2022-2023 数学分析 A 期末试卷

Lei

2023 年 2 月 25 日

1 Part A

1. 求

$$\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$$

2. 求

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{5^x-1}{x})^{\frac{1}{x}}$$

3. 求函数 $y=x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 的导函数.

4. 求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x^2\cos 2x}[\frac{(1+x)\ln(1+x)}{x^2}-\frac{1}{x}]$$

5. 求 $\int\sin^3 x\cos^7 xdx$

2 Part B

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $ab>0$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$, 使得:

$$\frac{ab}{b-a}\begin{vmatrix} b & a \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = \xi^2(f(\xi)+\xi(f'(\xi))$$

7. 当 $x>0$ 且 $x\neq 1$ 时, 有 $(1-x)(x^2e^{\frac{1}{x}}-e^x)\leq 0$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$, 试证：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}=ab$$

9. 用 $Cauchy$ 收敛准则证明有限覆盖定理.

10. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 可导. 证明: $f'(x)$ 在 (a,b) 内无第一类间断点.

11. 设 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且对固定 $c\in[a,b]$, $\{f_n(x)\}$ 有界. 证明: 存在 $[a,b]$ 的一个子区间 (c,d), 在其中 $\{f_n(x)\}$ 一致有界, 即存在常数 $M>0$, 使得 $\forall x\in(c,d),\forall n$, 有 $|f_n(x)|\geq M$.