拓展资源 3.1　知 识 要 点

1．点运算

点运算就是对图像的每个像素点的灰度值按一定的映射关系进行运算。根据映射关系的不同点运算可以分为线性点运算和非线性点运算两类。

1）线性点运算

线性点运算是指输入图像的灰度级与目标图像的灰度级呈线性关系。线性点运算的灰度变换函数形式可以采用线性方程描述，即

$$s = ar + b \tag{3.1}$$

式中，r 为输入点的灰度值；s 为相应输出点的灰度值。

2）非线性点运算

常见的非线性灰度变换为对数变换和幂次变换。

对数变换的一般表达式为

$$s = c\log(1 + r) \tag{3.2}$$

式中，c 是一个常数，并假设 $r \geqslant 0$。此种变换使一窄带低灰度输入图像值映射为一宽带输出值。

幂次变换的一般形式为

$$s = c\,r^{\gamma} \tag{3.3}$$

式中，c 和 r 为正常数。$r > 1$ 的值和 $r < 1$ 的值产生的曲线有相反的效果。当 $c = r = 1$ 时，将简化为线性变换。

2. 代数运算与逻辑运算

1）代数运算

代数运算是指对两幅或两幅以上输入图像进行点对点的加、减、乘、除运算而得到目标图像的运算。图像处理代数运算的 4 种基本形式分别如下。

$$C(x,y) = A(x,y) + B(x,y) \tag{3.4}$$

$$C(x,y) = A(x,y) - B(x,y) \tag{3.5}$$

$$C(x,y) = A(x,y) \times B(x,y) \tag{3.6}$$

$$C(x,y) = A(x,y) \div B(x,y) \tag{3.7}$$

式中，$A(x,y)$ 和 $B(x,y)$ 为输入图像表达式；$C(x,y)$ 为输出图像表达式。

2）逻辑运算

图像逻辑运算有与、或、非等，其主要针对二值图像。

3. 几何运算

在图像处理的领域，通过改变像素位置进行的图像形状的变化，称为几何变换。

图像几何运算的一般定义为

$$g(x,y) = f(u,v) = f(p(x,y), q(x,y)) \tag{3.8}$$

式中，$u = p(x,y)$，$v = q(x,y)$ 唯一地描述了空间变换，即将输入图像 $f(u,v)$ 从 $u-v$ 坐标系

变换为 $x-y$ 坐标系的输出图像 $g(x,y)$ 。

从变换性质来分，几何变换可以分为图像的位置变换（平移、镜像、旋转）、形状变换（放大、缩小）及图像的复合变换等。一个几何运算需要两个独立的算法。首先，需要一个算法来定义空间变换，用它描述每个像素如何从其初始位置移动到终止位置，即每个像素的运动。其次，需要一个算法用于灰度级的插值。

1）图像的平移

如图 3.1 所示，设图像空间的 x ，y 正方向分别为向右、向下，初始坐标为(x_0 , y_0)的点经过平移 $(\Delta x,\Delta y)$ 后，其坐标变为 (x_1,y_1) ，则图像平移的变换公式（以矩阵的形式表示）为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3.9)$$

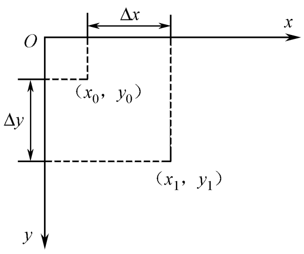


图 3.1　图像的平移

2）图像的镜像

图像的镜像（Image Mirror）是指原始图像相对于某一参照面旋转 180°的图像。镜像变换可以分为水平对称、垂直对称等多种变换。对称变换后，图像的宽和高不变。

设原始图像的宽为 w ，高为 h ，原始图像中的点为 (x_0,y_0) ，对称变换后的点为 (x_1,y_1) 。

（1）水平对称（相对于 y 轴）

水平对称的变换公式为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & w \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3.10)$$

（2）垂直对称（相对于 x 轴）

垂直对称的变换公式为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3.11)$$

3）图像的旋转

一般情况下图像的旋转变换是指以图像的中心为原点，将图像上的所有像素都旋转同一个角度的变换。

设原始图像的任意点 $A_0(x_0,y_0)$ 经旋转角度 β 以后到新的位置 $A(x,y)$ ，为表示方便，采用极坐标形式表示，原始的角度为 α ，如图 3.2 所示。

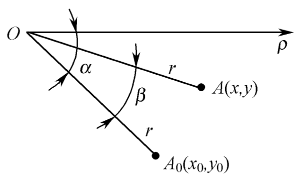


图 3.2 图像的旋转

图像的旋转变换也可以用矩阵形式表示如下。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

图像旋转之后也可以根据新点求解原始点的坐标，其矩阵表示形式如下。

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

4）图像的缩放

数字图像的比例缩放是指将给定的图像在 x 方向和 y 方向按相同的比例 a 缩放，从而获得一幅新的图像，又称为全比例缩放。如果 x 方向和 y 方向缩放的比例不同，则图像的比例缩放会改变原始图像像素间的相对位置，产生几何畸变。设原始图像中的点 $A_0(x_0, y_0)$ 比例缩放后，在新图中的对应点为 $A_1(x_1, y_1)$，则 $A_0(x_0, y_0)$ 和 $A_1(x_1, y_1)$ 之间坐标关系可表示如下。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = ax_0 \\ y_1 = ay_0 \end{cases} \tag{3.15}$$

在式（3.15）所表示的比例缩放中，若 $a>1$，则图像被放大；若 $a<1$，则图像被缩小。

若比例缩放所产生的图像中的像素在原图像中没有相对应的像素点时，就需要进行灰度级的插值运算，一般有以下两种插值处理方法。

（1）直接赋值为和它最相近的像素灰度值，这种方法称为最近邻插值法，该方法简单、计算量小，但很可能会产生马赛克现象。

（2）通过其他数学插值算法来计算相应像素点的灰度值，这类方法处理效果好，但运算量会有所增加。

5）灰度重采样

图像灰度重采样过程可通过下面步骤完成，首先对输出采样栅格使用逆映射，将结果映射到输入栅格，由此产生的结果为一重采样栅格。该栅格表明了对输入图像重采样的位置。然后对输入图像在这些点进行采样，并将采样值赋给相应的输出像素。这就是向后映射法，如图 3.3 所示。

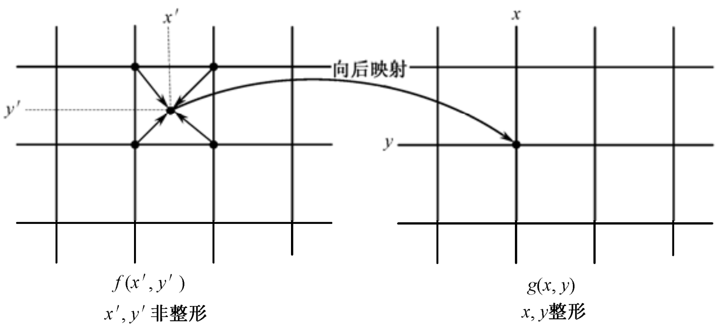
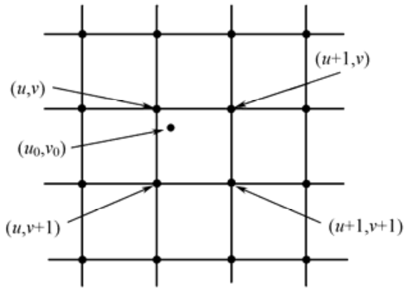
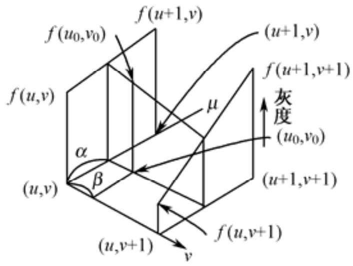


图 3.3　向后映射法

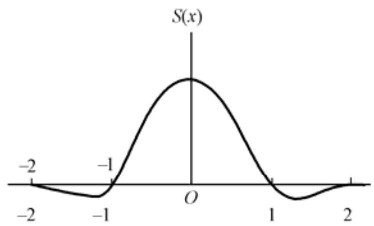
常用的灰度插值方法有 3 种：最近邻插值法、双线性插值法和 3 次内插法，如图 3.4 所示。



（a）最近邻插值法



（b）双线性插值法



（c）sin（πx）/（πx）的3次内插法

图 3.4　灰度插值方法