拓展资源 4.1 知 识 要 点

1．连续傅里叶变换

设函数 $f(x,y)$ 是连续可积的，且 $F(u,v)$ 可积，则二维函数（2-Dimensional Function）的傅里叶变换对为

$$F\{f(x,y)\}=F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(ux+vy)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.1}$$

$$F^{-1}\{F(u,v)\}=f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(u,v)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(ux+vy)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{4.2}$$

式中，u、v 是频率变量。二维函数（2-Dimensional Function）的傅里叶频率谱、相位谱和能量谱为

傅里叶频率谱 $$|F(u,v)|=\left[R^2(u,v)+I^2(u,v)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.3}$$

相位谱 $$\phi(u,v)=\arctan\frac{I(u,v)}{R(u,v)} \tag{4.4}$$

能量谱 $$E(u,v)=R^2(u,v)+I^2(u,v) \tag{4.5}$$

2．离散傅里叶变换

函数 $f(x,y)$ 的二维离散傅里叶变换（DFT）对由式（4.6）、式（4.7）定义：

$$F(u,v)=\frac{1}{\sqrt{MN}}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} \tag{4.6}$$

式中，$u=0,1,\cdots,N-1$；$v=0,1,\cdots,N-1$。

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{MN}}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} \tag{4.7}$$

式中，$x=0,1,\cdots,N-1$；$y=0,1,\cdots,N-1$；u、v 是频率变量。二维函数（2-D Function）的离散傅里叶频率谱、相位谱和能量谱为

傅里叶频率谱 $$|F(u,v)|=\sqrt{R^2(u,v)+I^2(u,v)}$$

相位谱 $$\phi(u,v)=\arctan I(u,v)/R(u,v)$$

能量谱 $$E(u,v)=|F(u,v)|^2=R^2(u,v)+I^2(u,v)$$

一幅图像经过傅里叶变换，在傅立叶频谱图上就会看到明暗不一的亮点，实际上是图像上某一点与邻域点差异的强弱，即梯度的大小，也是该点频率的大小。通常情况下，图像中的低频部分对应低梯度的点，图像中的高频部分对应高梯度的点。一般来讲，梯度大则该点的亮度强，否则该点的亮度弱。这样通过观察傅立叶变换后的频谱图，就可以看出图像的能量分布，如果频谱图中暗的点数多，那么实际图像是比较柔和的，因为各点与邻域差异都不大，梯度相对较小，反之，如果频谱图中亮的点数多，那么实际图像一定是尖锐的，边界分

明且边界两边像素差异较大。对频谱移频到原点以后，可以看出图像的频率分布是以原点为圆心，对称分布的。

3．傅里叶变换的性质

1）可分离性

式（4.6）和式（4.7）可以写成如下的分离形式。

$$F(u,v)=\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{x=0}^{M-1}e^{-j2\pi\frac{ux}{M}}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi\frac{vy}{N}} \tag{4.8}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{u=0}^{M-1}e^{-j2\pi\frac{ux}{M}}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{-j2\pi\frac{vy}{N}} \tag{4.9}$$

2）平移性质

如果$F(u,v)$的频率变量u，v各移动了u_0，v_0距离，$f(x,y)$的变量x，y各移动了x_0，y_0距离，则傅里叶变换对有下面的形式。

$$f(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(ux_0+v_0y)/N}\Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0) \tag{4.10}$$

$$f(x-x_0,y-y_0)\Leftrightarrow F(u,v)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(ux_0+vy_0)/N} \tag{4.11}$$

因此，傅里叶变换的频率域平移性质表明了函数与一个指数项相乘等于将变换后的频率域中心（如式（4.10））移到新的位置，从式（4.11）可知，对$f(x,y)$的平移将不改变频率谱的幅值（amplitude）。

3）周期性和共轭对称性

傅里叶变换对和反变换均以N为周期，即

$$F(u,v)=F(u+N,v)=F(u,v+N)=F(u+N,v+N) \tag{4.12}$$

它表明，尽管$F(u,v)$有无穷多个u和v的值重复出现，但只需根据在任一个周期里的N个值就可以从$F(u,v)$得到$f(x,y)$。

4）旋转性质

借助极坐标变换$x=r\cos\theta$，$\mathrm{y}=r\sin\theta$，$u=w\cos\phi$，$v=w\sin\phi$，将$f(x,y)$和$F(u,v)$转换为$f(r,\theta)$和$F(w,\phi)$。

$$f(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)$$

$$f(r\cos\theta,r\sin\theta)\Leftrightarrow F(w\cos\phi,w\sin\phi)$$

经过变换得

$$f(r,\theta+\theta_0)\Leftrightarrow F(w,\phi+\theta_0) \tag{4.13}$$

式（4.13）表明，对$f(x,y)$旋转一个角度θ_0对应于将其傅里叶变换$F(u,v)$也旋转相同的角度θ_0。$F(u,v)$到$f(x,y)$也是一样。

5）分配律

根据傅里叶变换对的定义可得到

$$F\{f_1(x,y)+f_2(x,y)\}=F\{f_1(x,y)\}+F\{f_2(x,y)\} \tag{4.14}$$

式（4.14）表明傅里叶变换和反变换对加法满足分配律，但对乘法则不满足，一般有：

$$F\{f_1(x,y)\cdot f_2(x,y)\}\neq F\{f_1(x,y)\}\cdot F\{f_2(x,y)\} \tag{4.15}$$

6）尺度变换

尺度变换描述了函数自变量的尺度变化对其傅里叶变换的作用。下面考察 $f(x, y)$ 的傅里叶变换：

$$af(x,y) \Leftrightarrow aF(u,v) \tag{4.16}$$

可以证明式（4.17）成立：

$$f(ax,by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|}F\left(\frac{u}{a},\frac{v}{b}\right) \tag{4.17}$$

如果系数 a 大于 1，函数 $f(x)$ 在水平方向收缩，由式（4.17）可知傅里叶变换的幅值将缩小 a 倍，同时在水平方向扩展 a 倍；如果系数 a 小于 1，则作用相反。

7）平均值

对一个 2-D 离散函数，其平均值可用式（4.18）表示：

$$\overline{f}(x,y) = \frac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \tag{4.18}$$

当正反变换采用相同的标度数 $1/N$ 时，傅里叶变换域原点的频率谱分量为

$$\begin{aligned} F(0,0) &= \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}(x_0+y_0)} \\ &= N\left[\frac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\right] \\ &= N\overline{f}(x,y) \end{aligned} \tag{4.19}$$

两式比较可得

$$\overline{f}(x,y) = \frac{1}{N}F(0,0) \tag{4.20}$$

8）卷积定理

卷积定理是线性系统分析中最重要的一条定理。下面先考虑 1-D 傅里叶变换：

$$f(x)\times g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(x-z)\mathrm{d}z \Leftrightarrow F(u)G(u) \tag{4.21}$$

同样二维情况也是如此

$$f(x,y)\times g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)G(u,v) \tag{4.22}$$

4．其他离散变换

1）离散余弦变换

函数 $f(x,y)$ 的二维离散余弦变换（DCT）由式（4.23）定义：

$$\begin{aligned} F(0,0) &= \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \\ F(0,v) &= \frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cdot\cos\frac{(2y+1)v\pi}{2N} \\ F(u,0) &= \frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cdot\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N} \\ F(u,v) &= \frac{2}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cdot\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\cdot\cos\frac{(2y+1)v\pi}{2N} \end{aligned} \tag{4.23}$$

式（4.23）是正变换公式。式中，$f\left(x,y\right)$ 是空间域二维向量之元素；$x,y=0,1,2,\cdots,N-1$；$F\left(u,v\right)$ 是变换系数阵列之元素。式中表示的阵列为 $N\times N$ 。

二维离散余弦反变换由式（4.24）表示。

$$\begin{aligned} f\left(x,y\right)=&\frac{1}{N}F\left(0,0\right)+\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{v=1}^{N-1}F\left(0,v\right)\cos\frac{\left(2y+1\right)v\pi}{2N}+\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{u=1}^{N-1}F\left(u,0\right)\cos\frac{\left(2x+1\right)u\pi}{2N} \\ &+\frac{2}{N}\sum_{u=1}^{N-1}\sum_{v=1}^{N-1}F\left(u,v\right)\cos\frac{\left(2x+1\right)u\pi}{2N}\cdot\cos\frac{\left(2y+1\right)v\pi}{2N} \end{aligned} \tag{4.24}$$

式中的符号意义同正变换式一样。式（4.23）和式（4.24）是离散余弦变换的解析式定义。更为简洁的定义方法是采用矩阵式定义，则二维离散余弦变换的矩阵定义式可写成如下形式。

$$\begin{aligned} \left(F\left(u,v\right)\right)&=\left(A\right)\left(f\left(x,y\right)\right)\left(A\right)' \\ \left(f\left(x,y\right)\right)&=\left(A\right)'\left(F\left(u,v\right)\right)\left(A\right) \end{aligned} \tag{4.25}$$

2）沃尔什变换

函数 $f\left(x,y\right)$ 的二维离散沃尔什变换由式（4.26）定义：

$$W\left(u,v\right)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f\left(x,y\right)\prod_{i=1}^{n-1}\left(-1\right)^{\left[b_i(x)b_{(n-i-1)}(u)+b_i(y)b_{n-i-1}(v)\right]} \tag{4.26}$$

其变换核为

$$g\left(x,y,u,v\right)=\frac{1}{N}\prod_{i=1}^{n-1}\left(-1\right)^{\left[b_i(x)b_{(n-i-1)}(u)+b_i(y)b_{n-i-1}(v)\right]} \tag{4.27}$$

反变换为

$$f\left(x,y\right)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}W(u,v)\prod_{i=1}^{n-1}\left(-1\right)^{\left[b_i(x)b_{(n-i-1)}(u)+b_i(y)b_{n-i-1}(v)\right]} \tag{4.28}$$

反变换核为

$$h\left(x,y,u,v\right)=\frac{1}{N}\prod_{i=1}^{n-1}\left(-1\right)^{\left[b_i(x)b_{(n-i-1)}(u)+b_i(y)b_{n-i-1}(v)\right]} \tag{4.29}$$

沃尔什变换也具有可分离性，即

$$g\left(x,y,u,v\right)=\left[\frac{1}{\sqrt{N}}\prod_{i=1}^{n-1}\left(-1\right)^{b_i(x)b_{(n-i-1)}(u)}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{N}}\prod_{i=1}^{n-1}\left(-1\right)^{b_i(y)b_{n-i-1}(v)}\right] \tag{4.30}$$

二维离散沃尔什变换的矩阵表示形式为

$$\boldsymbol{W}=\frac{1}{N^2}\boldsymbol{GfG} \tag{4.31}$$

式中 $\boldsymbol{G}$ 为沃尔什变换核矩阵。反变换的矩阵形式为

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{HWH} \tag{4.32}$$

3）沃尔什—哈达玛变换

当变换阶数满足 $N=2^n$，沃尔什—哈达玛变换有如下比较简单的矩阵表达式。

$$\boldsymbol{H}_1 = [1]$$

$$\boldsymbol{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{H}_4 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_2 & \boldsymbol{H}_2 \\ \boldsymbol{H}_2 & -\boldsymbol{H}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_N = \boldsymbol{H}_{2^n} = \boldsymbol{H}_2 \otimes \boldsymbol{H}_{2^{n-1}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{2^{n-1}} & \boldsymbol{H}_{2^{n-1}} \\ \boldsymbol{H}_{2^{n-1}} & -\boldsymbol{H}_{2^{n-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{\frac{N}{2}} & \boldsymbol{H}_{\frac{N}{2}} \\ \boldsymbol{H}_{\frac{N}{2}} & -\boldsymbol{H}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

哈达玛矩阵的最大优点在于它具有简单的递推关系，即高阶矩阵可用两个低阶矩阵的克罗内克积（Kronecker Product）求得。因此常采用哈达玛排列定义的沃尔什变换。由哈达玛矩阵的特点可知，沃尔什—哈达玛变换的本质上，是将离散图像的各项值的符号按一定规律改变后，进行加减运算。因此，它比采用复数运算的 DFT 和采用余弦运算的 DCT 要简单得多。