2022 ～ 2023 学年第一学期期中考试试卷

《抽象代数》（共 4 页）

（考试时间：2022 年 11 月 6 日）

题号	一	二	三	四	五	六	七	成 绩	核分人签字
得分									

阅卷人	
得 分	

第一题 (10 分)

给出正整数集合 $\mathbb{N}^+$ 上的一个群结构.

考虑 $\mathbb{N}^+ \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}$，$n \longmapsto (-1)^{\frac{n}{2}-[\frac{n}{2}]} \cdot [\frac{n}{2}]$

定义 $\mathbb{N}^+$ 上 "+" 运算

$a, b \in \mathbb{N}^+$ $\quad a+b = \varphi^{-1}(\varphi(a)+\varphi(b))$

$\varphi(a)+\varphi(b)$ 中的 "+" 为 $\mathbb{Z}$ 上普通加法. 显然 $\mathbb{N}^+$ 上上述运算封闭

下验证 $(\mathbb{N}^+, +)$ 为群即可

$(a+b)+c = \varphi^{-1}(\varphi(a)+\varphi(b))+c = \varphi^{-1}(\varphi(a)+(\varphi(b)+\varphi(c)))$

$= \varphi^{-1}(\varphi(a))+\varphi^{-1}(\varphi(b)+\varphi(c))$

$= a+(b+c)$

$1+a = \varphi^{-1}(0+\varphi(a)) = a$.

$\forall a \neq 1$ $\quad a+(a+(-1)^a) = \varphi^{-1}(\varphi(a)+\varphi(a+(-1)^a)) = \varphi^{-1}(0) = 1$

$\square$

阅卷人	
得 分	

第二题 (15 分)

令 G 是一个群，$\mathrm{Aut}(G)$ 是集合 G 的所有双射组成的变换群. 证明 G 必同构于 $\mathrm{Aut}(G)$ 的一个子群.

设 $G \xrightarrow{\varphi_a} G$，$x \longmapsto ax$ 先验证这是一个双射.

$\forall x, y \in G$，若 $x=y$，有 $ax=ay$ ∴ φ_a 为映射

若 $x \neq y$，则 $\varphi_a(x) \neq \varphi_a(y)$ 若不然 $ax=ay$ 同左乘 a^{-1}，$x=y$ 矛盾.

∴ φ_a 为单射.

$\forall x \in G$，$\exists a^{-1}x \in G$，$\varphi_a(a^{-1}x) = x$ ∴ φ_a 为满射.

∴ $\varphi_a \in \mathrm{Aut}(G)$

考虑 $G \xrightarrow{\phi} \mathrm{Aut}(G)$，$a \longmapsto \varphi_a$ 为一个单射

验证单射：若 $\phi(a)=\phi(b)$ 有 $\varphi_a = \varphi_b$.

∴ $\varphi_a(1) = \varphi_b(1)$ ∴ $a=b$.

验证这是同态：$\phi(ab) = \varphi_{a \cdot b} = \varphi_a \circ \varphi_b = \phi(a) \circ \phi(b)$

∴ $G \xrightarrow{\phi} \phi(G)$ 双射，∴ ϕ 为 $G \to \phi(G)$ 的群同构

最后验证 $\phi(G)$ 为 $\mathrm{Aut}(G)$ 的子群.

$\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{a \cdot b} \in \phi(G)$

$(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{a^{-1}} \in \phi(G)$

$\square$.

阅卷人	
得　分	

第三题 (15 分)

令 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \mid |A| = 1\}$, $\forall A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, 定义 $\phi(A) = (A^t)^{-1}$. 证明 $\phi : \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ 是一个群同构.

先验证 $SL_n(\mathbb{R})$ 为群 (略)

$\forall A, B \in SL_n(\mathbb{R})$

$\phi(AB) = ((AB)^t)^{-1} = (B^tA^t)^{-1} = (A^t)^{-1}(B^t)^{-1} = \phi(A)\phi(B)$

若 $\phi(A) = \phi(B)$ 即 $(A^t)^{-1} = (B^t)^{-1}$ $\therefore A^t = B^t$ $\therefore A = B$.

$\therefore \phi$ 单射.

(注:逆元唯一: $(A^t)^{-1} = (B^t)^{-1}$ $\therefore A^t \cdot (B^t)^{-1} = I_n$ $\therefore A^t = ((B^t)^{-1})^t = B^t$)

$\forall A \in SL_n(\mathbb{R})$

$|(A^{-1})^t| = |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = 1$ $\therefore (A^{-1})^t \in SL_n(\mathbb{R})$

$\therefore \phi$ 为满射.

$\varphi((A^{-1})^t) = A$

$\therefore \phi$ 为一个群同构. □

阅卷人	
得　分	

第四题 (15 分)

设 $I \subset R$ 是交换环 R 的一个理想, 证明 $\sqrt{I} := \{r \in R \mid r^n \in I$关于某一正整数$n\}$ 也是 R 的理想.

$\forall a, b \in \sqrt{I}$, $\exists m, n \in \mathbb{N}^+$ s.t $a^m, b^n \in I$, $(\forall t > m, a^t \in I, t > n, b^t \in I)$

$\therefore (a+b)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m+n}{k} a^k b^{m+n-k} + \sum_{k=m+1}^{m+n} \binom{m+n}{k} a^k b^{m+n-k} \in I$

$\therefore a+b \in \sqrt{I}$.

$0 \in I$ $\therefore 0 \in \sqrt{I}$

$\forall x \in R$, $ax = xa$, $(ax)^m = a^m x^m \in I$ $\therefore ax, xa \in \sqrt{I}$.

令 $x = -1$, 有 $-a = -1 \cdot a \in \sqrt{I}$.

$\therefore \sqrt{I}$ 为 R 的理想. □

第五题 (15 分)

阅卷人	
得 分	

令 R 是含恒等元的交换环.

(1) 证明 R 的极大理想必为素理想; 9'

(2) 举例说明 R 的素理想不一定是极大的. 6'

(1) I为极大理想 $\Leftrightarrow$ R/I 为域.

I为素理想 $\Leftrightarrow$ R/I 为整环

$\forall \bar{r} \neq \bar{0} \in R/I \Rightarrow r \in R \setminus I$, $\langle r, I\rangle = \{ar+b \mid a \in R,\ b \in I\}$.

可验证 $\langle r,I\rangle$ 为 R 的理想 (略) 且 $I \subsetneq \langle r,I\rangle$

$\therefore \langle r,I\rangle = R$, $\therefore 1 \in \langle r,I\rangle$

$\Rightarrow \exists x \in R, y \in I$, s.t. $xr+y=1$ 则 $\bar{x}\bar{r}+\bar{y}=\bar{1}=\bar{x}\bar{r}$

$\Rightarrow R/I$ 为域 $\therefore R/I$ 为整环.

若 $ab \in I$, $\overline{ab} = \bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{0}$, 又 R/I 为整环.

$\therefore \bar{a}=\bar{0}$ 或 $\bar{b}=\bar{0}$. $\therefore a \in I$ 或 $b \in I$

(2) $\mathbb{Z}$ 的零理想 $\{0\}$.

或 k 为一个域.

$k[x] = R/I = k[x,y]/\langle y\rangle$

或 $k[x,y]/\langle xy-1\rangle \cong k[x,x^{-1}]$

$\downarrow$

欧式环. $\square$

第六题 (15 分) (定理不可以直接用)

阅卷人	
得 分	

令 $\alpha \neq 0, \beta \in \mathbb{C}$ 为有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的代数元, 证明元素 $(\alpha + 2\frac{\beta}{\alpha})^3$ 也是 $\mathbb{Q}$ 上的代数元.

证明 $\mathbb{Q}[\alpha,\beta]$ 为代数扩张.

$\mathbb{Q}[\alpha]$, $\mathbb{Q}[\beta]$ 为代数扩张.

且 $\mathbb{Q}[\alpha] \supset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\beta) \supset \mathbb{Q}$ 为有限扩张.

$[\mathbb{Q}[\alpha]:\mathbb{Q}] < +\infty$ 由 β 为 $\mathbb{Q}$ 上代数, 设 $\mu_\beta(t)$ 为 β 在 $\mathbb{Q}$ 上极小多项式.

$\mu_\beta(t) \in \mathbb{Q}[t]$

$\Rightarrow \mu_\beta(t) \in \mathbb{Q}[\alpha][t] \Rightarrow \mu_\beta(t)$ 在 $\mathbb{Q}[\alpha]$ 上零化 β.

$\therefore [\mathbb{Q}[\alpha,\beta]:\mathbb{Q}[\alpha]] \leq \deg(\mu_\beta) < +\infty$.

$\therefore [\mathbb{Q}[\alpha,\beta]:\mathbb{Q}] < +\infty$.

$\Rightarrow \mathbb{Q}[\alpha,\beta]$ 为有限扩张.

$\Rightarrow \mathbb{Q}[\alpha,\beta]$ 为代数扩张.

$(\alpha + 2\frac{\beta}{\alpha})^3 \in \mathbb{Q}[\alpha,\beta]$ 是代数元.

$\square$

第七题 (15 分)

阅卷人	
得 分	

设 $f(x) \in F[x]$ 是一个次数为 n 的多项式, 令 L 是 $f(x)$ 在 F 上的一个分裂域, 证明: $[L:F] \mid n!$.

1° 当 $f(x)$ 不可约时. 令 $f(x) = a(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$ $a \in F$, $\alpha_i \in L$

对次数归纳, $k=1$ 时显然

假设 $k \le n-1$ 时成立.

$k=n$ 时

考虑 $g(x) = a(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$ $\deg(g) = n-1$, $g(x) \in F[\alpha_1][x]$

Vieta定理得

L 是 $g(x)$ 在 $F[\alpha_1]$ 上的分裂域,

由假设 $[L:F[\alpha_1]] \mid (n-1)!$

$f(\alpha_1) = 0$, $f(x) \in F[x]$ 不可约, $\therefore \deg(\mu_{\alpha_1}(t)) = \deg(f) = n$.

$\therefore [F[\alpha_1]:F] = n$. $\therefore [L:F] = [L:F[\alpha_1]] \cdot [F[\alpha_1]:F] \mid n!$

2° 当 $f(x)$ 可约时. 设 $f(x) = f_1(x)\cdots f_s(x)$ 为不可约分解.

记 $\deg(f_i) = n_i > 0$ 则 $n_1 + \cdots + n_s = n$.

令 $f_1(x)$ 在 F 上的分裂域为 L_1, 则 $[L_1:F] \mid n_1!$

因 L 为 $f_2(x), \cdots, f_s(x)$ 在 L_1 上的分裂域.

这一步 $f_2(x)$ 在 L_1 上可约时 $\deg(f_2) < n$, 由归纳假设成立.

令 $f_2(x)$ 在 L_1 上分裂域为 L_2, 则 $[L_2:L_1] \mid n_2!$

令 L_i 为 $f_i(x)$ 在 L_{i-1} 上分裂域, $(i=2,\cdots,s)$, 则 $[L_i:L_{i-1}] \mid n_i!$

则 $[L:F] = [L_s:L_{s-1}] \cdot [L_{s-1}:L_{s-2}] \cdots [L_1:F] \mid n_1! \cdot n_2! \cdots n_s!$

注意到 $\dfrac{(n_1+n_2+\cdots+n_s)!}{n_1!\cdots n_s!} = \binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdots \binom{n-n_1-\cdots-n_{s-2}}{n_{s-1}} \in \mathbb{N}$

$\therefore [L:F] \mid n!$ $\square$

这个式子也可表示 n 个元素分成 n_s 组

每组至少 1 个元素, 从而这个式子为整数.