2022-2023 数学分析 B 期末试卷

Lei

2023 年 6 月 9 日

1 Part A

1. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)$.

2. 求 $\int_1^5 \frac{\sqrt{\ln(11-x)}}{\sqrt{\ln(11-x)}+\sqrt{5+x}}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 x^2(1-x)^n$.

4. 设 $p>0$, 讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\cos x dx$ 的敛散性. (含绝对收敛性和条件收敛性)

5. 求函数 $\frac{1}{(3-x)(4-x)}$ 的 Maclaurin 展开式.

2 Part B

6. 若 $f(x)$ 是连续的以 T 为周期的函数. 求证:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$$

7. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n\, n!}{n^{n+p}}$ 的敛散性.

8. 设 $f(x)=x^3, -\pi\le x\le\pi$. 把 $f(x)$ 展开为以 2π 为周期的傅里叶级数时, 其和函数为 $S(x)$. 求 $S(\frac{5}{2}\pi)$ 与 $S(5\pi)$ 的值.

9. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续. $f_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(x+\frac{k}{n})\frac{1}{n}$.
证明: 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在任何有限区间上一致收敛.

10. 证明 Dini 定理: 若在有限区间 $[a,b]$ 上的连续的函数所成的级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛于连续函数 $S(x)$, 对 $[a,b]$ 每一点 x, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 各项同号, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$. (不能直接利用关于函数列的 Dini 定理的结果证明).

11. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1-x)\frac{x^n}{1-x^{2n}}\sin nx$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 内一致收敛.