定理 1 (Euler等式的有限形式I)

$$(-zq;q)_N = \sum_{j=0}^{N} \begin{bmatrix} N \\ j \end{bmatrix} z^j q^{j(j+1)/2}. \tag{1}$$

证明: 设 $D_j^{\leq N}(n)$ 计数了 n 的每个部分均不同, 最大部分小于等于 N, 具有 j 个部分的分拆的个数, 由生成函数的定义可知

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{N} D_j^{\leq N}(n) z^j q^n = (-zq;q)_N.$$

为了证明 (1), 只需证明下面等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_j^{\leq N}(n) q^n = q^{\binom{j+1}{2}} \begin{bmatrix} N \\ j \end{bmatrix}. \tag{2}$$

设 $P_{\leq j}^{\leq N}(n)$ 计数了 n 的最大部分小于等于 N, 至多具有 j 个部分的分拆的个数, 则由高斯系数组合解释可知,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{\leq j}^{\leq N}(n) q^n = \begin{bmatrix} N+j \\ j \end{bmatrix}.$$

故等式(3)等价于

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_j^{\leq N}(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_{\leq j}^{\leq N-j}\left(n - \binom{j+1}{2}\right) q^n.$$

因此只需证明当 $n \geq \binom{j+1}{2}$ 时

$$D_j^{\leq N}(n) = P_{\leq j}^{\leq N-j}\left(n - \binom{j+1}{2}\right). \tag{3}$$

下面构造双射. 设 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j)$ 被 $P_{\leq j}^{\leq N-j}\left(n - \binom{j+1}{2}\right)$ 所计数, 则

$$N - j \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_j \geq 0, \quad 且 \quad |\lambda| = n - \binom{j+1}{2}.$$

设 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_j)$, 其中 $\mu_i = \lambda_i + j - i + 1$. 显然可知,

$$N \geq \mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_j > 0, \quad 且 \quad |\mu| = n.$$

故 μ 是被 $D_j^{\leq N}(n)$ 计数, 并且此过程可逆, 故等式(3)得证. 从而完成了等

式(1)的证明.

定理 2 (Euler等式的有限形式II)

$$\frac{1}{(zq;q)_N} = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} N+j-1 \\ j \end{bmatrix} z^j q^j. \tag{2}$$

证明: 设 $P_j^{\leq N}(n)$ 计数了 n 最大部分小于等于 N, 具有 j 个部分的分拆的个数, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} P_j^{\leq N}(n) z^j q^n = \frac{1}{(zq;q)_N}.$$

为了证明(2), 只需证明下面等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_j^{\leq N}(n) q^n = \begin{bmatrix} N+j-1 \\ j \end{bmatrix} q^j. \tag{4}$$

因为 $P_{\leq j}^{\leq N}(n)$ 计数了 n 最大部分小于等于 N, 至多具有 j 个部分的分拆的个数, 故,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{\leq j}^{\leq N}(n) q^n = \begin{bmatrix} N+j \\ j \end{bmatrix}.$$

所以等式(4)等价于

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_j^{\leq N}(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_{\leq j}^{\leq N-1}(n-j)\, q^n.$$

只需证明当 $n \geq j$ 时

$$P_j^{\leq N}(n) = P_{\leq j}^{\leq N-1}(n-j). \tag{6}$$

下面构造双射. 设 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j)$ 被 $P_{\leq j}^{\leq N-1}(n-j)$ 所计数, 则

$$N-1 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_j \geq 0, \quad \text{且} \quad |\lambda| = n-j.$$

设 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_j)$, 其中$\mu_i = \lambda_i + 1$. 显然可知,

$$N \geq \mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_j > 0, \quad \text{且} \quad |\mu| = n.$$

故 μ 是被 $P_j^{\leq N}(N)$ 计数, 并且此过程可逆, 故等式(6)得证. 从而完成了等式(2) 的证明.