或 $0<a<1$ 时级数收敛

(12) $n^p(\sqrt{n+1}-2\sqrt n+\sqrt{n-1})=n^{p+\frac12}\left(\sqrt{1+\frac1n}+\sqrt{1-\frac1n}-2\right)=n^{p+\frac12}\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$=-n^{p+\frac12}\left(\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=-n^{p-\frac32}\left(\frac14+o(1)\right)\sim-n^{p-\frac32}$ $(n\to+\infty)$

当 $\frac32-p>1$ 即 $p<\frac12$ 时 原级数收敛 $p\geq\frac12$ 时原级数发散

(13) $n^p\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt n}\right)=n^{p-\frac12}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n-1}}-1\right)=n^{p-\frac12}\left[\frac{1}{n-1}-\frac18\left(\frac{1}{n-1}\right)^2+o\left(\left(\frac{1}{n-1}\right)^2\right)\right]$ $(n\to+\infty)$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{p-\frac12}\left[\frac{1}{n-1}-\frac18\left(\frac{1}{n-1}\right)^2+o\left(\left(\frac{1}{n-1}\right)^2\right)\right]}{n^{p-\frac32}}=1$ 当 $\frac32-p>1$ 即 $p<\frac12$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^{p-\frac32}$ 收敛，$p\geq\frac12$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^{p-\frac32}$ 发散

故 $p<\frac12$ 时原级数收敛，$p\geq\frac12$ 时原级数发散

(14) ① $\alpha>1$ 时 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{e^{-n^\alpha}}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-n^{\alpha-1}}=0<1\Rightarrow$ 收敛

② $0<\alpha\leq1$ 时 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^{-n^\alpha}}{\frac{1}{n^2}}=0$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=2}^{+\infty}e^{-n^\alpha}$ 收敛

$\Rightarrow\sum\limits_{n=2}^{+\infty}e^{-n^\alpha}$ 收敛

(15) $\alpha^{\ln n}=n^{\ln\alpha}$ ① $\ln\alpha>1$ 即 $\alpha>e$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\ln\alpha}}$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\alpha^{\ln n}}$ 收敛

② $\alpha\leq e$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\ln\alpha}}$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\alpha^{\ln n}}$ 发散

(16) 设 $g(x)=(\ln x)^2-x$ $g'(x)=2\ln x\cdot\frac1x-1$ $g''(x)=\frac{2}{x^2}(1-\ln x)\Rightarrow g'(x)$ 在 $(4,+\infty)\downarrow$

$g'(x)\leq g'(4)<0\Rightarrow g(x)$ 单减 $g(x)<g(4)<0\Rightarrow(\ln x)^2<x$

$\Rightarrow\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}=\frac{1}{e^{(\ln\ln n)^2}}\geq\frac{1}{e^{\ln n}}=\frac1n$ 而 $\sum\limits_{n=4}^{+\infty}\frac1n$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=4}^{+\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$ 发散

(17) $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left\{\left[\frac{(2n)!!}{(2n+3)!!}\Big/\frac{(2n+2)!!}{(2n+5)!!}\right]^p-1\right\}=\lim\limits_{n\to+\infty}n\left[\left(\frac{2n+5}{2n+2}\right)^p-1\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac1x\left[\left(\frac{2+5x}{2+2x}\right)^p-1\right]=\lim\limits_{x\to0}p\left(\frac{2+5x}{2+2x}\right)^{p-1}\frac{6}{(2x+2)^2}=\frac32p$

① 当 $\frac32p>1$ 时 即 $p>\frac23$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n+3)!!}\right]^p$ 收敛

② $0<p<\frac23$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n+3)!!}\right]^p$ 发散

③ $p=\frac23$ 时

(18) $1-n\sin\frac1n=1-n\left(\frac1n-\frac{1}{3!}\left(\frac1n\right)^3+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)=\frac{1}{6n^2}-o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ $(n\to\infty)$

$\frac{1-n\sin\frac1n}{n^\alpha}=\frac{\frac{1}{6n^2}-o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{n^\alpha}=\frac{1}{6n^{\alpha+2}}-o\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right)$

$\alpha+2>1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1-n\sin\frac1n}{n^\alpha}$ 收敛

3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛 $\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$ $\forall\varepsilon>0$ 由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛 a_n 单调递减 $\exists N>0$ 使 $n>N$ 时

有 $0\leq(n-N)a_n\leq a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_n<\frac{\varepsilon}{2}$

固定上述 N，由 $\lim\limits_{n\to+\infty}Na_n=0\Rightarrow\exists M>N$，使 $n>M$ 时有 $Na_n<\frac{\varepsilon}{2}$

$n>M$ 时有 $0\leq na_n=(n-N)a_n+Na_n<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

4. $|a_nb_n|\leq\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^2$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n^2$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 绝对收敛

5. $f\left(\frac1n\right)=f(0)+f'(0)\cdot\frac1n+\frac12f''(0)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(⇐) 由 $f(0)=f'(0)=0\Rightarrow f\left(\frac1n\right)=\frac12f''(0)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ 而 $f''(0)$ 存在 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f\left(\frac1n\right)$ 收敛

(⇒) 反证法：假设 $f'(0)\neq0$ 令 $f'(0)=a$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f\left(\frac1n\right)}{\frac1n}=f'(0)=a$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac1n$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f\left(\frac1n\right)$ 收敛

6. $\sqrt{a_na_{n+1}}\leq\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 收敛

a_n 单调 $\Rightarrow$ 不妨设 a_n 单增 $a_n\leq\sqrt{a_na_{n+1}}\leq a_{n+1}\Rightarrow$ 两个级数同敛散

7. (1) 由题意 $\{S_n\}$ 单增 $\to+\infty$

$\exists\varepsilon_0=\frac12$ $\forall N\in\mathbb{N}$ $\exists n_0=N+1$ 而 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$ 故 $\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{S_{N+1}}{S_{N+p}}=0$ 由极限保号性 $\exists p_0$ s.t. $\frac{S_{N+1}}{S_{N+p_0}}<\frac12$

$\left|\frac{a_{N+1}}{S_{N+1}}+\frac{a_{N+2}}{S_{N+2}}+\cdots+\frac{a_{N+p}}{S_{N+p}}\right|\geq\frac{\sum\limits_{i=N+2}^{N+p}a_i}{S_{N+p}}=\frac{S_{N+p}-S_{N+1}}{S_{N+p}}=1-\frac{S_{N+1}}{S_{N+p}}>\frac12=\varepsilon_0$

由柯西收敛 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 发散

(2) $\frac{a_n}{S_n^2}<\frac{a_n}{S_nS_{n-1}}=\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}$ 而 $T_n=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_n}\right)=\frac{1}{S_1}$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛

(3) ① a_n 无界 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{1+a_n}=1\neq0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 发散

② a_n 有界 不妨设 $a_n\leq M\Rightarrow\frac{a_n}{1+a_n}\geq\frac{a_n}{1+M}$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{1+M}$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 发散

(4) $\frac{a_n}{1+n^2a_n}\leq\frac{a_n}{n^2a_n}=\frac{1}{n^2}$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$ 收敛

同7(1)

8. 记 $S=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ $r_n=S-\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_n$ $(n=1,2\cdots)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_k=S\Rightarrow\{r_n\}$ 单减 $\to0$

$\exists\varepsilon_0=\frac12$ $\forall N\in\mathbb{N}$ $\exists n_0=N+1$ 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}r_n=0\Rightarrow\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{r_{N+p}}{r_{N+1}}=0$ 由极限保号性 $\exists p_0$ s.t. $\frac{r_{N+p_0}}{r_{N+1}}<\frac12$

$\left|\frac{a_{N+1}}{r_{N+1}}+\cdots+\frac{a_{N+p}}{r_{N+p}}\right|\geq\frac{\sum\limits_{k=N+1}^{N+p}a_k}{r_{N+1}}=\frac{r_{N+1}-r_{N+p}}{r_{N+1}}=1-\frac{r_{N+p}}{r_{N+1}}>\frac12=\varepsilon_0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{r_n}$ 发散

9. $\begin{cases}\frac{a_n}{a_1}=\frac{a_n}{a_{n-1}}\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\cdots\times\frac{a_2}{a_1}\\ \frac{b_n}{b_1}=\frac{b_n}{b_{n-1}}\times\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\times\cdots\times\frac{b_2}{b_1}\end{cases}$ 由 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\frac{b_{n+1}}{b_n}\Rightarrow\frac{a_n}{a_1}\leq\frac{b_n}{b_1}\Rightarrow a_n\leq\frac{b_1}{a_1}b_n$

而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛

10. (1) ① $p>1$ 时 $\left|\frac{(-1)^{[\sqrt n]}}{n^p}\right|=\frac{1}{n^p}$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt n]}}{n^p}$ 绝对收敛

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt n]}}{n^p}=-\left(\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{8^p}\right)+\cdots=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{(k^2)^p}+\frac{1}{(k^2+1)^p}+\cdots+\frac{1}{(k^2+2k)^p}\right]$

② $p=1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt n]}}{n^p}=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{k^2}+\cdots+\frac{1}{k^2+k}+\cdots+\frac{1}{k^2+2k}\right]$

$\frac{2}{k+1}=k\cdot\frac{1}{k^2+k}+(k+1)\frac{1}{(k+1)^2}<\overbrace{\underbrace{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots}_{k项}+\underbrace{\frac{1}{k^2+k}+\cdots+\frac{1}{k^2+2k}}_{k+1项}}^{=d_k}<\frac{k}{k^2}+\frac{k+1}{k(k+1)}=\frac2k$

$k\to+\infty$ $d_k\to0$ d_k 单减 由莱布尼茨判别法 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt n]}}{n}$ 收敛

③ $0<p<1$ 时 见下页

令 $b_n=\frac{1}{(n^2)^p}+\frac{1}{(n^2+1)^p}+\cdots+\frac{1}{[(n+1)^2-1]^p}>0$

$b_n=\int_{n^2-1}^{n^2}\left(\frac{1}{n^2}\right)^p dx+\int_{n^2}^{n^2+1}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)^p dx+\cdots+\int_{(n+1)^2-2}^{(n+1)^2-1}\left(\frac{1}{(n+1)^2-1}\right)^p dx$

$<\int_{n^2-1}^{n^2}\frac{dx}{x^p}+\int_{n^2}^{n^2+1}\frac{dx}{x^p}+\cdots+\int_{(n+1)^2-2}^{(n+1)^2-1}\frac{dx}{x^p}=\int_{n^2-1}^{(n+1)^2-1}\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{1-p}\{[(n+1)^2-1]^{1-p}-(n^2-1)^{1-p}\}$

$b_n=\int_{n^2}^{n^2+1}\left(\frac{1}{n^2}\right)^p dx+\int_{n^2+1}^{n^2+2}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)^p dx+\cdots+\int_{(n+1)^2-1}^{(n+1)^2}\left(\frac{1}{(n+1)^2-1}\right)^p dx$

$>\int_{n^2}^{n^2+1}\frac{dx}{x^p}+\int_{n^2+1}^{n^2+2}\frac{dx}{x^p}+\cdots+\int_{(n+1)^2-1}^{(n+1)^2}\frac{dx}{x^p}=\int_{n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{1-p}[(n+1)^{2(1-p)}-n^{2(1-p)}]$

$p=\frac12$时 $b_n>\frac{1}{1-p}[(n+1)-n]=\frac{1}{1-p}\Rightarrow(-1)^n b_n\nrightarrow0\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n b_n$发散

$0<p<\frac12$时 固定$n\in N$ 考虑$f(\alpha)=\frac{1}{1-p}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]\Rightarrow f'(\alpha)=\frac{1}{1-p}[(n+1)^\alpha\ln(1+n)-n^\alpha\ln n]>0\quad(\alpha\geq1)$

即$f(\alpha)$当$\alpha\geq1$时单增 $f(\alpha)\geq f(1)\quad(\alpha\geq1)$

特别地 $0<p<\frac12$时 $\alpha=2(1-p)>1$ 有 $b_n>\frac{1}{1-p}[(n+1)^{2(1-p)}-n^{2(1-p)}]\geq\frac{1}{1-p}[(n+1)-n]=\frac{1}{1-p}$

$\Rightarrow(-1)^n b_n\nrightarrow0\ (n\to+\infty)\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n b_n$发散

$\frac12<p<1$时 $\frac{1}{1-p}\{[(n+1)^2-1]^{1-p}-(n^2-1)^{1-p}\}-\frac{1}{1-p}\{n^{2(1-p)}-(n-1)^{2(1-p)}\}$

$=\frac{1}{1-p}n^{2(1-p)}\{(1+\frac{2}{n})^{1-p}-(1-\frac{1}{n^2})^{1-p}-1+(1-\frac1n)^{2(1-p)}\}$

$=\frac{1}{1-p}n^{2(1-p)}\{1+\frac{2(1-p)}{n}+\frac{(1-p)(-p)}{2}\frac{4}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})-(1-\frac{1-p}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}))-1+1-\frac{2(1-p)}{n}$

$+\frac{2(1-p)(1-2p)}{2}\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\}$

$=\frac{1}{n^{2p}}(2(1-2p)+o(1))<0$ （n充分大）

$\therefore$ n充分大时有 $\frac{1}{1-p}[(n+1)^{2(1-p)}-n^{2(1-p)}]<b_n<\frac{1}{1-p}[n^{2(1-p)}-(n-1)^{2(1-p)}]$

$\Rightarrow\{b_n\}$单减 $\frac12<p<1$ 有 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-p}[n^{2(1-p)}-(n-1)^{2(1-p)}]=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-p}n^{2(1-p)}[1-(1-\frac1n)^{2(1-p)}]$

$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-p}n^{2(1-p)}[1-(1-\frac{2(1-p)}{n}+o(\frac1n))]$

$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-p}n^{2(1-p)}\cdot\frac{2(1-p)}{n}(1+o(1))=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+o(1)}{n^{2p-1}}=0$

有$\lim_{n\to+\infty}b_n=0$ 由莱布尼茨判别法 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n b_n$收敛

综上 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt n]}}{n^p}$ $\begin{cases}p\leq\frac12 & 发散\\ \frac12<p\leq1 & 条件收敛\\ p>1 & 绝对收敛\end{cases}$

(2) $(-1)^n\sin n=\sin(n+n\pi)$ $\frac1n$单减$\to0$

设 $S_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(n+n\pi)$ $\left|2\sin\frac12(1+\pi)\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(n+n\pi)\right|=\left|\cos\frac12(1+\pi)-\cos[(n+\frac12)(1+\pi)]\right|\Rightarrow|S_n|\leq\frac{1}{|\sin\frac12(1+\pi)|}$

由D判别法 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin n}{n}$收敛

(3) 设 $g(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$ $g'(x)=\frac{-x^2+1}{(1+x)^4}<0\ (x>1)$

$\Rightarrow\frac{n}{(1+n)^2}$单减 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{(1+n)^2}=0$ 由莱布尼茨判别法 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{(1+n)^2}$收敛

(4) $\frac{1}{\sqrt n-1}-\frac{1}{\sqrt n+1}=\frac{2}{n-1}\Rightarrow$原式$=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{n-1}$ 而$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{n-1}$发散$\Rightarrow$原级数发散

(5) $\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac1n)^n}=\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n}>(1-\frac{1}{n+1})\frac{n+1}{n}=1$ （数分I P33）

$\Rightarrow(1+\frac1n)^n$单增$\Rightarrow n\ln\frac{n+1}{n}=\ln(1+\frac1n)^n$单增$\to1-n\ln\frac{n+1}{n}$单减 $\lim_{n\to+\infty}(1-n\ln\frac{n+1}{n})=0$

由莱布尼茨判别法$\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(1-n\ln\frac{n+1}{n})$收敛

(6) 设 $g(x)=\frac1x\arctan^\alpha x=\frac{\frac{\alpha x}{x^2+1}\arctan^{\alpha-1}x-\arctan^\alpha x}{x^2}\ (x\to+\infty)<0$

故$\exists N\in N$当$n>N$时 $\frac{\arctan^\alpha n}{n}$单减 $\lim_{n\to+\infty}\frac{\arctan^\alpha n}{n}=0$ 由莱布尼茨判别法 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\arctan^\alpha n$收敛

(7) 设$f(x)=\frac{\sqrt x}{1+x}$ $f'(x)=\frac{\frac12x^{-\frac12}(1+x)-x^{\frac12}}{(1+x)^2}=\frac{1-x}{2\sqrt x(1+x)^2}<0\ (x>1)$

$\Rightarrow\frac{\sqrt n}{1+n}$单减 $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt n}{1+n}=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sqrt n}{1+n}$收敛

(8) 设 $a_n=\frac1n(1+\frac12+\cdots+\frac1n)$ $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}(1+\frac12+\frac13+\cdots+\frac{1}{n+1})-\frac1n(1+\frac12+\frac13+\cdots+\frac1n)=\frac{\frac{n}{n+1}-(c+\ln n+\varepsilon_n)}{n(n+1)}<0\ (n\to+\infty)$

$\Rightarrow\{a_n\}$单减 $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$ 而$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\sin n\alpha\right|\leq\frac{1}{|\sin\frac\alpha2|}\ (\alpha\neq2k\pi)$ $\alpha=2k\pi$时 $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin n\alpha=0$

由D判别法 $\sum_{n=1}^{+\infty}(1+\frac12+\cdots+\frac1n)\frac{\sin n\alpha}{n}$收敛

11.(1) $\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^p})=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac12\frac{1}{n^{2p}}+o(\frac{1}{n^{2p}})\quad(n\to+\infty)$

① $p>1$时 $\left|\frac{(-1)^n}{n^p}\right|=\frac{1}{n^p}$ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2p}}$收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}[\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac12\frac{1}{n^{2p}}]$绝对收敛 $\Rightarrow\sum_{n=2}^{+\infty}\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^p})$绝对收敛

② $\frac12<p\leq1$时 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$条件收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2p}}$绝对收敛 $\Rightarrow\sum_{n=2}^{+\infty}\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^p})$条件收敛

③ $0<p\leq\frac12$时 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$条件收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2p}}$发散 $\Rightarrow\sum_{n=2}^{+\infty}\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^p})$发散

④ $p<0$时 $\lim_{n\to+\infty}\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^p})\neq0\Rightarrow\sum_{n=2}^{+\infty}\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^p})$发散

书本4 P51

(2) $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}\right|=\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right|$

① $\alpha\leq-1$时 $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|<1\Rightarrow|a_n|<|a_{n+1}|$单增 $\lim_{n\to+\infty}a_n\neq0$ 故$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$发散

② $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right|=\left|(1+\frac1n)(1+\frac{\alpha}{n}+o(\frac1n))\right|=\left|1+\frac{\alpha+1}{n}+o(\frac1n)\right|$

$\alpha+1>1$即$\alpha>0$时 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$绝对收敛 $\alpha<0$时 $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$发散 （高斯判别法）

③ $-1<\alpha<0$时 $\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|<1\Rightarrow|a_{n+1}|<|a_n|$ $|a_n|$单减

$\ln|a_n|=\ln\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\right|=\ln\left|(1-\frac{\alpha+1}{1})(1-\frac{\alpha+1}{2})\cdots(1-\frac{\alpha+1}{n})\right|=\sum_{k=1}^{n}\ln(1-\frac{\alpha+1}{k})$

$k\to+\infty$ $\frac{\ln(1-\frac{\alpha+1}{k})}{-\frac{\alpha+1}{k}}\to1$ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac1k\to+\infty\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1-\frac{\alpha+1}{k})$发散到$-\infty\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}|a_n|=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$条件收敛

(3) $\frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p}=\frac{(-1)^n}{n^p}\left(\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}}\right)^p=\frac{(-1)^n}{n^p}(1-p\frac{(-1)^n}{n}+o(\frac1n))=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{p}{n^{p+1}}+o(\frac{1}{n^{p+1}})$

① $p\leq0$时 $\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p}\neq0\Rightarrow$原级数发散

② $0<p<1$时 $\left|\frac{(-1)^n}{n^p}\right|=\frac{1}{n^p}$ $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$发散 $\Rightarrow\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$不绝对收敛 而$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{p+1}}$绝对收敛

$\Rightarrow\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$不绝对收敛 而$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$收敛（莱布尼茨判别法）$\Rightarrow\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$条件收敛

③ $p>1$时 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$收敛 $\Rightarrow\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p}$绝对收敛

(4) $|(-1)^n(1-\cos\frac1n)^\alpha|=|(1-\cos\frac1n)^\alpha|\sim(\frac{1}{2n^2})^\alpha\ (n\to+\infty)$ $(-1)^n(1-\cos\frac1n)^\alpha=(-1)^n(\sin\frac{1}{2n})^{2\alpha}$

① $\alpha>\frac12$时 $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac12)^\alpha\frac{1}{n^{2\alpha}}$收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(1-\cos\frac1n)^\alpha$绝对收敛

② $0<\alpha\leq\frac12$时 $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac12)^\alpha\frac{1}{n^{2\alpha}}$发散$\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(1-\cos\frac1n)^\alpha$不绝对收敛

$n\to+\infty$ $(\sin\frac{1}{2n})^{2\alpha}$单减 $\lim_{n\to+\infty}(\sin\frac{1}{2n})^{2\alpha}=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(1-\cos\frac1n)^\alpha$条件收敛

(5) $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}=\frac\pi2\Rightarrow\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sim\sqrt{\frac2\pi\frac{1}{2n+1}}$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}\Big/\frac{1}{(2n+1)^{\frac32}}=\sqrt{\frac2\pi}$ 而$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^{\frac32}}$收敛 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}$绝对收敛

12. 不一定 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac1n$收敛, 但$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac1n$发散

13. 必要性显然（收敛序列子列必收敛）

下证充分性 由$\sum_{k=1}^{+\infty}A_k$收敛$\Rightarrow\lim_{k\to+\infty}A_k=\lim_{k\to+\infty}\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k}a_i=0$ 且$\lim_{k\to+\infty}S'_k$存在

对$\forall k\in N$ s.t. $|S_n-S'_{k-1}|=|S_n-S_{n_{k-1}}|=\left|\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n}a_i\right|\leq|A_k|\to0\ (k\to+\infty)$

由$\lim_{k\to+\infty}S'_{k-1}$存在$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}S_n$存在$\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛

14. $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt n}+\frac1n}{\frac{(-1)^n}{\sqrt n}}=1\neq0$ 而$\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{(-1)^n}{\sqrt n}+\frac1n)$发散 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt n}$收敛

15. $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt n}$ $b_n=\frac1n=o(\frac{(-1)^n}{\sqrt n})$ 而$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$发散 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt n}$收敛

16. 由$\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-b_{n+1})$收敛$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k+1})=\lim_{n\to+\infty}(b_1-b_n)$存在$\Rightarrow\exists M>0$ s.t. $|b_n|<M$

由$\sum_{n=1}^{+\infty}|b_n-b_{n+1}|$绝对收敛$\Rightarrow\exists N_1\in N$当$n>N_1$时 $\forall q\in N$有$\left|\sum_{k=n+1}^{n+q}|b_k-b_{k+1}|\right|<M$

由$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛$\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists N_2\in N$当$n>N_2$时 $\forall m\in N$有$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m}a_k\right|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0\ \exists N=\max\{N_1,N_2\}$ 当$n>N$ $\forall p\in N$ 令$A_k=\sum_{i=n+1}^{k}a_i$ 即$|A_k|<\varepsilon$

$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(b_k-b_{k+1})A_k+b_{n+p}A_{n+p}\right|\leq\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|b_k-b_{k+1}|\varepsilon+|b_n|\varepsilon\leq2M\varepsilon\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$收敛

17. 由$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$部分和$\{S_n\}$有界, 令$A_k=\sum_{i=n+1}^{k}a_i$ 则$\exists M>0$ s.t. $|A_k|<M$

由$\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-b_{n+1})$绝对收敛$\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists N_1\in N$当$n>N_1$时 $\forall q\in N$有$\left|\sum_{k=n+1}^{n+q}|b_k-b_{k+1}|\right|<\varepsilon$

由$\lim_{n\to+\infty}b_n=0\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists N_2\in N$当$n>N_2$时 $|b_n|<\varepsilon$

$\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists N=\max\{N_1,N_2\}$ 当$n>N$ $\forall p\in N$有

$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(b_k-b_{k+1})A_k+b_{n+p}A_{n+p}\right|\leq\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|b_k-b_{k+1}||A_k|+|b_n||A_n|\leq M\varepsilon+M\varepsilon=2M\varepsilon$

$\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$收敛

令 $b_n=\frac{1}{(n^2)^p}+\frac{1}{(n^2+1)^p}+\cdots+\frac{1}{[(n+1)^2-1]^p}>0$

$b_n=\int_{n^2-1}^{n^2}\left(\frac{1}{n^2}\right)^p dx+\int_{n^2}^{n^2+1}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)^p dx+\cdots+\int_{(n+1)^2-2}^{(n+1)^2-1}\left(\frac{1}{(n+1)^2-1}\right)^p dx$

$<\int_{n^2-1}^{n^2}\frac{dx}{x^p}+\int_{n^2}^{n^2+1}\frac{dx}{x^p}+\cdots+\int_{(n+1)^2-2}^{(n+1)^2-1}\frac{dx}{x^p}=\int_{n^2-1}^{(n+1)^2-1}\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{1-p}\{[(n+1)^2-1]^{1-p}-(n^2-1)^{1-p}\}$

$b_n=\int_{n^2}^{n^2+1}\left(\frac{1}{n^2}\right)^p dx+\int_{n^2+1}^{n^2+2}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)^p dx+\cdots+\int_{(n+1)^2-1}^{(n+1)^2}\left(\frac{1}{(n+1)^2-1}\right)^p dx$

$>\int_{n^2}^{n^2+1}\frac{dx}{x^p}+\int_{n^2+1}^{n^2+2}\frac{dx}{x^p}+\cdots+\int_{(n+1)^2-1}^{(n+1)^2}\frac{dx}{x^p}=\int_{n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{1-p}[(n+1)^{2(1-p)}-n^{2(1-p)}]$

$p=\frac12$时 $b_n>\frac{1}{1-p}[(n+1)-n]=\frac{1}{1-p}\Rightarrow(-1)^n b_n\not\to0\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n b_n$发散

$0<p<\frac12$时 固定$n\in N$ 考虑 $f(\alpha)=\frac{1}{1-p}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]\Rightarrow f'(\alpha)=\frac{1}{1-p}[(n+1)^\alpha\ln(1+n)-n^\alpha\ln n]>0\quad(\alpha>1)$

即 $f(\alpha)$ 当$\alpha>1$时单增 $f(\alpha)>f(1)\quad(\alpha>1)$

特别地 $0<p<\frac12$时 $\alpha=2(1-p)>1$ 有 $b_n>\frac{1}{1-p}[(n+1)^{2(1-p)}-n^{2(1-p)}]>\frac{1}{1-p}[(n+1)-n]=\frac{1}{1-p}$

$\Rightarrow(-1)^n b_n\not\to0\ (n\to+\infty)\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n b_n$发散

$\frac12<p<1$时 $\frac{1}{1-p}\{[(n+1)^2-1]^{1-p}-(n^2-1)^{1-p}\}-\frac{1}{1-p}\{n^{2(1-p)}-(n-1)^{2(1-p)}\}$

$=\frac{1}{1-p}n^{2(1-p)}\{(1+\frac2n)^{1-p}-(1-\frac1{n^2})^{1-p}-1+(1-\frac1n)^{2(1-p)}\}$

$=\frac{1}{1-p}n^{2(1-p)}\{1+\frac{2(1-p)}{n}+\frac{(1-p)(-p)}{2}\frac{4}{n^2}+o(\frac1{n^2})-(1-\frac{1-p}{n^2}+o(\frac1{n^2}))-1+1-\frac{2(1-p)}{n}$
$+\frac{2(1-p)(1-2p)}{2}\frac1{n^2}+o(\frac1{n^2})\}$

$=\frac{1}{n^{2p}}(2(1-2p)+o(1))<0$ (n充分大)

$\therefore$ n充分大时有 $\frac{1}{1-p}[(n+1)^{2(1-p)}-n^{2(1-p)}]<b_n<\frac{1}{1-p}[n^{2(1-p)}-(n-1)^{2(1-p)}]$

$\Rightarrow\{b_n\}$单减 $\frac12<p<1$ 有 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-p}[n^{2(1-p)}-(n-1)^{2(1-p)}]=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-p}n^{2(1-p)}[1-(1-\frac1n)^{2(1-p)}]$

$=\lim_{n\to+\infty}\frac1{1-p}n^{2(1-p)}[1-(1-\frac{2(1-p)}{n}+o(\frac1n))]$

$=\lim_{n\to+\infty}\frac1{1-p}n^{2(1-p)}\cdot\frac{2(1-p)}{n}(1+o(1))=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+o(1)}{n^{2p-1}}=0$

有$\lim_{n\to+\infty}b_n=0$ 由莱布尼茨判别法 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n b_n$收敛

综上 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt n]}}{n^p}$ $\begin{cases}p\le\frac12 & 发散\\ \frac12<p\le1 & 条件收敛\\ p>1 & 绝对收敛\end{cases}$

(2) $(-1)^n\sin n=\sin(n+n\pi)$ $\frac1n$单减$\to0$

设 $S_n=\sum_{n=1}^{n}\sin(n+n\pi)$ $|2\sin\frac12(1+\pi)\sum_{n=1}^{n}\sin(n+n\pi)|=|\cos\frac12(1+\pi)-\cos(n+\frac12)(1+\pi)|\Rightarrow|S_n|\le\frac{1}{|\sin\frac12(1+\pi)|}$

由D判别法 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin n}{n}$收敛

(3) 设 $g(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$ $g'(x)=\frac{-x+1}{(1+x)^3}<0\ (x>1)$

$\Rightarrow\frac{n}{(1+n)^2}$单减 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{(1+n)^2}=0$ 由莱布尼茨判别法 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{(1+n)^2}$收敛

(4) $\frac1{\sqrt n-1}-\frac1{\sqrt n+1}=\frac{2}{n-1}\Rightarrow$原式$=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{n-1}$ 而$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac1{n-1}$发散$\Rightarrow$原级数发散

(5) $\frac{(1+\frac1{n+1})^{n+1}}{(1+\frac1n)^n}=\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}=(1-\frac1{(n+1)^2})^{n+1}\frac{n+1}{n}>(1-\frac1{n+1})\frac{n+1}{n}=1$ (贝努利 P33)

$\Rightarrow(1+\frac1n)^n$单增$\Rightarrow n\ln\frac{n+1}{n}=\ln(1+\frac1n)^n$单增$\Rightarrow 1-n\ln\frac{n+1}{n}$单减 $\lim_{n\to+\infty}(1-n\ln\frac{n+1}{n})=0$

由莱布尼茨判别法$\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(1-n\ln\frac{n+1}{n})$收敛

(6) 设 $p(x)=\frac1x\arctan^n x$ $p'(x)=\frac{\frac{nx}{x^2+1}\arctan^{n-1}x-\arctan^n x}{x^2}\ (x\to+\infty)<0$

故$\exists N\in N$ 当$n>N$时 $\frac{\arctan^n n}{n}$单减 $\lim_{n\to+\infty}\frac{\arctan^n n}{n}=0$ 由莱布尼茨判别法 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\arctan^n n$收敛

(7) 设 $f(x)=\frac{\sqrt x}{1+x}$ $f'(x)=\frac{\frac12x^{-\frac12}(1+x)-x^{\frac12}}{(1+x)^2}=\frac{1-x}{2\sqrt x(1+x)^2}<0\ (x>1)$

$\Rightarrow\frac{\sqrt n}{1+n}$单减 $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt n}{1+n}=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sqrt n}{1+n}$收敛

(8) 设 $a_n=\frac1n(1+\frac12+\cdots+\frac1n)$ $a_{n+1}-a_n=\frac1{n+1}(1+\frac12+\cdots+\frac1{n+1})-\frac1n(1+\frac12+\cdots+\frac1n)=\frac{\frac{n}{n+1}-(c+\ln n+\varepsilon_n)}{n(n+1)}<0\ (n\to+\infty)$

$\Rightarrow\{a_n\}$单减 $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$ 而 $|\sum_{n=1}^{n}\sin n\alpha|\le\frac1{|\sin\frac\alpha2|}\ (\alpha\ne2k\pi)$ $\alpha=2k\pi$时 $\sum_{n=1}^{n}\sin n\alpha=0$

由D判别法 $\sum_{n=1}^{+\infty}(1+\frac12+\cdots+\frac1n)\frac{\sin n\alpha}{n}$收敛

11. (1) $\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^p})=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac12\frac1{n^{2p}}+o(\frac1{n^{2p}})\quad(n\to+\infty)$

① $p>1$时 $|\frac{(-1)^n}{n^p}|=\frac1{n^p}$ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac1{n^p},\sum_{n=1}^{+\infty}\frac1{n^{2p}}$收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}[\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac12\frac1{n^{2p}}]$绝对收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^p})$绝对收敛

② $\frac12<p\le1$时 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$条件收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac1{n^{2p}}$绝对收敛 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^p})$条件收敛

③ $0<p\le\frac12$时 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$条件收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac1{n^{2p}}$发散 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^p})$发散

④ $p\le0$时 $\lim_{n\to+\infty}\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^p})\ne0\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^p})$发散

书第4 P51

(2) $|\frac{a_n}{a_{n+1}}|=|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}|=|\frac{n+1}{\alpha-n}|$

① $\alpha\le-1$时 $|\frac{a_n}{a_{n+1}}|<1\Rightarrow|a_n|<|a_{n+1}|$单增 $\lim_{n\to+\infty}a_n\ne0$ 故$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$发散

② $|\frac{a_n}{a_{n+1}}|=|\frac{n+1}{\alpha-n}|=|(1+\frac1n)(1+\frac{\alpha}{n}+o(\frac1n))|=|1+\frac{\alpha+1}{n}+o(\frac1n)|$

$\alpha+1>1$即$\alpha>0$时 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$绝对收敛 $\alpha<0$时 $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$发散 (高斯判别法)

③ $-1<\alpha<0$时 $|\frac{\alpha-n}{n+1}|<1\Rightarrow|a_{n+1}|<|a_n|$ $|a_n|$单减

$\ln|a_n|=\ln|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}|=\ln|(1-\frac{\alpha+1}{1})(1-\frac{\alpha+1}{2})\cdots(1-\frac{\alpha+1}{n})|=\sum_{k=1}^{n}\ln|1-\frac{\alpha+1}{k}|$

$k\to+\infty$ $\frac{\ln(1-\frac{\alpha+1}{k})}{-\frac{\alpha+1}{k}}\to1$ $\sum_{k=1}^{n}\frac1k\to+\infty\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1-\frac{\alpha+1}{k})$发散到$-\infty\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}|a_n|=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$条件收敛

(3) $\frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p}=\frac{(-1)^n}{n^p}\left(\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}}\right)^p=\frac{(-1)^n}{n^p}(1-p\frac{(-1)^n}{n}+o(\frac1n))=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{p}{n^{p+1}}+o(\frac1{n^{p+1}})$

① $p\le0$时 $\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p}\ne0\Rightarrow$原级数发散

② $0<p\le1$时 $|\frac{(-1)^n}{n^p}|=\frac1{n^p}$ $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac1{n^p}$发散 $\Rightarrow\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$不绝对收敛 而$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac1{n^{p+1}}$绝对收敛

$\Rightarrow\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$不绝对收敛 而 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$收敛(莱布尼茨判别法)$\Rightarrow\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$条件收敛

③ $p>1$时 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac1{n^p}$收敛 $\Rightarrow\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p}$绝对收敛

(4) $|(-1)^n(1-\cos\frac1n)^\alpha|=|(1-\cos\frac1n)^\alpha|\sim(\frac1{2n^2})^\alpha\ (n\to+\infty)$ $(-1)^n(1-\cos\frac1n)^\alpha=(-1)^n(\sin\frac1{2n})^{2\alpha}$

① $\alpha>\frac12$时 $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac12)^\alpha\frac1{n^{2\alpha}}$收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(1-\cos\frac1n)^\alpha$绝对收敛

② $0<\alpha\le\frac12$时 $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac12)^\alpha\frac1{n^{2\alpha}}$发散$\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(1-\cos\frac1n)^\alpha$不绝对收敛

$n\to+\infty$ $(\sin\frac1{2n})^{2\alpha}$单减 $\lim_{n\to+\infty}(\sin\frac1{2n})^{2\alpha}=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(1-\cos\frac1n)^\alpha$条件收敛

(5) $\lim_{n\to+\infty}[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}]^2\frac{1}{\frac{1}{2n+1}}=\frac\pi2\Rightarrow\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sim\sqrt{\frac\pi2}\sqrt{\frac1{2n+1}}$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}}{\frac1{(2n+1)^{3/2}}}=\sqrt{\frac\pi2}$ 而$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac1{(2n+1)^{3/2}}$收敛 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}$绝对收敛

12. 不一定 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛,但$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac1n$发散

13. 必要性显然 (收敛序列子列必收敛)

下证充分性 由$\sum_{k=1}^{+\infty}A_k$收敛$\Rightarrow\lim_{k\to+\infty}A_k=\lim_{k\to+\infty}\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k}a_i=0$ 且$\lim_{k\to+\infty}S_k'$存在

对$\forall k\in N$ s.t. $|S_n-S_{k-1}'|=|S_n-S_{n_{k-1}}|=|\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n}a_i|\le|A_k|\to0\quad(k\to+\infty)$

由$\lim_{k\to+\infty}S_k'$存在$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}S_n$存在$\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛

14. $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt n}+\frac1n}{\frac{(-1)^n}{\sqrt n}}=1\ne0$ 而$\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{(-1)^n}{\sqrt n}+\frac1n)$发散 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt n}$收敛

15. $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt n}$ $b_n=\frac1n=o(\frac{(-1)^n}{\sqrt n})$ 而$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$发散 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt n}$收敛

16. 由$\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-b_{n+1})$收敛$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k+1})=\lim_{n\to+\infty}(b_1-b_n)$存在$\Rightarrow\exists M>0$ s.t. $|b_n|<M$

由$\sum_{n=1}^{+\infty}|b_n-b_{n+1}|$绝对收敛$\Rightarrow\exists N_1\in N$ 当$n>N_1$时 $\forall q\in N$ 有$|\sum_{k=n+1}^{n+q}|b_k-b_{k+1}||<M$

由$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛$\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists N_2\in N$ 当$n>N_2$时 $\forall m\in N$ 有$|\sum_{k=n+1}^{n+m}a_k|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0\ \exists N=\max\{N_1,N_2\}$ 当$n>N$ $\forall p\in N$ 令$A_k=\sum_{i=n+1}^{k}a_i$ 即$|A_k|<\varepsilon$

$|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k|=|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(b_k-b_{k+1})A_k+b_{n+p}A_{n+p}|\le\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|b_k-b_{k+1}|\varepsilon+|b_n|\varepsilon\le2M\varepsilon\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$收敛

17. 由$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$部分和$\{S_n\}$有界, 令$A_k=\sum_{i=1}^{k}a_i$ 则$\exists M>0$ s.t. $|A_k|<M$

由$\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-b_{n+1})$绝对收敛$\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists N_1\in N$ 当$n>N_1$时 $\forall q\in N$ 有$|\sum_{k=n+1}^{n+q}|b_k-b_{k+1}||<\varepsilon$

由$\lim_{n\to+\infty}b_n=0\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists N_2\in N$ 当$n>N_2$时 $|b_n|<\varepsilon$

$\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists N=\max\{N_1,N_2\}$ 当$n>N$ $\forall p\in N$ 有

$|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k|=|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(b_k-b_{k+1})A_k+b_{n+p}A_{n+p}|\le\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|b_k-b_{k+1}||A_k|+|b_n||A_n|\le M\varepsilon+M\varepsilon=2M\varepsilon$

$\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$收敛

20. 由上题 令 $p=4$ $q=\frac{4}{3}$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|^4$ 收敛 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n^{-\frac{5}{4}})^{\frac{4}{3}}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ 收敛

故 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 绝对收敛

21. 由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 收敛 由柯西准则 $\forall\varepsilon>0$ $\exists N_1\in N$ 当 $n>N_1$ $\forall p\in N$ s.t.

$A=\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}(a_k-a_{k+1})\cdot k\right|=\left|\sum\limits_{k=n+2}^{n+p+1}a_k+(n+1)a_{n+1}-(n+p+1)a_{n+p+1}\right|<\varepsilon$

由 $\lim\limits_{n\to+\infty}na_n$ 存在 $\Rightarrow\forall\varepsilon>0$ $\exists N_2>0$ 当 $n>N_2$ $\forall p\in N$ $\left|(n+p+1)a_{n+p+1}-(n+1)a_{n+1}\right|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists N=\max\{N_1,N_2\}+1$ 当 $n>N$ 时 $\forall q\in N$

有 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+q}a_k\right|=\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+q}a_k+(n+1)a_{n+1}-(n+q+1)a_{n+q+1}-(n+1)a_{n+1}+(n+q+1)a_{n+q+1}\right|$

$<\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+q}a_k+(n+1)a_{n+1}-(n+q+1)a_{n+q+1}\right|+\left|(n+q+1)a_{n+q+1}-(n+1)a_{n+1}\right|$

$<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛

22. ① $\{a_n\}$ 单增

$a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}\geq a_n+\cdots+a_{2n-1}\geq na_n$

$a_1+a_2+\cdots+a_{2n}\geq a_{n+1}+\cdots+a_{2n}\geq na_n$

$\Rightarrow\frac{2n-1}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}}+\frac{2n}{a_1+\cdots+a_{2n}}\leq\frac{2n-1}{na_n}+\frac{2n}{na_n}<\frac{4}{a_n}$

$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 部分和数列有上界 $\Rightarrow$ 收敛

② 一般情况 将 $\{a_n\}$ 从小到大重排得 $\{b_n\}$

由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{b_n}$ 收敛 由① $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{b_1+\cdots+b_n}$ 收敛

$b_1+b_2+\cdots+b_n\leq a_1+a_2+\cdots+a_n$

$\Rightarrow\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leq\frac{n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ 由比较判别法 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛

23. 由题意 $0\leq f(x)\leq1\Rightarrow0\leq\int_0^1f(x)dx\leq1$

而 $f(x)$ 非常值函数 $\Rightarrow\exists\varepsilon_0>0$ s.t. $0\leq\int_0^1f(x)dx\leq1-\varepsilon_0$

$\Rightarrow\varepsilon_0<1-a_n<1$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\varepsilon_0$ 发散 由比较判别法 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1-a_n)$ 发散

20. 由上题 令 $p=4$ $q=\frac{4}{3}$

$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|^4$ 收敛 $\sum_{n=1}^{+\infty}(n^{-\frac{1}{4}})^{\frac{4}{3}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ 收敛

故 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 绝对收敛

21. 由 $\sum_{n=1}^{+\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 收敛 由柯西准则 $\forall\varepsilon>0$ $\exists N_1\in N$ 当 $n>N_1$ $\forall p\in N$ s.t.

$A=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}(a_k-a_{k+1})\cdot k\right|=\left|\sum_{k=n+2}^{n+p+1}a_k+(n+1)a_{n+1}-(n+p+1)a_{n+p+1}\right|<\varepsilon$

由 $\lim_{n\to+\infty}na_n$ 存在 $\Rightarrow\forall\varepsilon>0$ $\exists N_2>0$ 当 $n>N_2$ $\forall p\in N$ $|(n+p+1)a_{n+p+1}-(n+1)a_{n+1}|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists N=\max\{N_1,N_2\}+1$ 当 $n>N$ 时 $\forall q\in N$

有 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+q}a_k\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+q}a_k+(n+1)a_{n+1}-(n+q+1)a_{n+q+1}-(n+1)a_{n+1}+(n+q+1)a_{n+q+1}\right|$

$<\left|\sum_{k=n+1}^{n+q}a_k+(n+1)a_{n+1}-(n+q+1)a_{n+q+1}\right|+\left|(n+q+1)a_{n+q+1}-(n+1)a_{n+1}\right|$

$<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛

22. ① $\{a_n\}$ 单增

$a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}\geqslant a_n+\cdots+a_{2n-1}\geqslant na_n$

$a_1+a_2+\cdots+a_{2n}\geqslant a_{n+1}+\cdots+a_{2n}\geqslant na_n$

$\Rightarrow\frac{2n-1}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}}+\frac{2n}{a_1+\cdots+a_{2n}}\leqslant\frac{2n-1}{na_n}+\frac{2n}{na_n}<\frac{4}{a_n}$

$\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 部分和数列有上界 $\Rightarrow$ 收敛

② 一般情况 将 $\{a_n\}$ 从小到大重排得 $\{b_n\}$

由 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{b_n}$ 收敛 由① $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{b_1+\cdots+b_n}$ 收敛

$b_1+b_2+\cdots+b_n\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_n$

$\Rightarrow\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant\frac{n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ 由比较判别法 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛

23. 由题意 $0\leqslant f(x)\leqslant 1\Rightarrow 0\leqslant\int_0^1 f(x)dx\leqslant 1$

而 $f(x)$ 非常值函数 $\Rightarrow\exists\varepsilon_0>0$ s.t. $0\leqslant\int_0^1 f(x)dx\leqslant 1-\varepsilon_0$

$\Rightarrow\varepsilon_0<1-a_n<1$ 而 $\sum_{n=1}^{+\infty}\varepsilon_0$ 发散 由比较判别法 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}(1-a_n)$ 发散

习题十

1、(1) ① $\left|\frac{x}{2x+1}\right| \geq 1$ 时 即 $x\in[-1,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}]$ 时

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$ 发散

② $\left|\frac{x}{2x+1}\right| < 1$ 时 即 $x\in(-\infty,-1)\cup(-\frac{1}{3},+\infty)$ 固定 x $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$ 等比级数收敛

令 $a_n=\frac{n}{n+1}$ $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n}{n+1}\Big/\frac{n+1}{n+2}<1$ 单调递增 $\frac{n}{n+1}\in(0,1)$

由A判别法 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$ 收敛

故收敛域为 $(-\infty,-1)\cup(-\frac{1}{3},+\infty)$

(2) ① $|x|>1$ 时 即 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 时

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x^n}{1-x^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^n}-1}\neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$ 发散

② $|x|<1$ 时 即 $x\in(-1,1)$

n 充分大时 $\left|\frac{x^n}{1-x^n}\right| \leq \left|\frac{x^n}{\frac{1}{2}}\right|$

而等比级数 $2x^n$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$ 收敛

故收敛域为 $(-1,1)$

2、(1) $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}x(1-x)^n=0$

$f_n'(x)=(1-x)^n+x\cdot n(1-x)^{n-1}\cdot(-1)=[1-(n+1)x](1-x)^{n-1}$

$\Rightarrow f_n(x)$ 在 $(0,\frac{1}{n+1})\uparrow$ $(\frac{1}{n+1},1)\downarrow$ 而 $f_n(x)\geq 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n+1}(1-\frac{1}{n+1})^n\right]=0$

故 $f_n(x)=x(1-x)^n$ 一致收敛

(2) $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{nx}{e^{nx^2}}=0$ 而 $f_n(x)\geq 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|f_n(\frac{1}{\sqrt{n}})-f(x)\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{e}=+\infty\neq 0$ 故 $f_n(x)=nxe^{-nx^2}$ 不一致收敛

(3) $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{e^{nx^2}}=0$

$f_n'(x)=-\frac{n^2}{e^{nx^2}}(2nx)<0$ $f_n(x)$ 单调递减 而 $f_n(x)\geq 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[a,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{e^{na^2}}=0$ 故 $f_n(x)=n^2e^{-nx^2}$ 一致收敛

(4) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2}{x^2+(1-nx)^2}=0$

$f_n'(x)=\frac{-2nx^2+2x}{[x^2+(1-nx)^2]^2}=\frac{2x(1-nx)}{[x^2+(1-nx)^2]^2}\Rightarrow f_n(x)$ 在 $(0,\frac{1}{n})\uparrow$ $(\frac{1}{n},1]\downarrow$ 而 $f(x)\geq 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(\frac{1}{n})^2}{(\frac{1}{n})^2}=1$ 故 $f_n(x)$ 不一致收敛

(5) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}n^2x(1-x^2)^n=0$

$f_n'(x)=n^2(1-x^2)^n+n^2x\cdot n(1-x^2)^{n-1}\cdot(-2x)=-n^2(1-x^2)^{n-1}[(2n+1)x^2-1]$

$\Rightarrow f_n(x)$ 在 $(0,\sqrt{\frac{1}{2n+1}})\uparrow$ $(\sqrt{\frac{1}{2n+1}},+\infty)\downarrow$ $f_n(x)\geq 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\cdot\sqrt{\frac{1}{2n+1}}(1-\frac{1}{2n+1})^n=+\infty\neq 0$

$\Rightarrow f_n(x)$ 不一致收敛

(6) $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\frac{x}{n^n}=0$

(a) $f_n(x)\geq 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\frac{b}{n^n}=0 \Rightarrow f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛

(b) 取 $x_0=\frac{\pi}{2}n^n\in(-\infty,+\infty)$

$\lim\limits_{n\to+\infty}|f_n(x_0)-f(x_0)|=\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\frac{\frac{\pi}{2}n^n}{n^n}=\frac{\pi}{2}\neq 0$

$\Rightarrow f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不一致收敛

(7) $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin n^n x}{n^\alpha}=0$

$0\leq\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|\frac{\sin n^n x}{n^\alpha}\right|\leq\frac{1}{n^\alpha}$

由夹逼收敛 $\Rightarrow \lim\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=0$

$\Rightarrow f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛

(8) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(\sin x)^{n^\alpha}=\begin{cases}1 & x=\frac{\pi}{2}\\ 0 & x\in[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi]\end{cases}$

令 $x_0=\arcsin(\frac{1}{2})^{\frac{1}{n^\alpha}}\in[0,\pi]$

$\lim\limits_{n\to+\infty}[f_n(x_0)-f(x_0)]=\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(\arcsin(\frac{1}{2})^{\frac{1}{n^\alpha}})^{n^\alpha}=\frac{1}{2}\neq 0$

故 $f_n(x)$ 在 $(0,\pi)$ 不一致收敛

3、(1) $f_n(x)=x^{1-\frac{1}{2^n}}$ $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=x$

设 $g(x)=f_n(x)-f(x)=x^{1-\frac{1}{2^n}}-x$ $g(x)\geq 0$

$g'(x)=(1-\frac{1}{2^n})x^{-\frac{1}{2^n}}-1=0 \Rightarrow x_0=\left(\frac{2^n}{2^n-1}\right)^{-2^n}\xlongequal{t=2^n}\left(\frac{t-1}{t}\right)^t$ $g(x)$ 在 $(0,x_0)\uparrow(x_0,1)\downarrow$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in(0,1)}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[\left(\frac{t-1}{t}\right)^{t(1-\frac{1}{t})}-\left(\frac{t-1}{t}\right)^t\right]=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^t\left[\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-1}-1\right]=0$

故 $\{f_n(x)=x^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}}\}$ $x\in(0,1)$ 一致收敛

(2) $\left|\frac{1}{n^2+x^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛

(3) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\sin x\sin kx\right|=|\sin x|\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leq|\sin x|\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}=2|\cos\frac{x}{2}|\leq 2$ $(x\neq 2m\pi)$

$x=2m\pi$ 时 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\sin x\sin kx\right|=0$

而 $\frac{1}{\sqrt{n+x^2}}\leq\frac{1}{\sqrt{n}}$ 单调递减 $\rightrightarrows 0$

由D判别法 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x^2}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛

(4) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\right|\leq 1$ $\frac{1}{n+x^2}\leq\frac{1}{n}$ 单调递减 $\rightrightarrows 0$

由D判别法 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛

(5) $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}n^\alpha x(1-x)^n=0$

$f_n'(x)=n^\alpha(1-x)^n+n^\alpha x\cdot n(1-x)^{n-1}\cdot(-1)=n^\alpha(1-x)^{n-1}(1-(n+1)x)$

$\Rightarrow f_n(x)$ 在 $(0,\frac{1}{n+1})\uparrow$ $(\frac{1}{n+1},1)\downarrow$ $f_n(x)\geq 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to+\infty}n^\alpha(\frac{1}{n+1})(1-\frac{1}{n+1})^n$ ①

$\Rightarrow \alpha<1$ 时 ① $=0 \Rightarrow f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 一致收敛

$\alpha\geq 1$ 时 ① $\neq 0 \Rightarrow f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 不一致收敛

(6) $\left|\frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}\right|=\left|\frac{1}{n^\alpha(\frac{1}{x}+nx)}\right|\leq\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$

$\alpha+\frac{1}{2}>1$ 时即 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛

$\alpha\leq\frac{1}{2}$ 时 $\exists\varepsilon_0=\frac{1}{3\sqrt{2}}$ $\forall N$ 取 $n>N$ 取 $x'=\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\left|u_{n+1}(\frac{1}{\sqrt{n}})+\cdots+u_{2n}(\frac{1}{\sqrt{n}})\right|=\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{(n+1)^\alpha(1+\frac{n+1}{n})}+\cdots+\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{(2n)^\alpha(1+\frac{2n}{n})}$

$\geq\frac{n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}{3\sqrt{2n}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}=\varepsilon_0\Rightarrow$ 级数发散

4、$f_2(x)=f(ax+b)=a^2x+ab+b$ $f_3(x)=a^3x+a^2b+ab+b$

归纳假设 $f_n(x)=a^nx+a^{n-1}b+a^{n-2}b+\cdots+ab+b=\frac{1-a^n}{1-a}b+a^nx$ (数学归纳法易证✓)

(1) $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1-a^n}{1-a}b+a^nx\right)=\frac{b}{1-a}$

设 $g(x)=a^nx+\frac{1-a^n}{1-a}b-\frac{b}{1-a}\uparrow$ $\forall[c,d]$ $|g(x)|_{max}$ 在端点处取，不妨令 $|g(x)|_{max}=|g(d)|$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[c,d]}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|a^n d+\frac{1-a^n}{1-a}b-\frac{b}{1-a}\right|=0$

故 $\{f_n(x)\}$ 在任意闭区间内一致收敛

(2) 取 $x_0=\frac{1}{a^n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}[f_n(x_0)-f(x_0)]=1\neq 0\Rightarrow\{f_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致收敛

5、由 $\{b_n\}$ 有界 $\Rightarrow\exists M$ s.t. $|b_n|<M$ $\forall[-x_0,x_0]\subset(-\infty,+\infty)$

$|b_n\sin a_nx|\leq M|a_n|x_0$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|<+\infty\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}M|a_n|x_0$ 收敛

由M判别法 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n\sin a_nx$ 在 $[-x_0,x_0]$ 一致收敛

由 x_0 任意性 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n\sin a_nx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内闭一致收敛

习题十

1、(1) ① $\left|\frac{x}{2x+1}\right| \geq 1$ 时 即 $x \in [-1,-\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}]$ 时

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$ 发散

② $\left|\frac{x}{2x+1}\right| < 1$ 时 即 $x \in (-\infty,-1) \cup (-\frac{1}{3},+\infty)$ 固定 x $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$ 等比级数收敛

令 $a_n = \frac{n}{n+1}$ $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n}{n+1} \Big/ \frac{n+1}{n+2} < 1$ 单调递增 $\frac{n}{n+1} \in (0,1)$

由 A 判别法 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$ 收敛

故收敛域为 $(-\infty,-1) \cup (-\frac{1}{3},+\infty)$

(2) ① $|x| > 1$ 时 即 $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ 时

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^n}-1} \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ 发散

② $|x| < 1$ 时 即 $x \in (-1,1)$

n 充分大时 $\left|\frac{x^n}{1-x^n}\right| \leq \left|\frac{x^n}{\frac{1}{2}}\right|$

而等比级数 $2x^n$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ 收敛

故收敛域为 $(-1,1)$

2、(1) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} x(1-x)^n = 0$

$f_n'(x) = (1-x)^n + x \cdot n(1-x)^{n-1} \cdot (-1) = [1-(n+1)x](1-x)^{n-1}$

$\Rightarrow f_n(x)$ 在 $(0,\frac{1}{n+1}) \uparrow$ $(\frac{1}{n+1},1) \downarrow$ 而 $f_n(x) \geq 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{n+1}(1-\frac{1}{n+1})^n\right] = 0$

故 $f_n(x) = x(1-x)^n$ 一致收敛

(2) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{nx}{e^{nx^2}} = 0$ 而 $f_n(x) \geq 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) - f(x)| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{e} = +\infty \neq 0$ 故 $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ 不一致收敛

(3) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^{nx^2}} = 0$

$f_n'(x) = -\frac{n^2}{e^{nx^2}}(2nx) < 0$ $f_n(x)$ 单调递减 而 $f_n(x) \geq 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[a,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^{na^2}} = 0$ 故 $f_n(x) = n^2e^{-nx^2}$ 一致收敛

(4) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^2}{x^2+(1-nx)^2} = 0$

$f_n'(x) = \frac{-2nx^2+2x}{[x^2+(1-nx)^2]^2} = \frac{2x(1-nx)}{[x^2+(1-nx)^2]^2} \Rightarrow f_n(x)$ 在 $(0,\frac{1}{n}) \uparrow$ $(\frac{1}{n},1] \downarrow$ 而 $f(x) \geq 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(\frac{1}{n})^2}{(\frac{1}{n})^2} = 1$ 故 $f_n(x)$ 不一致收敛

(5) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2x(1-x^2)^n = 0$

$f_n'(x) = n^2(1-x^2)^n + n^2x \cdot n(1-x^2)^{n-1} \cdot (-2x) = -n^2(1-x^2)^{n-1}[(2n+1)x^2-1]$

$\Rightarrow f_n(x)$ 在 $(0,\sqrt{\frac{1}{2n+1}}) \uparrow$ $(\sqrt{\frac{1}{2n+1}},+\infty) \downarrow$ $f_n(x) \geq 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2n+1}}(1-\frac{1}{2n+1})^n = +\infty \neq 0$

$\Rightarrow f_n(x)$ 不一致收敛

(6) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sin\frac{x}{n^n} = 0$

(a) $f_n(x) \geq 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to+\infty} \sin\frac{b}{n^n} = 0 \Rightarrow f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛

(b) 取 $x_0 = \frac{\pi}{2}n^n \in (-\infty,+\infty)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x_0) - f(x_0)| = \lim\limits_{n\to+\infty} \sin\frac{\frac{\pi}{2}n^n}{n^n} = \frac{\pi}{2} \neq 0$

$\Rightarrow f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不一致收敛

(7) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin n^n x}{n^\alpha} = 0$

$0 \leq \sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)} \left|\frac{\sin n^n x}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$

由夹逼收敛 $\Rightarrow \lim \sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = 0$

$\Rightarrow f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛

(8) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (\sin x)^{n^\alpha} = \begin{cases} 1 & x = \frac{\pi}{2} \\ 0 & x \in [0,\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2},\pi] \end{cases}$

令 $x_0 = \arcsin(\frac{1}{2})^{\frac{1}{n^\alpha}} \in [0,\pi]$

$\lim\limits_{n\to+\infty} [f_n(x_0) - f(x_0)] = \lim\limits_{n\to+\infty} \sin(\arcsin(\frac{1}{2})^{\frac{1}{n^\alpha}})^{n^\alpha} = \frac{1}{2} \neq 0$

故 $f_n(x)$ 在 $(0,\pi)$ 不一致收敛

3、(1) $f_n(x) = x^{1-\frac{1}{2^n}}$ $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = x$

设 $g(x) = f_n(x) - f(x) = x^{1-\frac{1}{2^n}} - x$ $g(x) \geq 0$

$g'(x) = (1-\frac{1}{2^n})x^{-\frac{1}{2^n}} - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = \left(\frac{2^n}{2^n-1}\right)^{-2^n} \overset{t=2^n}{=\!=\!=} \left(\frac{t-1}{t}\right)^t$ $g(x)$ 在 $(0,x_0) \uparrow$ $(x_0,1) \downarrow$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in(0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{t\to+\infty} \left[\left(\frac{t-1}{t}\right)^{t(1-\frac{1}{t})} - \left(\frac{t-1}{t}\right)^t\right] = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(\frac{t-1}{t}\right)^t \left[\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-1} - 1\right] = 0$

故 $\{f_n(x) = x^{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}}\}$ $x \in (0,1)$ 一致收敛

(2) $\left|\frac{1}{n^2+x^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛

(3) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \sin x \sin kx\right| = |\sin x| \left|\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq |\sin x| \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} = 2\left|\cos\frac{x}{2}\right| \leq 2$ $(x \neq 2m\pi)$

$x = 2m\pi$ 时 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \sin x \sin kx\right| = 0$

而 $\frac{1}{\sqrt{n+x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ 单调递减 $\rightrightarrows 0$

由 D 判别法 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x^2}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛

(4) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k\right| \leq 1$ $\frac{1}{n+x^2} \leq \frac{1}{n}$ 单调递减 $\rightrightarrows 0$

由 D 判别法 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛

(5) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha x(1-x)^n = 0$

$f_n'(x) = n^\alpha(1-x)^n + n^\alpha x \cdot n(1-x)^{n-1} \cdot (-1) = n^\alpha(1-x)^{n-1}(1-(n+1)x)$

$\Rightarrow f_n(x)$ 在 $(0,\frac{1}{n+1}) \uparrow$ $(\frac{1}{n+1},1) \downarrow$ $f_n(x) \geq 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha(\frac{1}{n+1})(1-\frac{1}{n+1})^n$ ①

$\Rightarrow \alpha < 1$ 时 ① $= 0 \Rightarrow f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 一致收敛

$\alpha \geq 1$ 时 ① $\neq 0 \Rightarrow f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 不一致收敛

(6) $\left|\frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}\right| = \left|\frac{1}{n^\alpha(\frac{1}{x}+nx)}\right| \leq \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$

$\alpha + \frac{1}{2} > 1$ 时即 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛

$\alpha \leq \frac{1}{2}$ 时 取 $x' = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\left|u_{n+1}(\frac{1}{\sqrt{n}}) + \cdots + u_{2n}(\frac{1}{\sqrt{n}})\right| = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{(n+1)^\alpha(1+\frac{n+1}{n})} + \cdots + \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{(2n)^\alpha(1+\frac{2n}{n})}$

$\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{3\sqrt{2}}$ $\forall N$ 取 $n > N$ $\geq \frac{n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}}{3\sqrt{2n}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \varepsilon_0 \Rightarrow$ 级数发散

4、$f_2(x) = f(ax+b) = a^2x + ab + b$ $f_3(x) = a^3x + a^2b + ab + b$

归纳假设 $f_n(x) = a^nx + a^{n-1}b + a^{n-2}b + \cdots + ab + b = \frac{1-a^n}{1-a}b + a^nx$ (数学归纳法易证✓)

(1) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1-a^n}{1-a}b + a^nx\right) = \frac{b}{1-a}$

设 $g(x) = a^nx + \frac{1-a^n}{1-a}b - \frac{b}{1-a} \uparrow$ $\forall [c,d]$ $|g(x)|_{max}$ 在端点处取，不妨令 $|g(x)|_{max} = |g(d)|$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[c,d]} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|a^n d + \frac{1-a^n}{1-a}b - \frac{b}{1-a}\right| = 0$

故 $\{f_n(x)\}$ 在任意闭区间内一致收敛

(2) 取 $x_0 = \frac{1}{a^n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} [f_n(x_0) - f(x_0)] = 1 \neq 0 \Rightarrow \{f_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致收敛

5、由 $\{b_n\}$ 有界 $\Rightarrow \exists M$ s.t. $|b_n| < M$ $\forall [-x_0,x_0] \subset (-\infty,+\infty)$

$|b_n \sin a_n x| \leq M|a_n|x_0$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} M|a_n|x_0$ 收敛

由 M 判别法 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \sin a_n x$ 在 $[-x_0,x_0]$ 一致收敛

由 x_0 任意性 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \sin a_n x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内闭一致收敛

6. 令 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ 故 $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{f_n(x)}=e^{f(x)}$ $\exists M$ s.t. $e^{f(x)}\le M$

由 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛 $\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}$ 当 $n>N$ 时 $\forall x\in[0,1]$ 有 $|f_n(x)-f(x)|<\ln\frac{\varepsilon+M}{M}$

$|e^{f_n(x)}-e^{f(x)}| = e^{f(x)}|e^{f_n(x)-f(x)}-1| \le M|e^{|f_n(x)-f(x)|}-1|<\varepsilon$

$\Rightarrow \{e^{f_n(x)}\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛

7. 由 $f(x)\in C[a,b]$，$f(x)$ 无零点 $\Rightarrow$ 不妨设 $f(x)>0$ $\exists x_0\in[a,b]$ s.t. $f(x)\ge\frac{f(x_0)}{2}>0$

由 $f_n(x)\rightrightarrows f(x) \Rightarrow$ 令 $\varepsilon_0=\frac{f(x_0)}{2}$ $\exists N\in\mathbb{N}$ 当 $n>N$ 时有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon_0$

即 $0<f(x)-\varepsilon_0<f_n(x)<f(x)+\varepsilon_0$ 故 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 没有零点

8.(1) 由 $f_n(x)$、$g_n(x)$ 一致有界 $\Rightarrow \exists M>0$ s.t. $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in I$ 有 $|f_n(x)|<M, |g_n(x)|<M$

由 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $g_n(x)\rightrightarrows g(x)$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}$ 当 $n>N$ 有 $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2M}$, $|g_n(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2M}$

故 $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}$ 当 $n>N$ $\forall x\in I$

$|f_n(x)g_n(x)-f(x)g(x)| = |f_n(x)g_n(x)-f(x)g_n(x)+f(x)g_n(x)-f(x)g(x)|$

$\le |g_n(x)||f_n(x)-f(x)|+|f(x)||g_n(x)-g(x)|$

$\le M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon$

$\Rightarrow$ 在区间 I 上 $f_n(x)g_n(x)\rightrightarrows f(x)g(x)$

(2) 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}(f_n(x)-f(x))=\lim\limits_{n\to+\infty}(x-x)=0 \Rightarrow f_n(x)\rightrightarrows x$

由 $\lim\limits_{n\to+\infty}(g_n(x)-0)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0 \Rightarrow g_n(x)\rightrightarrows 0$

令 $x=n$ $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)g(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} n\cdot\frac{1}{n}=1\neq 0$

$\Rightarrow f_n(x)g_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛到 0

9. $f_n(x)=\frac{x}{n}\ (x\in(0,+\infty))$ $g_n(x)=x^n\ (x\in(0,1))$

10.(1) $f_n(x)=\begin{cases}1-nx & 0\le x\le\frac{1}{n}\\ 0 & \frac{1}{n}\le x\le 1\end{cases}$ $x_n=\frac{1}{n}$

(2) 由 $f_n(x)\rightrightarrows f(x) \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N_1\in\mathbb{N}$ 当 $n>N_1$ 时 $\forall x\in[0,1]$

有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2$

由 $x_n\to x_0$ $\forall\varepsilon>0\ \exists N_2\in\mathbb{N}$ 当 $n>N_2$ 时 $|x_n-x_0|<\varepsilon$

由 $f_n(x)\in C[0,1] \Rightarrow f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 一致收敛

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta$ 对上述 N_2，当 $n>N_2$ 时 $|x_n-x_0|<\delta$

有 $|f_n(x_n)-f_n(x_0)|<\varepsilon/2$

故 $\forall\varepsilon>0\ \exists N=\max\{N_1,N_2\}$ 当 $n>N$ 时 有

$|f_n(x_n)-f(x_0)|\le|f_n(x_n)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|$

$<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$

11. $\frac{a_n}{n^x}=\frac{a_n}{n^{x_0}}\cdot\frac{1}{n^{x-x_0}}$

由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}$ 一致有界 $\frac{1}{n^{x-x_0}}$ 单调递减（关于 n）$\rightrightarrows 0$

故 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 一致收敛

故 $\lim\limits_{x\to x_0+0}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lim\limits_{x\to x_0+0}\frac{a_n}{n^x}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}$

12. ($\Leftarrow$) 由 $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 内闭一致收敛 $\Rightarrow \forall[c,d]\subset(a,b)$ 有 $\{f_n(x)\}$ 在 $[c,d]$ 一致收敛

$\Rightarrow \forall x\in(c,d)\ \exists\delta>0$ $(x-\delta,x+\delta)\subset[c,d]$ $\{f_n(x)\}$ 一致收敛

($\Rightarrow$) 由有限覆盖定理，可以找到有限个开区间 (a_i,b_i) $(i=1,2,\cdots n)$ 将 $[a,b]$ 覆盖

对任意的 (a_i,b_i) $\exists x_i\in(a_i,b_i)$ 由局部一致收敛 $\Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n}(a_i,b_i)$ 一致收敛

$\Rightarrow \{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 内闭一致收敛

13.(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{e^{nx}}=0$ 而 $g(x)=\frac{n^2}{e^{nx}}$ 单减 对 $\forall[a,b]\subset(0,+\infty)$

$\Rightarrow \frac{n^2}{e^{nx}}\le\frac{n^2}{e^{na}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{e^{na}}}=\frac{1}{e^a}<1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{e^{na}}$ 收敛 由M判别法

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{e^{nx}}$ 在 $\forall[a,b]$ 一致收敛 $\Rightarrow$ 内闭一致收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2e^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 连续

(2) $\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{n})=\frac{\sqrt2}{2}\sin\frac{x}{n}+\frac{\sqrt2}{2}\cos\frac{x}{n}=\frac{\sqrt2}{2}\frac{x}{n}+\frac{\sqrt2}{2}+o(\frac{x}{n})$

$\Rightarrow f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{n})}{\sqrt n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n[\frac{\sqrt2}{\sqrt n}+\frac{\sqrt2}{2}\frac{x}{n\sqrt n}+o(\frac{x}{n\sqrt n})]$

$\forall[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$ $\left|\sum\limits_{n=1}^{}(-1)^n\right|\le 1$ 且 $\frac{\sqrt2}{\sqrt n}+\frac{\sqrt2 x}{2n\sqrt n}+o(\frac{x}{n\sqrt n})$ 单减 $\rightrightarrows 0$

由D判别法 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{n})}{\sqrt n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内闭一致收敛

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续

(3) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(\frac{x-1}{x})^n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}(\frac{1}{x}-1)^n$

由莱布尼茨判别法 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 有界

又 $(\frac{1}{x}-1)^n$ 单调递减 $\rightrightarrows 0$

由D判别法 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(\frac{x-1}{x})^n$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 一致收敛 $\Rightarrow$ 内闭一致收敛

$\Rightarrow f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 连续

14.(1) 先证一致收敛

$\lim\limits_{x\to3}\left|\frac{x-4}{2(x-2)}\right|=\frac{1}{2} \Rightarrow$ 令 $\varepsilon=\frac{1}{4}$ $\exists\delta$ 当 $0<|x-3|<\delta$ 时 有 $\left|\left|\frac{x-4}{2(x-2)}\right|-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$

$\Rightarrow \left|\frac{x-4}{2(x-2)}\right|^n<(\frac{1}{4}+\frac{1}{2})^n$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{3}{4})^n$ 等比级数收敛

$\Rightarrow$ 由M判别法 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{x-4}{x-2})^n$ 一致收敛

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to3}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}(\frac{x-4}{x-2})^n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\lim\limits_{x\to3}(\frac{x-4}{x-2})^n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$

令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^n}{2^n}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2^n}$

$\frac{1}{2}S_n=\qquad -\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$

$\Rightarrow S_n=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{2^n}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(\frac{1-x}{x})^n=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=-\frac{1}{3}$

(2) 由T13 (3) 知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(\frac{1-x}{x})^n$ 在 $[\frac{1}{2},+\infty)$ 内闭一致收敛

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(\frac{1-x}{x})^n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{n}(\frac{1-x}{x})^n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n})$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}[-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{2n}+2(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n})]$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}[-(c+\ln 2n+\alpha_{2n})+(c+\ln n+\alpha_n)]$

$=-\ln 2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(\frac{1-x}{x})^n=-\ln 2$

6、令 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)$ 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{f_n(x)}=e^{f(x)}$ $\exists M$ s.t $e^{f(x)}\le M$

由 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛 ⇒ $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$ 当 $n>N$ 时 $\forall x\in[0,1]$ 有 $|f_n(x)-f(x)|<\ln\frac{\varepsilon+M}{M}$

$$|e^{f_n(x)}-e^{f(x)}|=e^{f(x)}|e^{f_n(x)-f(x)}-1|\le M|e^{|f_n(x)-f(x)|}-1|<\varepsilon$$

⇒ $\{e^{f_n(x)}\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛

7. 由 $f(x)\in C[a,b]$，$f(x)$ 无零点 ⇒ 不妨设 $f(x)>0$ $\exists x_0\in[a,b]$ s.t $f(x)\ge\frac{f(x_0)}{2}>0$

由 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ ⇒ 令 $\varepsilon_0=\frac{f(x_0)}{2}$ $\exists N\in\mathbb{N}$ 当 $n>N$ 时有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon_0$

即 $0<f(x)-\varepsilon_0<f_n(x)<f(x)+\varepsilon_0$ 故 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 没有零点

8.(1) 由 $f_n(x)$、$g_n(x)$ 一致有界 ⇒ $\exists M>0$ s.t $\forall n\in\mathbb{N}$，$\forall x\in I$ 有 $|f_n(x)|<M$，$|g_n(x)|<M$

由 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$，$g_n(x)\rightrightarrows g(x)$

⇒ $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$ 当 $n>N$ 有 $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2M}$，$|g_n(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2M}$

故 $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$ 当 $n>N$ $\forall x\in I$

$$|f_n(x)g_n(x)-f(x)g(x)|=|f_n(x)g_n(x)-f(x)g_n(x)+f(x)g_n(x)-f(x)g(x)|$$

$$\le|g_n(x)||f_n(x)-f(x)|+|f(x)||g_n(x)-g(x)|$$

$$\le M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon$$

⇒ 在区间 I 上 $f_n(x)g_n(x)\rightrightarrows f(x)g(x)$

(2) 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}(f_n(x)-f(x))=\lim\limits_{n\to+\infty}(x-x)=0$ ⇒ $f_n(x)\rightrightarrows x$

由 $\lim\limits_{n\to+\infty}(g_n(x)-0)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ ⇒ $g_n(x)\rightrightarrows 0$

令 $x=n$ $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)g(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}n\cdot\frac{1}{n}=1\ne0$

⇒ $f_n(x)g_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛到 0

9. $f_n(x)=\frac{x}{n}$ $(x\in(0,+\infty))$ $g_n(x)=x^n$ $(x\in(0,1))$

10.(1) $f_n(x)=\begin{cases}1-nx & 0\le x\le\frac{1}{n}\\ 0 & \frac{1}{n}\le x\le1\end{cases}$ $x_n=\frac{1}{n}$

(2) 由 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ ⇒ $\forall\varepsilon>0$ $\exists N_1\in\mathbb{N}$ 当 $n>N_1$ 时 $\forall x\in[0,1]$

有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2$

由 $x_n\to x_0$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists N_2\in\mathbb{N}$ 当 $n>N_2$ 时 $|x_n-x_0|<\varepsilon$

由 $f_n(x)\in C[0,1]$ ⇒ $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 一致收敛

$\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta$ 对上述 N_2，当 $n>N_2$ 时 $|x_n-x_0|<\delta$

有 $|f_n(x_n)-f_n(x_0)|<\varepsilon/2$

故 $\forall\varepsilon>0$ $\exists N=\max\{N_1,N_2\}$ 当 $n>N$ 时 有

$$|f_n(x_n)-f(x_0)|\le|f_n(x_n)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|$$

$$<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

11. $\frac{a_n}{n^x}=\frac{a_n}{n^{x_0}}\cdot\frac{1}{n^{x-x_0}}$

由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛 ⇒ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}$ 一致有界 $\frac{1}{n^{x-x_0}}$ 单调递减(关于n) $\rightrightarrows 0$

故 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 一致收敛

故 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{a_n}{n^x}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}$

12.(⇐) 由 $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 内闭一致收敛

⇒ $\forall[c,d]\subset(a,b)$ 有 $\{f_n(x)\}$ 在 $[c,d]$ 一致收敛

~~$[c,d]$~~ ⇒ $\forall x\in(c,d)$ $\exists\delta>0$ $(x-\delta,x+\delta)\subset[c,d]$ $\{f_n(x)\}$ 一致收敛

(⇒) 由有限覆盖定理，可以找到有限个开区间 (a_i,b_i) $(i=1,2\cdots n)$ 将 $[a,b]$ 覆盖

对任意的 (a_i,b_i) $\exists x_0\in(a_i,b_i)$ 由局部一致收敛 ⇒ $\bigcup\limits_{i=1}^{n}(a_i,b_i)$ 一致收敛

⇒ $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 内闭一致收敛

13.(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{e^{nx}}=0$ 而 $g(x)=\frac{n^2}{e^{nx}}$ 单减 对 $\forall[a,b]\subset(0,+\infty)$

⇒ $\frac{n^2}{e^{nx}}\le\frac{n^2}{e^{na}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{e^{na}}}=\frac{1}{e^a}<1$ ⇒ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{e^{na}}$ 收敛 由M判别法

⇒ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{e^{nx}}$ 在 $\forall[a,b]$ 一致收敛 ⇒ 内闭一致收敛 ⇒ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2e^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 连续

(2) $\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{n})=\frac{\sqrt2}{2}\sin\frac{x}{n}+\frac{\sqrt2}{2}\cos\frac{x}{n}=\frac{\sqrt2}{2}\frac{x}{n}+\frac{\sqrt2}{2}+o(\frac{x}{n})$

⇒ $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{n})}{\sqrt n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n[\frac{\sqrt2}{2\sqrt n}+\frac{\sqrt2}{2}\frac{x}{n\sqrt n}+o(\frac{x}{n\sqrt n})]$

$\forall[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$ $|\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n|\le1$ 且 $\frac{\sqrt2}{2\sqrt n}+\frac{\sqrt2x}{2n\sqrt n}+o(\frac{x}{n\sqrt n})$ 单减 $\rightrightarrows 0$

由D判别法 ⇒ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{n})}{\sqrt n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内闭一致收敛

⇒ $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续

(3) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(\frac{x-1}{x})^n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}(\frac{1}{x}-1)^n$

由莱布尼茨判别法 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛 ⇒ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 有界

又 $(\frac{1}{x}-1)^n$ 单调递减 $\rightrightarrows 0$

由D判别法 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(\frac{x-1}{x})^n$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 一致收敛 ⇒ 内闭一致收敛

→ $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 连续

14.(1) 先证一致收敛

$\lim\limits_{x\to3}|\frac{x-4}{2(x-2)}|=\frac{1}{2}$ ⇒ 令 $\varepsilon=\frac{1}{4}$ $\exists\delta$ 当 $0<|x-3|<\delta$ 时 有 $||\frac{x-4}{2(x-2)}|-\frac{1}{2}|<\varepsilon$

⇒ $(\frac{x-4}{2(x-2)})^n<(\frac{1}{4}+\frac{1}{2})^n$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{3}{4})^n$ 等比级数收敛

⇒ 由M判别法 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{x-4}{x-2})^n$ 一致收敛

⇒ $\lim\limits_{x\to3}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}(\frac{x-4}{x-2})^n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\lim\limits_{x\to3}(\frac{x-4}{x-2})^n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$

令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2^k}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2^n}$

$\frac{1}{2}S_n=\quad -\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$

⇒ $S_n=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{2^n}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(\frac{1-x}{x})^n=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=-\frac{1}{3}$

(2) 由T13 (3)知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(\frac{1-x}{x})^n$ 在 $[\frac{1}{2},+\infty)$ 内闭一致收敛

⇒ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(\frac{1-x}{x})^n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{n}(\frac{1-x}{x})^n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n})$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}[-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{2n}+2(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n})]$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}[-(c+\ln2n+\alpha_{2n})+(c+\ln n+\alpha_n)]$

$=-\ln2$

⇒ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(\frac{1-x}{x})^n=-\ln2$

15. (1) 令 $u_n(x)=n^{\alpha}e^{-nx}$

① 由 $u_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续 $\Rightarrow u_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导

② $\exists x_0=1\in(0,+\infty)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}(1)}{u_n(1)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n+1)^{\alpha}e^{-(n+1)}}{n^{\alpha}e^{-n}}=\dfrac{1}{e}<1$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x_0)$ 收敛

③ $u_n'(x)=-n^{\alpha+1}e^{-nx} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}-n^{\alpha+1}e^{-nx}$

往证 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛

$\forall [a,b]\subset(0,+\infty)$ $\forall x\in[a,b]$ 有 $0<n^{1+\alpha}e^{-nx}\le n^{1+\alpha}e^{-na}$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{1+\alpha}e^{-na}$ 收敛 $\Rightarrow \sum u_n'(x)$ 内闭一致收敛

综上 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导，$f'(x)$ 存在

由数学归纳法 假设 $f^{(k)}(x)=(-1)^k\sum n^{\alpha+k}e^{-nx}$

往证 $f^{(k+1)}(x)$ 存在 对 $f^{(k)}(x)$ 重复①②③ $\Rightarrow f^{(k+1)}(x)$ 存在

由 k 的任意性 $\Rightarrow f(x)\in C^{\infty}$

(2) 令 $u_n(x)=\sin nx\, e^{-nx}$ $x\in(0,+\infty)$

① $u_n(x)$ 连续 $\Rightarrow u_n(x)$ 可导

② 取 $x_0=1$ $\left|\dfrac{\sin n}{e^n}\right|\le\dfrac{1}{e^n}$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{e^n}$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin n}{e^n}$ 绝对收敛

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x_0)$ 收敛

③ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\cos nx-\sin nx)ne^{-nx}$ 往证 在 $(0,+\infty)$ 内闭一致收敛

$\forall [a,b]\subset(0,+\infty)$ $\forall x\in[a,b]$ $\left|(\cos nx-\sin nx)ne^{-nx}\right|\le\dfrac{n}{e^{nx}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n}{e^{nx}}}=\dfrac{1}{e^x}<1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{e^{nx}}$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n'(x)$ 内闭一致收敛

综上 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导，$f'(x)$ 存在

设 $f^{(k)}(x)$ 存在 利用①②③同理可证 $f^{(k+1)}(x)$ 存在

由 k 的任意性 $\Rightarrow f(x)\in C^{\infty}$

16. 易知 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 连续 $\forall x\in[0,1]$ 有 $f_n(x)\le f_{n+1}(x)$

$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^{\frac{n}{x}\cdot x}=e^x$

而 $f(x)$ 连续 由Dini定理 $(1+\frac{x}{n})^n\rightrightarrows e^x$

又由 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 连续 $\Rightarrow f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 可积

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1(1+\frac{x}{n})^n dx=\int_0^1\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n dx=\int_0^1 e^x dx=e-1$

17. 由 $|f_n(x)|\le g(x)$ 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dx<+\infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)dx$ 收敛

令 $n\to+\infty$ $|f(x)|\le g(x)$ $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

$\forall X>0,\ \varepsilon>0$ $\exists N>0$ 当 $n>N$ 时 $\left|\int_{-X}^{X}(f_n(x)-f(x))dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}$

令 X 充分大有 $\left|\int_{-\infty}^{-X}f_n(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{6}$ $\left|\int_{-\infty}^{-X}f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{6}$ $\left|\int_{X}^{+\infty}f_n(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{6}$ $\left|\int_{X}^{+\infty}f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{6}$

则 $\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(f_n(x)-f(x))dx\right|\le\left|\int_{-\infty}^{-X}f_n(x)dx\right|+\left|\int_{-\infty}^{-X}f(x)dx\right|+\left|\int_{-X}^{X}(f_n(x)-f(x))dx\right|+\left|\int_{X}^{+\infty}f_n(x)dx\right|+\left|\int_{X}^{+\infty}f(x)dx\right|$

$<\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$

18. 由 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ 故 $f(x)\in C[0,1] \Rightarrow \exists M>0$ s.t. $|f(x)|\le M$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists N_1=[\frac{M}{\varepsilon}]+1$ 当 $n>N_1$ 时有 $\left|\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)dx\right|\le\left|\int_0^{\frac{1}{n}}Mdx\right|\le M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$

由 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists N_2\in N$ 当 $n>N_2$ 时 $\forall x\in[0,1]$ $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists N=\max\{N_1,N_2\}$ 当 $n>N$ 时有

$\left|\int_{\frac{1}{n}}^1 f_n(x)dx-\int_0^1 f(x)dx\right|=\left|\int_{\frac{1}{n}}^1 f_n(x)dx-\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)dx-\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx\right|$

$\le\left|\int_{\frac{1}{n}}^1[f_n(x)-f(x)]dx\right|+\left|\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)dx\right|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{n}}^1 f_n(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$

19. (1) $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{\alpha}x}{e^{nx}}=0 \Rightarrow g(x)=f_n(x)-f(x)=\dfrac{n^{\alpha}x}{e^{nx}}$

$g'(x)=\dfrac{n^{\alpha}(1-nx)}{e^{nx}} \Rightarrow g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{n})\uparrow$ $(\frac{1}{n},+\infty)\downarrow$

$\therefore g(x)\le g(\frac{1}{n})=\dfrac{n^{\alpha-1}}{e}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{\alpha-1}}{e}=\begin{cases}\frac{1}{e} & \alpha=1\\ +\infty & \alpha>1\\ 0 & \alpha<1\end{cases}$

故 $\alpha<1$ 时 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 一致收敛

(2) $\alpha<1$ 时 $f_n(x)=n^{\alpha}xe^{-nx}$ 连续 $\rightrightarrows f(x)$ $f(x)$ 可积

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)dx$ 满足

综上所述 $\alpha<1$

20. 由 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 单调 $\Rightarrow |u_n(x)|\le|u_n(a)|+|u_n(b)|$

由 $\sum u_n(a),\ \sum u_n(b)$ 绝对收敛 $\Rightarrow \sum(|u_n(a)|+|u_n(b)|)$ 收敛

$\Rightarrow u_n(x)$ 绝对一致收敛

21. 对每个正整数 n，利用拉格朗日中值定理 $\exists\xi\in(0,\frac{1}{n})$

s.t. $n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)]=n\cdot f'(x+\xi_n)\frac{1}{n}=f'(x+\xi_n)$

由 $f'(x)$ 在 I 上一致连续 $\Rightarrow \forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ 当 $x_1,x_2\in I$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时有

$|f'(x_1)-f'(x_2)|<\varepsilon$

由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0 \Rightarrow$ 对上述 δ $\exists N_1\in N$ 当 $n>N_1$ 时 有 $\frac{1}{n}<\delta$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists N=N_1$ 当 $n>N_1$ 时 $\forall x+\frac{1}{n},x\in I$

$\left|n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)]-f'(x)\right|=|f'(x+\xi_n)-f'(x)|<\varepsilon$

故 $F_n(x)$ 在 I 上一致收敛到 $f'(x)$

(2) 令 $f(x)=\sqrt{x}$ 则 $f(x)$ 在 $\forall[a,b]\subset(0,+\infty)$ 可导，$f'(x)$ 一致连续

内闭一致收敛证法同(1)

$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)\xlongequal[\text{海涅定理}]{\text{转为函数}}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sqrt{x+t}-\sqrt{x}}{t}=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+t}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

取 $x_0=\frac{1}{n}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}(f_n(x_0)-f(x_0))=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(\sqrt{2}-\frac{1}{2})\sqrt{n}\right]\ne0$

$\Rightarrow f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛

22. 令 $u_n(x)=xe^{-nx}$ $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x}{e^{kx}}=x\cdot\dfrac{\frac{1}{e^x}(1-\frac{1}{e^{nx}})}{1-\frac{1}{e^x}}$

$S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x\frac{1}{e^x}(1-\frac{1}{e^{nx}})}{1-\frac{1}{e^x}}=\dfrac{x}{e^x-1}$

易知 $u_n(x)$ 对任意 n 在 $[0,+\infty)$ 连续非负

而 $S(x)$ 不连续(在0处) 由Dini定理 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}xe^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 不一致收敛

23. 由 $g(x)\in R[-1,1] \Rightarrow \exists M$ s.t. $|g(x)|\le M$

由 $\forall\delta>0$ $f_n(x)\rightrightarrows0$ $x\in[-1,-\delta]\cup[\delta,1]$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0$ $\exists N_1\in N$ 当 $n>N_1$ $\forall x\in[-1,-\delta]\cup[\delta,1]$ 有 $f_n(x)<\dfrac{\varepsilon}{6M(1-\delta)}$

由 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，对上述 δ 当 $x\in[-\delta,\delta]$ 时 $|g(x)-g(0)|<\frac{\varepsilon}{6}$

由 $\int_{-1}^1 f_n(x)dx=1 \Rightarrow g(0)=g(0)\cdot\int_{-1}^1 f_n(x)dx=\int_{-1}^1 f_n(x)g(0)dx$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists N=N_1$ 当 $n>N$ 时 有

$\left|\int_{-1}^1 f_n(x)g(x)dx-g(0)\right|=\left|\int_{-1}^1 f_n(x)g(x)dx-\int_{-1}^1 f_n(x)g(0)dx\right|$

$=\left|\int_{-1}^{-\delta}f_n(x)(g(x)-g(0))dx+\int_{-\delta}^{\delta}f_n(x)(g(x)-g(0))dx+\int_{\delta}^1 f_n(x)(g(x)-g(0))dx\right|$

$\le\left|\int_{-1}^{-\delta}f_n(x)(g(x)-g(0))dx\right|+\left|\int_{-\delta}^{\delta}f_n(x)(g(x)-g(0))dx\right|+\left|\int_{\delta}^1 f_n(x)(g(x)-g(0))dx\right|$

$<\dfrac{\varepsilon}{6M(1-\delta)}\cdot2M\cdot(1-\delta)+\dfrac{\varepsilon}{6}\cdot2\delta+\dfrac{\varepsilon}{6M(1-\delta)}\cdot2M\cdot(1-\delta)=\varepsilon$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-1}^1 f_n(x)g(x)dx=g(0)$

15. (1) 令 $u_n(x)=n^{\alpha}e^{-nx}$

① 由 $u_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续 $\Rightarrow u_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导

② $\exists x_0=1\in(0,+\infty)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}(1)}{u_n(1)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{\alpha}e^{-(n+1)}}{n^{\alpha}e^{-n}}=\frac{1}{e}<1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x_0)$ 收敛

③ $u_n'(x)=-n^{\alpha+1}e^{-nx} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}u_n'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}-n^{\alpha+1}e^{-nx}$

往证 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛

$\forall [a,b]\subset(0,+\infty)$ $\forall x\in[a,b]$ 有 $0<n^{1+\alpha}e^{-nx}\le n^{1+\alpha}e^{-na}$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{1+\alpha}e^{-na}$ 收敛 $\Rightarrow \sum u_n'(x)$ 内闭一致收敛

综上 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导，$f'(x)$ 存在

由数学归纳法 假设 $f^{(k)}(x)=(-1)^k\sum n^{\alpha+k}e^{-nx}$

往证 $f^{(k+1)}(x)$ 存在 对 $f^{(k)}(x)$ 重复①②③ $\Rightarrow f^{(k+1)}(x)$ 存在

由 k 的任意性 $\Rightarrow f(x)\in C^{\infty}$

(2) 令 $u_n(x)=\sin nx\, e^{-nx}$ $x\in(0,+\infty)$

① $u_n(x)$ 连续 $\Rightarrow u_n(x)$ 可导

② 取 $x_0=1$ $\left|\frac{\sin n}{e^n}\right|\le\frac{1}{e^n}$ 而 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{e^n}$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{e^n}$ 绝对收敛

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x_0)$ 收敛

③ $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(\cos nx-\sin nx)ne^{-nx}$ 往证 在 $(0,+\infty)$ 内闭一致收敛

$\forall [a,b]\subset(0,+\infty)$ $\forall x\in[a,b]$ $\left|(\cos nx-\sin nx)ne^{-nx}\right|\le\frac{n}{e^{nx}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{e^{nx}}}=\frac{1}{e^x}<1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{e^{nx}}$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}u_n'(x)$ 内闭一致收敛

综上 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导，$f'(x)$ 存在

设 $f^{(k)}(x)$ 存在 利用①②③同理可证 $f^{(k+1)}(x)$ 存在

由 k 的任意性 $\Rightarrow f(x)\in C^{\infty}$

16. 易知 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 连续 $\forall x\in[0,1]$ 有 $f_n(x)\le f_{n+1}(x)$

$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^{\frac{n}{x}\cdot x}=e^x$

而 $f(x)$ 连续 由Dini定理 $(1+\frac{x}{n})^n\rightrightarrows e^x$

又由 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 连续 $\Rightarrow f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 可积

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1(1+\frac{x}{n})^n dx=\int_0^1\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n dx=\int_0^1 e^x dx=e-1$

17. 由 $|f_n(x)|\le g(x)$ 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dx<+\infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)dx$ 收敛

令 $n\to+\infty$ $|f(x)|\le g(x) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

$\forall X>0,\ \varepsilon>0$ $\exists N>0$ 当 $n>N$ 时 $\left|\int_{-X}^{X}(f_n(x)-f(x))dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}$

令 X 充分大有 $\left|\int_{-\infty}^{-X}f_n(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{6}$ $\left|\int_{-\infty}^{-X}f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{6}$ $\left|\int_{X}^{+\infty}f_n(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{6}$ $\left|\int_{X}^{+\infty}f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{6}$

则 $\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(f_n(x)-f(x))dx\right|\le\left|\int_{-\infty}^{-X}f_n(x)dx\right|+\left|\int_{-\infty}^{-X}f(x)dx\right|+\left|\int_{-X}^{X}(f_n(x)-f(x))dx\right|+\left|\int_{X}^{+\infty}f_n(x)dx\right|+\left|\int_{X}^{+\infty}f(x)dx\right|$

$<\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$

18. 由 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ 故 $f(x)\in C[0,1] \Rightarrow \exists M>0$ s.t. $|f(x)|\le M$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists N_1=[\frac{M}{\varepsilon}]+1$ 当 $n>N_1$ 时有 $\left|\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)dx\right|\le\left|\int_0^{\frac{1}{n}}M dx\right|\le M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$

由 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists N_2\in N$ 当 $n>N_2$ 时 $\forall x\in[0,1]$ $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists N=\max\{N_1,N_2\}$ 当 $n>N$ 时有

$\left|\int_{\frac{1}{n}}^1 f_n(x)dx-\int_0^1 f(x)dx\right|=\left|\int_{\frac{1}{n}}^1 f_n(x)dx-\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)dx-\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx\right|$

$\le\left|\int_{\frac{1}{n}}^1[f_n(x)-f(x)]dx\right|+\left|\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)dx\right|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{n}}^1 f_n(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$

19. (1) $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{\alpha}x}{e^{nx}}=0 \Rightarrow g(x)=f_n(x)-f(x)=\frac{n^{\alpha}x}{e^{nx}}$

$g'(x)=\frac{n^{\alpha}(1-nx)}{e^{nx}} \Rightarrow g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{n})\uparrow$ $(\frac{1}{n},+\infty)\downarrow$

$\therefore g(x)\le g(\frac{1}{n})=\frac{n^{\alpha-1}}{e}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{\alpha-1}}{e}=\begin{cases}\frac{1}{e} & \alpha=1\\ +\infty & \alpha>1\\ 0 & \alpha<1\end{cases}$

故 $\alpha<1$ 时 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 一致收敛

(2) $\alpha<1$ 时 $f_n(x)=n^{\alpha}xe^{-nx}$ 连续 $\rightrightarrows f(x)$ $f(x)$ 可积

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)dx$ 满足

综上所述 $\alpha<1$

20. 由 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 单调 $\Rightarrow |u_n(x)|\le|u_n(a)|+|u_n(b)|$

由 $\sum u_n(a)$，$\sum u_n(b)$ 绝对收敛 $\Rightarrow \sum(|u_n(a)|+|u_n(b)|)$ 收敛

$\Rightarrow u_n(x)$ 绝对一致收敛

21. 对每个正整数 n，利用拉格朗日中值定理 $\exists\xi\in(0,\frac{1}{n})$

s.t. $n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)]=n\cdot f'(x+\xi_n)\frac{1}{n}=f'(x+\xi_n)$

由 $f'(x)$ 在 I 上一致连续 $\Rightarrow \forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ 当 $x_1,x_2\in I$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时有

$|f'(x_1)-f'(x_2)|<\varepsilon$

由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0 \Rightarrow$ 对上述 δ $\exists N_1\in N$ 当 $n>N_1$ 时 有 $\frac{1}{n}<\delta$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists N=N_1$ 当 $n>N_1$ 时 $\forall x+\frac{1}{n},x\in I$

$\left|n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)]-f'(x)\right|=|f'(x+\xi_n)-f'(x)|<\varepsilon$

故 $F_n(x)$ 在 I 上一致收敛到 $f'(x)$

(2) 令 $f(x)=\sqrt{x}$ 则 $f(x)$ 在 $\forall[a,b]\subset(0,+\infty)$ 可导，$f'(x)$ 一致连续

内闭一致收敛证法同(1)

$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}n(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x})\xlongequal[\text{语言叙述}]{\text{转为函数}}\lim\limits_{t\to0}\frac{\sqrt{x+t}-\sqrt{x}}{t}=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{2\sqrt{x+t}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

取 $x_0=\frac{1}{n}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}|f_n(x_0)-f(x_0)|=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(\sqrt{2}-\frac{1}{2})\sqrt{n}\right]\ne0$

$\Rightarrow f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛

22. 令 $u_n(x)=xe^{-nx}$ $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{e^{kx}}=x\cdot\frac{e^{-x}(1-e^{-nx})}{1-e^{-x}}$

$S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{xe^{-x}(1-e^{-nx})}{1-e^{-x}}=\frac{x}{e^x-1}$

易知 $u_n(x)$ 对任意 n 在 $[0,+\infty)$ 连续非负

而 $S(x)$ 不连续(在x=0处) 由Dini定理 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}xe^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 不一致收敛

23. 由 $g(x)\in R[-1,1] \Rightarrow \exists M$ s.t. $|g(x)|\le M$

由 $\forall\delta>0$ $f_n(x)\rightrightarrows0$ $x\in[-1,-\delta]\cup[\delta,1]$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0$ $\exists N_1\in N$ 当 $n>N_1$ $\forall x\in[-1,-\delta]\cup[\delta,1]$ 有 $f_n(x)<\frac{\varepsilon}{6M(1-\delta)}$

由 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，对上述 δ 当 $x\in[-\delta,\delta]$ 时 $|g(x)-g(0)|<\frac{\varepsilon}{6}$

由 $\int_{-1}^1 f_n(x)dx=1 \Rightarrow g(0)=g(0)\cdot\int_{-1}^1 f_n(x)dx=\int_{-1}^1 f_n(x)g(0)dx$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists N=N_1$ 当 $n>N$ 时 有

$\left|\int_{-1}^1 f_n(x)g(x)dx-g(0)\right|=\left|\int_{-1}^1 f_n(x)g(x)dx-\int_{-1}^1 f_n(x)g(0)dx\right|$

$=\left|\int_{-1}^{-\delta}f_n(x)(g(x)-g(0))dx+\int_{-\delta}^{\delta}f_n(x)(g(x)-g(0))dx+\int_{\delta}^{1}f_n(x)(g(x)-g(0))dx\right|$

$\le\left|\int_{-1}^{-\delta}f_n(x)(g(x)-g(0))dx\right|+\left|\int_{-\delta}^{\delta}f_n(x)(g(x)-g(0))dx\right|+\left|\int_{\delta}^{1}f_n(x)(g(x)-g(0))dx\right|$

$<\frac{\varepsilon}{6M(1-\delta)}\cdot2M\cdot(1-\delta)+\frac{\varepsilon}{6}\cdot2\delta+\frac{\varepsilon}{6M(1-\delta)}\cdot2M\cdot(1-\delta)=\varepsilon$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-1}^1 f_n(x)g(x)dx=g(0)$

24. (1) $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$ 当$n>N$时有 $\frac{1}{n}e^{-n^2x^2}<\frac{1}{n}<\varepsilon$

故 $f_n(x)$一致收敛到0

(2) $f_n'(x)=\frac{1}{n}\cdot(-n^2\cdot 2x)e^{-n^2x^2}=-2nxe^{-n^2x^2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{2nx}{e^{n^2x}}=0$ 而取$x_0=\frac{1}{n}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n'(x_0)=\lim\limits_{n\to+\infty}-2n\cdot\frac{1}{n}e^{-n^2\cdot\frac{1}{n^2}}=-\frac{2}{e}\neq0$

故 $f_n'(x)$点点收敛到0，但不一致收敛

25. $f_n=\sin\frac{x}{n^2}$

$f_n'(x)=\frac{1}{n^2}\cos\frac{x}{n^2}$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$ 当$n>N$时有 $|f_n'(x)|<\frac{1}{n^2}<\varepsilon$ $\Rightarrow$ $f_n'(x)$在$(-\infty,+\infty)$一致收敛

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\frac{x}{n^2}=0$ $\Rightarrow$ $f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$处处收敛

令$x_0=n^2$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\frac{n^2}{n^2}=\sin1\neq0$ $\Rightarrow$ $f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$不一致收敛

26. 充分性显然

必要性：由 $f_n(x)\in C[0,1]$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 将$[0,1]$等分成有限个小区间$[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2\cdots k)$

使得$\Delta x_i<\delta$ 每个区间上函数振幅都小于ε

即 $|f_n(x)-f_n(x_i)|<\varepsilon$, $|f_m(x_i)-f_m(x)|<\varepsilon$

而 $f_n(x)$在$[a,b]$上收敛 $\forall\varepsilon>0$ 对上述有限个$x_1,\cdots x_k$，存在公共的N

当$n,m>N$时 $\forall i=1,2\cdots k$ 都有 $|f_n(x_i)-f_m(x_i)|<\varepsilon$

故 $\forall x\in[x_{i-1},x_i]$ $|f_n(x)-f_m(x)|\le|f_n(x)-f_n(x_i)|+|f_n(x_i)-f_m(x_i)|+|f_m(x_i)-f_m(x)|$

对上述δ,N,ε有 $\le\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon$

由柯西准则 $f_n(x)$一致收敛

27. 由 $f_n'(x)$在$[0,1]$一致有界 $\Rightarrow$ $\exists M>0$ s.t. $\forall n$, $x\in[a,b]$ 有$|f_n'(x)|\le M$

$\forall\varepsilon>0$ 取$\delta=\frac{\varepsilon}{M}$, 当$|x-x'|<\delta$时 $\left|\frac{f_n(x)-f_n(x')}{x-x'}\right|\le M$ $\Rightarrow$ $|f_n(x)-f_n(x')|\le M|x-x'|\le M\cdot\delta=\varepsilon$

由T26 得 $\{f_n(x)\}$在$[a,b]$必收敛到$f(x)$

24. (1) $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$ 当 $n>N$ 时有 $\frac{1}{n}e^{-n^2x^2}<\frac{1}{n}<\varepsilon$

故 $f_n(x)$ 一致收敛到 0

(2) $f_n'(x)=\frac{1}{n}\cdot(-n^2\cdot 2x)e^{-n^2x^2}=-2nxe^{-n^2x^2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{2nx}{e^{n^2x}}=0$ 而取 $x_0=\frac{1}{n}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n'(x_0)=\lim\limits_{n\to+\infty}-2n\cdot\frac{1}{n}e^{-n^2\cdot\frac{1}{n^2}}=-\frac{2}{e}\neq 0$

故 $f_n'(x)$ 点点收敛到 0，但不一致收敛

25. $f_n=\sin\frac{x}{n^2}$

$f_n'(x)=\frac{1}{n^2}\cos\frac{x}{n^2}$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$ 当 $n>N$ 时有 $|f_n'(x)|<\frac{1}{n^2}<\varepsilon$ $\Rightarrow$ $f_n'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\frac{x}{n^2}=0$ $\Rightarrow$ $f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 处处收敛

令 $x_0=n^2$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\frac{n^2}{n^2}=\sin 1\neq 0$ $\Rightarrow$ $f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不一致收敛

26. 充分性显然

必要性：由 $f_n(x)\in C[0,1]$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 将 $[0,1]$ 等分成有限个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2\cdots k)$

使得 $\Delta x_i<\delta$ 每个区间上函数振幅都小于 ε

即 $|f_n(x)-f_n(x_i)|<\varepsilon$, $|f_m(x_i)-f_m(x)|<\varepsilon$

而 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛 $\forall\varepsilon>0$ 对上述有限个 $x_1,\cdots x_k$，存在公共的 N

当 $n,m>N$ 时 $\forall i=1,2\cdots k$ 都有 $|f_n(x_i)-f_m(x_i)|<\varepsilon$

故 $\forall x\in[x_{i-1},x_i]$ $|f_n(x)-f_m(x)|\leq|f_n(x)-f_n(x_i)|+|f_n(x_i)-f_m(x_i)|+|f_m(x_i)-f_m(x)|$

对上述 δ,N,ε 有 $\leq\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon$

由柯西准则 $f_n(x)$ 一致收敛

27. 由 $f_n'(x)$ 在 $[0,1]$ 一致有界 $\Rightarrow$ $\exists M>0$ s.t. $\forall n, x\in[a,b]$ 有 $|f_n'(x)|\leq M$

$\forall\varepsilon>0$ 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$，当 $|x-x'|<\delta$ 时 $\left|\frac{f_n(x)-f_n(x')}{x-x'}\right|\leq M$ $\Rightarrow$ $|f_n(x)-f_n(x')|\leq M|x-x'|\leq M\cdot\delta=\varepsilon$

由 T26 得 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 必收敛到 $f(x)$

习题十一

1.(1) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}=0$

$\Rightarrow$ 收敛半径为$+\infty$ 收敛域$(-\infty,+\infty)$

(2) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+\frac12+\cdots+\frac{1}{n+1}}{1+\frac12+\cdots+\frac1n}=1$

$\Rightarrow$ 收敛半径为1

$x=1$时 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac12+\cdots+\frac1n)\neq0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1+\frac12+\cdots+\frac1n)$ 发散

$x=-1$时 同理 级数发散 故收敛域为$(-1,1)$

(3) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^\alpha}=1\Rightarrow R=1$

$x=1$时 $\alpha<-1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^\alpha$收敛

$\alpha\geq0$ 时 $\lim\limits_{n\to+\infty}n^\alpha\neq0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^\alpha$ 发散

$-1\leq\alpha<0$时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^\alpha$ 发散

$x=-1$时 $\alpha<-1$时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^{-\alpha}}$收敛

$\alpha\geq0$时 $\lim\limits_{n\to+\infty}n^\alpha\neq0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^nn^\alpha$发散

$-1\leq\alpha<0$时 $\frac{1}{n^{-\alpha}}$单减 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{-\alpha}}=0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^nn^\alpha$收敛

故 收敛域为 $\begin{cases}[-1,1] & \alpha<-1\\ (-1,1) & \alpha\geq0\\ [-1,1) & -1\leq\alpha<0\end{cases}$

(4) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)^2}{2^n\cdot n^2}=2\Rightarrow R=\frac12$

$x=\frac12$时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2^n\cdot n^2\cdot\frac{1}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2$ 发散

$x=-\frac12$时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2^n\cdot n^2\cdot(-\frac12)^n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n^2$ 发散

$\Rightarrow$ 收敛域为$(-\frac12,\frac12)$

(5) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=0$ $R=+\infty$

$\Rightarrow$ 收敛域为$(-\infty,+\infty)$

(6) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(1+\frac1n)^{n^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac1n)^n=e\Rightarrow R=\frac1e$

令 $x-2=\frac1e$时 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac1n)^{n^2}\cdot(\frac1e)^n=1\neq0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1+\frac1n)^{n^2}\cdot(\frac1e)^n$ 发散

同理 $x-2=-\frac1e$时 也发散

$\Rightarrow$ 收敛域为$(2-\frac1e,2+\frac1e)$

(7) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!}\cdot\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+2}{2n+3}=1\Rightarrow R=1$

$x=1$时 $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\sim\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot(2n+1)^{-\frac12}}{\frac{1}{\sqrt n}}=\frac{\sqrt\pi}{2}$

而$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt n}$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}}$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ 发散

$x=-1$时 对于$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$是莱布尼茨级数

($\because\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$单调$\downarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=0$) 故$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$收敛

$\Rightarrow$ 收敛域为$[-1,1)$

(8) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+2\cos\frac{n\pi}{4}}=1\Rightarrow R=1$

$x=1$时 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+2\cos\frac{n\pi}{4})\neq0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1+2\cos\frac{n\pi}{4})$发散

$x=-1$时 同理$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(1+2\cos\frac{n\pi}{4})$发散

$\Rightarrow$ 收敛域为$(-1,1)$

(9) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^{n^2}}}=0\Rightarrow R=+\infty$

$\Rightarrow$ 收敛域为$(-\infty,+\infty)$

(10) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n^2]{2^n}=1\Rightarrow R=1$

$x=1$时 $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty\neq0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2^n$发散

$x=-1$时 同理$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n2^n$也发散.

2. $\rho=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac1r\in(0,+\infty)$

(1) $\rho'=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n^k|}=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(\sqrt[n]{|a_n|})^k=(\frac1r)^k$

$\Rightarrow R=r^k$

(2) ① $r>1$时 令$\varepsilon=\frac12(1-\frac1r)>0$ 由上极限性质 $\exists N\in\mathbb{N}$ 当$n>N$时

有$\sqrt[n]{|a_n|}<\rho+\varepsilon=\frac1r+\frac12(1-\frac1r)=\frac12(1+\frac1r)<1$

$\Rightarrow\sqrt[n]{|a_{n^2}|}=(\sqrt[n^2]{|a_{n^2}|})^n<[\frac12(1+\frac1r)]^n$

$\Rightarrow\rho_1=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_{n^2}|}\leq\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac12(1+\frac1r))^n=0$

有$\rho_1=0$ $r_1=+\infty$

② $r<1$时 $\rho=\frac1r>1$ 令$\varepsilon=\frac12(\frac1r-1)$

$\exists$子列$\{a_{n_k}\}$有$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}>\rho-\varepsilon=\frac1r-\frac12(\frac1r-1)=\frac12(\frac1r+1)>1$

$\sqrt[n_k]{|a_{n_k^2}|}=(\sqrt[n_k^2]{|a_{n_k^2}|})^{n_k}>[\frac12(\frac1r+1)]^{n_k}$

有$\rho_2=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_{n^2}|}\geq\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}\sqrt[n_k]{|a_{n_k^2}|}\geq\lim\limits_{k\to+\infty}[\frac12(\frac1r+1)]^{n_k}=+\infty\Rightarrow r_2=0$

③ $r=1$时 无法确定,可能有多种情况

(3) $\rho_3=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[kn]{|a_n|}=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(\sqrt[n]{|a_n|})^{\frac1k}=(\frac1r)^{\frac1k}$

$\Rightarrow R=r^{\frac1k}$

(4) $\rho_4=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n^2]{|a_n|}=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(\sqrt[n]{|a_n|})^{\frac1n}=1$

$\Rightarrow R=1$

3. $\rho_1=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{r_a}$ $\rho_2=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|b_n|}=\frac{1}{r_b}$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$ 由上极限性质 $\sqrt[n]{|a_n|}<\rho_1+\varepsilon$ $\sqrt[n]{|b_n|}<\rho_2+\varepsilon$

$\Rightarrow|a_n|<(\rho_1+\varepsilon)^n$ $|b_n|<(\rho_2+\varepsilon)^n$

1) $\Rightarrow\sqrt[n]{|a_n+b_n|}\leq\sqrt[n]{|a_n|+|b_n|}\leq\sqrt[n]{2\max\{(\rho_1+\varepsilon)^n,(\rho_2+\varepsilon)^n\}}=\sqrt[n]{2}(\max\{\rho_1,\rho_2\}+\varepsilon)$

$\Rightarrow\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n+b_n|}\leq\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{2}(\max\{\rho_1,\rho_2\}+\varepsilon)=\max\{\rho_1,\rho_2\}+\varepsilon$

由ε任意性 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n+b_n|}\leq\max\{\rho_1,\rho_2\}\Rightarrow R\geq\min\{r_a,r_b\}$

即 $\min\{r_a,r_b\}\leq R\leq+\infty$

2) $\sqrt[n]{|a_nb_n|}\leq\sqrt[n]{|a_n||b_n|}\leq\sqrt[n]{(\rho_1+\varepsilon)^n(\rho_2+\varepsilon)^n}=(\rho_1+\varepsilon)(\rho_2+\varepsilon)$

$\Rightarrow\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_nb_n|}\leq(\rho_1+\varepsilon)(\rho_2+\varepsilon)=\rho_1\rho_2+(\rho_1+\rho_2)\varepsilon+\varepsilon^2$

由ε任意性 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_nb_n|}\leq\rho_1\rho_2$

$\Rightarrow r_ar_b\leq R\leq+\infty$

4.(1) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n+3}=1$ $x=\pm1$时 $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+3)\neq0$

$\Rightarrow$ 收敛域为$(-1,1)$ 令$S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(k+3)x^k$ ★ 法2

法1

$S_n=3x^0+4x+\cdots+(n+3)x^n$

$xS_n=\quad 3x+\cdots+(n+2)x^n+(n+3)x^{n+1}$

$\Rightarrow(1-x)S_n=3+x+\cdots+x^n-(n+3)x^{n+1}$

$\Rightarrow S_n=\frac{3-2x-(n+4)x^{n+1}+(n+3)x^{n+2}}{(1-x)^2}$

$S(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{3-2x}{(1-x)^2}$

法2

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ 求导 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+3)x^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}nx^n+3\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$

$=x\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}+3\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$

$=\frac{x}{(1-x)^2}+3\cdot\frac{1}{1-x}=\frac{3-2x}{(1-x)^2}$

(2) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[2n]{\frac{1}{2n+1}}=1\Rightarrow R=1$

$x=1$时 $\frac{1}{2n+1}\sim\frac1n$ 由$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac1n$发散$\Rightarrow\sum\frac{1}{2n+1}$发散

$x=-1$时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{2n}\frac{1}{2n+1}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}$ 发散 $\Rightarrow$ 收敛域$(-1,1)$

$x\neq0$ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}=\frac1x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\frac1x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_0^xx^{2n}dx=\frac1x\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^{2n}dx$

$=\frac1x\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}$

$x=0$ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}=0$

习题十一

1.(1) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}=0$

$\Rightarrow$ 收敛半径为 $+\infty$ 收敛域 $(-\infty,+\infty)$

(2) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}=1$

$\Rightarrow$ 收敛半径为 1

$x=1$ 时 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\neq0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$ 发散

$x=-1$ 时 同理 级数发散　故收敛域为 $(-1,1)$

(3) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^{\alpha}}=1\Rightarrow R=1$

$x=1$ 时 $\alpha<-1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{-\alpha}}$ 收敛

$\alpha\geq0$ 时 $\lim\limits_{n\to+\infty}n^{\alpha}\neq0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^{\alpha}$ 发散

$-1\leq\alpha<0$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{-\alpha}}$ 发散

$x=-1$ 时 $\alpha<-1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^{-\alpha}}$ 收敛.

$\alpha\geq0$ 时 $\lim\limits_{n\to+\infty}n^{\alpha}\neq0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n^{\alpha}$ 发散

$-1\leq\alpha<0$ 时 $\frac{1}{n^{-\alpha}}$ 单减 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{-\alpha}}=0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n^{\alpha}$ 收敛

故收敛域为 $\begin{cases}[-1,1] & \alpha<-1\\(-1,1) & \alpha\geq0\\[-1,1) & -1\leq\alpha<0\end{cases}$

(4) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)^2}{2^n\cdot n^2}=2\Rightarrow R=\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{2}$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2^n\cdot n^2\cdot\frac{1}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2$ 发散

$x=-\frac{1}{2}$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2^n\cdot n^2\cdot\frac{1}{(-2)^n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot n^2$ 发散

$\Rightarrow$ 收敛域为 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

(5) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=0$　$R=+\infty$

$\Rightarrow$ 收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

(6) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e\Rightarrow R=\frac{1}{e}$

令 $x-2=\frac{1}{e}$ 时　由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}\cdot(\frac{1}{e})^n=1\neq0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}\cdot(\frac{1}{e})^n$ 发散

同理 $x-2=-\frac{1}{e}$ 时 也发散

$\Rightarrow$ 收敛域为 $(2-\frac{1}{e},2+\frac{1}{e})$

(7) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+2}{2n+3}=1\Rightarrow R=1$

$x=1$ 时 $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\sim\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}}$　$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot(\frac{1}{2n+1})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}}$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ 发散

$x=-1$ 时　对于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ 是莱布尼兹级数

($\because\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ 单调↓ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=0$)　故 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ 收敛

$\Rightarrow$ 收敛域为 $[-1,1)$

(8) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+2\cos\frac{n\pi}{4}}=1\Rightarrow R=1$

$x=1$ 时 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+2\cos\frac{n\pi}{4})\neq0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1+2\cos\frac{n\pi}{4})$ 发散

$x=-1$ 时 同理 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(1+2\cos\frac{n\pi}{4})$ 发散

$\Rightarrow$ 收敛域为 $(-1,1)$

(9) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^{n^2}}}=0\Rightarrow R=+\infty$

$\Rightarrow$ 收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

(10) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n^2]{2^n}=1\Rightarrow R=1$

$x=1$ 时 $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty\neq0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2^n$ 发散

$x=-1$ 时 同理 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n2^n$ 也发散.

2. $\rho=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{r}\in(0,+\infty)$

(1) $\rho'=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n^k|}=\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{|a_n|})^k=(\frac{1}{r})^k$

$\Rightarrow R=r^k$

(2) ① $r>1$ 时 令 $\varepsilon=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})>0$ 由上极限性质 $\exists N\in N$ 当 $n>N$ 时

有 $\sqrt[n]{|a_n|}<\rho+\varepsilon=\frac{1}{r}+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{r})<1$

$\Rightarrow\sqrt[n]{|a_{n^2}|}=\left(\sqrt[n^2]{|a_{n^2}|}\right)^n<\left[\frac{1}{2}(1+\frac{1}{r})\right]^n$

$\Rightarrow\rho_1=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_{n^2}|}\leq\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\left(\frac{1}{2}(1+\frac{1}{r})\right)^n=0$

有 $\rho_1=0$　$r_1=+\infty$

② $r<1$ 时　$\rho=\frac{1}{r}>1$ 令 $\varepsilon=\frac{1}{2}(\frac{1}{r}-1)$

$\exists$ 子列 $\{a_{n_k}\}$ 有 $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}>\rho-\varepsilon=\frac{1}{r}-\frac{1}{2}(\frac{1}{r}-1)=\frac{1}{2}(\frac{1}{r}+1)>1$

$\sqrt[n_k]{|a_{n_k^2}|}=\left(\sqrt[n_k^2]{|a_{n_k^2}|}\right)^{n_k}>\left[\frac{1}{2}(\frac{1}{r}+1)\right]^{n_k}$

有 $\rho_2=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_{n^2}|}\geq\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}\sqrt[n_k]{|a_{n_k^2}|}\geq\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}\left[\frac{1}{2}(\frac{1}{r}+1)\right]^{n_k}=+\infty\Rightarrow r_2=0$

③ $r=1$ 时　无法确定，可能有多种情况

(3) $\rho_3=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[kn]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{|a_n|})^{\frac{1}{k}}=(\frac{1}{r})^{\frac{1}{k}}$

$\Rightarrow R=r^{\frac{1}{k}}$

(4) $\rho_4=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n^2]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{|a_n|})^{\frac{1}{n}}=1$

$\Rightarrow R=1$

3. $\rho_1=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{r_a}$　$\rho_2=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|b_n|}=\frac{1}{r_b}$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in N$ 由上极限性质 $\sqrt[n]{|a_n|}<\rho_1+\varepsilon$　$\sqrt[n]{|b_n|}<\rho_2+\varepsilon$

$\Rightarrow|a_n|<(\rho_1+\varepsilon)^n$　$|b_n|<(\rho_2+\varepsilon)^n$

1) $\Rightarrow\sqrt[n]{|a_n+b_n|}\leq\sqrt[n]{|a_n|+|b_n|}\leq\sqrt[n]{2\max\{(\rho_1+\varepsilon)^n,(\rho_2+\varepsilon)^n\}}=\sqrt[n]{2}(\max\{\rho_1,\rho_2\}+\varepsilon)$

$\Rightarrow\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n+b_n|}\leq\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{2}(\max\{\rho_1,\rho_2\}+\varepsilon)=\max\{\rho_1,\rho_2\}+\varepsilon$

由 ε 任意性 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n+b_n|}\leq\max\{\rho_1,\rho_2\}\Rightarrow R\geq\min\{r_a,r_b\}$

即 $\min\{r_a,r_b\}\leq R\leq+\infty$

(2) $\sqrt[n]{|a_nb_n|}\leq\sqrt[n]{|a_n||b_n|}\leq\sqrt[n]{(\rho_1+\varepsilon)^n(\rho_2+\varepsilon)^n}=(\rho_1+\varepsilon)(\rho_2+\varepsilon)$

$\Rightarrow\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_nb_n|}\leq(\rho_1+\varepsilon)(\rho_2+\varepsilon)=\rho_1\rho_2+(\rho_1+\rho_2)\varepsilon+\varepsilon^2$

由 ε 任意性 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_nb_n|}\leq\rho_1\rho_2$

$\Rightarrow r_ar_b\leq R\leq+\infty$

4.(1) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n+3}=1$　$x=\pm1$ 时 $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+3)\neq0$

$\Rightarrow$ 收敛域为 $(-1,1)$　令 $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(k+3)x^k$

法1

$S_n=3x^0+4x+\cdots+(n+3)x^n$

$xS_n=3x+\cdots+(n+2)x^n+(n+3)x^{n+1}$

$\Rightarrow(1-x)S_n=3+x+\cdots+x^n-(n+3)x^{n+1}$

$\Rightarrow S_n=\frac{3-2x-(n+4)x^{n+1}+(n+3)x^{n+2}}{(1-x)^2}$

$S(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{3-2x}{(1-x)^2}$

法2

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ 求导 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+3)x^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}nx^n+3\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$

$=x\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}+3\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$

$=\frac{x}{(1-x)^2}+3\cdot\frac{1}{1-x}=\frac{3-2x}{(1-x)^2}$

(2) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}}=1\Rightarrow R=1$

$x=1$ 时 $\frac{1}{2n+1}\sim\frac{1}{n}$ 由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散 $\Rightarrow\sum\frac{1}{2n+1}$ 发散

$x=-1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{2n}\frac{1}{2n+1}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}$ 发散　$\Rightarrow$ 收敛域 $(-1,1)$

$x\neq0$ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}=\frac{1}{x}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{x}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_0^x x^{2n}dx=\frac{1}{x}\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^{2n}dx$

$=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}$

$x=0$ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}=0$

(3) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2}=1 \Rightarrow R=1$ 显然 $x=\pm1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2x^n$ 发散 $\Rightarrow$ 收敛域 $(-1,1)$

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n=\frac{1}{1-x} \xrightarrow{\text{求导}} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2} \xrightarrow{\text{求导}} \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3}$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2x^n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^n+\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\cdot x^n=x^2\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}+x\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$

$=\frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{x+x^2}{(1-x)^3} \quad x\in(-1,1)$

(4) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[2n]{n}=1 \Rightarrow R=1$ 显然 $x=\pm1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{2n}$ 发散 $\Rightarrow$ 收敛域 $(-1,1)$

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n=\frac{1}{1-x} \xrightarrow{\text{求导}} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(x^2)^n=x^2\cdot\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(x^2)^{n-1}=x^2\cdot\frac{1}{(1-x^2)^2}=\frac{x^2}{(1-x^2)^2} \quad x\in(-1,1)$

(5) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1 \Rightarrow R=1$

$x=1$ 时 $\frac{1}{n(n+1)}\sim\frac{1}{n^2}$ 而 $\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow \sum\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛

$x=-1$ 时 $\sum(-1)^n\frac{1}{n(n+1)}$ 绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛域为 $[-1,1]$

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n=\frac{1}{1-x} \xrightarrow{\text{积分}} \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=-\ln(1-x)$

$x\neq0$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{1}{x}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}+1$

$=-\ln(1-x)+\frac{1}{x}\ln(1-x)+1$

$x=0$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n=0$

(6) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}=1 \quad R=1 \quad x=\pm1$ 时易知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^n$ 发散

$\Rightarrow$ 收敛域为 $(-1,1)$

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n=\frac{1}{1-x} \xrightarrow{\text{求导}} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2} \xrightarrow{\text{求导}} \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3}$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^n=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(n-1)nx^{n-1}=x\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(n-1)nx^{n-2}=\frac{2x}{(1-x)^3}$

(7) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1 \Rightarrow R=1 \quad x=\pm1$ 时易知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n$ 发散 $\Rightarrow$ 收敛域 $(-1,1)$

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n=\frac{1}{1-x} \xrightarrow{\text{求导}} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n=x\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}=\frac{x}{(1-x)^2}$

(8) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n}{2n+2}=1 \Rightarrow R=1$

$x=1$ 时 (n充分大) $\frac{1}{(2n)!}<\frac{1}{n^2}$ 由 $\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow \sum\frac{1}{(2n)!}$ 收敛

$x=-1$ 时 绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛域为 $[-1,1]$

$e^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ ① $\quad e^{-x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!}$ ②

①+② $\Rightarrow e^x+e^{-x}=2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

故 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

5. (1) 先记 $\arctan x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$

$f'(x)=(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^{2n}$

$f(x)=f(0)+\int_0^x f(t)dt=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}(-1)^nx^{2n+1}$

令 $x=1$ 代入 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$

(2) $e^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^nn!}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{-1}{2}\right)^n=e^{-\frac{1}{2}}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=(-1)\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(-1)^n=\ln2$

(4) 记 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}$

$f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^{3n}=\frac{1}{1+x^3}$

$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)dx=\frac{1}{3}\ln(x+1)-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt3}+\frac{\pi}{6\sqrt3}$

令 $x=1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{1}{3}\ln2+\frac{\pi}{3\sqrt3}$

6. (1) $\sin^2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2x$

$\cos x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow \cos2x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$

$\Rightarrow \sin^2x=\frac{1}{2}-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} \quad x\in(-\infty,+\infty)$

(2) $\cos(\alpha+\beta x)=\cos\alpha\cos\beta x-\sin\alpha\sin\beta x$

$\cos x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \sin x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta x)=\cos\alpha\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(\beta x)^{2n}}{(2n)!}-\sin\alpha\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(\beta x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad x\in(-\infty,+\infty)$

(3) $\cos^3x=\frac{\cos3x+3\cos x}{4}$

$=\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(3x)^{2n}}{(2n)!}+\frac{3}{4}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$=\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(3^{2n}+3)\frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad x\in(-\infty,+\infty)$

(4) $e^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$

$e^{-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}$

$\Rightarrow \int_0^x e^{-t^2}dt=\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{n!}dx=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_0^x\frac{(-1)^nx^{2n}}{n!}dx$

$=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\Big|_0^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad x\in(-\infty,+\infty)$

(5) $\frac{\sin x}{x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$

$\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}dx=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_0^x(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}dx$

$=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!(2n+1)}x^{2n+1}\Big|_0^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} \quad x\in(-\infty,+\infty)$

(6) $(1+x)\ln(1+x)=(1+x)\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}=x+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \quad x\in(-1,1]$

(7) 令 $g(x)=\arctan\frac{2(1-x)}{1+4x}$

$g'(x)=\frac{1}{1+\frac{4(1-x)^2}{(1+4x)^2}}\cdot\frac{-2(1+4x)-8(1-x)}{(1+4x)^2}=-\frac{2}{1+4x^2}$

$=-2\cdot\frac{1}{1-(-4x^2)}=(-2)\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-4x^2)^n$

$g(x)-g(0)=-2\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-4x^2)^ndx=-2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n4^n\int_0^x x^{2n}dx$

$=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cdot2^{2n+1}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\Big|_0^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}2^{2n+1}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$

$\Rightarrow g(0)=\arctan2+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{2n+1} \quad x\in(-1,1)$

(8) 令 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$f'(x)=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-x^2)^n$

$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt=x+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1} \quad x\in[-1,1]$

(9) $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]=\frac{1}{2}\left[\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-x)^n}{n}\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right]=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}((-1)^{n+1}+1)\frac{x^n}{n}$ (n为偶时 $=0$)

$=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \quad \begin{cases}-1<x\leq1\\-1<-x\leq1\end{cases} \Rightarrow x\in(-1,1)$

(10) $\ln(1+x+x^2+x^3)=\ln\frac{1-x^4}{1-x}=\ln(1-x^4)-\ln(1-x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-x^4)^n}{n}-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(-x)^n$

$=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}-\frac{x^{4n}}{n}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} \xrightarrow{\text{写成答案形式}} \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}+(-1)^{[\frac{n}{2}]-1}(1+(-1)^n)}{n}x^n \quad x\in(-1,1]$

(11) $f(x)=(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots)^2=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{(2n-3)\cdot3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot(2n-1)}\right]x^{2n}$

$=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left[(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{1})\frac{1}{2n}+(\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{3})\frac{1}{2n}+\cdots+(\frac{1}{1}+\frac{1}{2n-1})\frac{1}{2n}\right]x^{2n}$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1})\frac{x^{2n}}{n} \quad (-1\leq x\leq1)$

(12) $f(x)=(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots)^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{3(n-2)}+\cdots+\frac{1}{n\cdot1}\right]x^{n+1}$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[(1+\frac{1}{n})\frac{1}{n+1}+(\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1})\frac{1}{n+1}+\cdots+(\frac{1}{n}+\frac{1}{1})\frac{1}{n+1}\right]x^{n+1}$

$=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (-1<x<1)$

7. $\tan x$ 是奇函数 设 $\tan x=x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^6)$

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)=(x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^6))(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5))$

比较系数 $a_3=\frac{1}{3} \quad a_5=\frac{2}{15}$

$\therefore \tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)$

(3) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2}=1 \Rightarrow R=1$ 显然$x=\pm1$时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2x^n$ 发散 ⇒ 收敛域(-1,1)

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x} \xrightarrow{求导} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2} \xrightarrow{求导} \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3}$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2x^n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^n+\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\cdot x^n = x^2\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}+x\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}$

$=\frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$ $x\in(-1,1)$

(4) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[2n]{n}=1 \Rightarrow R=1$ 显然$x=\pm1$时$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{2n}$发散 ⇒ 收敛域(-1,1)

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac1{1-x}\xrightarrow{求导}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(x^2)^n=x^2\cdot\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(x^2)^{n-1}=x^2\cdot\frac{1}{(1-x^2)^2}=\frac{x^2}{(1-x^2)^2}$ $x\in(-1,1)$

(5) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1 \Rightarrow R=1$

$x=1$时 $\frac{1}{n(n+1)}\sim\frac1{n^2}$ 而$\sum\frac1{n^2}$收敛⇒$\sum\frac{1}{n(n+1)}$收敛

$x=-1$时 $\sum(-1)^n\frac{1}{n(n+1)}$ 绝对收敛 ⇒ 收敛域为[-1,1]

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac1{1-x}\xrightarrow{积分}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=-\ln(1-x)$

$x\neq0$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac1n x^n-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac1x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}+1$

$=-\ln(1-x)+\frac1x\ln(1-x)+1$

$x=0$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n=0$

(6) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}=1$ $R=1$ $x=\pm1$时易知$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^n$发散

⇒ 收敛域为(-1,1)

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac1{1-x}\xrightarrow{求导}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}=\frac1{(1-x)^2}\xrightarrow{求导}\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3}$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^n=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(n-1)nx^{n-1}=x\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(n-1)nx^{n-2}=\frac{2x}{(1-x)^3}$

(7) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1 \Rightarrow R=1$ $x=\pm1$时易知$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n$发散⇒收敛域(-1,1)

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac1{1-x}\xrightarrow{求导}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}=\frac1{(1-x)^2}$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n=x\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}=\frac{x}{(1-x)^2}$

(8) $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n}{2n+2}=1\Rightarrow R=1$

$x=1$时 (n充分大) $\frac{1}{(2n)!}<\frac1{n^2}$ 由$\sum\frac1{n^2}$收敛⇒$\sum\frac1{(2n)!}$收敛

$x=-1$时 绝对收敛 ⇒ 收敛域为[-1,1]

$e^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ ① $e^{-x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!}$ ②

①+②⇒$e^x+e^{-x}=2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

故 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\frac12(e^x+e^{-x})$

5.(1) 先记 $\arctan x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$

$f'(x)=(\arctan x)'=\frac1{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^{2n}$

$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}(-1)^nx^{2n+1}$

令$x=1$代入 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac\pi4$

(2) $e^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^nn!}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac1{n!}(-\frac12)^n=e^{-\frac12}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=(-1)\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac1n(-1)^n=\ln2$

(4) 记 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}$

$f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^{3n}=\frac1{1+x^3}$

$f(x)=f(0)+\int_0^xf'(x)dx=\frac13\ln(x+1)-\frac16\ln(x^2-x+1)+\frac1{\sqrt3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt3}+\frac{\pi}{6\sqrt3}$

令$x=1$ ⇒ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac13\ln2+\frac{\pi}{3\sqrt3}$

6.(1) $\sin^2x=\frac12-\frac12\cos2x$

$\cos x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\Rightarrow\cos2x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$

$\Rightarrow\sin^2x=\frac12-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $x\in(-\infty,+\infty)$

(2) $\cos(\alpha+\beta x)=\cos\alpha\cos\beta x-\sin\alpha\sin\beta x$

$\cos x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

⇒ $\cos(\alpha+\beta x)=\cos\alpha\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(\beta x)^{2n}}{(2n)!}-\sin\alpha\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(\beta x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $x\in(-\infty,+\infty)$

(3) $\cos^3x=\frac{\cos3x+3\cos x}{4}$

$=\frac14\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(3x)^{2n}}{(2n)!}+\frac34\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$=\frac14\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(3^{2n}+3)\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $x\in(-\infty,+\infty)$

(4) $e^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$

$e^{-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}$

⇒ $\int_0^xe^{-t^2}dt=\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{n!}dt=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_0^x\frac{(-1)^nx^{2n}}{n!}dx$

$=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\Big|_0^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $x\in(-\infty,+\infty)$

(5) $\frac{\sin x}{x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$

$\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}dx=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_0^x(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}dx$

$=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!(2n+1)}x^{2n+1}\Big|_0^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$ $x\in(-\infty,+\infty)$

(6) $(1+x)\ln(1+x)=(1+x)\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}=x+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $x\in(-1,1]$

(7) 令 $g(x)=\arctan\frac{2(1-x)}{1+4x}$

$g'(x)=\frac{1}{1+\frac{4(1-x)^2}{(1+4x)^2}}\cdot\frac{-2(1+4x)-8(1-x)}{(1+4x)^2}=-\frac{2}{1+4x^2}$

$=-2\cdot\frac{1}{1-(-4x^2)}=(-2)\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-4x^2)^n$

$g(x)-g(0)=-2\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-4x^2)^ndx=-2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n4^n\int_0^xx^{2n}dx$

$=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cdot2^{2n+1}\frac1{2n+1}x^{2n+1}\Big|_0^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}2^{2n+1}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$

⇒ $g(0)=\arctan2+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{2n+1}$ $x\in(-1,1)$

(8) 令 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$f'(x)=(1+x^2)^{-\frac12}=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-x^2)^n$

$f(x)=f(0)+\int_0^xf'(t)dt=x+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$ $x\in[-1,1]$

(9) $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac12[\ln(1+x)-\ln(1-x)]=\frac12[\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-x)^n}{n}]$

$=\frac12[\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}]=\frac12\sum\limits_{n=1}^{+\infty}((-1)^{n+1}+1)\frac{x^n}{n}$ (n为偶时=0)

$=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $\begin{cases}-1<x\le1\\-1<-x\le1\end{cases}$ ⇒ $x\in(-1,1)$

(10) $\ln(1+x+x^2+x^3)=\ln\frac{1-x^4}{1-x}=\ln(1-x^4)-\ln(1-x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-x^4)^n}{n}-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(-x)^n$

$=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}-\frac{x^{4n}}{n}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ $\xrightarrow{写成答案形式}$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}+(-1)^{[\frac{n}{2}]-1}(1+(-1)^n)}{n}x^n$ $x\in[-1,1]$

(11) $f(x)=(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots)^2=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}[\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{(2n-3)\cdot3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot(2n-1)}]x^{2n}$

$=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}[(\frac{1}{2n-1}+\frac11)\frac1{2n}+(\frac{1}{2n-3}+\frac13)\frac1{2n}+\cdots+(\frac11+\frac1{2n-1})\frac{1}{2n}]x^{2n}$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1+\frac13+\frac15+\cdots+\frac1{2n-1})\frac{x^{2n}}{n}$ $(-1\le x\le1)$

(12) $f(x)=(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots)^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{3(n-2)}+\cdots+\frac1{n\cdot1}]x^{n+1}$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(1+\frac1n)\frac1{n+1}+(\frac12+\frac1{n-1})\frac1{n+1}+\cdots+(\frac1n+\frac11)\frac1{n+1}]x^{n+1}$

$=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac12+\frac13+\cdots+\frac1n)\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1<x<1)$

7. $\tan x$是奇函数 设 $\tan x=x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^6)$

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)=(x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^6))(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5))$

比较系数 $a_3=\frac13$ $a_5=\frac2{15}$

∴ $\tan x=x+\frac13x^3+\frac2{15}x^5+o(x^6)$

8. 设 $g(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}t^{n+1}$

$g'(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}t^{n}$ $\quad g''(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}t^{n-1}=\frac{1}{1-t}$

$\Rightarrow g'(t)=g'(0)+\int_0^t g''(t)dt=-\ln(1-t)$

$g(t)=g(0)+\int_0^t g'(t)dt=\int_0^t \ln(1-t)d(1-t)$

$=(1-t)\ln(1-t)+\int_0^t dt=t+(1-t)\ln(1-t)$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}t^{n}=\begin{cases}1+(\frac{1}{t}-1)\ln(1-t) & t\in[-1,0)\cup(0,1)\\ 0 & t=0\\ 1 & t=1\end{cases}$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}1+\frac{1-x}{1+x}\ln\frac{1-x}{2} & x\in[-3,-1)\cup(-1,1)\\ 0 & x=-1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

$x\in(-3,-1)\cup(-1,1)$ 时

$f(x)=1+(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n\left(-\ln2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n\right)$

$=1+(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n(-\ln2-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n})$

$=1+[1+2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^n](-\ln2-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n})$

$=\sum_{n=1}^{+\infty}[\frac{1}{n}-2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{1}{k}+(-1)^{n+1}2\ln2]x^n+1-\ln2$

9. $\lim_{x\to1}\frac{x^a-x^b}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{ax^{a-1}-bx^{b-1}}{-1}=b-a\Rightarrow x=1$ 不是瑕点

$x=0$ 可能是瑕点 ($a,b<0$时) 但由 $a,b>-1$ 积分收敛

而 $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n+a}-\frac{1}{n+b})=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b-a}{(n+a)(n+b)}$

$x\in[0,1)$ 时 $\quad\frac{x^a-x^b}{1-x}=(x^a-x^b)\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(x^{a+n}-x^{b+n})$ ①

应用cauchy收敛准则可证①在$[0,1)$内闭一致收敛

$\int_0^x\frac{x^a-x^b}{1-x}dx=\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}(x^{n+a}-x^{n+b})dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x(x^{n+a}-x^{n+b})dx$

$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+a+1}}{n+a+1}-\frac{x^{n+b+1}}{n+b+1}$

右端在$x=1$收敛

$\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{n+a+1}-\frac{1}{n+b+1})=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b-a}{(n+a+1)(n+b+1)}$ 收敛

不妨设 $-1<a<b$ ($b=a$ 显然成立)

令 $f(x)=\frac{x^{n+a+1}}{n+a+1}-\frac{x^{n+b+1}}{n+b+1}$ $\qquad f(0)=0$

$f'(x)=x^{n+a}-x^{n+b}\geqslant0\quad(0\le x\le1)$

$\therefore f(x)$在$[0,1]$单增 有$0\le f(x)\le f(1)$

$\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{x^{n+a+1}}{n+a+1}-\frac{x^{n+b+1}}{n+b+1})$在$[0,1]$一致收敛

由连续性定理 $\int_0^1\frac{x^a-x^b}{1-x}=\lim_{x\to1-0}\int_0^x\frac{x^a-x^b}{1-x}dx=\lim_{x\to1-0}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{x^{n+a+1}}{n+a+1}-\frac{x^{n+b+1}}{n+b+1})$

$=\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{n+a+1}-\frac{1}{n+b+1})=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+a}-\frac{1}{n+b}$

10. 证明: $\forall a\le t\le x\le b$ 有 $0\le\frac{x-t}{x-a}\le1\Rightarrow\frac{x-t}{x-a}\le\frac{x-t+(b-x)}{x-a+(b-x)}=\frac{b-t}{b-a}$

由积分型余项 $\forall x\in[a,b]$ $f^{(k)}(x)\geqslant0$

$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt\le\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(b-t)^n(\frac{x-a}{b-a})^n dt$

$\le(\frac{x-a}{b-a})^n\frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt=(\frac{x-a}{b-a})^n R_n(b)$

而 $R_n(b)=\frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt$

$=\frac{1}{n!}(f^{(n)}(t)(b-t)^n\Big|_a^b-\int_a^b f^{(n)}(t)\cdot n(b-t)^{n-1}(-1)dt)$

$=\frac{1}{n!}(-f^{(n)}(a)(b-a)^n+n\int_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1}dt)$

$\le\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1}dt=R_{n-1}(b)$

$\le R_{n-2}(b)\le\cdots\le R_0(b)=\int_a^b f'(t)dt=f(b)-f(a)$

$\Rightarrow x\in[a,b)$ $R_n(x)\le(\frac{x-a}{b-a})^n R_n(b)\le(\frac{x-a}{b-a})^n(f(b)-f(a))\to0\quad(n\to+\infty)$

$\Rightarrow x\in[a,b)$时有 $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ ①

若$x=b$ ①不成立 则 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n=+\infty$

$\forall M>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$ 当$m>N$时 有 $\sum_{n=0}^{m}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n>M+1$

由 $\lim_{x\to1-0}\sum_{n=0}^{m}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=\sum_{n=0}^{m}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n>M+1$

$\exists\delta>0$ s.t. $x\in(b-\delta,b)$ $\quad f(x)\geqslant\sum_{n=0}^{m}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n>M$

$\Rightarrow f$在$[a,1]$上无界 与 $f\in C[a,b]$ 矛盾

$\Rightarrow x=b$时 ①成立 $\Rightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\quad x\in[a,b]$

11. 由逐项微分定理 $f^{(n)}(b)=\sum_{k=n}^{+\infty}a_k\cdot k(k-1)\cdots(k-n+1)(b-a)^{k-n}$

$\forall x\in(b-r',b+r')$ 有 $|b-a|+|x-b|<r$

取 $\bar{x}\in(a+|b-a|+|x-b|,a+r)$ 有 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(\bar{x}-a)^n$

$\exists M>0$ s.t. $|a_n(\bar{x}-a)^n|\le M$

有 $\sum_{k=0}^{m}\sum_{n=0}^{k}\left|\binom{k}{n}a_k(b-a)^{k-n}(x-b)^n\right|\le\sum_{k=0}^{m}\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}M|\bar{x}-a|^{-k}|b-a|^{k-n}|x-b|^n$

$=\sum_{k=0}^{m}M|\bar{x}-a|^{-k}(|b-a|+|x-b|)^k$

$=\sum_{k=0}^{m}M(\frac{|b-a|+|x-b|}{|\bar{x}-a|})^k\le\sum_{k=0}^{+\infty}M(\frac{|b-a|+|x-b|}{|\bar{x}-a|})^k$

$=\frac{M|\bar{x}-a|}{|\bar{x}-a|-|b-a|-|x-b|}=\bar{M}$

$\Rightarrow\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k}\left|\binom{k}{n}a_k(b-a)^{k-n}(x-b)^n\right|\le\bar{M}$

$\Rightarrow\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}a_k(b-a)^{k-n}(x-b)^n$ 绝对收敛

$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}a_k(b-a)^{k-n}(x-b)^n$

$=\sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k}{n}a_k(b-a)^{k-n})(x-b)^n$

$=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n(x-b)^n$

左端 $=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}(b-a)^{k-n}(x-b)^n$

$=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(b-a+x-b)^n=\sum_{k=0}^{+\infty}x_k(x-a)^k=f(x)$

即在 $x\in(b-r',b+r')$ 有 $f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}b_n(x-b)^n$

12. 由正项级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$发散 $\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ 无界

$\Rightarrow\forall M>0$ $\exists N>0$ 当$n\geqslant N$时 $\sum_{k=1}^{n}a_k>2M$

不妨令 $n=N$ $\quad$ 即 $\sum_{k=1}^{N}a_k>2M$

对于每个N 由于 $x\in(0,1)$ $\lim_{x\to1-0}x^N=1$

$\Rightarrow$ 由保号性 $\exists\delta>0$ 当$x\in(1-\delta,1)$ 有 $x^N>\frac{1}{2}$

$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\geqslant\sum_{k=0}^{N}a_kx^k\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}a_k\geqslant\frac{1}{2}\cdot2M=M$

故 $\lim_{x\to1-0}\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=+\infty$

13. 反证法 $\quad$ 设 $\exists x_0,x_n\in(a,b)$ s.t. $f(x_n)=0$ 且 $x_n\to x_0$

不妨设 $x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots$ 则 $x_n<x_0\quad n=1,2\cdots$

由连续性 $f(x_0)=0$

根据Rolle定理 $\exists\xi_{1n}\in(x_n,x_{n+1})$ s.t. $f'(\xi_{1n})=0\quad n=1,2\cdots$

显然 $\xi_{11}<\xi_{12}<\cdots<\xi_{1n}<\cdots<x_0$ 且 $\xi_{1n}\to x_0\ (n\to+\infty)$

由$f'(x)$连续性 $\Rightarrow f'(x_0)=0$ $\quad$ 同理可证 $f^{(n)}(x_0)=0\quad n=0,1\cdots$

而f在x_0解析 $\exists\delta>0$ s.t. $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}0\cdot(x-x_0)^n=0\quad x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$

令 $E=\{t\in(a,x_0]\mid f(x)=0\ x\in(t,+\infty)\}$ $E\neq\emptyset$ 且E有下界a $\quad E$有下确界$\alpha=\inf E$

下证 $\alpha=a$ 否则 $a<\alpha\le x_0-\delta$

8. 设 $g(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}t^{n+1}$

$g'(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}t^{n}$ $\quad g''(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}t^{n-1}=\frac{1}{1-t}$

$\Rightarrow g'(t)=g'(0)+\int_0^t g''(t)dt=-\ln(1-t)$

$g(t)=g(0)+\int_0^t g'(t)dt=\int_0^t \ln(1-t)d(1-t)$

$=(1-t)\ln(1-t)+\int_0^t dt=t+(1-t)\ln(1-t)$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}t^n=\begin{cases}1+(\frac{1}{t}-1)\ln(1-t) & t\in[-1,0)\cup(0,1)\\ 0 & t=0\\ 1 & t=1\end{cases}$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}1+\frac{1-x}{1+x}\ln\frac{1-x}{2} & x\in[-3,-1)\cup(-1,1)\\ 0 & x=-1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

$x\in(-3,-1)\cup(-1,1)$ 时

$f(x)=1+(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n\left(-\ln2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n\right)$

$=1+(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n(-\ln2-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n})$

$=1+[1+2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^n](-\ln2-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n})$

$=\sum_{n=1}^{+\infty}[\frac{1}{n}-2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{1}{k}+(-1)^{n+1}2\ln2]x^n+1-\ln2$

9. $\lim_{x\to1}\frac{x^a-x^b}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{ax^{a-1}-bx^{b-1}}{-1}=b-a\Rightarrow x=1$ 不是瑕点

$x=0$ 可能是瑕点 $(a,b<0$ 时$)$ 但由 $a,b>-1$ 积分收敛

而 $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n+a}-\frac{1}{n+b})=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b-a}{(n+a)(n+b)}$

$x\in[0,1)$ 时 $\quad\frac{x^a-x^b}{1-x}=(x^a-x^b)\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(x^{a+n}-x^{b+n})$ ①

应用 Cauchy 收敛准则可证①在 $[0,1)$ 内闭一致收敛

$\int_0^x\frac{x^a-x^b}{1-x}dx=\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}(x^{n+a}-x^{n+b})dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x(x^{n+a}-x^{n+b})dx$

$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+a+1}}{n+a+1}-\frac{x^{n+b+1}}{n+b+1}$

右端在 $x=1$ 收敛

$\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{n+a+1}-\frac{1}{n+b+1})=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b-a}{(n+a+1)(n+b+1)}$ 收敛

不妨设 $-1<a<b$ $(b=a$ 显然成立$)$

令 $f(x)=\frac{x^{n+a+1}}{n+a+1}-\frac{x^{n+b+1}}{n+b+1}$ $\qquad f(0)=0$

$f'(x)=x^{n+a}-x^{n+b}\geqslant0\quad(0\le x\le1)$

$\therefore f(x)$ 在 $[0,1]$ 单增 有 $0\le f(x)\le f(1)$

$\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{x^{n+a+1}}{n+a+1}-\frac{x^{n+b+1}}{n+b+1})$ 在 $[0,1]$ 一致收敛

由连续性定理 $\int_0^1\frac{x^a-x^b}{1-x}=\lim_{x\to1-0}\int_0^x\frac{x^a-x^b}{1-x}dx=\lim_{x\to1-0}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{x^{n+a+1}}{n+a+1}-\frac{x^{n+b+1}}{n+b+1})$

$=\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{n+a+1}-\frac{1}{n+b+1})=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+a}-\frac{1}{n+b}$

10. 证明：$\forall a\le t\le x\le b$ 有 $0\le\frac{x-t}{x-a}\le1\Rightarrow\frac{x-t}{x-a}\le\frac{x-t+(b-x)}{x-a+(b-x)}=\frac{b-t}{b-a}$

由积分型余项 $\forall x\in[a,b]$ $f^{(k)}(x)\geqslant0$

$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt\le\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(b-t)^n(\frac{x-a}{b-a})^n dt$

$\le(\frac{x-a}{b-a})^n\frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt=(\frac{x-a}{b-a})^n R_n(b)$

而 $R_n(b)=\frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt$

$=\frac{1}{n!}(f^{(n)}(t)(b-t)^n\Big|_a^b-\int_a^b f^{(n)}(t)\cdot n(b-t)^{n-1}(-1)dt)$

$=\frac{1}{n!}(-f^{(n)}(a)(b-a)^n+n\int_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1}dt)$

$\le\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1}dt=R_{n-1}(b)$

$\le R_{n-2}(b)\le\cdots\le R_0(b)=\int_a^b f'(t)dt=f(b)-f(a)$

$\Rightarrow x\in[a,b)$ $R_n(x)\le(\frac{x-a}{b-a})^n R_n(b)\le(\frac{x-a}{b-a})^n(f(b)-f(a))\to0\quad(n\to+\infty)$

$\Rightarrow x\in[a,b)$ 时有 $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ ①

若 $x=b$ ①不成立 则 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n=+\infty$

$\forall M>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$ 当 $m>N$ 时 有 $\sum_{n=0}^{m}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n>M+1$

由 $\lim_{x\to1-0}\sum_{n=0}^{m}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=\sum_{n=0}^{m}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n>M+1$

$\exists\delta>0$ s.t. $x\in(b-\delta,b)$ $\quad f(x)\geqslant\sum_{n=0}^{m}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n>M$

$\Rightarrow f$ 在 $[a,1]$ 上无界 与 $f\in C[a,b]$ 矛盾

$\Rightarrow x=b$ 时①成立 $\Rightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\quad x\in[a,b]$

11. 由逐项微分定理 $f^{(n)}(b)=\sum_{k=n}^{+\infty}a_k\cdot k(k-1)\cdots(k-n+1)(b-a)^{k-n}$

$\forall x\in(b-r',b+r')$ 有 $|b-a|+|x-b|<r$

取 $\bar{x}\in(a+|b-a|+|x-b|,a+r)$ 有 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(\bar{x}-a)^n$

$\exists M>0$ s.t. $|a_n(\bar{x}-a)^n|\le M$

有 $\sum_{k=0}^{m}\sum_{n=0}^{k}\left|\binom{k}{n}a_k(b-a)^{k-n}(x-b)^n\right|\le\sum_{k=0}^{m}\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}M|\bar{x}-a|^{-k}|b-a|^{k-a}|x-b|^n$

$=\sum_{k=0}^{m}M|\bar{x}-a|^{-k}(|b-a|+|x-b|)^k$

$=\sum_{k=0}^{m}M(\frac{|b-a|+|x-b|}{|\bar{x}-a|})\le\sum_{k=0}^{+\infty}M(\frac{|b-a|+|x-b|}{|\bar{x}-a|})^k$

$=\frac{M|\bar{x}-a|}{|\bar{x}-a|-|b-a|-|x-b|}=\bar{M}$

$\Rightarrow\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k}\left|\binom{k}{n}a_k(b-a)^{k-n}(x-b)^n\right|\le\bar{M}$

$\Rightarrow\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}a_k(b-a)^{k-n}(x-b)^n$ 绝对收敛

$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}a_k(b-a)^{k-n}(x-b)^n$

$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k}{n}a_k(b-a)^{k-n}\right)(x-b)^n$

$=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n(x-b)^n$

左端 $=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}(b-a)^{k-n}(x-b)^n$

$=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(b-a+x-b)^n=\sum_{k=0}^{+\infty}x_k(x-a)^k=f(x)$

即在 $x\in(b-r',b+r')$ 有 $f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}b_n(x-b)^n$

12. 由正项级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ 发散 $\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ 无界

$\Rightarrow\forall M>0$ $\exists N>0$ 当 $n\geqslant N$ 时 $\sum_{k=1}^{n}a_k>2M$

不妨令 $n=N$ 即 $\sum_{k=1}^{N}a_k>2M$

对于每个 N 由于 $x\in(0,1)$ $\lim_{x\to1-0}x^N=1$

$\Rightarrow$ 由保号性 $\exists\delta>0$ 当 $x\in(1-\delta,1)$ 有 $x^N>\frac{1}{2}$

$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n\geqslant\sum_{k=0}^{N}a_k x^k\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}a_k\geqslant\frac{1}{2}\cdot2M=M$

故 $\lim_{x\to1-0}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n=+\infty$

13. 反证法 设 $\exists x_0,x_n\in(a,b)$ s.t. $f(x_n)=0$ 且 $x_n\to x_0$

不妨设 $x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots$ 则 $x_n<x_0$ $\quad n=1,2\cdots$

由连续性 $f(x_0)=0$

根据 Rolle 定理 $\exists\xi_{1n}\in(x_n,x_{n+1})$ s.t. $f'(\xi_{1n})=0$ $\quad n=1,2\cdots$

显然 $\xi_{11}<\xi_{12}<\cdots<\xi_{1n}<\cdots<x_0$ 且 $\xi_{1n}\to x_0$ $(n\to+\infty)$

由 $f'(x)$ 连续性 $\Rightarrow f'(x_0)=0$ 同理可证 $f^{(n)}(x_0)=0$ $\quad n=0,1\cdots$

而 f 在 x_0 解析 $\exists\delta>0$ s.t. $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}0\cdot(x-x_0)^n=0$ $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$

令 $E=\{t\in(a,x_0]\mid f(x)=0\ x\in(t,+\infty)\}$ $E\ne\varnothing$ 且 E 有下界 a E 有下确界 $\alpha=\inf E$

下证 $\alpha=a$ 否则 $a<\alpha\le x_0-\delta$

对 $\forall x'\in(\alpha,x_0]$ $\exists t\in(\alpha,x')$ 有 $t\in E$ $f(x)=0$ $x\in(t,x_0]$

于是 $x'=0$ 即 $f(x)=0$ $x\in(\alpha,x_0]$ 有 $f^{(n)}(x)=0$ $x\in(\alpha,x_0]$

由连续性 $f^{(n)}(\alpha)=0$ $n=0,1,2\cdots$

已知 f 在 α 解析 $\exists b_\alpha>0$ s.t. $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n=0$ $x\in(\alpha-b_\alpha,\alpha+b_\alpha)$

于是 $f(x)=0$ $x\in(\alpha-b_\alpha,x_0]$ $\alpha-b_\alpha\in E$

$\alpha=\inf E\le\alpha-b_\alpha$ 矛盾 即 $\alpha=a$ 且 $f(x)=0$ $x\in(a,x_0]=(\alpha,x_0]$

同理 $\beta=\sup\{t\in[x_0,b)\mid f(x)=0\ \ x\in(x_0,t)\}=b$ 且 $f(x)=0$ $x\in[x_0,b)=[x_0,\beta)$

$\Rightarrow f(x)=0$ $x\in(a,b)$

14. 由 $\{f^{(n)}(0)\}$ 有界 $\Rightarrow \exists M>0$ s.t. $|f^{(n)}(0)|\le M$

$0\le\sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|}\le\frac{\sqrt[n]{M}}{\sqrt{n}}\xrightarrow{\text{夹逼收敛}}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|}=0$

$\Rightarrow$ $f(x)$ 麦克劳林级数收敛半径为 ∞

$\Rightarrow$ $f(x)$ 必是 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个 C^∞ 函数的限制

15. 由于 $f(x)\in C[0,1]\Rightarrow\exists P_n(x)\rightrightarrows f(x)$

$\int_0^1 f(x)x^n dx=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 P_n(x)f(x)dx=0$

故 $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 P_n(x)f(x)dx=\int_0^1\lim_{n\to+\infty}P_n(x)f(x)dx=\int_0^1 f^2(x)dx$

$\Rightarrow f(x)\equiv0$

16. 引理 11.4.2 $c=\max\{|c_1|,|c_2|\cdots|c_J|\}$

由 $f_j(x)$ 在 $[a,b]$ 上可被多项式逼近

$\Rightarrow\forall\varepsilon>0$ $\exists P_j(x)$ $\forall x\in[a,b]$ 有 $|P_j(x)-f_j(x)|<\varepsilon/cJ$

$\left|\sum_{j=1}^J c_jf_j(x)-\sum_{j=1}^J c_jP_j(x)\right|=\left|\sum_{j=1}^J c_j(f_j(x)-P_j(x))\right|\le c\sum_{j=1}^J|f_j(x)-P_j(x)|<cJ\cdot\frac{\varepsilon}{cJ}=\varepsilon$

引理 11.4.3 由 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)\Rightarrow\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$ 当 $n>N$ 时有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2$

对每个 N 取 $n_0=N+1$ 即 $|f_{n_0}(x)-f(x)|<\varepsilon/2$

而 $\forall n\in\mathbb{N}$ $f_n(x)$ 可被多项式逼近 $\Rightarrow$ 对上述 $f_{n_0}(x)$ $\exists P_{n_0}(x)$ s.t. $|f_{n_0}(x)-P_{n_0}(x)|<\varepsilon/2$

故 $|f(x)-P_{n_0}(x)|\le|f(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-P_{n_0}(x)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$

17. 反证法：设 $f(x)$ 不是多项式，但可被多项式逼近

$\varepsilon=1$ $\exists N>0$ 当 $n>N$ $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $|P_n(x)-f(x)|<1$

令 $n_0=N+1>N$ $|P_n(x)-P_{n_0}(x)|\le|P_n(x)-f(x)|+|f(x)-P_{n_0}(x)|\le2$

故 $P_n(x)-P_{n_0}(x)=c$ $\lim_{n\to+\infty}(P_n(x)-P_{n_0}(x))=f(x)-P_{n_0}(x)=c$

$\Rightarrow f(x)=P_{n_0}(x)+c$ 是多项式 #

18. 由 $f(x)$ 在 (a,b) 内可被多项式逼近 $\Rightarrow f(x)$ 在 (a,b) 内连续

$\Rightarrow\exists\delta>0$ $f(x)$ 在 $[a+\delta,b-\delta]$ 一致连续　下只需证明端点处

由 $f(x)$ 在 (a,b) 内可被多项式逼近 $\Rightarrow\forall\varepsilon>0$ $\exists P(x)$ $|f(x)-P(x)|<\varepsilon/3$

$P(x)$ 连续 $\Rightarrow\forall x',x''\in(a,a+\delta)$ $|P(x')-P(x'')|<\varepsilon/3$

故 $\forall\varepsilon>0$ 当 $x',x''\in(a,a+\delta)$ 时

$|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-P(x')|+|P(x')-P(x'')|+|f(x'')-P(x'')|<\varepsilon$

$\Rightarrow\lim_{x\to a+0}f(x)$ 存在　同理可证 $\lim_{x\to b-0}f(x)$ 存在

$\Rightarrow f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续

对 $\forall x'\in(\alpha,x_0]$ $\exists t\in(\alpha,x')$ 有 $t\in E$ $f(x)=0$ $x\in(t,x_0]$

于是 $x'=0$ 即 $f(x)=0$ $x\in(\alpha,x_0]$ 有 $f^{(n)}(x)=0$ $x\in(\alpha,x_0]$

由连续性 $f^{(n)}(\alpha)=0$ $n=0,1,2\cdots$

已知 f 在 α 解析 $\exists b_\alpha>0$ s.t. $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n=0$ $x\in(\alpha-b_\alpha,\alpha+b_\alpha)$

于是 $f(x)=0$ $x\in(\alpha-b_\alpha,x_0]$ $\alpha-b_\alpha\in E$

$\alpha=\inf E\le\alpha-b_\alpha$ 矛盾 即 $\alpha=a$ 且 $f(x)=0$ $x\in(a,x_0]=(\alpha,x_0]$

同理 $\beta=\sup\{t\in[x_0,b)\mid f(x)=0\ \ x\in(x_0,t)\}=b$ 且 $f(x)=0$ $x\in[x_0,b)=[x_0,\beta)$

$\Rightarrow f(x)=0$ $x\in(a,b)$

14. 由 $\{f^{(n)}(0)\}$ 有界 $\Rightarrow \exists M>0$ s.t. $|f^{(n)}(0)|\le M$

$$0\le\sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|}\le\frac{\sqrt[n]{M}}{\sqrt{n}}\xrightarrow{\text{夹逼收敛}}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|}=0$$

$\Rightarrow f(x)$ 麦克劳林级数收敛半径为 ∞

$\Rightarrow f(x)$ 必是 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个 C^∞ 函数的限制

15. 由于 $f(x)\in C[0,1]\Rightarrow\exists P_n(x)\rightrightarrows f(x)$

$\int_0^1 f(x)x^n dx=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 P_n(x)f(x)dx=0$

故 $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 P_n(x)f(x)dx=\int_0^1\lim_{n\to+\infty}P_n(x)f(x)dx=\int_0^1 f^2(x)dx$

$\Rightarrow f(x)\equiv 0$

16. 引理 11.4.2 $c=\max\{|c_1|,|c_2|\cdots|c_J|\}$

由 $f_j(x)$ 在 $[a,b]$ 上可被多项式逼近

$\Rightarrow\forall\varepsilon>0$ $\exists P_j(x)$ $\forall x\in[a,b]$ 有 $|P_j(x)-f_j(x)|<\varepsilon/cJ$

$$\left|\sum_{j=1}^{J}c_jf_j(x)-\sum_{j=1}^{J}c_jP_j(x)\right|=\left|\sum_{j=1}^{J}c_j(f_j(x)-P_j(x))\right|\le c\sum_{j=1}^{J}|f_j(x)-P_j(x)|<cJ\cdot\frac{\varepsilon}{cJ}=\varepsilon$$

引理 11.4.3 由 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)\Rightarrow\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$ 当 $n>N$ 时有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2$

对每个 N 取 $n_0=N+1$ 即 $|f_{n_0}(x)-f(x)|<\varepsilon/2$

而 $\forall n\in\mathbb{N}$ $f_n(x)$ 可被多项式逼近 $\Rightarrow$ 对上述 $f_{n_0}(x)$ $\exists P_{n_0}(x)$ s.t. $|f_{n_0}(x)-P_{n_0}(x)|<\varepsilon/2$

故 $|f(x)-P_{n_0}(x)|\le|f(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-P_{n_0}(x)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$

17. 反证法：设 $f(x)$ 不是多项式，但可被多项式逼近

$\varepsilon=1$ $\exists N>0$ 当 $n>N$ $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $|P_n(x)-f(x)|<1$

令 $n_0=N+1>N$ $|P_n(x)-P_{n_0}(x)|\le|P_n(x)-f(x)|+|f(x)-P_{n_0}(x)|\le 2$

故 $P_n(x)-P_{n_0}(x)=c$ $\lim_{n\to+\infty}(P_n(x)-P_{n_0}(x))=f(x)-P_{n_0}(x)=c$

$\Rightarrow f(x)=P_{n_0}(x)+c$ 是多项式 #

18. 由 $f(x)$ 在 (a,b) 内可被多项式逼近 $\Rightarrow f(x)$ 在 (a,b) 内连续

$\Rightarrow\exists\delta>0$ $f(x)$ 在 $[a+\delta,b-\delta]$ 一致连续　下只需证明端点处

由 $f(x)$ 在 (a,b) 内可被多项式逼近 $\Rightarrow\forall\varepsilon>0$ $\exists P(x)$ $|f(x)-P(x)|<\varepsilon/3$

$P(x)$ 连续 $\Rightarrow\forall x',x''\in(a,a+\delta)$ $|P(x')-P(x'')|<\varepsilon/3$

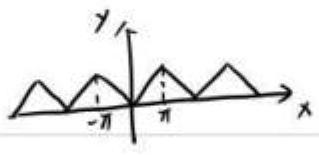
故 $\forall\varepsilon>0$ 当 $x',x''\in(a,a+\delta)$ 时

$$|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-P(x')|+|P(x')-P(x'')|+|f(x'')-P(x'')|<\varepsilon$$

$\Rightarrow\lim_{x\to a+0}f(x)$ 存在　同理可证 $\lim_{x\to b-0}f(x)$ 存在

$\Rightarrow f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续

习题十二

1.(1) $f(x)$ 周期延拓后图象为 

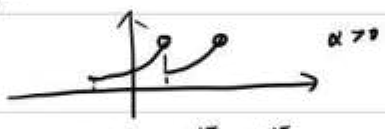
$f(x)$ 为偶函数 $\Rightarrow b_n=0$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}x\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx$

$=\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}-\frac{4}{n^2\pi} & n\text{为奇}\\ 0 & n\text{为偶}\end{cases}$

$f(x)\sim\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

(2) $f(x)$ 周期延拓后 

($\alpha\neq0$) $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}dx=\frac{1}{\pi\alpha}e^{\alpha x}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}}{\alpha\pi}$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}\cos nx\,dx=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}d\sin nx=\frac{1}{n\pi}\sin nx\,e^{\alpha x}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{\alpha}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}d\cos nx$

$=\frac{1}{n\pi}\sin nx\,e^{\alpha x}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{\alpha}{n^2\pi}e^{\alpha x}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{\alpha^2}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}\cos nx\,dx$

$\Rightarrow\frac{n^2+\alpha^2}{n^2}a_n=\frac{1}{n^2\pi}(n\sin nx+\alpha\cos nx)e^{\alpha x}\Big|_{-\pi}^{\pi}\Rightarrow a_n=\frac{\alpha(e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi})(-1)^n}{(\alpha^2+n^2)\pi}$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}\sin nx\,dx\ \overset{\text{同理}}{=\!=}\ \frac{n(e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi})(-1)^{n+1}}{(\alpha^2+n^2)\pi}$

$\alpha\neq0$ $f(x)\sim\frac{1}{2\alpha\pi}(e^{\pi\alpha}-e^{-\pi\alpha})+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+n^2)}(e^{\pi\alpha}-e^{-\pi\alpha})\cos nx+(-1)^{n+1}\frac{n}{\pi(n^2+\alpha^2)}(e^{\pi\alpha}-e^{-\pi\alpha})\sin nx\right]$

$\alpha=0$ $f(x)=1$

(3) $f(x)$ 周期延拓 $\Rightarrow f(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow a_k=0$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos x\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x[\sin(n+1)x+\sin(n-1)x]dx$

$\int_0^{\pi}x\sin(n+1)x\,dx=-\frac{1}{n+1}\int_0^{\pi}x\,d\cos(n+1)x=-\frac{1}{n+1}x\cos(n+1)x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n+1}\int_0^{\pi}\cos(n+1)x\,dx=-\frac{\pi}{n+1}(-1)^{n+1}$

$\int_0^{\pi}x\sin(n-1)x\,dx=\begin{cases}0 & n=1\text{时}\\ -\frac{1}{n-1}x\cos(n-1)x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n-1}\int_0^{\pi}\cos(n-1)x\,dx=-\frac{\pi}{n-1}(-1)^{n-1}\end{cases}$

$\Rightarrow b_1=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}x\sin(n+1)x\,dx+\int_0^{\pi}x\sin(n-1)x\,dx\right]=-\frac{1}{2}$

$b_n=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n+1}(-1)^{n+1}-\frac{\pi}{n-1}(-1)^{n-1}\right]=\frac{2n}{n^2-1}(-1)^n\quad n=2,3,4\cdots$

$f(x)\sim-\frac{1}{2}\sin x+\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n}{n^2-1}\sin nx$

(4) $f(x)$ 周期延拓 $\Rightarrow$ 偶函数 $\Rightarrow b_n=0$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos2x)dx=1+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos2x\,dx=1$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}\cos nx+\frac{1}{2}\cos2x\cos nx)dx$

$=\begin{cases}0 & n\neq2\\ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos4x)dx=\frac{1}{2} & n=2\end{cases}$

$\Rightarrow f(x)\sim\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos2x$

(5) $f(x)$ 周期延拓 $\Rightarrow f(x)$ 奇函数 $\Rightarrow a_k=0$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nx\,dx=-\frac{1}{2n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{2n}[1-(-1)^n]=\begin{cases}0 & n\text{为偶}\\ \frac{1}{n} & n\text{为奇}\end{cases}$

$\Rightarrow f(x)\sim\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x$

(6) $f(x)$ 偶函数 $\Rightarrow b_n=0$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos2x}{2}\right)^2dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}-\cos2x+\frac{1}{2}\cos^22x)dx=\frac{3}{4}$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}\cos nx-\cos2x\cos nx+\frac{1}{2}\cos^22x\cos nx\right)dx$

$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos2x\cos nx\,dx+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\cancel{\frac{1}{2}\cos nx\,dx}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\cos4x\cos nx\,dx$

$=\begin{cases}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos2x)^2dx=-\frac{1}{2} & n=2\\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\cos4x)^2dx=\frac{1}{8} & n=4\\ 0 & n\neq2,n\neq4\end{cases}$

$\Rightarrow f(x)\sim\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos2x+\frac{1}{8}\cos4x$

(7) $\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}=\frac{1-r^2}{1-r(e^{ix}+e^{-ix})+r^2}=(1-r^2)\frac{1}{(1-re^{ix})(1-re^{-ix})}=-1+\frac{1}{1-re^{ix}}+\frac{1}{1-re^{-ix}}$

$=-1+(1+re^{ix}+r^2e^{2ix}+\cdots)+(1+re^{-ix}+r^2e^{-2ix}+\cdots)$

$=1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx$

2.(1) 正弦级数：将 $f(x)$ 奇延拓 $\rightarrow$ 周期延拓

易知 $f(x)\sim\sin x$

余弦级数：将 $f(x)$ 偶延拓 $\rightarrow$ 周期延拓 $\Rightarrow F(x)=|\sin x|$

$F(x)$ 是以 π 为周期的偶函数 $\Rightarrow b_n=0$ 记 $T=\frac{\pi}{2}$

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}F(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx=\frac{4}{\pi}$

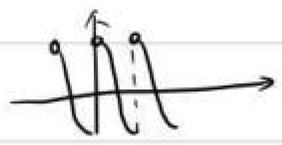
$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\cos2nx\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos2nx\,dx$

$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}[\sin(1+2n)x+\sin(1-2n)x]dx$

$=\left[-\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+2n}\cos(1+2n)x+\frac{2}{\pi}\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{4}{(4n^2-1)\pi}$

$\Rightarrow$ 余弦级数为 $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos2nx}{4n^2-1}$

(2) ① 余弦级数 易知 $\cos x$

② 正弦级数：将 $f(x)$ 奇延拓 $\rightarrow$ 周期延拓 $\rightarrow F(x)$ 

$F(x)$ 是以 π 为周期的奇函数 记 $T=\frac{\pi}{2}$

$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin2nx\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin2nx\,dx$

$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}[\sin(2n+1)x+\sin(2n-1)x]dx$

$=-\frac{2}{\pi}\frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)x-\frac{2}{\pi}\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8n}{(4n^2-1)\pi}$

$\Rightarrow$ 正弦级数为 $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin2nx$

(3) ① 正弦级数 

$f(x)$ 奇延拓 $\rightarrow$ 周期延拓 $\rightarrow F(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow a_k=0$

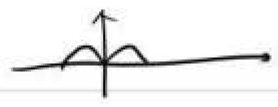
$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin nx\,dx=2\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx\,dx$

$=-\frac{2}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx+\frac{2}{n\pi}x^2\cos nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\cdot2x\,dx$

$=\cancel{\frac{2}{n}\pi(-1)^{n+1}}+\cancel{\frac{2}{n}\pi(-1)^n}-\frac{4}{n^2\pi}\cancel{x\sin nx}\Big|_0^{\pi}+\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx$

$=\frac{4}{n^3\pi}[(-1)^n-1]=\begin{cases}0 & n\text{为偶}\\ -\frac{8}{n^3\pi} & n\text{为奇}\end{cases}$

$\Rightarrow$ 正弦级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty}-\frac{8}{(2n-1)^3\pi}\sin(2n-1)x$

② 余弦级数 

$f(x)$ 偶延拓 $\rightarrow$ 周期延拓 $\rightarrow F(x)$ 为周期为 π 的偶函数 令 $T=\frac{\pi}{2}$ $b_n=0$

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}F(x)dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\pi-x)dx=2x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}\pi^2$

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}F(x)\cos2nx\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\pi-x)\cos2nx\,dx$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos2nx\,dx-\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos2nx\,dx$

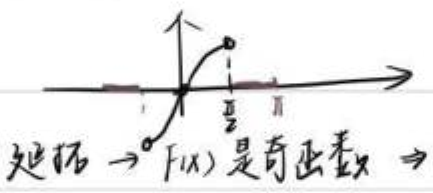
$=\frac{4}{2n}\cancel{x\sin2nx}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{4}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2nx\,dx-\frac{4}{2n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2d\sin2nx$

$=\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2n}\cos2nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{n\pi}x^2\cancel{\sin2nx}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\sin2nx\,dx$

$=\frac{1}{n^2}((-1)^n-1)-\frac{2}{n^2\pi}x\cos2nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cancel{\cos2nx\,dx}$

$=\frac{1}{n^2}((-1)^n-1)-\frac{1}{n^2}(-1)^n=-\frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow$ 余弦级数 $\frac{1}{6}\pi^2-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos2nx}{n^2}$

(4) ① 正弦级数 

$f(x)$ 奇延拓 $\rightarrow$ 周期延拓 $\rightarrow F(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow a_k=0$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin nx\,dx$

$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}[\cos(n+1)x-\cos(n-1)x]dx$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(n-1)x\,dx-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(n+1)x\,dx$

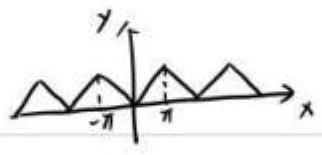
$n=1$ 时 $b_1=\frac{1}{2}$

$n\neq1$ 时 $b_n=\frac{1}{\pi}\frac{1}{n-1}\sin(n-1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{\pi}\frac{1}{n+1}\sin(n+1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\begin{cases}0 & n=2k+1\\ \frac{(-1)^{k-1}}{\pi}\frac{4k}{4k^2-1} & n=2k\end{cases}$

$\Rightarrow$ 正弦级数 $\frac{1}{2}\sin x+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{4n^2-1}\sin2nx$

习题十二

1.(1) $f(x)$ 周期延拓后图象为 

$f(x)$ 为偶函数 $\Rightarrow b_n=0$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}x\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx$

$=\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1)=\begin{cases}-\frac{4}{n^2\pi} & n\text{为奇}\\ 0 & n\text{为偶}\end{cases}$

$f(x)\sim\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

(2) $f(x)$ 周期延拓后 

$(\alpha\neq0)$ $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}dx=\frac{1}{\pi\alpha}e^{\alpha x}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}}{\alpha\pi}$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}\cos nx\,dx=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}d\sin nx=\frac{1}{n\pi}\sin nx\,e^{\alpha x}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{\alpha}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}d\cos nx$

$=\frac{1}{n\pi}\sin nx\,e^{\alpha x}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{\alpha}{n^2\pi}e^{\alpha x}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{\alpha^2}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}\cos nx\,dx$

$\Rightarrow\frac{n^2+\alpha^2}{n^2}a_n=\frac{1}{n^2\pi}(n\sin nx+\alpha\cos nx)e^{\alpha x}\Big|_{-\pi}^{\pi}\Rightarrow a_n=\frac{\alpha(e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi})(-1)^n}{(\alpha^2+n^2)\pi}$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}\sin nx\,dx\;\underline{\underline{\text{同理}}}\;\frac{n(e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi})(-1)^{n+1}}{(\alpha^2+n^2)\pi}$

$\alpha\neq0$ $f(x)\sim\frac{1}{2\alpha\pi}(e^{\pi\alpha}-e^{-\pi\alpha})+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+n^2)}(e^{\pi\alpha}-e^{-\pi\alpha})\cos nx+(-1)^{n+1}\frac{n}{\pi(n^2+\alpha^2)}(e^{\pi\alpha}-e^{-\pi\alpha})\sin nx\right]$

$\alpha=0$ $f(x)=1$

(3) $f(x)$ 周期延拓 $\Rightarrow f(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow a_k=0$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos x\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x[\sin(n+1)x+\sin(n-1)x]dx$

$\int_0^{\pi}x\sin(n+1)x\,dx=-\frac{1}{n+1}\int_0^{\pi}x\,d\cos(n+1)x=-\frac{1}{n+1}x\cos(n+1)x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n+1}\int_0^{\pi}\cos(n+1)x\,dx=-\frac{\pi}{n+1}(-1)^{n+1}$

$\int_0^{\pi}x\sin(n-1)x\,dx=\begin{cases}0 & n=1\text{时}\\ -\frac{1}{n-1}x\cos(n-1)x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n-1}\int_0^{\pi}\cos(n-1)x\,dx=-\frac{\pi}{n-1}(-1)^{n-1}\end{cases}$

$\Rightarrow b_1=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}x\sin(n+1)x\,dx+\int_0^{\pi}x\sin(n-1)x\,dx\right]=-\frac{1}{2}$

$b_n=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n+1}(-1)^{n+1}-\frac{\pi}{n-1}(-1)^{n-1}\right]=\frac{2n}{n^2-1}(-1)^n\quad n=2,3,4\cdots$

$f(x)\sim-\frac{1}{2}\sin x+\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n}{n^2-1}\sin nx$

(4) $f(x)$ 周期延拓 $\Rightarrow$ 偶函数 $\Rightarrow b_n=0$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos2x)dx=1+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos2x\,dx=1$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}\cos nx+\frac{1}{2}\cos2x\cos nx)dx$

$=\begin{cases}0 & n\neq2\\ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos4x)dx=\frac{1}{2} & n=2\end{cases}$

$\Rightarrow f(x)\sim\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos2x$

(5) $f(x)$ 周期延拓 $\Rightarrow f(x)$ 奇函数 $\Rightarrow a_k=0$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nx\,dx=-\frac{1}{2n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{2n}[1-(-1)^n]=\begin{cases}0 & n\text{为偶}\\ \frac{1}{n} & n\text{为奇}\end{cases}$

$\Rightarrow f(x)\sim\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x$

(6) $f(x)$ 偶函数 $\Rightarrow b_n=0$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos2x}{2}\right)^2dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}-\cos2x+\frac{1}{2}\cos^22x)dx=\frac{3}{4}$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}\cos nx-\cos2x\cos nx+\frac{1}{2}\cos^22x\cos nx)dx$

$=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos2x\cos nx\,dx+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\cancel{\cos nx}\,dx+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\cos4x\cos nx\,dx$

$=\begin{cases}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos2x)^2dx=-\frac{1}{2} & n=2\\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\cos4x)^2dx=\frac{1}{8} & n=4\\ 0 & n\neq2,n\neq4\end{cases}$

$\Rightarrow f(x)\sim\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos2x+\frac{1}{8}\cos4x$

(7) $\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}=\frac{1-r^2}{1-r(e^{ix}+e^{-ix})+r^2}=(1-r^2)\frac{1}{(1-re^{ix})(1-re^{-ix})}=-1+\frac{1}{1-re^{ix}}+\frac{1}{1-re^{-ix}}$

$=-1+(1+re^{ix}+r^2e^{2ix}+\cdots)+(1+re^{-ix}+r^2e^{-2ix}+\cdots)$

$=1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx$

2.(1) 正弦级数：将 $f(x)$ 奇延拓 → 周期延拓

易知 $f(x)\sim\sin x$

余弦级数：将 $f(x)$ 偶延拓 → 周期延拓 $\Rightarrow F(x)=|\sin x|$

$F(x)$ 是以 π 为周期的偶函数 $\Rightarrow b_n=0$ 记 $T=\frac{\pi}{2}$

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}F(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx=\frac{4}{\pi}$

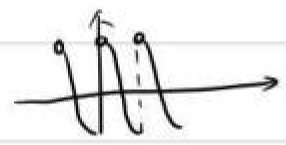
$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\cos2nx\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos2nx\,dx$

$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}[\sin(1+2n)x+\sin(1-2n)x]dx$

$=\left[-\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+2n}\cos(1+2n)x+\frac{2}{\pi}\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{4}{(4n^2-1)\pi}$

$\Rightarrow$ 余弦级数为 $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos2nx}{4n^2-1}$

(2) ① 余弦级数 易知 $\cos x$

② 正弦级数：将 $f(x)$ 奇延拓 → 周期延拓 → $F(x)$ 

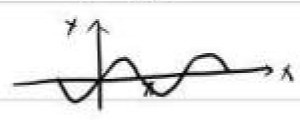
$F(x)$ 是以 π 为周期的奇函数 记 $T=\frac{\pi}{2}$

$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin2nx\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin2nx\,dx$

$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}[\sin(2n+1)x+\sin(2n-1)x]dx$

$=-\frac{2}{\pi}\frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)x-\frac{2}{\pi}\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8n}{(4n^2-1)\pi}$

$\Rightarrow$ 正弦级数为 $\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{8n}{4n^2-1}\sin2nx$

(3) ① 正弦级数 

$f(x)$ 奇延拓 → 周期延拓 → $F(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow a_k=0$

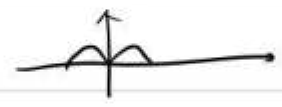
$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin nx\,dx=2\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx\,dx$

$=-\frac{2}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx+\frac{2}{n\pi}x^2\cos nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\cdot2x\,dx$

$=\cancel{\frac{2}{n}\pi(-1)^{n+1}}+\cancel{\frac{2}{n}\pi(-1)^n}-\frac{4}{n^2\pi}\cancel{x\sin nx}\Big|_0^{\pi}+\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx$

$=\frac{4}{n^3\pi}[(-1)^n-1]=\begin{cases}0 & n\text{为偶}\\ -\frac{8}{n^3\pi} & n\text{为奇}\end{cases}$

$\Rightarrow$ 正弦级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty}-\frac{8}{(2n-1)^3\pi}\sin(2n-1)x$

② 余弦级数 

$f(x)$ 偶延拓 → 周期延拓 → $F(x)$ 为周期为 π 的偶函数 令 $T=\frac{\pi}{2}$ $b_n=0$

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}F(x)dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\pi-x)dx=2x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}\pi^2$

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}F(x)\cos2nx\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\pi-x)\cos2nx\,dx$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos2nx\,dx-\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos2nx\,dx$

$=\frac{4}{2n}x\cancel{\sin2nx}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{4}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2nx\,dx-\frac{4}{2n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2d\sin2nx$

$=\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2n}\cos2nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{n\pi}x^2\cancel{\sin2nx}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\sin2nx\,dx$

$=\frac{1}{n^2}((-1)^n-1)-\frac{2}{n^2\pi}x\cos2nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cancel{\cos2nx}\,dx$

$=\frac{1}{n^2}((-1)^n-1)-\frac{1}{n^2}(-1)^n=-\frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow$ 余弦级数 $\frac{1}{6}\pi^2-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos2nx}{n^2}$

(4) ① 正弦级数 

$f(x)$ 奇延拓 → 周期延拓 → $F(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow a_n=0$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin nx\,dx$

$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}[\cos(n+1)x-\cos(n-1)x]dx$

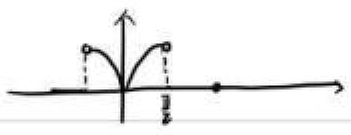
$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(n-1)x\,dx-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(n+1)x\,dx$

$n=1$ 时 $b_1=\frac{1}{2}$

$n\neq1$ 时 $b_n=\frac{1}{\pi}\frac{1}{n-1}\sin(n-1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{\pi}\frac{1}{n+1}\sin(n+1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\begin{cases}0 & n=2k+1\\ \frac{(-1)^{k-1}}{\pi}\frac{4k}{4k^2-1} & n=2k\end{cases}$

$\Rightarrow$ 正弦级数 $\frac{1}{2}\sin x+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{4n^2-1}\sin2nx$

② 余弦级数 

将 $f(x)$ 偶延拓 → 周期延拓 ⇒ $F(x)$ 为偶函数 ⇒ $b_n=0$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\frac{2}{\pi}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos nx\,dx$$

$n=1$ 时 $\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2\pi}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\pi}$

$n\neq1$ 时 $\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}[\sin(n+1)x+\sin(1-n)x]dx$

$$=-\frac{1}{\pi}\frac{1}{n+1}\cos(n+1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{\pi}\frac{1}{1-n}\cos(n-1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\begin{cases}-\frac{2}{(n^2-1)\pi}=-\frac{2}{(4k^2-1)\pi} & n=2k\\ -\frac{1}{\pi}\frac{1}{n+1}(-1)^{k+1}+\frac{1}{(n+1)\pi}-\frac{1}{\pi(1-n)}(-1)^{k}-\frac{1}{(n-1)\pi}=\frac{(-1)^k(2k+1)-1}{\pi(2k^2+2k)} & \end{cases}$$

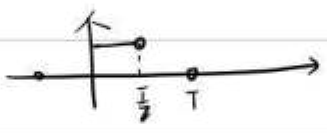
余弦级数为 $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\cos x+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[-\frac{2}{(4n^2-1)\pi}+\frac{(-1)^n(2n+1)-1}{\pi(2n^2+2n)}\right]\cos nx$

3. (1) $a_0=\frac{1}{\frac{T}{2}}\int_0^T x\,dx=T$

$$a_n=\frac{1}{\frac{T}{2}}\int_0^T x\cos\frac{n\pi x}{\frac{T}{2}}dx=\frac{1}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{T}x\Big|_0^T-\int_0^T\frac{1}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx=\frac{1}{2n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi}{T}\Big|_0^T=0$$

$$b_n=\frac{1}{\frac{T}{2}}\int_0^T x\sin\frac{n\pi x}{\frac{T}{2}}dx=-\frac{T}{n\pi}$$

$\Rightarrow f(x)\sim\frac{T}{2}-\frac{T}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi x}{T}$



(2) $a_0=\frac{1}{\frac{T}{2}}\int_0^{\frac{T}{2}}A\,dx=A$

$$a_n=\frac{1}{\frac{T}{2}}\int_0^{\frac{T}{2}}A\cos\frac{n\pi x}{\frac{T}{2}}dx=\frac{2}{T}\cdot\frac{T}{2n\pi}A\sin\frac{2n\pi x}{T}\Big|_0^{\frac{T}{2}}=0$$

$$b_n=\frac{1}{\frac{T}{2}}\int_0^{\frac{T}{2}}A\sin\frac{n\pi x}{\frac{T}{2}}dx=\frac{2}{T}\frac{T}{2n\pi}A\cos\frac{2n\pi x}{T}\Big|_0^{\frac{T}{2}}=\frac{1}{n\pi}A(1-(-1)^n)=\begin{cases}0 & n=2k\\ \frac{2A}{(2k+1)\pi} & n=2k+1\end{cases}$$

$\Rightarrow f(x)\sim\frac{A}{2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2A}{(2n+1)\pi}\sin\left[\frac{(4n+2)\pi}{T}x\right]$

4. 设 $f'(x)\sim\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n'\cos nx+b_n'\sin nx)$

由题意可知 $f(-\pi)=f(\pi)$

$$a_0'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)dx=\frac{1}{\pi}f(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$a_n'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\,dx=\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=nb_n$$

同理 $b_n'=-na_n\Rightarrow f'(x)\sim\sum_{n=1}^{+\infty}(-na_n\sin nx+nb_n\cos nx)$

由题意 $f'(\pi)=f'(-\pi)$

设 $f''(x)\sim\frac{a_0''}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n''\cos nx+b_n''\sin nx)$

$\Rightarrow a_0''=0 \quad a_n''=nb_n'=-n^2a_n \quad b_n''=-na_n'=-n^2b_n$

$\Rightarrow f''(x)\sim\sum_{n=1}^{+\infty}(-n^2a_n\cos nx-n^2b_n\sin nx)$

$$|a_n|=\left|\frac{a_n''}{n^2}\right|=\frac{1}{n^2}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\cos nx\,dx\right|\le\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f''(x)|dx\triangleq\frac{c}{n^2}\quad\left(c=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}|f''(x)|dx}{\pi}\right)$$

$|b_n|=\left|\frac{b_n''}{n^2}\right|$ 同理可得 $|b_n|\le\frac{c}{n^2}$

5. 设 $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ $f_1(x),f_2(x)$ 单调

$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

由积分第二定理

$$|a_n|=\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\right|=\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f_1(x)-f_2(x))\cos nx\,dx\right|\le\frac{1}{\pi}\left|[f_1(-\pi)-f_2(-\pi)]\int_{-\pi}^{\xi}\cos nx\,dx\right|+\frac{1}{\pi}\left|[f_1(\pi)-f_2(\pi)]\int_{\xi}^{\pi}\cos nx\,dx\right|$$

$$\le\frac{1}{\pi}|f(-\pi)|\frac{2}{n}+\frac{1}{\pi}|f(\pi)|\cdot\frac{2}{n}=\frac{2}{\pi}[|f(-\pi)|+|f(\pi)|]\frac{1}{n}$$

$\therefore |a_n|=O(\frac{1}{n}) \quad \therefore a_n=O(\frac{1}{n})$

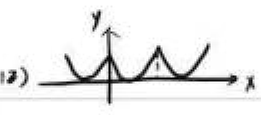
同理 $b_n=O(\frac{1}{n})$

6. (1) 由 T_3 (1) 知 $f(x)\sim\frac{T}{2}-\frac{T}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi x}{T}$

令 $T=2\pi$ 代入得 $f(x)\sim\pi-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$

由收敛定理 $x=\pi-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}\quad(0<x<2\pi)$

令 $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2}n}{n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

(2)  $f(x)$ 周期延拓 ⇒ $F(x)$ 易知偶函数 ⇒ $b_n=0$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x-\pi)^2d(x-\pi)=\frac{2}{3\pi}(x-\pi)^3\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{n\pi}(x-\pi)^2\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\cdot2(x-\pi)dx$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\cdot2(x-\pi)\cos nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi}2\cos nx\,dx=\frac{4}{n^2}$$

$(x-\pi)^2\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$

由收敛定理 $(x-\pi)^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$

令 $x=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

(3) $a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{8}{3}\pi^2$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{1}{n\pi}x^2\sin nx\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\cdot2x\,dx$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}2x\cos nx\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx=\frac{4}{n^2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nx\,dx=-\frac{1}{n\pi}x^2\cos nx\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\cdot2x\,dx$$

$$=-\frac{4\pi}{n}+\frac{2}{n^2\pi}\sin nx\Big|_0^{2\pi}=-\frac{4\pi}{n}$$

$\rightarrow x^2\sim\frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{\pi\sin nx}{n}\right)$

由收敛定理 $x^2=\frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{\pi\sin nx}{n}\right)\quad(0<x<2\pi)$

(4) 由 $f(x)=x\sin x$ 偶函数 ⇒ $b_n=0$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x\,dx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,d\cos x=-\frac{1}{\pi}x\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx=2$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}x[\sin(n+1)x+\sin(1-n)x]dx$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(n+1)x=-\frac{1}{2(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,d\cos(n+1)x=-\frac{1}{2(n+1)\pi}x\cos(n+1)x\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{2(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+1)x\,dx=\frac{(-1)^n}{n+1}$$

$n=1$ 时 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(1-n)x\,dx=0$

$n\neq1$ 时 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(1-n)x\,dx=\frac{1}{2(n-1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,d\cos(1-n)x=\frac{1}{2(n-1)\pi}x\cos(n-1)x\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{2(n-1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-1)x\,dx=-\frac{(-1)^n}{n-1}$

$\Rightarrow a_n=\begin{cases}-\frac{1}{2}\\ -2\frac{(-1)^n}{n^2-1}\end{cases}\quad\Rightarrow x\sin x\sim1-\frac{1}{2}\cos x-2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2-1}$

由收敛定理 $x\sin x=1-\frac{1}{2}\cos x-2\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2-1}\quad(-\pi\le x\le\pi)$

(5) $f(x)=\ln|\sin\frac{x}{2}|$ 以 2π 为周期 且为偶函数 $b_n=0$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx$$

$$\Rightarrow 2a_0=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\tfrac{1}{2}\sin 2x)dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x\,dx-\frac{4}{\pi}\ln2\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin t\,dt-2\ln2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\sin t\,dt-2\ln2$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt-2\ln2=a_0-2\ln2$$

$\Rightarrow a_0=-2\ln2$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\cos nx\,dx=\frac{2}{n\pi}\sin nx\ln\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx$$

$$=-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x+\sin(n-\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}dx=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}dx$$

而 $\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx=\pi\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin(2n+1)(\pi-x)}{\sin(\pi-x)}d(\pi-x)$

$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow a_n=-\frac{1}{n}$

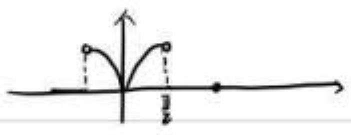
$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx=2\int_0^{\pi}\left|\ln\sin\frac{x}{2}\right|dx=-2\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}dx=2\ln2$$

故 $\ln|\sin\frac{x}{2}|$ 在 $(-\pi,\pi)$ 绝对可积 $f(x)$ 在除 $x=2k\pi$ 外可微

$\Rightarrow\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|=-\ln2-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n}\quad(x\neq2k\pi,\ k\in Z)$

(6) $\ln\left|2\cos\frac{x}{2}\right|=\ln\left|2\sin\frac{\pi-x}{2}\right|=\ln2+\ln\left|\sin\frac{\pi-x}{2}\right|=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n(\pi-x)}{n}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

同(5)可得 $\ln\left|2\cos\frac{x}{2}\right|=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n}\quad(x\neq(2k+1)\pi,\ k\in Z)$

② 余弦级数 

将 $f(x)$ 偶延拓 → 周期延拓 ⇒ $F(x)$ 为偶函数 ⇒ $b_n=0$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\frac{2}{\pi}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos nx\,dx$

$n=1$ 时 $\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2\pi}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\pi}$

$n\neq 1$ 时 $\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}[\sin(n+1)x+\sin(1-n)x]dx$

$=-\frac{1}{\pi}\frac{1}{n+1}\cos(n+1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{\pi}\frac{1}{1-n}\cos(n-1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\begin{cases}-\frac{2}{(n^2-1)\pi}=-\frac{2}{(4k^2-1)\pi} & n=2k\\ -\frac{1}{\pi}\frac{1}{n+1}(-1)^{k+1}+\frac{1}{(n+1)\pi}-\frac{1}{\pi(1-n)}(-1)^{k}-\frac{1}{(n-1)\pi}=\frac{(-1)^k(2k+1)-1}{\pi(2k^2+2k)}\end{cases}$

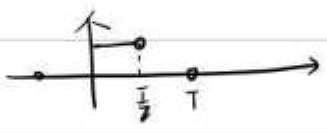
余弦级数为 $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\cos x+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[-\frac{2}{(4n^2-1)\pi}+\frac{(-1)^n(2n+1)-1}{\pi(2n^2+2n)}\right]\cos nx$

3.(1) $a_0=\frac{1}{\frac{T}{2}}\int_0^T x\,dx=T$

$a_n=\frac{1}{\frac{T}{2}}\int_0^T x\cos\frac{n\pi x}{\frac{T}{2}}dx=\frac{1}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{T}x\Big|_0^T-\int_0^T\frac{1}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx=\frac{1}{2n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi}{T}\Big|_0^T=0$

$b_n=\frac{1}{\frac{T}{2}}\int_0^T x\sin\frac{n\pi x}{\frac{T}{2}}dx=-\frac{T}{n\pi}$

⇒ $f(x)\sim\frac{T}{2}-\frac{T}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi x}{T}$



(2) $a_0=\frac{1}{\frac{T}{2}}\int_0^{\frac{T}{2}}A\,dx=A$

$a_n=\frac{1}{\frac{T}{2}}\int_0^{\frac{T}{2}}A\cos\frac{n\pi x}{\frac{T}{2}}dx=\frac{2}{T}\cdot\frac{T}{2n\pi}A\sin\frac{2n\pi x}{T}\Big|_0^{\frac{T}{2}}=0$

$b_n=\frac{1}{\frac{T}{2}}\int_0^{\frac{T}{2}}A\sin\frac{n\pi x}{\frac{T}{2}}dx=-\frac{2}{T}\frac{T}{2n\pi}A\cos\frac{2n\pi x}{T}\Big|_0^{\frac{T}{2}}=\frac{1}{n\pi}A(1-(-1)^n)=\begin{cases}0 & n=2k\\ \frac{2A}{(2k+1)\pi} & n=2k+1\end{cases}$

⇒ $f(x)\sim\frac{A}{2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2A}{(2n+1)\pi}\sin\left[\frac{(4n+2)\pi}{T}x\right]$

4. 设 $f'(x)\sim\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n'\cos nx+b_n'\sin nx)$

由题意可知 $f(-\pi)=f(\pi)$

$a_0'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)dx=\frac{1}{\pi}f(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$

$a_n'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\,dx=\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=nb_n$

同理 $b_n'=-na_n$ ⇒ $f'(x)\sim\sum_{n=1}^{+\infty}(-na_n\sin nx+nb_n\cos nx)$

由题意 $f'(\pi)=f'(-\pi)$

设 $f''(x)\sim\frac{a_0''}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n''\cos nx+b_n''\sin nx)$

⇒ $a_0''=0$ $a_n''=nb_n'=-n^2a_n$ $b_n''=-na_n'=-n^2b_n$

⇒ $f''(x)\sim\sum_{n=1}^{+\infty}(-n^2a_n\cos nx-n^2b_n\sin nx)$

$|a_n|=\left|\frac{a_n''}{n^2}\right|=\frac{1}{n^2}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\cos nx\,dx\right|\leq\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f''(x)|dx\triangleq\frac{c}{n^2}$ $\left(c=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}|f''(x)|dx}{\pi}\right)$

$|b_n|=\left|\frac{b_n''}{n^2}\right|$ 同理可得 $|b_n|\leq\frac{c}{n^2}$

5. 设 $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ $f_1(x),f_2(x)$ 单调

$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

$|a_n|=\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\right|=\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f_1(x)-f_2(x))\cos nx\,dx\right|\overset{\text{由积分第二定理}}{\leq}\frac{1}{\pi}\left|[f_1(-\pi)-f_2(-\pi)]\int_{-\pi}^{\xi}\cos nx\,dx\right|+\frac{1}{\pi}\left|[f_1(\pi)-f_2(\pi)]\int_{\xi}^{\pi}\cos nx\,dx\right|$

$\leq\frac{1}{\pi}|f(-\pi)|\frac{2}{n}+\frac{1}{\pi}|f(\pi)|\cdot\frac{2}{n}=\frac{2}{\pi}(|f(-\pi)|+|f(\pi)|)\frac{1}{n}$

∴ $|a_n|=O(\frac{1}{n})$ ∴ $a_n=O(\frac{1}{n})$

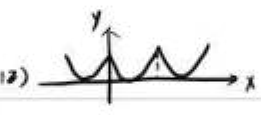
同理 $b_n=O(\frac{1}{n})$

6.(1) 由 3(1) 知 $f(x)\sim\frac{T}{2}-\frac{T}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi x}{T}$

令 $T=2\pi$ 代入得 $f(x)\sim\pi-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$

由收敛定理 $x=\pi-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$ $(0<x<2\pi)$

令 $x=\frac{\pi}{2}$ ⇒ $\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2}n}{n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

(2)  $f(x)$ 周期延拓 ⇒ $F(x)$ 易知偶函数 ⇒ $b_n=0$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x-\pi)^2d(x-\pi)=\frac{2}{3\pi}(x-\pi)^3\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{3}\pi^2$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{n\pi}(x-\pi)^2\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\cdot 2(x-\pi)dx$

$=\frac{2}{n^2\pi}\cdot 2(x-\pi)\cos nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi}2\cos nx\,dx=\frac{4}{n^2}$

$(x-\pi)^2\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$

由收敛定理 $(x-\pi)^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$

令 $x=0$ ⇒ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

(3) $a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{8}{3}\pi^2$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{1}{n\pi}x^2\sin nx\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\cdot 2x\,dx$

$=\frac{1}{n^2\pi}2x\cos nx\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx=\frac{4}{n^2}$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nx\,dx=-\frac{1}{n\pi}x^2\cos nx\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\cdot 2x\,dx$

$=-\frac{4\pi}{n}+\frac{2}{n^2\pi}\sin nx\Big|_0^{2\pi}=-\frac{4\pi}{n}$

→ $x^2\sim\frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{\pi\sin nx}{n}\right)$

由收敛定理 $x^2=\frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{\pi\sin nx}{n}\right)$ $(0<x<2\pi)$

(4) 由 $f(x)=x\sin x$ 偶函数 ⇒ $b_n=0$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x\,dx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,d\cos x=-\frac{1}{\pi}x\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx=2$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}x[\sin(n+1)x+\sin(1-n)x]dx$

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(n+1)x=-\frac{1}{2(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,d\cos(n+1)x=-\frac{1}{2(n+1)\pi}x\cos(n+1)x\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{2(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+1)x\,dx=\frac{(-1)^n}{n+1}$

$n=1$ 时 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(1-n)x\,dx=0$

$n\neq 1$ 时 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(1-n)x\,dx=\frac{1}{2(n-1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,d\cos(1-n)x=\frac{1}{2(n-1)\pi}x\cos(n-1)x\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{2(n-1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-1)x\,dx=-\frac{(-1)^n}{n-1}$

⇒ $a_n=\begin{cases}-\frac{1}{2}\\ -2\frac{(-1)^n}{n^2-1}\end{cases}$ ⇒ $x\sin x\sim 1-\frac{1}{2}\cos x-2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2-1}$

由收敛定理 $x\sin x=1-\frac{1}{2}\cos x-2\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2-1}$ $(-\pi\leq x\leq\pi)$

(5) $f(x)=\ln|\sin\frac{x}{2}|$ 以 2π 为周期 且为偶函数 $b_n=0$

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx$

⇒ $2a_0=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\frac{1}{2}\sin 2x)dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x\,dx-\frac{4}{\pi}\ln 2\cdot\frac{\pi}{2}$

$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin t\,dt-2\ln 2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\sin t\,dt-2\ln 2$

$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt-2\ln 2=a_0-2\ln 2$

⇒ $a_0=-2\ln 2$

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\cos nx\,dx=\frac{2}{n\pi}\sin nx\ln\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx$

$=-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x+\sin(n-\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}dx=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}dx$

而 $\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx=\pi$ ⇒ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin(2n+1)(\pi-x)}{\sin(\pi-x)}d(\pi-x)$

⇒ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx=\frac{\pi}{2}$ ⇒ $a_n=-\frac{1}{n}$

$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx=2\int_0^{\pi}|\ln\sin\frac{x}{2}|dx=-2\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}dx=2\ln 2$

故 $\ln|\sin\frac{x}{2}|$ 在 $(-\pi,\pi)$ 绝对可积 $f(x)$ 在除 $x=2k\pi$ 外可微

⇒ $\ln|\sin\frac{x}{2}|=-\ln 2-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n}$ $(x\neq 2k\pi,\ k\in Z)$

(6) $\ln|2\cos\frac{x}{2}|=\ln|2\sin\frac{\pi-x}{2}|=\ln 2+\ln|\sin\frac{\pi-x}{2}|=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n(\pi-x)}{n}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

同(5)可得 $\ln|2\cos\frac{x}{2}|=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n}$ $(x\neq(2k+1)\pi,\ k\in Z)$

7. 观察到右式周期为 2π 的偶函数

将 $f(x)=x^2$ 在 $[-\pi,\pi]$ 周期延拓 $\Rightarrow$ 周期 2π 偶函数 $\Rightarrow b_n=0$ $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3}$ $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,dx=(-1)^n\frac{4}{n^2}$

$\Rightarrow x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$ $x\in[-\pi,\pi]$

令 $x=0$ $\Rightarrow \frac{\pi^2}{3}-4\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}=0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$

由帕塞瓦尔等式 $\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4dx=\frac{2}{9}\pi^4+16\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

8. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{4} & 2k\pi<x<(2k+1)\pi\\ -\frac{\pi}{4} & (2k-1)\pi<x<2k\pi\\ 0 & x=k\pi\end{cases}$ 易知 $f(x)$ 周期为 2π 的奇函数 $\Rightarrow a_n=0$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nx\,dx=-\frac{1}{2n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=-\frac{1}{2n}(-1)^n+\frac{1}{2n}=\begin{cases}0 & n=2k\\ \frac{1}{n} & n=2k+1\end{cases}$

$\Rightarrow f(x)\sim\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$ 由收敛定理 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}=\begin{cases}\frac{\pi}{4} & 2k\pi<x<(2k+1)\pi\\ -\frac{\pi}{4} & (2k-1)\pi<x<2k\pi\\ 0 & x=k\pi\end{cases}$

令 $x=\frac{\pi}{2}$ $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$

由帕塞瓦尔等式 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{1}{8}\pi^2$

9. 对 $f(x)$ 进行周期延拓 $\Rightarrow F(x)$ 以 2π 为周期

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=0$ $a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx$ $b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx$

$\Rightarrow f(x)\sim\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

由题意 $f(x)$ 连续 由收敛定理 $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

设 $f'(x)\sim\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n'\cos nx+b_n'\sin nx)$

$a_0'=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f'(x)dx=\frac{1}{\pi}f(x)\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{\pi}(f(2\pi)-f(0))=0$

$a_n'=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f'(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(f(x)\cos nx\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}nf(x)\sin nx\,dx\right)=n\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx=nb_n$

$b_n'=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f'(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(f(x)\sin nx\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}nf(x)\cos nx\,dx\right)=-n\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx=-na_n$

而 $f'(x)$ 连续 由收敛定理 $f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx)$

由帕塞瓦尔不等式 $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^2(x)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)$

$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f'^2(x)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}(n^2b_n^2+n^2a_n^2)$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2)\geq\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)$

$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f'^2(x)dx\geq\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^2(x)dx$

$\Rightarrow \int_0^{2\pi}(f'(x))^2dx\geq\int_0^{2\pi}(f(x))^2dx$

10. $\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_0+t)\frac{\sin\alpha t}{t}dt-\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\right|$ (*)

$\xlongequal{\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha t}{t}dt=1}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_0+t)\frac{\sin\alpha t}{t}dt-\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\frac{\sin\alpha t}{t}dt\right|$

$=\left|\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{+\infty}[f(x_0+t)-f(x_0+0)]+[f(x_0-t)-f(x_0-0)]\right\}\frac{\sin\alpha t}{t}dt\right|$

$\leq\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}[f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)]\frac{\sin\alpha t}{t}dt\right|+\left|\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{+\infty}\{[f(x_0+t)-f(x_0+0)]+[f(x_0-t)-f(x_0-0)]\}\frac{\sin\alpha t}{t}dt\right|$

① $f(x)$ 在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 可表为两单调函数之差 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 单调

$\int_0^{\delta}[f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)]\frac{\sin\alpha t}{t}dt$

$\xlongequal[\text{第二中值定理}]{\text{由定积分}}[2f(x_0)-f(x_0+0)-f(x_0-0)]\int_0^{\xi}\frac{\sin\alpha t}{t}dt$ $\xi\in[0,\delta]$

而 $\int_0^{\xi}\frac{\sin\alpha t}{t}dt<\varepsilon/2$ (α 充分大)

② 由 $\int_0^{\delta}\left|\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\right|dt$ 和 $\int_0^{\delta}\left|\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t}\right|dt$ 存在

由黎曼-勒贝格引理 $\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}[f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)]\frac{\sin\alpha t}{t}dt\right|<\varepsilon/2$ ($\alpha\to+\infty$)

对于 $\left|\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{+\infty}\{[f(x_0+t)-f(x_0+0)]+[f(x_0-t)-f(x_0-0)]\}\frac{\sin\alpha t}{t}dt\right|$ $\overset{\text{应用黎曼勒贝格引理}}{<}\varepsilon/2$

综上 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$ 当 $\alpha>M$ 时有

$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_0+t)\frac{\sin\alpha t}{t}dt-\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\right|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_0+t)\frac{\sin\alpha t}{t}dt=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

11. 任意周期为 2π 的光滑函数 在 $[-1,1]$ 取 0.

12. (1) $f(x)$ 周期延拓 $\Rightarrow$ 周期 2π 的偶函数 $\Rightarrow b_n=0$

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\alpha x\,dx=\frac{2\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}$

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\alpha x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(\alpha+n)x+\cos(\alpha-n)x)dx$

$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha+n)\pi}{n+\alpha}+\frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n}\right]=\frac{2\alpha(-1)^n\sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2-n^2)}$

$f(x)\sim\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2-n^2)}$

由收敛定理 $\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2-n^2)}=\cos\alpha x$

(2) 令 $x=0$ $\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2-n^2)}=1$

$\Rightarrow \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}=\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}$

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-n\pi}^{-(n-1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(t+n\pi)}{t+n\pi}d(t+n\pi)+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(t-n\pi)}{t-n\pi}d(t-n\pi)\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\pi}(-1)^n\frac{\sin t}{t+n\pi}dt+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\pi}(-1)^n\frac{\sin t}{t-n\pi}dt\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\pi}(-1)^n\sin t\frac{2t}{t^2-n^2\pi^2}dt\right]=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin x}{x}+(-1)^n\frac{2x\sin x}{x^2-n^2\pi^2}\right)dx$ (*)

由(2)令 $\alpha=\frac{x}{\pi}$ $\Rightarrow \frac{\pi}{\sin x}=\frac{\pi}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2\pi x}{x^2-n^2\pi^2}$

$\Rightarrow \frac{\sin x}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2x\sin x}{x^2-n^2\pi^2}=1$

$n>1$ 时 $\left|\frac{(-1)^n 2x\sin x}{x^2-n^2\pi^2}\right|\leq\frac{2\pi}{n^2\pi^2-\pi^2}<\frac{2}{\pi}\frac{1}{(n-1)^2}$

由 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)^2}$ 收敛 $\Rightarrow \frac{(-1)^n 2x\sin x}{x^2-n^2\pi^2}$ 一致收敛 $x\in(-\pi,\pi)$

级数中各项在 $x=0$，$x=\pi$ 极限存在 $\Rightarrow$ 在 $[0,\pi]$ 一致收敛

故 $\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin x}{x}+(-1)^n\frac{2x\sin x}{x^2-n^2\pi^2}\right)dx=\pi \Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

13. (1) 由 $f(x)$ 连续 $\Rightarrow F_h(x)$ 连续可微

$F(x+2\pi)=\frac{1}{2h}\int_{x+2\pi-h}^{x+2\pi+h}f(t)dt=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t+2\pi)d(t+2\pi)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)dt=F(t)$

$\Rightarrow F(x)$ 是以 2π 为周期的连续可微函数

(2) 由题意 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致连续

$\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ 当 $|x'-x''|<\delta$ 有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

$|F(x)-f(x)|=\left|\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)dt-f(x)\right|\xlongequal[\text{中值定理}]{\text{定积分第一}}\left|\frac{1}{2h}f(\xi)(x+h-(x-h))-f(x)\right|=|f(\xi)-f(x)|$ $x-h<\xi<x+h$

由 $0<h<\delta \Rightarrow |\xi-x|\leq h<\delta \Rightarrow |F(x)-f(x)|<\varepsilon$

(3) 由(1)可知 $F(x)$ 的 Fourier 级数收敛到 $F(x)$

设 $F(x)$ 的 Fourier 级数部分和 $T_n(x)$

则 $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in N$ 当 $n>N$ 时 $\forall x\in R$ 有 $|F(x)-T_n(x)|<\varepsilon/2$

由(2) $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<h<\delta$ $\forall x\in R$ 有 $|F(x)-f(x)|<\varepsilon/2$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0$，$\forall x\in R$ 有 $|f(x)-T_n(x)|\leq|f(x)-F(x)|+|F(x)-T_n(x)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$

14. 令 $h(x)=f(x)-g(x) \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|dx=0 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}|h(x)|d(x)=0$ $h(x)$ 周期 2π，$[-\pi,\pi]$ 可积

设 $h(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ $f(x)$，$g(x)$ Fourier 级数相等 $\Leftrightarrow a_0=a_n=b_n=0$

($\Leftarrow$) $0\leq\left|\int_{-\pi}^{\pi}h(x)dx\right|\leq\int_{-\pi}^{\pi}|h(x)|dx=0 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}h(x)dx=0$

$0\leq\left|\int_{-\pi}^{\pi}h(x)\cos nx\,dx\right|\leq\left|\int_{-\pi}^{\pi}h(x)dx\right|=0 \Rightarrow a_n=0$ 同理 $b_n=0$ #

($\Rightarrow$) 由帕塞瓦尔等式 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)=0$

$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=0 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$

15. $f(x)=x$ 周期延拓 $\Rightarrow T=2\pi$，奇函数 $\Rightarrow a_n=0$ $(n=0,1\cdots)$ $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=(-1)^{n-1}\frac{2}{n}$

$\Rightarrow f(x)\sim 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$ $g(x)=\int_0^x 2t\,dt=2\int_0^x f(t)dt\sim 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot\frac{2}{n}(1-\cos nx)}{n}=4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}-4\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2}$

由7(1)

同理 $h(x)=\int_0^x 3x^2dx\sim 2\pi^2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+12\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}$

7. 观察到右式周期为2π的偶函数

将 $f(x)=x^2$ 在 $[-\pi,\pi]$ 周期延拓 ⇒ 周期2π偶函数 ⇒ $b_n=0$ $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3}$ $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,dx=(-1)^n\frac{4}{n^2}$

⇒ $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$ $x\in[-\pi,\pi]$

令 $x=0$ ⇒ $\frac{\pi^2}{3}-4\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=0$ ⇒ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$

由帕塞瓦尔等式 ⇒ $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4dx=\frac{2}{9}\pi^4+16\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$ ⇒ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

8. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{4} & 2k\pi<x<(2k+1)\pi\\ -\frac{\pi}{4} & (2k-1)\pi<x<2k\pi\\ 0 & x=k\pi\end{cases}$ 易知 $f(x)$ 周期为2π的奇函数 ⇒ $a_n=0$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nx\,dx=-\frac{1}{2n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=-\frac{1}{2n}(-1)^n+\frac{1}{2n}=\begin{cases}0 & n=2k\\ \frac{1}{n} & n=2k+1\end{cases}$

⇒ $f(x)\sim\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$ 由收敛定理 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}=\begin{cases}\frac{\pi}{4} & 2k\pi<x<(2k+1)\pi\\ -\frac{\pi}{4} & (2k-1)\pi<x<2k\pi\\ 0 & x=k\pi\end{cases}$

令 $x=\frac{\pi}{2}$ $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$

由帕塞瓦尔等式 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{1}{8}\pi^2$

9. 对 $f(x)$ 进行周期延拓 ⇒ $F(x)$ 以2π为周期

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=0$ $a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx$ $b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx$

⇒ $f(x)\sim\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

由题意 $f(x)$ 连续 由收敛定理 $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

设 $f'(x)\sim\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n'\cos nx+b_n'\sin nx)$

$a_0'=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f'(x)dx=\frac{1}{\pi}f(x)\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{\pi}(f(2\pi)-f(0))=0$

$a_n'=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f'(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(f(x)\cos nx\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}n f(x)\sin nx\,dx\right)=n\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx=nb_n$

$b_n'=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f'(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(f(x)\sin nx\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}n f(x)\cos nx\,dx\right)=-n\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx=-na_n$

而 $f'(x)$ 连续 由收敛定理 $f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx)$

由帕塞瓦尔不等式 $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^2(x)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)$

$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f'^2(x)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}(n^2b_n^2+n^2a_n^2)$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2)\geq\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)$

⇒ $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f'^2(x)dx\geq\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^2(x)dx$

⇒ $\int_0^{2\pi}(f'(x))^2dx\geq\int_0^{2\pi}(f(x))^2dx$

10. $\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_0+t)\frac{\sin\alpha t}{t}dt-\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\right|$ (*)

$\underline{\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha t}{t}dt=1}$ $\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_0+t)\frac{\sin\alpha t}{t}dt-\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\frac{\sin\alpha t}{t}dt\right|$

$=\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\{[f(x_0+t)-f(x_0+0)]+[f(x_0-t)-f(x_0-0)]\}\frac{\sin\alpha t}{t}dt\right|$

$\leq\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}[f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)]\frac{\sin\alpha t}{t}dt\right|+\left|\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{+\infty}\{[f(x_0+t)-f(x_0+0)]+[f(x_0-t)-f(x_0-0)]\}\frac{\sin\alpha t}{t}dt\right|$

① $f(x)$在$[x_0-\delta,x_0+\delta]$可表为两单调函数之差 ⇒ $f(x)$在$[x_0-\delta,x_0+\delta]$单调

$\int_0^{\delta}[f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)]\frac{\sin\alpha t}{t}dt$

$\xlongequal[\text{第二中值定理}]{\text{由定积分}}$ $[2f(x_0)-f(x_0+0)-f(x_0-0)]\int_{\xi}^{\delta}\frac{\sin\alpha t}{t}dt$ $\xi\in[0,\delta]$

而 $\int_{\xi}^{\delta}\frac{\sin\alpha t}{t}dt<\varepsilon/2$ （α充分大）

② 由 $\int_{\delta}^{b}\left|\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\right|dt$ 和 $\int_{\delta}^{b}\left|\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t}\right|dt$ 存在

由黎曼-勒贝格引理 $\left|\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{b}[f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)]\frac{\sin\alpha t}{t}dt\right|<\varepsilon/2$ $(\alpha\to+\infty)$

对于 $\left|\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{+\infty}\{[f(x_0+t)-f(x_0+0)]+[f(x_0-t)-f(x_0-0)]\}\frac{\sin\alpha t}{t}dt\right|$ 应用黎曼勒贝格引理 $<\varepsilon/2$

综上 ∀ε>0, ∃M>0 当α>M时有

$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_0+t)\frac{\sin\alpha t}{t}dt-\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\right|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$

⇒ $\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_0+t)\frac{\sin\alpha t}{t}dt=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

11. 任意周期为2π的光滑函数 在[-1,1]取0.

12. (1) $f(x)$ 周期延拓 ⇒ 周期2π的偶函数 ⇒ $b_n=0$

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\alpha x\,dx=\frac{2\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}$

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\alpha x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(\alpha+n)x+\cos(\alpha-n)x)dx$

$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha+n)\pi}{n+\alpha}+\frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n}\right]=\frac{2\alpha(-1)^n\sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2-n^2)}$

$f(x)\sim\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2-n^2)}$

由收敛定理 $\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2-n^2)}=\cos\alpha x$

(2) 令 $x=0$ $\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2-n^2)}=1$

⇒ $\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}=\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}$

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-n\pi}^{-(n-1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(t+n\pi)}{t+n\pi}d(t+n\pi)+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(t-n\pi)}{t-n\pi}d(t-n\pi)\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\pi}(-1)^n\frac{\sin t}{t+n\pi}dt+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\pi}(-1)^n\frac{\sin t}{t-n\pi}dt\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\pi}(-1)^n\sin t\frac{2t}{t^2-n^2\pi^2}dt\right]=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin x}{x}+(-1)^n\frac{2x\sin x}{x^2-n^2\pi^2}\right)dx$ (*)

由(2) 令 $\alpha=\frac{x}{\pi}$ ⇒ $\frac{\pi}{\sin x}=\frac{\pi}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2\pi x}{x^2-n^2\pi^2}$

⇒ $\frac{\sin x}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n2x\sin x}{x^2-n^2\pi^2}=1$

$n>1$时 $\left|\frac{(-1)^n2x\sin x}{x^2-n^2\pi^2}\right|\leq\frac{2\pi}{n^2\pi^2-\pi^2}<\frac{2}{\pi}\frac{1}{(n-1)^2}$

由 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)^2}$ 收敛 ⇒ $\frac{(-1)^n2x\sin x}{x^2-n^2\pi^2}$ 一致收敛 $x\in(-\pi,\pi)$

级数中各项在 $x=0$, $x=\pi$ 极限存在 ⇒ 在$[0,\pi]$一致收敛

故 $\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin x}{x}+(-1)^n\frac{2x\sin x}{x^2-n^2\pi^2}\right)dx=\pi$ ⇒ $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

13. (1) 由 $f(x)$ 连续 ⇒ $F_n(x)$ 连续可微

$F(x+2\pi)=\frac{1}{2h}\int_{x+2\pi-h}^{x+2\pi+h}f(t)dt=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t+2\pi)d(t+2\pi)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)dt=F(t)$

⇒ $F(x)$是以2π为周期的连续可微函数

(2) 由题意 f在$(-\infty,+\infty)$一致连续

∀ε>0 ∃δ>0 当 $|x'-x''|<\delta$ 有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

$|F(x)-f(x)|=\left|\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)dt-f(x)\right|\xlongequal[\text{中值定理}]{\text{定积分第一}}\left|\frac{1}{2h}f(\xi)(x+h-(x-h))-f(x)\right|=|f(\xi)-f(x)|$ $x-h<\xi<x+h$

由 $0<h<\delta$ ⇒ $|\xi-x|\leq h<\delta$ ⇒ $|F(x)-f(x)|<\varepsilon$

(3) 由(1)可知 $F(x)$ 的 Fourier 级数收敛到 $F(x)$

设 $F(x)$ 的 Fourier 级数部分和 $T_n(x)$

则 ∀ε>0 ∃N∈N 当n>N时 ∀x∈R 有 $|F(x)-T_n(x)|<\varepsilon/2$

由(2) ∀ε>0, ∃δ>0, 当0<h<δ ∀x∈R 有 $|F(x)-f(x)|<\varepsilon/2$

⇒ ∀ε>0, ∀x∈R 有 $|f(x)-T_n(x)|\leq|f(x)-F(x)|+|F(x)-T_n(x)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$

14. 令 $h(x)=f(x)-g(x)$ ⇒ $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|dx=0$ ⇒ $\int_{-\pi}^{\pi}|h(x)|d(x)=0$ $h(x)$周期2π, $[-\pi,\pi]$可积

设 $h(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ $f(x)$, $g(x)$ Fourier级数相等 ⇔ $a_0=a_n=b_n=0$

(⇐) $0\leq\left|\int_{-\pi}^{\pi}h(x)dx\right|\leq\int_{-\pi}^{\pi}|h(x)|dx=0$ ⇒ $\int_{-\pi}^{\pi}h(x)dx=0$

$0\leq\left|\int_{-\pi}^{\pi}h(x)\cos nx\,dx\right|\leq\left|\int_{-\pi}^{\pi}h(x)dx\right|=0$ ⇒ $a_n=0$ 同理 $b_n=0$ #

(⇒) 由帕塞瓦尔等式 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)=0$

⇒ $\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=0$ ⇒ $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$

15. $f(x)=x$ 周期延拓 ⇒ $T=2\pi$, 奇函数 ⇒ $a_n=0$ $(n=0,1,\cdots)$ $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}$

⇒ $f(x)\sim2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$ $g(x)=\int_0^x2t\,dt=2\int_0^xf(t)dt\sim2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\frac{2}{n}(1-\cos nx)}{n}=4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}-4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n}$

同理 $h(x)=\int_0^x3t^2dx\sim2\pi^2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+12\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^3}$