拓展资源 4.2　补 充 内 容

霍特林（Hotelling）变换是基于图像统计特性的变换，其变换核可变。不同的随机图像场有不同的变换核，这种变换可压缩图像数据，且是在均方误差最小下的最佳逼近。

在获取、传输图像时，总是混杂有许多随机干扰因素，因此，实际得到的图像都含有随机的性质，称为随机图像。

例如，一幅图像通过卫星传送了 N 次，这时由于电波传播的影响，N 幅图像互有差异。

设 $f_i(x,y)$ 表示一个 $N \times N$ 的随机图像 $f(x,y)$ 的第 i 个样本，为了用线性代数的工具进行讨论，采用图像的向量形式表示图像。

$$\boldsymbol{X}_i = \begin{pmatrix} f_i(0,0) \\ f_i(0,1) \\ \vdots \\ f_i(0,N-1) \\ f_i(1,0) \\ \vdots \\ f_i(1,N-1) \\ \vdots \\ f_i(N-1,N-1) \end{pmatrix} \quad \text{按行推叠}$$

$\boldsymbol{X}_i$ 是 $N^2 \times 1$ 的随机矢量或 N^2 维随机矢量。

1．随机矢量的均值和协方差

设一组 M 个如下形式表示的随机矢量

为了讨论简单，假设图像矢量的维数为 N，而不是 N^2。

$$\boldsymbol{X}^k = \underbrace{\left[x_1^k, x_2^k, \cdots, x_N^k\right]^{\mathrm{T}}}_{\text{随机变量}} \qquad \underbrace{k = 1, 2, \cdots, M}_{M\text{个样本或}M\text{个图像矢量}}$$

其矢量的均值矢量为

$$\boldsymbol{m}_x = E\{X\} \approx \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\boldsymbol{X}_k \quad \leftarrow \quad \text{由 } M \text{ 个样本矢量来估计}$$

协方差矩阵为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}_x &= E\left\{(x-\boldsymbol{m}_x)(x-\boldsymbol{m}_x)^{\mathrm{T}}\right\} \quad \rightarrow \quad N\times N \text{ 阶矩阵} \\ &\approx \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{m}_x\boldsymbol{m}_x^{\mathrm{T}} \quad \rightarrow \quad \text{估计} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{C}_x$ 的元素：对角元素是各个随机变量的方差，非对角元素是它们的协方差。

例如，已知一个随机矢量的 4 个样本为

$$\boldsymbol{X}_1 = (0,0,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{X}_2 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{X}_3 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{X}_4 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{m}_x=\frac{1}{4}(0+1+1+1,\ 0+0+1+0,\ 0+0+0+1)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{4}(3,1,1)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_x=\frac{1}{4}\left\{(0,0,0)^{\mathrm{T}}(0,0,0)+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}(1,0,0)+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}(1,1,0)+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}(1,0,1)\right\}-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\times\frac{1}{4}(3,1,1)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}\right\}-\frac{1}{16}\begin{pmatrix}9&3&3\\3&1&1\\3&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}-\frac{1}{16}\begin{pmatrix}9&3&3\\3&1&1\\3&1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}12&4&4\\4&4&0\\4&0&4\end{pmatrix}-\frac{1}{16}\begin{pmatrix}9&3&3\\3&1&1\\3&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}$$

（1）$\boldsymbol{C}_x$ 的主对角各项相等，表示各随机变量有相同的方差。

（2）$\boldsymbol{C}_{ij}>0$，表示随机变量 i 与 j 正相关，否则为负相关。

2．霍特林变换的定义

N 维随机矢量 $\boldsymbol{X}$ 的 Hotelling 正变换为

$$Y=\boldsymbol{A}(x-\boldsymbol{m}_x)$$

式中，$\boldsymbol{A}$ 为变换核矩阵。

反变换为

$$X=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}Y+\boldsymbol{m}_x$$

$\boldsymbol{A}$ 的构成如下。

$\boldsymbol{A}$ 的各行由 $\boldsymbol{C}_x$ 的特征矢量组成。

令 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,N)$ 分别为 $\boldsymbol{C}_x$ 的特征矢量和对应的特征值。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_{11}&\boldsymbol{e}_{12}&\boldsymbol{e}_{13}&\cdots&\boldsymbol{e}_{1N}\\\boldsymbol{e}_2&&&&\vdots\\\vdots&&&&\vdots\\\boldsymbol{e}_N&\cdots&\cdots&\cdots&\boldsymbol{e}_{NN}\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}\lambda_1\text{ 为第 1 个特征值对应的特征矢量}\\\lambda_2\text{ 为第 2 个特征值对应的特征矢量}\\\vdots\quad\vdots\\\lambda_N\text{ 为第 }N\text{ 个特征值对应的特征矢量}\end{matrix}$$

λ_i 单调排列：$\lambda_i\geqslant\lambda_{i+1}\ (i=1,2,\cdots,N-1)$

由定义可知 Hotelling 变换是基于图像统计特性的变换，其变换核可变。不同的随机图像场有不同的 $\boldsymbol{A}$ 变换核。

例：
$$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{X}_3=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{X}_4=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{m}_x=(0,2)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{C}_x=\frac{1}{4}\left\{\begin{pmatrix}4&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-3\\-3&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-8\\-8&16\end{pmatrix}\right\}-\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}(0,2)$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}10 & -10\\ -10 & 26\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & \frac{-5}{2}\\ \frac{-5}{2} & \frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{C}_x$ 矩阵的特征值 λ_i

$$\left|\boldsymbol{C}_x-\lambda_i\right|=0 \qquad \begin{vmatrix}\frac{5}{2}-\lambda & \frac{-5}{2}\\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

故 $\lambda_1=5$，$\lambda_2=0$

求 λ_i 对应的特征向量 $\mathbf{e}_i$

$\boldsymbol{C}_x\mathbf{e}_i=\lambda_i\mathbf{e}_i$，将 $\lambda_1=5$ 代入

$$\left(\boldsymbol{C}_x-\lambda_1 I\right)\mathbf{e}_1=0 \qquad \begin{pmatrix}\frac{5}{2}-5 & \frac{-5}{2}\\ \frac{-5}{2} & \frac{5}{2}-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{11}\\ \mathbf{e}_{12}\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases}-\mathbf{e}_{11}-\mathbf{e}_{12}=0\\ -\mathbf{e}_{11}-\mathbf{e}_{12}=0\end{cases}\Rightarrow \mathbf{e}_{11}=-\mathbf{e}_{12}\Rightarrow \begin{pmatrix}\mathbf{e}_{11}\\ \mathbf{e}_{12}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

将 $\lambda_2=0$ 代入，得

$$\mathbf{e}_2=\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{21}\\ \mathbf{e}_{22}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \qquad \therefore \boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

离散 KL 变换

$$Y_1=\boldsymbol{A}\left(X_1-\boldsymbol{m}_x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$Y_2=\boldsymbol{A}\left(X_2-\boldsymbol{m}_x\right)=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$Y_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$Y_4=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}$$

3．Hotelling 变换的性质

（1）Y 的均值为零

$$\begin{aligned}\boldsymbol{m}_y&=E\{Y\}=E\left\{\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{m}_x\right)\right\}\\ &=\boldsymbol{A}E\{\boldsymbol{X}\}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{m}_x=0\end{aligned}$$

（2）Y 的协方差为

$$\boldsymbol{C}_y = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}_y &= E\left\{\left(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{Am}_x\right)\left(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{Am}_x\right)^{\mathrm{T}}\right\} \\ &= E\left\{\left(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{Am}_x\right)\left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{m}_x\right)^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}\right\} \\ &= \boldsymbol{AC}_x\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

（3） $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ $\because \boldsymbol{A}$ 为对称矩阵

4．Hotelling 变换的好处

用这种变换来压缩图像数据，是在均方误差最小下的最佳逼近。

$$Y' = \boldsymbol{A}_k\left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{m}_x\right) \qquad K\times 1 \text{ 矩阵}$$

式中，$\boldsymbol{A}_k$ 为取入最大的前 K 个特征向量组成变换核矩阵。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{11} & \mathbf{e}_{12} & \cdots & \mathbf{e}_{1N} \\ \mathbf{e}_{21} & \mathbf{e}_{22} & \cdots & \mathbf{e}_{2N} \\ \mathbf{e}_{k1} & \mathbf{e}_{k2} & \cdots & \mathbf{e}_{kN} \\ \mathbf{e}_{N1} & \mathbf{e}_{N2} & \cdots & \mathbf{e}_{NN} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{前 } K \text{ 个特征向量} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{后 } N\text{–}K \text{ 个特征向量，其对应入值较小} \end{array}$$

$$\boldsymbol{A}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{11} & \mathbf{e}_{12} & \cdots & \mathbf{e}_{1N} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{e}_{k1} & \mathbf{e}_{k2} & \cdots & \mathbf{e}_{kN} \end{pmatrix}$$

原图像估值 $\rightarrow \hat{X} = \boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}} Y_k' + \boldsymbol{m}_x \qquad Y_k' = \begin{pmatrix} Y' \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} N \times 1$ 矩阵

由 $\hat{X}$ 与 X 的均方误差近似为

$$\varepsilon \approx \sum_{i=k+1}^{N} \lambda_i$$

$\because \lambda$是按大小排列，

$\therefore k$+1 至 N（N^2）的λ_i 是非常小的。