Kira 高数葵花宝典

（考研数学一、二、三公共考点）

官方店铺：Kira 考研周边小铺

微信公众号：Kira 考研数学

微博：Kira 言而信

葵花宝典目前已修订到最新版

《Kira 高数葵花宝典》涉及的知识点范围（以下内容根据数一二三最新考纲写成，请认真参考）

撇开真题实战而谈论数学知识点无意义。我只经受过数三真题的检验，虽本科在数学系,数一数二的其他问题可做,但不认为自己有关于数一数二真题的发言权，故高数葵花宝典只包含数一数二数三的公共考点。

- **本宝典包含：**

/函数、极限、连续/

[拾遗篇]
函数有界性、单调性、周期性、奇偶性、连续性（包括左连续、右连续）
无穷与无界
间断点类型判别
闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理）及应用

[大王小王篇]
基本初等函数、复合函数、分段函数、反函数、隐函数
数列极限、函数极限（包括左极限、右极限）
极限的性质、极限存在的两个准则、极限四则运算法则
无穷小的基本概念、性质和比较方法
无穷大量及其与无穷小量的关系

[4A 篇]
闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理）及应用

/一元函数微分学/

[4A 篇]
罗尔定理、拉格朗日中值定理、泰勒定理、柯西中值定理及其应用

[拾遗篇]

导数概念、可导性连续性、平面曲线切线方程法线方程
导数和微分的关系、一阶微分形式的不变性、求函数微分
函数单调性判别方法
函数极值的概念（极值、最大值、最小值的求法及其应用）
用导数判断函数的凹凸性、求函数拐点和渐进线
画简单函数的图形

[大王小王篇]
基本初等函数的求导公式、导数四则运算法则、复合函数求导法则
分段函数的导数、反函数和隐函数的导数
高阶导数
洛必达法则求极限

/一元函数积分学/

[大王小王篇]
不定积分的基本性质和基本积分公式、换元积分法和分部积分法
定积分概念和基本性质、变限积分函数求导、牛顿莱布尼茨公式、定积分的换元积分法和分部积分法
反常积分概念及计算

[4A 篇]
定积分中值定理

[拾遗篇]
原积分和不定积分概念
利用定积分计算平面图形面积、旋转体体积和函数平均值

/多元函数微分/

[4A 篇]
多元函数概念、二元函数几何意义
二元函数的极限与连续、有界闭区域上二元连续函数的性质
多元函数偏导数与全微分、求多元复合函数一阶、二阶偏导数、求全微分、求多

元隐函数的偏导数
多元函数极值和条件极值

/多元函数积分/

[4A 篇]
二重积分概念及基本性质，二重积分计算（直角坐标、极坐标）
反常二重积分计算

/无穷级数/ （数二不考）

[4A 篇]
级数收敛与发散、收敛级数的和
级数基本性质、级数收敛的必要条件
几何级数收敛与发散条件、正项级数收敛性的比较判别法和比值判别法
绝对收敛与条件收敛、绝对收敛与收敛的关系
交错级数的莱布尼茨判别法
幂级数基本性质（和函数连续性、逐项求导和逐项积分）
幂级数求和、麦克劳林展开式

/常微分方程/

[4A 篇]
微分方程的阶、解、通解、初始条件和特解等概念
求解变量可分离的微分方程、齐次微分方程和一阶线性微分方程
线性微分方程解的性质及结构
解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数的二阶常系数非齐次线性微分方程
二阶常系数齐次线性微分方程及简单的非齐次线性微分方程

- **本宝典不含**

【数一】
/一元函数微分学/ 曲率.
/一元函数积分学/ 用定积分表示弧长、功、引力、压力、质心、形心等几何量物理量.
/向量代数和空间解析几何/ 全部（包括向量运算；平面方程、曲面方程和曲线方程及相关运算；空间曲线参数方程等）
/多元函数微分学/ 方向导数与梯度；空间曲线的切线和法平面；空间曲面的切平面和法线；二元函数的二阶泰勒公式；
/多元函数积分学/ 三重积分；曲线积分；格林公式；曲面积分；散度旋度；
/无穷级数/ 傅里叶级数和狄利克雷收敛定理；
/常微分方程/ 高于二阶的常系数齐次线性微分方程；伯努利方程，全微分方程；变量代换法，降阶法；欧拉方程；微分方程的物理应用问题.

【数二】
/一元函数微分学/ 曲率.
/一元函数积分学/ 用定积分表示弧长、功、引力、压力、质心、形心等几何量物理量.
/多元函数微分学/ 方向导数与梯度；空间曲线的切线和法平面；空间曲面的切平面和法线；二元函数的二阶泰勒公式；
/常微分方程/ 高于二阶的常系数齐次线性微分方程；降阶法；微分方程的物理应用问题.

【数三】
差分方程
经济学应用

-索引-

（*下划线表示该部分有我想特别强调的一些有 Kira 特色的知识点）

Kira 序——篇名的由来

我在今年 3 月分享过英语笔记后，陆续有同学问我是否能分享一下数学笔记。我拿出两本早已被我画得稀烂也翻到很厚的视频课笔记端详，感觉实在太凌乱以至于无法分享。

遂决定从宇哥和汤神这两本笔记中抽取各自最最精华的方法，揉入我自己的观点和态度，掺进我去年在微博彻夜答疑收获来的经验，凝成此本《Kira 高数葵花宝典》。

蛰伏半载，诚意之作。

在最初我是不知道该如何写可以分享的笔记的，考虑过把原笔记完整抄一遍再写批注，又觉得不妥。思前想后，决定把顺序完全打乱重排，完全按照我自己的思路来走。

于是"大王小王篇"诞生。

所谓"大王小王"即扑克中两张王牌，王炸甩出来，谁都要不起。而在考研高数中我认为最根基最重要最容易被低估难度的，我把它们拿出来汇成大王小王篇，以警考生。

So ladies and gentlemen, what do you think is the King of 考研高数?

我认为是烂熟的计算功力，是对极限、导数、不定积分、定积分的定义及其计算技巧的倒背如流熟稔于心。

计算弱会发生什么？你会对数学感到彻头彻尾的**恐惧**，面对每一道题目你都会心虚，你知道你一定做不到最后，一定算不出结果；面对每一个稍复杂的新延伸的定理和概念，面对广义积分面对级数面对概统，你都战战兢兢，因为你只要一看到"极限"，看到"积分"这些字眼就心烦意乱。你看到 Γ 函数的定义式立刻就昏了，觉得自己肯定记不住，也用不来。

但事实上，它好用到哭。

康忙北鼻．计算是做高数最开心的事情好嘛。
对于数学系的同学来说，计算题=送分题。

我在刚准备考研的时候，也是个计算弱渣，甚至到 10 月的时候，计算仍是我对自己数学不自信的重要因素。11 月的时候我狠砸半个月，把极限和积分彻底打通。

一切都不一样了。

当搞定大王小王之后，你会发现，以前那些难缠的 N 元求导/积分/级数根本不是事儿。

接着是"4A 篇"。

四张 A 在一副牌中的地位举足轻重，拿下它们就相当于拿下了考研高数公共考点的半壁江山。我挑选的是——多元函数微积分、微分方程、中值定理和级数。在每一部分，我都做了非常详尽的讲解。当你稳稳拿下大王小王篇后，就可以去搞定4A 篇了。

最后是"拾遗篇"。

拾遗篇将大王小王篇和4A 篇筛下的其他知识点一一回收，确保整本葵花宝典知识的完整性。这些内容只是比较小而琐碎，但不代表它们不重要。它们都应是你的常识才对。

感谢你选择《Kira 高数葵花宝典》，希望它能够为你高数的学习提供一串串锦囊妙计，帮你打开视野，助你少走弯路。我也真心希望你能够从中发现尽可能多的亮点，不枉我倾尽全力写下的一字一句。

祝考研成功！

Kira

「Kira高数葵花宝典阅读指南」

① 每个人学习高数都在跟老师建立一套完整体系，
我的高数葵花宝典可帮你在自身体系上缝缝补补，
而不可代替任何一种体系，也不可代替笔记，它更像一本
为你指点迷津的工具书。

② 字较多较细是因为我想尽可能体现"讲解"属性，
数学重在讲解，最低要求是请把所有" Kira XX"
读完，它们都是我最想说给你听的。同样，请耐心
阅读我强调的文字和打星号的文字。

③ 应这样对待例题：与其说它们是题目，不如说它们是
概念和考点的"生动诠释"，是帮助你理解并
掌握概念的。

④ 关于葵花宝典的每一句话：就如同我很多微博写了
也是白写一样，这本书很多话哪怕我用十分力道去写，
很多人也读不出其中的厉害。只有吃过亏才能长记性，
只有摔过跤才能长眼神。

我只想说，每一句"Kira XXX"和"强调文字"我写的
时候都是力透纸背，上面铺满了历年考生的尸体
和血泪！

⑤ 每部分的"Kira前言"一定要看。

⑥「大王小王篇」才是你真正的敌人，它们笑里藏刀。

TAT

⑦ 读不明白地方旺旺来找我讲（微博私信看不见）问的多了我视频讲.（微博 or 公号 发）.

⑧ 每部分"特别关注"即重点.我划得较为简略，后续会在宝贝简介中更新详细版重点，请持续关注.

⑨ 蒸花宝典会成为我给大家讲题时用到的"教材"也会是给大家点拨所用的参照。

⑩ 非常感谢大家对本宝典的支持. 关于宝典内容也欢迎多多与我交流. 祝考研顺利！

Kira
2016.9.30.

「大王小王篇」之

极限计算

· 本Part的解锁条件： 无

· 本Part的特别关注： P3. (2)(3) ▲P8. 二.(1)(3)(4). 例4

（看到即赚到！） P11. (iv) P14. 四 P17. 六.1.3.

▲P18. 七(例11, 12) P31. A)

（本章是所有后续的根基，建议我讲的每一句你都有印象并内化为自己的常识. P7右上角kira忠告，好好看！）

· 本Part的难点 ： 由于本Part地位崇高，所以全程无难点，基础较好的同学可以着重看一下"特别关注".

我在P27番外说过①性价比低，这块可直接跳过，暂不深究.

在本部分中，你必须熟练记忆运用以下公式和结论

1 泰勒公式与等价无穷小（8个）（$x \to 0$）

最常考 背2项即可
$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$
$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$
$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$
$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$
[第一组]

背3项足够用
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$
[第二组]

- 以下等价无穷小由第一组自然得出（不必强背，用熟自然会）

$\sin x \sim x$ ； $\tan x \sim x$ ；

$\arcsin x \sim x$ ； $\arctan x \sim x$ ；

$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$ ； $x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3$ ；

$x - \arcsin x \sim -\frac{1}{6}x^3$ ； $x - \tan x \sim -\frac{1}{3}x^3$

- 以下等价无穷小由第二组自然得出（非常好用！背熟！）

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ ； $x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2$ ；

$e^x - 1 \sim x$

注意易错点

(1) $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ 和 $e^x - 1 \sim x$，两者1的位置看准（正负）

· BMDM ·

不要颠倒搞反符号

(ii) $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，而 $1-\cos^2 x = \sin^2 x$，做题忌马虎！看格！

2 复合函数及积分的无穷小比阶（秒杀选择）

[1] $f(x) \sim ax^m$，$g(x) \sim bx^n$，则 $\boxed{f[g(x)] \sim ab^m x^{mn}}$
其中 $f(x)$，$g(x)$，a，b 均 $\neq 0$

（ps：简单套一下就知道了，$f(g(x)) \sim a(bx^n)^m \sim ab^m x^{mn}$ 呦）

例1
已知 $f(x) \sim \frac{1}{2}x^2$，$g(x) \sim \frac{3}{4}x^3$，则 $f(g(x)) \sim ?$
解：口算得 $f(g(x)) \sim \frac{1}{2}(\frac{3}{4})^2 x^6$

[2] 若 $f(x)$，$g(x)$ 连续且不为 0，$x \to 0$，$f(x) \sim g(x)$，
则 $\boxed{\int_0^x f(t)\,dt \sim \int_0^x g(t)\,dt}$

（ kira 说人话：介 这个式子的作用在于把长得复杂的积分替换为长得简单的积分 ）

例2
当 $x \to 0$ 时，$\int_0^{x-\ln(1+x)} \frac{\sin t^2}{t}\,dt \sim$ ？
解：$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t^2}{t}\,dt \sim \int_0^x t\,dt = \frac{1}{2}x^2$ （由[2]）
$g(x) = x-\ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2$
$f[g(x)] = \int_0^{x-\ln(1+x)} \frac{\sin t^2}{t}\,dt = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2)^2 = \frac{1}{8}x^4$ （由[1]）

（ kira 说人话：本质上 $\int_0^x \frac{\sin t^2}{t}\,dt$ 是关于 x 的函数，记为 $f(x)$
则 $\int_0^{x-\ln(1+x)} \frac{\sin t^2}{t}\,dt$ 是 x 的复合函数，即 $f(\underbrace{x-\ln(1+x)}_{\text{记为 } g(x)})$
$f(g(x))$）

记为 $f(g(x))$，再套用 [1])

$\boxed{3}$ 其它公式和神器

(1) $\begin{cases} a^x-1 \sim x\ln a & (x\to 0) \\ \sqrt[n]{a}-1 \sim \frac{1}{n}\ln a & (n\to\infty) \end{cases}$

注意 $(a^x)' = a^x \ln a$ 别误！

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \quad (\alpha>0)$ ⇐ 大神器！巨好用！

从此——

$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$；$\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\ln x = 0$；… 秒算！

(3) $\ln u \sim u-1 \quad (u\to 1)$ ⇐ 好用！可帮助去 ln 符号

从此——

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

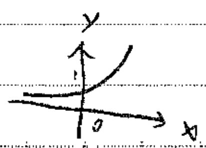
※ 沦为口算！

PS：公式 $\lim u^v \overset{1^\infty}{=} e^{\lim v\ln u} = e^{\lim v(u-1)}$ 正是这个道理。

(4) 常见单侧极限 ⇐ 不用背，看图yy即可；首先你要会图…

① 会 a^x or $a^{\frac{1}{x}}$ （特别地，$a=e$）

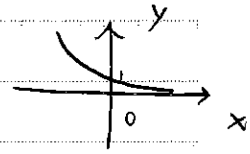
当 $a>1$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0, & \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-} a^{\frac{1}{x}} = 0, & \lim\limits_{x\to 0^+} a^{\frac{1}{x}} = +\infty \end{cases}$



（ 再说一遍，看图说话，不许背！）

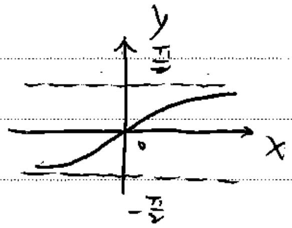
·BMDM·

当 $0<a<1$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty, & \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to0^-} a^{\frac{1}{x}}=+\infty, & \lim\limits_{x\to0^+} a^{\frac{1}{x}}=0\end{cases}$

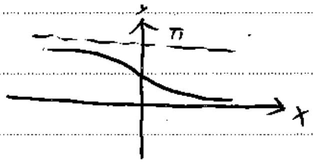


② 含 arctanx 或 arccot 的函数

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}\end{cases}$



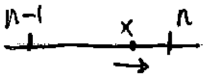
$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} x = \pi \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccot} x = 0\end{cases}$



③ 取整函数 $[x]$ （即不大于 x 的最大整数）

$\begin{cases} 当\ x\to n^-,\ [x]=n-1 \\ 当\ x\to n^+,\ [x]=n\end{cases}$ ，n 是整数

（Kira备注：这个也不需要背！极限 $x\to a$ 的实际意义是"取遍 a 两侧邻域内所有点，但取不到 a"；



所以 $x\to n^-$ 时，取遍 n 左侧附近所有点，但它们都比 n 小，而肯定比 $n-1$ 大，故有 $[x]=n-1$，$(x\to n^-)$；$x\to n^+$ 可类比得出）

(5) 无穷大从低阶到高阶的排序：☆常考！

(低) $\log_a^n\ (a>1)$, n, $n^k\ (k>1)$, $a^n\ (a>1)$, $\boxed{n!}$, n^n (高)　$(n\to\infty)$

即：对数函数 → 幂函数 → 指数函数 → 阶乘 → 超越

例3

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

能不能一眼看出？

在本部分中，你必须清楚以下常识

$\boxed{1}$ 无穷小的运算

- 无穷小 × 无穷小 = 阶次之和 （大吞小）

  如 $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$

- 无穷小 + 无穷小 = 阶数取低 ⇐ 必须和同阶相加，同阶无限制！

  如 $o(x)+o(x^2)=o(x)$

（Kira旁注：以上为Taylor展开式求极限的计算依据，以此决定"展开几项"和"Peano余项的处理"。）

例1

求极限

step 0: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

step 1: $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)-x(1+x)}{x^3}$

step 2: $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)-x(1+x)}{x^3}$

$=\frac{1}{3}$

（Kira解读：

① step 0中，分母为x^3，甚至可以猜到$x(1+x)$一定被消掉了

② 因为分母为x^3，所以e^x展到$o(x^2)$，$\sin x$展到$o(x^3)$，即所有能得到step 1中）

x^3的情况都必须保留

③ step 2. 只保留到 x^3 项即可，更高阶算都不必算！）

2 无穷小的性质

- 有界 × 无穷小 = 无穷小
- $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$；⇦ 做题没思路不妨在不排着玩儿～ 万一做出来了呢～
- $\left.\begin{array}{l}\alpha \sim \alpha_1,\ \beta \sim \beta_1 \\ \lim \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} = A\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \dfrac{\alpha}{\beta} = A$

3 必须会的不等式

- $\frac{2}{\pi} x < \sin x < x < \tan x \qquad (0 < x < \frac{\pi}{2})$
- $\ln(1+x) < x \qquad (x > 0)$

4 极限四则运算法则

已知 $\lim f = A$，$\lim g = B$

① $\lim (f \pm g) = A \pm B$

② $\lim fg = AB$

③ $\lim f/g = A/B \qquad (B \neq 0)$

5 极限运算技巧的跟基

已知 $\lim_{u \to a} f(u) = f(a)$，$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = a$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)]}$ ⇦ 也就是说，极限号往里走了!!!

对于连续函数，例如 $\lim_{x \to 0} e^{\frac{\cos x - 1}{x^2}} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$ 棒呆！

★ kira 忠告

<1> 二、三七常提为一种解法，不会你我；

<2> 六、七 万能、无敌！

<3> 八 主要条理分明

正片开始！必会套路联盟

一、有理函数的极限 $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

▲ 二、无理函数的极限及推广（当分子、分母出现无理式）

① $\frac{0}{0}$（$x\to x_0$ 时，因式分解出 $(x-x_0)$，约去 $(x-x_0)$，即可求出）

② $\frac{\infty}{\infty}$（$x\to\infty$ 时，分子分母同除以 x 最高次幂）

③ $\infty-\infty$（通分 or 乘因子 or 倒代换）

④ $0\cdot\infty$（化分式 → $\frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty}$）

三、用等价无穷小代换求极限

四、单侧极限问题

▲ 五、含参变量极限 $f(x)=\lim_{n\to\infty} g(n,x)$ ★ 脑子要清醒

及相关讨论极限函数连续性的问题

六、用洛必达法则求极限 $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$（对分子无要求）

▲ 七、用泰勒公式求极限（最好用！） $\sqrt{n^2+n}$

八、数列极限（较恶心且难度较高，可先跳过，先掌握基本套路即可！）

- ① 将 n 连续化为 x
- ① 含乘阶、乘方
  - 一次数不均：变一项，放缩
  - 次数均作差：提因子，放缩 $(n+1)^k-n^k$
  - 单调有界
- ② 通项为 n 项和
  - 表达式可求
    - ① 等比、等差
    - ② 分项相消 $\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$
  - 表达式不可求（套路）
- ③ 通项为 n 项积（相消）
  - ① 抓单个因子，拆项相消
  - ② 等式两边同乘一因子
  - ③ 化对数，相消 ✓
  - ④ 不能简化用套路

这就是"框架"，把出题方向穷尽，并各有对策!!!

（每种对策都做过例题才行！）

·BMDM·

一 有理函数的极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}0, & n<m\text{时}\\ \frac{a_0}{b_0}, & n=m\text{时}\\ \infty, & n>m\text{时}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}\frac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}, & Q_m(x_0)\neq 0\\ \infty, & Q_m(x_0)=0,\ P_n(x_0)\neq 0\\ \frac{0}{0}\text{型}, & Q_m(x_0)=0,\ P_n(x_0)=0\end{cases}$$

（kira备注：这两个不用死背，自己举例就理解了。）

例1

求 $\lim_{x\to1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$

此题咋一看属于 $\frac{0}{0}$ 型，中心思想是"分子凑 $(x-1)^2$，约去分母"

解：

有 $x^{n+1}-(n+1)x+n=(x^n-1)x-n(x-1)$

$=(x-1)[x(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)-n]$

$=(x-1)^2[x^{n-1}+2x^{n-2}+\cdots+(n-1)x+n]$

$\Rightarrow I=\lim_{x\to1}x^{n-1}+2x^{n-2}+\cdots+(n-1)x+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ ※

（kira备注：本题运算技巧较难，看懂即可。但以下两点必须掌握会用：① 分子凑 $(x-x_0)$ 约去分母的套路；

② $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$ 背）

二 无理函数的极限

(1) $\frac{\infty}{\infty}$ 型：$\frac{\infty}{\infty}$ 型是极常见也极易懵比的一种极限形式，拿到手后永远只做一件事：分子分母同除以 x 最高次幂 over!

· BMDM ·

例2

求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

解：原式

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}-1}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}$$

$$\left(=\frac{\sqrt{4+0-0}-0-1}{\sqrt{1+0}}\right)$$

$$=1$$

⇦分子分母同除以x最高次幂x
因x→-∞，原题有√，所以除以-x
根号内除以$(-x)^2=x^2$

⇦这种做法的好处在于，只剩下0和常数。

(2) $\dfrac{0}{0}$型：思路与[1]例1相仿，即找分子分母的公因子并约去。
但这种无理式极限（如 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\dfrac{n}{m}$）考试并不常见，
大多数此型可用泰勒（等价无穷小）和洛必达解决！

(3) $\infty-\infty$型：☺ 这是我在考研初期最困惑的一种题型，
每次求斜渐近线都很抵触，但其实掌握套路后
非！常！简！单！ 方法是用通分、乘因子、倒代换等方式，将其转化为分式，再求极限。

例3

求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x+2)e^{\frac{1}{x}}-x\right]$

解：

令 $x=\dfrac{1}{t}$ 则 ⇦倒代换！变出分式来！

$$I=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1+2te^t}{t}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}+2\lim_{t\to0}e^t=3$$

☺ 妈妈再也不用担心我求不出渐近线截距啦！

(4) $0\cdot\infty$ 型：此型与 $\infty-\infty$ 类似，也要化为分式，呈号或器后，再求极限。另外，这种形还极易出确定待定极限的题目，我们接下来举例展开。

例4

求 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\tan\frac{\pi x}{2}$

解：令 $t=x-1$，则化为更直白的 $0\cdot\infty$ 型

$$I=\lim_{t\to0}t\cdot\tan\frac{\pi(t+1)}{2}$$

$$=\lim_{t\to0}t\cdot\left(-\cot\frac{\pi t}{2}\right)$$

$$=-\frac{2}{\pi}\lim_{t\to0}\frac{\frac{\pi t}{2}}{\tan\frac{\pi t}{2}}=-\frac{2}{\pi}$$

（kira流：（拍黑板）

$$\boxed{-\frac{2}{\pi}}\lim_{t\to0}\boxed{\frac{\frac{\pi t}{2}}{\tan\frac{\pi t}{2}}}$$

· 每一步都把系数早早提前　· 并确保形式一致

· 写得清楚明白

→ 是提高计算速度和准确率的关键！

→ 也是汤家凤手法老练的精髓

→ 这在求极限和后面求积分中到底关键！

做题快到飞起，且赏心悦目！）

· 确定待定极限的方法

工具：(i) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A\neq0$，$g(x)$ 是 n 次多项式

$\Rightarrow f(x)$ 也是 n 次多项式（即最高次幂到 x^n）

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$，若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$

$\Rightarrow$ $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A=0$，若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，则当 $x\to x_0$

$\Rightarrow$ $f(x)$ 必是 $g(x)$ 的高阶无穷小.

☆(iv) $\lim f(x)g(x)=A$，若 $\lim g(x)=\infty$，则必有 $\lim f(x)=0$.

(Kira： (iv) 非常厉害！用来处理 $\infty-\infty$，可以直接拿到无穷小的式子.)

例5

确定 a, b 的值，使 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$

解：

$\because$ 左端 $=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}=0$ ← 用 (iv) 直接得到

$\Rightarrow$ $1-a=0$ $\Rightarrow$ $a=1$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$ ← $\infty-\infty$ 转化为分式，用(3)

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\frac{1}{2}$ ← 分子有理化

综上 $a=1$，$b=-\frac{1}{2}$ ☆

三 用等价无穷小代换求极限

千古难题 到底什么时候什么情况下才能换等价无穷小？为什么我一换就错？根本不知道

Kira 一本正经地说：等价替换只能用于血统纯正的因式

△ 关于因式：因式就是乘法 $A \cdot B$，$A \cdot \frac{1}{B}$ 都算
只要出现 $+$、$-$，对不起，换不了。

△ 关于血统纯正：因式必须"独立而完整"，没有一点杂质
如：$A \cdot B$ 中，A 可换；
如：$(A - B \cdot C)$ 中，B 不可换，A 更不可换；

举例：

① 不穿衣服组（光杆因式）

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \sin x \cdot x = \lim\limits_{x\to 0} x^2 & (\checkmark) \\ \lim\limits_{x\to 0} \sin x + x = \lim\limits_{x\to 0} 2x & (\times) \\ \lim\limits_{x\to 0} x + x\sin x = \lim\limits_{x\to 0} x + x^2 & (\times) \end{cases}$$

② 穿衣服组（指在复合函数名下的因式）

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} e^{x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{x^2} & (\checkmark) \\ \lim\limits_{x\to 0} \sin^5 x = \lim\limits_{x\to 0} x^5 & (\checkmark) \end{cases}$$

（此处可直接替换等价无穷小的原因在于，我们在前篇常识因中提到的，极限号可以往里走，即

$$\lim_{x\to 0} e^{x\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} x^2} = \lim_{x\to 0} e^{x^2}$$

自然，像 $\lim\limits_{x\to 0} e^{x\sin x - \tan x}$ 就不能乱换，因为"血统不纯"）

啊！ 你真的分得清"求极限"和"等价无穷小"吗？
不妨看一下这个老生常谈的典型错误

例 6

求 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}$

错解：$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{[(1+\frac{1}{x})^x]^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{e^x} = 1$ （X）

错误原因，按身哥的话"不懂怎回原不均"，即人为制造了 x 趋向的先后顺序。有的同学转念一想，"不对！我记得可以提前把分子或分母的因式替换掉啊！也可以把常数极限提前求好，写在前面啊！为啥跟这就错了？！

① 关于"提前替换"

如 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin^2 x)\ln(1+x^2)}{x\sin x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\cdot x^2}{x\cdot x^2} = 0$

- 请注意，这里替换掉的分子分母算用的是"等价无穷小"，x 保留下来，$\lim\limits_{x\to 0}$ 也保留下来，而 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$，x 没了，$\lim\limits_{x\to\infty}$ 也没了，只取了常数 e.

② 关于"极限值为常数可提前"

如 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x^2-1)\sin x}{(x^2+1)x} = \lim\limits_{x\to 0} -1\cdot\dfrac{\sin x}{x} = -1$

- 其中，我们提前求了 $\frac{x^2-1}{x^2+1} = -1$，这样操作的前提是它是常数，且作为因子出现，而错例中 $(1+\frac{1}{x})^x$ 作为幂指函数的底数不满足条件，还有一层 x 次方在"制约"它，否则 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ 就可写为 $1^x = 1$ 了，这显然不对。
- 若此题改为 $\lim\limits_{x\to\infty} [x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})](1+\frac{1}{x})^x$ 则完全可以写为

$= \lim_{x\to+\infty} e\cdot[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$

至此，这道题的利用价值基本被榨取干净了。

正解：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}}=\lim_{x\to+\infty}e^{x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=e^{\frac{1}{2}}$$ ☆

例题大家可以自行找来练习，原则很简单，就是争取把各种奇奇怪怪形式都替换成 x 的多项式（x^a），方便约分。

另外，凡能用等价无穷小解决的问题，都可以用泰勒解决!!!

$\boxed{四}$ 用泰勒公式求极限

- 公式就背 P1 给的那两组就好；
- 泰勒最大的好处，在于"直白"，直接换式子就行；
- Peano 余项处理起来可能不那么舒服，把握好 P5 中等价无穷小的运算法则，慢慢就形成对"大吞小"的感性理解了。

例 7

求极限 $\lim_{x\to0}\frac{1-x^2-e^{-x^2}}{x\sin^3 2x}$

（😊 Kira 叨逼叨：像分子这种情况，就是典型的泰勒情形，用其它方法真的会做吐。）

解：$I=\lim_{x\to0}\frac{1-x^2-(1-x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4))}{x(2x)^3}=-\frac{1}{16}$ ☆

· BMDM ·

六 如例题所示，当极限分子or分母出现若干项的代数和，可将表达式中的初等函数用x_0的泰勒公式替换，使原极限转化为$x\to x_0$时$x-x_0$的有理分式的极限，这种极限是易求的。

七 而对于考研求极限题目，我们最终都可以化为$x\to 0$的极限式，所以用到的泰勒展式就是P_1的麦克劳林展式。(即$x_0=0$)

八 对于$\ln(1+\varphi(x))$，$e^{\varphi(x)}$，$(1+\varphi(x))^{\alpha}$这些不舒服函数，用泰勒往往会有非常好的效果，大大提高做题速度。

例8

求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

解：

$$I=\lim_{x\to\infty}\left\{x-x^2\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\right\}=\frac{1}{2}$$

九 关于泰勒展开到第n项合适，以例7为例(其它题同理)

① 把分子中多余的$1-x^2$消掉

② 比分母x^4的无穷小更高阶，即$o(x^4)$或$o(x^5)$…，这样Peano余项和分母之比自然为0

③ 分子一定会出现x^4项，不然题就出错了。

⇨ 这样你自然会得到一个非常舒服的常数结果。

三 单侧极限问题

单侧极限在求渐近线，间断点的题中都有了应用，不害怕，

· BMDM ·

因为，无巧不成题．对我 P3 - P4 中提到的常见单侧极限足够警觉就好．计算上与求双侧极限并不有太大区别，注意制作请跳过．

例 9

设 $f(x) = (1+x)\arctan\frac{1}{1-x^2}$，判别 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 是否存在？

解：　　$x=\pm 1$ 为无定义点　　⇨ 求间断点相关的题目，一定不说先写无定义点，再找分段函数分段点．

① 由 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} \arctan\frac{1}{1-x^2} = -\frac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \arctan\frac{1}{1-x^2} = \frac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{x\to -1} (1+x) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0$　　⇨ 无穷小乘常数还是无穷小，极限为 0．

② 由 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \arctan\frac{1}{1-x^2} = \frac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \arctan\frac{1}{1-x^2} = -\frac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{x\to 1} (1+x) = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在．☆

到后期水平较高时，看一眼函数即知左右极限是否相等，当有把握左右极限相等时，不必分 $x\to x_0^-$ 和 $x\to x_0^+$，直接写 $x\to x_0$ 即可．可节省做"判间断点类型"题的时间和步骤．

六 用洛必达法则求极限

这大概是不少人最爱用的方法吧，因为太万能了！只要满足 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型就可以无限使用，使天下没有难求的极限！不过我个人很少用洛必达，因为求导加代值真的好烦哦… 求极限题目，很多都是「口算级」的泰勒啦~

以下给大家几点求洛必达的建议和"行规"：

1. 每用一次洛必达法则后，都要化简，分离常数，把式子化到不能更简了，再用下一次洛必达。

2. 洛必达法则失效，若 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \neq A$ 或 ∞ 也不是未定式，不能断定 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在，此时洛必达失效，几种常见的失效情况：

   ① 当 $x \to 0$ 时，函数式中有 $\sin\frac{1}{x}$ 或 $\cos\frac{1}{x}$

   （因为求导不能消除 $\sin\frac{1}{x}$ 或 $\cos\frac{1}{x}$，$\lim \sin\frac{1}{x}$ 不存在）

   同理，$x \to \infty$ 时，函数式中有 $\sin x$ 或 $\cos x$。

   ② 多次使用洛必达法则，极限式会现循环

   如 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$，$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

   （Kira 得意地说：以上两式均为前面提到的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，所以分子分母同时除 x 的最高次方立即出结果！答案分别为 1 和 1。）

3. 极限式中含 $\frac{1}{x^k}$，可考虑用变量代换 $t = \frac{1}{x^k}$。
   （毕竟，幂函数的导数比分数的导数好求多了）。

例10

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^x+e^{-x})-\ln(2\cos x)}{x^2}$

解：$I \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}+\dfrac{\sin x}{\cos x}}{2x}$

$\underset{\text{(化最简形式)}}{\overset{\text{化简，分离常数}}{=}} \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}+\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

$= \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times 2+\dfrac{1}{2}\times 1\times 1 = 1$

另外，在涉及抽象函数及其导数的证明题中，尝试使用洛必达会有奇效~

七 含参变量极限

啊！这个我得大谈特谈！在备考时，我是把 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n,x)$ 研究得极透彻的，整个套路非常清楚~ 考研真题果然，考了一道大题，当时的我在想，"这道题肯定要虐死一大批套路不清楚的人"，然后一步不停地写完了…… 我去年在考场上高数真的一步没停就写到底，很爽！（结果被线代的计算量搞得脑子晕了 TAT）

形式 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n,x)$，其中 n 是正整数，为极限变量，x 是函数 $f(x)$ 真正的变量，这种函数我们称"极限函数"。

极限函数一般是分段函数！一见到极限函数，脑子里立刻要闪出两字：分段！

怎么分？

(1) 当 $y(n,x)$ 中项仅为 x^n（一般是 $x^{g(n)}$，$g(n)$ 为 n 的多项式）

应以 $|x|=1$ 为分界点，因为：

当 $n\to\infty$，若 $|x|<1$，则 $x^n\to 0$，若 $|x|>1$，则 $x^n\to\infty$

(2) 当 $y(n,x)$ 中项仅为 n^x（一般为 $n^{g(x)}$，$g(x)$ 是 x 函数时，

应以 $x=0$ 为分界点，因为：

当 $n\to\infty$ 时，若 $x<0$，则 $n^x\to 0$；若 $x>0$，则 $n^x\to+\infty$

(3) 〈升级版〉当 $y(n,x)$ 中项仅为 x^n 和 a^n（一般为 $x^{g_1(n)}$ 和 $a^{g_2(n)}$）

应以 $\left|\frac{x}{a}\right|=1$，即 $|x|=|a|$ 为分界点，因为：

当 $n\to\infty$ 时，若 $|x|<|a|$，则 $\left(\frac{x}{a}\right)^n\to 0$；若 $|x|>|a|$，则 $\left(\frac{a}{x}\right)^n\to 0$

(4) 〈升级版〉当 $y(n,x)$ 中的项仅为 $a^{g(n,x)}$ 时，其中 $g(n,x)$ 是 n,x 的函数，应以 $a^{g(n,x_0)}=1$，即以 $g(n,x_0)=0$ 的 x_0 为分界点

· 复习一下，遇到极限函数问题，要仔细寻找以下形式：

x^n，n^x，x^n 和 a^n，$a^{g(n,x)}$

并对症下药，立刻找到分段点，求取 $f(x)$ 的真身（不含 n）

· 到后期，对于"$\to 0$"和"$\to\infty$"会形成感性理解，看一眼就会对题目和对策有准确判断了。

· 下面，先用例题练练手，再迎战终极Boss.

例 11

求极限函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}$ $(x\geq 0)$

解：

（Q：拿到手第一眼判断这是什么？
A：这是分段函数！分！段！函！数！是 x 的函数）

好，下面正式开始，先判形式：x^n（对应 P19 (1)）

以 $x=1$ 为分界点，当 $x=1$ 时，$f(x)=1/2$

① 当 $0\leq x<1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}=\dfrac{0}{1+0}=0$；

② 当 $x>1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^{-n}+1}=1$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}0, & 0\leq x<1\\ \frac{1}{2}, & x=1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

☆

例 12

求极限函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^n+x^{2n})}{n}$

解：

（Q：拿到手第一眼判断这是什么？
A：这是分段函数！分段函数！是 x 的函数）

判形式：a^n 和 x^n（对应 P19 (3)）

注意到 $x^{2n}=(x^2)^n$，应以 $x^2=e$ 为分界点。

① 当 $x^2=e$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(2e^n)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln 2+n}{n}=1$

② 当 $x^2<e$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln e^n[1+(\frac{x^2}{e})^n]}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\ln[1+(\frac{x^2}{e})^n]}{n}$

$=1$

③ 当 $x^2>e$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln x^{2n}[(\frac{e}{x^2})^n+1]}{n}=\ln x^2$

综上 $f(x)=\begin{cases}1, & x^2\le e\\ \ln x^2, & x^2>e\end{cases}$

（😊 Kira强调：回归 $f(x)$ 的本来面目，做题最重要是清晰！）

例11和例12是基本功，考试不会这么直白，题目层次稍有提高，思路（套路）一定要清楚！

——例13——

确定极限函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n-1}}$ 的间断点及类型。

解：

😊 Kira的嘲讽：很多没经验的同学拿到此题立刻懵逼，感觉无法下手（因为好像有太多地方需要下手，但顺序搞不清）

😊 Kira的锦囊：拿到手很嗒："$f(x)$是分段函数！"

Step 1. 求出 $f(x)$ 本体（去掉 n，只剩 x）

Step 2. 按求 $f(x)$ 间断点的常规方法来求最终结果.

解: (判: x^n 为 p_{19} (1), 以 $|x|=1$ 为分界点)

Step 1.

$g_n(x)=\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n-1}}$ 在 $x=0$, $x=-1$ 处没有定义

("没有定义"的具体表现是, 最后写"$f(x)=\{$"时, $x=0$ 和 $x=-1$ 将不会出现 (一丝莫名的恐怖...))

以 $x=1$ 为分界点, ① $f(1)=0$.

② 当 $0<|x|<1$, $f(x)=-x$

③ 当 $|x|>1$, $f(x)=x^2$

综上, $f(x)=\begin{cases}-x, & 0<|x|<1\\ 0, & x=1\\ x^2, & |x|>1\end{cases}$

Step 2.

由 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0 ;\\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1 ;\end{cases}$

$\Rightarrow$ 0 和 -1 是 $f(x)$ 的可去间断点

由 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$, 所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

Kira 感叹道：我考试时就是凭借此套路，使第一道开始加难度的高数大题对我来说毫无难度顺利答完，一笔不停。

八 数列极限

拿到数列极限往以下三个解题方向考虑。

- 将 n 连续化为 x，则根据归结原则，x 函数的极限即为数列极限。【连续化】

- 数列 $\{x_n\}$，若 x_n 已知，则求 k 项和 $u_1+u_2+\cdots+u_k$ 的极限用夹逼定理。【夹逼定理】

- 数列 $\{x_n\}$，若 x_n 未知且 x_n 由递推式 $x_n=f(x_{n-1})$ 给出，用单调有界准则，先证明极限存在，再直接求极限，即设极限为 A，代入递推式两端。【单调有界准则】

(1) 将 n 连续化为 x

例 14

求 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\frac{1}{n})^{n^2}$（$n$ 为自然数）

解：

原极限连续化为 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\cdot\tan\frac{1}{x})^{x^2}$ (1^∞)

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(x\cdot\tan\frac{1}{x}-1)} \quad (\infty-\infty)$$

$$\overset{x=\frac{1}{t}}{=} e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{t^2}(\frac{\tan t}{t}-1)}$$

$$= e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\tan t-t}{t^3}} = e^{\frac{1}{3}}$$

于是原式 $= e^{\frac{1}{3}}$

(2) 夹逼定理

😊 夹逼定理是比较讨厌的部分，变化多端，对此学员提出两个方向，可解决大部分常规夹逼题。如果这俩搞不定，说明题目确实很难了。

两个方向为：

A) 求数列$\{x_n\}$前k项和，项数有限，即可用

$$\boxed{1\cdot U_{max} \le U_1+U_2+\cdots+U_k \le k\cdot U_{max}} \quad (*)$$

(k为有限数，$U_i \ge 0$)

即"老大说了算"（作为口诀背下来）

例15

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^{-n}+b^{-n}+c^{-n}} \quad (a>b>c>0)$$

解：

有 $\sqrt[n]{(\frac{1}{c})^n} \le \sqrt[n]{(\frac{1}{a})^n+(\frac{1}{b})^n+(\frac{1}{c})^n} \le \sqrt[n]{3(\frac{1}{c})^n}$ $\quad 0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<\frac{1}{c}$

$$\begin{array}{ccccc} \lim\limits_{n\to\infty} \| & & & & \| \lim\limits_{n\to\infty} \\ 1/c & \Rightarrow & 1/c & \Leftarrow & 1/c \end{array}$$

所以极限为 $1/c$

* 例15中，$(\frac{1}{c})^n$是老大，套用(*)式，故有两端形式.

B) 求数列$\{x_n\}$的无穷项之和，则用

$$\boxed{k\cdot U_{min} \le U_1+U_2+\cdots+U_k \le k\cdot U_{max}} \quad (**) \quad (k\to\infty)$$

即"人多力量大"（在无穷大的k的作用下，U_{min}和U_{max}的差距可忽略不计）

例16.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$$

解：

有 $$\frac{\frac{1}{2}n(1+n)}{n^2+n+n} \le \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+i} \le \frac{\frac{1}{2}n(1+n)}{n^2+n+1}$$

$$\begin{array}{ccccc} \| & & & & \| \\ \frac{1}{2} & \Rightarrow & \frac{1}{2} & \Leftarrow & \frac{1}{2} \end{array}$$

所以极限为 $\frac{1}{2}$.

这是乌哥的一道例题，有的同学可能比较困惑"为何没有(**)式中所写的k呢？"其实有的！ $k=\frac{1}{2}n(1+n)$，也就是 $1+2+\cdots+n$，也就是说，例16本质上不是n项和，而是 $\frac{1}{2}n(1+n)$ 项和！而 $U_{min}=\frac{1}{n^2+n+n}$，$U_{max}=\frac{1}{n^2+n+1}$。

设计悬疑

讲到这里，题目就十分明确了。

夹逼定理还有很多分类和对象，如我下7框架所示。为保证框架紧凑，我们先看第B)个方向，再来补充夹逼定理。

B) 利用单调有界准则

▲ $\left.\begin{array}{l}\{x_n\}\uparrow 且有上界\\ 或\ \{x_n\}\downarrow 且有下界\end{array}\right\}$ 则 $\{x_n\}$ 一定收敛 $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}x_n$ 存在.

例17

设 $a>0$，$x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{a}{x_n^2}\right)$，$n=1,2,\ldots$

证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim_{n\to\infty}x_n$

8′　　　2′（2分送你！）

Pf. $x_{n+1}=\frac{1}{3}(x_n+x_n+\frac{a}{x_n^2})$ $(\sqrt[3]{abc}\le\frac{1}{3}(a+b+c))$

$\ge\sqrt[3]{a}$ 有下界

题出得妙!

$x_{n+1}-x_n=-\frac{1}{3}x_n+\frac{a}{3x_n^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a-x_n^3}{x_n^2}\le 0$ (因为 $x_n\ge\sqrt[3]{a}$)

单调递减 $\Rightarrow$ 收敛

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，令为 A，则 $A=\frac{1}{3}(2A+\frac{a}{A^2})\Rightarrow A=\sqrt[3]{a}$ ※

😊 "找下界(上界)"和"证单调"都是必考的硬功夫，其中"找上下界"非常常用基本不等式，即

$$\boxed{\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)\ge\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}\ ☆$$

去得新下界

补(4) 利用定积分定义 $\int_a^b f(x)dx\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(a+\frac{b-a}{n}i)\cdot\frac{b-a}{n}$

😊 有时夹逼夹不住，可考虑用定积分定义，非常有规律，很好判断，16刚考过一道填空。
(而我，下笔把 $\cos 1$ 写成了1，4分没了…
考场一定冷静！)

▲ 宇哥的套路极好，清晰，易记!

· 99%的概率下题会出成这样：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$

套路如下：step1. 提出 $\frac{1}{n}$ (一定能!)

step2. 凑出 $\frac{i}{n}$ (一定能! 否则题出错了)

step3. $\frac{1}{n}$ 写成 dx，$\frac{i}{n}$ 写成 x.(相当于照抄)

Over!

例18

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$

解：

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}\overset{\text{step1}}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\overset{\text{step3}}{=}\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$

【一定要用 i 和 n 写出来先】　先写 $\frac{1}{n}$，再慢慢算剩下什么　※

再来道考场的题：

例19

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$　⇨ "见到 $\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n}{n}$ 会往定积分定义想"

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$　⇨ 遇连乘万年不变的套路是变 $e^{\sum\ln}$

$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}}=e^{\int_0^1\ln x\,dx}=\frac{1}{e}$　※

番外篇：①数列极限及夹逼定理的补充

关于数列极限 n 项和、n 项积的相关题型真心又臭又多，老大认为钻研的话，时间利用的性价比太低，所以此番外掌握最好，没时间的话，也可直接跳过不看。

在P7、8中我已列出3大类题目及其简单对策，下面结合具体例题展开。

1. 含乘阶、乘方　($n, n^2, \cdots, n^k, \cdots$)

(1) 次数不均　($n+n^2+n^3+\cdots$ 与 $(n+1)^2-n^2$ 相对)

采用"老大说了算"法。（和P24 A）一个本质）

例20

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+n}$

解：

由于 $\sqrt[n]{n^2} \le \sqrt[n]{n^2+n} \le \sqrt[n]{2n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}$ ‖ 　　　　　‖ $\lim\limits_{n\to\infty}$

1 $\Rightarrow$ 1 $\Leftarrow$ 1

所以极限为1 ☆

1.2 次数同 再作差

💡 提公因子 + 放缩法 + 夹逼定理

例 21

$\lim\limits_{n\to\infty} [(n+1)^k - n^k]$ 　　$(0<k<1)$

解：

$0 < (n+1)^k - n^k = n^k[(1+\frac{1}{n})^k - 1] < n^k[(1+\frac{1}{n}) - 1]$

$= n^k \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{1-k}} \to 0$

所以原极限为0。 ☆

小贴士 提示：遇到稀奇的作差题干，可尝试提公因子，很好用，番外篇②还会再讲。

2. 通项为n项和

2.1 表达式可求

💡 求出n项和表达式，再求极限。

▲ 求n项和表达式方法
- 等比数列求和公式、等差数列求和公式
- $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
- 分项相消

给两个操作掌握的分项式： 　　（每天感慨！）

- $\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$

- $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

例22

设 $y_n=(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots\cdots(1-\frac{1}{n^2})$，求 $\lim_{n\to\infty}y_n$

〈解一〉

注意到 $1-\frac{1}{k^2}=\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}\quad(k=2,3,\cdots)$ 因

$y_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\cdots\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2n}\longrightarrow\frac{1}{2}$

故 $I=\frac{1}{2}$

〈解二〉取对数，有 $\ln y_n=\sum_{k=2}^{n}\ln(1-\frac{1}{k^2})$ 因

$\ln(1-\frac{1}{k^2})=\ln(k^2-1)-\ln k^2$

$=\ln(k+1)+\ln(k-1)-2\ln k$

（消到剩两头）⇨ $=[\ln(k-1)-\ln k]-[\ln k-\ln(k+1)]$

$\therefore\ \ln y_n=-\ln 2-[\ln n-\ln(n+1)]$

$I=\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}e^{\ln y_n}=e^{-\ln 2}=1/2$.

- 以上为"$1-\frac{1}{k^2}$"的两种处理方法.
在平常做题时，也要注意多归纳一些有特色形式的处理套路，建立做题熟练度和手感. ~. ☺

2.2 表达式不可求

"人多力量大"法.

3. 通项为n项积、 ← (3.3)

3.1 把每个因子合并或拆开，并把中间的项消掉

例23

设 $y_n=1+\frac{1}{1+2}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+n}$，求 $\lim_{n\to\infty}y_n$.

解：

由 $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

且 $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$　所以

$$y_n=1+\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}$$
$$=1+2(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$
$$=1+2(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1})$$

从而 $I=2$

※

方法2 等式两边同乘一个因子，然后"蝴蝶效应"。

例24

设 $|x|<1$，$y_n=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdot\cdots\cdot(1+x^{2^n})$，求 $\lim_{n\to\infty}y_n$

解：

$$\underset{\text{左写}}{(1-x)}y_n=\underset{\text{左写}}{(1-x^2)}(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$$
$$=(1-x^4)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$$
$$=\cdots=(1-x^{2^{n+1}})$$

当 $|x|<1$ 时　$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x}(1-x^{2^{n+1}})=\frac{1}{1-x}$

※

方法3. 取对数化n项和（最直接，最好用）

（如例22）

- 不能化简则用夹逼定理.

· 放大和缩小函数的常用方法

① 直接观察或简单推算 (如例20、例21)

② "人多力量大"模型： $k\cdot U_{min} \le U_1+\cdots+U_k \le k\cdot U_{max}$

③ 分母放大比值缩小，分母缩小比值增大

④ 若干正数相乘，略去小于1因子放大，略去大于1因子则缩小

⑤ 利用已知不等式

番外篇② 其它不会类的有套路题型 (小众套路)

A) $\ln$ (一堆项相加) 的处理方法

方法：提取 $e^{\text{功}}$ 因式，立刻初始！

例25

求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})-\sin x}{\arctan(2\sqrt[3]{1-\cos x})}$

解： $\ln(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})$

$=\ln\left(e^{\sin x}\left(1+\dfrac{\sqrt[3]{1-\cos x}}{e^{\sin x}}\right)\right)$ ⇨ 把 $e^{\text{功}}$ 提出来

$=\sin x+\ln(1+\sqrt[3]{1-\cos x}/e^{\sin x})$

所以 $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{1-\cos x}/e^{\sin x})}{\sqrt[3]{1-\cos x}/e^{\sin x}}\cdot\dfrac{1}{2e^{\sin x}}\cdot\dfrac{2\sqrt[3]{1-\cos x}}{\arctan(2\sqrt[3]{1-\cos x})}$

$=1\cdot\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$

我们常会遇到 $\ln(e^{\text{功}}+\sqrt{\ }+\times\times)$ 这种形式，

提取 $e^{\text{功}}$ 因式的好处在于：①"功"可以拿到 $\ln$ 外，

如例25的 $\sin x$；②得到 $\ln(1+\times\times)$ 标准形式~

总之，有形式垃圾的加加减减，多提公因式有好处！

B）超越函数的极限. x^x，$\sin^x x$，……

方法：综合使用多种技巧. 先写成指数函数 $e^{\dots x\ln\dots}$

例26

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^x-\sin^x x}{x-\arctan x}$$

解：

$$I=3\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^x x\left[\left(\frac{x}{\sin x}\right)^x-1\right]}{x^3}$$

[kira教导的好习惯：提公因式！！！]

[汤神教导的好习惯：Pro. 把系数早早提前！！！]

由 $\lim_{x\to 0^+}\sin^x x=e^{\lim_{x\to 0^+}x\ln\sin x}=e^{\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln\sin x\cdot\frac{x}{\sin x}}=e^{0\cdot 1}=1$

[PS: 关于 $x\ln\sin x$ 的简单思路说一下，因为 P 中说过 $\lim_{x\to 0}x^a\ln x=0$，所以当看到 $\ln\sin x$，便自然去凑 "$\sin x\ln\sin x$" 这样多外的因子自然为 $\frac{x}{\sin x}$ 极限可求]

$$I=3\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln\frac{x}{\sin x}}-1}{x^3}=3\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln\frac{x}{\sin x}}{x^3}=3\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{\sin x}-1}{x^2}$$

$$=3\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\sin x}{x^3}=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

[PS: 在 $\lim_{x\to 0^+}\ln\frac{x}{\sin x}$ 这一步中，我们自然用到前面 P 所给的 $\lim_{u\to 1^+}\ln u=u-1$. 这个极限式无比好用无比快速！！！]

kira：要想计算玩得转，大小公式先背烂～

再通过做题，将理论用于实践. 我不太喜欢"背"这个

字眼，我喜欢"内化"，将公式内化，使它成为如你手足般自然的工具。运用公式，如你平日里呼吸吃饭睡觉那样，无知无觉。

B) 关于"能不能拆"的两个案例（取材于kira以前的答疑）

案例1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3} - \dfrac{\cos x}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\cos x}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

✗

案例2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+3^x-2}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x} + \dfrac{3^x-1}{x}$

$= \ln 2 + \ln 3$

✓

（而正确答案采用洛必达法则，得出结果 $\frac{1}{3}$。）

（😀 kira：要完成"拆"这个动作把握2个原则

① 拆开的两部分必须各自存在极限。
（案例一拆后是 $\infty - \infty$ 了）

② 拆开了就不要再合上！一拆到底。）

「大王小王篇」之

求导计算

· 本Part的解锁条件：求极限小case.
· 本Part的特别关注：P37 最后2行　P41 方框
（看到即赚到）　▲ P45 kira大锦囊　P47 ②
· 本Part的弥点：老生常谈的概念可略过.

在本部分中，你必须熟练记忆运用以下公式和结论

1 导数定义

$$\begin{cases} \text{大纲：} & f'(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} & ① \\ \text{补充：} & f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & ② \\ \text{左导数：} & \lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\triangleq f'_-(a) & ③ \\ \text{右导数：} & \lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\triangleq f'_+(a) & ④ \end{cases}$$

kira强调：以上4个定义式必须"看到左边自动换出右边，看到右边自动换出左边"，熟练到此！！！

kira傅陶：考试没思路时，先把定义式写出来，玩弄一下，思路就有了。看例题↓

例1

设 $f(0)=0$，$\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(k-\sin k)}{k^2}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在否？

脑补 $f'(0)=\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{f(0+\square)-f(0)}{\square}$ ⇦ 看着④写，□里把条件凑

解：

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(k-\sin k)}{k^2}=\lim_{k-\sin k\to 0}\frac{f(0+k-\sin k)-f(0)}{k-\sin k}\cdot\frac{k-\sin k}{k^2}$$

摆已知条件　　凑 $f'(0)$　　剩余部队

即 $\exists = f'(0)\cdot 0$（无穷小）

移项得 $f'(0) = \exists \cdot \infty$，所以不存在 $f'(0)$

*补充：若有 $\exists = f'(0)\cdot \frac{1}{6} \Rightarrow f'(0) = 6\cdot\exists = \exists$

若有 $\exists = f'(0)\cdot\infty \Rightarrow f'(0) = \exists\cdot 0 = 0$

2 求导工具

（一）公式：

必背基本初等函数求导

高中部（我都懒得写）

- $(x^a)' = ax^{a-1}$　　　　• $(c)' = 0$
- $(\sin x)' = \cos x$　　　　• $(\cos x)' = -\sin x$
- $(a^x)' = a^x \ln a$　　　　• $(e^x)' = e^x$
- $\log_a^x = \frac{1}{x\ln a}$　　　　• $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

考研部（必背组）

- $(\tan x)' = \sec^2 x$　　　　• $(\cot x)' = -\csc^2 x$
- $(\sec x)' = \sec x\tan x$　　　　• $(\csc x)' = -\csc x\cot x$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　　　• $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$　　　　• $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

考研部（选背神器）

- $[\ln(x+\sqrt{x^2-1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$　（要敏感而警觉!!）
- $(\sin^2 x)' = \sin 2x$
- $(\cos^2 x)' = -\sin 2x$
- $(\sin x\cos x)' = \cos 2x$

(二) 四则运算.

高中部分:
- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

高阶 $(uv)^{(n)} = C_n^0 u^{(n)} v^0 + C_n^1 u^{(n-1)} v' + \cdots + C_n^n u^0 v^{(n)}$

(三) 链式法则

若 $y = f(u)$ 可导，$u = \varphi(x)$ 可导 $\varphi'(x) \neq 0$

则 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

★(四) 反函数的导数 ("很多学生不适应")

1. $y = f(x)$ 可导，$f'(x) \neq 0$，则 $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

2. $y = f(x)$ 二阶可导，$f'(x) \neq 0$，$x = \varphi(y)$ 为反函数.
$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$，$\varphi''(y) = \frac{d\left[\frac{1}{f'(x)}\right]}{dy} = \frac{-f''(x)}{[f'(x)]^3}$

(☺ kira 肯定地说：1必须背熟，2实在背不下就算了)

● 求导运算出现在考研中属于送分题，之所以出现在《大主小主篇》这么重要的篇章，也纯粹是为不丢那部分分打基础，做热身的.

● 在求导运算部分，你最重要的任务是"背公式"!!!
背到什么地步？答：看到左边就想到右边，看到右边想到左边!

正片开始！必会题型如下

一. 显函数求导

二. 隐函数求导
- ① 常规 ($y=f(x)$ 不必回代)
- ② 对数求导法 (幂指函数、连乘积)
- ③ 参方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ or $\begin{cases} F(x,t)=0 \\ G(y,t)=0 \end{cases}$

▲ 三. 变积分限函数求导 (必考) (好玩儿！)

四. 分段函数求导问题

五. 高阶导数
- ① 归纳法
- ② 分解法
- ③ 莱布尼茨公式
- ④ 幂级数展开 (Taylor法)

一 显函数求导

(没有难度，但务必小心看住，复合层次多了容易懵.)

例 1

$y=2^{\sin^2\frac{1}{x}}$，求 y'

解：$=2^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\ln 2\cdot\left(\sin^2\frac{1}{x}\right)'$ (用 $(a^x)'=a^x\ln a$)

$=2^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\ln 2\cdot 2\sin\frac{1}{x}\left(\sin\frac{1}{x}\right)'$ (用 $(x^2)'=2x$)

$=2^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\ln 2\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)'$ (用 $(\sin x)'=\cos x$)

$=2^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\ln 2\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ (用 $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$)

Kira备注：考试时卷面直接写最后一行结果即可

二 隐函数求导

隐函数求导我一直觉得做起来很舒服直白，不难。关键把握好谁是自变量，谁是谁的函数。

(1) 常规隐函数求导程序

step 1. 首先，将方程两端同时对 x 求导数，得到关于 y' 的方程。
step 2. 再由该方程解出 y' 即可。

例2
设 $e^{xy}+\tan xy=4x+y$，求 $y'(0)$？
解：
方程两端同时关于 x 求导，有

$$e^{xy}\cdot(xy'+y)+\sec^2 xy\,(xy'+y)=4+y' \quad (*)$$

将 $x=0$ 代入原式，有 $e^{0\cdot y}+\tan 0\cdot y=4\cdot 0+y$
$\Rightarrow x=0$ 时，$y=1$，代入 $(*)$ 时，
$\Rightarrow y'(0)=-2$

Kira备注：
1. 例2是隐函数求导最典型的应用，务必利用好原式的直接代入，得到特殊点处 y 值（如上例 $y(0)=1$）
2. y 是 $y(x)$ 的简写，本质是关于 x 的函数，求导时

要用"层层剥开"原则来对待，如 $\tan y$ 关于 x 求导的结果为 $(\tan y)'\cdot y'$。虽然 $\tan y$ 不显含 x，但求导时应体现 x 的存在）

(2) 对数求导法.

（Kira 回顾：遇到指数和连乘取对数已是我在极限部分就总结过的老生常谈啦！一定要会！！！）

方法操作：将 $y=f(x)$ 两端取对数，再按(1)操作.

适用于 ① 形如 $y=f(x)^{g(x)}$ 的幂指函数，取对数得 $\ln y = g(x)\ln f(x)$

② 若干因子幂的连乘积，取对数可化为和、差运算.

如 $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{(x+1)^3(4-x)^2}$ 可看成 $y=(x-2)^{\frac{1}{2}}(x+1)^{-3}(4-x)^{-2}$

取对数化为 $\ln y = \frac{1}{2}\ln(x-2)-3\ln(x+1)-2\ln(4-x)$

再求导可简化很多.

(3) 参数方程求导.

形如 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} F(x,t)=0 \\ G(y,t)=0 \end{cases}$

（求法不需要死记硬背，几步就可以推出来，理解即可）

· $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi(t)}$ ； · $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]/dt}{dx/dt}$

例3

曲线 $L: r=\theta$，求 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 对应 L 上点处的切线。

解：

$$L:\begin{cases} x=\theta\cos\theta \\ y=\theta\sin\theta \end{cases}$$

当 $\theta=\frac{\pi}{6} \Rightarrow M_0\left(\frac{\sqrt{3}}{12}\pi,\ \frac{\pi}{12}\right)\in L$

斜率 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}$

已得斜率 $\frac{dy}{dx}$ 和 M_0，则切线方程可求。

三 变限积分函数求导

（kira感叹道：这是考研必考的求导类型!!!

长得不好看（看起来复杂），但其实很好做，也很好玩。

在中值定理部分有大量应用，属于应该"做到看眼都要会算结果"的题型）

以 $\frac{d}{dx}\int_0^x x\sin(x-t)^2dt$ 为例

公式为 $\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f(\psi(x))\psi'(x)$

★注意 ① 整个公式本质上是关于 x 的导数，最后结果也仅含 x

② 积分上下限均仅含 x 的函数

③ 被积函数仅含 t（不允许含有一丁点 x 的成分）

解:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x x\sin(x-t)^2\,dt$$

▶ <u>step 1. 找t. 并调整 dt</u>

（t存在于 $\sin(x-t)^2$ 中，x并不能直接搬到积分号外，而为了求导，积分号内必须不能有x，所以要把 dt 变一下，使x被"偷梁换柱"）

$$I=\int_0^x -x\sin(x-t)^2\,d(x-t)$$

（这种玩法我们在下一部分：不定积分中会不断强调运用，直到你信手拈来~）

▶ <u>step 2. 把x移出去.</u>

$$I=-x\int_0^x \sin(x-t)^2\,d(x-t)$$

▶ <u>step 3. 换元，使被积函数仅有t.</u>

$$I=-x\int_x^0 \sin t^2\,dt = x\int_0^x \sin t^2\,dt$$

（将 t 从 0 积到 x，即相当于把 x-t 从 x 积到 0，
即：$\int_x^0 \to \int_{x-0}^{x-x}$ 即 $\int_x^0$

我做定积分最喜欢玩上下限了，觉得是见证奇迹的时刻！）

千万不要忘记换上下限哦!!!!!!

▶ Step 4. 套公式求导

$$\frac{dI}{dx} = x\sin x^2 + \int_0^x \sin t^2\,dt$$

※

(p.s. ① $\int_0^x \sin t^2 dt$ 视为关于 x 的函数，所以上式本质用的是 $(x\varphi(x))' = \varphi(x) + x\varphi'(x)$

② $\frac{d}{dx}\int_0^x \sin t^2\,dt$ 套用公式详细点写就是

$\sin x^2 \cdot x' - \sin 0^2 \cdot 0' = \sin x^2$

再举例如 $\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} \sin t^2\,dt$

$= \sin(x^2)^2 \cdot (x^2)' - \sin x^2 \cdot x'$

$= \sin x^4 \cdot 2x - \sin x^2$)

(Kira：如果这块还玩不转，请微博私我 @Kira言加信 或旺旺私我，我会提供视频讲解)

例4

$f(x) \in C[0,1]$，$F(x) = \int_0^1 |x-t| \cdot f(t)\,dt \quad (0<x<1)$

求 $F''(x)$？

解：

$$F(x) = \int_0^x (x-t) f(t)\,dt + \int_x^1 (t-x) f(t)\,dt$$

$$= x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x t f(t)\,dt$$

$$+ x\int_1^x f(t)\,dt - \int_1^x t f(t)\,dt$$

$= \cdots$

※

(p.s. 用上例主要想说明两点：

① 绝对值符号并不可怕，一定不要被吓到。

分好正负，把 $\int_0^1$ 变 $\int_0^x + \int_x^1$，去掉绝对值号即可。

② 这里 $(x-t)$ 的处理不是将 $dt \to d(x-t)$，是因为 x 完全可以搬到积分号外。做题目一定要抓住本质，明确自己每一步要达到的效果到底是什么。)

四 高阶导数

· 掌握以下三道例题即可。

★ 公式要背的！考前背一背，临考搞一搞，平时不必自己闭眼能写。

- $(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$
- ▲ $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$
  - $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$
  - $\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$
- $[\sin(ax+b)]^{(n)} = a^n \sin(ax+b+\frac{\pi}{2}n)$
- ▲ $(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx+n\cdot\frac{\pi}{2})$
- ▲ $(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx+n\frac{\pi}{2})$
- $[(x+x_0)^m]^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)(x+x_0)^{m-n}$
- $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

(1) 归纳法。

求出函数的一阶、二阶、三阶导数后，归纳规律，直接写出 n 阶导表达式，再用归纳法证明。

（上面的公式都可用归纳法求出）

(2) 分解法或间接法

例5

$y=\frac{5x-1}{x^2-x-2}$，求 $y^{(n)}(0)$

解：

$y=\frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}$

$A(x-2)+B(x+1)=5x-1 \Rightarrow A=2,\ B=3$

$y=2\cdot\frac{1}{x+1}+3\cdot\frac{1}{x-2}$

$y^{(n)}=2\cdot\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}+3\cdot\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$

☆

(Kira 大锦囊：★★★★★

关于求A、B的方法一定不能笨！3秒内搞定!!!

例如：

$A(x-2)+B(x+1)=5x-1$

step 1. 将 $x=2$ 代入 $\Rightarrow 3B=9 \Rightarrow B=3$

step 2. 将 $x=-1$ 代入 $\Rightarrow -3A=-6 \Rightarrow A=2$

Over了！有懂没？就是代特值，并使一项为0。不需再傻傻拆括号了~)

(3) 莱布尼兹公式法

$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$

当函数由两函数乘积构成时可以考虑。特别是，有一因子为次数较低的多项式时，用莱布尼茨公式，其展开所导

全为0 则求导结果将有多项为0.

例 6

$y=x^3\sin x$ ，求 $y^{(18)}(0)=?$

解: $y^{(8)}=C_8^0x^3\sin(x+\frac{8\pi}{2})+C_8^1\cdot 3x^2\sin(x+\frac{7\pi}{2})+C_8^2 6x\sin(x+\frac{6\pi}{2})$
$+C_8^3\cdot 6\sin(x+\frac{5\pi}{2})+0+0+\cdots+0$
$=6\cdot\frac{8\times7\times6}{3\times2}\cdot1=336$

(4) 幂级数展开 (Taylor法)

例 7

$y=x\ln(1+x^2)$ ，$y^{(25)}(0)$

解:

$y=x(x^2-\frac{x^4}{2}+\cdots-\frac{x^{24}}{12}+o(x^{24}))$
$=x^3-\frac{x^5}{2}+\cdots-\frac{x^{25}}{12}+o(x^{25})$

所以 $\frac{y^{(25)}(0)}{25!}=-\frac{1}{12}$ ，$y^{(25)}(0)=-\frac{25!}{12}$

(关于多项式求导可以看出前面的项都没有了)

五 分段函数求导问题

step 1. 在各部分区间用公式求导（即在"导数铁定存在"的区间）

step 2. 分段点处用以下两种方式（二选一）

- 定义法　（直接写 $f'(x_0)$ 定义式 or 分别求 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 判 $f'(x_0)$ 的存在性）　[见例8]
- 用导数在 x_0 处左右极限确定左（右）导数，即 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$, $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$　[见例9]

step 3. 写 $f'(x)$ 的表达式　（通常是分段的）

（注意：在使用 step 2 第二种方法时，必须明确两点
① 先判断 $f(x)$ 在 x_0 处的连续性，必须连续！
② 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 不存在，不能断定 $f'(x_0)$ 不存在
比如振荡函数．）

例 8

已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}, & x>0\\ 2, & x=0\\ 2\cos x, & x<0\end{cases}$，求 $f'(x)$

解：〈step 0〉

$f(0+0)=2$, $f(0)=2$, $f(0-0)=2$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

<step 1> $x>0$, $f'(x)=\dfrac{\frac{2x}{1+2x}-\ln(1+2x)}{x^2}$; "(先加着)"

$x<0$, $f'(x)=-2\sin x$

<step 2> $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\ln(1+2x)}{x}-2}{x}$

$=4\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+2x)-2x}{(2x)^2}$ "注意 $2x$ $\boxed{统一}$ 手法!!!"

$=4\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2}=-2$

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cos x-2}{x}=0$

$\Rightarrow f_+'(0)=-2$, $f_-'(0)=0$

$\therefore f'(0)$ 不存在.

<step 3> $\therefore f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\frac{2x}{1+2x}-\ln(1+2x)}{x^2}, & x>0\\ -2\sin x, & x<0.\end{cases}$

(step 0 是规定动作。只要遇到分段函数求导题，一上来先判分段点处连续性. 不连续的话，后面一大串都不必求了.)

例 9

设函数 $f(x)$ 可导且导函数连续，$F(x)=f(x|x|)$，求 $F'(x)$

解:

将 $F(x)$ 写成分段函数 $F(x)=\begin{cases}f(-x^2), & x<0\\ f(x^2), & x\geq0\end{cases}$

当 $x\neq 0$ 时，$F'(x)=\begin{cases}-2x\ f'(-x^2), & x<0\\ 2x\ f'(x^2), & x>0\end{cases}$

当 $x=0$ 时，注意到 $f(x)$，$f'(x)$ 均连续，因

$$\begin{cases}F_-'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}F'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}[-2xf'(-x^2)]=0\cdot f'(0)=0\\ F_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}F'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}[2xf'(x^2)]=0\cdot f'(0)=0\end{cases}$$

故 $F'(0)=0$

于是 $F'(x)=\begin{cases}-2xf'(-x^2), & x<0\\ 2xf'(x^2), & x\geq 0.\end{cases}$

$\star$

（ Kira 评析：这道题的思想方法非常好，点睛之笔是 $f(x)$ 可导且导函数连续，请用心体会！ ）

「大王小王篇」之

不定积分

- 本Part的解锁条件：背熟求导公式。
- 本Part的特别关注：▲P54 一、 P58 [注记]
（看到即赚到） P65 "表格积分法"
P70 ⑥〈注二〉
- 本Part的难点： 全程无难点！如果你能深谙P54 一的精髓和渗透在每一道例题中的手法，也不枉我苦口婆心这一大堆了。

Kira 前言:

不定积分是我在整个高数复习中最倚重的部分.
这块练不好其他都免谈. 不要以为这块"看似"属于基础就快速略过,也不要以为别人会觉得不定积分轻松。一点都不轻松!不定积分是最值得你拿出一大段时间什么都不做来专门搞定的!一定要非常重视!

几乎所有你感到不舒服的章节,比如级数,比如多重积分,比如反常积分,你感到不舒服的原因都可由以下两点解释:第一,你极限差点意思;第二,你积分差点意思.

这就是我单开一篇专门强化你们计算的原因.

在不定积分部分中,我将夹带非常多私货,倾囊相授.并参考张宇,汤家凤,张仕诚,解题技巧书,我的本科教授的笔记等… 力求透彻,并达到足够强的洗脑效果.

Let's Party!

在本部分中,你必须熟练记忆运用以下公式.

烂熟组

$$\int k\,dx = kx+C \qquad \int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq-1)$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C \qquad \int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C \qquad \int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C \quad (a>0 \text{ 且 } a\neq 1)$$

- 烂熟组(三角函数)
  ① $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$
  ② $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$
  ③ $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$
  ④ $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + c$
  ⑤ $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
  ⑥ $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

- 考前背一背组(这年多都考)
  ① $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$
  ② $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + c$
  ③ $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$
  ④ $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$
  ⑤ $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + c$

- 考前背一背组(三角函数)
  ① $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c$ → ($\tan = \frac{\sin}{\cos}$ 自己推)
  ② $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + c$ → (不背现推也OK!)
  ③ $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$
  ④ $\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$

kiTa 备注:

- "烂熟组"要像吃饭喝水一样熟悉、亲切、自然;
- "考前背一背组"使用频率非常高，但不必每时每刻都记住公式，只需记得左边的形式可以给某种结果找左边形式，凑左边形式，才是应关注的重点。

所谓"考前背一背进"，即背下最好，背不下不必有负罪感。自己根考前，最后上考场前，想背一波，即可。

- 运算法则

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int (kf(x))\,dx = k\int (f(x))\,dx \qquad (k\neq 0)$$

- 不定积分性质

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

$$\int F'(x)\,dx = F(x)+C$$

$\boxed{\text{正式开始！不定积分总纲}}$

一、第一类换元法（解积分题的精髓！决定性步骤！）

二、第二类换元法
- ① 无理 → 有理
- ② 三角函数替换
- ③ 倒替换、指数替换

三、分部积分法
- ① $\int x^n \cdot \begin{cases} e^x \\ \ln x \\ \text{三角} \\ \text{反三角} \end{cases} dx$
- ② $\int e^{ax} \begin{cases} \cos bx \\ \sin bx \end{cases} dx$
- ③ $\int \sec^n x \,(\csc^n x)\,dx$ （n为奇数）

四、有理函数积分 — 分项积分（没有办法的办法）

☆ 三 第一类换元法

> 不定积分计算的做题速度，手法老道，火眼金睛等各项功力，皆体现于此！
>
> 简言之，就是一个词：找 $d\varphi(x)$！

- 洗脑开始：

1. dx 不是 dx，它可以是 $d(x+2)$，可以是 $d(x-3)$；

题如果是 $\int (x+2)^2 dx$，它就是 $d(x+2)$；

题如果是 $\int \sin(x-3)\,dx$，它就是 $d(x-3)$；

有感觉吗？这是习惯！

2. 看到 $\int \frac{\sin 2x}{2+\sin^2 x}dx$ 立刻变 $\int \frac{d(\sin^2 x+2)}{2+\sin^2 x}$

看到 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ 立刻变 $2\int \frac{d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}$

有感觉吗？这是习惯！

▲ 我们的追求只有2个字：统一！统一！统一！

你要积什么，就要努力把 d 后变成它的样子，

努力想象前面长得像谁的导数，再把 d 后变成它。

▲ 找到了 $d\varphi(x)$，等于这道题已解，找 $d\varphi(x)$ 是第一要务！

▲ 这种"统一之美"是做数学的神器，也是我从汤神那学来的最精华的套路!!! 汤哥也说了："对于 $\int f(x)dx$，$f(x)$ 越复杂，我们越高兴。因为导数好找！

第一类换元法往往出题灵活，需要积累经验套路.
下面我们跟着例题来走一下各种奇形怪状问题和惯用解题伎俩.

• 先来几道不需换元的热身题，进入积分状态.

例1

1) 求 $\int \tan^2 x \, dx$

解: $I = \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \tan x - x + C$

2) 求 $\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx$

解: $I = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} dx = \int (\cos x - \sin x)\, dx = \sin x + \cos x + C$

3) 求 $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)} dx$

解: $I = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$

（Kira备注: 以上例题取自我本科数分课课堂笔记.
老师给了24道例题，循序渐进非常好用.
刷完这24道后，大部分积分题都不在话下.
我也会在宝典中和大家分享.

以上三道题目都是入门级的，但又绕了些小弯，
处理原则是"裂项"，即争取增加项数，
使原式化为易求积分的经典形式 ）

· 开始闯到第一类换元法. $\begin{cases} \text{A. 玩根号} \\ \text{B. 玩三角函数} \\ \text{C. 玩 } e^x \text{家族} \end{cases}$

A. 玩根号"$\sqrt{\ }$"　（x不是x，是$(x^{\frac{1}{2}})^2$　）

例2

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$

解:

〈法一〉 $I = 2\int \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{2^2-(\sqrt{x})^2}} = 2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}+C$　（最快！）

〈法二〉 $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{2^2-(x-2)^2}} = \arcsin\frac{x-2}{2}+C$

（😊 kira备注：宇哥关于根号有个非常形象的说法，即区分"真根号"和"假根号"，能配方的就是假根号，配方后可套P12的平方和差公式或用三角函数换元法，而真根号不能配方，整体换$\sqrt{\ }$为t　）

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

解:

$I = 2\int \frac{d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} = 2\arctan\sqrt{x}+C$

（😊 kira再强调：拿到手就写2倍，计算习惯尽早养成！P10我强调过了　）

B. 玩三角函数 "$\int \sin^m x \cos^n x\, dx$"

分两种情况求积分：

① 当 m, n 均为偶数，用三角公式降幂，化为易求积分的函数，即用：

$$\begin{cases} \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} \\ \sin x \cdot \cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$$

② 当 m, n 中至少有一个为奇数，则问题就更简单了～

如 $m = 2k+1$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, L)$，则

$$\int \sin^{2k+1}x \cdot \cos^n x\, dx = -\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x\, d(\cos x)$$

被积函数化为关于 $\cos x$ 的多项式，可求出结果。

例3

1) 求不定积分 $\int \cos^2 x\, dx$

解：

$$I = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\int 1\, dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, d(2x)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$$

※

（ ㅂ kira 再次洗脑：写 $\int \cos 2x\, dx$ 时，我情不自禁就写成了 $\frac{1}{2}\int \cos 2x\, d(2x)$，养好习惯，天下没有难解的积分！

▲ p.s. 书写时，$\frac{1}{2}$ 最后补在前面，有机会视频演示～

整本教推宝典教会你这一个习惯都值了！！！ ）

2) 求不定积分 $\int \cos^2 x \sin^3 x\, dx$

解: $I=\int \cos^2 x(\cos^2 x-1)\,d\cos x$

$=\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$

C. 搞 e^x 家族 (要会在 e^x, e^{-x}, e^{2x} 间自如切换)

题型: ① $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}}dx$，分子分母乘 e^{-x}

② $\int \frac{\sqrt{e^x-1}}{\sqrt{e^x+1}}dx$，$\int \sqrt{1+e^x}\,dx$，分子有理化.

☆一个 kira 原创的，自己一瞬间来灵感总结的重磅结论：

我们做题遇到根号常常一会儿分子有理化，一会分母有理化，那么怎么判断自己到底该用分子有理化还是分母有理化呢???

kira告诉你(当$\sqrt{\ }$单独出现作为因式)：

- 积分世界，$\sqrt{\ }$全放分母 (分子有理化)
  如例4. 2) 3)
- 求导世界，$\sqrt{\ }$全放分子 (分母有理化)

(原因，自己结合公式和你做题的被坑史就知道了...
若求导分母有根式则计算将变得非常麻烦.
而积分计算中，分母有根式的情形显然更多)

(但是"$\sqrt{\ }+\sqrt{\ }$"或"$\sqrt{\ }+x$"这种加式，无论在分子分母都很讨厌
需根据实际有理化， 如例5
在分子就有理化分子，
在分母就有理化分母，直至算出结果；通常用平方差公式 or 第二类换元来有理化)

例4

1) $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}}dx$

解：

分子分母分别乘 e^{-x}

$I = -\int \frac{1}{\sqrt{e^{-2x}+1}}de^{-x} = -\ln(e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}+1})+C$

$= x-\ln(1+\sqrt{1+e^{2x}})+C$ ☆

2) $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx$

解：

先分子有理化 再分项

$I = \int \frac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx - \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}dx$

$= \ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})+\arcsin e^{-x}+C$

3) $\int \sqrt{1+e^x}dx$

解：

(假定分母为1) 分子有理化

$I = \int \frac{1+e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx = \int \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{e^{-x}+1}}dx + \int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$

$= -2\ln(e^{-\frac{x}{2}}+\sqrt{e^{-x}+1})+2\sqrt{1+e^x}+C$ ☆

(Kira 备注：例4 和 3) 是典型"没分母创造分母也要分子有理化)

例5

1) 求 $\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}dx$

解：分母有理化后得成为常数

$$I=\frac{1}{2}\int(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})dx=\frac{1}{6}[(2x+1)^{\frac{3}{2}}-(2x-1)^{\frac{3}{2}}]+C$$

※

2) $\int\frac{x}{x+\sqrt{x^2-1}}dx$

解：

$$I=\int(x^2-x\sqrt{x^2-1})dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2-1}\,d(x^2-1)$$

$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+C$$

※

三 第二类换元法

A. 根式替换（无理 → 有理）

"真根号"

① 被积函数含 $\sqrt[n]{ax+b}$，则令 $t=\sqrt[n]{ax+b}$ $\Rightarrow x=\frac{1}{a}(t^n-b)$

② 被积函数含 $\sqrt[n]{ax+b}$ 和 $\sqrt[m]{ax+b}$，则当 k 为 m 和 n 的最小公倍数，令 $t=\sqrt[k]{ax+b}$ $\Rightarrow x=\frac{1}{a}(t^k-b)$

例 6

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

解：

$$I\xlongequal{x=t^2}\int\frac{2t}{1+t}dt=2\int(1-\frac{1}{1+t})dt=2(t-\ln|1+t|)+C$$

$$=2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C$$

※

例 7

$$\int\frac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{x+3}}dx$$

解：

取2和3的最小公倍数，令 $t=\sqrt[6]{x+3} \Rightarrow x=t^6-3$

则 $dx = 6t^5\,dt$

所以 $I = 6\int \frac{t^3}{t-1}\,dt = 6\int \left(t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt$

$= 2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|+C$ ※

B. 三角函数替换

烂熟！

$$\begin{cases} a^2-x^2 \xlongequal{x=a\sin t} a^2\cos^2 t \\ x^2+a^2 \xlongequal{x=a\tan t} a^2\sec^2 t \\ x^2-a^2 \xlongequal{x=a\sec t} a^2\tan^2 t \end{cases}$$

$Ax^2+Bx+C \xlongequal{\text{配方}} (a^2-x^2)$ or (x^2-a^2) 再用上述替换

例8

典例题✓

1) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$

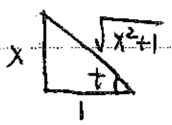
解: $= \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \xlongequal{x=\sin t} \int \frac{1+\sin t}{\cos t}\cos t\,dt$

$= t-\cos t+C = \arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$ ※

（kira说举一反三：此题与P59例4(2)一起看，都是我P58讲的分子有理化，再分项计算。以后再遇 $\int\sqrt{\frac{1+?}{1-?}}\,dx$ 之类都会做了。这就是举一反三。）

2) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$

解: $\xlongequal{x=\tan t} \int \frac{1}{\sec^3 t}\sec^2 t\,dt = \int \cos t\,dt = \sin t + C$



$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C$ ※

3) $$\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

$$\overset{x=\tan t}{=\!=\!=} \int e^t\cdot\cos t\,dt = I = \int e^t\,d\sin t$$

$$= e^t\sin t + \int e^t\,d\cos t = e^t\sin t + e^t\cos t - \underbrace{\int \cos t\cdot e^t\,dt}_{=I}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}e^t(\sin t+\cos t)+C$$

$$= \frac{1}{2}e^{\arctan x}\cdot\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}+C$$

Kira贴士：三角替换多利用三角形搞清x与t的关系（如P61左下角），另外同名三角函数也要转换自如。细微掌握以上三道例题足够应付考试。因为，道不要 ）

C. 倒替换 $x=\frac{1}{t}$（分母次数高）

例9

$$\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)}$$ （倒代换效果好于三角代换）

解：
$$\overset{x=\frac{1}{t}}{=\!=\!=} \int \frac{t^4}{1+\frac{1}{t^2}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\int\frac{(t^4-1)+1}{t^2+1}dt = -\int\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{3}t^3+t-\arctan t+C$$

$$= -\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x}+C$$

（Kira备注：只需干干净净的 $x=\frac{1}{t}$ 就可以了，不需要带着系数一起换 ）

三 分部积分法 $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

◎ 以下三种情形必用分部积分.

▸ Case 1 $\int x^a \cdot \begin{cases} e^x \\ \ln x \\ \text{三角} \\ \text{反三角} \end{cases} dx$

比情形将 e^x, 三角放在 d 后, 而 $\ln x$, 反三角不要放 d 后. 还有非常好用的表格法, 稍后介绍

▸ Case 2 $\int e^{ax} \cdot \begin{cases} \cos bx \\ \sin bx \end{cases} dx$

谁往后放都行, 始终如一即可 比如 de^{ax} 就一直 de^{ax}

▸ Case 3 $\int \sec^n x \ (\csc^n x)\ dx$ (n 为奇数)

◎ 以下两种进阶技巧 (也都是我喜欢的类型, 因为美!)

▸ Case 1 循环. 即 $I = \frac{1}{2}(\quad)$

<如 P_{62} 例 8 3)>

▸ Case 2 抵消, 即不好求就不用求了, 别怕!

例 10

1) $\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right) dx$

解:

$t = \sqrt{\frac{x+1}{x}} \Rightarrow x = \frac{1}{t^2-1}$

$I = \int \ln(1+t)\, d\frac{1}{t^2-1} = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{1}{(t-1)(t+1)^2}\, dt$

$\frac{1}{(t-1)(t+1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2}$ (解法在四中介绍, 只到为止)

2) $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$

解:

$= \int \frac{(x+1)-1}{(x+1)^2} e^x dx$ ← 惯用套路. 拆项

$= \int \frac{e^x}{x+1} dx + \int e^x d\frac{1}{x+1}$ ← 有点"抵消"的眉目!!!

$= \int \frac{e^x}{x+1} dx + \frac{e^x}{x+1} - \int \frac{e^x}{x+1} dx$

$= \frac{e^x}{x+1} + c$

3) $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x dx$

解:

$= \int \frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} e^x dx$

$= \int (\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2}) e^x dx$

$= e^x \tan\frac{x}{2} + c$

(Kira 备注: 最后一步用到的是一个积分常识,

$\int (f'+f) e^x dx = e^x f(x) + c$

这一套东西我们将在中值定理部分

非常非常非常详细地展开说. 保证会!)

4) $\int \frac{x\sin x}{\cos^5 x} dx$

解:

$= \frac{1}{4}\int x \, d\frac{1}{\cos^4 x} = \frac{1}{4}(\frac{x}{\cos^4 x} - \int \frac{1}{\cos^4 x} dx)$

$= \frac{x}{4\cos^4 x} - \frac{1}{4}\int \underline{(1+\tan^2 x)\, d\tan x}$ ← $\boxed{\int \frac{1}{\cos^4 x} dx \text{ 的处理方法}}$

$$= \frac{x}{4\cos^4 x} - \frac{1}{4}(\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x) + C$$

注 kira 隆重推出"表格积分法"(非常好用!首播款)

• 适用于: $\int e^x \cdot x^2 dx$, $\int \sin x \cdot x^2 dx$, … 等其中一函数高阶导数为0,而另一个函数无穷阶可导(如 e^x, $\sin x$, $\cos x$, …)

例如 求 $\int e^{2x} \cdot x^2 dx$

解:

写表格 (用于选择填空和大题检验)

写到0为止

step 1.

高阶导为0那一方不断求导

无穷阶可导的一方不断求原函数

x^2	$2x$	2	0
e^{2x}	$\frac{1}{2}e^{2x}$	$\frac{1}{4}e^{2x}$	$\frac{1}{8}e^{2x}$

• step 2. 斜着配对,并正负相间配对 (第一对为正)

$$\begin{array}{cccc} x^2 & 2x & 2 & 0 \\ e^{2x} & \frac{1}{2}e^{2x} & \frac{1}{4}e^{2x} & \frac{1}{8}e^{2x} \end{array}$$

$\oplus$ $\ominus$ $\oplus$

• step 3. 直接写结果

$$\int e^{2x} \cdot x^2 dx$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2 - \frac{1}{4}e^{2x} \cdot 2x + \frac{1}{8}e^{2x} \cdot 2 + C$$
$$= e^{2x}(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}) + C$$

Over!

四 有理函数的积分

1. 真分式和假分式

对于 $\int R(x)dx$, $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

$\begin{cases} \text{假分式} & \deg P \geq \deg Q \\ \text{真分式} & \deg P < \deg Q \end{cases}$

*其中，deg 为多项式阶数

A. 若 $R(x)$ 为假分式

则 $R(x)$ 分解为"多项式 + 真分式"

$\deg P = \deg Q$ 为假!!!

如：▲ $\int \frac{x}{x+2}\,dx = \int \left(1-\frac{2}{x+2}\right)dx$

· $\int (x^2-x+1)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C$

B. 若 $R(x)$ 为真分式，则 $R(x)$ 因式分解

· 真分式可以化为下述四种类型（取决于分母）

① $T_1 = \frac{A_1}{x-a}$ → 分母含因子 $(x-a)$

② $T_2 = \frac{A_2}{(x-a)^n}$ → 分母含因子 $(x-a)^n$

注意：实际操作中只要出现了 $\frac{A_2}{(x-a)^n}$ 则必须同时出现 $\frac{A_{21}}{x-a} + \frac{A_{22}}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_{2n}}{(x-a)^n}$，即从一次写到 n 次（如"演示2"）

③ $T_3 = \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}$ → 分母 x^2+px+q 无法配方

分子写 x 的一次式!!! 带 x!!!

④ $T_4 = \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^n}$ → 同②中的"注意"，从一次写到 n 次

· BMDM ·

2. 因式分解方法.

瘾术:

$$\begin{cases} ① \quad \dfrac{x-2}{(x+1)(2x-3)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{2x-3} \\ ② \quad \dfrac{x^2+2}{(x+1)(2x-3)^2} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{2x-3} + \dfrac{C}{(2x-3)^2} \\ ③ \quad \dfrac{3x-2}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1} \end{cases}$$

[kira: 至于 A, B, C 怎么求, 我接下来会讲. 其实在 P45 的 kira 五星大锦囊中已经讲过了.

…… ……

如果你的求解时间超过 30 秒, 你就该感到羞耻! 如果你方法不对, 求解时间一定超了!]

以②为例, 复习 P45 的内容 —— ☆☆☆☆☆

通分 $(2x-3)^2A + (x+1)(2x-3)B + (x+1)C = x^2+2$.

step 1. 盯着括号看, 使部分括号为 0, 代特值.

▶ 将 $x=\frac{3}{2}$ 代入左右两端 $\Rightarrow \frac{5}{2}C = \frac{17}{4} \Rightarrow C = \frac{17}{10}$

▶ 将 $x=-1$ 代入左右两端 $\Rightarrow 25A = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{25}$

step 2 没有 0 可以用了, 那么代简单的数, 比如令 $x=1$.

▶ 将 $x=1$ 代入 $\Rightarrow A-2B+2C=3$

$\therefore \frac{3}{25} - 2B + \frac{17}{5} = 3 \Rightarrow B = \frac{13}{50}$

(接下页)

所以 原式 $= \frac{2}{25}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{13}{50}\cdot\frac{1}{2x-3} + \frac{17}{10}\cdot\frac{1}{(2x-3)^2}$

(p.s. 这道题的数给得比较乱，不太好算，也不好看。
考试时的数肯定又好看又好算!!!

总之不要傻傻把 A.B.C 代入展开就好啦，
那样费力不讨好!)

(☺ kira建议： 理论上来讲，任何有理函数都可求其原函数
但计算总归较麻烦，应先分析被积函数特点
选择更为简便的方法)

例11

1) $\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}\,dx$

解：

$$\frac{5x-1}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$A(x-2)+B(x+1) = 5x-1 \Rightarrow A=2,\ B=3$

$I = 2\ln|x+1| + 3\ln|x-2| + C$

▲ 2) $\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx$

凑导数

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)-3}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{3}{2}\int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(x+\frac{1}{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

(☺ kira: "计算一定轻巧"! 分解是最后的方法，此外，本题

大量涉及第一类换元，没感觉请再回到P54 复温一下
我刚想到说服！)

3. 三角函数化有理函数积分

形如 $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

$$\tan\frac{x}{2} = u \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{2u}{1+u^2} \\ \cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \\ dx = \dfrac{2}{1+u^2}\,du \end{cases}$$

（ Kitn的嘲讽：眼熟吗？是不是高中经常用？因为"万能"？但真的麻烦死了！个人认为能不用就不用，三角函数倒来倒去最好玩最快了，不要错过机会~）

常见套路如下（聪明自动神秘强化）

① $$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx = \int \sec^2\frac{x}{2}\,d\left(\frac{x}{2}\right) = \tan\frac{x}{2} + C$$

（解题方向：两项合一项，变为初所固式）

② $$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(x+\frac{\pi}{4})}{\sin(x+\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)d\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

（解题方向： $\sin x + \cos x$，二话不说 $\to \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，简化!!!）

③ $$\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x + \tan^2 x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}\tan x)}{1+(\sqrt{2}\tan x)^2}$$

（因为 $\sec^2 x = 1+\tan^2 x$，牢记！）

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \sqrt{2} \tan x + C$

（解题方向：$\frac{1}{1+\sin^2 x}$ 所独有的最好的解法）

④ $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

$= \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$ "组合拳"

$= \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}} \, d(\frac{x}{2})$

$= \int \frac{d(1+\tan\frac{x}{2})}{1+\tan\frac{x}{2}} = \ln|1+\tan\frac{x}{2}| + C$

⑤ $\int \frac{\sin 2x}{4+\sin^4 x} dx$

$= \int \frac{d\sin^2 x}{2^2 + (\sin^2 x)^2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{\sin^2 x}{2} + C$

⑥ $\int \frac{dx}{1+2\tan x}$

〈法一〉 $\tan x = t$，$I = \int \frac{1}{(2t+1)(1+t^2)} dt$

令 $\frac{1}{(2t+1)(1+t^2)} = \frac{A}{2t+1} + \frac{Bt+C}{1+t^2}$

▲（精彩法二）

$I = \int \frac{\cos x}{2\sin x+\cos x} dx$

令 $\cos x = a(2\sin x+\cos x) + b(2\sin x+\cos x)'$ ☆

$\begin{cases} 2a-b=0 \\ a+2b=1 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{5}, \quad b=\frac{2}{5}$

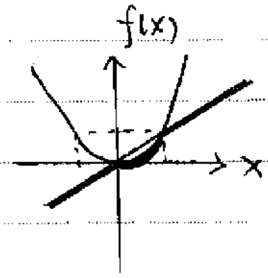
$I = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}\ln|2\sin x+\cos x| + C.$

（kira 强调：这是种非常典型的题型，即分子分母都含有 $\sin x$ 或 $\cos x$ 时，将分子化为"分母 + 分母导数"

百分百好用，快速又美观！

番外 分段函数不定积分

（本部分不是计算的硬货，但是比较重要的常识，我怕以后忘了，所以写在「大王小王篇」先）



例 12

$\int \min\{x^2, x\} dx = ?$

解：

$$\min\{x^2, x\} = \begin{cases} x, & x<0 \\ x^2, & 0\le x\le 1 \\ x, & x>1 \end{cases}$$

$$I = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C_1, & x<0 \\ \frac{1}{3}x^3 + C_2, & 0\le x\le 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + C_3, & x>1 \end{cases}$$

"原函数可导，函数连成片，三合一"

令 $C_2 = C$，由 $\begin{cases} C_1 = C_2 = C \\ \frac{1}{3} + C = \frac{1}{2} + C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = C \\ C_3 = C - \frac{1}{6} \end{cases}$

$$\therefore I = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C, & x<0 \\ \frac{1}{3}x^3 + C, & 0\le x\le 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + C - \frac{1}{6}, & x>1 \end{cases}$$

※

「大王小王篇」之

定积分

· 本Part的解锁条件：不定积分熟练；
做好玩开心的心理准备；

· 本Part的特别关注：P73 [2] [3] P76 (一)
▲P77 Bonus：广义函数
P79－P81 例题

· 本Part的难点：无难点，每句话认真读，
每道题认真启。

☆ kira 前言：

定积分是「大王小王篇」最后一部分，也是计算看似最麻烦，实则最好巧最有趣的部分。且闻你们解题妙妙手化难为易，化繁为简，给每道定积分计算题找最快的捷径解决，为后面马上展开的「4A篇」Boss们打下坚实基础。（本部分以计算为主，证明请看「拾遗篇」）

Let's Party！　（P73-P81 筑基　P82-85 实战）

筑基

四大铺垫
1. 定积分定义
2. 如何正确理解变限定积分 ★（你绝对不会）
3. 特殊定积分的直接计算性质 ★（深刻紧凑）
4. 广义积分及其判敛 ★（的最舒服方式）

1 定积分定义

def：$\int_a^b f(x)\,dx \triangleq \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$

注：
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left[a+\frac{i}{n}(b-a)\right]=\int_a^b f(x)\,dx$$

（至于奇偶性、可积不可积、原函数存不存在等乱七八糟的概念，请参见「拾遗篇」）

2 如何正确理解变限定积分　（你绝对不会）

Th.　$f(x)\in C[a,b]$，$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$，则 $\Phi'(x)=f(x)$

Q 提问：① $\int_a^x f(x)dx$ 中"$\int_a^x$"的 x 和"$f(x)$"的 x 是否同步变化？

② $\int_a^x f(x,t)dt$ 中"$\int_a^x$"的 x 和 $f(x,t)$ 的 x 是否同步变化？

（思考30秒）

A 回答：① 不同步，因为是关于 x 积分，积分过程视 x 为变量；

② 同步，因为是关于 t 从 a 到 x 的积分，在积分过程视 x 为常数，而 $\int_a^x f(x,t)dt$ 本质是关于 x 的函数。

[3] 特殊定积分的重要计算性质

（kira旅游：非常重要！非常有趣！请务必滚瓜烂熟！）

① $f(x)\in C[-a,a]$，$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_0^a [f(x)+f(-x)]dx$

★ ② $\int_0^\pi f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$ （因为 $\sin x\geq 0$ 在 $[0,\pi]$ 上）

$\int_0^\pi f(|\cos x|)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$ （因为 $\cos x$ 不 ≥ 0 在 $[0,\pi]$）

③ $\int_0^{2\pi} f(|\sin x|)dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

$\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

★★ ④ $\int_0^\pi x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$

$\int_0^\pi x f(|\cos x|)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(|\cos x|)dx$

要非常敏锐地寻找左边形式，非常好用，考N次了！！！

看到左边自然想到右边！！！本能！！！

★★★ ⑤ 华里士公式（强烈推荐宇哥的记忆法）
(18考)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$$
$$= \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3}, & n\text{为大于1的奇数} \end{cases}$$

● 比如 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x\, dx = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$

从8开始写　　"发射成功"写上 $\frac{\pi}{2}$

边写边念："8.7.6.5.4.3.2.1. 发射成功（写 $\frac{\pi}{2}$）"

② $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\, dx = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$.

边写边念："7.6.5.4.3.2. … 发射失败（不写 $\frac{\pi}{2}$）"

OK!

⑥ $f(x)$ 以 T 为周期

- $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$　（平移性质）

- $\int_0^{nT} f(t)\,dt = n\int_0^T f(t)\,dt$

$\boxed{4}$ 广义积分及其判敛（的最舒服方式）

Kira补录：强烈推荐《高数》同济7版P256-P268打*号一节的积分判敛相关内容，请仔细阅读。

● 正常积分 $\begin{cases} ① \text{ 积分区间有限.} \\ ② \text{ } f(x) \text{ 连续或只有有限个第一类间断点.} \end{cases}$

如：$\int_{-1}^{2} \frac{\sin x}{x}\, dx$

因 $x=0$ 可去间断点，所以为正常积分.

● ①和②有一个不满足即为反常积分

(一) 区间无限的反常积分

▶ 1. $f(x) \in [a, +\infty)$

① def：$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ "先算个正常的"

$\lim_{b \to +\infty} [F(b) - F(a)] \begin{cases} = A, & \int_a^{+\infty} f(x)dx = A, \forall A \in R \\ 无, & 发散 \end{cases}$

② 判敛法

$$\lim_{x \to +\infty} x^k f(x) = C_0 \begin{cases} 敛, & k > 1 \\ 发散, & k \le 1 \end{cases}$$

(KiTA备注：发现没？这个判敛法和书上那些妖艳贱货不一样的地方在于直接去乘 x^k 看起来舒服得多也好算得多)

(KiTA激动一发：关于k怎么取，在一眼就看出，不熟的话，重新回头翻极限部分，极限计算不过关)

例如

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$$

分析：

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot \frac{x}{1+x^2} = 1$$

$k = 1$ ∴ $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ 发散

(：判敛数值直上最轻松的事了有木有！)

▶ 2. $f(x) \in (-\infty, a]$

① def- $\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b)$

$\lim_{b \to -\infty} [F(a) - F(b)] \begin{cases} = A, & \int_{-\infty}^a f(x)dx = A, \forall A \in R \\ 无, & 发散 \end{cases}$

（ kira 提醒：判断敛散时，我们不关心 k 和 1 的关系，A 和 1 的关系无所谓，别糊涂了 ）

② 判别法

$\lim_{x \to -\infty} x^k f(x) = c$ $\begin{cases} 敛, & k > 1 \\ 散, & k \le 1 \end{cases}$

▶ 3. $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 皆收敛.

[Question: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx = 0$，对吗？ ✗

因为 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$ 发散.

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$ 发散]

（ kira 强调：反常积分不可用奇偶性直接写结果。除非先判敛 ）

▶ Bonus： Γ函数 （非常好用！必须会！尤其在概统中）

def- Γ函数 $\triangleq \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \Gamma(\alpha)$

有 $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$， $\Gamma(n+1) = n!$， $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

（烂熟！必考！）

例1

1) $\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\, e^{-x} dx = \Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

2) $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x} dx = \frac{1}{8}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$ （手法！）

$= \frac{1}{8}\Gamma(3) = \frac{1}{4}$

（ kira解释：第一个"="用了统一手法 把 e^{-2x} 换 e^{-x}
详细是 $\frac{1}{8}\int_0^{+\infty} (2x)^2 e^{-2x}\, d(2x)$
而将2x换为x 下积分限仍是 $0 \sim +\infty$
所以呈现出 $\frac{1}{8}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$ ）

（ kira再次强调：统一手法非常重要！一定养成习惯！
汤神在讲此例题时感叹了一句：
"为什么有的人个把小时就做完了。" ）

3) $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \sqrt{x^2}\, e^{-x^2} dx^2 = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$

(二) 区间有限，函数有无穷间断点的反常积分（瑕积分）

▶ 1. $f(x) \in (a,b]$，$f(a+0) = \infty$）　（瑕点 a）

① def. $\forall \varepsilon > 0$，$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a+\varepsilon)$

$\lim_{\varepsilon\to 0} [F(b) - F(a+\varepsilon)]$ $\begin{cases} = A, & \int_a^b f(x)dx = A \\ 无, & 发散 \end{cases}$

② 判断法

$\lim_{x\to a^+} (x-a)^k f(x) = C_0 \neq 0$ $\begin{cases} 敛, & k<1 \\ 散, & k \geq 1 \end{cases}$

2 $f(x) \in C[a,b)$ $(f(b-0)=\infty)$

① def $\forall \varepsilon > 0$ $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = F(b-\varepsilon) - F(a)$

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} F(b-\varepsilon) - F(a) = \begin{cases} A, & \int_a^b f(x)\,dx = A \\ 无, & 发散 \end{cases}$

② 判别法

$\lim\limits_{x \to b^-} (b-x)^k f(x) = c_0 \neq 0$

$\begin{cases} 敛, & k<1 \\ 散, & k \geq 1 \end{cases}$

3. $f(x) \in C[a,c) \cup (c,b]$

$\int_a^b f(x)\,dx$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\int_a^c f(x)\,dx$, $\int_c^b f(x)\,dx$ 皆敛.

★这部分的计算，汤神有非常独道的方法，即不拆成 $\int_{a+\varepsilon}^{c} + \int_{c}^{b-\varepsilon}$，而是先判敛（两端即可），然后发现果然收敛（因为"无巧不成题"），直接计算就可以了。考试直接这么写没问题。

❤我曾在微博放过这个知识点的讲解视频，后因嫌弃自己脸大而删除。如你想看可旺旺联系我，我分享一下。

例1

$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ "我根本就不拆！"

解：

1° $\lim\limits_{x \to 0^+} (x-0)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 且 $\frac{1}{2} < 1$

看看右边配多少次数　先写

$\lim_{x\to 2^-}(2-x)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 且 $\frac{1}{2}<1$

$\Rightarrow \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ 收敛

（ 检查结束，接下来像正常积分一样求即可 ）

2° $I=\int_0^2 \frac{d(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}}=2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\arcsin x\Big|_0^1=\pi$ ☆

• 进阶：含绝对值符号的定积分计算

非常简单，根据绝对值正负将积分区间分段即可

例2

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$$

解：1° $I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}+\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}\triangleq I_1+I_2$

2° $\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}=1$ 且 $\frac{1}{2}<1$ ∴ I_1 收敛

$\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}=1$ 且 $\frac{1}{2}<1$ ∴ I_2 收敛

3° $I_1=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

求 I_1

法1 $I_1=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}=2\arcsin\sqrt{x}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$ ☆

法2 $I_1=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{d(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2-(x-\frac{1}{2})^2}}=\arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$

求 I_2：$I_2=2\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{(\sqrt{x})^2-1}}=2\ln|\sqrt{x}+\sqrt{x-1}|\Big|_1^{\frac{3}{2}}$

例3

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$$

解：1° $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 且 $\frac{1}{2}<1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^5\dfrac{1}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}=1$ 且 $5>1$

} 收敛

2° $I=\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{d(x-1)}{(x-1)^4\sqrt{(x-1)^2-1}}$

$=\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$

$\xlongequal{x=\sec t}\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\tan t}{\sec^4 t\tan t}dt$

$=\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\,dt=I_3=\frac{2}{3}\times 1=\frac{2}{3}$

(☺ 老汤语录：该拆再拆，不要乱听教材.)

$\boxed{实践}$

{ 变积分限积分计算
{ 定积分计算 { 利用计算性质
{ 利用对称法.

① 变积分限积分计算

(汤："是要有经验的" "二话不说，分部积分".
"拿到手别慌了，分部积分" ← ←)

例4

$$f(x)=\int_1^x e^{-x^2}dx \text{，求} \int_0^1 x^2 f(x)\,dx$$

解：

$$I=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\,dx^3$$
$$=\frac{1}{3}x^3 f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3 e^{-x^2}dx$$
$$=-\frac{1}{6}\int_0^1 x^2 e^{-x^2}d(x^2)$$
$$=-\frac{1}{6}\int_0^1 x e^{-x}dx$$
$$=-\frac{1}{6}(1-2e^{-1})$$

☆

（kira 回说：此题中的 $f(x)$ 为 P74 页提到的 ①"问"）

例5

$$f(x)=\int_0^x \arctan(x-1)^2dx \text{，求} \int_0^1 f(x)\,dx$$

解：

$$I=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 x\arctan(x-1)^2dx$$
$$=f(1)-\int_0^1[(x-1)+1]\arctan(x-1)^2dx$$
$$=f(1)-\int_0^1\arctan(x-1)^2dx-\int_0^1(x-1)\arctan(x-1)^2d(x-1)$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\arctan x^2\,dx^2$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\arctan x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(x\arctan x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx^2\right)$$
$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$$

☆

★ **例6**

$$f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}dt \quad \text{求} \int_0^\pi f(x)\,dx$$

解：

$$I=xf(x)\Big|_0^\pi-\int_0^\pi x\cdot\frac{\sin x}{\pi-x}dx$$
$$=\int_0^\pi\frac{\pi\sin x}{\pi-x}dx-\int_0^\pi\frac{x\sin x}{\pi-x}dx$$

做得太漂亮！

$$= \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$$

✲

（kira 赞叹：$f(x)$ 在分部积分和第二步代入中都发挥了各有特色的作用，分子分母的 $\pi - x$ 又恰可约去！无巧不成题！）

（♥ 我觉得这就是好题，在计算不太难为你的前提下，出得巧而美～（模拟题推荐李永乐 6+2，特别屌！我特别喜欢！）（宇哥 8+4 也蛮好的…））

2 利用定积分的奇偶计算性质计算定积分

例 7

① $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}} dx$

解：

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}} + \frac{\sin^4 x}{1+e^{x}} \right) dx$$ →（P74 性质①）

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{e^x}{e^x+1} + \frac{1}{e^x+1} \right) \sin^4 x \, dx$$ （"漂亮"！）

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi$$ （发射成功！）

✲

② $f(x) = \frac{\pi}{1+\cos^2 x} + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx$，求 $f(x)$

解：

令 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx = A$

$$f(x) = \frac{\pi}{1+\cos^2 x} + A$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx + \underbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} A \sin x \, dx}}_{\text{奇}=0}$$

$$A = 2\int_0^{\pi} x\cdot\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\pi\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}\,d\cos x$$

$$= -\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{2}$$

③ $\int_0^{\pi^2} \sin^4\sqrt{x}\,dx$

解：$\sqrt{x}=t$ $\int_0^{\pi}\sin^4 t\cdot 2t\,dt = 2\pi\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi^2$

④ $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^{2x}-1}\,dx$

解：$\sqrt{e^{2x}-1} = t \Rightarrow x = \frac{1}{2}\ln(t^2+1)$ 巨算！

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} t\cdot\frac{t}{t^2+1}\,dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt = \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$ “巨算！”

⑤ $\int_0^2 x^2\sqrt{2x-x^2}\,dx$

解： “有技巧！”

$$= \int_0^2 [(x-1)+1]^2\sqrt{1-(x-1)^2}\,d(x-1)$$

$$= \int_{-1}^{1}(x+1)^2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 2\int_0^1 (1+x^2)\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$\overset{x=\sin t}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2 t)\sqrt{\cos^2 t}\cos t\,dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^4 t)\,dt$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)$$

有条有木有！
超好玩有木有！

3 利用对称性计算定积分

例8

① $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$

解:

〈法一〉 $I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(x+\frac{\pi}{4})-\frac{\pi}{4}]}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}\,dx$

〈法二〉 $I \xlongequal{x+t=\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\,(-dt)$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$

$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x+\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$ (P75 第二行)

② $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^{\sqrt{2}}x}$

$\xlongequal{x+t=\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-dt}{1+\cot^{\sqrt{2}}t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cot^{\sqrt{2}}x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^{\sqrt{2}}x}{1+\tan^{\sqrt{2}}x}\,dx$

$\Rightarrow 2I = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$ ☆

(Kira评价：像以上例8这两道，为相应真题，属于难度很大的计算，考生掌握有困难，不必硬记，作为开阔眼界即可。)

「4A篇」之

二重积分

· 本Part的解锁条件：不定积分，定积分，反常积分可以随便玩；会画函数图象，能看懂函数图象；

· 本Part的特别关注：P90. 2. P94.3 (P97 第二种)
P104."招" P108.②

· 本Part废点：P89 的概念可以随意看看.
本部分掌握好"口诀"和"招"
即功德圆满，我功成身退~

Kira前言：

之所以用二重积分打头阵，是因为这部分用到的知识点和方法都十分清爽，稍加梳理便可轻松收割！

本部分将着重讲解"无敌口诀"和"轮换对称大法"，前者是做题根基，后者是提速神器。

Let's Party！

筑基

- 一、定义
- 二、性质
  - 1. 一个中值定理
  - 2. 对称性（必考）
    - 关于x轴
    - 关于y轴
    - 关于原点
    - 关于y=x直线
    - 轮换对称性
  - 3. 换序
- 三、积分法
  - 1. 直角坐标系
  - 2. 极坐标系（两种）

一 定义

def. D为有限闭区域，f(x,y)在D上有界，若 $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在，称此极限为 f(x,y) 在D上的二重积分，记 $\iint_D f(x,y)\,d\sigma$

即 $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = \iint_D f(x,y)\,d\sigma$

注：$D=\{(x,y) \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{i}{m},\frac{j}{n}\right)=\iint_D f(x,y)\,d\sigma$$

例1

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{in}{(m^2+i^2)(n^2+j^2)}$$

$$=\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{mn}\cdot\frac{\frac{i}{m}}{1+\left(\frac{i}{m}\right)^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}$$

$$=\iint_D \frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+y^2}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,dy$$

（kira备注：由P26-P27的结论套路类比即可知套路

step 1. 提出 $\frac{1}{mn}$ （读作 $d\sigma$）

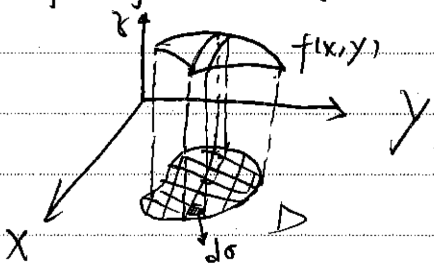
step 2. 凑出 $\frac{i}{m}$ 和 $\frac{j}{n}$ （分别读 x, y）

step 3. 将 $\frac{1}{mn}$ 写成 $d\sigma$ 或 $dxdy$.

over!）

kira剖析：

有的同学可能一看二重积分会懵比，觉得又是D，又是 $f(x,y)$，好复杂、好混乱，我们看图说话：



二重积分本质是个三维问题，$f(x,y)$是在 D 上方定义的二维曲面，求柱体"大面包"的体积

★ D 的意义：D 限制了 $f(x,y)$ 有定义的范围，即"这块面包放在桌上到底占用了多大区域"。其它区域我们不关心

★ $f(x,y)$ 的意义：$f(x,y)$ 是一个"空中"的二维曲面，想求面包体积，一定要知道顶部面包皮的各种高度，才能计算

★ $\iint_D f(x,y)\,d\sigma$ 中 $d\sigma>0$ (考点)，因为 $d\sigma$ 代表 D 上的"一小块"区域，必为正

★ $f(x,y)\cdot d\sigma$ 表示 $d\sigma$ 上这条小柱体的体积（类比柱体体积公式）
$\iint_D$ 是"求和"，即无穷多小柱体体积加起来，就是大面包体积！

三 性质 （高频考点）

1. D 为有界区域，$f(x,y)$ 在 D 上连续，$\exists(\xi,\eta)\in D$，
使 $\iint_D f(x,y)\,d\sigma = f(\xi,\eta)\,A$（面积）

例 2

D: $x^2+4y^2\le t^2 \quad (t>0)$

求 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\iint_D e^{-x^2}\cos(x-y)\,d\sigma}{t^2}$

· BMDM ·

解：$\iint_D e^{-x^2}\cos(x-y)\,d\sigma = \overbrace{\pi\cdot t\cdot\frac{t}{2}}^{\text{椭圆面积}}\cdot e^{-\xi^2}\cos(\xi-\eta)$，$(\xi,\eta)\in D$.

$I=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0} e^{-\xi^2}\cos(\xi-\eta)=\frac{\pi}{2}$

（Kira 想言：性质1及这个例题属于拔高，实在没感觉可以放自己一马，知道这个思路就好。）

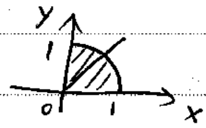
☆ 2. 对称性（每年必考!!!）

① D关于 $y=x$ 对称

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\iint_D f(y,x)\,d\sigma$$

例3

$$\iint_D \sin x^2\cos y^2\,d\sigma = I$$

D: 

$$=\iint_D \cos x^2\sin y^2\,d\sigma$$

$$2I=\iint \sin(x^2+y^2)\,d\sigma$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\sin r^2\,dr=-\frac{\pi}{4}\cos r^2\Big|_0^1$$
$$=-\frac{\pi}{4}(\cos 1-1)$$

（Kira 备注：① 直角坐标 → 极坐标之后会展开说。
② 公式不用背，看到D的形状后展开想象即可：x,y 互换位置，函数还是那个函数，区域还是那个区域，所以体积还是那个体积。）

② 若 D 关于 y 轴对称（也是看图想，不用背）

$$\begin{cases} 若\ f(-x,y) = -f(x,y) \Rightarrow \iint\limits_D f\,d\sigma = 0 & 奇 \\ 若\ f(-x,y) = f(x,y) \Rightarrow \iint\limits_D f\,d\sigma = 2\iint\limits_{D_1} f\,d\sigma & 偶 \end{cases}$$

[D_1是右半边]

❤ ☺ kira 再点破一层，其实是：

$$\begin{cases} 对于\ f(-x,y) = -f(x,y)\ 的那部分，有\ \iint\limits_D f\,d\sigma = 0 \\ 对于\ f(-x,y) = f(x,y)\ 的那部分，有\ \iint\limits_D f\,d\sigma = 2\iint\limits_{D_1} f\,d\sigma \end{cases}$$

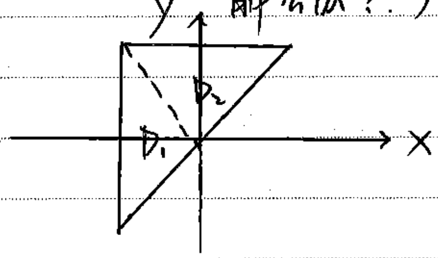
D 关于 x 轴对称同理

$$\begin{cases} 若\ f(x,-y) = -f(x,y) \Rightarrow \iint\limits_D f\,d\sigma = 0 \\ 若\ f(x,-y) = f(x,y) \Rightarrow \iint\limits_D f\,d\sigma = 2\iint\limits_{D_1} f\,d\sigma \end{cases}$$

[D_1是上半边]

☺ kira 坦言：其实大多时候都是用奇函数积分为0。
0是个好东西，翻译成现代汉语叫"扔"！（对称性是"狂扔大法"的理论基础）

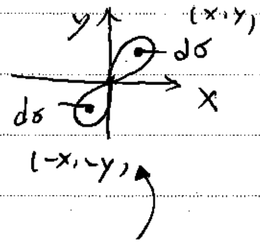
• 命题：隐性对称（既不关于 x 轴对称，D 不关于 y 轴对称，那么办？！）（如下图实心 ~~中~~ ）



（即上面"kira 再点破一层"所指

答：分两块，D_1 用 y 的奇偶性，D_2 用 x 的奇偶性。

③ 关于原点对称



$$\begin{cases} \text{若有 } f(x,y)=f(-x,-y)\text{，则 } I=2\iint\limits_{D_1} f\,d\sigma \\ \text{若有 } f(x,y)=-f(-x,-y)\text{，则 } I=0. \end{cases}$$

如 $\iint\limits_{D} (x\sin\sqrt{x^2+y^2}+\cos x\sin y)\,d\sigma = \underline{0}$

拆为 $0+0=0$

④ 轮换对称性.

A. 大白话：把二重积分式中所有 x,y 互换，
则原二重积分结果不变.

如：$\iint\limits_{D_1=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\le 1} (2x^2+3y^2)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_2=\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}\le 1} (2y^2+3x^2)\,dy\,dx$

互换　　互换　　互换

☺ 太简洁了. 因为积分值本来就和字母无关：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(y)\,dy.$$

面包还是那个面包，只是换一个方向.

例4

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的正值连续函数，证明

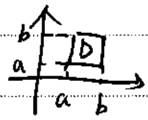
$$\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx \ge (b-a)^2$$

解：

〈法一〉 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \int_a^x \frac{1}{f(t)}\,dt-(x-a)^2$，目标 $F(b)\ge 0$.

〈法二〉 $I=\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b \frac{1}{f(y)}\,dy = \iint\limits_D \frac{f(x)}{f(y)}\,d\sigma$.

x,y互换
"D不变"
$$=\iint\limits_D \frac{f(y)}{f(x)}\,d\sigma$$



$$\Rightarrow 2I=\iint\limits_D \left(\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right)d\sigma$$

$$\geqslant \iint\limits_D 2\,d\sigma = 2\iint\limits_D d\sigma = 2(b-a)^2$$

$$\Rightarrow I \geqslant (b-a)^2$$

B. 进阶：若将D中的x和y对调后发现D不变.

则 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=\iint\limits_D f(y,x)\,d\sigma$

（"x,y非常对称"，非常适合用2I解题 ← ←）

例5

设a,b为常数，$f(x)$正值连续. $I=\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\,d\sigma$

$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$

解：由D对调x,y后区域不变

$$I=\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}$$

$$\Rightarrow 2I=\iint\limits_D \frac{(a+b)(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)})}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\,d\sigma$$

$$=(a+b)\iint\limits_D d\sigma=(a+b)\cdot\pi\cdot\frac{1}{4} \quad\Rightarrow I=\frac{1}{8}(a+b)\pi$$

下一题教你跳出惯性思维定势!

例6

求 $I=\iint\limits_D \sin(x^3+y^3)\,d\sigma$，$D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\le 1\}$.

[分析] "跳出 $x\to y$，$y\to x$ 的定势"：发现 x,y 互换后，对求 I 并无帮助.

解：令 $x\to -x$，$y\to -y$，D 不变，$d(-x)d(-y)=dxdy$

（"保证 D 不变就行"）

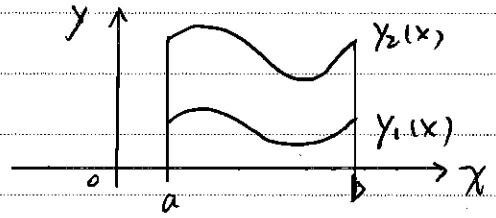
$$I=-\iint\limits_D \sin(x^3+y^3)\,d\sigma \Rightarrow 2I=0 \Rightarrow I=0$$ ※

（还可 $x\to -y$，$y\to -x$，随便玩）

三 积分法

〈法一〉直角坐标法 $d\sigma=dxdy$

1° x型（区域 D 左右两边直线，上下为曲线）



$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

请出后面的"元诞"战:

· BMDM ·

四、口诀：

后积先定限，限内画条线
先交写下限，后交写上限

[解读]（我将以视频讲解，如果你需要）

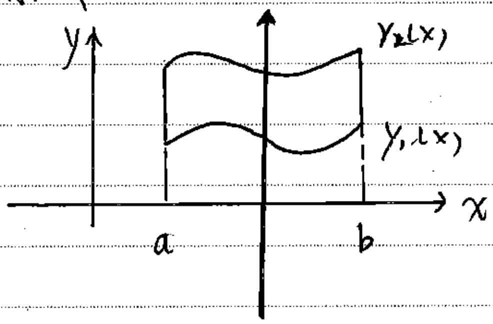
① "后积先定限"

X型的模板为 $\int_{\square}^{\square} dx \int_{\square}^{\square} f(x,y)\,dy$

即"后积x先积y"，也可以形象地看作"后积简易的，先积复杂的"，通常，后积的上下限都是常数，非常清爽，也不会写错顺序。

看P96的图便知，x的上下限分别为b和a
所以模板变为 $\int_{a}^{b} dx \int_{\square}^{\square} f(x,y)\,dy$

② "限内画条线"



画线方向与坐标轴正方向相同（非常重要）
因为dx，dy与x，y轴正方向同向，若箭头画反，

则 dx, dy 将对应变为 -dx, -dy) <见例8>

这条线将霸气穿过两条曲线!

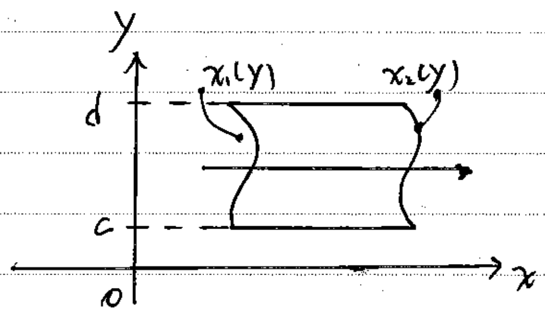
③ 先交写下限, 后交写上限.

"先交"和"后交", 看箭头方向便一目了然, 自然写出上下限.
模板最终变为

$$\int_{\boxed{a}}^{\boxed{b}} dx \int_{\boxed{y_1(x)}}^{\boxed{y_2(x)}} f(x,y)\, dx$$

[完成]
[解读完毕]

2° y型



仿照口诀, 立即写出

$$\iint_D f(x,y)\, d\sigma = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\, dx$$

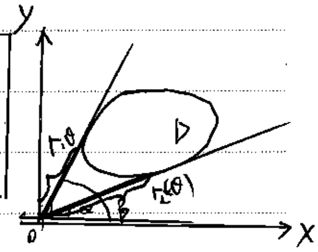
(不再赘述)

〈法二〉极坐标法.　　$d\sigma = r\,d\theta\,dr$

适用于	① D区域边界含 x^2+y^2 （贪上圆了） ② $f(x,y)$ 中含 x^2+y^2 （锦上添花）

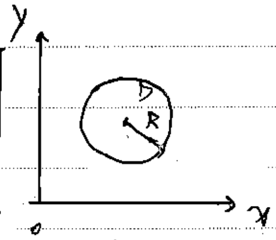
▶ 直角坐标 → 极坐标有两种写法（都要会！灵活切换！）

· 第一种：$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(\alpha \le \theta \le \beta)$



（😊：多用于不规则"圆"或圆心在原点的情形.
适用万能. 但对于圆心不在原点的圆域D.
用第一种易使计算复杂. 故引出第二种写法）

· 第二种：$\begin{cases} x-a = r\cos\theta \\ y-b = r\sin\theta \end{cases}$ $\begin{matrix} (0 \le \theta \le 2\pi) \\ (0 \le r \le R) \end{matrix}$

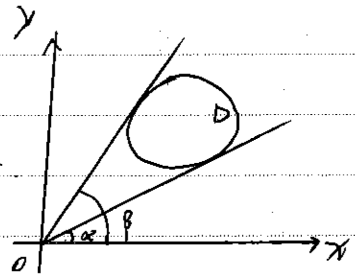


（😊 Kira 说：第二种的好处在于将第一种的函数 $r(\theta)$
变为常数 r. 从而大大简化计算（当D为圆））

例7

1. 写出区域D上的二重积分形式

答：$I = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr$



[解读] "无论D试"依然适用

① "后积先定限"

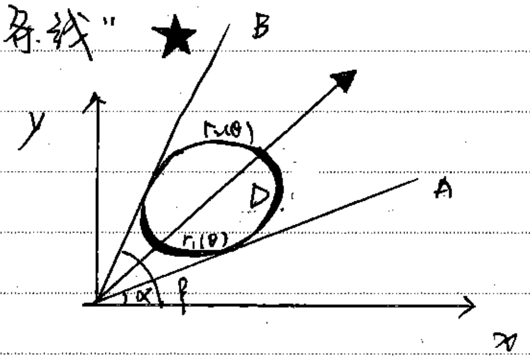
对于变量 θ 和 r，注意到 θ 是确定的，可用常数表示上下限，因此后积，先定限。

变换为 $\int_{\square}^{\square} d\theta \int_{\square}^{\square} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr$

由P97页图知，θ 的上下限分别为 α 和 β，所以变换为

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\square}^{\square} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr$$

② "限内画条线" ★



这一步是盲点，也是难点，板书中"二重积分这条线"到底从哪画到哪？

Kira 说：当后积 θ 时，有两条确定 θ 的切线 A 和 B，画的这条线，与 A、B 同起点，方向与 x、y 轴正向相同，位置画在 A 和 B 之间即可。

· BMDM ·

③"先交为下限，后交为上限"

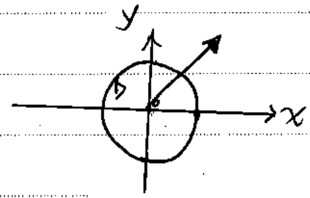
切线A、B将区域D分为 $r_2(\theta)$ 和 $r_1(\theta)$ 两部分

我们所画的线依次穿过 $r_1(\theta)$ 和 $r_2(\theta)$
（看箭头方向！）

模板最终变为

$$\int_{\boxed{\alpha}}^{\boxed{\beta}} d\theta \int_{\boxed{r_1(\theta)}}^{\boxed{r_2(\theta)}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr$$

[完成]
[解读完毕]



2. 写出区域D上的二重积分形式.

答：$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr$ ※

（☺ Kira补充：此处的"先交为下限"之"先交"为原点 O）

实战 $\begin{cases} 1. \text{技术/综合题} \\ 2. \text{常规计算题（"旋转大法"）} \end{cases}$

1. 技术/综合题.

① 换序

▶ 原则：$dxdy > 0$（否则不是二重积分）

即"限内画条线"沿坐标轴正向.

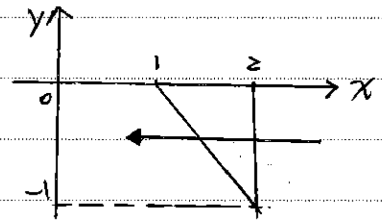
例8

1. $\int_{-1}^{0} dy \int_{2}^{1-y} f(x,y)\,dx$ 换序 ______.

答：$I=\int_{1}^{2} dx \int_{1-x}^{0} f(x,y)\,dy$ ✗ 0

"基本概念问题"

更正：step1. 先跟据原积分画图：



· 定限：$y\in[-1,0]$

· 先交2，再交$1-y$

发现箭头反了! $dx<0$!

step2. 把 $dx\,dy$ 变为正.

$I=-\int_{-1}^{0} dy \int_{1-y}^{2} f(x,y)\,dx$ (p.s. 积分交换上下限，前面添负号)

(>0) (>0)

(Kira插播：以后考试一定有题会玩到"交换积分上下限"的，因为直积太好用太好玩了!)

正解：$I=-\int_{1}^{2} dx \int_{1-x}^{0} f(x,y)\,dy$.

(Kira重申：必须先是二重积分，才能换序!
必须概念过关，才能去做题!)

· BMDM ·

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{1+\cos\theta}^{2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr$ 换序 ______

答：$\int_1^2 r\,dr \int_{\arccos(r-1)}^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta$.

[解读] $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$ 说明 D 在第一象限.

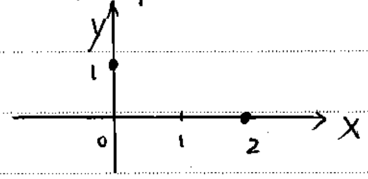
▸ Step 1. 画 $r=2$ 和 $r=1+\cos\theta$ 在第一象限的图象.

(kira 简笔画教程之如何画 $r=1+\cos\theta$ 图象：

① $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$. 当 $\theta=0$ 时，$r=2$

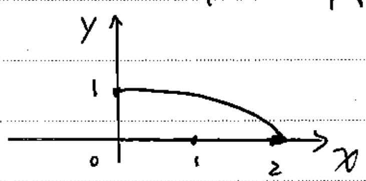
当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$r=1$

画两个点，



② $r'(\theta)<0$，$r''(\theta)<0$ 所以为减函数且凸函数

画一条凸递减曲线

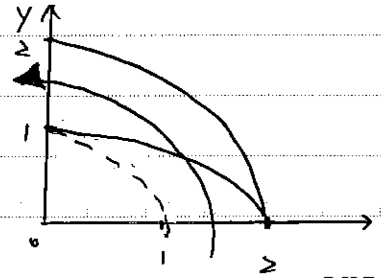


[关于如何严谨地、无疏漏地画函数图象，及关于如何记住二阶导和凹凸性之间的关系，并永远不忘，且听『拾遗篇』分解！])

▸ Step 2. 念口诀

"后积先定限"，此限为常数.

最小为 1，最大为 2，所以 $\int_1^2 r\,dr$



后积r时的"线"是连点和唯点呢？请奔记图中这条箭头。

（ kira注释之为什么箭头画圆圈？

答：

因为"限内画线"的"线"在此代表 θ，与代表 r 的"线"互相垂直，故为圆圈。）

"先交写下限，后交写上限"

$$\begin{cases} \text{上限} \quad r=2 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \\ \text{下限} \quad r=1+\cos\theta \Rightarrow \theta=\arccos(r-1) \end{cases}$$

所以模板最终变为 $\int_1^2 r\,dr\int_{\arccos(r-1)}^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta$

[解读完毕]

② 参悟一道非常漂亮的综合题（宇哥例题）

例9

设 $L_1: x^2+y^2=1$，$L_2: x^2+y^2=2$，$L_3: x^2+2y^2=2$

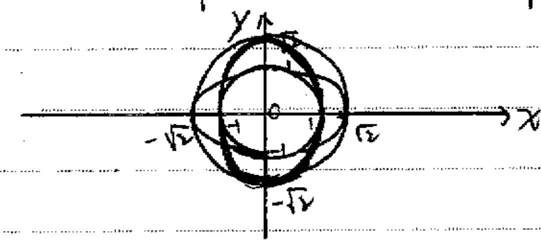
$L_4: 2x^2+y^2=2$. 围成平面区域 D_i，$i=1,2,3,4$.

记 $I_i=\iint\limits_{D_i}(1-x^2-\frac{y^2}{2})\,d\sigma$，则 $\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\}=$ ____

解：

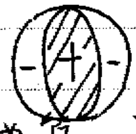
画图.

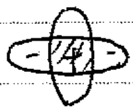
核心：$f(x,y)=1-x^2-\frac{y^2}{2}$，为图中那个竖着的椭圆形。
在该椭圆形内部有 $1-x^2-\frac{y^2}{2}>0$，外部有 $1-x^2-\frac{y^2}{2}<0$。

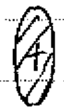


也就是说，"$f(x,y)$的积分越大，说明$f(x,y)$在竖椭圆内的部分越多，在竖椭圆外的部分越少（消化3秒）

L_1：中心的小圆，包含于  竖椭圆中。

L_2：外圈的大圆  ，竖椭圆内部分为正，椭圆外部分为负，有所抵消

L_3：横着的椭圆  正负有所抵消

L_4： $f(x,y)$完全为正，积分达到最大值。

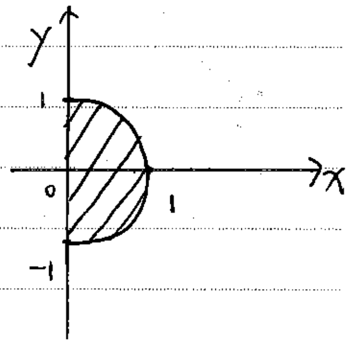
答：填 L_4。

（Kira说明：
此题是非常好的理解概念、锻炼数学思维的题，考试中会有意无意用到这种思维方式。如果以上文字解释不够清楚，欢迎来 @Kira言物语(weibo) 找我 或 淘宝 @Kira考研周边小铺。我将根据人数决定是否制作视频～）

2. 常规计算题（"狂扔大法"）—感谢汤神！

例 10

〈真题〉求 $\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}d\sigma$，D：$x^2+y^2\le 1$，$x>0$.



解：

（第一步：找对称，区域 D 关于 x 轴上下对称，把 xy 扔了.）

$$I=\iint_D \frac{d\sigma}{1+x^2+y^2}$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr$$

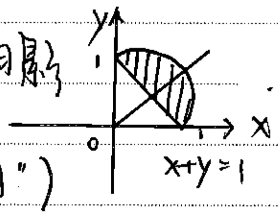
$$=\frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2$$

$\frac{\pi}{2}$ 直接口算！速度！

（Kira提醒：去掉 xy 是因为 $\frac{xy}{1+x^2+y^2}$ 是 y 的奇函数，别想错！该去掉什么是一眼能看到，画图之后 2 秒内结束战斗！）

例 11

求 $\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2}}$，区域 D 如图中阴影



解：

（"对称性对本题不起任何作用"）

令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，$\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\le r\le 1$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1}dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\right)d\theta$

$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\csc\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)d\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt2}\left(\ln\left|\csc\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\cot\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{\pi}{2}-\sqrt2\ln(\sqrt2+1)$

(Kira补充：迅速判断 $\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\le r$ 是必备常识
据题为 $x+y\ge1$ $\therefore r(\sin\theta+\cos\theta)\ge1$
$\therefore r\ge\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$)

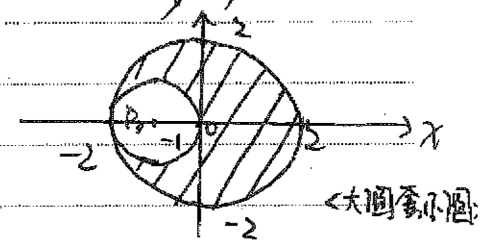
(Kira调教：如何快速判断阴影部分是 $x+y\ge1$ 还是 $x+y\le1$ 呢？So easy！"极限思维"阴影是 $x+y=1$ 直线的右边，那随便取一右边点，比如 $(10000,10000)$，也就是"很右边"的点，显然比1大，所以 $x+y\ge1$。)

例12

求 $I=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$，区域D如图中阴影

解：

(先看有对称性，上下对称，
y的奇函数项立刻扔掉，f(x,y)没有
就先不扔了)



<大圆套小圆>

$I=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$

$=\iint_{D+D_0}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma-\iint_{D_0}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=I_1-I_2$

$I_1=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2r^2dr=\frac{16}{3}\pi$ (口算)

令 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ $D_0 = \frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{3}{2}\pi$, $0\le r\le -2\cos\theta$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_0^{-2\cos\theta} r^2 dr = -\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta$$

$\underline{\underline{\theta-\pi=t}}$ (注:换成熟知的区间~) $\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\, dt = \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\, d\theta = \frac{16}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{32}{9}$

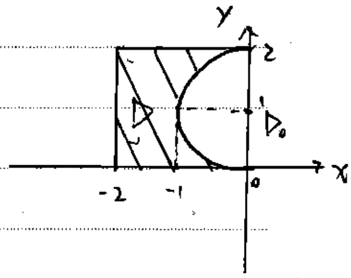
("发射火炮")

综上, $I = I_1 - I_2 = \frac{16}{3}\pi - \frac{32}{9}$

(注 kira: "挖洞"和"补洞"是二重积分计算中非常常见的题型和非常惯用的手法.)

例13

求 $\iint\limits_D y^2 d\sigma$, D如图中阴影区域所示



解:

$$I = \iint\limits_{D+D_0} - \iint\limits_{D_0} = I_1 - I_2$$

$$I_1 = \int_{-2}^0 dx \int_0^2 y^2 dy = \frac{16}{3}$$

I_2 <法一> 令 $\begin{cases} x= r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ $\left(\frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi,\ 0\le r\le 2\sin\theta\right)$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} r^3\sin^2\theta\, dr$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^6\theta\, d\theta = 4\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5}{8}\pi$$

<法二> 令 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y-1=r\sin\theta \end{cases}$ $\left(\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{3}{2}\pi,\ 0\le r\le 1\right)$

· BMDM ·

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r(1+r\sin\theta)^2dr$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{2\sin\theta}{3}+\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)d\theta$$
$$=\frac{\pi}{2}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cancel{-\frac{2\sin\theta}{3}}+\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)d\theta$$
$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{5}{8}\pi$$

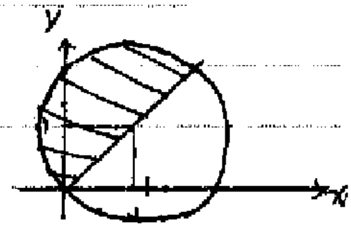
综上，

$$I=I_1-I_2=\frac{16}{3}-\frac{5}{8}\pi$$ ※

（ ◡̈ kira：P97 第二种积分法 我在实践中非常爱用，不仅因为 r 和 θ 好找许多，还可能得到巧合把 $f(x,y)$ 简化～. ）

例 14

求 $\iint_D (x-y)\,d\sigma$，D 如图中阴影所示



解：

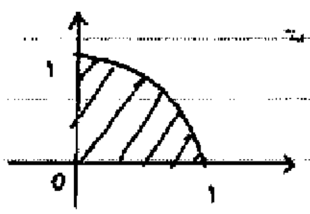
$$\begin{cases} x-1=r\cos\theta \\ y-1=r\sin\theta \end{cases}\qquad \left(\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{5}{4}\pi,\quad 0\le r\le\sqrt{2}\right)$$

$$I=\iint_D[(x-1)-(y-1)]d\sigma=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^2(\cos\theta-\sin\theta)dr$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)d\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\cos t\,dt=-\frac{8}{3}$$ ※

利用轮换对称性一例（"无巧不成题"）

例 15

$$\iint_D\frac{x\sin(x^2+y^2)}{x+y}d\sigma=I$$



$$I=\iint_D\frac{y\sin(x^2+y^2)}{x+y}d\sigma$$
$$2I=\iint_D\sin(x^2+y^2)d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\sin r^2dr=-\frac{\pi}{4}\cos r^2\Big|_0^1$$
$$=-\frac{\pi}{4}(\cos1-1)$$ ※

番外篇：积分换序的使用场景

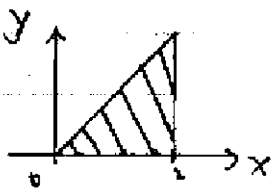
① "积不出"

$$\int\begin{cases} x^{2n} e^{\pm x^2} & dx \\ e^{\frac{1}{x}} & dx \\ \cos\frac{1}{x} & dx \\ \sin\frac{1}{x} & \end{cases}$$

通过换序解决

例16.

求 $\int_0^2 dy \int_y^2 x^2 e^{x^2} dx$



解：

$I = \int_0^2 dx \int_0^x x^2 e^{x^2} dy$

$= \int_0^2 x^3 e^{x^2} dx$ （关于 y 积分视 $x^2 e^{x^2}$ 为常数）

$= \frac{1}{2}\int_0^4 x e^x \, dx$

$= \frac{1}{2}(3e^4+1)$ ☆

☆② "变限积分求导问题"．（非常重要）

▶ 二重积分中 $\frac{d}{dx}\int_0^x \varphi(x,u)\, du$ 此种情况不可避免．（即 x 混入 $\varphi(x,u)$ 中且无法提出）

▶ 处理方法：改变积分次序．

例17

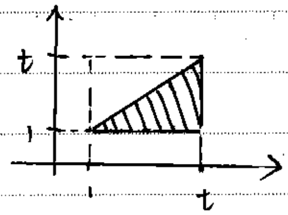
求 $\frac{d}{dt}\int_1^t dy \int_y^t f(x)\, dx$ （$= \int_1^t \varphi(t,y)\, dy$ 型）

解：

$$\varphi(t) = \int_1^t dx \int_1^x f(x)\, dy$$

$$= \frac{d}{dt} \int_1^t f(x)(x-1)\, dx$$

$$= f(t)(t-1)$$



爽吗？

「4A篇」之

多元函数微分学

· 本Part解锁条件：极限玩得非常666！
导数定义烂熟

· 本Part特别关注：P117 Def J. P118 三
P112 方程 P129. 四
P130. 尤其关注参数方程法

· 本Part原点 ：基础好的同学只关注P130之后就好

Kira 前言：

多元函数微分学乃懵逼章节，很多同学直至考试前之天也依然糊成一团。本部分知识细碎，编排或许不如前面有序，你们需将每一页每句话每道题吃透，便足以应对考试要求。

Let's Fight!

一、定义（极限，可偏导，可微，连续可偏导）

二、重要关系图

三、计算求偏导
- 显函数
- 复合函数求偏导 ☆
- 隐函数求偏导 ☆
- 变换求偏导

四、代数应用
- 无条件极值
- 条件极值（有一个非常好的方法！）

$\boxed{一}$ 定义

Def 1.　极限的存在性（$P_{111}-P_{113}$）

极限　二元 $f(x,y)$　$((x,y)\in D)$

$M_0(x_0,y_0)$，若 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，

当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，$|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

称 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$

（☺ Kira说：这是一个在二维空间，无穷多方向上逼近的问题，非常立体。我们选 x，y 两个方向，只为讨论方便）

① 求极限.

可照搬一元函数求极限的方法，但以下方法不可用：

"局部法"× "洛必达"× "单调有界准则"×

例1

求 $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ y\to\frac{1}{2}}} \dfrac{\tan(x^2+2xy+y^2-1)}{x+y-1}$ "等价无穷小替换"

解：

$\tan(x^2+2xy+y^2-1) \sim x^2+2xy+y^2-1$

$$\text{原式} = \lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ y\to\frac{1}{2}}} \frac{(x+y)^2-1}{x+y-1}$$

$$= \lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ y\to\frac{1}{2}}} \frac{(x+y)^2-1^{(2)}}{x+y-1} \to (\text{妙了!})$$

$$= \lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ y\to\frac{1}{2}}} (x+y+1) = 2$$

#

例2

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

解：

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\frac{1}{6}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{6}$$

#

例3

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^2y+y^4)}{x^2+y^2}$$ "夹逼准则"

解：

$$0 < \left|\frac{\sin(x^2y+y^4)}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^2y+y^4}{x^2+y^2}\right|$$

$$\le \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y^4}{x^2+y^2}\right| < |y| + y^2 \to 0$$

$\Rightarrow$ 极限为0.

#

注意 1. 区分 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$

$\Downarrow$ 二重极限（同时趋向）　　$\Downarrow$ 累次极限（有先后）.

如:

- $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)=$ 不∃.　　"第一步已不∃，再怎么算也不∃"
- $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)=$ 不∃.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)=0$.

2. 反面否定极限存在，应充分利用唯一性.

若 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ (\text{方向一})}} f(x,y)=A_1$，$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ (\text{方向二})}} f(x,y)=A_2$

若 $A_1\neq A_2 \Rightarrow$ 原极限不存在.

如: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$　取 $y=x \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$

取 $y=-x \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=-x}}=\frac{-x^2}{2x^2}=-\frac{1}{2}$　$\Rightarrow$ 不∃!

（kira一句话判定: 次数分子低分母高，或分子分母齐次 往往没极限!）

Def 2 连续性

连续 — $z=f(x,y)$ $((x,y)\in D)$，$M_0(x_0,y_0)\in D$

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

注: ① 若上式不成立，不必讨论间断点类型（无要求）

② 设 D 为有限闭区域，$f(x,y)$ 在 D 上连续，则

a) 存在最小值 m 和最大值 M （最值）

b) $\exists k>0$，$\forall (x,y)\in D$，$|f(x,y)|\le k$ （有界）

c) 若 $m<0$，$M>0$，$\exists (\xi,\eta)\in D$，s.t. $f(\xi,\eta)=0$ （零点定理）

d) $\forall \delta\in[m,M]$，$\exists(\xi,\eta)\in D$，s.t. $f(\xi,\eta)=\delta$ （介值定理）

Def 3 偏导数（可偏导性）（☆必考）

偏导数 ─ $z=f(x,y)$ $((x,y)\in D)$，$M_0(x_0,y_0)\in D$

$$
\begin{cases}
\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x'(x_0,y_0)\triangleq\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}\\[2ex]
\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=f_y'(x_0,y_0)\triangleq\lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}
\end{cases}
$$

（ kira 戳穿：本质上求偏导就是一元问题，一元玩不转
到这还坑你！求 x 偏导时，y_0 是摆设，是常数，式子只是长得像二元，本质是求一元）

（ kira 再戳穿：归根结底，是求极限基本功的问题，所以我把求极限放在那么重要的位置！不信看例题！）

例4

已知 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^6}}$，求 $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$

解：

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}\quad\Rightarrow\text{“信手拈来”}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sqrt{x^2}}-1}{x}\quad\Rightarrow\text{“求极限”}$$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ 不$\exists$.

$$f_y'(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{e^{\sqrt{y^6}}-1}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{y^6}}{y} = 0$$

综上 $f_x'(0,0)$ 不存在. $f_y'(0,0)=0$. ☆

Def 4 可(全)微性.

可(全)微 — $\Delta z \overset{若}{=} A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$ $\quad (\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$

称 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可(全)微.

△ 以下概念要明确, 要会写填空:

① 全增量: $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$

② 线性增量: $dz|_{M_0} \triangleq A\Delta x + B\Delta y$

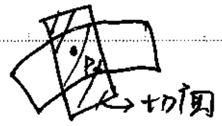
其中 $\begin{cases} A = f_x'(x_0,y_0) \\ B = f_y'(x_0,y_0) \end{cases}$ 是常数.

[$dz|_{M_0}$ 读作 "z在M_0处的全微分"]

③ 可代替性: $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0$ ⇒ 可微!

④ 线性主部: $\Delta z = \underbrace{(A\Delta x + B\Delta y)}_{\text{线性主部}} + o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$

△ 本质: 类比一元情形, 可微本质上是在 P_0 处用平面代替曲面.



▲背滴并会写以下式子（做题原形）

① (背) $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

（能写出这一行 ⇔ 在 (x_0,y_0) 一定可微.）

② (背) $f(x,y)-f(x_0,y_0)=A(x-x_0)+B(y-y_0)+o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$

且 (背) $dz\Big|_{(x_0,y_0)}=Adx+Bdy$

（求法：$dz=\underset{(求)}{\underline{\frac{\partial z}{\partial x}}}dx+\underset{(求)}{\underline{\frac{\partial z}{\partial y}}}dy$ ）

▲注：① 因为 $A=f_x'(x_0,y_0)$，$B=f_y'(x_0,y_0)$，所以必有：

可微 ⇒ 可偏导

（kira 揭露：可微是从无穷多种方向逼近，

而偏导仅从 x 和 y 两个方向逼近.

"二元函数可偏导是拉垃得不得了的事"

例15

☆ 一道非常好的例题 (背)

设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$$

求 ① $f_x'(0,1)$

② $f_y'(0,1)$

③ $dz\Big|_{(0,1)}$

[分析] $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}[f(x,y)-2x+y-2]=0$ ⇒（依据 P_{10}–P_{11} 工具）

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} f(x,y)=1=f(0,1)$ ⇒ 连续

→ 画龙点睛之笔!!!

又 $f(x,y)-2x+y-2=o(\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2})$

由 $f(x,y)-f(x_0,y_0)=A(x-x_0)+B(y-y_0)+o\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

$f(x,y)-f(0,1)=2(x-0)+(-1)(y-1)+o\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}$

$A=f_x'(0,1)=2$, $B=f_y'(0,1)=-1$

$dz|_{(0,1)}=2dx-dy$ ☆

(😊 如果不是解答题:

由 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}[f(x,y)-2x+y-2]=0$

特值法 取 $f(x,y)=2x-y+2$

$f_x'=2$, $f_y'=-1$, $dz=2dx-dy$.)

Def 5 连续可偏导

△ "连续可偏导"就是"偏导数连续".

两种说法完全等价.

💡 判断 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 是否连续可偏导 (非常实用!!!)

step 1. 用定义法求 $f_x'(x_0,y_0)$, $f_y'(x_0,y_0)$ (特殊点)

step 2. 用公式法求 $f_x'(x,y)$, $f_y'(x,y)$ (一般点)

step 3. 验证 ① $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f_x'(x,y) \overset{?}{=} f_x'(x_0,y_0)$

② $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f_y'(x,y) \overset{?}{=} f_y'(x_0,y_0)$

若 ①.② 均成立 ⇒ $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处偏导数连续

即在 (x_0,y_0) 处连续可偏导.

三 重要关系图

Kira教你看一眼就记住!!

$$\begin{array}{lccc}
\text{Layer 3} & \text{连续} & \rightleftarrows & \text{可偏导} \\
 & \nwarrow\!\!\searrow & & \nearrow\!\!\swarrow \\
\text{Layer 2} & & \text{可微} & \\
 & & \uparrow\downarrow & \\
\text{Layer 1} & & \text{连续可偏导} &
\end{array}$$

弱 ↓ 强

"下面可以推出上面，上面推不出下面；
同层（Layer 3）不可互推；上面不满足，下面必不满足"

记住"连续可偏导最强，可微次之，连续和可偏导最弱"
即可。需要现场自己画。

弄透此三题，不怕考大题

例6

$f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$ 在$(0,0)$处连续，研究：①有无x偏导 ②有无y偏导.

[分析]

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{e^{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x}\text{ 不存在.}$$

$\Rightarrow f_x'(0,0)$ 不存在.

$$\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{e^{y^2}-1}{y}=\lim_{y\to0}y=0$$

$\Rightarrow f_y'(0,0)=0$.

例7

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ 研究：①可偏导？②连续性？

[分析]

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0}{x^5}=0 \Rightarrow f_x'(0,0)=0$

同理 $f_y'(0,0)=0$.

由 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0\\y=x^2}}f(x,y)=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0\\y=-x^2}}=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在 $\Rightarrow f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续

☆

例8

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ 研究：①连续？②可偏导？③可微？

解：

① $0\le|f(x,y)|=|x|\cdot\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le|x|$

$\because \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}|x|=0 \quad \therefore \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$

$\therefore f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续.

② $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0}{x|x|}=0\Rightarrow f_x'(0,0)=0$

同理 $f_y'(0,0)=0$

$\therefore f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导.

③ $\Delta z=f(x,y)-f(0,0)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$

$\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{\Delta z-A(x-0)-B(y-0)}{\rho}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在 $\Rightarrow f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微 ☆

三 计算求偏导（此处有套路！）

Case 1 显函数（太easy，几乎不考）

例9

① $z = x^y + y^x$

$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = y x^{y-1} + y^x \ln y$ （x为变量，则视y为常数）

② $z = \arctan\frac{x+y}{x-y}$

$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{x-y-(x+y)}{(x-y)^2}$

Case 2 复合函数&隐函数求偏导

▼一个扫盲：复合函数和抽象函数到底什么意思？

Easy：$f(x,y)$是关于x和y的二元函数的抽象写法

如：$f(x,y) \hat{=} x^2+\frac{1}{2}y+e^y$ （*）

Medium：面对许许多多复杂的实际问题，$f(x,y)$已不能满足我们的需求，于是有了$f(u,v)$，

$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$

如：$f(u,v)$，$u=e^x\cos y$，$v=x^2+y^2$

或直接写为 $f(e^x\cos y, x^2+y^2)$ [推荐]

套用在（*）式中，$f(e^x\cos y, x^2+y^2)$实际为

$(e^x\cos y)^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)+e^{x^2+y^2}$

即 $e^x\cos y$ 代替了x的位置，x^2+y^2代替了y的

位置

Hard：更有甚者，$z=f(x+y,\ f(x,y))$，抽象函数套抽象函数，套在(*)式中，z实际为：

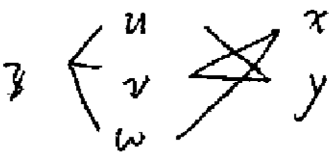
$$(x+y)^2+\frac{1}{2}f(x,y)+e^{f(x,y)}，其中 f(x,y)=x^2+\frac{1}{2}y+e^y.$$

（😊 Kira总结：$f(_,_)$的以上本质心里明白就好，考试直接说抽象函数，不必展成具体表达式（通常题中也没给），，有事有心相笔油！）

▶ 二个常识：

① 链式求导规则　　（画树连线，依次抄写）

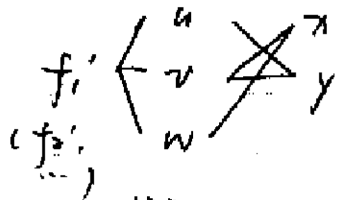
如：$z=f(u,v,w)$，$u=u(y)$，$v=v(x,y)$，$w=w(x)$

step1.
逐层写变量，再连线 ⇨ 

step2.
看z通过谁能连到x，就写谁，不可多不可漏 ⇨ $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dx}$　（u不通x）

② z无论对谁求导，求几阶导，求导后的新函数与原来函数z有相同复合结构　（★★★★★ 重要结论！）

也就是说，对于①中例式，f_1'，f_2'，f_{11}'' … 和复合结构永远是



③ 识别"几元"几个方程

- $F(x,y,z)=0$ ⇨ 一个二元方程
- $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ ⇨ 二个一元方程（只有一个变量自由）
（所以写 $\frac{dz}{dx}$，而非 $\frac{\partial z}{\partial x}$）
- $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ ⇨ 二个二元方程
（2个自由变量，2个约束变量）.

▶ 书写规范

（按此规范走，永远写不错，也永远算不错！非常好用！）

$$\boxed{z=f(\underset{1}{-},\underset{2}{-}) \quad \text{"第1个位置"，"第2个位置"}，f_1',f_2'}$$

所以不管三七二十一，直接写 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\,\_\_+f_2'\,\_\_$
一个个位置看就好，非常方便~

下面结合例题实战具体来感受一下

例10

设 $z=f(e^x\cos y,\ x^2+y^2)$，f 有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

[分析] "$z=f(\underset{1}{-},\underset{2}{-})$（两个位置）"

$z=f<\begin{matrix}1\\2\end{matrix} \times \begin{matrix}x\\y\end{matrix}$

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot e^x\cos y+f_2'\cdot 2x$ ⇨（每个位置对 x 求偏导）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\triangleq\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial y}=\underbrace{\frac{\partial(f_1'\cdot e^x\cos y)}{\partial y}}_{I_1}+\underbrace{\frac{\partial(f_2'\cdot 2x)}{\partial y}}_{I_2}$$

$$I_1=\frac{\partial f_1'}{\partial y}\cdot e^x\cos y+f_1'e^x(-\sin y)$$

$$=(f_{11}''\cdot e^x(-\sin y)+f_{12}''\cdot 2y)e^x\cos y+f_1'e^x(-\sin y)$$

$$I_2=2x\cdot\frac{\partial f_2'}{\partial y}=2x(f_{21}''\cdot e^x(-\sin y)+f_{22}''\cdot 2y)$$ #

☺ Kira备注：就按乘法求导法则层层剥开写，永远不会错！）

☆ 此处用到一个重要结论：若 $z=f(x,y)$ 二阶连续可偏导
则 $f_{xy}''=f_{yx}''$。

所以，不必纠结 x 和 y 谁先求谁后求，根据具体函数随机应变即可～♥

例11　　“考生对本题的混乱程度不可想象”

设 $f(u,v)$ 二阶连续偏导数，$f(1,1)=2$，$f_1'(1,1)=0$，$f_2'(1,1)=0$，$z=f(x+y,f(x,y))$，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$

[分析] [错] $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot f_x'$ ✗ $z=f<_2^1 \times ^x_y$

解释：对于 $f(x,y)$ 依然要分位置 1，2，不能笼统对 x 求导了事。

[又错]:

$$f < \begin{cases} ① < \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \\ ② \text{"}f(x,y)\text{"} < \begin{matrix} ① - x \\ ② - y \end{matrix} \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot 1 + f_2' \cdot f_1' \cdot 1 \quad \times \ !$$

解释：两个 f_1' 混了！看着糟心！括号不能省！

（◡ 必须按。规。矩。写得一清二楚才可以！不怕麻烦，别省笔油！）

[正确答案]

$$z = f(\underbrace{x+y}_{1}, \underbrace{f(x,y)}_{2})$$

$$< \begin{matrix} \overset{x+y}{1} \\ \underset{f(\underset{1}{x},\underset{2}{y})}{2} \end{matrix} \ \bowtie \ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$$

（"都写1,2，因为f(-,-)同"）⇒

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'(x+y, f(x,y)) + f_2'(x+y, f(x,y)) \cdot f_1'(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \triangleq \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = [f_{11}''(x+y, f(x,y)) + \overset{0}{\cancel{f_{12}''(x+y, f(x,y)) \cdot f_2'(x,y)}}$$

$$+ \overset{0}{\cancel{f_1'(x,y)(f_{21}''(x+y, f(x,y)) \cdot 1 + f_{22}''(x+y, f(x,y)) \cdot f_2'(x,y))}}$$

$$+ f_2'(x+y, f(x,y)) \cdot f_{12}''(x,y) \cdot 1]$$

$$\boxed{故 \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(1,1)} = f_{11}''(2,2) + f_2'(2,2) \cdot f_{12}''(1,1).}$$

（◡ Kira tips：① 这种题只管大胆展开，反正都能消掉，一堆0，题中的 $f(1,1)=2$ 也是早有预谋，无巧不成题！
② 结果大胆保留即可，不必纠结。）

例12

① φ, Φ 二阶可导，$u=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\Phi(t)\,dt$
求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

解：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\Phi(x+y)-\Phi(x-y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\Phi(x+y)+\Phi(x-y)$$

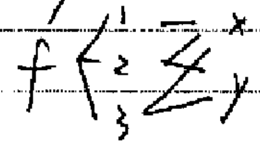
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\Phi'(x+y)-\Phi'(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\Phi'(x+y)-\Phi'(x-y)$$

② $z=f(x^2, xy, \frac{y}{x})$ 二阶连续可偏导，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2' y+f_3'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$



$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x\left(f_{12}''\cdot x+f_{13}''\cdot\frac{1}{x}\right)+f_2'+y\left(f_{22}'' x+f_{23}''\cdot\frac{1}{x}\right)$$
$$+\left(-\frac{1}{x^2}\right)f_3'+\left(-\frac{y}{x^2}\right)\left(f_{32}'' x+f_{33}''\frac{1}{x}\right) \quad \cdots \quad (\text{整理})$$

8 隐函数相关例题

例13.

已知 $F(x+\frac{z}{y}, y+\frac{z}{x})=0$ 求证 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$

解：（一个约束，2个自由变量）

关于 x, y 求偏导，有

$$\begin{cases} F_1'\left(1+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F_2'\,\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x-z\cdot 1}{x^2}=0 & ① \\ F_1'\left(\frac{y\frac{\partial z}{\partial y}-1\cdot z}{y^2}\right)+F_2'\left(1+\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0 & ② \end{cases} \Rightarrow$$

分别解①和②即得 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，此处不再赘述，关注方法即可

例14

已知 $u=f(x,y,z)$，$z=\varphi(x,y)$ 由 $xe^x-ye^y=ze^z$ 确定，求 du.

解：

〈法一〉 step1. $\begin{cases} u=f(x,y,z) \\ xe^x-ye^y=ze^z \end{cases}$ ⇐ (两个二元方程，视 u,z 为 x,y 的函数).

step2. $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$

step3. $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=f_x'+f_z'\frac{\partial z}{\partial x} \\ (1+x)e^x=\frac{\partial z}{\partial x}e^z+ze^z\frac{\partial z}{\partial x} \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1+x}{1+z}e^{x-z} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=f_x'+\frac{1+x}{1+z}e^{x-z}\cdot f_z'$

再对 y 求偏导得最终结果.

〈法二〉 $du=f_x'dx+f_y'dy+f_z'dz \quad (*)$

(微分运算性质) ⇒ 由 $xe^x-ye^y=ze^z \Rightarrow d(xe^x)-d(ye^y)=d(ze^z)$

$\Rightarrow (1+x)e^xdx-(1+y)e^ydy=(1+z)e^zdz$

将 dz 用 dx 和 dy 表示出后，代入 $(*)$ 式即可.

Case 3. 变换求偏导 （无关重要，套路深，不甚强）

将 $z=f(x,y)$ 变为 $z=g(u,v)$

· 型1. $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \partial x \\ \partial y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial u \\ \partial v \end{cases}$

$z<{u \atop v} \Xi {x \atop y}$

· 型2. $w=w(z,x,y)$, $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$

$z=f(x,y) \Rightarrow w=g(u,v)$

即 $\partial z \Rightarrow \partial w$ 同时 $\begin{cases} \partial x \\ \partial y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial u \\ \partial v \end{cases}$

★ 做题套路:

step 1. 将 $dz \Rightarrow dw$ (即"$\frac{\partial z}{\partial x}=f(\frac{\partial w}{\partial x})$")

step 2. $\begin{cases} \partial x \\ \partial y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial u \\ \partial v \end{cases}$ (即"$\frac{\partial w}{\partial x}=g(\frac{\partial w}{\partial u},\frac{\partial w}{\partial v})$")

(看例题就明白了，序在有序 !!!)

例 15. (型2)

设 $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$，其中 $w=\ln z-(x+y)$，$u=x^2+y^2$，$v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$，试将原等式化为 w,u,v 的等式

解:

step 1. ("$\partial z \to \partial w$")

由 $w=\ln z-(x+y)$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-1 \\ \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=z(1+\frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{\partial z}{\partial y}=z(1+\frac{\partial w}{\partial y}) \end{cases}$ ok!

step 2. ("$\begin{cases} \partial x \\ \partial y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial u \\ \partial v \end{cases}$")

$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot 2x-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v} \\ \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot 2y-\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial v} \end{cases}$ $w<\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\times\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$

"无巧不成题!"

将 step1 结果代入原式，有 $y\frac{\partial w}{\partial x}-x\frac{\partial w}{\partial y}=0$

将 step2 结果代入上式，有

$$y\left(\frac{\partial w}{\partial u}\cdot 2x-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\right)-x\left(\frac{\partial w}{\partial u}\cdot 2y-\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\right)=0$$

整理得 $\frac{\partial w}{\partial v}=0$ ※

例 16 (题1)

设 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数且满足等式

$$4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

试确定 a, b 的值，使等式在变换 $u=x+ay$, $v=x+by$ 下简化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$

[分析] $z<\begin{matrix}x\\y\end{matrix} \rightarrow z<\begin{matrix}u\\v\end{matrix}\times\begin{matrix}x\\y\end{matrix}$

解：
$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot 1+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot 1\\ \frac{\partial z}{\partial y}=a\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+b\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot 1+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot 1+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=a\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}(a+b)+b\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a\left(a\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+b\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right)+b\left(a\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+b\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)\\ \quad=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2ab\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+b^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\end{cases}$$

有 $(4+12a+5a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(8+12a+12b+10ab)\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+(4+12b+5b^2)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$

$$\begin{cases}4+12a+5a^2=0\\4+12b+5b^2=0\\8+12(a+b)+10ab\neq0\end{cases}$$ 解得 $\begin{cases}a=-2\\b=-\frac{2}{5}\end{cases}$，$\begin{cases}a=-\frac{2}{5}\\b=-2\end{cases}$

（舍去 $\begin{cases}a=-2\\b=-2\end{cases}$，$\begin{cases}a=-\frac{2}{5}\\b=-\frac{2}{5}\end{cases}$）

四 多元函数微分学的代数应用（有重大干货！）

(一) 无条件极值 （极值点定义在開域，边界无资格讨论极值）

① (必要条件) 设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 有偏导数，且在点 (x_0,y_0) 取极值，则有 $f_x'(x_0,y_0)=0$，$f_y'(x_0,y_0)=0$

[注] 该必要条件同样适用于三元及以上函数.（考的~）

② (充分条件) $f_{xx}''(P_0)=A$，$f_{xy}''(P_0)=B$，$f_{yy}''(P_0)=C$.

令 $\Delta=B^2-AC$，

若 $\begin{cases}\Delta<0 \Rightarrow (必为极值点, \begin{cases}A<0 & 极大值\\A>0 & 极小值\end{cases}\\\Delta>0 \Rightarrow (必不为极值点\\\Delta=0 \Rightarrow 该法失效\end{cases}$ （"$\Delta=0$" 不出题!!!）

[注] 不适用三元及以上（求极值最多到二元）

（☺ kira经验：无条件极值通常作为条件极值题的一种情况讨论.（详见例题））

(二) 条件极值

《型》 $z=f(x,y)$. s.t $\varphi(x,y)=0$ （等式）

（☺ kira提醒：当且仅当约束条件为严格等于"="时，才为条件极值.）

解题套路（终级版）[关于求最值的题目]

▶ step1. 将题干中的约束条件拆为"条件极值"和"无条件极值"两部分.

▶ step2. 对"无条件极值"，由 $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=? \\ y=0 \end{cases}$，

求出全部驻点 (x_0, y_0)

- Case A. 若为"求极值"问题，验 $\Delta = B^2 - AC$，判断极值点类型，求出极值.
- Case B. 若为"求最值"问题，不必验 Δ，最后一起比较大小即可.

▶ step3. 对"条件极值"，有两种方法和三种计算思路

$\boxed{\text{方法一. 拉格朗日乘数法}}$（经典方法）

1° 令 $F = f(x,y) + \lambda \varphi(x,y)$

2° 解 $\begin{cases} F_x' = f_x' + \lambda \varphi_x' = 0 & ① \\ F_y' = f_y' + \lambda \varphi_y' = 0 & ② \\ F_\lambda' = \varphi(x,y) = 0 & ③ \end{cases}$

- 思路一：①② 消去 λ（移项 ①/②）$\Rightarrow y = y(x)$ 代入③
  【见例17】
- 思路二：①② 求出 λ，代回①（或②）$\Rightarrow y = y(x)$，代入③.
  【见例18】[辅助线代]
- 思路三：①或② 求出 λ 或 $y = y(x)$，代入③.

$\boxed{\text{方法二 参数方程法}}$（好用到想哭 $\pi^\wedge\pi$ ❤）

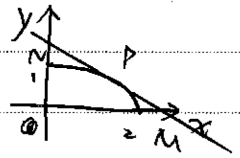
由 $\varphi(x,y)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ （其中 $\alpha\le t\le\beta$） $\left(\text{如 } x^2+y^2=4 \text{ 有 } \begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}\right)$

则 $z=f[x(t),y(t)]$ $(\alpha\le t\le\beta)$ [可用配方、求导...(高中难度)]

【见例 19.20 】

例 17 ———————— (对应 P130 思路1)

椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 如图，作切线，切点位于第一象限，分别交 x 轴、y 轴于 M、N，求 $\triangle MON$ 的最小面积。



解：

由 $\frac{x^2}{4}+y^2=1 \Rightarrow \frac{x}{2}+2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4y}$

1° $P(x,y)\in L$，切线方程 $Y-y=-\frac{x}{4y}(X-x)$

$\begin{cases} \text{令 } Y=0 \Rightarrow X=x+\frac{4y^2}{x}=\frac{4}{x}\left(\frac{x^2}{4}+y^2\right)=\frac{4}{x} \Rightarrow M=\left(\frac{4}{x},0\right) \\ \text{令 } X=0 \Rightarrow Y=y+\frac{x^2}{4y}=\frac{1}{y}\left(\frac{x^2}{4}+y^2\right)=\frac{1}{y} \Rightarrow N=\left(0,\frac{1}{y}\right) \end{cases}$

2° 原题可写为求 $S=\frac{2}{xy}$ 最小值. s.t. $\frac{x^2}{4}+y^2-1=0$

3° 用拉格朗日乘数法

$$F=\frac{2}{xy}+\lambda\left(\frac{x^2}{4}+y^2-1\right)$$

$$\begin{cases} F'_x=-\frac{2}{x^2y}+\frac{\lambda}{2}x=0 & ① \\ F'_y=-\frac{2}{xy^2}+2\lambda y=0 & ② \\ F'_\lambda=\frac{x^2}{4}+y^2-1=0 & ③ \end{cases}$$

(草稿纸：$\frac{-\frac{2}{x^2y}}{-\frac{2}{xy^2}}=\frac{-\frac{\lambda}{2}x}{-2\lambda y} \Rightarrow y=\frac{x}{2}$ 代入③ $\Rightarrow$) 解得：$\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

实际问题一定有最优解 $S_{min}=2$

（☺ Kira补充：本题亮点多多，除了 $\frac{①}{②}$ 代入③ 和"思路一"之外，
1°中求 μ 和 λ 也用到重要技巧，即将
$(\frac{x^2}{4}+y^2)$ 整体提出，充分利用题干 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$
这种直接凑题干，代题干的技巧在多元
极值问题中非常常用，必须掌握~！）

> ♥ "为什么有的人做题飞快，且不出错呢？
> 为什么呢？" ——

例18 （对应P130 思路2）

求 $u=xy+2yz$ 在 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值与最小值.

解：

用拉格朗日乘数法

$$F(x,y,z,\lambda)=xy+2yz+\lambda(x^2+y^2+z^2-10)$$

求偏导
$$\begin{cases} F_x'=y+2\lambda x=0 & ① \\ F_y'=x+2z+2\lambda y=0 & ② \\ F_z'=2y+2\lambda z=0 & ③ \\ F_\lambda'=x^2+y^2+z^2-10=0 & ④ \end{cases}$$

再次用到题干!!!

（草稿纸：
$$\left.\begin{array}{ll} ①\cdot x & xy+2\lambda x^2=0 \\ ②\cdot y & xy+2yz+2\lambda y^2=0 \\ ③\cdot z & 2yz+2\lambda z^2=0 \end{array}\right\} \underbrace{2(xy+2yz)}_{=u}+2\lambda\underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{=10}=0$$

$\Rightarrow \quad u=-10\lambda$

又
$$\begin{cases} 2\lambda\cdot x+1\cdot y+0\cdot z=0 \\ 1\cdot x+2\lambda\cdot y+2\cdot z=0 \\ 0\cdot x+2\cdot y+2\lambda\cdot z=0 \\ x,y,z\text{不全为}0 \end{cases}$$

$Ax=0$ 有非0解 $\Leftrightarrow |A|=0$

· BMDM ·

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \lambda_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = -5\sqrt{5} \\ u_3 = 5\sqrt{5} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 最大值 $5\sqrt{5}$，最小值 $-5\sqrt{5}$ ☆

注意：

① 解方程的过程不必写在卷面，直接给最终结果即可。

② 但是，结果占分数大头。列式不难，解才难。实在解不出就编两个结果。宇哥说，"方看-6，编2个结果-4"。宁可信其有……

例19 （华丽丽的参数方程法！）

求 $z = x^2 - 2x - 2y^2 + 3$，在 D：$x^2+y^2 \le 1$ 上的 m, M.

解：

当 $x^2+y^2<1$ 时

由 $\begin{cases} 2x-2=0 \\ -4y=0 \end{cases} \Rightarrow$ 无解

当 $x^2+y^2=1$ 时 令 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$

$$\begin{aligned} z &= \cos^2 t - 2\cos t - 2\sin^2 t + 3 \\ &= 3\cos^2 t - 2\cos t + 1 = 3\left[\left(\cos t - \tfrac{1}{3}\right)^2 - \tfrac{1}{9}\right] + 1 \\ &= 3\left[\cos t - \tfrac{1}{3}\right]^2 + \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

当 $\cos t = \frac{1}{3}$ 时，$z_{min} = \frac{2}{3}$；

当 $\cos t = -1$ 时，$z_{max} = 6$； 所以 $m = \frac{2}{3}$，$M = 6$ ☆

Kira 突出重点：

① 约束 "≤" or "≥" 通常被拆为

无条件极值 和 条件极值两部分

即 "=" 和 "<"/">"，用各自用各自方法求解.

② 能用参数方程解决的问题决不用拉格朗日！

例 20

$2x\,dx-2y\,dy$ 是一个二元函数的全微分，而且 $u(0,0)=3$

求二元函数在椭圆上的最大、小值 $x^2+4y^2\le 4$.

解：

step 1. 求 $u(x,y)$ 【你肯定不熟！】

法一：$du=2x\,dx-2y\,dy=d(x^2)-d(y^2)=d(x^2-y^2)$

$\Rightarrow u=x^2-y^2+C$

$\because u(0,0)=3 \quad \therefore C=3$.

$u=x^2-y^2+3$

法二：$\frac{\partial u}{\partial x}=2x$. $\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y$

$\frac{\partial u}{\partial x}=2x \Rightarrow u=x^2+\varphi(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(y)=-2y \Rightarrow \varphi(y)=-y^2+C$

$\therefore u=x^2-y^2+C$

$\because u(0,0)=3 \quad \therefore C=3 \quad \Rightarrow u=x^2-y^2+3$.

step 2. 当 $x^2+4y^2<4$ 时.

由 $\begin{cases}2x=0\\-2y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$, $u(0,0)=3$.

当 $x^2+4y^2=4$ 时. 令 $\begin{cases}x=2\cos t\\y=\sin t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$

(非常熟悉!!!)

$z = 4\cos^2 t - \sin^2 t + 3 = 5\cos^2 t + 2$

当 $\cos t = 0$，$z_{min} = 2$.

当 $\cos t = \pm 1$，$z_{max} = 7$.

即 $m = 2$. $M = 7$.

Ħ

「4A篇」之

微分方程

- 本Part的解锁条件：不定积分比较666.
- 本Part的特别关注：P142 Kira支招等
- 本Part的亮点：内容不多，都有套路，全套路

Kira 前言：

微分方程是考研必考的部分，知识点清晰，按套路走即可。去年12月我为大家答疑时，发现很多同学这里学得一塌糊涂，我觉得一方面是这块套路不清晰，另一个重要原因是积分底子没打好。

「大主小主端」是根基！务必经常返工！

Let's Fight！

一．概念（微分方程，阶数，通解，解的结构）

二．一阶微分方程求解
- 变量可分离型（最快）
- 齐次型
- 一阶线性型（最高频）
- 可降阶二阶微分方程

三．高阶微分方程求解
- 齐次
- 非齐次

（套模板即可）

一 概念

Def 1　n阶微分方程

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

$y^{(n)}$：最高阶不能缺　　"全家福"

Def 2　阶数

y的导数的最高次数
- $n=1$　一阶
- $n\geq 2$　高阶

Def 3 通解

"通解" $\neq$ "全部"

[注] 做题仅求出通解即可，允许丢奇解（特殊解）

Def 4 解的结构及相关

① $$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0 \quad (*)$$
（n阶齐次线性微分方程）

② $$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x) \quad (**)$$
（n阶非齐次 D.E.）

若 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$

$$y^{(n)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f_1(x) \quad (**)'$$

$$y^{(n)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f_2(x) \quad (**)''$$

即 $(**)$ 可拆成两个子方程.

③ 结构：

(i) 若 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_s(x)$ 为 $(*)$ 之解

$\Rightarrow k_1\varphi_1(x)+\cdots+k_s\varphi_s(x)$ 为 $(*)$ 之解.

★★★★★(ii) 若 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_s$ 为 $(**)$ 解

$$\Rightarrow k_1\varphi_1(x)+\cdots+k_s\varphi_s(x)\begin{cases}\text{为}(*)\text{解} \Leftrightarrow k_1+k_2+\cdots+k_s=0 \quad (\text{齐})\\ \text{为}(**)\text{解} \Leftrightarrow k_1+\cdots+k_s=1 \quad (\text{非齐})\end{cases}$$

(iii) $(*)$解 $+$ $(**)$解 $=$ $(**)$解

即"齐次解 + 非齐次解 = 非齐次解".

(iv) $(**)$解 $-$ $(**)$解 $=$ $(*)$解

(v) $(**)'$解 $+$ $(**)''$解 $=(**)$解

（😊 kira强调：解的结构中每一条都非常重要，
其中 (i) (iii) (iv) 是常识，
(ii) 汤神给的，非常好用，可以秒很多题。）

三 一阶微分方程求解

1. 变量可分离型

若 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)=g(x)\cdot h(y)$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{h(y)}=\int g(x)\,dx$$

（😊 kira备注：这是最简单的一种型，如果考试遇到真是要开心死了。我本科学ODE，最先学会的就是此法。）

例 1

求 $y'+y^2\tan x=\tan x$ 的通解

解：

$$\frac{dy}{dx}=\tan x\,(1-y^2)$$

$$\Rightarrow \int\frac{dy}{1-y^2}=\int \tan x\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|=-\ln|\cos x|+\ln c_1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1+y}{1-y}\right|^{\frac{1}{2}}=\frac{c_1}{|\cos x|} \Rightarrow \left|\frac{1+y}{1-y}\right|=\frac{c_1^2}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \frac{1+y}{1-y}=\frac{c}{\cos^2 x} \Rightarrow y=\frac{c-\cos^2 x}{c+\cos^2 x}\ ,\ c\neq 0 \quad ※$$

满分

[注] ① 当过程中出现 $\ln *$ 时，$*$ 不确定正负 ⇒ 加"| |"；
② 扔掉"| |"的方式有"加平方"和"用 c 替换 c_1^2"
在例1中都有体现。

2. 齐次型

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad y=y(x)$$

则令 $y/x=u$，则 $y=u\cdot x$ ⇒

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\cdot x+u\cdot 1 \Rightarrow \frac{du}{dx}x+u=f(u)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}$$ （即化为可分离变量型）

（kira 备注：不用背，考试时发现 $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 这种型直接令 $u=\frac{y}{x}$，剩余再慢慢推，很简单）

例2 （易错！）

求 $ydx-(x+\sqrt{x^2+y^2})dy=0$ 的通解 $(y>0)$

[分析] $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\frac{y}{x}}{1+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}}$ X

（此法不好，因为要分 $\begin{cases}x>0\\x<0\end{cases}$ 讨论，在根号前填正负号）

解：$\frac{dx}{dy}=\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}$ $(x=x(y))$

$=\frac{x}{y}+\sqrt{(\frac{x}{y})^2+1}$

令 $\frac{x}{y}=u$，则 $x=u\cdot y$ ⇒ $\frac{dx}{dy}=\frac{du}{dy}\cdot y+u\cdot 1=u+\sqrt{u^2+1}$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln(u+\sqrt{1+u^2}) = \ln y + \ln c_1$$

$$\Rightarrow u+\sqrt{1+u^2} = cy \xRightarrow{\text{回代}} \frac{x}{y} + \sqrt{1+(\frac{x}{y})^2} = cy \quad (c>0) \text{※}$$

(😀 Kira备注:

①回代后可保留隐式解

② $x=x(y)$ 是非常好用的救向之法，在作为常识掌握)

☑、☑ 汤神说："微分方程要多做，很多书的解答
写得要死啊！"

例3 （聪明地计算~）

$$x\,dy = (y+\sqrt{x^2+y^2})\,dx \quad (x>0)$$

解:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}$$

$$\xRightarrow{\frac{y}{x}=u} u + x\frac{du}{dx} = u + \sqrt{1+u^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{x} + \ln c$$

$$\ln(u+\sqrt{u^2+1}) = \ln x + \ln c$$

$$\Rightarrow u+\sqrt{u^2+1} = cx \qquad (\text{"可以不解"})$$

取倒数 $\sqrt{u^2+1} - u = \frac{1}{cx}$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{2}(cx - \frac{1}{cx}) \Rightarrow y = \frac{x}{2}(cx - \frac{1}{cx}) \quad (c>0) \text{※}$$

(TT∧TT 非常漂亮的秒解！根本反应不过来！)

六、一阶线性微分方程

① 齐次 ▶ def - $\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$

死背 ⇨ ▶ 通解公式：$y=ce^{-\int p(x)dx}$

★★★② 非齐次 ▶ def - $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$

▶ 通解公式：

死背 ⇨ $y=\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c\right]e^{-\int p(x)dx}$.

例4 (计算大有决窍！)

求 $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x}=4$ 解

解：

$y=(\int 4e^{\int -\frac{2}{x}dx}dx+c)e^{-\int -\frac{2}{x}dx}$

$=(-\frac{4}{x}+c)x^2$

$\therefore y=cx^2-4x$, $\forall c$ ※

(Kira 支招：注意到 $e^{\int p(x)dx}$ 和 $e^{-\int p(x)dx}$ 互为倒数，算一个就够了，另一个直接放心大胆写倒数。)

例5

求 $y'=\frac{y}{2x}+\frac{x^2}{2y}$ 的通解

解：

$y'+(-\frac{1}{2x})y=\frac{x^2}{2}\cdot y^{-1}$ $\xrightarrow{(两边乘y)}$

$y\cdot y'+(-\frac{1}{2x})y^2=\frac{x^2}{2}$ $\xrightarrow{(令y^2=t)}$

$\frac{1}{2}t'+(-\frac{1}{2x})t=\frac{x^2}{2}$ $\Rightarrow$

$t'+(-\frac{1}{x})t=x^2$ $\Rightarrow t=\frac{1}{2}x^3+cx \Rightarrow y^2=\frac{1}{2}x^3+cx$, $\forall c$. ※

(kira 提醒：永远记得写c的范围哦~.)

4. 可降阶的高阶微分方程

- Case 1. $y''=f(x,y')$，缺 y

方法："缺 y 就对 y 赶尽杀绝，干掉 y'，y''"

♥ 令 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dx}$ ⇒

$\frac{dp}{dx}=f(x,p)$

如 $y''=x\cdot y' \overset{y'=p}{\Rightarrow} \frac{dp}{dx}=x\cdot p$ 分离变量

- Case 2. $y''=f(y,y')$ 型，缺 x

方法："缺 x 就决不允许 x 再出现，斩草除根 x"

♥ 令 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p$

三 高阶微分方程求解

【 kira 六个字：背公式，套模板！】

(要拿满分哦~)

1. 齐次 $y''+py'+qy=0$

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \quad, \Delta=p^2-4q$$

背

① 当 $\Delta>0 \Rightarrow \lambda_1\neq\lambda_2$，$y_{齐通}=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$

② 当 $\Delta=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda$，$y_{齐通}=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$

③ 当 $\Delta<0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$，$y_{齐通}=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

(☆ 考研数学唯一诊断变态之处，直接死记硬背 ~)

例 6 （化"超纲"为正常）

设 $\cos x$ 与 xe^x 为某四阶常系数线性齐次微分方程的两个解，则首项系数为 1 的该方程为______.

解：

$$\cos x = e^{0\cdot x}(1\cdot\cos x + 0\cdot\sin x)$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm i \Rightarrow \lambda^2+1=0$$

$$xe^x = (0+x\cdot 1)e^{1\cdot x}$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = \lambda_4 = 1 \Rightarrow (\lambda-1)^2=0$$

$$\Rightarrow (\lambda^2+1)(\lambda-1)^2=0$$ "别忘了写成表达式"

$$\Rightarrow \lambda^4-2\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda+1=0$$

$$\Rightarrow y^{(4)}-2y^{(3)}+2y''-2y'+y=0$$

（Kira 贱贱地说：微分方程计算你唯一要做的，就是把已知条件套入固定形式（模板），如例6那样。再就是把积分练好，不怵计算～没了!!!）

☆2. 非齐次

△ 非齐次通解 = 齐次通解 + 特解 (P138 解的结构)

齐次通解的求法刚刚已经会了，此部分任务是学如何求特解. 以下左栏是模板，右栏是实例，两边对照着看！所有题目都可参考这两栏照搬~。

你问我什么叫"举一反三"？ That is "举一反三"!

与其做10道习题，不如精做一道例题；
例题有凭有证，例题有头有尾；
可以一抵十，以一抵百，且信心大涨.

—kira

〈模板〉

① $y''+py'+qy=e^{\alpha x}\cdot P_m(x)$

设 $y^*=e^{\alpha x}\cdot Q_m(x)\cdot x^k$

一看：自由项中的 α

二算：$\lambda^2+p\lambda+q \Rightarrow \lambda_1=\ ,\ \lambda_2=$

三比较：$\begin{cases} k=0，当 \alpha\neq\lambda_1,\ \alpha\neq\lambda_2 \\ k=1，当 \alpha=\lambda_1 或 \alpha=\lambda_2 \\ k=2，当 \alpha=\lambda_1=\lambda_2 \end{cases}$

〈实例〉

$y''-4y=e^x(2x+3)$

设 $y^*=e^x\cdot(Ax+B)\cdot x^k$

一看：$\alpha=1$

二算：$\lambda^2-4=0 \Rightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=-2$

三比较：$\alpha\neq\lambda_1,\ \alpha\neq\lambda_2 \Rightarrow k=0$

（接实例） $\Rightarrow y^*=e^x(Ax+B)$ 代入方程

$\Rightarrow e^x(-3Ax+2A-3B)=e^x(2x+3)$

$\Rightarrow \begin{cases} -3A=2 \\ 2A-3B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{2}{3} \\ B=-\frac{13}{9} \end{cases}$

$\Rightarrow y^*=e^x\left(-\frac{2}{3}x-\frac{13}{9}\right)$

$y_{齐通}=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$

故 $y_{非齐通}=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+e^x\left(-\frac{2}{3}x-\frac{13}{9}\right)$ ☆

[注释] ① $P_m(x)$ 是 m 阶多项式，$Q_m(x)$ 同理.

举例：当 $P_m(x)$ 为 $2x$ $\Rightarrow$ $Q_m(x)$ 设为 $Ax+B$.

当 $P_m(x)$ 为 x^2+1 $\Rightarrow$ 对应 $Q_m(x)$ 为 Ax^2+Bx+C.

② 例题即模板，会一道例题即会所有题.

<模板> | <实例>

② $y''+py'+qy = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x]$ | $y''+4y=\cos 2x$

设：$y^* = e^{\alpha x}[Q_l^{(1)}(x)\cos\beta x + Q_l^{(2)}(x)\sin\beta x]x^k$
其中 $l=\max\{m,n\}$

设：$y^* = e^{0\cdot x}[\underbrace{A\cos 2x} + \underbrace{B\sin 2x}]x^k$
两个都要！

一看：自由项中的 $\alpha,\beta \xRightarrow{拼成} \alpha\pm\beta i$
二算：$\lambda^2+p\lambda+q=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}$
三比较：$\begin{cases} k=0, & \lambda_{1,2}\neq\alpha\pm\beta i \\ k=1, & \lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i \end{cases}$

一看：$0\pm 2i$
二算：$\lambda^2+4=0 \Rightarrow \lambda=0\pm 2i$
三比较：$0\pm 2i = 0\pm 2i$
$\Rightarrow k=1$
…

（kira 备注：i) 即右边只有 $e^{\alpha x}$ 和多项式（纯种）时用①
而当右边出现三角函数 cos，sin 用②
（举例） ii) ②中若右边项为 $(2x\cos 2x + x^2\sin 2x)e^{\alpha x}$
则设 $y^* = e^{\alpha x}((A_1x^2+B_1x+C_1)\cos 2x + (A_2x^2+B_2x+C_2)\sin 2x)$
即取 $\max\{m,n\}$ 最高次数2对应的多项式）

$\boxed{\text{一个快速计算法}}$

将 y^* 代回原方程求 A.B.C 时，计算较麻烦，易出错。为此，汤神提供了快速算法。

需要背公式，觉得难背可仍用比法，但掌握后计算会快很多～

"考前背一背，考场上摆一摆"

对于 $y''+py'+qy=P_n(x)e^{kx}$

设 $y^*(x)=Q(x)e^{kx}$

-start-

记 $Q''+(2k+p)Q'+(k^2+pk+q)Q=P_n(x)$ (*)

① $k=\lambda_1\neq\lambda_2$

则 $Q''+(2k+p)Q'=P_n(x)$

② $k=\lambda_1=\lambda_2$

$Q''=P_n(x)$

-over-

(kira 补充：关键是背下(*)式．找到 k．p．q．套入即可)

实战·例7

求解 $y''-y'-2y=(2x+1)e^{-x}$

解：

$\lambda^2-\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=-1$

通解 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$

特解设 $y_0(x)=e^{-x}(Ax+B)x$

(用快速解法)

$Q=Ax^2+Bx \Rightarrow Q''=2A,\ Q'=2Ax+B$

因为 $k=\lambda_1\neq\lambda_2$，套用①

$2k+p=-2-1=-3$

所以有 $Q''+(2k+p)Q'=P_n(x)$ 写为

$2A+(-3)\cdot(2Ax+B)=2x+1$

立刻解得 $A=-\frac{1}{3}$，$B=-\frac{5}{9}$

得通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-(\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{9}x)e^{-x}$

「4A 骤/狮」之

中值定理.

· 本Part的解题条件：数形结合的感觉要好.

· 本Part的特别关注：P155 中值定理大法
(尤其P159 ㈢)
P169 辅助函数构造.

· 本Part难点：Taylor那块例题较多较难.
没时间可先跳过

Kira 前言：

这应该是最庞大的一个部分了，道理非常单纯，但是题型较为多变，因此梳理框架至关重要。每种套路配合一道例题服用后效果更佳哦～♡

这块汤家凤讲得简练（我听的版本），我作为引入；武神讲得全面、实用（首推"还原法"），我作为进阶；此外我会给出非常详尽的构造辅助函数的方法，保证你每道题都有套路可下手去做。

Let's Party !

引入 （热身）

{ 十一个基本定理论述（①—⑩只用不证，⑪会证）
综合例题分析 }

一 基本定理论述

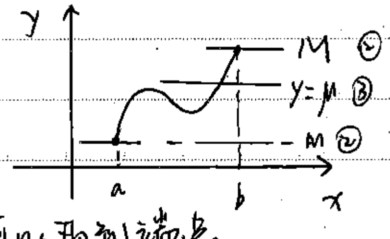
设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

① 有界定理： $|f(x)| \le M \quad (M>0)$

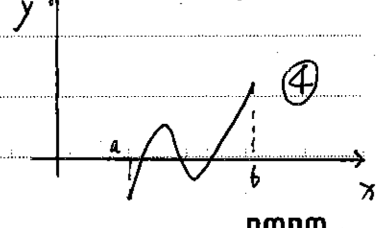
② 最值定理： $m \le f(x) \le M$，其中 m, M 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值。

③ 介值定理： 当 $m \le \mu \le M$ 时，$\exists \xi \in [a,b]$，使 $f(\xi)=\mu$

④ 零点定理： 当 $f(a)\cdot f(b)<0$ 时，$\exists \xi \in (a,b)$，使 $f(\xi)=0$

（图示）


（闭区间连续函数）



②③可以取到端点

⑤ 费马定理：若 $f(x)$ 在一点可导且在该点取极值，则必有 $f'(x)=0$

⑥ 罗尔定理：设 $f(x)$ 满足以下三条

1) $[a,b]$ 上连续
2) (a,b) 内可导 $\Rightarrow$ (a,b) 内至少有一点 $\xi\in(a,b)$
3) $f(a)=f(b)$ 使得 $f'(\xi)=0$

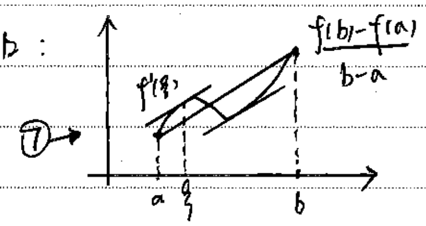
(kira p.s. 其中 1) 2) 是套话，由出题人保证，读作"闭区间上连续，开区间可导" 我们的任务是搞出 3))

⑦ 拉格朗日中值定理：设 $f(x)$ 满足以下两条

1) $[a,b]$ 上连续
2) (a,b) 内可导 ("简直无条件成立…")

$\Rightarrow f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，$(a,b)$ 内至少有一点 ξ

(画图便知：



⑥是⑦的"躺平版")

⑧ Cauchy 柯西中值定理：设 $f(x), g(x)$ 满足

1) $[a,b]$ 上连续
2) (a,b) 内可导 $\Rightarrow \exists\, \xi\in(a,b)$, s.t. $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$
3) $g'(x)\neq 0$ ▲

[注意：$f(\xi)$ 和 $g(\xi)$ 共用同一个 ξ.]

⑨ Taylor公式

(1) 带拉格朗日余项的n阶泰勒公式

设$f(x)$在点x_0的某个邻域内有$n+1$阶导数存在，则对该邻域内的任意点x均有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

其中ξ介于x、x_0之间.

(2) 带Peano余项的n阶泰勒公式

设$f(x)$在点x_0处n阶可导，则存在x_0的一个邻域，对于该邻域内任一点成立

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$
$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

[注] ① Lagrange余项多用于证明（ξ长了一张"证明脸"）

② Peano余项多用于计算（$o(x-x_0)^n$长了一张"极限脸"）

Kira激情地说：

很多同学不喜欢Taylor公式，觉得干嘛好端端把"简单"的函数"复杂化"，写那么长。Actually，恰好相反。Taylor是在把奇奇怪怪的函数用最简单的幂函数来代替，是非常令人震撼的结论！

"无限分割" "以直代曲" "无限逼近"都是微积分学最最经典而核心的思想，泰勒公式是这些思想美不胜收的凝结.

对于考研来说，以上话并无卵用，背公式，直接套，结束~

⑩ 定积分中值定理（考试时不证即可用）

如果 $f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 连续，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使下式成立：$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

⑪ 加强形式的积分中值定理（考试时，先证再用）

如果 $f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 连续，则在 (a,b) 上至少存在一点 ξ，使下式成立：$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

pf：令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 连续

由 Lagrange 中值定理，$\exists \xi \in (a,b)$ s.t.

$$\int_a^b f(x)dx - 0 = f(\xi)(b-a)$$

三 综合例题分析

（kira p.s.：几道不大但有代表性，有综合特色的热身题，先把这三道题拿下，把方法吸收一下，我们再展开终级版中值定理题目的套路。）

例 1（找"F(x) + 折腾区间"）

设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上一阶导数连续，$(0,\frac{\pi}{2})$ 内二阶可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=3$，$f(\frac{\pi}{2})=1$，证明 $\exists \xi \in (0,\frac{\pi}{2})$ 使 $f'(\xi)+f''(\xi)\tan\xi=0$.

[分析] 欲证 $f'(\xi)=0$，想"费马"和"罗尔"，本题设条件充满：

相等关系 ⇒ 罗尔.

不等关系 ⇒ 费马.

〈法一〉令 $F(x)=f'(x)\sin x$，$\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$

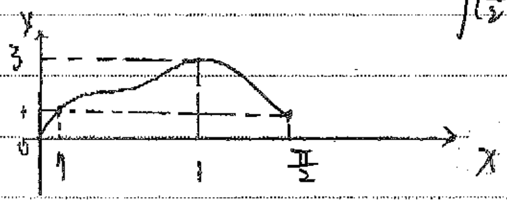
$F(0)=f'(0)\sin 0=0$

$F(\frac{\pi}{2})=f'(\frac{\pi}{2})\sin\frac{\pi}{2}$ 是否为0无法判断，区间$(0,\frac{\pi}{2})$失效。

$F(\tau)=f'(\tau)\sin\tau$，若使$F(\tau)=0$，因为$\sin\tau\neq 0$，$\tau\in(0,\frac{\pi}{2})$

所以只证$f'(\tau)=0$。有$f(0)=0$，$f(1)=3$，$f(\frac{\pi}{2})=1$

由介值定理，$\exists\eta\in(0,1)$，$\left.\begin{matrix}f(\eta)=1\\ f(\frac{\pi}{2})=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow f'(\tau)=0$，$\tau\in(\eta,\frac{\pi}{2})\subset(0,\frac{\pi}{2})$



$\Rightarrow F(\tau)=0=F(0)$

$\Rightarrow\exists\xi\in(0,\tau)\subset(0,\frac{\pi}{2})$

s.t. $f'(\xi)+f''(\xi)\tan\xi=0$ #

（😊：此法麻烦，从题干$f(0)=0$，$f(1)=3$，$f(\frac{\pi}{2})=1$中可看出不等关系，转用费马定理）

〈法二〉由 $f(0)=0$，$f(1)=3$，$f(\frac{\pi}{2})=1$ $\Rightarrow$ 最大值必在区间内部

而区间内最大值必为极值，即极值点 $\in(0,\frac{\pi}{2})$

由费马定理，极值点处有$f'(x_0)=0$，从而有$F(x_0)=0$。

由$F(0)=F(x_0)=0$

$\Rightarrow\exists\xi\in(0,x_0)\subset(0,\frac{\pi}{2})$ s.t. $f'(\xi)+f''(\xi)\tan\xi=0$ #

（😊 Kira备注：其实使用⑤⑥⑦等中值定理是非常容易的，题目肯定都帮你凑好了，难点在$F(x)$如何找，主要依赖于$(uv)'=uv'+u'v$和$(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$两大运算法则以及你对求导公式、部分公式的倒推加深。

我将在P169 — P170 详细介绍所有求$F(x)$的情形。）

例2　　　　　　　　（真题11分，得分率2分）

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶可导，$f(1)=1$，证明

(I) $\exists \xi \in (0,1)$，使 $f'(\xi)=1$.

(II) $\exists \eta \in (-1,1)$，使 $f'(\eta)+f''(\eta)=1$.

解：(I)（送分）令 $G(x)=f(x)-x$

有 $G(0)=f(0)-0=0$

$G(1)=f(1)-1=0$

$\Rightarrow G'(\xi)=0$，即 $\exists \xi \in (0,1)$，使 $f'(\xi)=1$ ※

(II)（移项观察）$f'(x)+f''(x)-1=0$

（一眼看穿）设 $F(x)=f'(x)e^x-e^x$

（有 $\begin{cases} F(1)=f'(1)e-e \\ F(-1)=f'(-1)e^{-1}-e^{-1} \end{cases}$，两头不好用！于是想起第(I)问）

由奇函数，有 $\begin{cases} F(\xi)=f'(\xi)e^{\xi}-e^{\xi} = e^{\xi}-e^{\xi}=0 \\ F(-\xi)=f'(-\xi)e^{-\xi}-e^{-\xi} = e^{-\xi}-e^{-\xi}=0 \end{cases}$，$\xi \in (0,1)$

由罗尔定理

$\Rightarrow \exists \eta \in (-1,1)$ s.t. $f'(\eta)+f''(\eta)=1$

※

（kira备注：

第一问是送分的，而且一定会被第二问用到，即使第一问不会证，在第二问中也可以直接用～）

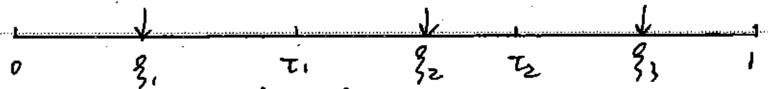
例3

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$

证明：$\exists$ 不同 $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0,1)$ 使 $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=3$

pf:

（思路：将 $(0,1)$ 三等分，由Lagrange定理）



$$\left.\begin{aligned}
f'(\xi_1) &= \frac{f(\tau_1)-f(0)}{\tau_1-0} \\
f'(\xi_2) &= \frac{f(\tau_2)-f(\tau_1)}{\tau_2-\tau_1} \\
f'(\xi_3) &= \frac{f(1)-f(\tau_2)}{1-\tau_2}
\end{aligned}\right\}$$

取 $\tau_1=\frac{1}{3}$，$\tau_2=\frac{2}{3}$，即得证

（凑结果，凑抵消~）

★

进阶（中值定理大法）

一、涉及 θ（两种情况）

二、使 $f^{(n)}(\xi)=0$（三种方法）

三、结论仅含 ξ 的情形（三种方法）

四、结论含 ξ, a, b 的情形（两种情况）

五、结论含 ξ, η 的情形（三种情形）

六、Taylor法（二阶、三阶以上可以考虑）（不知 x_0 的取法）

(一) 关于 θ 的解答题

有以下常用等式：

① $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，$\xi\in(a,b)$

$\quad = f'[a+\theta(b-a)](b-a)$ $\quad \theta\in(0,1)$

② $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

（★ θ 不是常数，与 x、x_0 有关）

③ $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$，$\xi\in[a,b]$

$= f[a+\theta(b-a)](b-a) \qquad (0\le\theta\le1)$

(˙▭˙ Kiro表示：以上式子不需背，只是用另外一种方式来表示了而已，考试见到θ不抵触不陌生即可，认得即可)

套路 $\begin{cases} \text{当 } f(x) \text{ 表达式已知，求出 } \theta \\ \text{当 } f(x) \text{ 表达式未知，不求 } \theta \quad (\text{多用导数定义}) \end{cases}$

例4

$f(x)=\arctan x$ ， $a>0$

$f(a)-f(0)=f'(\theta a)\,a \qquad (0<\theta<1)$

求 $\lim\limits_{a\to0}\theta=?$

解：（果断，求出θ）

由表达式 $\arctan a = \dfrac{a}{1+\theta^2a^2}$

$\Rightarrow \theta^2 = \dfrac{a-\arctan a}{a^2\arctan a}$

$\lim\limits_{a\to0}\theta^2 = \lim\limits_{a\to0}\dfrac{a-(a-\frac{a^3}{3}+o(a^3))}{a^3}=\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \lim\limits_{a\to0}\theta=\dfrac{\sqrt3}{3}$ ※

例5

$\int_0^x e^t\,dt = e^{\theta x}\cdot x$ 求①θ表达式 ② $\lim\limits_{x\to0}\theta$

解：①（求出来！） $\dfrac{e^x-1}{x}=e^{\theta x} \Rightarrow \theta=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{e^x-1}{x}$

② $\lim\limits_{x\to0}\theta=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\frac{e^x-1-x}{x})}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}$ ※

例6 （$f(x)$ 表达式未知）

$f(x)$ 二阶连续可导，$f''(a) \neq 0$，$f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h)\cdot h$ $(0<\theta<1)$。求 $\lim\limits_{h\to 0} \theta$

解：

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + o(h^2)$$

$$\Rightarrow \quad f'(a+\theta h) - f'(a) = \frac{1}{2} f''(a) h + o(h)$$

$$\theta \cdot \frac{f'(a+\theta h) - f'(a)}{\theta h} = \frac{1}{2} f''(a) + \frac{o(h)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \theta \cdot f''(a) = \frac{1}{2} f''(a)$$

$\because f''(a) \neq 0$，$\therefore \lim\limits_{h\to 0} \theta = \frac{1}{2}$ ※

（☺ kira备注：同书 P_{155} ①②③ ~）

例7

$f(x)$ 在 $(-a,a)$ 可导，$f'(0) \neq 0$，试证：

① $\forall x \in (0,a)$，$\exists \theta$，s.t. $\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{-x} f(t)\,dt = [f(\theta x) - f(-\theta x)]x$，$\theta \in (0,1)$

② 求 θ.

解：① $\int_0^{-x} f(t)\,dt \xlongequal{t=-u} \int_0^x f(-u)(-du) = -\int_0^x f(-t)\,dt$

非常漂亮 → 左 $= \int_0^x [f(t) - f(-t)]\,dt \triangleq F(x) = F(x) - F(0) = F'(\theta x)x$

$= [f(\theta x) - f(-\theta x)]x$，$\theta \in (0,1)$

② $$\frac{\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{-x} f(t)\,dt}{x^2} = \frac{f(\theta x) - f(-\theta x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} 左 = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(-x)}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x} + \frac{f(-x)-f(0)}{-x}\right] = f'(0)$$

$$\lim_{x\to 0} 右 = \lim_{x\to 0} \theta \cdot \left[\frac{f(\theta x)-f(0)}{\theta x} + \frac{f(-\theta x)-f(0)}{-\theta x}\right]$$

已经可导，所以可以这样写

$$= 2f'(0) \cdot \lim_{x\to 0} \theta$$

$\because f'(0) \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \theta = \frac{1}{2}$ ※

三 证明 $\exists\xi$，使 $f^{(n)}(\xi)=0$

{ ① 极值法
② 罗尔定理 （常用）
③ Taylor （个别）

例8 （罗尔）

$f(x)\in C[0,4]$，在 $(0,4)$ 内二阶可导，$2f(0)=f(1)+f(2)=\int_2^4 f(x)dx$

证 $\exists\xi\in(0,4)$，s.t $f''(\xi)=0$

证：1° $f(x)\in[1,2]\Rightarrow f(x)$ 在 $[1,2]$ 上有 m，M，

$m\le\frac{f(1)+f(2)}{2}\le M$ ⇨ $\boxed{\text{必会方法}}$

$\exists x_0\in[1,2]$，$f(1)+f(2)=2f(x_0)$

2° 令 $F(x)=\int_2^x f(t)dt$ ⇨ $\boxed{\text{常见设法}}$

$\int_2^4 f(x)dx=F(4)-F(2)=2F'(c)=2f(c)$，$c\in(2,4)$

3° $\because f(0)=f(x_0)=f(c)$

$\therefore\exists\xi_1\in(0,x_0)$，$\xi_2\in(x_0,c)$

$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$

$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,4)$ $f''(\xi)=0$ #

（Kira 备注：

看到二阶导 f'' 没什么好说的，立像条件反射般找3个相等f值 $f(a)=f(b)=f(c)$，然后 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$ 然后 $f''(\xi)=0$，闭着眼就可以写好吗？……）

例9 "不断构造相等"

$f(x)$ 三阶可导，$f(1)=0$，$F(x)=x^3f(x)$，证 $\exists\xi\in(0,1)$，$F'''(\xi)=0$.

<法一> $F(0)=F(1)=0$. $\exists \xi_1 \in (0,1)$, $F'(\xi_1)=0$

"罗尔" $F'(x)=3x^2 f(x)+x^3 f(x)$

$\because F'(0)=F'(\xi_1)=0$

$\therefore \exists \xi_2 \in (0,\xi_1)$, $F''(\xi_2)=0$

$\because F''(x)=6x f(x)+3x^2 f'(x)+3x^2 f'(x)+x^3 f''(x)$

$F''(0)=F''(\xi_2)=0$.

$\therefore \exists \xi_3 \in (0,\xi_2) \subset (0,1)$, $F'''(\xi_3)=0$ ☆

<法二> $F(0)=F'(0)=F''(0)=0$

$F(1)=F(0)+F'(0)(1-0)+\frac{F''(0)}{2!}+\frac{F'''(\xi)}{3!}(1-0)^3$, $\xi \in (0,1)$

$\because f(1)=0$ $\therefore F(1)=0$. $\xi \in (0,1)$

$\therefore F'''(\xi)=0$ ☆

三 结论仅含 ξ 的情形

- ① 还原法 (☆ 核心) $\boxed{\frac{f'}{f}=(\ln f)'}$ ← 咱先掌握这个~
- ② 分组法
- ③ 凑微法

背 一些非常常见的特例：

<1> $f'g+fg'=(fg)' \Rightarrow fg=F(x)$

<2> $f'g-fg'=(\frac{f}{g})' \Rightarrow F(x)=\frac{f}{g}$

<3> $f''g-fg'' \Rightarrow F(x)=f'g-fg'$

<4> $f'+2f \Rightarrow e^{2x}f(x)$

$f'-f \Rightarrow e^{-x}f(x)$

<5> $0=f''-f=(f'+f)'-(f'+f)=0$

$0=f''-f=(f'-f)'+(f'-f)=0$

Kira 哈哈：
先把这些组
背下来，有点感觉
摸摸规律，
做做例题
…
我最后放个
大招？全搞定

例10　　　　"还原法"

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)$，试证：

$\exists\, \xi\in(0,1)$，$f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

[分析] $\dfrac{f''(x)}{f'(x)}+\dfrac{2}{x-1}=0$　　(*)

$[\ln f'(x)]'+[\ln(x-1)^2]'=0$

Kira 插播：

▶ 有作者没？(*)式在干嘛？

▶ 在把 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$ 条件变为 $\dfrac{f'}{f}$ 的标准形式！

所有题目都朝这个方向凑！

pf: 令 $\varphi(x)=(x-1)^2 f'(x)$，$\varphi(1)=0$

$\because f(0)=f(1)$

$\therefore \exists\, c\in(0,1), f'(c)=0 \Rightarrow \varphi(c)=0$　　☆

例11

$f(x)\in C[0,1]$，$\int_0^1 f(x)dx=0$　试证：

$\exists\,\xi\in(0,1)$，$\xi f(\xi)=2\int_\xi^0 f(t)dt$

[分析] $xf(x)=2\int_x^0 f(t)dt$

$xf(x)+2\int_0^x f(t)dt=0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{\int_0^x f(t)dt}+\dfrac{2}{x}=0$

$\Rightarrow [\ln\int_0^x f(t)dt]'+(\ln x^2)'=0$

(卷面)

证明：令 $\varphi(x)=x^2\int_0^x f(t)dt$

$\varphi(0)=\varphi(1)=0 \Rightarrow \exists\,\xi\in(0,1)$, s.t.

$\xi f(\xi)=2\int_\xi^0 f(t)dt$　　☆

例12. "还原法"

$f(x)\in C[a,b]$，(a,b)内可导 $f(a)=a$，
$\int_a^b f(x)dx=\frac{b^2-a^2}{2}$，试证 $\exists\xi\in(a,b)$，
$f'(\xi)+f(\xi)-\xi=1$.

pf: $\int_a^b f(x)dx=\frac{b^2-a^2}{2}=\int_a^b x\,dx$
$\Rightarrow\int_a^b[f(x)-x]dx=0$，令 $h(x)=f(x)-x$，则 $h(a)=0$
令 $F(x)=\int_a^x h(t)dt$
有 $F(a)=F(b)=0$
$\exists c\in(a,b)$，$F'(c)=0\Rightarrow h(c)=0$.

令 $\varphi(x)=e^x[f(x)-x]$ 有 $\varphi(a)=\varphi(c)=0$
$\Rightarrow\exists\xi\in(a,b)$，$f'(\xi)+f(\xi)-\xi=1$.

四 结论含 ξ,a,b 的情形

① ξ与a,b可分离 { ξ与a,b分离，a,b侧用Lagrange/Cauchy；凑微法：以x换ξ，令式子$=0\Rightarrow\varphi'(x)=0$.
② ξ与a,b不可分离，凑微法：以x换ξ.

例13 "凑微法"

$f(x)\in C[a,b]$，(a,b)内可导，$f(b)=0$，
试证：$(\xi-a)f'(\xi)+2f(\xi)=0$，$\exists\xi\in(a,b)$

[分析] $(x-a)f'(x)+2f(x)=0$
$(x-a)^2f'(x)+2(x-a)f(x)=0$
证明：令 $\varphi(x)=(x-a)^2f(x)$，$\varphi(a)=\varphi(b)=0$
$\Rightarrow\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $(\xi-a)f'(\xi)+2f(\xi)=0$.

例14 —————— "会些知很多，综合性太强"

$f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内二阶可导，$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}=0$

$f''(x)>0$

试证：① $f(x)>0$，$(a<x\le b)$

② $\exists \xi,\eta\in(a,b)$ $\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{2\xi}{f(\xi)}=\frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)}$

pf: ① $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}=0\Rightarrow f(a)=0, f_+'(a)=0$

由 $\begin{cases} f_+'(a)=0 \\ f''(x)>0 \end{cases}\Rightarrow f'(x)>0 \quad (a<x<b)$

由 $\begin{cases} f(a)=0 \\ f'(x)>0\ (a<x<b) \end{cases}\Rightarrow f(x)>0 \quad (a<x<b)$

"已经分离好了" ⇨ ② $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，$F'(x)=f(x)>0$

$\exists \xi\in(a,b)$ 使 左 $=\frac{b^2-a^2}{F(b)-F(a)}=\frac{2\xi}{F'(\xi)}=\frac{2\xi}{f(\xi)}$

$f(\xi)=f(\xi)-f(a)=f'(\eta)(\xi-a)$，$\eta\in(a,\xi)$ #

例15 —————— "ξ与 a, b 不可分"

$f(x), g(x)\in C[a,b]$ 证 $\exists \xi\in(a,b)$

s.t. $f(\xi)\int_b^\xi g(t)dt=g(\xi)\int_\xi^a f(t)dt$

[分析] $f(x)\int_b^x g(t)dt+g(x)\int_a^x f(t)dt=0$

即 $[\int_a^x f(t)dt\int_b^x g(t)dt]'=0$

pf: 令 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt\cdot\int_b^x g(t)dt$

$\Rightarrow \varphi(a)=\varphi(b)=0 \Rightarrow \exists\xi\in(a,b)$，s.t. $f(\xi)\int_b^\xi g(t)dt$

$=g(\xi)\int_\xi^a f(t)dt$ #

五 结论含 ξ,η 的情形（不只一个中值）

① 仅有 $f'(\xi)$, $f'(\eta)$ $\begin{cases} 1^\circ \text{ 找三个点} \\ 2^\circ \text{ 用两次 Lagrange} \end{cases}$ ← $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 作差～

② ξ,η 复杂度不同 $\begin{cases} 1^\circ \text{ 用}x\text{换掉较为复杂的中值} \\ 2^\circ \begin{cases} \text{形如 } (\quad)'\text{，用 Lagrange} \\ \text{形如 } \dfrac{(\quad)'}{(\quad)'}\text{，用 Cauchy.} \end{cases} \end{cases}$

其中，1° 中，分两种情况

▲ 一是，给出的是导数，将导数整体替换为 x 函数

则化法如：• $e^{2\eta}[f'(\eta)+2f(\eta)] \Rightarrow e^{2x}f(x)$

• $\dfrac{2\ln\eta}{\eta} \Rightarrow \ln^2 x$

• $\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)} \Rightarrow \arctan f(x)$

▲ 二是，给的根本不是导数，而仅是 $\dfrac{\text{分子}}{\text{分母}}$，但分子分母都是某函数的导数 [cauchy]

则化法如：• $e^{-\eta}f'(\eta) = \dfrac{f'(\eta)}{e^\eta} \Rightarrow \dfrac{f(x)}{e^x}$

• $\eta^2 f'(\eta) \Rightarrow \dfrac{f(x)}{-\frac{1}{x}}$

③ ξ,η 皆复杂，但复杂性基本对等（考查可能性不高）

Case 1 $f'(\xi)+2\xi=f'(\eta)+2\eta$

1° 构造 $\varphi(x)=f(x)+x^2$ 2° 找三点，两次 Lagrange

Case 2. 1° $\begin{cases} \varphi_1(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2 \\ \varphi_2(x)=f(x)-x^2 \end{cases}$ 2° 找三点，两次 Lagrange.

例16

$f(x) \in C[a,b]$，(a,b)内可导，$f(a)=f(b)$，

$f_+'(a)>0$

试证明：$\exists \xi, \eta \in (a,b)$，s.t. $f'(\xi)>0$，$f'(\eta)<0$

pf：

$f_+'(a)>0 \Rightarrow \exists\ c \in (a,b)$，$f(c)>f(a)$

$\exists \xi \in (a,c)$，$\eta \in (c,b)$

s.t. $f'(\xi) = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} > 0$　　"两次 Lagrange"

$\Rightarrow f'(\eta) = \dfrac{f(b)-f(c)}{b-c} < 0$

※

例17

（真）$f(x) \in C[0,1]$ 在$(0,1)$内可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$

① $\exists\ c \in (0,1)$，$f(c)=1-c$

② $\exists$相异$\xi, \eta \in (0,1)$，$f'(\xi)f'(\eta)=1$

pf：① 令 $\varphi(x) = f(x)-1+x$

$\Rightarrow \varphi(0)=-1$，$\varphi(1)=1$

$\because \varphi(0)\varphi(1)<0$　$\therefore \exists\ c \in (0,1)$，$\varphi(c)=0$，

$\Rightarrow f(c)=1-c$

② "有三个点，求到殊我"　"无巧不成题！"

$\exists \xi \in (0,c)$，$\eta \in (c,1)$

$$\begin{cases} f'(\xi) = \dfrac{f(c)-f(0)}{c} = \dfrac{1-c}{c} \\[2ex] f'(\eta) = \dfrac{f(1)-f(c)}{1-c} = \dfrac{c}{1-c} \end{cases}$$

得证！

※

例18

$f(x)\in C[a,b]$，(a,b)内可导，$f(a)=f(b)=1$

试证 $\exists \xi,\eta\in(a,b)$ s.t. $e^{2\xi-2\eta}[f'(\eta)-2f(\eta)]=-2$

[分析] ξ和η"复杂程度不同"，η更为复杂，且可还原。

$$e^{-2\eta}[f'(\eta)-2f(\eta)]=[e^{-2x}f(x)]'\big|_{x=\eta}$$

pf: 取 $\varphi(x)=e^{-2x}f(x)$

$\exists \eta\in(a,b)$，使 $\dfrac{e^{-2b}f(b)-e^{-2a}f(a)}{b-a}=e^{-2\eta}[f'(\eta)-2f(\eta)]$

左 $=\dfrac{e^{-2b}-e^{-2a}}{b-a}=-2e^{-2\xi}$ ，$\xi\in(a,b)$

即有 $e^{2\xi-2\eta}[f'(\eta)-2f(\eta)]=-2$ ※

例19

$f(x)\in C[a,b]$，(a,b)内可导 $(a>0)$

证 $\exists \xi,\eta\in(a,b)$ s.t. $ab f'(\xi)=\eta^2 f'(\eta)$

pf: 令 $F(x)=-\frac{1}{x}$，$F'(x)=\frac{1}{x^2}\neq 0$

$\exists \eta\in(a,b)$ s.t. $\dfrac{f(b)-f(a)}{-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}=\dfrac{f'(\eta)}{\frac{1}{\eta^2}}$ [cauchy]

左边 $=ab\cdot\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=ab f'(\xi)$，$\xi\in(a,b)$ ※

$\boxed{六}$ Taylor法（二阶、三阶以上可考虑）

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

☆ 关于 x 和 x_0 的取法

x_0 通常取为
- ① 题中给出 $f'(c)$，则令 $x_0=c$ ☆
- ② 令 $x_0=\frac{a+b}{2}$ ☆
- ③ 令 $x_0=a, b$ （罕见）

x 通常取为
- ① $f(x_0)$ （无 $f'(x_0)$），取 $x=x_0$
- ② $x=a, b$
- ③ $x=\frac{a+b}{2}$ （中点）
- ④ 任意点，

若题中提供 $f(a), f(b), f(c)$; $f'(a), f'(b), f'(c)$ } 一有俱有，倾向于用 Lagrange

若题中提供 $f'(a), f''(c), f(b)$ 倾向于用 Taylor.

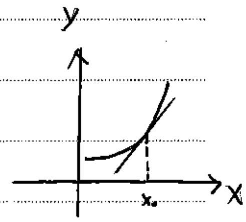
▶ Case 1 当 $f''(x)>0$ （<0） "二阶保号"

① $f''(x)>0 \Rightarrow f'$ ↑ 单增

or $f''(x)<0 \Rightarrow f'$ ↓ 单减.

② $f''(x)>0 \Rightarrow$ 切线 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

有 $f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$



例18

$f(x)\in C[0,1]$，$f(x)>0$，证 $\ln\int_0^1 f(x)dx \geq \int_0^1 \ln f(x)dx$

Pf: "证明不等式为两种运算换序，往往用二阶保号性"

令 $\varphi(t)=\ln t$，$\varphi''(t)=-\frac{1}{t^2}<0$

取 $t_0=\frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$

$\boxed{\text{用到 } t_0 \text{ 取平均}}$

$\varphi(t) \le \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)(t-t_0)$) 令 t 设 $f(x)$

$\varphi[f(x)] \le \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)[f(x)-t_0]$) 两边积分

$\int_0^1 \ln f(x)\,dx \le \ln \int_0^1 f(x)\,dx$

※

(☺ Kira 讲解:

关于两边 $\int_0^1$ 的积分是非常妙的. 有的同学可能看不出是怎么积分来的. 有两个关键字: "常数" 和 "$\int_0^1 c\,dx = c$"

① $\int_0^1 dx$ 是非常特殊的积分限, 用它来积常数, 仍得常数本身. 所以 $\int_0^1 \varphi(t_0)\,dx = \varphi(t_0)$

② 我们已设 $\int_0^1 f(x)\,dx = t_0$, 又 $\int_0^1 t_0\,dx = t_0$

所以 $\int_0^1 \varphi'(t_0)[f(x)-t_0]\,dx = 0$

所以 $\varphi(t_0) + \varphi'(t_0)[f(x)-t_0]$ 从 0 到 1 的积分为 $\varphi(t_0)$

即为 $\ln \int_0^1 f(x)\,dx$.

好玩吗? ^_^)

Case 2 泰勒常规证明

例 19

f 在 $(-1,1)$ 三阶连续可导, $f(-1)=0$, $f'(0)=0$, $f(1)=1$.

证 $\exists f'''(x)=3$.

pf: 1° $f(-1) = f(0) + \frac{f''(0)}{2!}(-1-0)^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{3!}(-1-0)^3$, $\xi_1 \in (-1,0)$

$f(1) = f(0) + \frac{f''(0)}{2!}(1-0)^2 + \frac{f'''(\xi_2)}{3!}(1-0)^3$, $\xi_2 \in (0,1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = f(0) + \frac{1}{2}f''(0) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1) \\ 1 = f(0) + \frac{1}{2}f''(0) + \frac{1}{6}f'''(\xi_2) \end{cases}$$

三种操作: 相加, 相减, 各自处理

2° $f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2) = 6$

3° $\because f'''(x) \in C[\xi_1, \xi_2]$

$\therefore f'''(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上有 m, M. s.t.

$$m \le \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2} \le M$$

$\therefore m \le 3 \le M$ $\exists \xi \in [\xi_1, \xi_2] \subset (-1, 1)$, $f'''(\xi) = 3$ ※

例20 "我的复试考题，懵住很多人～"

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0) = f(1) = 0$, $f_{min} = -1$

证至少有一 $f''(\xi) \ge 8$

证:

$\min\limits_{0 \le x \le 1} f(x) = -1 \Rightarrow \exists\, c \in (0,1)$, $f(c) = -1$, $f'(c) = 0$

$$\begin{cases} f(0) = f(c) + \dfrac{f''(\xi_1)}{2!}(0-c)^2, & \xi_1 \in (0, c) \\ f(1) = f(c) + \dfrac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2 & \xi_2 \in (c, 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{c^2}{2} f''(\xi_1) = 1 \\ \dfrac{(1-c)^2}{2} f''(\xi_2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''(\xi_1) = \dfrac{2}{c^2} \\ f''(\xi_2) = \dfrac{2}{(1-c)^2} \end{cases}$$

若 $c \in (0, \frac{1}{2}]$, $f''(\xi_1) \ge 8$ 则令 $\xi = \xi_1$

若 $c \in [\frac{1}{2}, 1)$, $f''(\xi_2) \ge 8$ 则令 $\xi = \xi_2$.

命题得证. ※

例21

$f(x)$ 在 $[0, a]$ 二阶可导，$|f''(x)| \le M$. $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内取最小值，

证 $|f'(0)| + |f'(a)| \le Ma$

·有数阶数元
差距，想Lagrange

pf: $\exists\, c \in (0, a)$, 取 $f(c)$ 最小值，有 $f'(c) = 0$

有 $\begin{cases} f'(c) - f'(0) = f''(\xi_1)c & (0 < \xi_1 < c) \\ f'(a) - f'(c) = f''(\xi_2)(a-c) & (c < \xi_2 < a) \end{cases}$

$\Rightarrow |f'(0)| \le Mc$, $|f'(a)| \le M(a-c)$, 两式相加. ※

例22

f在$[0,1]$二阶可导，$|f|\le a$，$|f''|\le b$，求证$|f'(c)|\le 2a+\frac{b}{2}$，$\forall c\in(0,1)$

证：

"甚至不具备2个点，选Taylor"

$$\begin{cases} f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2!}(0-c)^2, & \xi_1\in(0,c) \\ f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\dfrac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2, & \xi_2\in(c,1) \end{cases}$$

$\Rightarrow f'(c)=f(1)-f(0)+\frac{c^2}{2}f''(\xi_1)-\frac{(1-c)^2}{2}f''(\xi_2)$

$|f'(c)|\le 2a+\frac{b}{2}[c^2+(1-c)^2]$

〈法一〉 $\because c^2\le c$，$(1-c)^2\le 1-c$ $\therefore c^2+(1-c)^2\le 1$

〈法二〉 $\varphi(c)=c^2+(1-c)^2$，$\varphi'(c)=2c-2(1-c)=0\Rightarrow c=\frac{1}{2}$

$\because \varphi(0)=\varphi(1)=1$，$\varphi(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{2}\le\varphi(c)\le 1$

最后 （四）大"辅助函数构造法"

我在P159给下面卖了个关子，在你掌握了简单的常用的还原法之后，下面我将介绍最完整最普适版构造辅助函数的方法，大家在做题时可进行查阅，不需都背下来

① 选取乘积
- 对于 $\xi f'(\xi)+nf(\xi)=0$，取 $F(x)=x^n f(x)$
- 对于 $f'(\xi)g(\xi)+mg'(\xi)f(\xi)=0$，取 $F(x)=f(x)(g(x))^m$
- 对于 $nf'(\xi)g(\xi)+mg'(\xi)f(x)=0$，取 $F(x)=[f(x)]^n[g(x)]^m$

（kira记忆法：n和导数一起出现，看到"n狗"绑在一起，就变（n方）"）

② 选取商 $\begin{cases} \cdot\ f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi) = 0，取 F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \\ \cdot\ 将\ \xi f'(\xi) - nf(\xi) = 0，取 F(x) = \dfrac{f(x)}{x^n} \end{cases}$

（☺ kira 的记忆法：先 ' 写分子（如 $f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi) = 0$.
f' 在前 所以前 ' 写分子））

③ 选取 $F(x) = f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$

{ 要做二阶导以上

$f''(x)g(x) - f(x)g''(x) = 0$，取 $F(x) = f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$

例25

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0) = f'(0) = 0$，试证：
存在 $\xi \in (0,1)$，使 $f''(\xi) = \dfrac{2f(\xi)}{(1-\xi)^2}$

▲分析：注意到 $[(1-x)^2]'' = 2$
（☺：对 $(1-x)^2$ 和 2 同时敏锐地感到惊觉）

解：欲证等式写做 $f''(x)(1-x)^2 - 2f(x) = 0$
即 $f''(x)(1-x)^2 - f(x)[(1-x)^2]'' = 0$
令 $F(x) = f'(x)(1-x)^2 + 2(1-x)f(x)$.
因 $F(0) = F(1) = 0$，在 $[0,1]$ 上利用罗尔定理 ok

④ 选取 $F(x) = f(x)e^{g(x)}$（还原"通式"）

$\begin{cases} \cdot\ f'(x) + \lambda f(x) = 0 \quad 取 F(x) = f(x)e^{\lambda x} \\ \cdot\ f'(x) + [f(x) + \lambda]g'(x) = 0，取 F(x) = [f(x) + \lambda]e^{g(x)} \\ \cdot\ (f'(x) + \lambda) + (f(x) + \lambda x)g'(x) = 0，取 F(x) = [f(x) + \lambda x]e^{g(x)} \end{cases}$

「4A常」之

级数 (数二不考)

· 本Part的解锁条件：极限计算非常666！
有一颗想把公式背好的心♡

· 本Part的特别关注：P175 比较判别法极限形式
P181 步骤是常求.

· 本Part的难点：本部分编排总体上中规中矩.
可以好好读P172前言和P188总结.

☺ Kira前言：

级数是我本科时就非常抵触的章节，觉得形式好麻烦，觉得乱，后来当我准备考研一步步走来，发现所有的抵触情绪都只是因为：一. 没学好极限计算；二. 没学好不定积分计算；三. 公式没背.

换言之，解决好以上三者，级数部分即如探囊取物般容易，考试不会出很难的题，应拿满分！

再换言之，「大王小王篇」真的非常非常重要！必须熟透！

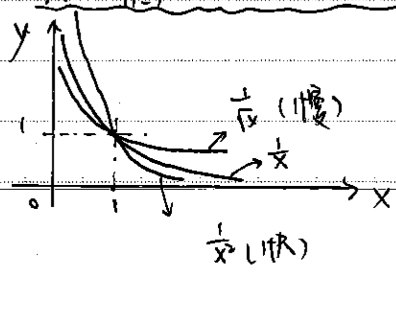
Let's Party！

一. 基本概念与性质
二. 数项级数的判敛　　4'　　（本Part最难也不用怕）
三. 幂级数的收敛域　　4' or 10'
四. 幂级数的展开与求和　　（数一 10'）

一 基本概念与性质

☺ Kira说：我们研究"级数是否收敛"，本质上是研究 $n\to\infty$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ 的通项 $U_n \to 0$ 的速度快慢

☆ $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $U_n \to 0$ 足够快



（想象函数图象上的点同时从 (1,1) 向右跑，即 $x\to\infty$，当 x 相同时离 x 轴更近（y更小），说明其 $\to 0$ 更快）

(kita 提示：
在本Part 具备过硬的收敛素养非常重要！
请返回 P76 自行复习.)

1. 常数项级数

(一) Def <1> $\{a_n\}$　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 称为常数项级数.

<2> 部分和　$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

区别 $\begin{cases} ① S_n \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 不同} \\ ② \lim_{n\to\infty} S_n \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 同} \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} S, & \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \\ \text{无}, & \text{发散.} \end{cases}$

即"我们用数列前n项和来定义级数."

(二) 性质

<1> 收 + 收 = 收，收 − 收 = 收，收 ± 散 = 散

<2> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} k a_n = kS$

$k \neq 0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} k a_n$ 敛散性相同.

(kita 一句话：即可以随便乘系数)

<3> 级数添(减)有限项，不改敛散性，S 可能改

☆<4> 添括号提高收敛性.

(如 $\underbrace{a_1 + a_2}_{2\text{项}} + \cdots$ 和 $\underbrace{(a_1 + a_2)}_{1\text{项}} + (a_3 + a_4) + \cdots$ 不是一个级数)

<5> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$　反推不成立 (例 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$)

(三) 两个对象

1. p-级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{敛}, & p > 1 \\ \text{散}, & p \le 1 \end{cases}$

2. 几何级数（等比数列）

$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} 发散, & |q|\geq 1 \\ \frac{首项}{1-q}, & |q|<1 \end{cases}$

（读作："首项除以1减公比"就记住了~）

（四）正项级数

def - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ （$a_n \geq 0$） 称为正项级数

特征 $S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \cdots$ 即 $\{S_n\}\uparrow$ $\begin{cases} 无上界, \lim_{n\to\infty} S_n = +\infty \\ S_n \leq M, \lim_{n\to\infty} S_n 存在 \end{cases}$

（这是正项级数区别于其它级数的重要特征）

（五）交错级数

def - $\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots \end{cases}$ （$a_n > 0$）

（六）任意项级数

def · $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ （$>0, <0, =0$）

2. 幂级数

def $\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \end{cases}$ 称为幂级数.

二 数项级数的判敛（四大方法）

- 收敛原则：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 有上界 （$u_n \geq 0$）

例1

设 $a_n > 0$. 记 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，则 $\{S_n\}$ 有界 $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 收敛

[分析] $\{S_n\}$ 天生 $\uparrow$ + 有界 $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在

$\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Leftarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在 $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 收敛.

所以 $\{S_n\}$ 有界 $\not\Leftarrow \{a_n\}$ 收敛

[例: 取 $a_n = 1$, $S_n = n \to \infty$]

<u>方法一: 比较判别法 (题目给2个正项级数)</u>

设 $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$.

Th1. ① $a_n \leq b_n$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 敛

② $a_n \geq b_n$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

(即"大收 $\Rightarrow$ 小收, 小发 $\Rightarrow$ 大发". 人之常情~)

Th1' (比较判别法的极限形式)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0, & \text{说明 } a_n \text{ 小}, b_n \text{ 大}, \text{ 若 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收敛, 则 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 敛.} \\ \infty \\ A > 0 & \text{则 } a_n \text{ 与 } b_n \text{ 同敛散} \end{cases}$$

(Kira 备注: 比较判别法的极限形式是我最喜欢用的判别法~ 没有什么问题是求极限不能解决的~ 事实上, 我们不需要求 $\lim \frac{a_n}{b_n}$, 而只需求级数的等价无穷小即可, 非常方便~)

例2 —— "判敛时是不带求和号 Σ 玩哒~"

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ 判敛.

[分析]

$n\to\infty$; $\frac{1}{n} \to 0^+$, 把 $\frac{1}{n}$ 连续化为 $x \to 0^+$

$x\to 0$, $x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2$

所以 $\frac{1}{n}\to 0^+$，$\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

（😊 你看，归根到底，还是在考验你大王小王常用功力）

例3

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\sqrt{\frac{1}{n}}}\tan\sqrt{t}\,dt$$

[分析]

$n\to\infty$，$\frac{1}{n}\to 0^+$，连续化 $x\to 0^+$ → 习惯动作

对于 $\int_0^{\sqrt{x}}\tan\sqrt{t}\,dt$.

$f(x)=\int_0^{x}\tan\sqrt{t}\,dt\sim\int_0^{x}\sqrt{t}\,dt=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$，$g(x)=\sqrt{x}$

$f(g(x))=\int_0^{\sqrt{x}}\tan\sqrt{t}\,dt\sim\frac{2}{3}x^{\frac{3}{4}}$

故 $\int_0^{\sqrt{\frac{1}{n}}}\tan\sqrt{t}\,dt\sim\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$ 而 $\frac{3}{4}<1$ ⇒ 发散！

（😊 关于此等价无穷小求法，请翻阅第二页）

幂级数判敛常用

方法二：比值判别法 （靠自己） "达朗贝尔"

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho\begin{cases}<1 & 收敛\\ >1 & 发散\\ =1 & 失效\end{cases}$$

方法三：根值判别法

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho\begin{cases}<1 & 收敛\\ >1 & 发散\\ =1 & 失效\end{cases}$$

例4

判别 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$ 在 $x=2$，$x=3$ 处级数的敛散性.

[分析]

$x=2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}2^n$ 令 $u_n=\frac{n!}{n^n}2^n$

$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!\,2^n}=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$=2e^{\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{n}{n+1}-1\right)}=2e^{-1}<1 \Rightarrow$ 收敛.

当 $x=3 \Rightarrow 3\cdot e^{-1}>1 \Rightarrow$ 发散 ※

方法四. 积分法. (用于一看就很好积的)

Th. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ (a_n\geq 0)$ 且 $\{a_n\}\downarrow$

令 $a_n\triangleq f(n)$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ 收敛.

例5

<1> $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 判敛.

解: $\because \left\{\frac{1}{n\ln n}\right\}\downarrow$ 又 $\because \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\ln\ln x\Big|_2^{+\infty}=+\infty$

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散 ※

<2> $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ 判敛.

解: $\because \left\{\frac{1}{n\ln^2 n}\right\}\downarrow$ 又 $\because \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\frac{1}{-\ln x}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{\ln 2}$

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ 收敛.

五 交错级数判敛法 "莱布尼兹"

★① $a_n\geq a_{n+1}$ (即 $\{a_n\}\downarrow$) ② $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛 且 $S\le a_1$.

[注] ① $\{a_n\}\downarrow$ 不可少 (反例: $a_n=\frac{1}{n}+(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$

$\{a_n\}$ 不单调而极限为0, 但 $\{a_n\}$ 发散).

② 考研命题一定会候证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证 $\{a_n\}\downarrow$ 是难点.

例6

$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$ 判敛.

解:

$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0\\ \frac{1}{\ln n}>\frac{1}{\ln(n+1)}\end{cases}\Rightarrow$ 收敛

(六) 任意项级数的绝对收敛与条件收敛.

(添加绝对值会增加发散性哦~↗)

如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|$ 发散.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散, 称 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛 (弱)
2. $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 敛, 称 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛 (强).

例7

设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛, $\alpha>0$ 常数, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot|a_n|}{\sqrt{n^2+\alpha}}$ (   )

A. 绝对收敛. B. 条件收敛. C. 发散.

该级数不是交错级数，因为有0项.

$\frac{|a_n|}{\sqrt{n^{3+\alpha}}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^{3+\alpha}} + a_n^2\right)$ （由 $\sqrt{\alpha\beta} \le \frac{\alpha+\beta}{2}$）

收 ⇐ 收 + 收

所以绝对收敛.

例18

① $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 敛 $\overset{?}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 敛？ ✓.

因为：

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n}) = (a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots$

② $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 敛 $\overset{?}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 敛. ✓.

因为

$S = a_1+a_2+\cdots+a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 敛 $\Rightarrow \begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \\ \lim_{n\to\infty} S_n = S \end{cases}$

$S_n' = (a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\cdots+(a_n+a_{n+1}) = 2S_n - a_1 + a_{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} S_n' = 2S - a_1$ $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 敛.

③ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 敛 $\overset{?}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 敛？ ✗ 反例 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

（☺ kira：找反例朝"交错级数"和"$\frac{1}{\sqrt{n}}$"上靠，很有效～）

④ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ (a_n \ge 0)$ 敛 $\overset{?}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 敛.（pf: $0 \le a_n^2 \le a_n < 1$）

例9

$f(x)$二阶连续可导，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x^2}=1$，证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(\frac{1}{n})-1]$ 绝对收敛

证：

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x^2}=1 \Rightarrow f(0)=1$

$1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x} \Rightarrow f'(0)=0$

$1=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{1}{2}f''(0) \Rightarrow f''(0)=2$

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$

$f(x)=1+x^2+o(x^2)$

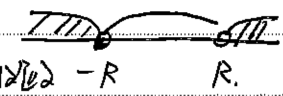
$\Rightarrow f(\frac{1}{n})=1+\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}) \Rightarrow |f(\frac{1}{n})-1|\sim\frac{1}{n^2}$

$\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(\frac{1}{n})-1|$ 收敛.

OK!

㈢ 幂级数的收敛域 （最难已过~↑）

1. Abel定理



对 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$\exists R$ $\begin{cases}当|x|<R，绝对收敛\\ 当|x|>R，发散\\ 当|x|=R，一切皆有可能\end{cases}$

（其中，R称为收敛半径）

2. R的求法

对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$

① $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho \Rightarrow R=\frac{1}{\rho}$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho \Rightarrow R=\frac{1}{\rho}$

★（注意！此处只把系数a_n拿出来，不带x玩儿！）

[注] ① 对 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，若 $x=x_0$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 条件收敛

$\Rightarrow R=|x_0|$

② 如对 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{3n+1}$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho \Rightarrow R=\sqrt[3]{\frac{1}{\rho}}$

③ 求收敛域的程序：

step 1. $\sum a_n(x) \to \sum|a_n(x)| \geq 0$（不管三七二十一变绝对值）

step 2. 按P180方法求出 R.

$\Rightarrow$ 收敛区间为 $(-R, R)$

step 3. 单独讨论 $x=-R$ 和 $x=R$ 处级数的敛散性.

综上，收敛域为 ——.

（☺ kira 备注：step 2 中，要会写"收敛区间"四个字，$(-R,R)$ 为开区间）

例 10

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(2x-1)^n$ 在 $x=-2$ 处收敛，$x=3$ 处发散，求 R.

解：

$$\left.\begin{array}{ll}|2\cdot(-2)-1|\leq R & \Rightarrow R\geq 5\\ |2\cdot 3-1|\geq R & \Rightarrow R\leq 5\end{array}\right\}\Rightarrow R=5.$$

例 11

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{2^n n^2}$，求 R，收敛域.

解：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{2}\overset{P}{\Rightarrow} R=2$ ← 别忘系数

$2x-1=\pm 2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(\pm 2)^n}{2^n\cdot n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛

$\therefore -2\le 2x-1\le 2$

收敛域为 $[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$

☆

四 幂级数的展开与求和

▶ 任务一：函数展成幂级数

• 工具一：$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

背　记：① $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad(-\infty<x<+\infty)$

② $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\quad(-\infty<x<+\infty)$

③ $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\quad(-\infty<x<+\infty)$

④ $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\quad(-1<x<1)$

⑤ $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\quad(-1<x<1)$

⑥ $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\quad(-1<x\le 1)$

☆ ⑦ $-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\quad(-1\le x<1)$

（😊 Kira 强调：以上 7 个式子必须背熟，至少考前背熟，最低要求是对左侧和右侧形式均有印象，有感觉~）

• 工具二：分析性质

对 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,\quad x\in(-R,R)$

Th1（逐项可导性）$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}n a_n x^{n-1}$

☆ 新幂级数与原幂级数收敛半径相同，端点处敛散性未必同。

Th2.（逐项可积性）$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n\,dx$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

例12

将 $f(x)=\ln x$ 展成 $x-2$ 的幂级数

解：$f(x)=\ln[2+(x-2)]=\ln 2+\ln[1+\frac{x-2}{2}]$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n$$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}(x-2)^n \quad (0<x\le 4)$$

#

(kiza备注：☆☆☆

所谓展成幂级数，本质上无非就是凑相成那几个公式，而这种"凑公式"技能，你早在大一上学期之极限就应该熟练掌握了！玩级数和玩极限本质上技能点是一致的！)

例13

$f(x)=\frac{5x-1}{x^2-x-2}$ 展成 $x+2$ 的幂级数

解：

$$f(x)=\frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}$$

$$f(x)=2\cdot\frac{1}{x+1}+3\cdot\frac{1}{x-2}$$

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{-1+(x+2)}=-\frac{1}{1-(x+2)}=-\sum_{n=0}^{\infty}(x+2)^n \quad (-3<x<-1)$$

$$\frac{1}{x-2}=\frac{1}{-4+(x+2)}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{(x+2)}{4}}=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+2}{4}\right)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^{n+1}}(x+2)^n \quad (-6<x<2)$$

$$\therefore f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}-\left(2+\frac{3}{4^{n+1}}\right)(x+2)^n \quad (-3<x<-1)$$

#

例14

$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 展成 x 的幂级数.

解：

$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\quad(-1<x<1)$

$f(0)=\frac{\pi}{4}$，$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)dx$

$=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad(-1\le x<1)$

（kira 提醒：收敛域千万记得要检查端点哦～.）

▶ 任务二、求 $S(x)$

• 工具三： DE

Case 1.	$\sum P(n)x^n$	④ $\frac{1}{1-x}$ ⑤ $\frac{1}{1+x}$

例15　　　　"难点!"

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(2x-1)^{2n}$，求 $S(x)$

解：

1° $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1\Rightarrow R=1$

$2x-1=\pm1$ 时 $\because n^2\cdot(\pm1)^{2n}\to\infty\quad(n\to\infty)$

$\therefore 2x-1=\pm1$ 时 发散　　$\therefore -1<2x-1<1\Rightarrow x\in(0,1)$

2° 令 $(2x-1)^2=t$，

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2t^n=\sum_{n=1}^{\infty}[n(n-1)+n]t^n$ ⇨ n^2 处理方法

$=t^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)t^{n-2}+t\sum nt^{n-1}$ ⇨ "写法非常有用"

$= t^2 \left(\sum_{n=2}^{\infty} t^n\right)'' + t\left(\sum_{n=1}^{\infty} t^n\right)'$

$= t^2 \left(\frac{t^2}{1-t}\right)'' + t\left(\frac{t}{1-t}\right)'$

（方法点到为止）

例 16

$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n+1}$ 求 $S(x)$. "超简单"

解:

1° $R=1$, $x=\pm1$ 时 $n(\pm1)^{n+1} \to \infty$

$\Rightarrow x \in (-1,1)$

$\boxed{\text{按规范步骤 条理分明}}$

2° $S(x) = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x^2 \left(\frac{x}{1-x}\right)'$

（"再讲就无聊了…" 如: $(n+1)(n+3)x^n = [n(n-1)+5n+3]x^n$）

$\boxed{\text{Case 2} \quad \Sigma \frac{x^n}{p(n)}}$ ⑥ $\ln(1+x)$ ⑦ $-\ln(1-x)$ 分析性质

（一个常识: "$\left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n}$" 令 "$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = t$" ！）

例 17

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

解:

1° $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \Rightarrow R=1$

$x=\pm1$ 时 $\left|\frac{(\pm1)^n}{n(n+1)}\right| \sim \frac{1}{n^2}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

$\therefore x \in [-1,1]$

2° $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$

$S(0)=0$ "无定义点先算"

$x\neq 0$ 时 $S(x)=-\ln(1-x)-\frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-x\right)$

$=\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)+1 \quad (-1\leq x<1$ 且 $x\neq 0)$

$S(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$

$\therefore S(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x=1\\ \left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)+1, & -1\leq x<1 \text{ 且 } x\neq 0\end{cases}$

例 18

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$ $S(x)$?

解:

1° $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1 \Rightarrow R=1$

当 $x=\pm 1$ 时. $\frac{(\pm 1)^{2n}}{2n+1}\sim\frac{1}{2n}$

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散 $\therefore x=\pm 1$ 时 级数发散.

$\therefore x\in(-1,1)$

2° $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$

"我拿到手, 首先第一步 $S(0)$, 因为分子明显降了一次, $S(0)$ 是常数项."

$S(0)=1$

$x\neq 0$ 时, $xS(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $\boxed{\text{求导分母就没了}}$

$(xS(x))'=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$

$$xS(x) = xS(x) - 0\cdot S(0) = \int_0^x [xS(x)]'\,dx = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_0^x$$

$$\Rightarrow xS(x) = -\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$$

综上，$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2x}\ln\frac{1-x}{1+x}, & 0<|x|<1 \\ 1, & x=0 \end{cases}$ ☆

Case 3 $\sum \frac{x^n}{含!}$ $\begin{cases} ①.②.③ \quad e^x.\ \sin x.\ \cos x \\ 微分方程 \end{cases}$

例19

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}x^n$ 求 $S(x)$ "不用练很多，很快就熟了"

解：

1° $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 \Rightarrow R = +\infty$

$x\in(-\infty,+\infty)$

2° $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n + e^x$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)+1}{(n-1)!}x^n + e^x$

$= x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + e^x$

$= (x^2+x+1)e^x$ ☆

"写级数时把前面0项都扔了，从第一个非0项开始写，很保险"

例20

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 求 $S(x)$

解:

1° $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0 \Rightarrow R=+\infty$

$x\in(-\infty,+\infty)$

2° $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$

$S'(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$

$S''(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$

注意到

$S(x)-S''(x)=0$

有 $S(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{x}$ ， $S(0)=1$，$S'(0)=0$.

$\Rightarrow c_1=\cdots \quad c_2=\cdots$

"方法点到为止，关注方法~!"

(kira 总结陈词:

- 玩级数首先一定一定要点好极限计算的各项技能，很多技巧和思想方法通用，不然你看啥都害怕!!!

- 不定积分计算，定积分和反常积分功底要扎实，否则判敛和用积分解决幂级数时发愁!

- 反正学好「大王小王篇」就对了啦~!

- 级数内容我认为冲刺时最好的巩固和提高方法是：用李永乐真题分题型级数部分完整做一遍。（因为考试不会太难，以此种方式拉一遍真题，保证头脑清晰，应对80%级数题游刃有余~ 前提是我的方法你都会了~ ）)

「拾遗篇」

本篇内容多为概念和应用类问题.
取材自宇哥和汤神的课程笔记,并融入
我自己的整理和感悟.

开启本篇前仍望先练熟「大王小王篇」
以增强信心和能力.

极限定义及性质

(一) "$x\to\cdot$"是一种"过程性"——"取遍趋向过程中所有点"

Thx：$\lim\limits_{x\to\cdot} f(x)$ 存在 ⇒ $f(x)$ 在 $x\to\cdot$ 时处处有定义(存在)

(∴ 即"若 $f(x)$ 在 $x\to\cdot$ 时存在无定义点，⇒ $\lim\limits_{x\to\cdot} f(x)$ 不存在)

例1

如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x\sin\frac{1}{x})}{x\sin\frac{1}{x}}=1$ ✗　　正解：不存在.

取 $x=\frac{1}{k\pi}$，$\sin\frac{1}{x}=\sin k\pi\equiv 0$

(p.s. 计算题会跳开无意义点)

(二) 定义.

① 函数极限：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$　⟺ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

② 数列极限：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时 恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$

⟺ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$

例2

以下四个说法正确的个数为 3.

✗A. $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<e^{\frac{\varepsilon}{2014}}$ ⟺ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$

B. $\forall N\in N^*$，$\exists$正整数 k，当 $|x-x_0|\le\frac{1}{k}$ 时，恒有 $|f(x)-A|\le\frac{1}{2N}$

⟺ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

C. $\forall\varepsilon\in(0,1)$，$\exists$正整数 N，当 $n\geq N$ 时，恒有 $|x_n-a|\le 2\varepsilon$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$

④ $\forall$正整数K，$\exists$正整数N，当$n>N$时，恒有$|x_n-a|\le\frac{1}{2K}$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$

[分析] 抓两点：<1>不论"尺度ε"以何种形式出现，
必须且仅需满足 ① >0 ② 可以任意小 $(\to 0)$

<2> $0<|x-x_0|<\delta$，$\exists\delta$
与 $0<|x-x_0|\le\delta$，$\exists\delta$ 等价

同样地 $|f(x)-A|<\varepsilon$
$|f(x)-A|\le\varepsilon$ 等价

[A 换在 $e^{\lim_{n\to\infty}}$ 亦可以任意小！]

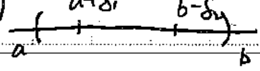
(三) 性质 (三大性质)

1. 唯一性：若 $\lim_{x\to\cdot} f(x)$ 存在 $=A \Rightarrow A$唯一
若 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在 $=a \Rightarrow a$唯一

☺ 左右极限不等
则极限不存在

2. 局部有界性：若 $\lim_{x\to\cdot} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在"$x\to\cdot$"有界
(邻域)

[注] 有界性的判别
① 理论判别法：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界
② 计算判别法：$\begin{cases} 若 f(x) 在 (a,b) 连续 \\ \lim_{x\to a^+} f(x)\ \exists \\ \lim_{x\to b^-} f(x)\ \exists \end{cases}$
$\Rightarrow f(x)$ 在 (a,b) 内有界



· BMDM ·

③ 若 $\lim f(x)$ 不存在，则转向四则运算

$\begin{cases} 有界 \pm 有界 = 有界 \\ 有界 \times 有界 = 有界 \end{cases}$

例3

设 $f(x) = \dfrac{(x^3-1)\sin x}{(x^2+1)|x|}$，讨论 $f(x)$ 在其定义域上的有界性.

[分析] $-\infty \quad -X \quad -\delta \quad 0 \quad +\delta \quad +X \quad +\infty$

"判4个极限"

$\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{(x^3-1)\sin x}{(x^2+1)|x|} = -1\cdot1 = -1 \quad \exists \quad \checkmark$

$\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x^3-1}{x^2+1}\cdot\dfrac{\sin x}{|x|} = -1\cdot-1 = 1 \quad \exists \quad \checkmark$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-1}{(x^2+1)|x|}\cdot\sin x$ = 不存在！ 揪

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-1}{(x^2+1)|x|}$ 有界，$\sin x$ 有界

有界·有界 = 有界. $\checkmark$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-1}{(x^2+1)|x|}\sin x$，同理，有界·有界 = 有界 $\checkmark$

由初等函数性质，$f(x)$ 在 $[-X,\delta]$，$[\delta, X]$ 上必连续，则必有界.

※

2. 局部保号性（在 "$x\to\cdot$" 上，在邻域上）

$\begin{cases} 若 \lim f(x) = A > 0 \xrightarrow[\text{帽}]{\text{脱}} f(x) > 0 \\ 若 f(x) > 0 \xrightarrow[\text{帽}]{\text{戴}} \lim\limits_{x\to\cdot} f(x) \geq 0 \quad (须检验极限存在性) \end{cases}$

例4 "经典" "常识"

设 $f(x)$ 连续，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\ (=f'(0))=2$，

则 $\exists\ \delta>0$，使（ ）

A. $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内 $\nearrow$

B. $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内 $\searrow$

C. $\forall x\in(0,\delta)$，$f(x)>f(0)$

D. $\forall x\in(-\delta,0)$，$f(x)>f(0)$

[分析] 由保号性，在邻域内 $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}>0$

$\forall x\in(0,\delta) \Rightarrow f(x)>f(0)$

$\forall x\in(-\delta,0) \Rightarrow f(x)<f(0)$ 选[C]

☆ 导数不能脱离区间，若 $\forall x\in I$，$f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 I 上 $\nearrow$

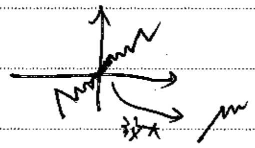
按A的叙述，$f(x)$ 的导数在区间 $(0,\delta)$ 上处处为正，

而原题仅保证导数在 $x=0$ 一点为正，显然A错.

经典反例：振荡函数

（在任意小区间振荡，

不单调！）



4. 其它性质：

① (列与子列) $\begin{cases}\text{列有极限} \Rightarrow \text{任一子列有极限且极限同}\\ \text{子列有极限} \nRightarrow \text{列有极限}\end{cases}$

② 准则 I：单调有界数列必有极限

$\begin{cases}\text{Case 1.}\ \{a_n\}\nearrow \begin{cases}\text{若无上界} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=+\infty\\ \text{若}\ a_n\le M \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n\ \text{存在}\end{cases}\end{cases}$

Case 2. $\{a_n\}\downarrow$ $\begin{cases} 无下界 & \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \\ a_n \geq M & \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n 存在 \end{cases}$

例 5 "比较难"

$a_1=2$，$a_{n+1}=2+\frac{1}{a_n}$，证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在

pf:

令 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \Rightarrow A = 2+\frac{1}{A} \Rightarrow A^2-2A-1=0 \Rightarrow A=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow A=1+\sqrt{2}$．$A=1-\sqrt{2}$ (舍)

$0\leq |a_n-A| = |(2+\frac{1}{a_{n-1}})-(2+\frac{1}{A})| = |\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{A}| = \frac{1}{Aa_{n-1}}|a_{n-1}-A|$

$\leq \frac{1}{4}|a_{n-1}-A| \leq \cdots \leq \frac{1}{4^{n-1}}|a_1-A|$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4^{n-1}}|a_1-A|=0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

(p.s. 本题采用的是"先求极限，后证存在"的经验做法.

另外，判断单调性不是件容易的事，常用方法有

数学归纳法，相邻两项相减，求导等，这里还介绍了

[导数法] $a_{n+1}=f(a_n)$，构造 $y=f(x)$

$f'(x)\geq 0 \Rightarrow \{a_n\}$ 单调 $\begin{cases} a_1<a_2 & \uparrow \\ a_1>a_2 & \downarrow \end{cases}$)

③ 准则 II 夹逼准则

<1> $\begin{cases} a_n\leq b_n\leq c_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$

<2> $\begin{cases} f\leq g\leq h \\ \lim f = \lim h = A \end{cases} \Rightarrow \lim g = A$

[注] $\lim f = \lim h = A \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \lim (h-f)=0$

连续和间断

1. 一切初等函数在其定义区间内连续，故只需研究两类特殊的点。

$\begin{cases} \text{无定义点，} \\ \text{分段函数分段点，} \end{cases}$

2. 连续

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \underbrace{\lim_{x\to x_0^+} f(x)}_{①}=\underbrace{\lim_{x\to x_0^-} f(x)}_{=②}=\underbrace{f(x_0)}_{=③}$$

3. 间断

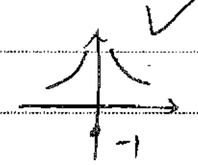
$\left.\begin{array}{l} \text{1) ①②均存在，但①≠② ⇒ 跳跃间断点，} \\ \qquad\qquad\text{①=②≠③ ⇒ 可去间断点，} \end{array}\right\}$ 第一类间断点

2) ①和②至少一个不存在，且

$\left.\begin{array}{l} =\infty \Rightarrow \text{无穷间断点，} \\ =\text{振荡} \Rightarrow \text{振荡间断点，} \end{array}\right\}$ 第二类间断点

[注] x_0为无穷间断点 ⇒ x_0可否为极小值点？ ✓

如 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ -1, & x=0 \end{cases}$



例6 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点有 2 个

解：

无分段点，故看无定义点，$-1, 0, 1$

$$\lim_{x\to -1}\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to -1}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to -1}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\infty$$

$\Rightarrow$ 无穷间断点.

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln|x|}}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=1 \Rightarrow \text{可去}.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\frac{1}{2} \Rightarrow \text{可去}.$$

插播

Def ① 无穷小 — $\lim_{x\to a}\alpha(x)=0$ 称 $\alpha(x)$ 当 $x\to a$ 时为无穷小

② 无穷大 — 无穷小的倒数称为无穷大

若 $\forall M>0$, $\exists \delta>0$, 当 $0<|x-a|<\delta$ 时, $|f(x)|>M$

$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$

导哥:
- $+\infty$: 玉皇大帝(一直在天上)
- $-\infty$: 阎王爷(一直在地下)
- 无界: 悟空(上天入地回人间)

• 问题1: 无界 $\overset{\nRightarrow}{\Leftarrow}$ 无穷大

如 $a_n=n[1+(-1)^n]$; $a_1=0$, $a_2=4$; $a_3=0$; $a_4=8$...

是无界, 非无穷大

• 问题2: 无界 × 无界 $\overset{?}{=}$ 无界 ×

无穷大 × 无穷大 = 无穷大 ✓.

[反例] $a_n=1, 0, 3, 0, 5\cdots$

$b_n=0, 2, 0, 4, 0\cdots$

$a_n\cdot b_n=0$ (无界 × 无界 $=0$).

一元求导与微分概念相关　“一大波重要结论”

(一) ▶① $f(x)$在 $x=a$ 处连续 $\Rightarrow$ $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处连续

可导

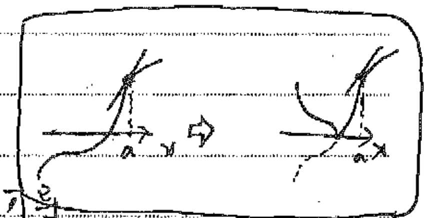
$f(x)$在 $x=a$ 处可导 $\nRightarrow$ $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处可导 (如 $y=x$)

(kira点评：取绝对值这个动作绝不破坏连续性，但不保持可导性)

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导

$f(a)\neq 0 \Rightarrow |f(x)|$ 在 $x=a$ 处可导

$f(a)=0$：
- $f'(a)=0 \Rightarrow |f(x)|$在$x=a$可导
- $f'(a)\neq 0 \Rightarrow |f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导 → 变尖点



▶② $y=f(x)$ 可导 $\Rightarrow$ $f(x)$ 连续

$\nRightarrow$ $f'(x)$ 连续

例7　“经典反例”

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$，问 $f'(x)$ 连续否？

解：

当 $x\neq 0$　$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

$x=0$　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0 \Rightarrow f'(0)=0$

处处可导

但 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$不存在　($\cos\frac{1}{x}$ 不存在极限)

$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)\neq f'(0) \Rightarrow f'(x)$ 不连续

▶③ $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ 与 $f'(a)$ 不同 （例）就是活生生的例子）

▶④ $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，即 $\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

$\begin{cases} \text{保双侧} & (\Delta x\to 0\text{，若 } \Delta x\to 0^+ \text{ 或 } \Delta x\to 0^- \text{ 都错}) \\ \text{不可跨} & (f(a)\text{ 不能写为 } f(a-2h)\text{ 等，只能写 } f(a)) \\ \text{阶相同} & (\text{分子 } \Delta x \text{ 与分母 } \Delta x \text{ 必须同阶无穷小}) \end{cases}$

④ ☆☆☆☆☆ 非常重要！当顺口溜背下来，秒杀选择！）

例8

设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在 $\Rightarrow$ $f'(0)$ 存在

答：错！因为"不可跨"，要死守定义.

经典反例：令 $f(x)=|x|$，$f'(0)$ 不存在.

(二) 可微（微分） — $y=f(x)$，$x\in D$

▶① $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ "函数的增量"

若有 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$

称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微，其中 $\underbrace{\boxed{A\Delta x}}_{\text{“线性主部”}} \overset{\Delta}{=}_{\text{记作}} dy|_{x=x_0} = Adx$

▶② 一元函数：$\begin{cases} \text{可导} \Leftrightarrow \text{可微} \\ A=f'(a) \\ dy=df(x)=f'(x)dx \end{cases}$

▶③ $f(x)$ 连续，$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-b}{x-a} = A \Rightarrow f(a)=b,\ f'(a)=A$

（自信写出来！！！）

$f(x)$ 可导，$f'(x)$ 奇偶性与 $f(x)$ 反.

例19 ——————"一道题玩通概念"

设 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$ 当 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时 Δy 的线性主部为 0.1 求 $f'(1)$

[分析] 由 $y=f(x) \Rightarrow y=f$

有 $y=f(x^2) \Rightarrow y=f[g(x)] \Rightarrow y=f\circ g$

$y'(-1)\,\Delta x=0.1 \quad \Rightarrow y'(-1)=-1$

又 $y'(x)\big|_{x=-1}=(f(x^2))'=f'(x^2)\cdot 2x\Big|_{x=-1}=f'(1)\cdot(-2)$

$\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{2}$

积分相关概念

(一) 不定积分：$\forall x\in I$，$F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数，记 $\int f(x)\,dx=F(x)+C$

（即，若 $F(x)$ 是原函数，则 $F(x)$ 有处处存在的导数

意味着，若 $\exists x_0\in I$，$F'(x_0)\neq f(x_0)$，则 $F(x)$ 不是 $f(x)$ 在 I 上的原函数）

☆ 以下5种，有原函数的是：① ⑤

① 连续 ✓　② 有跳跃间断点 ✗　③ …可去… ✗　④ …无穷… ✗　⑤ 振荡 ✓（可能有）

（证明略，需要的话来找我~）

则	若	则
F	f	f'
偶 ⇐	奇	⇒ 偶
奇 ⇐	偶	⇒ 奇
周期 ⇐	周期	⇒ 周期

(二) 定积分：$\int_a^b f(x)dx \triangleq \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

Def. 可积 $\int_a^b f(x)dx$ 存在 ⇔ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

◇ 一张图串起可积的各种条件

充分

☆ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界且只有有限个间断点 ⇒ $\int_a^b f(x)dx$ 存在 ⇒ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界

必要

$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在 ⇕ $\int_a^b f(x)dx$ 存在 ⇕ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 ⇒ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

(连续必可积)　　　　(可积必有界)

例10 "一组'有原函数'和'可积'的剖析"

(1) $f(x)=\begin{cases} 2, & x>0 \\ 1, & x=0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$ 在 $[-1,2]$ 上有无原函数？是否可积。

解：由 P200 框线框，$f(x)$ 有跳跃间断点 ⇒ 无原函数

由 P201 框线框，$f(x)$ 有界且有有限个跳跃间断点，⇒ 可积。

(结合图象，很好想)

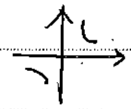
(2) $f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right)=$ 无界振荡

求得 $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

⇒ 有原函数，无定积分.

(3) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$



⇒ 无原函数，无定积分.

(4) $f(x)=\begin{cases}2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)$ 有界振荡 ⇒ $F(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

⇒ 有原函数，有定积分

[注] (降级)
① $f(x)$ 在区间 I 上连续，则 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 在 I 上可导
② $f(x)$ 在 I 上可积，则 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 在 I 上连续

▲ $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 天生就连续
(非常好用的结论!)

例 11

设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leq x\leq \pi\\ 2, & \pi< x\leq 2\pi\end{cases}$

记 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$，则以下结论正确的是（C）

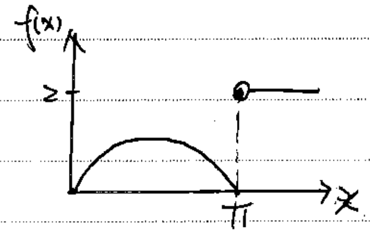
A) $x=\pi$ 是 $F(x)$ 的跳跃间断点，

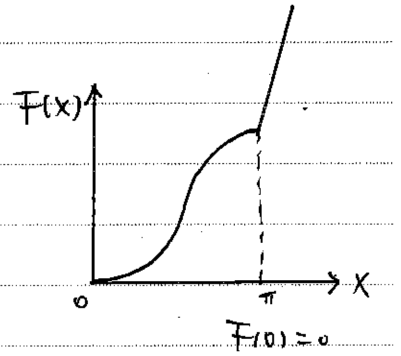
B) $x=\pi$ 是 $F(x)$ 的可去间断点，

C) $x=\pi$ 是 $F(x)$ 的连续但不可导点，

D) $x=\pi$ 是 $F(x)$ 的可导点。

解：





$F(x)$ 天生连续，A、B 直接错。

$f(x)$ 的跳跃间断点即为 $F(x)$ 不可导点（尖点）

（关于函数草图的画法，我后面会详细讲）

(三) 关于奇偶性（P201 表格）"强化讲解"

▶ $f(x)$ 可积奇函数 $\Rightarrow \begin{cases} \int_0^x f(t)\,dt & \text{偶} \\ \int_a^x f(t)\,dt & \text{偶} \quad (a\neq 0) \end{cases}$

（[注] $\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^0 f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt$ （拆）

偶 = 偶（常数是偶函数）+ 偶）

▶ $f(x)$ 可积偶函数 $\Rightarrow \begin{cases} \int_0^x f(t)\,dt & \text{奇} \\ \int_a^x f(t)\,dt & \text{不定} \end{cases}$

（[注] $\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^0 f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt$

偶 + 奇，所以不定咯~）

(四) 关于周期性 (P201 表格) "深化讲解"

Thm: 若 $f(x)$, T 则 $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$, $\forall a$

即在一个周期上的积分值与起点无关.

(应用. 如证明奇函数在一个周期上的积分必为 0.

$\int_0^T f(x)\,dx = 0$

pf: $\int_0^T f(x)\,dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx = 0$ ✓ (惊了!))

(五) 关于有界

以例 12 引入 "放狗战术"

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导, 则

A) $\exists \delta>0$, $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内有界时 $\Rightarrow f'(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内有界

✓B) $\exists \delta>0$, $f'(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内有界时 $\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内有界

C) $\exists X>0$, $f(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 内有界 $\Rightarrow f'(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 内有界

D) $\exists X>0$, $f'(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 内有界 $\Rightarrow f(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 内有界

[分析] A) 举反例考你能否从有界中求出无界来. ("放狗")

$x\to 0^+$, $|\sin 狗| \le 1$.

取 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$

B) 是定理: 若 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 内可导, 当 $f'(x)$ 在 (a,b) 内有界时, $f(x)$ 在 (a,b) 内一定有界.

C) $x\to+\infty$, $f(x)=\sin x^2$, $f'(x)=2x\cos x^2$ "放狗"

D) $x\to+\infty$, $f(x)=x$. $f'(x)=1$

B)

pf：（用 Lagrange 中值定理）

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x-x_0)$$

$$\Rightarrow |f(x)| = |f(x_0) + f'(x-x_0)|$$

$$\Rightarrow |f(x)| \le |f(x_0)| + |f'(\xi)||x-x_0| < f(x_0) + M(b-a)$$

OK!

(六) 其它常用结论

★1. $f(x) \in C[a,b]$,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

⇨ 注："非常重要，不可以开玩笑的~"

2. $f(x), g(x) \in C[a,b]$, $g(x) \ge 0$, $\Rightarrow \exists \xi \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

（"保号的 $g(x)$ 不用中值，f 的系"）

3. $f(x) \in C[a,b]$ 则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

★4. ① $f(x) \in C[a,b]$, $f(x) \ge 0$, $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

$$\Rightarrow f(x) \equiv 0 \quad (a \le x \le b)$$

② $f(x) \in C[a,b]$, $f(x) \ge 0$ 且 $f(x) \not\equiv 0$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx > 0$$

③ $f, g \in C[a,b]$, $f \ge g$, $f \not\equiv g$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$$

例15

$f(x) \in C[a,b]$，$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b x f(x)\, dx = 0$

试证 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少两不同零点。

pf:

令 $F(x) = \int_a^x f(x)\, dx = 0$

$\Rightarrow F(a) = F(b) = 0 \Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$，$F'(c)=0 \Rightarrow f(c)=0$

一个零点确定。

反证. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内除 c 外无零点。

则 $f(x)$ 在 (a,c) 与 (c,b) 内异号（因为积分为0 ❤）

设 $\begin{cases} f(x)<0, & x\in(a,c) \\ f(x)>0, & x\in(c,b) \end{cases}$

$$\int_a^b (x-c) f(x)dx = \int_a^c (x-c) f(x)dx + \int_c^b (x-c) f(x)\, dx$$

对 $\int_a^c (x-c) f(x)\, dx$

由 $\begin{cases} (x-c)\, f(x) \in C[a,c] \\ (x-c)\, f(x) \geq 0 \\ (x-c)\, f(x) \not\equiv 0 \end{cases}$

$\therefore \int_a^c (x-c) f(x)\, dx > 0$ （P205. 4. ②）

同理

$\int_c^b (x-c)\, f(x)\, dx > 0$

$\Rightarrow \int_a^b (x-c)\, f(x)\, dx > 0$ 而 $\int_a^b (x-c) f(x)\, dx = 0$

$\therefore f(x)$ 除 c 外至少还有一个零点。

（ kira备注：

$\int_a^b (x-c)\, f(x)\, dx = 0$ 来自题干移项，真的是非常漂亮❤）

▶5. 「Cauchy不等式」 "康哥常识小工具"

$f(x), g(x) \in C[a,b]$ 则 $\left(\int_a^b fg\,dx\right)^2 \le \int_a^b f^2dx \cdot \int_a^b g^2dx$

KiTa小贴士：

- 1. 问：可积和存在原函数是不是一回事？

  答：当然不！可积是区间上定积分存在。
  原函数以不定积分为定义。
  可积用 P_{201} 的"箭头"判断。
  原函数用 P_{200} 的 "√ ××× √" 判断

- 2. 补充一个反常积分的点。（反常积分在"大王小王篇"已有）
  反常积分在收敛情况下可看作奇函数 or 偶函数，可用"偶倍奇0"，在收敛未判时，不可乱用奇偶性！

极值，凹凸性与拐点

(一) 关于极值

① 邻域内 $(x_0-\delta,\ x_0,\ x_0+\delta)$ $\forall x$, $f(x) < f(x_0)$ 极大值点，
$\forall x$, $f(x) > f(x_0)$ 极小值点
（"既管大小，也管位置"）

② 最值　区间 I 上，$f(x) < f(x_0)$，$\forall x$　最大
$f(x) > f(x_0)$，$\forall x$　最小
（"只管大小，不管位置"）

☆ $[a,b]$ 上最值可疑点：① 驻点 ② $f'(x)$ 不∃点 ③ 端点
(a,b) 上 ③为 $\lim_{x\to a^+}$ 和 $\lim_{x\to b^-}$

- [Thm] 区间内部的最值必为极值.
  (中值定理证明题, $f'(x_0)=0$ 必备~)

- ps. 跳跃、可去、振荡、无穷均可作为极值点.
  (虽是间断点, 但双侧都有定义)

③ 单调性

<1> 单调性判别

$\forall x\in I$, 一个区间上所有点导数都大于0, 说严格↑

$\forall x\in I$ 一个区间上所有点导数都小于0, 说严格↓

<2> 费马定理: 若 $f(x)$ 在一点可导且在该点取极值,
则必有 $f'(x)=0$.

<3> 判断极值的第一充分条件. (用 $f'(x)$)

若 $f(x)$ 在 x_0 连续且在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 可导, 在 x_0 左邻域↓,
右邻域↑ ⇒ 取极小值.

(只要左右邻域导数符号相反, 即取极值)

☆ <4> 判断极值的第二充分条件 (用 $f''(x)$)

若 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, 该点必为极值点.

背 ☆ <5> 判断极值的第三充分条件 (用 $f^{(n)}(x)$) $n>2$.

若 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$

$f^{(n)}(x_0)\neq 0$

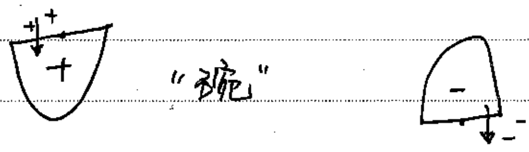
则 n 为偶数 ⇒ x_0 必为极值点.

且 $f^{(n)}(x_0)>0$ ⇒ 极小值点 / $f^{(n)}(x_0)<0$ ⇒ 极大值点

(二) 关于凹凸性与拐点

①

一张生动又形象的图



"碗"

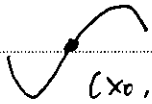
凹　　　　　　　　凸

$f''>0$　　　　　　　　$f''<0$

想象函数图像是个碗，f''为正就是一只正着的碗，可以盛住东西，里面东西增加"+"；

f''为负是倒扣的碗，里面东西撒出来"−"；

② 拐点



$(x_0, f(x_0))$

凹曲线和凸曲线的分界点

定理：$f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$

$f^{(n)}(x_0)\neq 0$，n为奇数，则x_0必为拐点。

pf：（考过多次，背！）只证$n=3$情形

$$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}>0$$

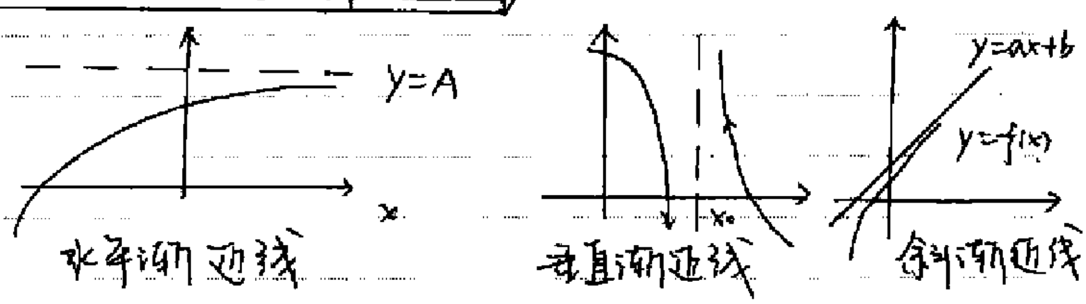
局部保号性 $\Rightarrow$ $\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$

$\Rightarrow$ $x\in(x_0-\delta, x_0)$ 有 $f''(x)<0$

$x\in(x_0, x_0+\delta)$ 有 $f''(x)>0$

$f''(x)$在x_0两端变号 $\Rightarrow$ $(x_0, f(x_0))$为拐点。

渐近线与函数作图 （必考！）



斜渐近线满足 $\lim_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$.

"已知极限反求函数"

$$\begin{cases} b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax) \\ a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \end{cases}$$

★求渐近线的程序.

① 找出 $y=y(x)$ 的无定义点，或定义区间端点 X_0，
考查 $\lim_{x\to x_0} y(x) \overset{?}{=} \infty$，若是，则 $x=x_0$ 为铅垂渐近线.
$(x\to x_0^+)$
$(x\to x_0^-)$

② 考查 $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) \overset{?}{=} A$ （∃）
若是，则 $y=A$ 为水平渐近线；
若不是，$\lim_{x\to\pm\infty} y(x)=\infty$，则转向③

③ 考查 $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x} \overset{?}{=} a$ （≠0）
若是，则考查 $\lim_{x\to\pm\infty}[y(x)-ax] \overset{?}{=} b$.
若也是，则 $y=ax+b$ 为斜渐近线.

（闭眼盖想一想，水平渐近线和斜渐近线是"有你没我"的关系哦～）（针对"x趋于同一方向时而言）

例14

曲线 $y=\sqrt{4x^2+x}\,\ln(2+\frac{1}{x})$ 的渐近线有 3 条.

[分析]

$$\begin{cases} 4x^2+x\geq 0 \\ 2+\frac{1}{x}>0 \\ x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow (-\infty,-\tfrac{1}{2})\cup(0,+\infty) \text{ 为定义域}.$$

$-\infty \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad +\infty$

1° $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}-0}\sqrt{4x^2+x}\,\ln(2+\frac{1}{x})=-\infty \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ 为垂直渐近线.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{4x^2+x}\,\ln(2+\frac{1}{x})=0.$ 无

2° $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{4x^2+x}\,\ln(2+\frac{1}{x})=\infty$ 无

3° $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}}\,\ln(2+\frac{1}{x})=2\ln 2=a\neq 0.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+x}\,\ln(2+\frac{1}{x})-2\ln 2\,x\right]=\frac{1}{4}\ln 2+1=b.$

$\Rightarrow y=2\ln 2\cdot x+\frac{1}{4}\ln 2+1$ 为斜渐近线.

同理 $y=-2\ln 2\cdot x-(\frac{1}{4}\ln 2+1)$ 为斜渐近线. ☆

(☺ 大家小心漏求 $\infty-\infty$ 型我有特别强调哦~)

☆ 作图的程序:

(☺ 你已经是个不加考虑的大人了,要像大人一样作图哦. 考虑6大因素!)

依次是:

1° $x\in D$ 定义域　2° $f'(x)\begin{cases}=0\\ \text{无}\end{cases}$ 增减

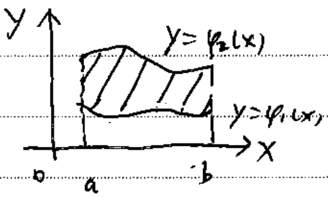
3° $f''(x)\begin{cases}=0\\ \text{无}\end{cases}$ 凹凸.　4° 画表.　5° 渐近线　6° 关键点

x	(,)	?	(,)	?	(,)
f'	+		−		+
f''	−		+		+
[illegible]	[illegible]	[illegible]			[illegible]

求测度 (长度, 面积, 体积) (套公式, 送分).

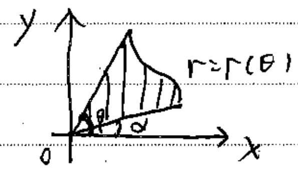
(😊 不管题目如何变化, 其实公式也不必死记硬背, 面积就是"长×宽", 体积就是"底×高", 把握此原则, 瞎推都可以~).

(1) $A=\int_a^b[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]\,dx$

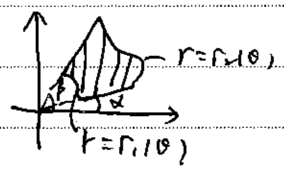


(2) 曲边扇形面积

$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta$



$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)]\,d\theta$

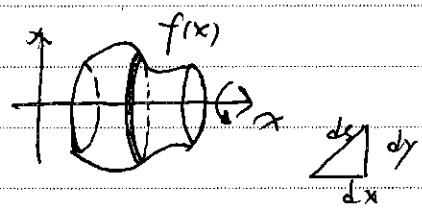


("跟求扇形面积一个道理")

(3) 求旋转体表面积.

$dA=2\pi|f(x)|\,ds$ (类比$2\pi r$)

$A=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

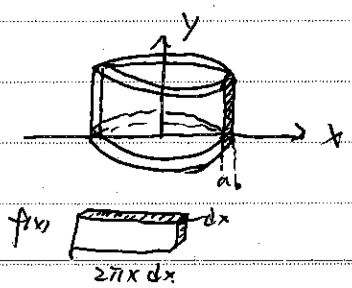


体积 $V=\int_a^b\pi f^2\,dx$

(4) 求薄壁圆柱体积. ("壳体")

"拆开变长方体"

$V=\int_a^b|f(x)|2\pi x\,dx.$



不等式证明

（历来高数考证明题频率最高）

〈四大方法〉
- 单调性（求导～）
- 中值定理
- 凹凸性（偏频）
- 最值（与单调性是同一问题不同侧面

（☺ kira备注：我个人是不太建议在不等式证明上砸太多心血啦．毕竟练完那么多花样到头来发现大多题目还是直接用单调性（求导）来得直白．）

"精华"

① 利用 $\begin{cases} f''(x)>0 \\ f(a)=f(b)=0 \end{cases} \Rightarrow f(x)<0 \quad (a<x<b)$

例15

$0<x<\frac{\pi}{2}$时，证：$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$

证：

令 $f(x)=x-\sin x$，$f(0)=0$

$f'(x)=1-\cos x>0 \quad (0<x<\frac{\pi}{2})$

$\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(x)>0 \ (0<x<\frac{\pi}{2}) \end{cases} \Rightarrow f(x)>0 \ (0<x<\frac{\pi}{2})$

令 $g(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$，$g(0)=0$.

$g'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}$ （用单调性碰壁）

$g''(x)=-\sin x<0$

$\because \begin{cases} g(0)=0, & g(\frac{\pi}{2})=0 \\ g''(x)<0 \end{cases}$

$\therefore g(x)>0.\quad (0<x<\frac{\pi}{2})$ ☆

② 利用 $M_1 \le f(x) \le M_2$

其中 M_1 可 $\begin{cases} =m \\ <m \end{cases}$，$M_2$ 可 $\begin{cases} =M \\ >M \end{cases}$

例16

$e<a<b$，证：$a^b>b^a$ （"简单到无法容忍"） 注：

证：

$a^b>b^a \Leftrightarrow b\ln a - a\ln b>0$

$\varphi(x)=x\ln a - a\ln x$，$\varphi(a)=0$ （习惯动作）

$\varphi'(x)=\ln a-\frac{a}{x}>0 \quad (x>a)$

$\begin{cases} \varphi(a)=0 \\ \varphi'(x)>0,\ (x>a) \end{cases} \Rightarrow \varphi(x)>0 \quad (x>a)$

$\because b>a \quad \therefore \varphi(b)>0.$ ☆

例17

$0<a<b$，证：$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$

证：

$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{1}{\xi} \quad (a<\xi<b)$

$\frac{1}{\xi}>\frac{1}{b}>\frac{2a}{a^2+b^2}$ （中学生不等式）（$M_1<m$）

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \ln b-\ln a = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} - (\ln x-\ln a), \quad \varphi(a)=0$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{a}\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{a}}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{x+a-2\sqrt{a}\sqrt{x}}{2\sqrt{a}\,x\cdot\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}\,x\sqrt{x}} > 0$$

$$\begin{cases} \varphi(a)=0 \\ \varphi'(x)>0 \quad (x>a) \end{cases} \Rightarrow \varphi(x)>0 \quad (x>0)$$

$\because b>a$. $\quad \therefore \varphi(b)>0$

※

例18 "一步 Cauchy"

$e<a<b<e^2$，证 $\dfrac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a} > \dfrac{4}{e^2}$

证：（可用单调性）

左 $= \dfrac{2\ln c}{c} \quad (a<c<b)$

即证 $\dfrac{2\ln c}{c} > \dfrac{4}{e^2}$ （想法：$\frac{4}{e^2}$ 可能是最小值，可能小于最小值）

令 $\varphi(c) = \dfrac{2\ln c}{c}$

$\varphi'(c) = 2\cdot\dfrac{1-\ln c}{c^2} < 0$

$\therefore \varphi(c)$ 在 $[e, e^2]$ 上 ↓

$m = \varphi(e^2) = \dfrac{4}{e^2}$

$\therefore \varphi(c) > \dfrac{4}{e^2}$

※

方程根讨论

step1. 写函数，找范围. step3. 画草图

step2. 判增减，找极值. "三步思想"

例19

$a>0$，讨论 $ae^{x}=x^{2}$ 根个数.

解:

• step 1. $ae^{x}=x^{2} \Leftrightarrow x^{2}e^{-x}-a=0$. ("把x捆一起")

令 $\varphi(x)=x^{2}e^{-x}-a \quad (-\infty<x<+\infty)$

• step 2. $\varphi'(x)=e^{-x}(2x-x^{2})=0$

$\Rightarrow x=0,\ x=2$

$$\left.\begin{array}{l} x<0,\ \varphi'(x)<0 \\ 0<x<2,\ \varphi'(x)>0 \\ x>2,\ \varphi'(x)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \text{ 极小点} \\ x=2 \text{ 极大点} \end{array}$$

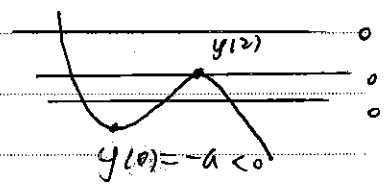
$\varphi(0)=-a<0$. $\quad \varphi(2)=\frac{4}{e^{2}}-a$

• step 3. 画草图 (凹凸性不重要，所以不追究)

① 当 $\varphi(2)>0$. $0<a<\frac{4}{e^{2}}$ 3个根

② 当 $\varphi(2)=0$, $a=\frac{4}{e^{2}}$ 2个根

③ 当 $\varphi(2)<0$, $a>\frac{4}{e^{2}}$ 1个根.



例20

证 $e^{x}=-x^{2}+ax+b$ 不可能有3个不同根.

证: (反证) $f(x)=e^{x}+x^{2}-ax-b$

设 $c_1<c_2<c_3$, $f(c_1)=f(c_2)=f(c_3)=0$.

$\exists \xi_1\in(c_1,c_2)$, $\xi_2\in(c_2,c_3)$. $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0 \Rightarrow f''(\xi)=0$

而 $f''(x)=e^{x}+2>0$ 恒成立. 矛盾!

(完结撒花...♡...)