

# 偏微分方程

浙江大学

2008.9 - 2008.12

## 主要内容:

一、一阶方程

二、二阶方程

- 椭圆型方程 (典型的例子: Laplace方程)
- 抛物型方程 (典型的例子: 热传导方程; Li-Yau's Harnack inequality)
- 双曲型方程 (典型的例子: 波动方程)

三、特征流形的Cauchy问题: Cauchy-Kowalevski定理

四、无解的线性方程—H. Lewy例子。

## 习题:

- 必做;
- 思考题;
- Open problems。

## 参考书:

- F. John, Partial Differential Equations, Springer-Verlag, 1982.
- 谷超豪, 李大潜等人, 《数学物理方程》, 高教出版社, 2002年。
- 姜礼尚, 孔德兴等人, 《应用偏微分方程》, 高教出版社, 2008年。

# 绪 言

## § 1. 基本概念

- 偏微分方程 (PDE)

关于函数 $u(x, y, \dots)$ 的PDE是形如

$$F(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots) = 0 \quad (1)$$

的关系式，其中 $F$ 是自变量 $x, y, \dots$ 未知函数 $u$ 以及 $u$ 的有限多个偏导数的已知函数。

- 解(solution):

称 $u$ 是(1)的解，如果把 $u(x, y, \dots)$ 及其相应的偏导数代入(1)式后，在 $x, y, \dots$ 空间的某个区域 $\Omega$ 中(1)式关于这些变量恒等地成立。

♣ 除非有相反的说明，在本课程中我们总是要求 $x, y, \dots$ 是实的， $u$ 以及在方程(1)中出现的 $u$ 的偏导数在实空间的区域 $\Omega$ 中都是关于 $x, y, \dots$ 的连续函数。为了简单起见，我们有时也常常省略区域 $\Omega$ 的明确描述，而把所述的命题也“局部地”适用于 $x, y, \dots$ 空间中一点的某一适当领域。

- 偏微分方程组(PDEs):

涉及一个或几个未知函数及其偏导数的多个偏微分方程组成一个方程组。

记 $n$ 为未知函数的个数， $m$ 为PDE的个数

当 $n > m$ 时，此时方程组称为欠定的(under-determined);

当 $n < m$ 时，此时方程组称为超定的(over-determined)。

- PDE或PDEs的阶数:

是指其中出现的最高阶导数的阶数。

- PDE或PDEs的维数:

是指自变量 $x, y, \dots$ 的个数。

- 线性，拟线性，完全非线性:

PDE称为线性的，如果它关于未知函数 $u$ 及其所有的偏导数是线性的，并且其系数仅依赖于自变量 $x, y, \dots$ ；

$m$ 阶PDE称为拟线性的，如果它关于未知函数 $u$ 的 $m$ 阶偏导数是线性的，并且其 $m$ 阶偏导数的系数仅依赖于 $x, y, \dots$ 以及未知函数 $u$ 的阶数低于 $m$ 的偏导数；

$m$ 阶PDE称为完全非线性的，如果它关于未知函数 $u$ 的 $m$ 阶偏导数是非线性的。

♣ 线性，拟线性，完全非线性之间的关系见下图：

$$PDE \left\{ \begin{array}{l} \text{线性 (linear)} \\ \text{非线性 (nonlinear)} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{拟线性 (quasilinear)} \\ \text{完全非线性 (fully nonlinear)} \end{array} \right.$$

♣

线性：例如弦的小振幅振动等；

非线性：例如湍流等。

## § 2. 例子

PDEs出现在数学、物理学以及工程技术中的各个分支。在许多场合，有一个自变量代表时间，通常用 $t$ 表示，而其余的自变量记为 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ （特别地，当 $n = 3$ 时，则记为 $x, y, z$ ），表示 $n$ 维空间中的位置。

引入几个特殊记号

$$\Delta \triangleq \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (\text{Laplace 算子}) ,$$

$$\square \triangleq \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (\text{波算子}) .$$

例1. Laplace方程

$$\Delta u \triangleq \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0. \quad (2)$$

它的解 $u$ 称为势函数或调和函数 (harmonic function)。

♣ 特别地，当 $n = 2$ 时，记 $x_1 = x, x_2 = y$ ，可以证明存在一个“共轭”调和函数 $v(x, y)$ 使得 $u$ 和 $v$ 一起满足下述Cauchy-Riemann一阶方程组

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad (3)$$

(3)式的一对实解 $(u, v)$ 组成复变元 $z = x + iy$ 的解析函数

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (4)$$

♣ 也可以把 $(u(x, y), -v(x, y))$ 看成无旋不可压缩流体的速度场。

♣ 不可压缩无旋流的速度势、重力场、电场以及处于热平衡状态的温度分布场均满足 $n = 3$ 时的方程(2)。

### 例2. 波动方程 (wave equation)

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \quad (c > 0 \text{ 常数}), \quad (5)$$

其中 $u = u(t, x_1, \dots, x_n)$ 。

♣  $n = 1$  : 弦的振动, 波在管中的传播波,  $c$ 表示传播速度。

$n = 2$  : 浅水面上的水波。

$n = 3$  : 声波或光波。

### 例3. Maxwell 方程 (Maxwell equations)

在真空中且无自由电荷和电流的情况下, 关于电场强度向量 $E = E(E_1, E_2, E_3)$ 及磁场强度向量 $H = (H_1, H_2, H_3)$ 的Maxwell方程 实质上是由六个一阶方程所组成的线性方程组

$$\begin{cases} \varepsilon E_t = \operatorname{curl} H, \\ \mu H_t = -\operatorname{curl} E, \\ \operatorname{div} E = \operatorname{div} H = 0, \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\varepsilon, \mu$  是描述电磁介质的常数, 分别称为真空介电常数和导磁系数。特别地, 作为关系式

$$\varepsilon E_t = \operatorname{curl} H, \quad \mu H_t = -\operatorname{curl} E$$

的推论, 如果 $t = 0$ 时, 关系式

$$\operatorname{div} E = \operatorname{div} H = 0$$

成立, 则上式对所有的 $t$ 均成立。不难验证, 这里的每个分量 $E_i, H_k$  均满足具有 $c^2 = 1/\varepsilon\mu$ 的波动方程(5)。事实上, 在方程组中消去磁场强度便得到电场强度的偏微分方程: 这只需对(6)式中的第二式求旋度, 再用其第四式可得

$$\operatorname{curl}(\operatorname{curl} E) = -\mu(\operatorname{curl} H)_t = -\varepsilon\mu E_{tt},$$

又因为

$$\operatorname{curl}(\operatorname{curl} E) = \nabla(\operatorname{div} E) - \Delta E,$$

再利用(6)式中的第三式得到

$$E_{tt} = (\varepsilon\mu)^{-1}\Delta E.$$

类似地，我们可以得到磁场强度向量  $H$  所满足的偏微分方程。

**例4.** 在经典弹性理论中，弹性波可由线性方程组

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} u) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (7)$$

描述，其中  $u_i(t, x_1, x_2, x_3)$  是位移向量  $u$  的分量， $\rho$  是密度，而  $\lambda, \mu$  是弹性材料的 Lame 常数。可以证明，每一个分量  $u_i$  都满足由两个不同的波动算子所组成的四阶方程

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \Delta \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho} \Delta \right) u_i = 0. \quad (8)$$

当弹性平衡（即  $u_t = 0$ ）时，我们便得到重调和方程

$$\Delta^2 u = 0. \quad (9)$$

**例5.** 当密度和比热都是常数时，导热体中的温度分布满足热传导方程

$$u_t = k \Delta u, \quad (10)$$

其中  $k > 0$  是常数，表示介质的热传导系数。

**例6.** 在势能为  $V(x, y, z)$  的场中，运动的质量为  $m$  的单个质点所满足的 Schrödinger 方程是

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta(\psi) + V\psi, \quad (11)$$

其中  $\hbar = 2\pi\hbar$  是 Planck 常数。

**例7.** Tricomi 方程

$$u_{xx} = xu_{yy}. \quad (12)$$

另一类重要的方程是

$$u_{xx} = yu_{yy}.$$

这两类方程在平面跨音速流的研究中具有十分重要的作用。

上述例子中的方程都是线性的。非线性方程也是常见的，但是求解非线性方程实际上更为困难，因此在实际中常用线性方程近似的表示它们。下面是几个非线性方程的例子。

**例8.** 3维Euclid空间中的极小曲面 $z = u(x, y)$ ，即通过给定周线而具有最小面积的曲面，满足下述二阶拟线性方程

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_xu_yu_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0. \quad (13)$$

**例9.**  $1+n$ 维Minkowski空间中的极值曲面 $x = x(t, \theta) \in \mathbb{R}^n$ 满足下述二阶拟线性方程

$$|x_\theta|^2x_{tt} - 2\langle x_t, x_\theta \rangle x_{t\theta} + (|x_t|^2 - 1)x_{\theta\theta} = 0. \quad (14)$$

**例10.** 密度为 $\rho$ 的二维定态绝热无旋等熵流的速度势 $\phi(x, y)$ （其速度分量为 $\phi_x, \phi_y$ ）满足下述二阶拟线性方程

$$(1 - c^{-2}\phi_x^2)\phi_{xx} - 2c^{-2}\phi_x\phi_y\phi_{xy} + (1 - c^{-2}\phi_y^2)\phi_{yy} = 0, \quad (15)$$

其中 $c$ 是速率 $q = \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}$ 的已知函数。例如，对于状态方程为

$$p = A\rho^\gamma \quad (16)$$

的多方气体（或称为 $\gamma$ 气体），

$$c^2 = 1 - \frac{\gamma - 1}{2}q^2. \quad (17)$$

**例11.** 关于不可压缩液体的粘性流的Navier-Stokes方程是速度分量 $u_k$ 和压力 $p$ 之间的一组偏微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} u_k + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \mu \Delta u_i & (i = 1, 2, 3), \\ \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 & (\text{或写成 } \operatorname{div} u = 0), \end{cases} \quad (18)$$

其中 $\rho$ 是常密度而 $\mu$ 是运动的粘性系数。

### 例12. 空气动力学方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j + \delta_{ij} p) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j E + p v_j) = 0, \end{array} \right. \quad (19)$$

其中  $\rho(t, x)$  表示气体的密度， $v = (v_1(t, x), v_2(t, x), v_3(t, x))$  为速度， $p$  为压力， $E = E(t, x)$  为内能。由热力学知识可知，所有的热力学量只有两个是相互独立的，因此密度  $\rho$ ，压力  $p$ ，温度  $T$  以及内能  $E$  中，它们之间有一个确定的关系式

$$p = p(\rho, E) \quad (\text{或 } p = p(\rho, T)). \quad (20)$$

对不同的气体，上式具有不同的表达式。(20)式通常称为气体的状态方程。注意到状态方程(20)式，(19)式构成一个封闭的一阶拟线性偏微分方程组。

### 例13. 函数 $u(t, x)$ 的三阶非线性方程的一个典型例子是 Korteweg-de Vries 方程

$$u_t + c u u_x + u_{xxx} = 0, \quad (21)$$

它是在水波的研究中被首先提出的，可用来描述浅水波中的孤立子的传播。

### 例14. 双曲 Monge-Ap  re 方程

$$S_{\tau\tau} = \frac{S_{\tau\theta}^2 - 1}{S_{\theta\theta} + S}. \quad (22)$$

上述方程是在研究平均曲率流时提出的。

通常我们试图描述或理解所考虑的偏微分方程的解流形。不同类型的方程，其结果是十分不同的。偏微分方程的有意义的适定问题常常受具体的物理背景及物理意义所启示。

# 第一章 一阶方程

一阶方程是一类最基本的偏微分方程，它在数学、物理学以及工程技术中具有广泛的应用背景。本章我们通过具体的例子着重介绍一阶方程的一些基本概念、方法和结果。

## § 1. 一个简单线性方程

在本节中我们考虑关于函数 $u = u(t, x)$ 的一个最简单的方程

$$u_t + cu_x = 0 \quad (1.1)$$

并用它来说明将在后面起重要作用的某些概念，其中 $c > 0$ 是常数。

### 一、解析求解：特征线方法

在 $(t, x)$ -平面上，定义特征线族

$$\frac{dx}{dt} = c. \quad (1.2)$$

沿着特征线族中的任意一条直线

$$x - ct = \text{const.} \triangleq \xi, \quad (1.3)$$

方程(1.1)的解 $u$ 满足

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}u(t, ct + \xi) = u_t + cu_x = 0. \quad (1.4)$$

因此，沿着这样的一条直线， $u$ 保持为常数，它仅与区分线族中不同直线的参数 $\xi$ 有关。于是方程(1.1)的通解具有下面的形式

$$u(t, x) = u(0, \xi) \triangleq f(\xi) = f(x - ct), \quad (1.5)$$

其中 $f(\xi)$ 是一任意给定的函数，它表示 $u$ 的初始值。上式表明通解 $u$ 由初始值

$$u(0, x) = f(x) \quad (1.6)$$

唯一确定。反之，如果 $f$ 属于 $C^1(\mathbb{R})$ 类，则任何形如(1.5)的函数必是(1.1)的具有初始值 $f$ 的解。我们注意到 $u$ 在任意点 $(t, x)$ 处的值仅与初始函数 $f$ 在单个变

元 $\xi = x - ct$ 时的值有关，而这个 $\xi$ 值正是过 $(x, t)$ 点的特征线与初始曲线 $x$ -轴交点的横坐标。 $u(t, x)$ 关于初始值的依赖区域由单个点 $\xi$ 组成。在点 $\xi$ 处的初始值只影响特征线(1.3)上解 $u(t, x)$ 的值。见图1.1。

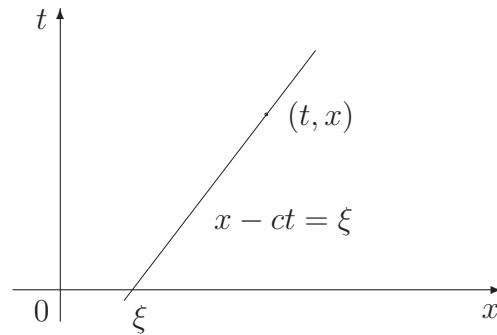


图 1.1: 特征线

如果对每一个固定的时间 $t$ ，用 $(x, u)$ -平面上的图象表示函数 $u$ ，我们会发现 $t = T$ 时的图象是由 $t = 0$ 时的图象沿平行于 $x$ -轴的方向平移 $cT$ 的距离得到：

$$u(x, 0) = u(x + cT, T) = f(x). \quad (1.7)$$

解的图象描述了一个以速度 $c$ 向右传播而不改变形状的波，见图1.2。

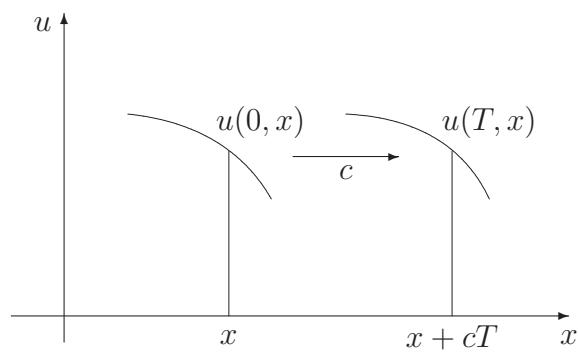


图 1.2: 波的平移

♣ 波：方程的解；线性波：线性方程的解；非线性波：非线性方程的解。

## 二、近似求解：有限差分方法

下面我们用这个具有显示解的例子引出用有限差分方法求偏微分方程数值解的某些概念。

用 $x$ 方向步长为 $h$ ,  $t$ 方向步长为 $k$ 的矩形网格覆盖 $(t, x)$ -平面。换句话说, 即只考虑 $x$ 是 $h$ 的整数倍,  $t$ 是 $k$ 的整数倍的点 $(t, x)$ 。为了求数值近似, 用差分方程

$$\frac{v(t+k, x) - v(t, x)}{k} + c \frac{v(t, x+h) - v(t, x)}{h} = 0 \quad (1.8)$$

代替偏微分方程(1.1)是自然的。当 $h, k \rightarrow 0$ 时, 这个方程在形式上就变成

$$v_t + cv_x = 0.$$

我们自然要问: 当 $h, k$ 很小时, 在网格点上(1.8) 的具有初始值

$$v(0, x) = f(x) \quad (1.9)$$

的解 $v$ 与初值问题(1.1), (1.6)的解相差多少?

为了回答这个问题, 我们引入

$$\lambda = k/h.$$

这样(1.8)式可写成递推公式

$$v(t+k, x) = (1 + \lambda c)v(t, x) - \lambda cv(t, x+h). \quad (1.10)$$

上式表明我们可以用 $t$ 时刻 $v$ 的值表示 $t+k$ 时刻 $v$ 的值。引入平移算子 $E$ :

$$Ef(x) = f(x+h). \quad (1.11)$$

于是, (1.10)式就变成

$$v(t+k, x) = ((1 + \lambda c) - \lambda cE)v(t, x), \quad (1.12)$$

其中 $t = nk$ 。由此, 通过迭代就得到关于(1.8)的初值问题的解

$$\begin{aligned} v(t, x) &= v(nk, x) = ((1 + \lambda c) - \lambda cE)^n v(0, x) \\ &= \sum_{m=0}^n C_n^m (1 + \lambda c)^m (-\lambda cE)^{n-m} f(x) \\ &= \sum_{m=0}^n C_n^m (1 + \lambda c)^m (-\lambda c)^{n-m} f(x + (n-m)h). \end{aligned} \quad (1.13)$$

显然 $v(t, x) = v(nk, x)$ 的依赖区域是由 $x$ -轴上的点

$$x, x + h, x + 2h, \dots, x + nh = x + \frac{t}{\lambda}, \quad (1.14)$$

组成，所有这些点均在 $x$ 和 $x + nh$ 之间。而偏微分方程解的依赖区域是由单点 $\xi = x - ct = x - c\lambda nh$ 组成，它在区间 $[x, x + nh]$ 之外。当 $h, k \rightarrow 0$ 时，我们显然不能指望 $v$ 收敛到偏微分方程的精确解，因为在构造 $v(t, x)$ 时我们没有用到对确定 $u(t, x)$ 至关重要的值 $f(\xi)$ ，反而用到了与 $u(t, x)$ 毫无关系的 $f$ 在区间 $[x, x + t\lambda^{-1}]$ 上的值。这个差分格式违背了Courant-Friedrichs-Lowy准则：差分方程的依赖区域的极限必须包含偏微分方程的依赖区域。

差分格式(1.8)的严重不稳定性也说明它是不适当的。在应用问题中数据 $f$ 不是完全精确的，而且在数值计算的每一步我们也不易（甚至不可能）用精确值而总会有小的误差。从(1.13)式显然可以看出：如果 $f$ 有适当交错符号的误差并且 $f$ 的绝对值不超过 $\varepsilon$ ，那么其结果将可能导致 $v(t, x) = v(nk, x)$ 有大小为

$$\varepsilon \sum_{m=0}^n C_n^m (1 + \lambda c)^m (\lambda c)^{n-m} = (1 + 2\lambda c)^n \varepsilon \quad (1.15)$$

的误差。因此，当网格比 $\lambda$ 固定时， $v$ 的可能产生的误差将按 $t$ 方向的步数 $n$ 的指数函数增长。

一个更为适当的差分格式是用向后差商写出的：

$$\frac{v(t+k, x) - v(t, x)}{k} + c \frac{v(t, x) - v(t, x-h)}{h} = 0, \quad (1.16)$$

或者用记号写成

$$v(t+k, x) = ((1 - \lambda c) + \lambda c E^{-1}) v(t, x). \quad (1.17)$$

(1.17)的初值问题的解变成

$$\begin{aligned} v(t, x) &= v(nk, x) \\ &= \sum_{m=0}^n C_n^m (1 - \lambda c)^m (\lambda c)^{n-m} f(x - (n-m)h). \end{aligned} \quad (1.18)$$

在这个格式中， $v(t, x)$ 关于 $f$ 的依赖区域由点

$$x, x - h, x - 2h, \dots, x - nh = x - \frac{t}{\lambda} \quad (1.19)$$

所组成。所有这些点均在  $x - t\lambda^{-1}$  和  $x$  之间。令  $h, k \rightarrow 0$ , 而网格比  $\lambda$  保持不变, 则集合(1.19)的极限点充满  $x$  轴上的区间  $[x - \frac{t}{\lambda}, x]$ 。当这个区间包含点  $\xi = x - ct$ , 即网格比  $\lambda$  满足

$$\lambda c \leq 1 \quad (1.20)$$

时, 这个格式符合Courant-Friedrichs-Lowy 准则。在条件(1.20)之下, 该格式的稳定性也可以从下述事实看出: 由(1.18), 初始函数  $f$  的绝对值不超过  $\varepsilon$  的误差, 将使  $v(t, x) = v(nk, x)$  产生的最大可能误差是

$$\varepsilon \sum_{m=0}^n C_n^m (1 - \lambda c)^m (\lambda c)^{n-m} = \varepsilon ((1 - \lambda c) + \lambda c)^n = \varepsilon. \quad (1.21)$$

可以证明, 只要稳定性条件(1.20)满足并且  $f$  有一致有界的二阶导数, 则当  $h, k \rightarrow 0$  而且  $k/h = \lambda$  保持不变时, 由(1.18)描述的  $v$  确实收敛到  $u(t, x) = f(x - ct)$ 。事实上, 我们注意到  $u(t, x)$  满足

$$\begin{aligned} & |u(t+k, x) - (1 - \lambda c)u(t, x)) - \lambda cu(t, x-h)| \\ &= |f(x - ct - ck) - (1 - \lambda c)f(x - ct) - \lambda cf(x - ct - h)| \quad (1.22) \\ &\leq Kh^2, \end{aligned}$$

其中

$$K = \frac{1}{2}(c^2 \lambda^2 + \lambda c) \sup |f''|. \quad (1.23)$$

在上式的估计中, 我们用到了函数  $f$  在点  $x - ct$  处的 Taylor 展开式。于是, 令  $w = u - v$ , 我们得到

$$|w(t+k, x) - (1 - \lambda c)w(t, x)) - \lambda cw(t, x-h)| \leq Kh^2. \quad (1.24)$$

因此, 注意到  $\lambda c \leq 1$ , 我们有

$$\begin{aligned} \sup_x |w(t+k, x)| &\leq (1 - \lambda c) \sup_x |w(t, x)| + \lambda c \sup_x |w(t, x-h)| + Kh^2 \\ &= \sup_x |w(x, t)| + Kh^2. \end{aligned} \quad (1.25)$$

因为  $w(x, 0) = 0$ , 所以重复应用估计式(1.25), 便推出当  $t = nk$  时

$$|u(t, x) - v(t, x)| \leq \sup_x |w(nk, x)| \leq \sup_x |w(0, x)| + nKh^2 = \frac{Kth}{\lambda}. \quad (1.26)$$

于是, 当 $h \rightarrow 0$ 时,  $w(t, x) \rightarrow 0$ 。这说明差分格式(1.16)的解 $v$ 收敛到偏微分方程的解 $u$ 。

## 习 题

1. 在 $f$ 仅是连续函数的假设下, 证明对于固定的 $\lambda \leq c^{-1}$ , 当 $h \rightarrow 0$ 时, (1.16)的具有初始数据 $f$ 的解 $v$ 收敛到 $u$ .

提示: 利用当 $f$ 的改变不超过 $\varepsilon$ 时,  $u$ 和 $v$ 的改变均不超过 $\varepsilon$ 这一事实。

2. 考虑到可能的舍入误差, 代替(1.17), 而假设 $v$ 满足

$$|v(t+k, x) - (1 - \lambda c)v(t, x) - \lambda cv(t, x-h)| < \delta.$$

假设(1.20)成立并且 $v(0, x) = f(x)$ , 证明对于所述的 $\delta$ 及由(1.23)给出的 $K$ , 有估计

$$|u(t, x) - v(t, x)| \leq \frac{Kth}{\lambda} + \frac{t}{\lambda h} \delta.$$

根据这个公式求出使 $u(t, x)$ 的最大计算误差取最小值的 $\lambda$ 及 $h$ .

3. 在小扰动下差分格式的不稳定性并不排斥在某些特殊情况下当已知数据和计算过程均没有误差时, 差分格式的解收敛到精确函数的可能性。特别地, 设 $f(x) = e^{\alpha x}$ ,  $\alpha$ 是复数。证明对固定的 $t, x$ 以及任意固定的正数 $\lambda = k/h$ , 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 表达式(1.13)和(1.18)均收敛到正确的极限 $e^{\alpha(x-ct)}$ 。

注: 这与Courant-Friedrichs-Lowy准则并不矛盾, 因为对于解析的函数 $f$ , 它在任何区间中的值唯一地确定它在 $\xi$ 点的值。

## § 2. 一类简单拟线性方程

和线性情况不同，非线性方程（组）的经典解通常只能局部存在，即使初值充分光滑甚至充分小。利用特征线方法，原则上可以求出其局部经典解。下面我们通过具体例子来介绍这一方法。

### 一、Burgers方程

Burgers方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

是一个最简单的一阶拟线性方程，它在交通流、激波管等的研究中具有重要意义。作为一个例子，我们首先考虑Burgers方程(2.1) 具有下述初值条件

$$u(0, x) = \varphi(x) \quad (2.2)$$

的Cauchy问题，其中  $\varphi(x)$  为  $x \in \mathbb{R}$  的  $C^1$  函数，并且其  $C^1$  模有界。

下面我们用特征线方法来构造Cauchy问题(2.1)-(2.2)的解。假设  $x = X(t)$  是下述常微分方程

$$\frac{dX(t)}{dt} = u(t, X(t)) \quad (2.3)$$

的解，则

$$U(t) \triangleq u(t, X(t)) \quad (2.4)$$

沿着曲线  $X = X(t)$  为常数：这是因为

$$\frac{dU}{dt} = u_t + u_x \frac{dX}{dt} = u_t + uu_x = 0, \quad (2.5)$$

这里我们用到了常微分方程(2.3)式以及原始的偏微分方程(2.1)式。于是  $(X(t), U(t))$  是下述常微分方程组的解

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = U, \\ \frac{dU}{dt} = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = U, \\ \frac{dU}{dt} = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

容易知道，方程组(2.6)-(2.7)的解可利用初值条件表示为

$$(X, U) = (X(0) + tU(0), U(0)), \quad (2.8)$$

或写成分量的形式

$$X(t) = X(0) + tU(0), \quad U(t) = U(0). \quad (2.9)$$

特别的，记  $X(0) = \alpha$ 。于是

$$U(0) = u(0, X(0)) = \varphi(\alpha). \quad (2.10)$$

这样，(2.9)式可以改写成

$$X(t) = \alpha + t\varphi(\alpha), \quad U(t) = \varphi(\alpha). \quad (2.11)$$

假设对于上半平面上一点  $(t, x)$ ，如果可以从

$$x = \alpha + t\varphi(\alpha) \quad (2.12)$$

反解出  $\alpha$ ，记之为

$$\alpha = \alpha(t, x), \quad (2.13)$$

则将(2.13)式代入  $U(t) = \varphi(\alpha)$ ，我们就可以得到Cauchy问题(2.1)-(2.2)的解

$$u(t, x) = \varphi(\alpha(t, x)). \quad (2.14)$$

这就是说，(2.11)式隐式地定义了Cauchy问题(2.1)-(2.2)的解。

譬如，取

$$\varphi(x) = \sin x. \quad (2.15)$$

对任意固定的  $t \in [0, 1]$ ，从  $x = \alpha + t \sin \alpha$  中我们总可以求出  $\alpha$  来，记之为  $\alpha = \alpha(t, x)$ 。于是，此时Cauchy问题(2.1)-(2.2)的解为

$$u(t, x) = \sin \alpha(t, x), \quad \forall (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

又如取

$$\varphi(x) = \tanh x.$$

对任意固定的  $t \in \mathbb{R}^+$ ，从  $x = \alpha + t \tanh \alpha$  中我们总可以求出  $\alpha = \tilde{\alpha}(t, x)$ 。于是，可知 Cauchy 问题(2.1)-(2.2)的解为

$$u(t, x) = \tanh \tilde{\alpha}(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

上述构造解的方法，称为特征线方法，其中曲线  $x = X(t)$  称为特征线。特征线方法的最大特点是将偏微分方程问题转化为求解常微分方程(组)的相应问题。

容易验证，当且仅当

$$\varphi'(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.17)$$

时，对任意固定的  $t \in \mathbb{R}^+$ ，我们可以从(2.12)式反解出  $\alpha = \alpha(t, x)$ 。这样，在条件(2.17)下，我们可以利用特征线方法在整个上半平面构造出Cauchy问题(2.1)-(2.2)的解。换句话说，在条件(2.17)下，Cauchy问题(2.1)-(2.2)在上半平面上存在整体经典解。这里我们特别指出的是，当(2.17)式不成立时，利用特征线方法，只能得到局部经典解。这是因为当  $t \in [0, \|\varphi'(x)\|_{C^0}^{-1}]$ ，成立

$$x_\alpha = 1 + \varphi'(\alpha)t \geq 1 - \|\varphi'(x)\|_{C^0} t > 0. \quad (2.18)$$

于是对任意固定的  $t \in [0, \|\varphi'(x)\|_{C^0}^{-1}]$ ，我们总可以从(2.12)式中反解出  $\alpha = \alpha(t, x)$ 。也就是说，Cauchy问题(2.1)-(2.2)在带状区域  $[0, \|\varphi'(x)\|_{C^0}^{-1}] \times \mathbb{R}$  上存在经典解。

另一方面，当(2.17)不成立时，则Cauchy问题(2.1)-(2.2)一定不存在整体经典解。我们用反证法证明之。如果(2.17)式不成立，于是存在点  $\alpha_1$  及  $\alpha_2$  ( $\alpha_1 < \alpha_2$ ) 使得

$$\varphi(\alpha_1) > \varphi(\alpha_2). \quad (2.19)$$

上式意味着过点  $(0, \alpha_1)$  和点  $(0, \alpha_2)$  的特征线

$$X_1(t) = \alpha_1 + t\varphi(\alpha_1), \quad X_2(t) = \alpha_2 + t\varphi(\alpha_2) \quad (2.20)$$

必在有限时刻内相交。注意到解  $u$  在这两条特征线上分别取值为  $\varphi(\alpha_1)$  和  $\varphi(\alpha_2)$ ，因此它在交点处的值就不唯一了。这样与存在整体经典解的假设矛盾。

满足条件(2.17)式的初值的一个典型的例子就是上面讨论过的  $\varphi(x) = \tanh x$ .

下面我们解释一下(2.17)式的几何意义：(2.17)式表明特征线(1.52)的斜率  $\varphi(\alpha)$  是关于  $\alpha \in \mathbb{R}$  的单增函数，这对应于过  $x$ -轴上的点的特征线族是发散的，也就是说，在上半平面不同的特征线永不相交（见图 2.1(a)）。如果(2.17)式不成立，则同族特征线将形成包络，见图 2.1(b)。而包络线上时刻最小的点也是奇性（通

常是激波) 形成的起始点, 解在该点处发生间断, 解本身保持有界但其微商趋于无穷。这种现象称为解的几何破裂。

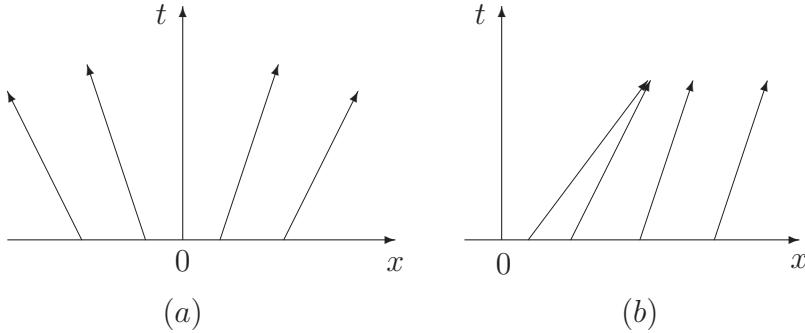


图 2.1: 发散的特征线与形成包络的特征线

## 二、一般情形

下面我们考虑一个比较一般的拟线性方程的Cauchy问题

$$\begin{cases} u_t + a(u)u_x = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases} \quad (2.21)$$

$$(2.22)$$

其中  $a(u)$  是关于  $u$  的  $C^1$  函数, 而初值  $\varphi(x)$  为  $x \in \mathbb{R}$  的  $C^1$  函数, 并且其  $C^1$  模有界。我们有

**定理 2.1** Cauchy问题(2.21)-(2.22)在上半平面  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  上存在唯一的整体  $C^1$  解的充分必要条件是

$$\frac{da(\varphi(x))}{dx} \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad \square \quad (2.23)$$

**证明** 方程(2.21)的特征线方程为

$$\frac{dx}{dt} = a(u). \quad (2.24)$$

沿着特征线, Cauchy问题(2.21)-(2.22)的  $C^1$  解 (也即经典解) 满足

$$\frac{du(t, x(t))}{dt} = u_t + u_x \frac{dx}{dt} = u_t + a(u)u_x = 0. \quad (2.25)$$

上式表明沿着特征线, 解  $u = u(t, x)$  保持常数。又注意到特征线方程(2.24), 易知任一特征线的斜率为常数 (该常数与时间  $t$  无关, 而只与该特征线与  $x$ -轴交点的

空间坐标有关），也就是说，特征线为直线。注意到初值条件(2.22)式，易知过任意给定的点  $(0, \alpha)$  的特征线必为直线

$$x = \alpha + a(\varphi(\alpha))t, \quad (2.26)$$

而在该特征线上解  $u$  取值为

$$u = \varphi(\alpha). \quad (2.27)$$

**必要性：**假设Cauchy问题(2.21)-(2.22)在  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  上存在整体  $C^1$  解，则我们要证明(2.23)式一定成立。用反证法证明。假设(2.23)式不成立，则必存在两点  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  ( $\alpha_1 < \alpha_2$ ) 使得

$$a(\varphi(\alpha_1)) > a(\varphi(\alpha_2)). \quad (2.28)$$

上式意味着过点  $(0, \alpha_1)$  的特征线  $x = \alpha_1 + a(\varphi(\alpha_1))t$  和过点  $(0, \alpha_2)$  的特征线  $x = \alpha_2 + a(\varphi(\alpha_2))t$  必在有限时间内相交。又注意到解  $u$  在这两条特征线上分别取值为  $\varphi(\alpha_1)$  和  $\varphi(\alpha_2)$ ，因此解在交点处的值就不能唯一确定了。这与存在整体  $C^1$  解的假设矛盾。必要性得证。

**充分性：**注意到(2.23)式，由特征线方法可知我们只需证明，对任意固定的  $t \in \mathbb{R}^+$ ，可以从(2.26)式中反解出  $\alpha$  即可。

事实上，注意到(2.23)式，由(2.26)式可得

$$x_\alpha = 1 + \frac{da(\varphi(\alpha))}{d\alpha} t \geqslant 1 > 0, \quad \forall t > 0. \quad (2.29)$$

于是，对任意固定的  $t \in \mathbb{R}^+$ ，上式表明  $x$  是关于  $\alpha$  的严格单增函数。另一方面，注意到  $a(\varphi(\alpha))$  的有界性（这点可由  $a$  的连续性和初值  $\varphi(x)$  的  $C^0$  模的有界性保证），我们得到，当  $\alpha \rightarrow \pm\infty$  时，成立

$$x \rightarrow \pm\infty. \quad (2.30)$$

(2.29)和(2.30)表明对任意固定的  $t \in \mathbb{R}^+$ ，(2.26)定义了一个从  $\mathbb{R}$  到  $\mathbb{R}$  的  $C^1$  微分同胚。这样，我们便可以从(2.26)式反解出  $\alpha$ ，记之为  $\alpha = \alpha(t, x)$ ，将它代入(2.27)式便立即得到Cauchy问题(2.21)-(2.22)在上半平面上的唯一的  $C^1$  解  $u = a(\alpha(t, x))$ 。于是，充分性得证。证毕。 ■

(2.23)式的几何意义是：(2.23)式保证了过点  $(0, \alpha)$  的特征线的斜率  $a(\varphi(\alpha))$  是关于  $\alpha \in \mathbb{R}$  的单增函数。这对应于过  $x$ -轴上的点的特征线族是发散的。换句话说，上半平面上不同的特征线永不相交。

**注记 2.1：**这里我们特别强调一下，对于线性方程，不同的特征线永远不会相交；而对非线性情形，在某些特殊的假设下，其不同的特征线也可以不相交（譬如，在假设(2.23)下，方程(2.21)的不同的特征线就不会相交）。

### 三、导数的突变和破裂时间

从上一小节我们知道，对于非线性方程（组）而言，只有在一定的条件下，才可能存在整体经典解。但一般来说，经典解会在有限时间内破裂，从而奇性形成。本小节我们将讨论经典解何时破裂，什么量趋于无穷大等问题。

下面我们仍然以Cauchy问题(2.21)-(2.22)为例来进行讨论。

如果条件(2.23)式成立，则Cauchy问题(2.21)-(2.22)在上半平面上存在唯一的整体经典解，此时解不会破裂，而且相应的特征线族是发散的。

如果条件(2.23)式不成立，则由上一小节的讨论可知，存在不同的特征线将在有限时刻相交，记交点为  $(t_*, x_*)$ ，而且解在这两条特征线上取不同的值（因为它们的斜率不同，而斜率依赖于解的取值），见图2.2。

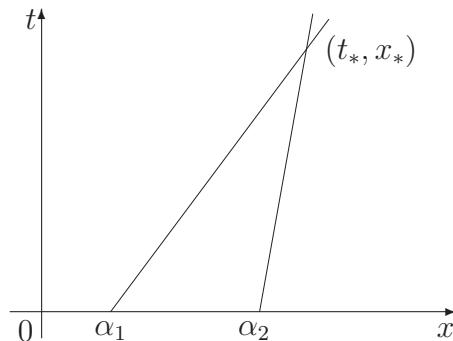


图 2.2: 相交的两特征线： $x_i = \alpha_i + a(\varphi(\alpha_i))t$  ( $i = 1, 2$ )。

此时，我们有

$$\frac{|u(t, \alpha_2 + a(\varphi(\alpha_2))t) - u(t, \alpha_1 + a(\varphi(\alpha_1))t)|}{\alpha_2 - \alpha_1 + [a(\varphi(\alpha_2)) - a(\varphi(\alpha_1))]t} \rightarrow \infty, \quad \text{当 } t \rightarrow t_* \text{ 时。}$$

上式表明：当  $(t, x) \rightarrow (t_*, x_*)$  时， $|u_x(t, x)| \rightarrow \infty$ 。

**定义 2.1** 考虑 Cauchy 问题(2.21)-(2.22)的解  $u = u(t, x)$ 。如果在有限时间内  $|u_x|$  趋于无穷大，则称这种现象为 导数的突变 (gradient catastrophe)；突变形成的最早时刻  $t_b \geq 0$  称为解的破裂时间 (breaking time)。  $\square$

下面我们讨论解的破裂时间。

根据局部解的存在性定理可知，Cauchy 问题(2.21)-(2.22)存在局部  $C^1$  解。对于解存在范围内的任一给定的点  $(t, x)$ ，通过该点我们可以向下做一条特征线，记之为  $x = \xi(\tau; t, x)$ 。注意到  $a$  的  $C^1$  光滑性和初值  $\varphi$  的  $C^1$  模的有界性可知，该特征线的斜率有界。于是该特征必与  $x$ -轴相交，记交点为  $(0, \alpha)$ 。于是我们有

$$u(t, x) = \varphi(\alpha) \quad (2.31)$$

及

$$\xi(\tau; t, x) = \alpha + a(\varphi(\alpha))\tau. \quad (2.32)$$

特别地，当  $\tau = t$  时，成立

$$x = \alpha + a(\varphi(\alpha))t. \quad (2.33)$$

将方程(2.31)式两端关于  $x$  求导可得

$$u_x(t, x) = \varphi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial x}. \quad (2.34)$$

另一方面，对方程(2.33)两边关于  $\alpha$  求导得到

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 1 + \frac{da(\varphi(\alpha))}{d\alpha}t. \quad (2.35)$$

将(2.35)式代入(2.34)式得到

$$u_x = \frac{\varphi'(\alpha)}{1 + \frac{da(\varphi(\alpha))}{d\alpha}t}. \quad (2.36)$$

这样讨论  $u_x$  何时变成无穷大的问题就转化为讨论(2.36)式中的分母何时为零的问题。

如果

$$\frac{da(\varphi(\alpha))}{d\alpha} \geq 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.37)$$

则当  $t \in \mathbb{R}^+$  时，(2.36)式中的分母恒大于1。此时，导数的突变永远不会发生。

如果对于某些  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{da(\varphi(\alpha))}{d\alpha}$  取负值, 那么导数的突变将在有限时刻内发生。这是因为: 对这样的  $\alpha$ , 当  $t$  从 0 增加到  $-\left[\frac{da(\varphi(\alpha))}{d\alpha}\right]^{-1}$  时, (2.36)式中的分母从正数逐渐趋于 0。容易看出, 最早的破裂时间所对应的  $\alpha_0$  应该使得  $\frac{da(\varphi(\alpha))}{d\alpha}$  取最小值, 即

$$a(\varphi(\alpha_0)) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{da(\varphi(\alpha))}{d\alpha} \right\}. \quad (2.38)$$

这样, 破裂时间可由下式给出

$$t_b = -\frac{1}{\left. \frac{da(\varphi(\alpha))}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0}}, \quad (2.39)$$

其中  $\alpha_0$  满足(2.38)式。显然, 在一般情况下, 这样的  $\alpha_0$  不一定唯一。

**例 2.1** 求下述Cauchy问题的破裂时间

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, \\ t = 0 : u = \exp\{-x^2\}. \end{cases} \quad (2.40)$$

**解** 此时,  $a(u) = u$ ,  $\varphi(x) = \exp\{-x^2\}$ 。于是, 过点  $(0, \alpha)$  的特征线的斜率是

$$a(\varphi(\alpha)) = a(\exp\{-\alpha^2\}) = \exp\{-\alpha^2\}.$$

为了求出破裂时间, 利用(2.39)式, 只需找出

$$f(\alpha) \triangleq \frac{d}{d\alpha} a(\varphi(\alpha)) = \frac{d}{d\alpha} \exp\{-\alpha^2\} = -2\alpha \exp\{-\alpha^2\}$$

的最小值。注意到

$$f'(\alpha) = (-2 + 4\alpha^2) \exp\{-\alpha^2\},$$

易知函数  $f(\alpha)$  的临界点为  $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ , 而在点  $\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  处,  $f(\alpha)$  取得最小值。于是, Cauchy问题(2.40)的破裂时间为

$$t_b = -\frac{1}{-2\alpha_0 \exp\{-\alpha_0^2\}} = \frac{1}{\sqrt{2} \exp\{-\frac{1}{2}\}} = \sqrt{\frac{e}{2}} \approx 1.16.$$

另外, 注意到特征线的表达式(2.33), 我们便得到最早破裂点的空间坐标为

$$x_b = \alpha_0 + a(\varphi(\alpha_0))t_b = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{e}{2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\right\} = \sqrt{2}.$$

这样, 我们求出了Cauchy问题(2.40)的破裂时间以及最早破裂的点是  $(\sqrt{\frac{e}{2}}, \sqrt{2})$ 。

在该点处, 解本身保持有界, 但其导数  $u_x$  为无穷大。见图2.3。

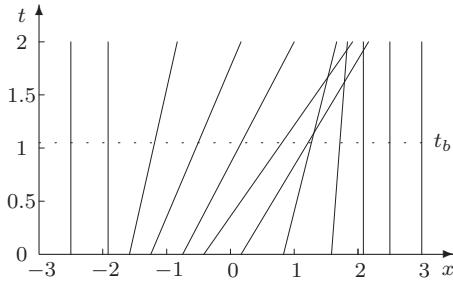


图 2.3: 特征线:  $x = \alpha + \exp\{-\alpha^2\}t$  以及最早破裂的点  $(t_b, x_b)$ .

**注记 2.2** 通过上面的讨论, 我们发现: 与注记 2.1 不同的是非线性方程的不同特征线一般会在有限时间内相交, 这种现象对应于解的破裂和奇性的形成。这是非线性方程和线性方程的本质不同之处。

## 习 题

- 求解下述 Cauchy 问题的破裂时间以及最早的破裂点

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, \\ u|_{t=0} = \sin x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, \\ u|_{t=0} = -\tanh x \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} u_t + u^2 u_x = 0, \\ u|_{t=0} = (1+x^2)^{-1}. \end{cases}$$

### § 3. 拟线性方程的几何理论

关于函数 $u = u(x_1, \dots, x_n)$ 的一般的一阶方程具有如下形式

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0, \quad (3.1)$$

其中 $F$ 是已知的函数。这类方程在变分法，质点力学，几何光学中具有广泛的应用背景。关于这类方程的主要结果可归纳为：形如(3.1)的方程的通解可以通过求解一个常微分方程组(ODEs)而得到。

注记3.1 这个结论对于高阶方程或一阶方程组一般都不成立。  $\square$

下面我们主要讨论两个自变量 $x, y$ 的情形。所述理论无须做本质的改变就可以推广到多个自变量的情形。

考虑较为简单的拟线性方程

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u), \quad (3.2)$$

其中 $a, b, c$ 是其自变量 $x, y, u$ 的 $C^1$ 光滑函数。用 $(x, y, z)$ -空间中的曲面 $z = u(x, y)$ 来表示函数 $u(x, y)$ 。

**积分曲面：**与偏微分方程的解相应的曲面称为偏微分方程的积分曲面。

显然，方程(3.2)的系数函数 $a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z)$ 在 $(x, y, z)$ -空间（或该空间中的一部分 $\Omega$ ）中定义了一个向量场。这些向量的方向称为方程(3.2)的特征方向。特征方向对于偏微分方程(3.2)来说是至关重要的，因为 $(u_x, u_y, -1)$ 构成曲面 $z = u(x, y)$ 的法线的方向数，所以(3.2)可以看成这样一个条件，即积分曲面在它的任意点处的法线垂直于与该点对应的特征向量 $(a, b, c)$ 。这样，积分曲面便是处处与特征方向相切的曲面。

**特征曲线：**以 $(a, b, c)$ 为方向数的特征向量场对应着一族处处与这个方向场相切的特征曲线。

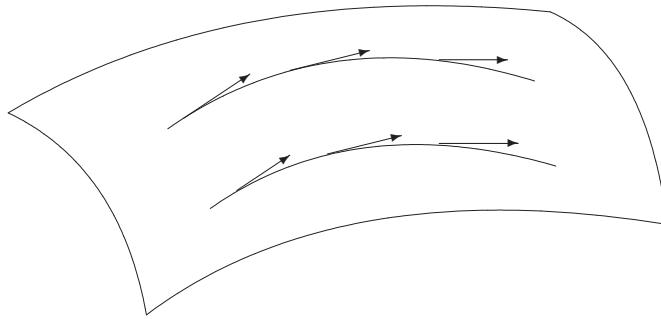


图 3.1: 特征方向场, 特征曲线, 积分曲面

沿着特征曲线成立关系式

$$\frac{dx}{a(x, y, z)} = \frac{dy}{b(x, y, z)} = \frac{dz}{c(x, y, z)} \quad (3.3)$$

在这条曲线上引入适当的曲线参数  $t$ , 或者说把(3.3)式中的公比记为  $dt$ , 则定义特征曲线的条件就可以写成我们更为熟悉的常微分方程组的形式

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = c(x, y, z). \quad (3.4)$$

上述方程组中自变量  $t$  不明显地出现, 换句话说, 它是一个“自治”系统。

**注记3.2** 在方程组(3.4)中, 参数  $t$  的选取是“人为”的。沿着曲线采用其它任何参数仅相当于用一组比例的量代替  $a, b, c$ , 这既不影响  $(x, y, z)$ -空间中的特征曲线, 也不改变偏微分方程(3.2)。  $\square$

**定理3.1** 如果曲面  $\Sigma : z = u(x, y)$  是特征曲线的并, 那么  $\Sigma$  必是积分曲面。  $\square$

**证明** 因为过  $\Sigma$  上的任意一点  $p$ , 均有一条过点  $p$  且包含在  $\Sigma$  上的特征曲线  $l$ 。 $l$  在点  $p$  处的切线必位于  $\Sigma$  在  $p$  点处的切平面内。因为  $l$  的切线具有特征方向, 所以  $\Sigma$  在  $p$  点处的法向便垂直于特征方向, 从而  $\Sigma$  是积分曲面。证毕。 ■

另一方面, 我们可以证明任何积分曲面  $\Sigma$  均是特征曲线的并, 或者说, 过  $\Sigma$  上的每一点均有一条包含在  $\Sigma$  中的特征曲线。上述结论可以从下面的定理3.2直接得到。

**定理3.2** 设点  $P = (x_0, y_0, z_0)$  位于积分曲面  $\Sigma : z = u(x, y)$  内,  $l$  是过点  $P$  的特征曲线, 则  $l$  整个位于  $\Sigma$  上。  $\square$

**证明** 设由 $(x(t), y(t), z(t))$ 表示的 $l$ 是(3.4)的解，并且当 $t = t_0$ 时， $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ 。换句话说， $(x(t), y(t), z(t))$ 表示过点 $P$ 的特征曲线。定义

$$U(t) = z(t) - u(x(t), y(t)). \quad (3.5)$$

因为点 $P$ 在 $\Sigma$ 上，所有有 $U(t_0) = 0$ 。另一方面，根据(3.4)式，我们有

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \frac{dz}{dt} - u_x(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} - u_y(x(t), y(t))\frac{dy}{dt} \\ &= c(x(t), y(t), z(t)) - u_x(x(t), y(t))a(x(t), y(t), z(t)) \\ &\quad - u_y(x(t), y(t))b(x(t), y(t), z(t)). \end{aligned}$$

注意到(3.5)式，上式可以改写成

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= c(x(t), y(t), U(t) + u(x(t), y(t))) - u_x(x(t), y(t))a(x(t), y(t), U(t) + u(x(t), y(t))) \\ &\quad - u_y(x(t), y(t))b(x(t), y(t), U(t) + u(x(t), y(t))). \end{aligned} \quad (3.6)$$

因为 $u(x, y)$ 满足方程(3.2)，所以 $U(t) \equiv 0$ 是(3.6)的一个特解。由常微分方程解的存在唯一性定理易知，初值问题

$$\begin{cases} (3.6), \\ U(t_0) = 0 \end{cases}$$

的唯一解就是 $U(t) \equiv 0$ 。这样，由(3.5)定义的函数 $U(t)$ 恒为零，这恰好说明整条特征曲线 $l$ 都在 $\Sigma$ 上。证毕。 ■

**推论3.1** 两个有公共点 $P$ 的积分曲面必沿着一条过点 $P$ 的特征曲线 $l$ 相交。 □

**推论3.2** 如果两个积分曲面 $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$ 沿着曲线 $l$ 相交而不相切，则 $l$ 必是特征曲线。 □

**证明** 事实上，在 $l$ 上的点 $P$ 处考虑 $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$ 的切平面 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 。每一个平面均包含点 $P$ 的特征方向 $(a, b, c)$ 。因为 $\pi_1 \neq \pi_2$ ，所以 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 的法线必具有方向 $(a, b, c)$ 。又因为 $l$ 在 $P$ 点处的切线 $T$ 也属于 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ ，所以有 $T$ 的切向平行于 $(a, b, c)$ ，因此 $l$ 是特征曲线。证毕。 ■

## § 4. 拟线性方程的Cauchy问题

通过上一节的讨论，我们对方程(3.2)的通解 $u$ 有了一个简单的描述：积分曲面 $z = u(x, y)$ 是特征曲线的并。为了更好地认识解流形的结构，我们希望找到一个借助给定的函数集合 $G$ （称之为数据）生成解的方法。最理想的结果是找到一个以数据 $G$ 到偏微分方程解集的满射 $G \rightarrow u$ 。这样，解空间就可以由正常的数据空间来确定。偏微分方程理论的大量工作都与下述问题有关：找出 $u$ 与给定的 $G$ 的对应，这里的“找出”通常相当于“证明解的存在性”。

### 一、Cauchy问题

设 $(x, y, z)$ -空间中有一给定的曲线 $\Gamma$ ，其参数方程为

$$x = f(s), \quad y = g(s), \quad z = h(s). \quad (4.1)$$

我们求方程(3.2)的解 $u = u(x, y)$ ，使得下述关系式恒成立

$$h(s) = u(f(s), g(s)). \quad (4.2)$$

Cauchy问题：利用给定的数据 $(f, g, h)$ 求满足(3.2)和(4.2)的函数的问题，便称为方程(3.2)的Cauchy问题。

注记4.1 同一条曲线 $\Gamma$ 可以有不同的参数的表示。由变换 $s = \varphi(\sigma)$ 引入的不同的参数 $\sigma$ ，不会改变Cauchy问题的解 $u(x, y)$ 。  $\square$

注记4.2 一般来说，我们通常只能求得 $x_0 = f(s_0), y_0 = g(s_0)$ 附近的 $x, y$ 定义的Cauchy问题的局部解。  $\square$

许多时候，变量 $y$ 被当作时间（通常记成 $t$ ），而 $x$ 表示空间的位置。这样，便可以提出由 $y = 0$ 时刻的初始值（或称为初始条件）

$$u(x, 0) = h(x) \quad (4.3)$$

来求解 $u(x, y)$ 的问题，这种提法很自然。这样的初值问题显然是一类特殊的Cauchy问题，此时的曲线 $\Gamma$ 为

$$x = s, \quad y = 0, \quad z = h(s), \quad (4.4)$$

即 $(x, z)$ -平面上以 $x$ 为参数的平面曲线。此时，初值问题的初始数据只包含一个函数 $h(x)$ ，它可以确定唯一的 $u$ 。

**注记4.3** 许多空间曲线 $\Gamma$ 可能导致相同的 $u$ ；一个积分曲面包括很多条曲线，但是其与 $(x, z)$ -平面的交线只有一条。  $\square$

## 二、局部解的存在性

**假设1** 设在 $s_0$ 的邻域中定义曲线 $\Gamma$ 的函数 $f(s), g(s), h(s)$ 是 $C^1$ 的；

**假设2** 令

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (f(s_0), g(s_0), h(s_0)). \quad (4.5)$$

在点 $P_0$ 的一个邻域内，方程(3.2)的系数 $a, b, c$ 是关于其自变量的 $C^1$ 函数。

直观来看，过 $P$ 的积分曲面 $z = u(x, y)$ 是由过 $P$ 上各点的特征曲线所组成。这样，对 $s_0$ 附近的每个 $s$ ，只需求解特征微分方程(3.4)的当 $t = 0$ 时其值分别为 $f(s), g(s), h(s)$ 的解

$$x = X(s, t), \quad y = Y(s, t), \quad z = Z(s, t) \quad (4.6)$$

即可。显然，这样的函数 $X, Y, Z$ 关于 $s, t$ 恒等地满足

$$X_t = a(X, Y, Z), \quad Y_t = b(X, Y, Z), \quad Z_t = c(X, Y, Z) \quad (4.7)$$

以及初始条件

$$X(s, 0) = f(s), \quad Y(s, 0) = g(s), \quad Z(s, 0) = h(s). \quad (4.8)$$

由常微分方程组的存在唯一性定理以及关于参数的连续依赖性定理可知，存在唯一的函数组 $X(s, t), Y(s, t), Z(s, t)$ 在点 $(s_0, 0)$ 的一个邻域内是 $C^1$ 的并且满足方程组(4.7)和初始条件(4.8)。

注意到(4.5)和(4.8)，我们有

$$x_0 = X(s_0, 0), \quad y_0 = Y(s_0, 0). \quad (4.9)$$

我们进一步假设

**假设3** 在点 $(s_0, 0)$ 处成立

$$\begin{vmatrix} f'(s_0) & g'(s_0) \\ a(x_0, y_0, z_0) & b(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4.10)$$

利用(4.7)和(4.8)两式，不难从(4.10)得到

$$\begin{vmatrix} X_s(s_0, 0) & Y_s(s_0, 0) \\ X_t(s_0, 0) & Y_t(s_0, 0) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4.11)$$

于是，利用隐函数存在性定理，在 $(x_0, y_0)$ 的一个邻域中，我们可以从

$$x = X(s, t), \quad y = Y(s, t) \quad (4.12)$$

中反解出 $s, t$ ，记之为

$$s = S(x, y), \quad t = T(x, y). \quad (4.13)$$

这样(4.6)就代表一个用参数 $s, t$ 表示的曲面 $\Sigma : z = u(x, y)$ 。而由

$$z = u(x, y) = Z(S(x, y), T(x, y)) \quad (4.14)$$

定义的函数 $u$ 是曲面 $\Sigma$ 的显示表示。

由上面的讨论可知，条件(4.10)保证了(4.6)式局部地表示一个曲面 $\Sigma : z = u(x, y)$ 。进一步，从参数表示(4.6)式容易看出 $\Sigma$ 是积分曲面。事实上，在 $\Sigma$ 上的任意一点 $p$ 处，向量 $(X_t, Y_t, Z_t)$ 是 $\Sigma$ 上曲线： $s =$ 常数的切向，它包含在 $\Sigma$ 在 $p$ 点处的切平面内。(4.7)表明在任意点处的切平面都包含特征方向 $(a, b, c)$ ，因此 $\Sigma$ 是积分曲面。

注记4.4 可以证明，由(4.14)给出的函数 $u$ 满足方程(3.2)。  $\square$

从上面的讨论，我们得到

**定理4.1** 在假设1-3下，Cauchy问题存在唯一的局部解。  $\square$

在定理4.1的结论中，解的唯一性可由定理3.2直接得到。实际上，任何过 $p$ 的积分曲面必须包含过 $p$ 上的点的特征曲线，因此必包含由(4.6)式表示的曲面，从而局部地与这个曲面重合。

### 三、解的存在唯一性条件(4.10)

为了保证Cauchy问题存在唯一的局部 $C^1$ 解，条件(4.10)是必不可少的。事实上，如果(4.10)不成立，即有

$$J \triangleq \begin{vmatrix} f'(s_0) & g'(s_0) \\ a(x_0, y_0, z_0) & b(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} = 0,$$

那么, 由(4.2)及(3.2)可知, 在 $s = s_0, x = f(s_0), y = g(s_0)$ 处成立

$$bf' - ag' = 0, \quad h' = f'u_x + g'u_y, \quad c = au_x + bu_y. \quad (4.15)$$

由此可知,

$$bh' - cg' = 0, \quad ah' - cf' = 0. \quad (4.16)$$

(4.16)意味着 $f', g', h'$ 与 $a, b, c$ 成比例。因此, 除非 $\Gamma$ 在 $s_0$ 点具有特征方向, 否则 $J = 0$ 与解的存在性相矛盾。

另一方面, 如果 $\Gamma$ 是特征曲线, 则Cauchy问题将有无穷多个解, 因为过 $\Gamma$ 上的点 $p$ 做满足(4.10)式的任意曲线 $\tilde{\Gamma}$ , 求解关于 $\Gamma^*$ 的Cauchy问题便可得到无穷多个解。见图4.1。

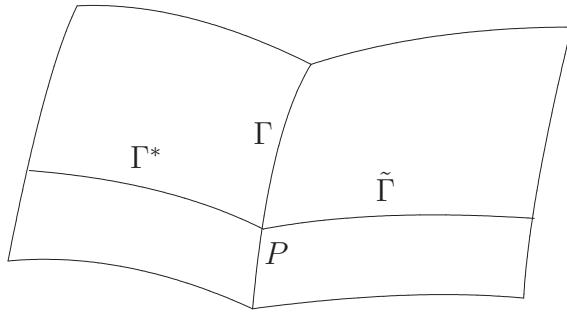


图 4.1: 无穷多个积分曲面

#### 四、一种特殊情况: 线性偏微分方程

考虑下述线性偏微分方程

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y)u + d(x, y). \quad (4.17)$$

此时, 三个特征常微分方程组简化为

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y), \quad (4.18)$$

更进一步, 甚至可化为一个等价的方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}. \quad (4.19)$$

方程(4.18)或(4.19)确定 $(x, y)$ -平面上的曲线族，我们称之为特征投影（通常也含糊地称为特征线）。它们是 $(x, y, z)$ -空间中的特征曲线在 $(x, y)$ -平面上的投影。利用特征投影 $x(t), y(t)$ 解线性常微分方程

$$\frac{dz}{dt} = c(x(t), y(t))z + d(x(t), y(t)) \quad (4.20)$$

即可求出 $z(t)$ ，进而得到特征曲线。

## 五、高维情形

关于 $n$ 元函数 $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的一般拟线性方程具有如下形式

$$\sum a_i(x_1, \dots, x_n, u)u_{x_i} = c(x_1, \dots, x_n, u), \quad (4.21)$$

其中 $a_i$ 和 $c$ 均是其变元的 $C^1$ 函数。与方程(4.21)相应的特征微分方程组为

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{ds} = a_i(x_1, \dots, x_n, z) & (i = 1, \dots, n), \\ \frac{dz}{ds} = c(x_1, \dots, x_n, z). \end{cases} \quad (4.22)$$

方程(4.21)的Cauchy问题是指在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中寻求过一给定的 $(n-1)$ -维子流形 $\mathcal{M}$ 的积分曲面 $z = u(x_1, \dots, x_n)$ ，这里我们不妨假设该给定的 $(n-1)$ -维流形的参数表示是

$$x_i = f_i(s_1, \dots, s_{n-1}) \quad (i = 1, \dots, n), \quad z = h(s_1, \dots, s_{n-1}).$$

过 $\mathcal{M}$ 上的任意一点(记其对应的参数为 $s_1, \dots, s_{n-1}$ )做特征线，即求解具有下述初值条件

$$t = 0 : \quad x_i = f_i(s_1, \dots, s_{n-1}), \quad z = h(s_1, \dots, s_{n-1}) \quad (4.23)$$

的常微分方程组(4.22)的初值问题，记该初值问题的解为

$$\begin{cases} x_i = X_i(s_1, \dots, s_{n-1}, t) & (i = 1, \dots, n) \\ z = Z(s_1, \dots, s_{n-1}, t). \end{cases} \quad (4.24)$$

只要从(4.24)中的前 $n$ 个关系式中反解出 $s_1, \dots, s_{n-1}$ 和 $t$ ，就可以知道(4.24)式就是积分曲面 $z = u(x_1, \dots, x_n)$ 的一个参数表示。事实上，当Jacobi行列式

$$J \triangleq \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial s_1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial s_{n-1}} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial s_{n-1}} \\ a_1 & \dots & a_n \end{vmatrix} \neq 0 \quad (4.25)$$

时，我们就可以从(4.24)式中的前 $n$ 个关系式中解出 $s_1, \dots, s_{n-1}$ 和 $t$ .

## 六、例子

下面我们给出两个例子来说明如何用特征线方法求解偏微分方程的Cauchy问题。

**例1** 求解下述Cauchy问题

$$\begin{cases} u_y + cu_x = 0, \\ u(x, 0) = h(x), \end{cases} \quad (4.26)$$

其中 $c$ 是常数， $h(x)$ 是给定的 $C^1$ 函数。

**解** 与初值相应的初始曲线 $\Gamma$ 可表示为

$$x = s, \quad y = 0, \quad z = h(s).$$

特征微分方程是

$$\frac{dx}{dt} = c, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

于是，积分曲面的参数表示为

$$x = X(s, t) = s + ct, \quad y = Y(s, t) = t, \quad z = Z(s, t) = h(s).$$

消去 $s, t$ 便得到Cauchy问题(4.26)的解

$$z = h(x - ct),$$

它与(1.5)式完全一样。 ■

**例2** 考虑关于齐次函数 $u(x_1, \dots, x_n)$ 的Euler方程

$$\sum_{k=1}^n x_k u_{x_k} = \alpha u \quad (4.27)$$

其中 $\alpha$ 是不为零的常数。注意到此时由(4.25)定义的 $J$ 在原点处为零，也就是说，方程(4.27)在原点处有奇性，因此，我们在初值问题中要求

$$u(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) = h(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad (4.28)$$

其中 $h$ 是一给定的 $C^1$ 函数。讨论Cauchy问题(4.27)-(4.28)的解的存在唯一性。

解 与初值(4.28)相应的流形 $\Gamma$ 可由下述参数形式表示

$$x_i = \begin{cases} s_i & (i = 1, \dots, n-1), \\ 1 & (i = n), \end{cases} \quad z = h(s_1, \dots, s_{n-1}). \quad (4.29)$$

解相应的特征微分方程

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = x_i & (i = 1, \dots, n) \\ \frac{dz}{dt} = \alpha z, \end{cases} \quad (4.30)$$

可得

$$\begin{cases} x_i = \begin{cases} s_i e^t & (i = 1, \dots, n-1), \\ e^t & (i = n), \end{cases} \\ z = e^{\alpha t} h(s_1, \dots, s_{n-1}). \end{cases} \quad (4.31)$$

从而有

$$z = u(x_1, \dots, x_n) = x_n^\alpha h\left(\frac{x_1}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right). \quad (4.32)$$

显然, 对于任何 $\lambda > 0$ , 解 $u$ 满足函数方程

$$u(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha u(x_1, \dots, x_n). \quad (4.33)$$

因此, 它是 $\alpha$ 次的齐次函数。

当 $\alpha < 0$ 时, 方程(4.27)的解在原点一般会有奇性。更加准确地讲, 在原点的邻域中属于 $C^1$ 类的(4.27)的唯一解是 $u \equiv 0$ 。这是因为沿着任何一条从原点出发并且以 $t$ 为参数的射线

$$x_i = c_i t, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (4.34)$$

由(4.27)知,  $u$ 满足

$$\frac{du}{dt} = \sum_{k=1}^n c_k u_{x_k}(c_1 t, \dots, c_n t) = \frac{\alpha}{t} u. \quad (4.35)$$

于是, 沿着这些射线,  $ut^{-\alpha}$ 是常数, 故当 $t \rightarrow 0$ 时 $u \rightarrow \infty$ , 除非沿着射线 $u$ 恒为零。

■

注记4.5 上面的讨论给出了一个偏微分方程的例子, 当把解的定义域限制在包含原点的开集时, 它只有一个解。 □

## 习 题

1. 求解问题

$$\begin{cases} u_t + au_x = f(t, x), & t > t_0, -\infty < x < +\infty, \\ u(t_0, x) = \varphi(x), \end{cases}$$

其中  $a$  为常数,  $f, f_x \in C([t_0, \infty) \times \mathbb{R})$ ,  $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ .

2. 求解问题

$$\begin{cases} u_t + (x \cos t)u_x = 0, & t > 0, -\infty < x < +\infty, \\ u(0, x) = \frac{1}{1+x^2}. \end{cases}$$

3. 求解问题

$$\begin{cases} xu_t - tu_x = u, & t > 0, x > 0, \\ u(0, x) = g(x), & x > 0, \end{cases}$$

其中  $g(x) \in C^1((0, \infty))$ .

4. 求解下述Cauchy问题

$$\begin{cases} u_t + u_x = u^2, \\ t = 0 : \quad u = \sin x. \end{cases}$$